

FRITZ EMDE

TAFELN ELEMENTARER FUNKTIONEN

TABLES OF ELEMENTARY FUNCTIONS



TABLES OF ELEMENTARY FUNCTIONS

BY

FRITZ EMDE

DR.-ING. E. H., DR. TECHN. E. H.
PROF. EMER. OF ELECTROTECHNICS IN THE TECHNICAL COLLEGE
OF STUTTGART

SECOND EDITION

WITH 83 FIGURES



1948

PUBLISHED BY B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
LEIPZIG

TAFELN ELEMENTARER FUNKTIONEN

VON

FRITZ EMDE

DR.-ING. E. H., DR. TECHN. E. H.
PROF. DER ELEKTROTECHNIK I. R. AN DER TECHN. HOCHSCHULE
IN STUTTGART

ZWEITE AUFLAGE

MIT 83 TEXTFIGUREN



1948

B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
LEIPZIG

Lin.-Nr. 302 · 1118/47—458/47

Copyright 1940 by B. G. Teubner Verlagsgesellschaft in Leipzig
Printed in Germany

Offsetdruck: (M 193) Röderdruck, Leipzig C1, Gerichtsweg 5—7 / —20369

Vorwort zur ersten Auflage

Fast alle Tafeln der Kreisfunktionen sind bisher von Astronomen oder Geodäten herausgegeben worden. Andere hatten ein Mitbenutzungsrecht daran. Die vorliegende Zusammenstellung von Zahlentafeln soll eine Hilfe und Erleichterung bei den gewöhnlichen technischen und physikalischen Rechnungen gewähren. Daraus ergeben sich an die Genauigkeit geringere, an die Vielseitigkeit höhere Ansprüche. Dazu war es ferner erforderlich, den Gang der Funktionen durch viele graphische Darstellungen übersichtlich zu machen, ein Hilfsmittel, dessen sich Astronomen und Geodäten nur wenig zu bedienen pflegen und das daher auch in den „Logarithmentafeln“ fehlt.

Ingenieure und Physiker multiplizieren und dividieren gewöhnlich nicht mit der Logarithmentafel, sondern meist mit dem logarithmischen Rechenschieber und nur in den seltenen Fällen, wo die Genauigkeit des Rechenschiebers nicht genügt, mit der Rechenmaschine, wenn eine zur Verfügung steht. Der Rechenschieber ist auch das geeignetste Hilfsmittel für die Interpolation. Die vorliegenden Tafeln sind deshalb dafür eingerichtet. Sie setzen voraus, daß der Benutzer geübt ist, die Zahlenwerte vom Rechenschieber abzulesen.

Manche der hier gebotenen Tafeln, wie die der Quadrate, Kuben, Reziproken, Wurzeln, sind nicht unbedingt notwendig, machen aber das Zahlenrechnen bequemer. Vor allem der Bequemlichkeit dient es auch, daß bei den Winkelfunktionen Tafeln für drei (dezimal zu unterteilende) Winkleinheiten geboten werden: den Grad, den rechten Winkel (den Quadranten) und den Radianen. Damit man den rechten Winkel auch im komplexen Gebiet ohne Unbequemlichkeit als Einheit benutzen kann, werden Tafeln für „imaginäre rechte Winkel“ gegeben, d. h. Tafeln der Exponential- und Hyperbelfunktionen von $\frac{\pi}{2}x$.

Wenn von Funktionen die Rede ist, pflegt man nicht an die Lösungen von algebraischen Gleichungen höheren Grades zu denken. Bei den Anwendungen ist es aber oft wichtig, die Lösung einer Gleichung n -ten Grades als n -wertige Funktion ihrer Vorzahlen darstellen zu können, mindestens aber zu wissen, ob eine kleine Änderung einer Vorzahl eine Lösung verhältnismäßig stark oder nur schwach beeinflusst. Man denke etwa an die Berechnung der Frequenz und der Dämpfung von Eigenschwingungen. Deswegen bringt unser Buch Hilfen für die Lösung von algebraischen Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.

Ferner wird man Tafeln oder graphische Darstellungen für einige besondere Funktionen finden, die in der Physik und Technik auftreten. Die hier gegebene Tafel der Logarithmen ist natürlich nicht für die logarithmische Rechnung bestimmt, bei der die Logarithmen nur ein Rechenbehelf sind, sondern für die Fälle, wo die Logarithmen selbst gebraucht werden. Dafür werden sie, wie auch sonst die Funktionswerte in diesem Buch, mit einer bestimmten relativen Genauigkeit angegeben.

Der Argumentschritt ist entweder 1 oder 2 oder 5 Einheiten der letzten Stelle. Die eingedruckten Differenzen sind aber durchweg auf den Schritt 1 umgerechnet. Mit diesen Differenzen rechnet man demnach so, als ob der Schritt überall 1 wäre. Der Schritt ist so groß gewählt, daß der größte Fehler, der durch die lineare Interpolation entstehen kann, unter $0,5 \cdot 10^{-4}$ des Funktionswertes bleibt. Näheres darüber im Schlußabschnitt. Durch diese Vergrößerung des Schrittes schrumpfen die Tafeln stark zusammen, so daß auf kleinem Raum für viele Funktionen die Werte geboten werden können. Die Tafeln sind nicht mehr überdehnt, sondern schmiegen sich den Erfordernissen jeder Funktion an.

Dieses Buch kann nicht nebenbei auch noch eine umfassende Formelsammlung enthalten. Nur für die Kreis- und Hyperbelfunktionen sind Formeln zusammengestellt, ferner für die Näherungsrechnungen mit Polynomen. Am Schluß des Buches (S. 174) werden Formelsammlungen nachgewiesen.

Die ersten 78 Seiten des Jahnke-Emde von 1933 sind mit einigen Änderungen in dieses Buch übernommen worden. Daß nicht der gesamte Stoff im Jahnke-Emde vereinigt geblieben, sondern auf zwei voneinander unabhängige Bücher verteilt worden ist, war notwendig und zweckmäßig. Notwendig, weil wegen der eingedruckten Differenzen ein größerer Satzspiegel und kleinere Ziffern verwendet werden mußten. Zweckmäßig, weil das vorliegende Buch vielen nützlich sein wird, die mit dem Inhalt des Jahnke-Emde von 1938 niemals in Berührung kommen. Dazu gehören auch die meisten Studenten der Technischen Hochschulen. Vielleicht erweist sich unser Buch als geeignet, ihre mathematische Ausbildung zu unterstützen. Die vielen maßstäblichen Figuren, unter denen manche dieselbe Funktion in verschiedenen Maßstäben vorführen, werden die Vorstellung von den Funktionen deutlicher machen. Wer die Schrittänderung bei den einzelnen Funktionen aufmerksam verfolgt, wird manchen Einblick gewinnen.

Leidenschaftliche Rechner sind eine Seltenheit. Ausgedehnte Rechnungen stellen an die Aufmerksamkeit und Ausdauer harte Forderungen. Daher scheuen die meisten solche Rechnungen. Nur ein starkes Interesse am Ergebnis hilft die Scheu überwinden. Wenn die Rechnung aber erst einmal begonnen worden ist, zeigt sich meist, daß sie gar nicht so widerwärtig ist, wie man geglaubt hatte. Möchte sich beim Gebrauch der vorliegenden Tafeln dieser Eindruck verstärken. Physik und Technik erheischen, daß viel gerechnet wird. Wenn zu wenig gerechnet wird, leiden sie Schaden.

Bei der Ausarbeitung dieses Buches ist mir in reichem Maße Hilfe zuteil geworden. Herr Prof. G. W. O. Howe, D. Sc., (Glasgow), hat in gewohnter Hilfsbereitschaft noch einen großen Teil des Textes ins Englische übersetzt. An der Übersetzung des Restes haben mitgewirkt Herr Siegfried Kerridge (Stuttgart), Frl. Dora Pfisterer (Stuttgart), Herr Dr. Gustaf Schrey (Stuttgart), Frl. H. J. Zeller (Tübingen). Herr L. J. Comrie, Ph. D., (London) hat mir durch briefliche Beratung bereitwillig seine große Erfahrung und Sachkenntnis im Aufbau von Tafelsammlungen zur Verfügung gestellt. Viel Rechenarbeit haben Herr Erich Heidelbauer (Stuttgart) und Herr Kerridge geleistet. Die Zeichnungen sind von Herrn Dipl.-Ing. Rudolf Benz und Herrn Kerridge angefertigt worden. Die Hauptlast der mühsamen Durchsicht der Probeabzüge hat Herr Kerridge getragen. Eine Schlußkorrektur hat Herr Prof. Dr. Richard Feldtkeller mitgelesen. Herr Kerridge hat auch die schwierige Aufgabe übernommen, die Tafeln, Figuren, Formeln und den Text über die Seiten zu verteilen. Allen diesen freundlichen Helfern danke ich herzlich für ihre sorgfältige Mitarbeit und wertvolle Beratung.

Aufrichtigen Dank schulde ich dem Verlag von B. G. Teubner, insbesondere Herrn Dr. Heisig, für bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche; ferner der Setzerei und Druckerei von B. G. Teubner für schöne Ausführung und große Geduld bei der Anfertigung des schwierigen Satzes und Druckes.

Stuttgart, im August 1940.

Seestr. 114

Fritz Emde

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage der Tafeln elementarer Funktionen (ein fast unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1940) sollte im Jahre 1944 erscheinen. Aber die gesamte fertig gedruckte Auflage wurde durch Kriegsereignisse in der Buchbinderei vernichtet. Erst jetzt wird es möglich, den Druck nach dem damaligen Manuskript vorzunehmen.

Pretzfeld, Oberfranken, im Januar 1948.

Fritz Emde

Preface to the First Edition

Hitherto almost all tables of circular functions have been edited by astronomers and geodesians. Others derived the benefit therefrom. The present compilation of numerical tables is intended to help and facilitate ordinary technical and physical computations. Hence they lay less claim to accuracy, but all the more to comprehensiveness. It was therefore also necessary to make the course of the functions clear by means of many graphic representations, an expedient rarely used by astronomers and geodesians, and consequently missing in the "Logarithmic Tables".

For multiplication and division engineers and physicists do not in general use the logarithmic table, but mostly the logarithmic slide-rule; only in those rare cases in which the slide-rule is not sufficiently accurate, do they use a calculating machine, if available. The slide-rule is also the most suitable means for interpolation. These tables are therefore arranged with a view to this. It is taken for granted that the reader is practised in reading numerical values from the slide-rule.

Many of the tables herein presented, such as the squares, cubes, reciprocals, and roots are not absolutely necessary, but make numerical computation easier. For the sake of convenience with the functions of angles tables are given for three angle units (in decimal subdivision): the degree, the right angle (the quadrant), and the radian. To enable the use of the right angle as a unit without inconvenience in the complex domain, tables for "imaginary right angles" are given, that is to say, tables of the exponential and hyperbolic functions of $\frac{\pi}{2}x$.

In speaking of functions the solutions of algebraic equations of a higher degree are not usually considered. In practice, however, it is often important to be able to represent the solution of an equation of the n^{th} degree as an n -valued function of its coefficients, or at least to know if a slight variation of a coefficient would have a comparatively great or only a slight influence on the solution. Such a case might arise in calculating the frequency and damping of natural oscillations. Our book therefore offers assistance for the solution of algebraic equations of the second, third and fourth degree.

For some special functions which occur in physics and technics tables or graphical representations will also be found.

The table of logarithms given here is of course not intended for logarithmic computations, in which logarithms are only a help in computing, but for those cases in which the logarithms are required. For this purpose they as well as the values of other functions in this book are given with a certain *relative* accuracy.

The interval in the argument is either 1 or 2 or 5 units of the last figure. The differences printed are calculated throughout for interval 1. With these differences one therefore calculates as if the interval were always 1. The interval is chosen so great that the maximal error which might arise by linear interpolation does not exceed $0.5 \cdot 10^{-4}$ of the function value. Further details on this point are to be found in the last chapter. This increase of the interval reduces the tables considerably, so that the values for many functions can be given in a small space. The tables are not overstretched, but adapted to the demand of each function.

This book cannot also contain an extensive collection of formulae. Only for circular and hyperbolic functions and for the approximate calculations with polynomials have formulae been compiled. At the end of the book (p. 174) collections of formulae are cited.

The first 78 pages of the 1933 Jahnke-Emde, with some alterations, have been included in this book. It was not possible or advantageous to retain the entire material within the Jahnke-Emde, but to divide it into two independent books: impossible, as on account of the differences inserted smaller figures and a larger type area had to be

used; not advantageous, because this book will be useful to many who will never refer to the 1938 Jahnke-Emde. The latter also include most of the students of Technical Colleges. Our book may prove a help in their mathematical instruction. The numerous figures to scale, of which many show the same function in various scales, will make the conception of functions clearer. An attentive study of the variation of the interval in the several functions will lead to greater insight.

Enthusiastic computers are rare. Extensive computations are a hard tax on attention and perseverance. Most people therefore avoid such computations. Only a very great interest in the result can overcome such an aversion. But when the computation has once been begun it usually becomes evident that it is not as tiresome as was supposed. It is to be hoped that the use of these tables will intensify this impression. Physics and technics demand a great deal of calculation. Insufficient calculation is detrimental to both.

Valuable help was rendered to me in the elaboration of this book. A great part of the text was translated into English by Professor G. W. O. Howe, D. Sc., (Glasgow) with his usual readiness to help. Mr. Siegfried Kerridge (Stuttgart), Miß Dora Pfisterer (Stuttgart), Dr. Gustaf Schrey (Stuttgart), and Miß H. J. Zeller (Tübingen) assisted in the translation of the remaining part. By correspondence Mr. L. J. Comrie, Ph. D., (London) readily placed his great experience and expert knowledge of the arrangement of collections of tables at my disposal. A great deal of computation was undertaken by Mr. Erich Heidelbauer (Stuttgart) and Mr. Kerridge. The drawings were made by Dipl.-Ing. Rudolf Benz and Mr. Kerridge. The chief work of the laborious reading of the proofs was done by Mr. Kerridge. The final corrections were read with Professor Dr. Richard Feldtkeller. Mr. Kerridge also undertook the difficult task of arranging the tables, figures, formulae, and the text on the pages. My warmest thanks to all these kind helpers for their careful co-operation and valuable advice.

Hearty thanks are also due to B. G. Teubner, Publisher, especially to Dr. Heisig for his ready consent to my wishes; also to the compositors and printers of B. G. Teubner for the fine execution and great patience in the difficult composing and printing of the type.

Stuttgart, August 1940.

Seestr. 114

Fritz Emde

Preface to the Second Edition

The Second Edition of the Tables of Elementary Functions (an almost unchanged reprint of the First Edition of 1940) should have been issued in 1944. But after having been printed all copies were destroyed at the book-binder's by bombs and fire during the war. It is only now possible to reprint this edition from the same manuscript.

Pretzfeld, January 1948.

Fritz Emde

Inhaltsverzeichnis

Die schräg gedruckten Zahlen geben die Seiten für die Zahlentafeln an

I. Potenzen	1	X. Besondere Funktionen	116
$x^2, \dots, x^{15}$	2	e^{-x^2}	116
$x^{0,05}, \dots, x^{1,00}$	8	Plancksche Strahlungsfunktion ...	117, 118
Quadrate und Kehrwerte	12	Quellenfunktionen der Wärme- leitung	119
Kuben und Kehrwerte der Quadrate ..	14	Die Langevinsche Funktion	
Potenzen von 2, 3, 5, 7, 11	17	$\text{Etg } x - \frac{1}{x}$	123
Wurzeln	18	$\text{Sin } x \sin x, \text{ Sin } x \cos x, \text{ Cos } x \sin x,$ $\text{Cos } x \cos x$	124
II. Faktorentafel	20	$q \text{ tg } q, q \text{ ctg } q$ für $q = 0,0 \dots 18,0^\circ$..	125
Fakultäten	24	Erste Wurzeln der Gleichungen	
Vielfache von $M, \frac{1}{M}, \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}$	25	$q \text{ tg } q^\perp = \text{const}; \frac{\text{tg } q^\perp}{q} = \text{const}.$..	126
III. Hilfstafeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen	26	Höhere Wurzeln derselben Gleichungen	128
1. Kehrwerte	26, 27	XI. Transzendente Gleichungen ...	130
2. Quadratwurzeln	27, 28	XII. Kreis- und Hyperbelfunktionen einer komplexen Veränderlichen ...	132
3. Rechtwinklige und Polarkoordinaten	29, 30	Sinusrelief	136
4. Vektoraddition	32, 32	Arcus sinus	138
IV. Quadratische Gleichungen	34, 36	Tangensrelief	140
V. Kubische Gleichungen	38, 44	Arcus tangens	142
VI. Gleichungen 4. Grades	49	XIII. Die Funktion $\frac{\text{tg}(i^{0,5}r)}{i^{0,5}r}$	146, 150
$x^4 + \dots + D = 0$	49	Stromverdrängung	147
$u^4 + \dots \pm 1 = 0$	57, 71	XIV. Tschebyschewsche Polynome ..	156
$v^4 + \beta v^2 + \gamma v \pm 1 = 0$	63, 67	XV. Die Funktion z^z	158
VII. Winkel in Graden	73, 77	XVI. Näherungsrechnungen mit Polynomen	159
Formeln für Kreisfunktionen	73	Potenzen von Polynomen mit zwei Veränderlichen	161
$\sqrt{2} \sin x, \sqrt{2} \cos x$	78	Binomischer Satz	162, 162
$10^x = \text{num } x$	79	XVII. Einige Bemerkungen über Zahlenrechnungen	163
VIII. Winkel in Rechten	80	Einige oft gebrauchte Konstanten .	172
$\sqrt{2} \sin x, \sqrt{2} \cos x$	87	Hilfsmittel für den Rechner	173
IX. Winkel in Radianen	90, 98	Verzeichnis von Tafeln der elemen- taren Transzendenten	175
Formeln für Hyperbelfunktionen ...	90	Mechanische Maßsysteme	177
$e^{1/2}$	95	Sachverzeichnis	178
Logarithmen	114		

Contents

The obliquely printed page numbers refer to the tables

I. Powers	1	X. Special functions	116
$x^2, \dots, x^{15}$	2	e^{-x^2}	116
$x^{0.05}, \dots, x^{1.00}$	8	Planck's radiation function	117, 118
Squares and reciprocals	12	Source functions of heat conduc- tion	119
Cubes and Reciprocals of the Squares	14	Langevin's function $\mathcal{E}tg\,x - \frac{1}{x}$ $= ctgh\,x - \frac{1}{x}$	123
Powers of 2, 3, 5, 7, 11	17	$\mathcal{S}in\,x\,sin\,x, \mathcal{S}in\,x\,cos\,x, \mathcal{C}os\,x\,sin\,x,$ $\mathcal{C}os\,x\,cos\,x$	124
Roots	18	$\varrho\,tg\,\varrho, \varrho\,ctg\,\varrho$ for $\varrho = 0, 0 \dots 18, 0$	125
II. Factor table	20	First roots of the equations $\varrho\,tg\,\varrho$ $= const, \frac{tg\,\varrho}{\varrho} = const$	126
Factorials	24	Higher roots of these equations ...	128
Multiples of $M, \frac{1}{M}, \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}$	25	XI. Transcendental equations	130
III. Auxiliary tables for computation with complex numbers	26	XII. Circular and hyperbolic func- tions of a complex variable	132
1. Reciprocals	26, 27	Sine relief	136
2. Square roots	27, 28	Inverse sine	138
3. Rectangular and polar co-ordi- nates	29, 30	Tangent relief	140
4. Vector addition	32, 32	Inverse tangent	142
IV. Quadratic equations	34, 36	XIII. The function $\frac{tg(i^{0.5}r)}{i^{0.5}r}$	146, 150
V. Cubic equations	38, 44	Skin-effect	147
VI. Equations of 4th degree	49	XIV. Chebyshev's polynomials	156
$x^4 + \dots + D = 0$	49	XV. The function x^x	158
$u^4 + \dots \pm 1 = 0$	57, 71	XVI. Approximate calculations with Polynomials	159
$v^4 + \beta v^2 + \gamma v \pm 1 = 0$	63, 67	Powers of polynomials with two variables	161
VII. Angles in degrees	73, 77	Binomial theorem	162, 162
Formulae for circular functions	73	XVII. Some remarks on numerical calculations	163
$\sqrt{2}\,sin\,x, \sqrt{2}\,cos\,x$	78	Some often used constants	172
$10^\theta = num\,x$	79	Useful books for the computer	173
VIII. Angles in quadrants	80	Index of tables of the elementary transcendentals	175
$\sqrt{2}\,sin\,x, \sqrt{2}\,cos\,x$	87	Systems of mechanical units	177
IX. Angles in radians	90, 98	General index	178
Formulae for hyperbolic functions ..	90		
$e^{1/2}$	95		
Logarithms	114		

Figurenverzeichnis. Index of figures

Nr.	p.	Nr.	p.
I. Potenzen. Powers		VIII. Winkel in Rechten. Angles in quadrants	
1. $z = x^y$, $x > 0$, $\Im y = 0$ (Relief)	I	41. $\left. \begin{array}{l} \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x \end{array} \right\}$	76
2. $x^{-1}, x^2, x^3, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$	I	42. $\left. \begin{array}{l} e^{\frac{1}{2}x}, e^{-\frac{1}{2}x} \end{array} \right\}$	78
3. $\left. \begin{array}{l} \text{in logarithmischer} \\ z = x^y \text{ Darstellung} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y < 1 \\ y < 15 \end{array}$	10	43. $\left. \begin{array}{l} \operatorname{Sin} \frac{1}{2}x, \operatorname{Cos} \frac{1}{2}x, \operatorname{Tg} \frac{1}{2}x, \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x, \\ \operatorname{Amp} \frac{1}{2}x \end{array} \right\}$	88
4. $\left. \begin{array}{l} \text{on logarithmic scale} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y < 1 \\ y < 15 \end{array}$	11	44. $\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$	88
III. Komplexes Rechnen. Complex computations		IX. Winkel in Radianten. Angles in radians	
5. $\frac{1}{1+ix} = u - iv$; $\frac{1}{x+i} = v - iu$	26	45. Höhenkarte von (Altitude chart of)	$se^{i\sigma} = e^{x+iy}$ 95
6. $\sqrt{1+ix} = \pm(u+iv)$; $\sqrt{x+i} = \pm(U+iV)$	27	46. Relief von (Relief of)	
7. $1+ix = me^{i\mu}$; $x+i = me^{i(90^\circ-\mu)}$	29	47. $\left. \begin{array}{l} \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x; \operatorname{arc} \sin x, \\ \operatorname{arc} \cos x, \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \end{array} \right\}$	96
8. $1+ri^\theta = si^\sigma$; $r+i^\theta = si^{\theta-\sigma}$	31	48. $10^x, 10^{-x}, e^x, e^{-x}, \log x, \ln x$	96
IV. Quadratische Gleichungen. Quadratic equations		49. $\left. \begin{array}{l} \operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Tg} x; \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x, \\ \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x, \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \end{array} \right\}$	97
9. $x^2 + px - q^2 = 0$	35	50. $\left. \begin{array}{l} \operatorname{Amp} x, \operatorname{Ar} \operatorname{Amp} x \end{array} \right\}$	97
10. $x^2 + px + q^2 = 0$	35	X. Besondere Funktionen. Special functions	
V. Kubische Gleichungen. Cubic equations		51. e^{-x^n} ($n=0, \dots, 4$)	116
11. $1+au^3 = u^3 + bu$	40	52. Plancksche Strahlungsfunktion	117
12. $y^3 + 2 = 3py$	42	53. $1: \ln \frac{1}{x}$	120
VI. Gleichungen 4. Grades. Equations of 4th degree		54. $\left. \begin{array}{l} \text{Quellenfunktionen} \\ \text{der Wärmeleitung} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\text{-dimensional} \\ 2\text{-dimensional} \end{array}$	120
$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0$		55. $\left. \begin{array}{l} \text{Source functions} \\ \text{of heat conduction} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\text{-dimensional} \\ 3\text{-dimensional} \end{array}$	121
13. Lage der Wurzelebenen. Position of the root-planes	47	56. Erhitzte Ebene — Heated plane	122
14. $\left. \begin{array}{l} d = -1, a = 0 \end{array} \right\}$	48	57. Erhitzte Gerade — Heated straight-line	122
15. $\left. \begin{array}{l} d = -1, b = 0 \end{array} \right\}$	50	58. Erhitzter Punkt — Heated point	122
16. $\left. \begin{array}{l} d = -1, c = 0 \end{array} \right\}$	52	59. $\left. \begin{array}{l} \operatorname{Sin} x \sin x, \operatorname{Cos} x \cos x, \operatorname{Sin} x \cos x, \\ \operatorname{Cos} x \sin x \end{array} \right\}$	124
17. $\left. \begin{array}{l} d = -1, b = 0 \end{array} \right\}$	50	XI. Transzendente Gleichungen. Transcendental equations	
18. $\left. \begin{array}{l} d = -1, c = 0 \end{array} \right\}$	52	62. $\varrho \operatorname{tg} \varrho = u$	128
19. $\left. \begin{array}{l} d = -1, b = -10 \end{array} \right\}$	54	63. $\varrho \operatorname{ctg} \varrho = v$	129
20. $\left. \begin{array}{l} d = -1, b = +10 \end{array} \right\}$	56	64. $x \operatorname{tg} x, \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \frac{\sin x}{x}$ (x in rad)	130
21. $\left. \begin{array}{l} d = -1, b = +10 \end{array} \right\}$	56	XII. Kreis- und Hyperbelfunktionen einer komplexen Veränderlichen. Circular and hyperbolic functions of a complex variable	
22. $v' + iv''$; $d = -1, a = 0$	58	65. Vorzeichen des reellen und des imaginären Teils	134
23. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	58	Sign of the real and the imaginary part	
24. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	60	66. $\sin(x+iy) = se^{i\sigma}$	136
25. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = 0 \end{array} \right\}$	60	67. Sinusrelief. Sine relief	137
26. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = 0 \end{array} \right\}$	62	68. $\sin z = u + iv$	137
27. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = 0 \end{array} \right\}$	62	69. $\operatorname{tg}(x+iy) = te^{i\tau}$	140
28. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = 0 \end{array} \right\}$	64	70. Tangensrelief. Tangent relief	140
29. $\left. \begin{array}{l} d = +1, c = 0 \end{array} \right\}$	64	71. $\operatorname{tg} z = u + iv$	141
30. $\left. \begin{array}{l} d = +1, c = 0 \end{array} \right\}$	65	72 a. Verhalten der Funktionen in den vier Quadranten. $y = \text{const.}$	144
31. $\left. \begin{array}{l} d = +1, c = 0 \end{array} \right\}$	65	72 b. Behaviour of the functions in the four quadrants	145
32. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = -10 \end{array} \right\}$	66		
33. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = +10 \end{array} \right\}$	68		
34. $\left. \begin{array}{l} d = +1, b = +10 \end{array} \right\}$	68		
35. Trennung der reellen und komplexen Wurzeln. $d = +1$, Separation of the real and complex roots	70		
36. $v' + iv''$; $d = +1, a = 0$	72		
37. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	72		
38. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	72		
39. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	72		
40. $\left. \begin{array}{l} d = +1, a = 0 \end{array} \right\}$	72		

XII

Figurenverzeichnis. Index of figures

Nr.	p.	Nr.	p.
XIII. $h z^n = \frac{\operatorname{tg} z^{0,5} r}{z^{0,5} r}$		XV. Die Funktion s^s. The function s^s	
73. η	146	79. $z^z = s i^\sigma$	158
74. $h, h \cos \eta, 3 \sin \eta / r^2 h$	149	80. $ x^x $	161
75. $\cos \eta / h, r^2 h, 4 r^2 h \sin \eta$	149		
XIV. Tschebyschewsche Polynome. Chebyshev's polynomials		XVII. Bemerkungen zu Zahlenrechnungen Remarks on numerical calculations	
76. $0 < \cos \vartheta < 1; T_2, \dots T_{10}$	156	81. } Quadratische Interpolation	164
77. $0,9 < \cos \vartheta < 1,0; T_2, \dots T_{10}$	157	82. } Quadratic	
78. $0,99 < \cos \vartheta < 1,00; T_{10}, \dots T_{20}$	157	83. Mechanische Einheiten. Mechanical units	177

Abkürzungen

Abbreviations

$$i^q = \cos q^\circ + i \sin q^\circ = e^{i \frac{\pi}{2} q} = \cos \frac{\pi}{2} q + i \sin \frac{\pi}{2} q.$$

Winkleinheiten: $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ = 1^\circ$.
Angular units:

$$n_4 \equiv 0,4 \cdot 10^n;$$

$$2^n 9 \equiv 2,9 \cdot 10^n.$$

$$0,0^3 7 \equiv 0,000 7 = {}^{-3} 7 = 0,7 \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^{-4}.$$

I. Potenzen I. Powers

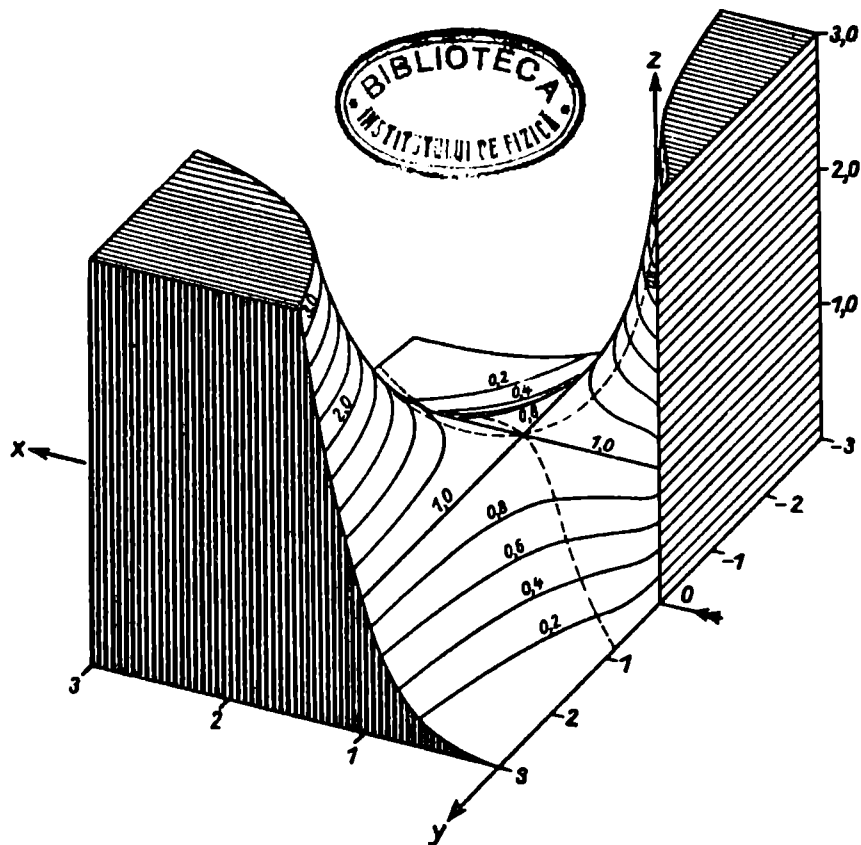


Fig. 1. $z = xy$, $x > 0$, $\text{Im } y = 0$

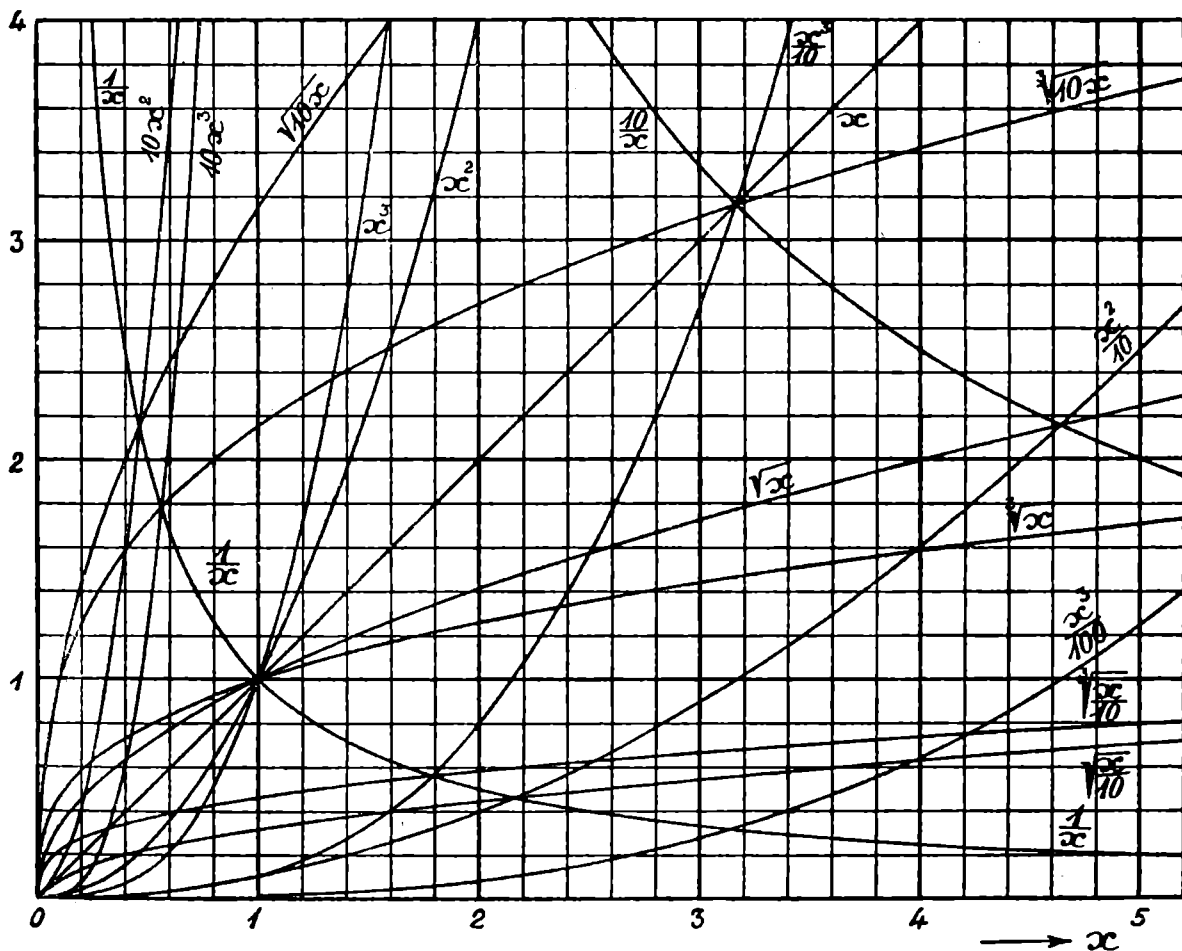


Fig. 2. x^{-1} , x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$

I. Potenzen
I. Powers

x	x^2		x^3		x^4		x^5		x^6		x^7		x^8	
0,50	2500	—I	12500	—I	6250	—2	3125	—2	15625	—2	7813	—3	3906	—3
0,51	2601		13265		6765		3450		17596		8974		4577	
0,52	2704		14061		7312		3802		19771		10281	—2	5346	
0,53	2809		14888		7890		4182		2216		11747		6226	
0,54	2916		15746		8503		4592		2479		13389		7230	
0,55	3025		16638		9151		5033		2768		15224		8373	
0,56	3136		17562		9834		5507		3084		17271		9672	
0,57	3249		18519		10556	—I	6017		3430		19549		11143	—2
0,58	3364		19511		11316		6564		3807		2208		12806	
0,59	3481		2054		12117		7149		4218		2489		14683	
0,60	3600		2160		12960		7776		4666		2799		16796	
0,61	3721		2270		13846		8446		5152		3142		19171	
0,62	3844		2383		14776		9161		5680		3522		2183	
0,63	3969		2500		15753		9924		6252		3939		2482	
0,64	4096		2621		16777		10737	—I	6872		4398		2815	
0,65	4225		2746		17851		11603		7542		4902		3186	
0,66	4356		2875		18975		12523		8265		5455		3600	
0,67	4489		3008		2015		13501		9046		6061		4061	
0,68	4624		3144		2138		14539		9887		6723		4572	
0,69	4761		3285		2267		15640		10792	—I	7446		5138	
0,70	4900		3430		2401		16807		11765		8235		5765	
0,71	5041		3579		2541		18042		12810		9095		6458	
0,72	5184		3732		2687		19349		13931		10031	—I	7222	
0,73	5329		3890		2840		20731		15133		11047		8065	
0,74	5476		4052		2999		22190		16421		12151		8992	
0,75	5625		4219		3164		23730		17798		13348		10011	—I
0,76	5776		4390		3336		2536		19270		14645		11130	
0,77	5929		4565		3515		2707		2084		16049		12357	
0,78	6084		4746		3702		2887		2252		17566		13701	
0,79	6241		4930		3895		3077		2431		19204		15171	
0,80	6400		5120		4096		3277		2621		2097		16777	
0,81	6561		5314		4305		3487		2824		2288		18530	
0,82	6724		5514		4521		3707		3040		2493		2044	
0,83	6889		5718		4746		3939		3269		2714		2252	
0,84	7056		5927		4979		4182		3513		2951		2479	
0,85	7225		6141		5220		4437		3771		3206		2725	
0,86	7396		6361		5470		4704		4046		3479		2992	
0,87	7569		6585		5729		4984		4336		3773		3282	
0,88	7744		6815		5997		5277		4644		4087		3596	
0,89	7921		7050		6274		5584		4970		4423		3937	
0,90	8100		7290		6561		5905		5314		4783		4305	
0,91	8281		7536		6857		6240		5679		5168		4703	
0,92	8464		7787		7164		6591		6064		5578		5132	
0,93	8649		8044		7481		6957		6470		6017		5596	
0,94	8836		8306		7807		7339		6899		6485		6096	
0,95	9025		8574		8145		7738		7351		6983		6634	
0,96	9216		8847		8493		8154		7828		7514		7214	
0,97	9409		9127		8853		8587		8330		8080		7837	
0,98	9604		9412		9224		9039		8858		8681		8508	
0,99	9801		9703		9606		9510		9415		9321		9227	
1,00	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0

7056 | — I = 7,056 · 10⁻¹

2815 | — 2 = 2,815 · 10⁻¹

x^9		x^{10}		x^{11}		x^{12}		x^{13}		x^{14}		x^{15}		x
19531	—3	9766	—4	4883	—4	2441	—4	12207	—4	6104	—5	3052	—5	0,50
2334		11904	—3	6071		3096		15791		8053		4107		0,51
2780		14456		7517		3909		2033		10569	—4	5496		0,52
3300		17489		9269		4913		2604		13799		7314		0,53
3904		2108		11385	—3	6148		3320		17927		9681		0,54
4605		2533		13931		7662		4214		2318		12748	—4	0,55
5416		3033		16985		9512		5327		2983		16704		0,56
6351		3620		2064		11762	—3	6705		3822		2178		0,57
7428		4308		2499		14492		8406		4875		2828		0,58
8663		5111		3016		17792		10497	—3	6193		3654		0,59
10078	—2	6047		3628		2177		13061		7836		4702		0,60
11694		7133		4351		2654		16192		9877		6025		0,61
13537		8393		5204		3226		2000		12402	—3	7689		0,62
15634		9849		6205		3909		2463		15516		9775		0,63
18014		11529	—2	7379		4722		3022		19343		12379	—3	0,64
2071		13463		8751		5688		3697		2403		15621		0,65
2376		15683		10351	—2	6832		4509		2976		19641		0,66
2721		18228		12213		8183		5482		3673		2461		0,67
3109		2114		14375		9775		6647		4520		3074		0,68
3545		2446		16879		11646	—2	8036		5545		3826		0,69
4035		2825		19773		13841		9689		6782		4748		0,70
4585		3255		2311		16410		11651	—2	8272		5873		0,71
5200		3744		2696		19408		13974		10061	—2	7244		0,72
5887		4298		3137		2290		16718		12205		8909		0,73
6654		4924		3644		2696		19953		14765		10926	—2	0,74
7508		5631		4224		3168		2376		17818		13363		0,75
8459		6429		4886		3713		2822		2145		16301		0,76
9515		7327		5642		4344		3345		2576		19832		0,77
10687	—1	8336		6502		5071		3956		3085		2407		0,78
11985		9468		7480		5909		4668		3688		2913		0,79
13422		10737	—1	8590		6872		5498		4398		3518		0,80
15009		12158		9848		7977		6461		5233		4239		0,81
16762		13745		11271	—1	9242		7578		6214		5096		0,82
18694		15516		12878		10689	—1	8872		7364		6112		0,83
2082		17490		14692		12341		10366	—1	8708		7315		0,84
2316		19687		16734		14224		12091		10277	—1	8735		0,85
2573		2213		19032		16367		14076		12105		10411	—1	0,86
2855		2484		2161		18803		16359		14232		12382		0,87
3165		2785		2451		2157		18979		16702		14697		0,88
3504		3118		2775		2470		2198		19564		17412		0,89
3874		3487		3138		2824		2542		2288		2059		0,90
4279		3894		3544		3225		2935		2670		2430		0,91
4722		4344		3996		3677		3383		3112		2863		0,92
5204		4840		4501		4186		3893		3620		3367		0,93
5730		5386		5063		4759		4474		4205		3953		0,94
6302		5987		5688		5404		5133		4877		4633		0,95
6925		6648		6382		6127		5882		5647		5421		0,96
7602		7374		7153		6938		6730		6528		6333		0,97
8337		8171		8007		7847		7690		7536		7386		0,98
9135		9044		8953		8864		8775		8687		8601		0,99
10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	10000	0	1,00

I. Potenzen
I. Powers

x	x^2		x^3		x^4		x^5		x^6		x^7		x^8	
1,00														
1,02	10404	0	10612	0	10824	0	11041	0	11262	0	11487	0	11717	0
1,04	10816		11249		11699		12167		12653		13159		13686	
1,06	11236		11910		12625		13382		14185		15036		15938	
1,08	11664		12597		13605		14693		15869		17138		18509	
1,10	12100		13310		14641		16105		17716		19487		2144	
1,12	12544		14049		15735		17623		19738		2211		2476	
1,14	12996		14815		16890		19254		2195		2502		2853	
1,16	13456		15609		18106		2100		2436		2826		3278	
1,18	13924		16430		19388		2288		2700		3185		3759	
1,20	14400		17280		2074		2488		2986		3583		4300	
1,22	14884		18158		2215		2703		3297		4023		4908	
1,24	15376		19066		2364		2932		3635		4508		5590	
1,26	15876		2000		2520		3176		4002		5042		6353	
1,28	16384		2097		2684		3436		4398		5629		7206	
1,30	16900		2197		2856		3713		4827		6275		8157	
1,32	17424		2300		3036		4007		5290		6983		9217	
1,34	17956		2406		3224		4320		5789		7758		10395	I
1,36	18496		2515		3421		4653		6328		8605		11703	
1,38	19044		2628		3627		5005		6907		9531		13153	
1,40	19600		2744		3842		5378		7530		10541	I	14758	
1,42	2016		2863		4066		5774		8198		11642		16531	
1,44	2074		2986		4300		6192		8916		12839		18488	
1,46	2132		3112		4544		6634		9685		14141		2065	
1,48	2190		3242		4798		7101		10509	I	15554		2302	
1,50	2250		3375		5062		7594		11391		17086		2563	
1,52	2310		3512		5338		8114		12333		18746		2849	
1,54	2372		3652		5624		8662		13339		2054		3163	
1,56	2434		3796		5922		9239		14413		2248		3507	
1,58	2496		3944		6232		9847		15558		2458		3884	
1,60	2560		4096		6554		10486	I	16777		2684		4295	
1,62	2624		4252		6887		11158		18075		2928		4744	
1,64	2690		4411		7234		11864		19456		3191		5233	
1,66	2756		4574		7593		12605		2092		3473		5766	
1,68	2822		4742		7966		13383		2248		3777		6346	
1,70	2890		4913		8352		14199		2414		4103		6976	
1,72	2958		5088		8752		15054		2589		4453		7660	
1,74	3028		5268		9166		15949		2775		4829		8402	
1,76	3098		5452		9595		16887		2972		5231		9207	
1,78	3168		5640		10039	I	17869		3181		5662		10078	2
1,80	3240		5832		10498		18896		3401		6122		11020	
1,82	3312		6029		10972		19969		3634		6615		12038	
1,84	3386		6230		11462		2109		3881		7140		13138	
1,86	3460		6435		11969		2226		4141		7702		14325	
1,88	3534		6645		12492		2348		4415		8301		15605	
1,90	3610		6859		13032		2476		4705		8939		16984	
1,92	3686		7078		13590		2609		5010		9619		18468	
1,94	3764		7301		14165		2748		5331		10342	2	2006	
1,96	3842		7530		14758		2893		5669		11112		2178	
1,98	3920		7762		15370		3043		6025		11930		2362	
2,00	4000		8000		16000		3200		6400		12800		2560	

x^9		x^{10}		x^{11}		x^{12}		x^{13}		x^{14}		x^{15}		x
11951	0	12190	0	12434	0	12682	0	12936	0	13195	0	13459	0	1,00
14233		14802		15395		16010		16651		17317		18009		1,02
16895		17908		18983		2012		2133		2261		2397		1,04
19990		2159		2332		2518		2720		2937		3172		1,06
2358		2594		2853		3138		3452		3797		4177		1,10
2773		3106		3479		3896		4363		4887		5474		1,12
3252		3707		4226		4818		5492		6261		7138		1,14
3803		4411		5117		5936		6886		7988		9266		1,16
4435		5234		6176		7288		8599		10147	I	11974	I	1,18
5160		6192		7430		8916		10699	I	12839		15407		1,20
5987		7305		8912		10872	I	13264		16182		19742		1,22
6931		8594		10657	I	13215		16386		2032		2520		1,24
8005		10086	I	12708		16012		2018		2542		3203		1,26
9223		11806		15112		19343		2476		3169		4056		1,28
10604	I	13786		17922		2330		3029		3937		5119		1,30
12166		16060		2120		2798		3694		4876		6436		1,32
13930		18666		2501		3352		4491		6018		8064		1,34
15917		2165		2944		4004		5445		7405		10071	2	1,36
18151		2505		3457		4770		6583		9085		12537		1,38
2066		289		4050		5669		7937		11112	2	15557		1,40
2347		3333		4733		6721		9544		13553		19245		1,42
2662		3834		5521		7950		11448	2	16484		2374		1,44
3014		4401		6425		9381		13696		19996		2919		1,46
3407		5042		7462		11044	2	16346		2419		3580		1,48
3844		5767		8650		12975		19462		2919		4379		1,50
4331		6583		10006	2	15210		2312		3514		5341		1,52
4872		7503		11554		17793		2740		4220		6498		1,54
5472		8536		13316		2077		3241		5055		7886		1,56
6136		9696		15319		2420		3824		6042		9547		1,58
6872		10995	2	17592		2815		4504		7206		11529	3	1,60
7685		12449		2017		3267		5293		8575		13891		1,62
8582		14075		2308		3786		6208		10182	3	16698		1,64
9571		15888		2637		4378		7268		12065		2003		1,66
10661	2	17910		3009		5055		8492		14267		2397		1,68
11859		2016		3427		5826		9905		16838		2862		1,70
13175		2266		3898		6704		11531	3	19833		3411		1,72
14620		2544		4426		7702		13401		2332		4057		1,74
16204		2852		5019		8834		15548		2736		4816		1,76
17938		3193		5684		10117	3	18008		3205		5706		1,78
19836		3570		6427		11568		2082		3748		6747		1,80
2191		3988		7257		13209		2404		4375		7963		1,82
2417		4448		8185		15060		2771		5099		9381		1,84
2665		4956		9218		17146		3189		5932		11033	4	1,86
2934		5515		10369	3	19494		3665		6890		12953		1,88
3227		6131		11649		2213		4205		7990		15181		1,90
3546		6808		13071		2510		4819		9252		17763		1,92
3892		7551		14649		2842		5513		10696	4	2075		1,94
4269		8367		16399		3214		6300		12348		2420		1,96
4677		9261		18337		3631		7189		14234		2818		1,98
5120		10240	3	2048		4096		8192		16384		3277		2,00

$$5472 | 1 = 5,472 \cdot 10$$

$$2736 | 3 = 2,736 \cdot 10^3$$

I. Potenzen
I. Powers

x	x^2		x^3		x^4		x^5		x^6		x^7		x^8	
2,05	4203	0	8615	0	17661	1	3621	1	7422	1	15215	2	3119	2
2,10	4410		9261		19448		4084		8577		18011		3782	
2,15	4623		9938		2137		4594		9877		2124		4566	
2,20	4840		10648	1	2343		5154		11338	2	2494		5488	
2,25	5063		11391		2563		5767		12975		2919		6568	
2,30	5290		12167		2798		6436		14804		3405		7831	
2,35	5523		12978		3050		7167		16843		3958		9301	
2,40	5760		13824		3318		7963		19110		4586		11008	3
2,45	6003		14706		3603		8827		2163		5299		12982	
2,50	6250		15625		3906		9766		2441		6104		15259	
2,55	6503		16581		4228		10782	2	2749		7011		17878	
2,60	6760		17576		4570		11881		3089		8032		2088	
2,65	7023		18610		4932		13069		3463		9177		2432	
2,70	7290		19683		5314		14349		3874		10460	3	2824	
2,75	7563		2080		5719		15728		4325		11894		3271	
2,80	7840		2195		6147		17210		4819		13493		3778	
2,85	8123		2315		6598		18803		5359		15273		4353	
2,90	8410		2439		7073		2051		5948		17250		5003	
2,95	8703		2567		7573		2234		6591		19443		5736	
3,00	9000		2700		8100		2430		7290		2187		6561	
3,05	9303		2837		8654		2639		8050		2455		7489	
3,10	9610		2979		9235		2863		8875		2751		8529	
3,15	9923		3126		9846		3101		9769		3077		9694	
3,20	10240	1	3277		10486	2	3355		10737	3	3436		10995	4
3,25	10563		3433		11157		3626		11784		3830		12447	
3,30	10890		3594		11859		3914		12915		4262		14064	
3,35	11223		3760		12594		4219		14134		4735		15862	
3,40	11560		3930		13363		4544		15448		5252		17858	
3,45	11903		4106		14167		4888		16862		5817		2007	
3,50	12250		4288		15006		5252		18383		6434		2252	
3,55	12603		4474		15882		5638		2002		7106		2522	
3,60	12960		4666		16796		6047		2177		7836		2821	
3,65	13323		4863		17749		6478		2365		8631		3150	
3,70	13690		5065		18742		6934		2566		9493		3512	
3,75	14063		5273		19775		7416		2781		10428	4	3911	
3,80	14440		5487		2085		7924		3011		11442		4348	
3,85	14823		5707		2197		8459		3257		12538		4827	
3,90	15210		5932		2313		9022		3519		13723		5352	
3,95	15603		6163		2434		9616		3798		15003		5926	
4,00	16000		6400		2560		10240	3	4096		16384		6554	
4,05	16403		6643		2690		10896		4413		17872		7238	
4,10	16810		6892		2826		11586		4750		19475		7985	
4,15	17223		7147		2966		12310		5108		2120		8798	
4,20	17640		7409		3112		13069		5489		2305		9683	
4,25	18063		7677		3263		13866		5893		2505		10644	5
4,30	18490		7951		3419		14701		6321		2718		11688	
4,35	18923		8231		3581		15576		6775		2947		12821	
4,40	19360		8518		3748		16492		7256		3193		14048	
4,45	19803		8812		3921		17450		7765		3456		15377	
4,50	2025		9113		4101		18453		8304		3737		16815	

$$17749 \mid 2 = 1,7749 \cdot 10^3$$

$$6554 \mid 4 = 6,554 \cdot 10^4$$

x^9		x^{10}		x^{11}		x^{12}		x^{13}		x^{14}		x^{15}		x
6394	2	13108	3	2687	3	5509	3	11293	4	2315	4	4746	4	2,05
7943		16680		3503		7356		15447		3244		6812		2,10
9816		2110		4538		9756		2097		4510		9696		2,15
12073	3	2656		5843		12855	4	2828		6222		13688	5	2,20
14779		3325		7482		16834		3788		8522		19175		2,25
18012		4143		9528		2191		5040		11593	5	2666		2,30
2186		5137		12071	4	2837		6666		15666		3681		2,35
2642		6340		15217		3652		8765		2104		5049		2,40
3180		7792		19091		4677		11459	5	2808		6878		2,45
3815		9537		2384		5960		14901		3725		9313		2,50
4559		11625	4	2964		7559		19276		4915		12534	6	2,55
5430		14117		3670		9543		2481		6451		16773		2,60
6445		17079		4526		11994	5	3178		8423		2232		2,65
7626		2059		5559		15009		4053		10942	6	2954		2,70
8995		2474		6802		18706		5144		14147		3890		2,75
10578	4	2962		8294		2322		6502		18206		5098		2,80
12405		3535		10076	5	2872		8184		2333		6648		2,85
14507		4207		12201		3538		10261	6	2976		8629		2,90
16920		4991		14725		4344		12814		3780		11151	7	2,95
19683		5905		17715		5314		15943		4783		14349		3,00
2284		6966		2125		6480		19765		6028		18386		3,05
2644		8196		2541		7877		2442		7569		2347		3,10
3053		9618		3030		9544		3006		9470		2983		3,15
3518		11259	5	3603		11529	6	3689		11806	7	3778		3,20
4045		13147		4273		13887		4513		14668		4767		3,25
4641		15316		5054		16679		5504		18163		5994		3,30
5314		17801		5963		19977		6692		2242		7511		3,35
6072		2064		7019		2386		8114		2759		9380		3,40
6924		2389		8242		2843		9810		3384		11676	8	3,45
7882		2759		9655		3379		11827	7	4140		14488		3,50
8955		3179		11285	6	4006		14222		5049		17924		3,55
10156	5	3656		13162		4738		17058		6141		2211		3,60
11498		4197		15319		5591		2041		7449		2719		3,65
12996		4809		17792		6583		2436		9012		3334		3,70
14665		5499		2062		7733		2900		10875	8	4078		3,75
16522		6278		2386		9066		3445		13091		4975		3,80
18584		7155		2755		10605	7	4083		15720		6052		3,85
2087		8140		3175		12382		4829		18832		7345		3,90
2341		9246		3652		14427		5699		2251		8891		3,95
2621		10486	6	4194		16777		6711		2684		10737	9	4,00
2932		11873		4808		19474		7887		3194		12937		4,05
3274		13423		5503		2256		9251		3793		15551		4,10
3651		15152		6288		2610		10830	8	4494		18652		4,15
4067		17080		7174		3013		12654		5315		2232		4,20
4524		19226		8171		3473		14759		6273		2666		4,25
5026		2161		9293		3996		17183		7389		3177		4,30
5577		2426		10553	7	4591		19969		8687		3779		4,35
6181		2720		11967		5265		2317		10194	9	4485		4,40
6843		3045		13551		6030		2683		11941		5314		4,45
7567		3405		15323		6895		3103		13963		6283		4,50

$$4991 \mid 4 = 4,991 \cdot 10^4$$

$$2719 \mid 8 = 2,719 \cdot 10^8$$

x	x^2		x^3		x^4		x^5		x^6		x^7		x^8	
4,55	2070	1	9420	1	4286	2	19501	3	8873	3	4037	4	18369	5
4,60	2116		9734		4477		2060		9474		4358		2005	
4,65	2162		10054	2	4675		2174		10109	4	4701		2186	
4,70	2209		10382		4880		2293		10779		5066		2381	
4,75	2256		10717		5091		2418		11486		5456		2591	
4,80	2304		11059		5308		2548		12231		5871		2818	
4,85	2352		11408		5533		2684		13015		6312		3061	
4,90	2401		11765		5765		2825		13841		6782		3323	
4,95	2450		12129		6004		2972		14711		7282		3604	
5,00	2500		12500		6250		3125		15625		7813		3906	

x	$x^{0,05}$	$x^{0,10}$	$x^{0,15}$	$x^{0,20}$	$x^{0,25}$	$x^{0,30}$	$x^{0,35}$	$x^{0,40}$	$x^{0,45}$	$x^{0,50}$
0,5	0,9659	0,9330	0,9013	0,8706	0,8409	0,8123	0,7846	0,7579	0,7320	0,7071
0,6	0,9748	0,9502	0,9262	0,9029	0,8801	0,8579	0,8363	0,8152	0,7946	0,7746
0,7	0,9823	0,9650	0,9497	0,9312	0,9147	0,8985	0,8826	0,8670	0,8517	0,8367
0,8	0,9889	0,9779	0,9673	0,9551	0,9457	0,9353	0,9249	0,9146	0,9045	0,8944
0,9	0,9948	0,9895	0,9843	0,9792	0,9740	0,9689	0,9638	0,9587	0,9537	0,9487
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	1,0092	1,0184	1,0277	1,0371	1,0466	1,0562	1,0659	1,0756	1,0855	1,0954
1,4	1,0170	1,0342	1,0518	1,0696	1,0878	1,1062	1,1250	1,1441	1,1635	1,1832
1,6	1,0238	1,0481	1,0730	1,0986	1,1247	1,1514	1,1788	1,2068	1,2355	1,2649
1,8	1,0298	1,0605	1,0922	1,1247	1,1583	1,1928	1,2284	1,2650	1,3028	1,3416
2,0	1,0353	1,0718	1,1096	1,1487	1,1892	1,2311	1,2746	1,3195	1,3660	1,4142
2,2	1,0402	1,0820	1,1255	1,1708	1,2179	1,2668	1,3178	1,3708	1,4259	1,4832
2,4	1,0447	1,0915	1,1403	1,1914	1,2447	1,3004	1,3586	1,4193	1,4828	1,5492
2,6	1,0489	1,1003	1,1541	1,2106	1,2698	1,3320	1,3971	1,4655	1,5372	1,6125
2,8	1,0528	1,1084	1,1670	1,2287	1,2936	1,3619	1,4339	1,5096	1,5894	1,6733
3,0	1,0565	1,1161	1,1791	1,2457	1,3161	1,3904	1,4689	1,5518	1,6395	1,7321
3,5	1,0646	1,1335	1,2067	1,2847	1,3678	1,4562	1,5503	1,6505	1,7572	1,8708
4,0	1,0718	1,1487	1,2311	1,3195	1,4142	1,5157	1,6245	1,7411	1,8661	2,0000
4,5	1,0781	1,1623	1,2531	1,3510	1,4565	1,5702	1,6929	1,8251	1,9676	2,1211
5,0	1,0838	1,1746	1,2731	1,3797	1,4953	1,6207	1,7565	1,9037	2,063	2,236
10,0	1,1220	1,2589	1,4125	1,5849	1,7783	1,9954	2,239	2,512	2,818	3,162
0,1	0,8913	0,7943	0,7080	0,6310	0,5623	0,5012	0,4467	0,3981	0,3548	0,3162

Beispiele zur
Examples of the use

$$\begin{aligned} \text{a) } 8,125^{18} &= (10 \cdot 0,8125)^{18} = 10^{18} (7,977 + 0,316 - 0,016) \cdot 10^{-18} \\ &= 10^{10} \cdot 8,277 = 10^{11} \cdot 0,8277 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 8,125^{0,75} = (10 \cdot 0,8125)^{0,75} = 5,623 \cdot (0,8459 + 0,0098) = 5,623 \cdot 0,8557 = 4,812$$

$$\text{c) } 10^{0,7543} = 5,623 + 0,059 - 0,003 = 5,679$$

Erläuterung: a) Quadratische Interpolation zwischen 7,977 und 9,242 auf S. 3. — b) Lineare Interpolation zwischen 0,8459 und 0,9240 auf S. 9. — c) Quadratische Interpolation zwischen 5,623 und 6,310 auf S. 9. — d) Lineare Interpolation mit $0,0094 = 0,8459 - 0,8365$ (S. 9), vom Ergebnis unter b) ausgehend. — e) $a^a = e^{a \ln a} \approx 1 + q \ln a$. — f) Auf Grund der Ergebnisse von c) und d) oder von b) und e). — g) Auf Grund der Ergebnisse von a) und f).

x^9		x^{10}		x^{11}		x^{12}		x^{13}		x^{14}		x^{15}		x
8358	5	3803	6	17303	7	7873	7	3582	8	16299	9	7416	9	4,55
9222		4242		19514		8976		4129		18994		8737		4,60
10164	6	4726		2198		10220	8	4752		2210		10275	10	4,65
11191		5260		2472		11619		5461		2567		12063		4,70
12310		5847		2777		13192		6266		2977		14139		4,75
13526		6493		3116		14959		7180		3446		16543		4,80
14848		7201		3493		16940		8216		3985		19325		4,85
16284		7979		3910		19158		9387		4600		2254		4,90
17842		8832		4372		2164		10712	9	5302		2625		4,95
19531		9766		4883		2441		12207		6104		3052		5,00

$x^{0,55}$	$x^{0,60}$	$x^{0,65}$	$x^{0,70}$	$x^{0,75}$	$x^{0,80}$	$x^{0,85}$	$x^{0,90}$	$x^{0,95}$	$x^{1,00}$	x
0,6830	0,6598	0,6373	0,6156	0,5946	0,5744	0,5548	0,5359	0,5176	0,5000	0,5
0,7551	0,7360	0,7175	0,6994	0,6817	0,6645	0,6478	0,6315	0,6155	0,6000	0,6
0,8219	0,8073	0,7931	0,7791	0,7653	0,7518	0,7385	0,7254	0,7126	0,7000	0,7
0,8845	0,8747	0,8650	0,8554	0,8459	0,8365	0,8272	0,8181	0,8090	0,8000	0,8
0,9437	0,9387	0,9338	0,9289	0,9240	0,9192	0,9144	0,9095	0,9048	0,9000	0,9
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0
1,1055	1,1156	1,1258	1,1361	1,1465	1,1570	1,1676	1,1783	1,1891	1,2000	1,2
1,2033	1,2237	1,2445	1,2656	1,2871	1,3089	1,3311	1,3537	1,3767	1,4000	1,4
1,2950	1,3258	1,3573	1,3896	1,4226	1,4564	1,4911	1,5265	1,5628	1,6000	1,6
1,3817	1,4229	1,4653	1,5090	1,5540	1,6004	1,6481	1,6972	1,7479	1,8000	1,8
1,4641	1,5157	1,5692	1,6245	1,6818	1,7411	1,8025	1,8661	1,9319	2,000	2,0
1,5429	1,6049	1,6695	1,7366	1,8064	1,8790	1,9546	2,033	2,115	2,200	2,2
1,6185	1,6909	1,7666	1,8456	1,9282	2,015	2,105	2,199	2,297	2,400	2,4
1,6914	1,7741	1,8609	1,9520	2,048	2,148	2,253	2,363	2,479	2,600	2,6
1,7617	1,8548	1,9528	2,056	2,165	2,279	2,399	2,526	2,660	2,800	2,8
1,8299	1,9332	2,042	2,158	2,280	2,408	2,544	2,688	2,840	3,000	3,0
1,9918	2,121	2,258	2,404	2,559	2,724	2,900	3,088	3,288	3,500	3,5
2,144	2,297	2,462	2,639	2,828	3,031	3,249	3,482	3,732	4,000	4,0
2,287	2,466	2,658	2,866	3,090	3,331	3,591	3,872	4,174	4,500	4,5
2,423	2,627	2,847	3,085	3,344	3,624	3,928	4,257	4,613	5,000	5,0
3,548	3,981	4,467	5,012	5,623	6,310	7,080	7,943	8,913	10,000	10,0
0,2818	0,2512	0,2239	0,1995	0,1778	0,1585	0,1413	0,1259	0,1122	0,1000	0,1

Potenzentafel:

of the table of powers:

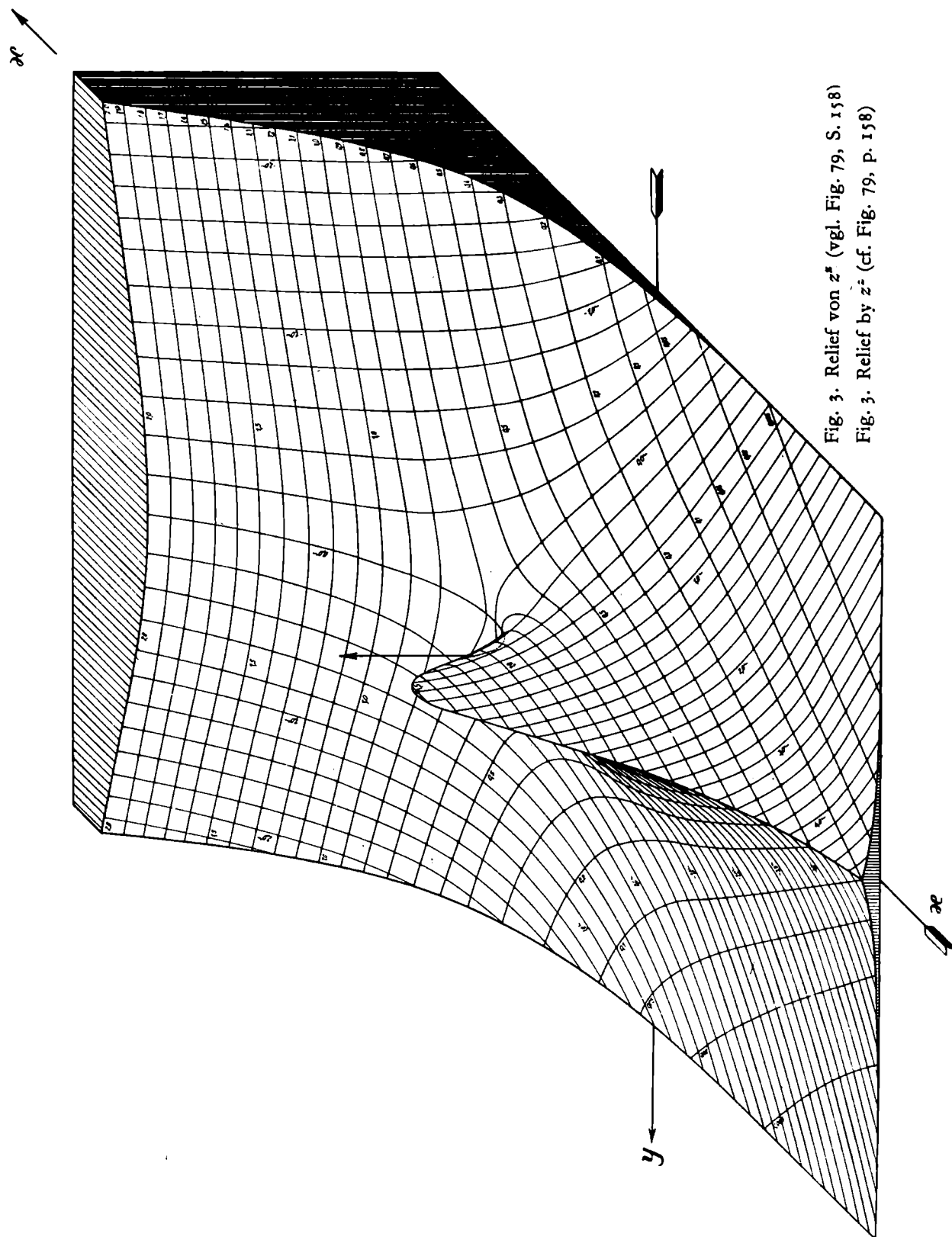
d) $0,8125^{0,7643} = 0,8557 - 0,0008 = 0,8549$ (statt 0,8550)

e) $8,125^{0,0043} = 1 + 0,0043 \cdot \ln 8,125 = 1 + 0,0043 \cdot 2,0950 = 1,0090$

f) $8,125^{0,7643} = 5,679 \cdot 0,8549 = 4,812 \cdot 1,0090 = 4,855$ (statt 4,856)

g) $8,125^{12,7643} = 10^{11} \cdot 0,8278 \cdot 4,855 = 10^{12} \cdot 0,4019$

Explanation: a) Quadratic interpolation between 7,977 and 9,242 on p. 3. — b) Linear interpolation between 0,8459 and 0,9240 on p. 9. — c) Quadratic interpolation between 5,623 and 6,310 on p. 9. — d) Starting with the result of b), linear interpolation with 0,0094 = 0,8459 — 0,8365 (p. 9). — e) $a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a$. — f) From the results of c) and d) or of b) and e). — g) From the results of a) and f).



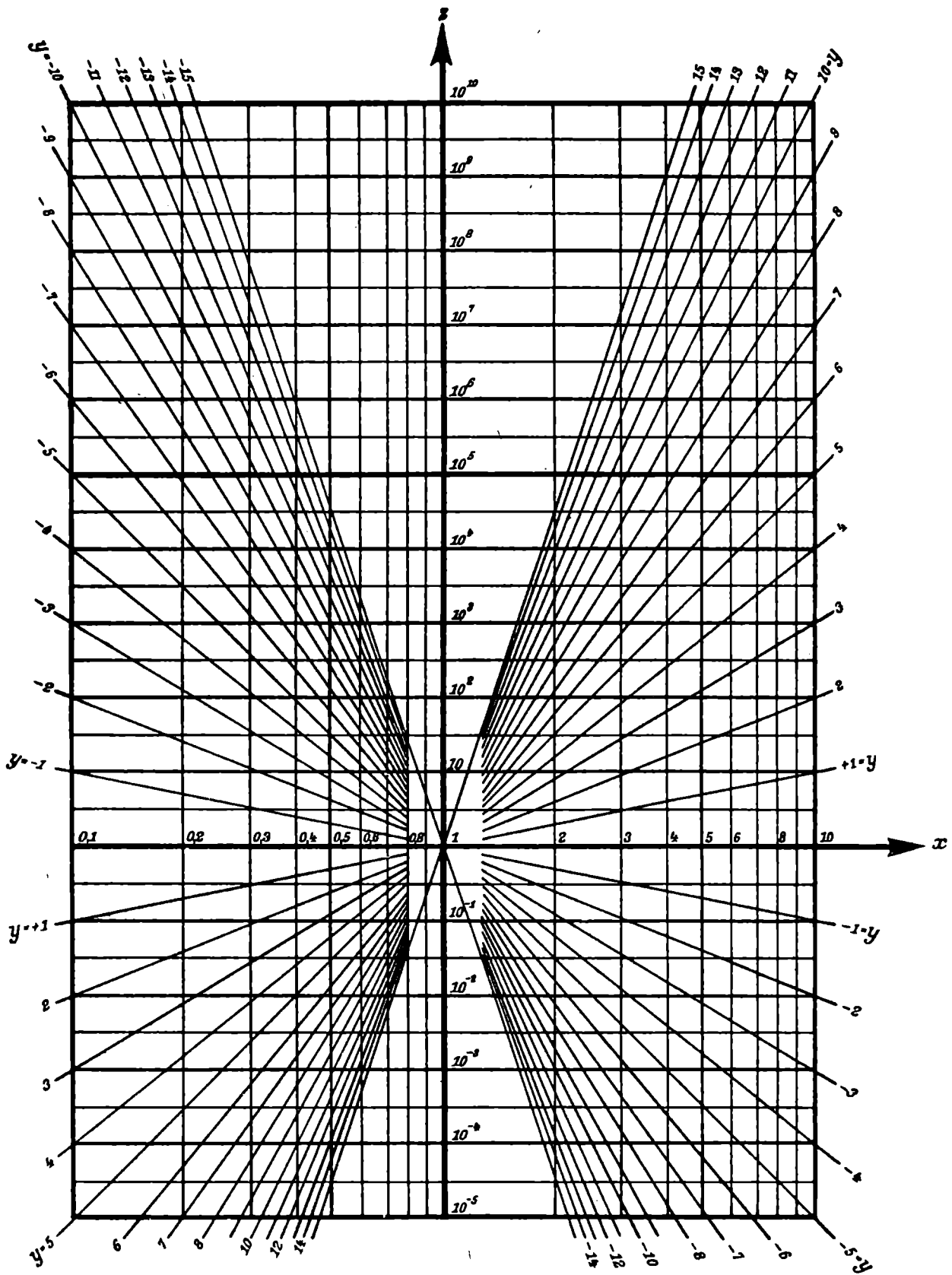


Fig. 4. $z = x^y$ in logarithmischer Darstellung für $-15 < y < +15$

Fig. 4. $z = x^y$ on logarithmic scale for $-15 < y < +15$

x	x^2	$\frac{1}{x}$	x	x^2	$\frac{1}{x}$	x	x^2	$\frac{1}{x}$
0,	0,		0,	0,	1,	0,80	0,6400 ¹⁶¹	1,2500 ¹⁵⁴
4 00	1 6000 ⁸⁰⁶	2,5000 ⁶¹⁸	6 00	3 600 ¹²⁰	6 667 ²⁷⁶	1	6561 ¹⁶³	346 ¹⁵¹
05	6403 ⁸¹⁴	4691 ⁶⁰²	05	660 ¹²²	529 ²⁷²	2	6724 ¹⁶⁵	195 ¹⁴⁷
10	6810 ⁸²⁶	4390 ⁵⁸⁸	10	721 ¹²²	393 ²⁶⁶	3	6889 ¹⁶⁷	048 ¹⁴³
15	7223 ⁸³⁴	4096 ⁵⁷²	15	782 ¹²⁴	260 ²⁶²	4	7056 ¹⁶⁹	1,1905 ¹⁴⁰
20	7640 ⁸⁴⁶	3810 ⁵⁶²	20	844 ¹²⁴	129 ²⁵⁸	5	7225 ¹⁷¹	765 ¹³⁷
25	8063 ⁸⁵⁴	3529 ⁵⁴⁶	25	906 ¹²⁶	000 ²⁵⁴	6	7396 ¹⁷³	628 ¹³⁴
30	8490 ⁸⁶⁶	3256 ⁵³⁴	30	969 ¹²⁶	5 873 ²⁵⁰	7	7569 ¹⁷⁵	494 ¹³⁰
35	8923 ⁸⁷⁴	2989 ⁵²⁴	35	4 032 ¹²⁸	748 ²⁴⁶	8	7744 ¹⁷⁷	364 ¹²⁸
40	9360 ⁸⁸⁶	2727 ⁵¹⁰	40	096 ¹²⁸	625 ²⁴²	9	7921 ¹⁷⁹	236 ¹²⁵
45	9803 ⁸⁹⁴	2472 ⁵⁰⁰	45	160 ¹³⁰	504 ²³⁸	0,90	8100 ¹⁸¹	111 ¹²²
50	2 0250 ⁹⁰⁶	2222 ⁴⁸⁸	50	225 ¹³⁰	385 ²³⁶	1	8281 ¹⁸³	1,0989 ¹¹⁹
55	0703 ⁹¹⁴	1978 ⁴⁷⁸	55	290 ¹³²	267 ²³⁰	2	8464 ¹⁸⁵	870 ¹¹⁷
60	1160 ⁹²⁶	1739 ⁴⁶⁸	60	356 ¹³²	152 ²²⁸	3	8649 ¹⁸⁷	753 ¹¹⁵
65	1623 ⁹³⁴	1505 ⁴⁵⁶	65	422 ¹³⁴	038 ²²⁶	4	8836 ¹⁸⁹	638 ¹¹²
70	2090 ⁹⁴⁶	1277 ⁴⁴⁸	70	489 ¹³⁴	4 925 ²²⁰	5	9025 ¹⁹¹	526 ¹⁰⁹
75	2563 ⁹⁵⁴	1053 ⁴⁴⁰	75	556 ¹³⁶	815 ²¹⁸	6	9216 ¹⁹³	417 ¹⁰⁸
80	3040 ⁹⁶⁶	0833 ⁴²⁸	80	624 ¹³⁶	706 ²¹⁴	7	9409 ¹⁹⁵	309 ¹⁰⁵
85	3523 ⁹⁷⁴	0619 ⁴²²	85	692 ¹³⁸	599 ²¹²	8	9604 ¹⁹⁷	204 ¹⁰³
90	4010 ⁹⁸⁶	0408 ⁴¹²	90	761 ¹³⁸	493 ²¹⁰	9	9801 ¹⁹⁹	101 ¹⁰¹
95	4503 ⁹⁹⁴	0202 ⁴⁰⁴	95	830 ¹⁴⁰	388 ²⁰⁴	1,00	1,0000 ²⁰¹	000 ⁹⁹
5 00	5000 ¹⁰⁰⁶	0000 ³⁹⁶	7 00	900 ¹⁴⁰	286 ²⁰⁴	1	0201 ²⁰³	0,9901 ⁹⁷
05	5503 ¹⁰¹⁴	1,9802 ³⁸⁸	05	970 ¹⁴²	184 ¹⁹⁸	2	0404 ²⁰⁵	804 ⁹⁵
10	6010 ¹⁰²⁶	9608 ³⁸⁰	10	5 041 ¹⁴²	085 ¹⁹⁸	3	0609 ²⁰⁷	709 ⁹⁴
15	6523 ¹⁰³⁴	9418 ³⁷⁴	15	112 ¹⁴⁴	3 986 ¹⁹⁴	4	0816 ²⁰⁹	615 ⁹¹
20	7040 ¹⁰⁴⁶	9231 ³⁶⁶	20	184 ¹⁴⁴	889 ¹⁹²	5	1025 ²¹¹	524 ⁹⁰
25	7563 ¹⁰⁵⁴	9048 ³⁶⁰	25	256 ¹⁴⁶	793 ¹⁸⁸	6	1236 ²¹³	434 ⁸⁸
30	8090 ¹⁰⁶⁶	8868 ³⁵²	30	329 ¹⁴⁶	699 ¹⁸⁸	7	1449 ²¹⁵	346 ⁸⁷
35	8623 ¹⁰⁷⁴	8692 ³⁴⁶	35	402 ¹⁴⁸	605 ¹⁸²	8	1664 ²¹⁷	259 ⁸⁵
40	9160 ¹⁰⁸⁶	8519 ³⁴⁰	40	476 ¹⁴⁸	514 ¹⁸²	9	1881 ²¹⁹	174 ⁸³
45	9703 ¹¹⁰	8349 ³³⁴	45	550 ¹⁵⁰	423 ¹⁸⁰	1,10	2100 ²²¹	091 ⁸²
50	3 025 ¹¹⁰	8182 ³²⁸	50	625 ¹⁵⁰	333 ¹⁷⁶	1	2321 ²²³	009 ⁸⁰
55	080 ¹¹²	8018 ³²²	55	700 ¹⁵²	245 ¹⁷⁴	2	2544 ²²⁵	0,8929 ⁷⁹
60	136 ¹¹²	7857 ³¹⁶	60	776 ¹⁵²	158 ¹⁷²	3	2769 ²²⁷	850 ⁷⁸
65	192 ¹¹⁴	7699 ³¹⁰	65	852 ¹⁵⁴	072 ¹⁷⁰	4	2996 ²²⁹	772 ⁷⁶
70	249 ¹¹⁴	7544 ³⁰⁶	70	929 ¹⁵⁴	2 987 ¹⁶⁸	5	3225 ²³¹	696 ⁷⁵
75	306 ¹¹⁶	7391 ³⁰⁰	75	6 006 ¹⁵⁶	903 ¹⁶⁴	6	3456 ²³³	621 ⁷⁴
80	364 ¹¹⁶	7241 ²⁹⁴	80	084 ¹⁵⁶	821 ¹⁶⁴	7	3689 ²³⁵	547 ⁷²
85	422 ¹¹⁸	7094 ²⁹⁰	85	162 ¹⁵⁸	739 ¹⁶²	8	3924 ²³⁷	475 ⁷²
90	481 ¹¹⁸	6949 ²⁸⁴	90	241 ¹⁵⁸	658 ¹⁵⁸	9	4161 ²³⁹	403 ⁷⁰
95	540 ¹²⁰	6807 ²⁸⁰	95	320 ¹⁶⁰	579 ¹⁵⁸	1,20	4400 ²⁴¹	333 ⁶⁹
6 00	3 600	1,6667	8 00	6 400	2 500	1	4641 ²⁴³	264 ⁶⁷
0,	0,		0,	0,	1,	2	4884 ²⁴⁵	197 ⁶⁷
						3	5129 ²⁴⁷	130 ⁶⁵
						4	5376 ²⁴⁹	065 ⁶⁵
						5	5625 ²⁵¹	000 ⁶³
						6	5876 ²⁵³	0,7937 ⁶³
						7	6129 ²⁵⁵	874 ⁶¹
						8	6384 ²⁵⁷	813 ⁶¹
						9	6641 ²⁵⁹	752 ⁶⁰
						1,30	1,6900	0,7692

Quadrate und Kehrwerte
Squares and reciprocals

13

x	x^2	$\frac{1}{x}$	x	x^2	$\frac{1}{x}$	x	x^2	$\frac{1}{x}$
		0,			0,			0,
1,30	1,6900 ²⁶¹	7 692 ⁵⁸	2,00	4,000 ⁴⁰	5 000 ²⁵	3,00	9,000 ⁶⁰	3 333 ¹¹
1	7161 ²⁶³	634 ⁵⁸	2	080 ⁴¹	4 950 ²⁴	2	120 ⁶¹	311 ¹¹
2	7424 ²⁶⁵	576 ⁵⁷	4	162 ⁴¹	902 ²⁴	4	242 ⁶¹	289 ^{10,5}
3	7689 ²⁶⁷	519 ⁵⁶	6	244 ⁴¹	854 ²³	6	364 ⁶¹	268 ^{10,5}
4	7956 ²⁶⁹	463 ⁵⁶	8	326 ⁴²	808 ²³	8	486 ⁶²	247 ^{10,5}
5	8225 ²⁷¹	407 ⁵⁴	2,10	410 ⁴²	762 ^{22,5}	3,10	610 ⁶²	226 ^{10,5}
6	8496 ²⁷³	353 ⁵⁴	2	494 ⁴³	717 ²²	2	734 ⁶³	205 ¹⁰
7	8769 ²⁷⁵	299 ⁵³	4	580 ⁴³	673 ^{21,5}	4	860 ⁶³	185 ¹⁰
8	9044 ²⁷⁷	246 ⁵²	6	666 ⁴³	630 ^{21,5}	6	986 ⁶³	165 ¹⁰
9	9321 ²⁷⁹	194 ⁵¹	8	752 ⁴⁴	587 ²¹	8	10,112 ⁶⁴	145 ¹⁰
1,40	9600 ²⁸¹	143 ⁵¹	2,20	840 ⁴⁴	545 ²⁰	3,20	240 ⁶⁴	125 ^{9,5}
1	9881 ²⁸³	092 ⁵⁰	2	928 ⁴⁵	505 ^{20,5}	2	368 ⁶⁵	106 ¹⁰
2	2,0164 ²⁸⁵	042 ⁴⁹	4	5,018 ⁴⁵	464 ^{19,5}	4	498 ⁶⁵	086 ^{9,5}
3	0449 ²⁸⁷	5 993 ⁴⁹	6	108 ⁴⁵	425 ^{19,5}	6	628 ⁶⁵	067 ⁹
4	0736 ²⁸⁹	944 ⁴⁷	8	198 ⁴⁶	386 ¹⁹	8	758 ⁶⁶	049 ^{9,5}
5	1025 ²⁹¹	897 ⁴⁸	2,30	290 ⁴⁶	348 ¹⁹	3,30	890 ⁶⁶	030 ⁹
6	1316 ²⁹³	849 ⁴⁶	2	382 ⁴⁷	310 ¹⁸	2	11,022 ⁶⁷	012 ⁹
7	1609 ²⁹⁵	803 ⁴⁶	4	476 ⁴⁷	274 ^{18,5}	4	156 ⁶⁷	2 9940 ⁸⁹
8	1904 ²⁹⁷	757 ⁴⁶	6	570 ⁴⁷	237 ^{17,5}	6	290 ⁶⁷	9762 ⁸⁸
9	2201 ²⁹⁹	711 ⁴⁴	8	664 ⁴⁸	202 ^{17,5}	8	424 ⁶⁸	9586 ⁸⁷
1,50	2500 ³⁰²	667 ⁴⁴	2,40	760 ⁴⁸	167 ^{17,5}	3,40	560 ⁶⁸	9412 ⁸⁶
2	3104 ³⁰⁶	579 ^{42,5}	2	856 ⁴⁸	132 ¹⁷	2	696 ⁶⁹	9240 ⁸⁵
4	3716 ³¹⁰	494 ⁴²	4	954 ⁴⁹	098 ^{16,5}	4	834 ⁶⁹	9070 ⁸⁴
6	4336 ³¹⁴	410 ^{40,5}	6	6,052 ⁴⁹	065 ^{16,5}	6	972 ⁶⁹	8902 ⁸³
8	4964 ³¹⁸	329 ^{39,5}	8	150 ⁵⁰	032 ¹⁶	8	12,110 ⁷⁰	8736 ^{82,5}
1,60	5600 ³²²	250 ^{38,5}	2,50	250 ⁵⁰	000 ¹⁶	3,50	250 ⁷⁰	8571 ⁸¹
2	6244 ³²⁶	173 ^{37,5}	2	350 ⁵¹	3 968 ^{15,5}	2	390 ⁷¹	8409 ⁸⁰
4	6896 ³³⁰	098 ³⁷	4	452 ⁵¹	937 ^{15,5}	4	532 ⁷¹	8249 ^{79,5}
6	7556 ³³⁴	024 ³⁶	6	554 ⁵¹	906 ¹⁵	6	674 ⁷¹	8090 ^{78,5}
8	8224 ³³⁸	5 952 ³⁵	8	656 ⁵²	876 ¹⁵	8	816 ⁷²	7933 ^{77,5}
1,70	8900 ³⁴²	882 ³⁴	2,60	760 ⁵²	846 ^{14,5}	3,60	960 ⁷²	7778 ⁷⁷
2	9584 ³⁵	814 ^{33,5}	2	864 ⁵³	817 ^{14,5}	2	13,104 ⁷³	7624 ^{75,5}
4	3,028 ³⁵	747 ^{32,5}	4	970 ⁵³	788 ^{14,5}	4	250 ⁷³	7473 ^{75,5}
6	098 ³⁵	682 ³²	6	7,076 ⁵³	759 ¹⁴	6	396 ⁷³	7322 ⁷⁴
8	168 ³⁶	618 ³¹	8	182 ⁵⁴	731 ^{13,5}	8	542 ⁷⁴	7174 ^{73,5}
1,80	240 ³⁶	556 ^{30,5}	2,70	290 ⁵⁴	704 ¹⁴	3,70	690 ⁷⁴	7027 ^{72,5}
2	312 ³⁷	495 ³⁰	2	398 ⁵⁵	676 ¹³	2	838 ⁷⁵	6882 ⁷²
4	386 ³⁷	435 ^{29,5}	4	508 ⁵⁵	650 ^{13,5}	4	988 ⁷⁵	6738 ⁷¹
6	460 ³⁷	376 ^{28,5}	6	618 ⁵⁵	623 ¹³	6	14,138 ⁷⁵	6596 ^{70,5}
8	534 ³⁸	319 ²⁸	8	728 ⁵⁶	597 ¹³	8	288 ⁷⁶	6455 ^{69,5}
1,90	610 ³⁸	263 ^{27,5}	2,80	840 ⁵⁶	571 ^{12,5}	3,80	440 ⁷⁶	6316 ⁶⁹
2	686 ³⁹	208 ^{26,5}	2	952 ⁵⁷	546 ^{12,5}	2	592 ⁷⁷	6178 ⁶⁸
4	764 ³⁹	155 ^{26,5}	4	8,066 ⁵⁷	521 ¹²	4	746 ⁷⁷	6042 ^{67,5}
6	842 ³⁹	102 ^{25,5}	6	180 ⁵⁷	497 ^{12,5}	6	900 ⁷⁷	5907 ⁶⁷
8	920 ⁴⁰	051 ^{25,5}	8	294 ⁵⁸	472 ¹²	8	15,054 ⁷⁸	5773 ⁶⁶
2,00	4,000	5 000	2,90	410 ⁵⁸	448 ^{11,5}	3,90	210 ⁷⁸	5641 ^{65,5}
		0,	2	526 ⁵⁹	425 ¹²	2	366 ⁷⁹	5510 ^{64,5}
			4	644 ⁵⁹	401 ^{11,5}	4	524 ⁷⁹	5381 ⁶⁴
			6	762 ⁵⁹	378 ¹¹	6	682 ⁷⁹	5253 ^{63,5}
			8	880 ⁶⁰	356 ^{11,5}	8	840 ⁸⁰	5126 ⁶³
			3,00	9,000	3 333	4,00	16,000	2 5000
					0,			0,

x	x^3	$\frac{1}{x^3}$	x	x^3	$\frac{1}{x^3}$	x	x^3	$\frac{1}{x^3}$
0,250	0,01 5625 ¹⁸⁹	16, 000 ^{126,5}	0,350	0,04 288 ^{36,5}	8, 163 ^{46,5}	0,450	0,09 113 ⁶¹	4, 938 ^{21,5}
2	6003 ¹⁹²	15, 747 ^{123,5}	2	361 ^{37,5}	070 ^{45,5}	2	235 ^{61,5}	895 ^{21,5}
4	6387 ¹⁹⁵	500 ^{120,5}	4	436 ³⁸	7, 979 ^{44,5}	4	358 ⁶²	852 ^{21,5}
6	6777 ^{198,5}	259 ¹¹⁸	6	512 ³⁸	890 ⁴⁴	6	482 ^{62,5}	809 ²¹
8	7174 ²⁰¹	023 ¹¹⁵	8	588 ³⁹	802 ⁴³	8	607 ^{63,5}	767 ^{20,5}
0,260	7576 ^{204,5}	14, 793 ^{112,5}	0,360	666 ³⁹	716 ^{42,5}	0,460	734 ^{63,5}	726 ^{20,5}
2	7985 ^{207,5}	568 ¹¹⁰	2	744 ^{39,5}	631 ⁴²	2	861 ^{64,5}	685 ²⁰
4	8400 ^{210,5}	348 ^{107,5}	4	823 ⁴⁰	547 ⁴¹	4	990 ^{64,5}	645 ²⁰
6	8821 ²¹⁴	133 ¹⁰⁵	6	903 ^{40,5}	465 ^{40,5}	6	0,10 119 ^{65,5}	605 ^{19,5}
8	9249 ²¹⁷	13, 923 ¹⁰³	8	984 ^{40,5}	384 ^{39,5}	8	250 ⁶⁶	566 ^{19,5}
0,270	9683 ^{220,5}	717 ^{100,5}	0,370	0,05 065 ^{41,5}	305 ^{39,5}	0,470	382 ^{66,5}	527 ¹⁹
2	0,02 0124 ^{223,5}	516 ⁹⁸	2	148 ^{41,5}	226 ^{38,5}	2	515 ^{67,5}	489 ¹⁹
4	0571 ²²⁷	320 ^{96,5}	4	231 ^{42,5}	149 ³⁸	4	650 ^{67,5}	451 ^{18,5}
6	1025 ²³⁰	127 ⁹⁴	6	316 ^{42,5}	073 ³⁷	6	785 ^{68,5}	414 ^{18,5}
8	1485 ^{233,5}	12, 939 ⁹²	8	401 ⁴³	6, 999 ³⁷	8	922 ^{68,5}	377 ^{18,5}
0,280	1952 ²³⁷	755 ⁹⁰	0,380	487 ^{43,5}	925 ^{36,5}	0,480	0,11 059 ^{69,5}	340 ¹⁸
2	2426 ²⁴⁰	575 ^{88,5}	2	574 ⁴⁴	852 ³⁵	2	198 ⁷⁰	304 ^{17,5}
4	2906 ²⁴⁴	398 ⁸⁶	4	662 ^{44,5}	782 ³⁵	4	338 ^{70,5}	269 ^{17,5}
6	3394 ²⁴⁷	226 ⁸⁵	6	751 ⁴⁵	712 ^{34,5}	6	479 ⁷¹	234 ^{17,5}
8	3888 ^{250,5}	056 ^{82,5}	8	841 ^{45,5}	643 ³⁴	8	621 ⁷²	199 ¹⁷
0,290	4389 ²⁵⁴	11, 891 ^{81,5}	0,390	932 ⁴⁶	575 ^{33,5}	0,490	765 ^{72,5}	165 ¹⁷
2	4897 ^{257,5}	728 ^{79,5}	2	0,06 024 ⁴⁶	508 ^{33,5}	2	910 ^{72,5}	131 ^{16,5}
4	5412 ²⁶¹	569 ⁷⁸	4	116 ⁴⁶	441 ^{32,5}	4	0,12 055 ^{73,5}	098 ^{16,5}
6	5934 ²⁶⁵	413 ⁷⁶	6	210 ⁴⁷	376 ³²	6	202 ^{74,5}	065 ^{16,5}
8	6464 ²⁶⁸	261 ⁷⁵	8	304 ⁴⁸	312 ³¹	8	351 ^{74,5}	032 ¹⁶
0,300	7000 ²⁷²	111 ^{73,5}	0,400	400 ⁴⁸	250 ³¹	0,500	500 ^{75,5}	000 ¹⁶
2	7544 ²⁷⁵	10, 964 ^{71,5}	2	496 ⁴⁹	188 ^{30,5}	2	651 ^{75,5}	3, 968 ^{15,5}
4	8094 ^{279,5}	821 ^{70,5}	4	594 ⁴⁹	127 ³⁰	4	802 ^{76,5}	937 ^{15,5}
6	8653 ^{282,5}	680 ^{69,5}	6	692 ⁵⁰	067 ³⁰	6	955 ^{77,5}	906 ^{15,5}
8	9218 ^{286,5}	541 ^{67,5}	8	792 ⁵⁰	007 ²⁹	8	0,13 110 ^{77,5}	875 ¹⁵
0,310	9791 ²⁹	406 ^{66,5}	0,410	892 ^{50,5}	5, 949 ²⁹	0,510	265 ^{78,5}	845 ¹⁵
2	0,03 037 ^{29,5}	273 ^{65,5}	2	993 ^{51,5}	891 ^{28,5}	2	422 ⁷⁹	815 ¹⁵
4	096 ^{29,5}	142 ⁶⁴	4	0,07 096 ^{51,5}	834 ²⁸	4	580 ^{79,5}	785 ^{14,5}
6	155 ^{30,5}	014 ^{62,5}	6	199 ⁵²	778 ^{27,5}	6	739 ⁸⁰	756 ^{14,5}
8	216 ^{30,5}	9, 889 ^{61,5}	8	303 ⁵³	723 ²⁷	8	899 ⁸¹	727 ^{14,5}
0,320	277 ³¹	766 ^{60,5}	0,420	409 ⁵³	669 ²⁷	0,520	0,14 061 ^{81,5}	698 ¹⁴
2	339 ³¹	645 ⁵⁹	2	515 ⁵⁴	615 ^{26,5}	2	224 ⁸²	670 ¹⁴
4	401 ³²	527 ^{58,5}	4	623 ⁵⁴	562 ²⁶	4	388 ^{82,5}	642 ¹⁴
6	465 ³²	410 ^{57,5}	6	731 ^{54,5}	510 ^{25,5}	6	553 ^{83,5}	614 ^{13,5}
8	529 ^{32,5}	295 ⁵⁶	8	840 ^{55,5}	459 ^{25,5}	8	720 ⁸⁴	587 ^{13,5}
0,330	594 ^{32,5}	183 ⁵⁵	0,430	951 ^{55,5}	408 ²⁵	0,530	888 ^{84,5}	560 ^{13,5}
2	659 ^{33,5}	073 ⁵⁴	2	0,08 062 ^{56,5}	358 ^{24,5}	2	0,15 057 ⁸⁵	533 ¹³
4	726 ^{33,5}	8, 965 ^{53,5}	4	175 ^{56,5}	309 ²⁴	4	227 ⁸⁶	507 ¹³
6	793 ³⁴	858 ⁵²	6	288 ^{57,5}	261 ²⁴	6	399 ^{86,5}	481 ¹³
8	861 ^{34,5}	754 ^{51,5}	8	403 ^{57,5}	213 ²⁴	8	572 ⁸⁷	455 ¹³
0,340	930 ³⁵	651 ^{50,5}	0,440	518 ^{58,5}	165 ²³	0,540	746 ⁸⁸	429 ^{12,5}
2	0,04 000 ^{35,5}	550 ⁵⁰	2	635 ⁵⁹	119 ²³	2	922 ^{88,5}	404 ^{12,5}
4	071 ^{35,5}	450 ^{48,5}	4	753 ^{59,5}	073 ²³	4	0,16 099 ⁸⁹	379 ^{12,5}
6	142 ³⁶	353 ⁴⁸	6	872 ⁶⁰	027 ^{22,5}	6	277 ⁹⁰	354 ¹²
8	214 ³⁷	257 ⁴⁷	8	992 ^{60,5}	4, 982 ²²	8	457 ^{90,5}	330 ¹²
0,350	0,04 288	8, 163	0,450	0,09 113	4, 938	0,550	0,16 638	3, 306

Kuben und Kehrwerte der Quadrate
Cubes and Reciprocals of the Squares

15

x	x^3	$\frac{1}{x^2}$	x	x^3	$\frac{1}{x^2}$	x	x^3	$\frac{1}{x^2}$
0,550	0,1 6638 ₉₁	3, 306 ₁₂	0,700	0,3 430 ₁₄₈	2,0 408 ₅₇₆	0,950	0,8 574 ₂₇₂	1,1 080 ₂₃₀
2	6820 _{91,5}	282 ₁₂	05	504 ₁₅₀	120 ₅₆₆	55	710 ₂₇₄	1,0 965 ₂₂₈
4	7003 _{92,5}	258 _{11,5}	10	579 ₁₅₂	1,9 837 ₅₅₂	60	847 ₂₇₈	851 ₂₂₄
6	7188 ₉₃	235 _{11,5}	15	655 ₁₅₄	561 ₅₄₂	65	986 ₂₈₂	739 ₂₂₂
8	7374 ₉₄	212 _{11,5}	20	732 ₁₅₈	290 ₅₃₀	70	0,9 127 ₂₈₄	628 ₂₁₈
0,560	7562 ₉₄	189 _{11,5}	25	811 ₁₅₈	025 ₅₂₀	75	269 ₂₈₆	519 ₂₁₄
2	7750 _{95,5}	166 ₁₁	30	890 ₁₆₂	1,8 765 ₅₀₈	80	412 ₂₉₀	412 ₂₁₀
4	7941 _{95,5}	144 ₁₁	35	971 ₁₆₂	511 ₄₉₈	85	557 ₂₉₂	307 ₂₀₈
6	8132 _{96,5}	122 ₁₁	40	0,4 052 ₁₆₆	262 ₄₉₀	90	703 ₂₉₆	203 ₂₀₄
8	8325 ₉₇	100 ₁₁	45	135 ₁₆₈	017 ₄₇₈	95	851 ₂₉₈	101 ₂₀₂
0,570	8519 ₉₈	078 ₁₁	50	219 ₁₇₀	1,7 778 ₄₇₀	1,000	1,0 000 ₃₀₂	000 ₁₉₈
2	8715 _{98,5}	056 _{10,5}	55	304 ₁₇₂	543 ₄₆₀	05	151 ₃₀₄	0,9 901 ₁₉₆
4	8912 ₉₉	035 _{10,5}	60	390 ₁₇₄	313 ₄₅₂	10	303 ₃₀₈	803 ₁₉₂
6	9110 ₁₀₀	014 _{10,5}	65	477 ₁₇₆	087 ₄₄₂	15	457 ₃₁₀	707 ₁₉₀
8	9310 _{100,5}	2, 9933 ₁₀₃	70	565 ₁₈₀	1,6 866 ₄₃₄	20	612 ₃₁₄	612 ₁₈₈
0,580	9511 _{101,5}	9727 ₁₀₂	75	655 ₁₈₂	649 ₄₂₄	25	769 ₃₁₆	518 ₁₈₄
2	9714 ₁₀₂	9523 ₁₀₁	80	746 ₁₈₂	437 ₄₁₈	30	927 ₃₂₀	426 ₁₈₂
4	9918 _{102,5}	9321 ₁₀₀	85	837 ₁₈₆	228 ₄₁₀	35	1,1 087 ₃₂₄	335 ₁₇₈
6	0,2 0123 _{103,5}	9121 ₉₉	90	930 ₁₉₀	023 ₄₀₂	40	249 ₃₂₆	246 ₁₇₈
8	0330 ₁₀₄	8923 ₉₈	95	0,5 025 ₁₉₀	1,5 822 ₃₉₄	45	412 ₃₂₈	157 ₁₇₄
0,590	0538 _{104,5}	8727 _{96,5}	0,800	120 ₁₉₄	625 ₃₈₈	50	576 ₃₃₂	070 ₁₇₀
2	0747 _{105,5}	8534 ₉₆	05	217 ₁₉₄	431 ₃₈₀	55	742 ₃₃₆	0,8 985 ₁₇₀
4	0958 _{106,5}	8342 ₉₅	10	314 ₁₉₈	241 ₃₇₂	60	910 ₃₃₈	900 ₁₆₆
6	1171 ₁₀₇	8152 ₉₄	15	413 ₂₀₂	055 ₃₆₆	65	1,2 079 ₃₄₂	817 ₁₆₆
8	1385 _{107,5}	7964 ₉₃	20	514 ₂₀₂	1,4 872 ₃₆₀	70	250 ₃₄₆	734 ₁₆₂
0,600	1600 ₁₀₉₀	7778 ₉₁₄	25	615 ₂₀₆	692 ₃₅₂	75	423 ₃₄₈	653 ₁₆₀
05	2145 ₁₁₀₆	7321 ₈₉₂	30	718 ₂₀₈	516 ₃₄₆	80	597 ₃₅₂	573 ₁₅₆
10	2698 ₁₁₂₆	6875 ₈₇₂	35	822 ₂₁₀	343 ₃₄₂	85	773 ₃₅₄	495 ₁₅₆
15	3261 ₁₁₄₄	6439 ₈₄₈	40	927 ₂₁₄	172 ₃₃₄	90	950 ₃₅₈	417 ₁₅₄
20	3833 ₁₁₆₂	6015 ₈₃₀	45	0,6 034 ₂₁₄	005 ₃₂₈	95	1,3 129 ₃₆₂	340 ₁₅₂
25	4414 ₁₁₈₂	5600 ₈₁₀	50	141 ₂₁₈	1,3 841 ₃₂₄	1,100	310 ₃₆₄	264 ₁₄₈
30	5005 ₁₂₀₀	5195 ₇₉₀	55	250 ₂₂₂	679 ₃₁₆	05	492 ₃₆₈	190 ₁₄₈
35	5605 ₁₂₁₈	4800 ₇₇₂	60	361 ₂₂₂	521 ₃₁₂	10	676 ₃₇₂	116 ₁₄₄
40	6214 ₁₂₄₀	4414 ₇₅₄	65	472 ₂₂₆	365 ₃₀₆	15	862 ₃₇₄	044 ₁₄₄
45	6834 ₁₂₅₈	4037 ₇₃₆	70	585 ₂₂₈	212 ₃₀₂	20	1,4 049 ₃₇₈	0,7 972 ₁₄₂
50	7463 ₁₂₇₆	3669 ₇₂₀	75	699 ₂₃₂	061 ₂₉₆	25	238 ₃₈₂	901 ₁₄₀
55	8101 ₁₂₉₈	3309 ₇₀₄	80	815 ₂₃₄	1,2 913 ₂₉₀	30	429 ₃₈₄	831 ₁₃₆
60	8750 ₁₃₁₆	2957 ₆₈₈	85	932 ₂₃₆	768 ₂₈₆	35	621 ₃₈₈	763 ₁₃₆
65	9408 ₁₃₄	2613 ₆₇₂	90	0,7 050 ₂₃₈	625 ₂₈₂	40	815 ₃₉₂	695 ₁₃₄
70	0,3 008 ₁₃₄	2277 ₆₅₈	95	169 ₂₄₂	484 ₂₇₆	45	1,5 011 ₃₉₆	628 ₁₃₄
75	075 ₁₃₈	1948 ₆₄₄	0,900	290 ₂₄₄	346 ₂₇₂	50	209 ₃₉₈	561 ₁₃₀
80	144 ₁₄₀	1626 ₆₂₈	05	412 ₂₄₈	210 ₂₆₈	55	408 ₄₀₂	496 ₁₂₈
85	214 ₁₄₂	1312 ₆₁₆	10	536 ₂₅₀	076 ₂₆₄	60	609 ₄₀₆	432 ₁₂₈
90	285 ₁₄₄	1004 ₆₀₂	15	661 ₂₅₂	1,1 944 ₂₅₈	65	812 ₄₀₈	368 ₁₂₆
95	357 ₁₄₆	0703 ₅₉₀	20	787 ₂₅₆	815 ₂₅₆	70	1,6 016 ₄₁₂	305 ₁₂₄
0,700	0,3 430	2, 0408	25	915 ₂₅₈	687 ₂₅₀	75	222 ₄₁₆	243 ₁₂₂
			30	0,8 044 ₂₆₀	562 ₂₄₆	80	430 ₄₂₀	182 ₁₂₂
			35	174 ₂₆₄	439 ₂₄₄	85	640 ₄₂₄	121 ₁₁₈
			40	306 ₂₆₆	317 ₂₃₈	90	852 ₄₂₆	062 ₁₁₈
			45	439 ₂₇₀	198 ₂₃₆	95	1,7 065 ₄₃₀	003 ₁₁₈
			0,950	0,8 574	1,1 080	1,200	1,7 280	0,6 944

I. Potenzen
I. Powers

x	x^3	$\frac{I}{x^3}$	x	x^3	$\frac{I}{x^2}$	x	x^3	$\frac{I}{x^3}$
1,200	1,7280	0,6 944 ¹¹⁴	1,50	3,375 ⁶⁸	0,4 444 ⁵⁸	2,00	8,000 ¹²¹	0,2 5000 ²⁴⁸
05	7497 ⁴³⁴	887 ¹¹⁴	1	443 ⁶⁹	386 ⁵⁸	1	121 ¹²¹	4752 ²⁴⁵
10	7716 ⁴³⁸	830 ¹¹²	2	512 ⁷⁰	328 ⁵⁶	2	212 ¹²³	4507 ²⁴⁰
15	7936 ⁴⁴⁰	774 ¹¹⁰	3	582 ⁷⁰	272 ⁵⁵	3	365 ¹²⁵	4267 ²³⁸
20	8158 ⁴⁴⁴	719 ¹¹⁰	4	652 ⁷²	217 ⁵⁵	4	490 ¹²⁵	4029 ²³⁴
25	8383 ⁴⁵²	664 ¹⁰⁸	5	724 ⁷²	162 ⁵³	5	615 ¹²⁷	3795 ²³⁰
30	8609 ⁴⁵⁶	610 ¹⁰⁸	6	796 ⁷⁴	109 ⁵²	6	742 ¹²⁸	3565 ²²⁷
35	8837 ⁴⁵⁸	556 ¹⁰⁴	7	870 ⁷⁴	057 ⁵¹	7	870 ¹²⁹	3338 ²²⁴
40	9066 ⁴⁶⁴	504 ¹⁰⁴	8	944 ⁷⁶	006 ⁵⁰	8	999 ¹³⁰	3114 ²²¹
45	9298 ⁴⁶⁶	452 ¹⁰⁴	9	4,020 ⁷⁶	0,3 956 ⁵⁰	9	9,129 ¹³²	2893 ²¹⁷
1,25	9531 ⁴⁷³	400 ¹⁰¹	1,60	096 ⁷⁷	906 ⁴⁸	2,10	261 ¹³³	2676 ²¹⁵
6	2,0004 ⁴⁸⁰	299 ⁹⁹	1	173 ⁷⁹	858 ⁴⁸	1	394 ¹³⁴	2461 ²¹¹
7	0484 ⁴⁸⁸	200 ⁹⁶	2	252 ⁷⁹	810 ⁴⁸	2	528 ¹³⁶	2250 ²⁰⁹
8	0972 ⁴⁹⁵	104 ⁹⁵	3	331 ⁸⁰	764 ⁴⁶	3	664 ¹³⁶	2041 ²⁰⁵
9	1467 ⁵⁰³	009 ⁹²	4	411 ⁸¹	718 ⁴⁵	4	800 ¹³⁸	1836 ²⁰³
1,30	1970 ⁵¹¹	0,5 917 ⁹⁰	5	492 ⁸²	673 ⁴⁴	5	938 ¹⁴⁰	1633 ²⁰⁰
1	2481 ⁵¹⁹	827 ⁸⁸	6	574 ⁸³	629 ⁴³	6	10,078 ¹⁴⁰	1433 ¹⁹⁷
2	3000 ⁵²⁶	739 ⁸⁶	7	657 ⁸⁵	586 ⁴³	7	218 ¹⁴²	1236 ¹⁹⁴
3	3526 ⁵³⁵	653 ⁸⁴	8	742 ⁸⁵	543 ⁴²	8	360 ¹⁴³	1042 ¹⁹²
4	4061 ⁵⁴³	569 ⁸²	9	827 ⁸⁶	501 ⁴¹	9	503 ¹⁴⁵	0850 ¹⁸⁹
5	4604 ⁵⁵¹	487 ⁸⁰	1,70	913 ⁸⁷	460 ⁴⁰	2,20	648 ¹⁴⁶	0661 ¹⁸⁶
6	5155 ⁵⁵⁹	407 ⁷⁹	1	5,000 ⁸⁸	420 ⁴⁰	1	794 ¹⁴⁷	0475 ¹⁸⁴
7	5714 ⁵⁶⁷	328 ⁷⁷	2	088 ⁹⁰	380 ³⁹	2	941 ¹⁴⁹	0291 ¹⁸²
8	6281 ⁵⁷⁵	251 ⁷⁵	3	178 ⁹⁰	341 ³⁸	3	11,090 ¹⁴⁹	0109 ¹⁷⁹
9	6856 ⁵⁸⁴	176 ⁷⁴	4	268 ⁹¹	303 ³⁸	4	239 ¹⁵²	0,1 9930 ¹⁷⁷
1,40	7440 ⁵⁹²	102 ⁷²	5	359 ⁹³	265 ³⁷	5	391 ¹⁵²	9753 ¹⁷⁴
1	8032 ⁶⁰¹	030 ⁷¹	6	452 ⁹³	228 ³⁶	6	543 ¹⁵⁴	9579 ¹⁷²
2	8633 ⁶⁰⁹	0,4 959 ⁶⁹	7	545 ⁹⁵	192 ³⁶	7	697 ¹⁵⁵	9407 ¹⁷⁰
3	9242 ⁶¹⁸	890 ⁶⁷	8	640 ⁹⁵	156 ³⁵	8	852 ¹⁵⁷	9237 ¹⁶⁸
4	9860 ⁶³	823 ⁶⁷	9	735 ⁹⁷	121 ³⁵	9	12,009 ¹⁵⁸	9069 ¹⁶⁵
5	3,049 ⁶³	756 ⁶⁵	1,80	832 ⁹⁸	086 ³⁴	2,30	167 ¹⁵⁹	8904 ¹⁶⁴
6	112 ⁶⁵	691 ⁶³	1	930 ⁹⁹	052 ³³	1	326 ¹⁶¹	8740 ¹⁶¹
7	177 ⁶⁵	628 ⁶³	2	6,029 ⁹⁹	019 ³³	2	487 ¹⁶²	8579 ¹⁵⁹
8	242 ⁶⁶	565 ⁶¹	3	128 ¹⁰²	0,2 9861 ³³	3	649 ¹⁶⁴	8420 ¹⁵⁷
9	308 ⁶⁷	504 ⁶⁰	4	230 ¹⁰²	9537 ³¹⁹	4	813 ¹⁶⁵	8263 ¹⁵⁵
1,50	3,375	0,4 444	5	332 ¹⁰³	9218 ³¹³	5	978 ¹⁶⁶	8108 ¹⁵³
			6	435 ¹⁰⁴	8905 ³⁰⁸	6	13,144 ¹⁶⁸	7955 ¹⁵²
			7	539 ¹⁰⁶	8597 ³⁰⁴	7	312 ¹⁶⁹	7803 ¹⁴⁹
			8	645 ¹⁰⁶	8293 ²⁹⁸	8	481 ¹⁷¹	7654 ¹⁴⁷
			9	751 ¹⁰⁸	7995 ²⁹⁴	9	652 ¹⁷²	7507 ¹⁴⁶
			1,90	859 ¹⁰⁹	7701 ²⁸⁹	2,40	824 ¹⁷⁴	7361 ¹⁴⁴
			1	968 ¹¹⁰	7412 ²⁸⁵	1	998 ¹⁷⁴	7217 ¹⁴²
			2	7,078 ¹¹¹	7127 ²⁸¹	2	14,172 ¹⁷⁷	7075 ¹⁴⁰
			3	189 ¹¹²	6846 ²⁷⁶	3	349 ¹⁷⁸	6935 ¹³⁸
			4	301 ¹¹⁴	6570 ²⁷²	4	527 ¹⁷⁹	6797 ¹³⁷
			5	415 ¹¹⁵	6298 ²⁶⁷	5	706 ¹⁸¹	6660 ¹³⁵
			6	530 ¹¹⁵	6031 ²⁶⁴	6	887 ¹⁸²	6525 ¹³⁴
			7	645 ¹¹⁷	5767 ²⁵⁹	7	15,069 ¹⁸³	6391 ¹³²
			8	762 ¹¹⁹	5508 ²⁵⁶	8	252 ¹⁸⁶	6259 ¹³⁰
			9	881 ¹¹⁹	5252 ²⁵²	9	438 ¹⁸⁷	6129 ¹²⁹
			2,00	8,000	0,2 5000	2,50	15,625	0,1 6000

Potenzen von
Powers of 2, 3, 5, 7, 11

17

x	2^x	x	2^x	x	2^x	x	2^x	x	2^x
1	2	10	1 024	19	524 288	28	268 435 456	37	137 438 953 472
2	4	11	2 048	20	1 048 576	29	536 870 912	38	274 877 906 944
3	8	12	4 096	21	2 097 152	30	1 073 741 824	39	549 755 813 888
4	16	13	8 192	22	4 194 304	31	2 147 483 648	40	1 099 511 627 776
5	32	14	16 384	23	8 388 608	32	4 294 967 296	41	2 199 023 255 552
6	64	15	32 768	24	16 777 216	33	8 589 934 592	42	4 398 046 511 104
7	128	16	65 536	25	33 554 432	34	17 179 869 184	43	8 796 093 022 208
8	256	17	131 072	26	67 108 864	35	34 359 738 368	44	17 592 186 044 416
9	512	18	262 144	27	134 217 728	36	68 719 476 736	45	35 184 372 088 832

x	3^x	x	3^x	x	3^x	x	3^x
1	3	10	59 049	19	1 162 261 467	28	22 876 792 454 961
2	9	11	177 147	20	3 486 784 401	29	68 630 377 364 883
3	27	12	531 441	21	10 460 353 203	30	205 891 132 094 649
4	81	13	1 594 323	22	31 381 059 609	31	617 673 396 283 947
5	243	14	4 782 969	23	94 143 178 827	32	1 853 020 188 851 841
6	729	15	14 348 907	24	282 429 536 481	33	5 559 060 566 555 523
7	2 187	16	43 046 721	25	847 288 609 443	34	16 677 181 699 666 569
8	6 561	17	129 140 163	26	2 541 865 828 329	35	50 031 545 098 999 707
9	19 683	18	387 420 489	27	7 625 597 484 987	36	150 094 635 296 999 121

x	5^x	x	5^x	x	5^x
1	5	10	9 765 625	19	19 073 486 328 125
2	25	11	48 828 125	20	95 367 431 640 625
3	125	12	244 140 625	21	476 837 158 203 125
4	625	13	1 220 703 125	22	2 384 185 791 015 625
5	3 125	14	6 103 515 625	23	11 920 928 955 078 125
6	15 625	15	30 517 578 125	24	59 604 644 775 390 625
7	78 125	16	152 587 890 625	25	298 023 223 876 953 125
8	390 625	17	762 939 453 125	26	1 490 116 119 384 765 625
9	1 953 125	18	3 814 697 265 625	27	7 450 580 596 923 828 125

x	7^x	x	7^x	x	7^x
1	7	10	282 475 249	19	11 398 895 185 373 143
2	49	11	1 977 326 743	20	79 792 266 297 612 001
3	343	12	13 841 287 201	21	558 545 864 083 284 007
4	2 401	13	96 889 010 407	22	3 909 821 048 582 988 049
5	16 807	14	678 223 072 849	23	27 368 747 340 080 916 343
6	117 649	15	4 747 561 509 943	24	191 581 231 380 566 414 401
7	823 543	16	33 232 930 569 601	25	1 341 068 619 663 964 900 807
8	5 764 801	17	232 630 513 987 207	26	9 387 480 337 647 754 305 649
9	40 353 607	18	1 628 413 597 910 449	27	65 712 362 363 534 280 139 543

x	11^x	x	11^x	x	11^x
1	11	10	25 937 424 601	19	61 159 090 448 414 546 291
2	121	11	285 311 670 611	20	672 749 994 932 560 009 201
3	1 331	12	3 138 428 376 721	21	7 400 249 944 258 160 101 211
4	14 641	13	34 522 712 143 931	22	81 402 749 386 839 761 113 321
5	161 051	14	379 749 833 583 241	23	895 430 243 255 237 372 246 531
6	1 771 561	15	4 177 248 169 415 651	24	9 849 732 675 807 611 094 711 841
7	19 487 171	16	45 949 729 863 572 161	25	108 347 059 433 883 722 041 830 251
8	214 358 881	17	505 447 028 499 293 771	26	1 191 817 653 772 720 942 460 132 761
9	2 357 947 691	18	5 559 917 313 492 231 481	27	13 109 994 191 499 930 367 061 460 371

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt{x/10}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$
0,25	0,5 000	1,5811	0,2 924	0,6 300	1,3 572
6	099 99	6125 314	962 38	383 83	179 179
7	196 97	6432 307	0,3 000 38	463 80	751 174
8	292 96	6733 301	037 37	542 79	925 170
9	385 93	7029 296	072 35	619 75	1,4 095 165
	92	292			162
0,30	477 91	7321 286	107 34	694 74	422 159
1	568 89	7607 282	141 34	768 72	581 155
2	657 88	7889 277	175 33	840 70	736 152
3	745 86	8166 273	208 32	910 70	888 149
4	831 85	8439 269	240 31	980 67	1,5 037 146
5	916 84	8708 266	271 31	0,7 047 67	183 143
6	0,6 000 83	8974 261	302 30	114 65	326 141
7	083 81	9235 259	332 30	179 64	467 138
8	164 81	9494 254	362 29	243 63	605 136
9	245 80	9748 252	391 29	306 62	741 133
0,40	325 78	2,0000 248	420 28	368 61	874 131
1	403 78	0248 246	448 28	429 60	1,6 005 129
2	481 76	0494 242	476 27	489 59	134 127
3	557 76	0736 240	503 27	548 58	261 125
4	633 75	0976 237	530 27	606 57	386 124
5	708 74	1213 235	557 26	663 56	510 121
6	782 74	1448 231	583 26	719 56	631 120
7	856 74	1679 230	609 25	775 55	751 118
8	928 72	1909 227	634 25	830 54	869 116
9	0,7 000 71	2136 225	659 25	884 53	985 115
0,50	071 70	2361 221,5	684 24,5	937 52	1,7 100 112,5
2	211 68,5	2804 217	733 23,5	0,8 041 51	325 109,5
4	348 67,5	3238 213	780 23	143 50	544 107
6	483 66,5	3664 209,5	826 22,5	243 48,5	758 104,5
8	616 65	4083 206	871 22	340 47	967 102
0,60	746 64	4495 202,5	915 21,5	434 46,5	1,8 171 100
2	874 63	4900 199	958 21	527 45,5	371 97,5
4	0,8 000 62	5298 196	0,4 000 20,5	618 44,5	566 96
6	124 61	5690 193,5	041 20,5	707 43,5	758 93,5
8	246 60,5	6077 190,5	082 19	794 42,5	945 92
0,70	367 59	6458 187,5	121 19	879 42	1,9 129 90,5
2	485 58,5	6833 185	160 19	963 41	310 88,5
4	602 58	7203 182,5	198 19	0,9 045 40,5	487 87
6	718 57	7568 180	236 18,5	126 39,5	661 85,5
8	832 56	7928 178	273 18	205 39	832 84
0,80	944 55,5	8284 176	309 17,5	283 38,5	2,0 000 82,5
2	0,9 055 55	8636 173,5	344 18	360 37,5	165 81,5
4	165 54,5	8983 171,5	380 17	435 37,5	328 80
6	274 53,5	9326 169,5	414 17	510 36,5	488 79
8	381 53	9665 167,5	448 16,5	583 36	646 77,5
0,90	487 52,5	3,000 16,5	481 16,5	655 35,5	801 76,5
2	592 51,5	033 16,5	514 16,5	726 35	954 75,5
4	695 51,5	066 16	547 16	796 34,5	2,1 105 74
6	798 50,5	098 16,5	579 15,5	865 34	253 73,5
8	899 50,5	131 15,5	610 16	933 33,5	400 72
1,00	1,0 000	3,162	0,4 642	1,0 000	2,1 544

$$\sqrt[n]{a} = e^{\lambda/n} \approx 1 + \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda^2}{2n^2} + \frac{\lambda^3}{6n^3}, \quad \text{wenn } n \gg \lambda = \ln a$$

$$\sqrt[n]{2} \approx 1 + \frac{0,693\,147\,18}{n} + \frac{0,240\,226\,51}{n^2} + \frac{0,055\,504\,11}{n^3}, \quad \text{wenn } n \gg 0,7$$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x/10}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$
1,00	1,0 000	3,162	0,4 642	1,0 000	2,1 544
2	100 50	194 16	672 15	066 33	687 71,5
4	198 49	225 15,5	703 15,5	132 33	828 70,5
6	296 49	256 15,5	733 15	196 32	967 69,5
8	392 48	286 15	762 14,5	260 32	104 68,5
		15,5	14,5	31,5	68
1,10	488	317 15	791 14,5	323 31	240 67
2	583 47,5	347 14,5	820 14,5	385 30,5	374 66
4	677 47	376 15	849 14	446 30,5	506 65,5
6	770 46,5	406 14,5	877 14	507 30	637 64,5
8	863 45,5	435 14,5	905 13,5	567 30	766 64
1,20	954 45,5	464 14,5	932 14	627 29	894 63
2	1,1 045 45,5	493 14	960 13,5	685 29	2,3 020 63
4	136 44,5	521 14,5	987 13	743 29	146 62
6	225 44,5	550 14	0,5 013 13,5	801 28,5	270 61
8	314 44	578 14	040 13	858 28	392 60,5
1,30	402 434	606 136	066 128	914 276	513 596
35	619 426	674 136	130 124	1,1 052 270	811 580
40	832 420	742 132	192 124	187 264	2,4 101 568
45	1,2 042 410	808 130	254 118	319 256	385 554
1,50	247 406	873 128	313 118	447 252	662 542
55	450 398	937 126	372 114	573 246	933 530
60	649 392	4, 000 124	429 112	696 242	2,5 198 520
65	845 386	062 122	485 110	817 236	458 510
70	1,3 038 382	123 120	540 106	935 232	713 498
1,75	229 374	183 120	593 106	1,2 051 226	962 490
80	416 370	243 116	646 104	164 224	2,6 207 482
85	601 366	301 116	698 102	276 220	448 472
90	784 360	359 114	749 100	386 214	684 464
95	964 356	416 112	799 98	493 212	916 456
2,00	1,4 142 352	472 112	848 96	599 208	2,7 144 448
05	318 346	528 110	896 96	703 206	368 442
10	491 344	583 108	944 94	806 202	589 436
15	663 338	637 106	991 92	907 198	807 426
20	832 336	690 106	0,6 037 90	1,3 006 196	2,8 020 420
2,25	1,5 000	743 106	082 90	104 192	230 416
30	166 332	796 104	127 88	200 190	438 410
35	330 328	848 102	171 86	295 188	643 404
40	492 320	899 102	214 86	389 184	845 398
45	652 318	950 100	257 86	481 182	2,9 044 392
2,50	1,5 811	5, 000	0,6 300	1,3 572	2,9 240

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} &= 1,414\,213\,562\,4 = 1:0,707\,106\,781\,2 & \sqrt[3]{2} &= 1,259\,921\,049\,9 = 1:0,793\,700\,526\,0 \\
 \sqrt{3} &= 1,732\,050\,807\,6 = 1:0,577\,350\,269\,2 & \sqrt[3]{3} &= 1,442\,249\,570\,3 = 1:0,693\,361\,274\,4 \\
 \sqrt{5} &= 2,236\,067\,977\,5 = 1:0,447\,213\,595\,5 & \sqrt[3]{5} &= 1,709\,975\,946\,7 = 1:0,584\,803\,547\,6 \\
 \sqrt{6} &= 2,449\,489\,742\,8 = 1:0,408\,248\,290\,5 & \sqrt[3]{6} &= 1,817\,120\,592\,8 = 1:0,550\,321\,208\,1 \\
 \sqrt{7} &= 2,645\,751\,311\,1 = 1:0,377\,964\,473\,0 & \sqrt[3]{7} &= 1,912\,931\,182\,8 = 1:0,522\,757\,958\,6 \\
 \sqrt{10} &= 3,162\,277\,660\,2 = 1:0,316\,227\,766\,0 & \sqrt[3]{10} &= 2,154\,434\,690\,0 = 1:0,464\,158\,883\,4 \\
 \sqrt[4]{2} &= 1,189\,207\,115\,0 = 1:0,840\,896\,415\,3 & \sqrt[5]{2} &= 1,148\,698\,355\,0 = 1:0,870\,550\,563\,3 \\
 \sqrt[4]{3} &= 1,316\,074\,013\,0 = 1:0,759\,835\,685\,7 & \sqrt[5]{3} &= 1,245\,730\,939\,6 = 1:0,802\,741\,561\,8 \\
 \sqrt[4]{5} &= 1,495\,348\,781\,2 = 1:0,668\,740\,305\,0 & \sqrt[5]{5} &= 1,379\,729\,661\,5 = 1:0,724\,779\,663\,7
 \end{aligned}$$

II. Faktorentafel
II. Factor table

.. 01	.. 03	.. 09	.. 11	.. 17	.. 19
3 7×43	52 11 ² ×43	2 11×19	54 7×773	2 7×31	57 7×19×43
9 17×53	56 13×431	13 7×11×17	56 31×181	5 11×47	58 11×23 ²
10 7×11×13	58 7×829	19 23×83	59 23×257	8 19×43	60 13×463
15 19×79	61 17×359	20 7 ² ×41	65 17×383	9 7×131	61 29×211
21 11×191	64 19×337	22 47 ²	66 11×601	14 13×109	63 71×89
22 31×71	65 7×929	25 13×193	68 7 ² ×139	15 37×41	64 7 ² ×131
24 7 ⁴	70 47×149	28 53 ²	71 13×547	17 17×101	69 11×17×37
25 41×61	73 67×109	34 7×487	75 7×29×37	18 23×79	73 13×563
27 37×73	74 11×673	35 11 ² ×29	77 11×701	21 29×73	75 73×103
31 7×443	79 7×1129	38 13×293	78 73×107	23 7×331	76 19×401
34 19×179	80 53×151	40 19×211	84 13×647	27 11×13×19	78 7×1117
36 13×277	82 13×631	41 7×587	86 79×109	30 7×431	81 23×353
39 47×83	83 19 ² ×23	43 31×139	87 31×281	33 31×107	85 7×1217
43 11×17×23	85 11×773	46 11×419	89 7×19×67	38 11×347	90 29×311
45 7×643	86 7×1229	47 17×277	92 61×151	41 23×179	91 11×829
46 43×107	89 29×307	55 7×787	96 7×1373	44 7×631	99 7×13×109
49 13 ² ×29	95 13×17×43	56 71×79	99 11×17×53	47 53×89	
52 7×743	97 31×313	58 37×157		50 29×173	
54 11×491		59 19×311		51 7×17×43	
60 17×353		61 41×149		53 13×409	
64 37×173		62 7×887	.. 13	56 41×137	.. 21
66 7×23×41		64 13×17×29	4 7×59	59 61×97	1 11 ²
69 67×103		65 23×283	7 23×31	60 11×547	2 13×17
72 19×379	.. 07	68 11×619	9 11×83	65 7 ² ×19	7 7×103
73 7 ² ×149	4 11×37	70 43×163	13 13×101	66 13×509	11 19×59
75 13×577	7 7×101	74 31×239	15 17×89	68 17×401	14 7 ² ×29
76 11×691	10 19×53	76 7×1087	18 7 ² ×37	71 11×647	19 17×113
78 29×269	12 17×71	77 13×593	24 19×127	72 7×1031	20 43×47
82 59×139	15 11×137	79 11×719	25 7×359	84 19×443	23 11×211
84 31×271	18 13×139	83 7×1187	28 29×97	86 7×1231	28 7×13×31
87 7×11×113	21 7 ² ×43	85 67×127	30 23×131	87 23×379	29 23×127
88 13×677	24 29×83	88 23×383	31 11×283	89 37×241	34 11×311
91 19×479	25 23×109	89 59×151	37 47×79	90 71×127	35 7×503
93 71×131	28 7×401	94 97 ²	39 7×13×43	92 13×709	37 61 ²
94 7×17×79	30 31×97	95 37×257	42 11×383	93 7×11 ²	41 13×317
97 89×109	31 13×239	97 7×19×73	43 19×227	95 31×307	43 29×149
	37 11×337	98 17×577	46 7×659	96 59×163	49 7×19×37
	42 7×601		49 17 ²	99 47×211	52 23×227
	43 59×73	.. 11	52 13×401		53 17×313
	46 17×271	5 7×73	53 37×149	.. 19	56 7×11×73
	48 11×19×23	6 13×47	57 29×197	1 7×17	59 31×191
	49 7×701	11 11×101	60 7×859	3 11×29	67 11×13×47
	52 41×127	12 7×173	63 59×107	12 23×53	68 19×359
	57 13×439	14 17×83	64 11 ² ×53	15 7 ² ×31	70 7×17×59
	61 31×197	17 29×59	66 17×389	18 17×107	74 41×181
	63 7×17×53	26 7×373	67 7 ² ×137	19 19×101	77 7×1103
	64 43×149	29 41×71	69 31×223	21 13×163	79 89 ²
	67 19×353	32 13 ² ×19	73 71×103	22 7×317	80 13×617
	70 7 ² ×11×13	33 7×11×43	75 11×683	24 41×59	83 53×157
	78 37×211	36 23×157	76 23×331	25 11×229	86 37×233
	81 11 ² ×67	38 37×103	78 13×601	34 13×263	89 11×811
	82 29×283	44 11×401	79 41×193	36 7×11×47	91 7×1303
	84 7×1201	45 13×347	81 7×19×61	43 7×617	98 7×23×61
	85 47×181	47 7×673	82 43×191	46 31×149	
	91 7×1301	48 17×283	84 47×179	48 61×79	
	93 41×227	51 19×269	88 7×1259	52 17×307	
	94 23×409	53 47×113	91 13×701		
	96 13×739		93 67×139		
	97 17×571		97 11×883		
			99 23×431		

.. 23	.. 27	.. 31	.. 33	.. 39	.. 41
3 17×19 6 7×89 9 13×71 20 7×17 ³ 21 11×193 23 23×101 26 43×61 27 7×389 29 37×79 32 11×293 35 13×271 41 7×19×31 42 41×103 48 7×13×53 51 47×109 54 11×17×29 57 59×97 60 19×317 62 7 ³ ×127 65 11×593 66 37×179 69 7×23×43 71 17×419 72 31×233 74 13×571 80 71×113 83 7×29×41 87 11×13×61 90 7×1289 92 23×401 95 89×107 98 11×19×47	53 7×761 56 17×331 61 11×557 62 13×479 65 61×107 67 7×31 ³ 73 17×431 74 7×1061 76 29×263 80 23×349 82 19×433 83 11×757 88 7×13×97 89 79×113 94 11×857 95 7×1361 97 71×137 98 31×317	7 17×43 9 7 ³ ×19 13 11 ³ 16 7×233 22 23×97 24 11×13×17 28 19×149 30 7×433 31 31×101 34 47×73 37 7×13×41 40 29×139 43 61×71 45 23×197 46 11×421 51 7×733 57 11×521 58 7 ³ ×17 60 37×163 63 13×487 64 59×109 66 19×349 67 53×127 69 29×239 70 79×89 72 7×1033 75 17×443 76 13×587 78 41×191 79 7×11×103 81 47×173 85 19×449 90 11×821 91 23×397 93 7×31×43 97 37×263	50 7×719 55 11×503 56 43×131 58 19×307 59 17×349 62 23×271 64 7×919 65 47×139 70 13×541 71 7×1019 76 17×449 77 11×19×37 80 29×277 83 13×641 85 7×23×53 86 89×97 88 11 ³ ×73 92 7×1319	5 7 ³ ×11 11 17×67 13 13×103 16 11×149 17 37×47 19 7×277 26 7×13×29 28 17×167 31 43×73 32 41×79 34 19×181 38 11×349 40 7×577 44 23×193 47 7×677 49 11×449 52 13 ³ ×31 53 19×281 55 29×191 61 7×877 62 17×367 64 47×137 65 13×503 67 23×293 68 7×977 71 11 ³ ×59 73 41×179 74 43×173 77 71×109 79 17×467 82 7×11×107 83 31×269 86 53×163 89 7×1277 91 13×19×37	51 53×97 53 7 ³ ×109 59 13×457 60 7×863 62 79 ³ 63 17×373 65 31×211 66 29×229 69 11×631 71 37×193 72 13×557 74 7×1063 80 11×17×43 81 7×1163 83 19×439 84 23×367 95 7×29×47 96 31×311 98 13×757
.. 27	.. 29	.. 33	.. 37	.. 41	.. 43
4 7×61 5 17×31 10 13×79 11 7 ³ ×23 17 11×157 19 41×47 22 17×131 23 13×179 25 7×19 ³ 26 37×71 28 11×257 31 53×59 32 7×461 34 23×149 38 43×89 44 19×233 46 7×661 47 29×163 49 13×379 50 11×457	3 7×47 5 23 ³ 6 17×37 15 11×139 17 7×13×19 18 31×59 23 17×137 24 7×347 26 11×239 29 29×101 30 13×233 36 19×191 38 7×547 44 43×103 45 7×647 48 11×439 50 47×107 51 23×223 53 73 ³ 54 61×89 56 13×433 57 17×337 59 7 ³ ×11 ³ 66 7×947 69 13 ³ ×41 74 17×19×23 77 59×131 80 7×31×37 81 11×739 87 7×29×43 92 11×839 93 19×491 95 13×733	1 7×19 5 13×41 8 7 ³ ×17 11 11×103 13 31×43 16 23×71 20 19×107 22 7×11×29 25 17×149 29 7×419 31 13×241 32 53×61 40 37×109 43 7×619 44 11×13×31 46 41×113	4 19×23 6 7 ³ ×13 7 11×67 10 17×61 13 7×191 15 29×53 18 11×167 19 13×149 25 43×59 27 7×17×23 33 47×71 34 7×491 37 37×101 39 31×127 40 11×367 42 19×223 45 13×349 48 7×691 51 11×467 55 7 ³ ×113 58 13×449 61 17×19 ³ 64 41×157 69 7×991 70 31×227 73 11×23×29 76 7×1091 78 17×461 81 79×103 84 11×13×59 90 7×1291 96 23×419 97 7×13×107 99 19×523	3 11×31 8 29 ³ 11 7×163 12 17×73 14 11×131 15 23×67 18 7×263 20 13×157 26 19×139 29 17×173 32 7×463 33 13×257 36 11×331 38 23×167 39 7×563 41 41×101 45 19×239 47 11×431 48 47×103 50 71 ³	1 11×13 3 7 ³ 9 23×41 10 7×149 12 11×113 13 17×79 16 31×53 18 19×97 19 29×67 24 7×349 27 13×211 30 17×179 31 7×449 34 11×313 37 19×197 40 13×311 43 43×101 45 7×11×59 48 29×167 51 37×139 52 7 ³ ×107 55 23×241 64 17×379 66 7×13×73 67 11×613 69 53×131 73 7×1049 75 19×397 78 11×23×31 79 13 ³ ×47 81 17×479 87 7×1249 88 37×239 91 41×223 94 7×19×71 99 61×163

..47 2 13×19 8 7×11^a 11 31×37 12 29×43 15 7×13×17 20 23×89 21 19×113 27 41×67 29 7×421 30 11×277 32 17×191 36 7×521 41 11×13×29 42 31×137 47 47×101 48 37×131 50 7^a×103 54 13×419 57 7×821 59 19×313 63 11×577 66 17^a×23 68 41×167 71 7×1021 74 11×677 77 61×127 78 7×19×59 80 13×619 83 17×491 89 23×389 90 83×109 92 7×1321 93 13×719 96 11×877 98 43×229 99 7^a×29 ..49 0 7^a 6 11×59 7 7×107 9 13×73 13 19×71 16 17×97 18 43^a 21 7×307 22 13×173 24 31×79 28 7×11×37 31 47×67 33 17×197 36 41×89 37 23×163 39 11×359 42 7×607	..49 48 13×373 49 7^a×101 51 19×271 52 29×181 55 31×179 60 23×263 61 11×13×43 63 7×907 66 61×109 67 17×397 70 7×19×53 72 11×659 78 47×167 81 29×281 82 73×113 84 7×17×71 85 83×103 87 13×673 91 7×1307 94 11×859 ..51 4 11×41 5 19×29 8 23×37 13 7×193 16 13×127 17 17×103 20 7×293 26 11×241 29 13×227 31 23×137 34 7×17×29 35 53×67 37 11^a×31 41 7×593 43 19×229 52 59×89 55 7×13×61 59 11×541 62 7×19×47 67 43×157 68 13×17×31 70 11×641 76 7×1093 77 23×337 80 83×97 82 37×223 83 7×1193 85 17×503 86 41×211 88 53×167 92 11×29^a 94 13×727 97 7^a×199	..53 2 11×23 5 7×79 12 7×179 18 17×109 23 13×181 24 11×223 26 7×379 30 43×71 33 7×479 35 11×17×19 36 13×281 39 59×67 44 61×73 45 29×157 47 7^a×97 48 23×211 50 31×163 53 53×101 54 7×19×41 57 11×523 62 13^a×37 68 7×11×89 69 17×409 71 23×311 74 29×257 75 7×13×83 81 31×263 84 79×107 86 17×509 89 7×1279 90 11×823 92 19×487 93 47×199 95 41×233 96 7^a×197 98 59×167 99 37×269 ..57 10 7×151 11 13×89 13 23×59 14 31×47 17 7×251 19 19×103 20 11^a×17 22 37×61 31 7×11×41 37 13×17^a 38 7×19×29 47 67×71 50 13×389 52 7×751 53 11×487 59 7×23×37 61 47×131	..57 64 11×587 65 79×83 67 29×233 71 17×421 73 7×1051 76 13×19×31 79 73×109 80 7×1151 82 23×359 83 61×137 85 43×199 86 11×787 88 17×521 89 13^a×53 94 7^a×193 95 19×503 97 11×887 ..59 2 7×37 5 13×43 9 7×137 11 19×61 18 11×13^a 20 29×71 21 17×127 23 7×337 27 31×89 29 11×269 30 7×19×23 38 17×227 39 37×107 44 7^a×13 45 47×97 48 43×113 51 7×11×67 53 23×233 54 53×103 57 13×443 59 59×101 60 73×83 62 11×569 65 7×937 68 19^a 72 7×17×61 78 29×271 81 41×199 83 13×643 84 11×769 86 7×1237 87 19×461 89 17^a×31 92 47×197 93 7^a×191 95 11^a×79 96 13×743 99 23×433	..61 1 7×23 3 19^a 9 31^a 12 13×97 15 7×223 16 11×151 19 37×53 22 7×17×19 24 23×107 25 13×197 27 11×251 31 29×109 36 7×523 39 17×233 40 31×131 43 7^a×89 46 59×79 49 11^a×41 51 13×397 54 43×127 55 67×83 57 7×823 60 11×19×29 61 61×101 64 7×13×71 70 23×307 72 53×137 73 17×433 76 47×163 78 7×1123 79 19×419 82 11×751 85 7×1223 90 13×17×41 93 11×23×37 97 43×227 99 7×1423 ..63 7 7×109 13 29×47 14 7×11×19 17 41×43 19 13×151 22 31×73 23 17×139 25 11×233 28 7×409 32 13×251 35 7×509 37 53×71 40 17×239 41 23×181 47 11×433 49 7×709	..63 50 61×83 52 19×277 53 31×173 56 7×809 58 11×13×41 59 67×89 64 23×281 70 7×1009 71 13×19×29 73 37×199 74 17×439 76 79×97 77 7×1109 80 11×733 91 7^a×11×17 92 59×157 95 73×131 97 13×751 98 7×1409 ..67 6 23×29 7 13×59 10 11×97 12 7×181 19 7×281 21 11×197 25 17×151 28 47×61 33 7×13×37 36 19×193 40 7^a×83 42 17×251 43 11×397 46 13×359 48 31×157 52 23×229 54 7×11×71 55 19×293 57 73×79 61 7×881 64 29×223 66 59×113 67 67×101 70 37×191 72 13^a×43 73 53×139 75 7×23×47 76 11×17×41
---	---	---	---	--	--

.. 69	.. 71	.. 77	.. 79	.. 83	.. 87
1 13 ^a	53 41×131	0 7×11	49 13×383	5 11×53	55 37×151
4 7×67	56 53×107	3 13×29	55 7×797	11 7×13 ^a	56 11 ^a ×47
8 11×79	57 29×199	11 11×107	61 37×167	18 7×269	58 7×29 ^a
11 7×167	59 7×853	14 7×211	64 11×19×31	21 37×59	61 23×269
13 37 ^a	60 13×467	15 19×83	69 7×997	24 13×191	64 13×499
14 13×113	63 23×277	20 31×67	72 29×251	27 11 ^a ×23	65 7×941
17 29×61	66 7×953	21 7×311	73 47×157	29 19×157	67 11×617
19 11×179	71 71×101	29 13×229	75 11×13×53	32 7 ^a ×67	68 71×97
23 23×103	72 11×661	30 17×181	76 7×1097	33 17×199	70 19×373
25 7×367	74 31×241	32 29×113	79 79×101	36 29×127	73 83×89
26 17×157	75 67×113	33 11×307	82 17×487	38 11×353	77 13×599
28 19×151	77 19×409	35 7 ^a ×73	84 61×139	39 7×569	79 7 ^a ×163
32 7×467	78 17×463	39 41×97	85 23×373	41 47×89	85 31×277
35 43×83	80 7×1153	42 7×13×47	88 13×683	48 19×257	86 7×17×73
38 53×73	83 11×761	44 11 ^a ×37	90 7×1297	50 13×17×23	89 11×19×43
40 13×313	84 43×197	45 23×199	91 67×137	51 71×73	92 37×251
41 11×379	86 13×23×29	47 17×281	93 83×113	53 7×769	94 53×179
43 17×257	87 7 ^a ×179	51 31×167	97 7×11×127	59 31×193	
44 41×109	90 47×193	53 19×283	99 17×587	60 7×11×79	
46 7×23×29	92 73×127	56 7×811		62 61×103	
47 19×251	95 17×563	57 53×109		63 13×491	
50 37×137	96 19×509	59 43×139		65 29×227	
52 11×479	99 13 ^a ×59	60 59×103		66 41×163	
53 7×13×59		63 7×911		71 11×653	
59 47×127		66 11×607		74 7×1069	
61 31×199		68 13×23 ^a		77 43×181	
67 7×967		72 19×383		80 59×137	
71 67×107		77 7×11×101		81 7 ^a ×167	
74 7×11×97		80 41×197		83 83×101	
77 17×457		81 13×17×37		84 17×499	
79 13×613		84 7 ^a ×173		86 19×457	
85 11×19×41		87 67×131		89 13×691	
88 7 ^a ×181		89 47×191		90 31×293	
91 53×173		90 29×313		93 11×853	
92 13×23×31		95 61×157		95 7×37 ^a	
94 17×557		98 7×17×83		96 23×421	
95 7×1367		99 11×907		99 67×149	
98 71×139					
	.. 73		.. 81		.. 89
	4 11×43		4 13×37		2 17 ^a
	9 7×139		5 7×83		5 19×31
	10 29×37		7 11×71		6 13×53
	12 19×67		10 23×47		8 7×127
	15 11 ^a ×13		16 41 ^a		9 23×43
	16 7×239		17 13×137		11 29×41
	21 41×53		19 7×283		15 7×227
	25 31×83		25 29×89		21 11×199
	27 47×59		26 7×383		24 19×131
	28 13 ^a ×17		28 43×67		29 7 ^a ×61
	30 7×439		29 11×271		32 11×13×23
	31 19×167		32 17×193		35 37×97
	34 23×151		34 59 ^a		36 7×17×31
	37 7 ^a ×11		37 19×199		41 59×71
	39 29×137		40 7×11×53		44 67 ^a
	45 17×269		41 37×113		45 13×353
	48 11×443		43 13×337		50 7×727
	51 7×739		46 31×151		53 17×317
	54 13×421		47 7×683		54 11×499
	57 23×251		49 17×293		57 7×827
	58 7×839		56 13×19×23		59 53×113
	67 13×521		61 7×883		62 19×331
	69 19×367		62 11×571		65 11×599
	70 11×643		68 7×983		68 83 ^a
	72 7×1039		70 73×97		69 29×241
	73 73×101		71 43×167		71 7×13×79
	79 7×17×67		73 11 ^a ×61		72 37×197
	81 11×743		77 31×251		78 7 ^a ×23
	84 37×229		79 23×347		81 19×431
	87 31×283		82 7 ^a ×13 ^a		84 13×653
	88 19×467		83 17 ^a ×29		87 11×17×47
	90 43×211		88 83×107		89 89×101
	93 7×13×103		89 7×1283		90 61×149
	96 17×569		94 19×499		92 7×1327
	97 29×337		95 11×13×67		93 41×229
			98 41×241		95 43×223
					98 11×29×31
					99 7×1427
.. 71		.. 79		.. 87	
3 7×53		6 7×97		1 11×17	
6 11×61		7 19×41		2 7×41	
8 13×67		9 11×89		13 19×73	
12 31×41		10 13×83		16 7×241	
17 7×11×23		13 7×197		23 7×11×31	
20 19×109		16 23×73		25 13×199	
21 13×167		22 43×53		29 29×103	
24 7×353		24 37×67		32 19×173	
27 17×163		27 7×397		34 11×317	
30 37×83		31 11×17 ^a		35 17×211	
38 7 ^a ×79		33 31×109		37 7×541	
39 11×19 ^a		34 7 ^a ×71		38 13 ^a ×23	
41 43×97		36 13×283		40 61×67	
44 17×263		39 23×173		41 53×79	
45 7×653		42 11×389		43 41×107	
47 13×367		43 29×151		44 7×641	
50 11×461		45 19×241		46 43×109	
		48 7×17×41		52 17×311	

.. 91	.. 93	.. 97	.. 99
0 7×13	4 17×29	4 7×71	2 13×23
3 17×23	7 13×61	6 17×41	7 17×47
7 7×113	8 19×47	13 11×127	8 29×31
13 13×107	13 7×199	18 7×271	10 7×157
15 37×43	17 11×163	21 13 ³	11 11×109
16 19×89	20 7×13×23	24 11×227	17 7×257
18 31×61	28 11×263	25 7 ² ×53	22 11 ³ ×19
19 11×181	29 41×73	30 19×163	25 23×113
21 7×313	31 31×103	31 23×139	28 13×223
22 29×79	32 37×89	33 43×79	31 7×457
24 47×53	34 7×499	34 13×269	35 59×61
28 7 ³ ×59	38 17×229	39 7×571	37 29×131
30 11×281	41 7×599	40 17×241	38 7×557
37 17×223	43 23×191	46 7×11×61	41 13×17×19
39 13×307	46 13×19 ³	48 59×83	43 53×83
42 7×613	50 11×463	49 19×263	44 11×409
48 67×73	52 67×79	54 23×239	46 37×127
49 7×23×31	55 7×17×47	55 29×193	52 7×757
51 29×179	58 71×83	57 11×17×31	55 11×509
52 11×13×37	59 13×461	60 7×13×67	56 41×139
54 17 ³ ×19	61 11×563	64 73×89	58 17×347
58 43×137	62 7×29×31	66 37×181	59 7×857
61 41×151	64 43×151	67 7×971	64 67×97
63 7×11×83	65 19×347	70 47×151	67 13×523
70 7×1013	68 61×113	73 13×569	70 31×229
72 23×317	70 41×173	75 71×107	71 23×313
73 19×389	74 59×127	76 43×179	73 7 ² ×151
78 13×607	76 7 ³ ×157	78 53×149	77 11×709
79 61×131	83 7×11×109	79 11×727	79 19×421
84 7×1213	85 13×661	81 7×1171	80 7×13×89
85 11 ³ ×71	89 17×23 ²	84 29×293	82 43×193
87 59×149	91 29×317	87 19×463	83 37×227
88 17×523	94 11×863	88 7×31×41	88 11×809
91 7×13×101	95 53×181	90 11×827	92 17×547
96 11×881	97 7×1399	91 17×541	94 7×23×59
99 97×103	98 13×761	97 97×101	95 29×331
		99 13×769	97 41×239
			98 19×521

Fakultäten Factorials

n	n!	$\frac{1}{n!}$	n!!	$\frac{1}{n!!}$
1	1	1	1	1
2	2	⁰ 5000	2	⁰ 5000
3	6	1 ⁻ 16667	3	⁰ 3333
4	24	- 14167	8	1 ⁻ 12500
5	1 ² 2000	- 8333	15	- 16667
6	³ 7200	1 ⁻ 83889	² 48	2 ⁻ 80833
7	⁴ 5040	1 ⁻ 49841	1 ² 05	- 9524
8	⁵ 4032	2 ⁻ 64802	³ 384	2 ⁻ 36042
9	⁶ 36288	2 ⁻ 67557	³ 945	1 ⁻ 30582
10	⁷ 36288	2 ⁻ 7557	⁴ 3840	2 ⁻ 46042
11	⁸ 3992	2 ⁻ 85052	1 ⁴ 0395	- 49620
12	⁹ 4790	2 ⁻ 80877	⁴ 4608	2 ⁻ 51701
13	¹⁰ 6227	1 ⁻ 106059	1 ⁵ 3513	- 57400
14	¹¹ 8718	1 ⁻ 11471	⁶ 6451	1 ⁻ 55501
15	1 ¹² 3077	- 187647	2 ⁶ 0270	- 4933
16	2 ¹³ 0923	- 134779	1 ⁷ 0322	- 79688
17	¹⁵ 3557	2 ⁻ 158115	⁸ 3446	2 ⁻ 89020
18	¹⁶ 6402	1 ⁻ 165619	1 ⁸ 8579	- 85382
19	1 ¹⁷ 2165	- 178220	⁹ 6547	1 ⁻ 85273
20	2 ¹⁸ 4329	- 184110	¹⁰ 3716	2 ⁻ 106911

$${}^54032 \equiv 0,4032 \cdot 10^5$$

$$2^{-36042} \equiv 2,6042 \cdot 10^{-8}$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$2n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$$

x	Mx	$\frac{1}{M}x$	$\frac{2}{\pi}x$	$\frac{\pi}{2}x$	x	Mx	$\frac{1}{M}x$	$\frac{2}{\pi}x$	$\frac{\pi}{2}x$
1	0,434 294	2,302 585	0,636 620	1,570 796	51	22,149 019	117,431 840	32,467 608	80,110 613
2	0,868 589	4,605 170	1,273 240	3,141 593	52	22,583 313	119,734 425	33,104 228	81,681 409
3	1,302 883	6,907 755	1,909 859	4,712 389	53	23,017 608	122,037 010	33,740 848	83,252 205
4	1,737 178	9,210 340	2,546 479	6,283 185	54	23,451 902	124,339 595	34,377 468	84,823 002
5	2,171 472	11,512 925	3,183 099	7,853 982	55	23,886 197	126,642 180	35,014 087	86,393 798
6	2,605 767	13,815 511	3,819 719	9,424 778	56	24,320 491	128,944 765	35,650 707	87,964 594
7	3,040 061	16,118 096	4,456 338	10,995 574	57	24,754 785	131,247 350	36,287 327	89,535 391
8	3,474 356	18,420 681	5,092 958	12,566 371	58	25,189 080	133,549 935	36,923 947	91,106 187
9	3,908 650	20,723 266	5,729 578	14,137 167	59	25,623 374	135,852 520	37,560 567	92,676 983
10	4,342 945	23,025 851	6,366 198	15,707 963	60	26,057 669	138,155 106	38,197 186	94,247 780
11	4,777 239	25,328 436	7,002 817	17,278 760	61	26,491 963	140,457 691	38,833 806	95,818 576
12	5,211 534	27,631 021	7,639 437	18,849 556	62	26,926 258	142,760 276	39,470 426	97,389 372
13	5,645 828	29,933 606	8,276 057	20,420 352	63	27,360 552	145,062 861	40,107 046	98,960 169
14	6,080 123	32,236 191	8,912 677	21,991 149	64	27,794 847	147,365 446	40,743 665	100,530 965
15	6,514 417	34,538 776	9,549 297	23,561 945	65	28,229 141	149,668 031	41,380 285	102,101 761
16	6,948 712	36,841 361	10,185 916	25,132 741	66	28,663 436	151,970 616	42,016 905	103,672 558
17	7,383 006	39,143 947	10,822 536	26,703 538	67	29,097 730	154,273 201	42,653 525	105,243 354
18	7,817 301	41,446 532	11,459 156	28,274 334	68	29,532 025	156,575 786	43,290 145	106,814 150
19	8,251 595	43,749 117	12,095 776	29,845 130	69	29,966 319	158,878 371	43,926 764	108,384 947
20	8,685 890	46,051 702	12,732 395	31,415 927	70	30,400 614	161,180 957	44,563 384	109,955 743
21	9,120 184	48,354 287	13,369 015	32,986 723	71	30,834 908	163,483 542	45,200 004	111,526 539
22	9,554 479	50,656 872	14,005 635	34,557 519	72	31,269 203	165,786 127	45,836 624	113,097 336
23	9,988 773	52,959 457	14,642 255	36,128 316	73	31,703 497	168,088 712	46,473 243	114,668 132
24	10,423 068	55,262 042	15,278 875	37,699 112	74	32,137 792	170,391 297	47,109 863	116,238 928
25	10,857 362	57,564 627	15,915 494	39,269 908	75	32,572 086	172,693 882	47,746 483	117,809 725
26	11,291 657	59,867 212	16,552 114	40,840 704	76	33,006 381	174,996 467	48,383 103	119,380 521
27	11,725 951	62,169 798	17,188 734	42,411 501	77	33,440 675	177,299 052	49,019 722	120,951 317
28	12,160 245	64,472 383	17,825 354	43,982 297	78	33,874 970	179,601 637	49,656 342	122,522 113
29	12,594 540	66,774 968	18,461 973	45,553 093	79	34,309 264	181,904 222	50,292 962	124,092 910
30	13,028 834	69,077 553	19,098 593	47,123 890	80	34,743 559	184,206 807	50,929 582	125,663 706
31	13,463 129	71,380 138	19,735 213	48,694 686	81	35,177 853	186,509 393	51,566 202	127,234 502
32	13,897 423	73,682 723	20,371 833	50,265 482	82	35,612 148	188,811 978	52,202 821	128,805 299
33	14,331 718	75,985 308	21,008 452	51,836 279	83	36,046 442	191,114 563	52,839 441	130,376 095
34	14,766 012	78,287 893	21,645 072	53,407 075	84	36,480 736	193,417 148	53,476 061	131,946 891
35	15,200 307	80,590 478	22,281 692	54,977 871	85	36,915 031	195,719 733	54,112 681	133,517 688
36	15,634 601	82,893 063	22,918 312	56,548 668	86	37,349 325	198,022 318	54,749 300	135,088 484
37	16,068 896	85,195 648	23,554 932	58,119 464	87	37,783 620	200,324 903	55,385 920	136,659 280
38	16,503 190	87,498 234	24,191 551	59,690 260	88	38,217 914	202,627 488	56,022 540	138,230 077
39	16,937 485	89,800 819	24,828 171	61,261 057	89	38,652 209	204,930 073	56,659 160	139,800 873
40	17,371 779	92,103 404	25,464 791	62,831 853	90	39,086 503	207,232 658	57,295 780	141,371 669
41	17,806 074	94,405 989	26,101 411	64,402 649	91	39,520 798	209,535 243	57,932 399	142,942 466
42	18,240 368	96,708 574	26,738 030	65,973 446	92	39,955 092	211,837 829	58,569 019	144,513 262
43	18,674 663	99,011 159	27,374 650	67,544 242	93	40,389 387	214,140 414	59,205 639	146,084 058
44	19,108 957	101,313 744	28,011 270	69,115 038	94	40,823 681	216,442 999	59,842 259	147,654 855
45	19,543 252	103,616 329	28 647 890	70,685 835	95	41,257 976	218,745 584	60,478 878	149,225 651
46	19,977 546	105,918 914	29,284 510	72,256 631	96	41,692 270	221,048 169	61,115 498	150,796 447
47	20,411 841	108,221 499	29,921 129	73,827 427	97	42,126 565	223,350 754	61,752 118	152,367 244
48	20,846 135	110,524 084	30,557 749	75,398 224	98	42,560 859	225,653 339	62,388 738	153,938 040
49	21,280 430	112,826 670	31,194 369	76,969 020	99	42,995 154	227,955 924	63,025 357	155,508 836
50	21,714 724	115,129 255	31,830 989	78,539 816	100	43,429 448	230,258 509	63,661 977	157,079 633
x	Mx		$\frac{1}{M}x$		$\frac{2}{\pi}x$		$\frac{\pi}{2}x$		
1	0,4342 9448 1903 2518		2,3025 8509 2994 0457		0,6366 1977 2367 5813		1,5707 9632 6794 8966		
2	0,8685 8896 3806 5037		4,6051 7018 5988 0914		1,2732 3954 4735 1627		3,1415 9265 3589 7932		
3	1,3028 8344 5709 7555		6,9077 5527 8982 1371		1,9098 5931 7102 7440		4,7123 8898 0384 6899		
4	1,7371 7792 7613 0073		9,2103 4037 1976 1827		2,5464 7908 9470 3254		6,2831 8530 7179 5865		
5	2,1714 7240 9516 2591		11,5129 2546 4970 2284		3,1830 9886 1837 9067		7,8539 8163 3974 4831		
6	2,6057 6689 1419 5110		13,8155 1055 7964 2741		3,8197 1863 4205 4881		9,4247 7796 0769 3797		
7	3,0400 6137 3322 7628		16,1180 9565 0958 3198		4,4563 3840 6573 0694		10,9955 7428 7564 2763		
8	3,4743 5585 5226 0146		18,4206 8074 3952 3655		5,0929 5817 8940 6507		12,5663 7061 4359 1730		
9	3,9086 5033 7129 2664		20,7232 6583 6946 4112		5,7295 7795 1308 2321		14,1371 6694 1154 0696		

III. Hilfstafeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen

III. Auxiliary tables for computation with complex numbers

Die folgenden Formeln bleiben richtig, wenn man in ihnen i beiderseits durch $-i$ ersetzt. | The following formulae remain true, if i is replaced by $-i$ on both sides.

I. Kehrwerte

I. Reciprocals

$$\frac{1}{1+ix} = u - iv = \frac{1-ix}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x+i} = v - iu.$$

$$0 < b < a: \quad x = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{u}{a} - i \frac{v}{a}.$$

$$0 < a < b: \quad x = \frac{a}{b}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{v}{b} - i \frac{u}{b}.$$

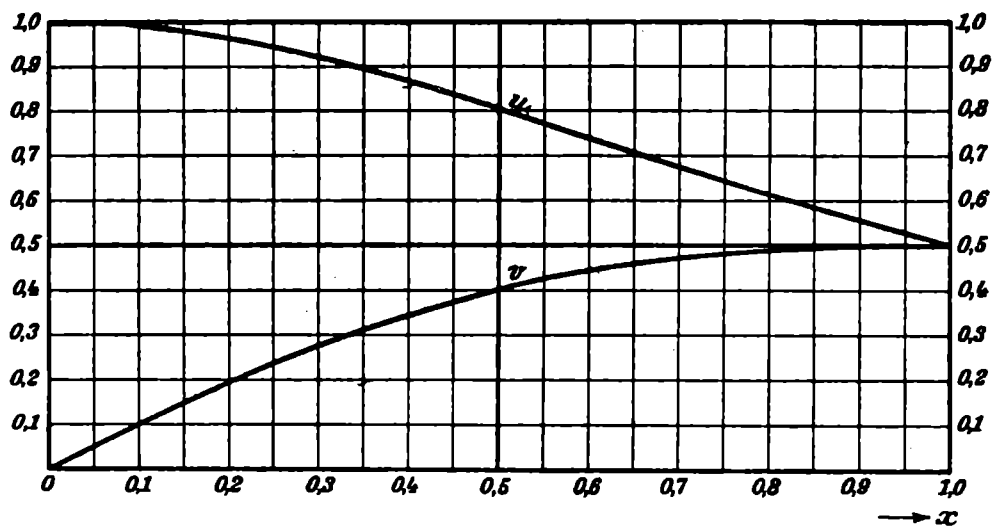


Fig. 5. $\frac{1}{1+ix} = u - iv, \quad \frac{1}{x+i} = v - iu$

$$\frac{1}{1+ix} = u - iv$$

$$\frac{1}{x+i} = v - iu$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d	
0,0	0,99 0,0	— 00000	99 09999	96 1999	91 2997	84 3994	75 4988	64 5978	51 6966	36 7949	20 8928	9 994
0,1	0,9 0,0	901 9901	880 *0868	858 *1830	834 *2784	808 *3731	780 *4670	750 *5601	719 *6523	686 *7435	652 *8338	28 941
0,2	0,9 0,1	615 923	578 *011	538 *098	498 *184	455 *269	412 *353	367 *435	321 *517	273 *596	224 *675	43 84
0,3	0,9 0,2	174 752	123 828	071 903	018 976	*964 *048	*909 *118	*853 *187	*796 *254	*738 *321	*680 *385	55 70
0,4	0,8 0,3	621 448	561 510	501 570	440 629	378 686	316 742	254 797	191 850	127 901	064 951	62 56
0,5	0,8 0,4	000 000	*936 047	*872 093	*807 138	*742 181	*678 223	*613 263	*548 302	*483 340	*418 377	64 42
0,6	0,7 0,4	353 412	288 446	223 478	159 510	094 540	030 569	*966 597	*902 624	*838 650	*775 674	64 29
0,7	0,6 0,4	711 698	648 720	586 742	524 762	462 782	400 800	339 817	278 834	217 850	157 864	62 18
0,8	0,6 0,4	098 878	038 891	*979 903	*921 914	*863 925	*806 935	*748 944	*692 952	*636 959	*580 966	57 10
0,9	0,5 0,4	525 972	470 978	416 983	362 987	309 990	256 993	204 996	152 998	101 999	050 *000	53 3
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d	

2. Quadratwurzeln

2. Square roots

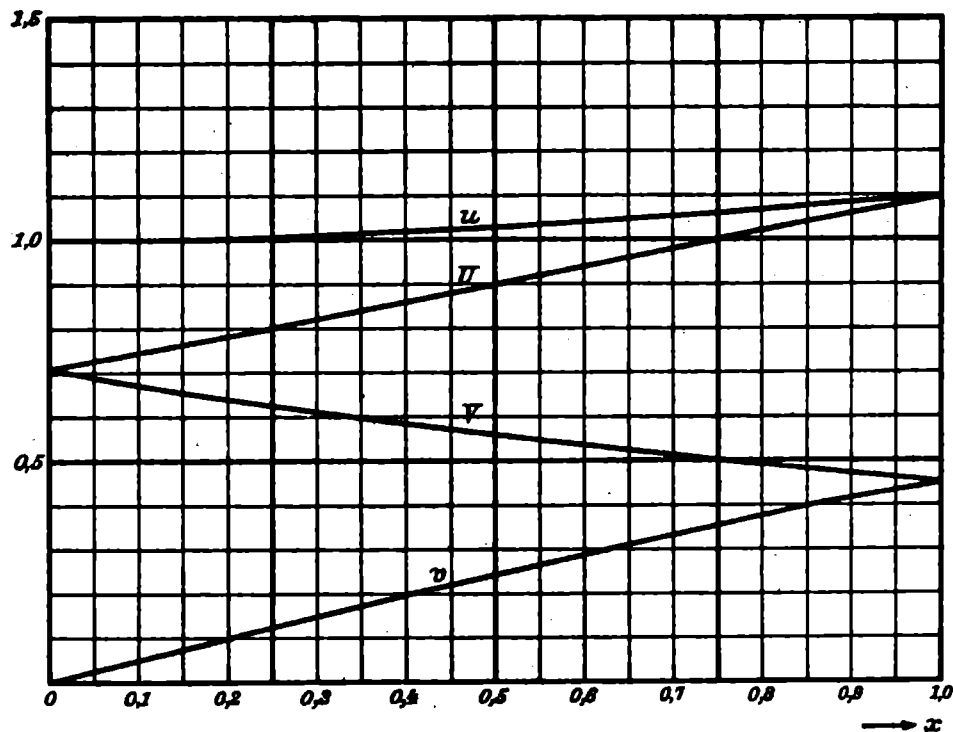


Fig. 6. $\sqrt{1+ix} = \pm(u+iv)$, $\sqrt{x+i} = \pm(U+iV)$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+ix} &= \pm (u + iv), & \left. \begin{matrix} u^2 \\ v^2 \end{matrix} \right\} &= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm 1}{2}; \\ \sqrt{x+i} &= \pm (U + iV), & \left. \begin{matrix} U^2 \\ V^2 \end{matrix} \right\} &= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{2}.\end{aligned}$$

Setzt man $x = \Im \sin 2t$, so wird:

Substituting $x = \sinh 2t = \Im \sin 2t$, we obtain:

$$u = \mathfrak{C} \cosh t, \quad v = \mathfrak{C} \sinh t, \quad U = \sqrt{0,5} e^t, \quad V = \sqrt{0,5} e^{-t}.$$

$$\begin{aligned}0 < b < a: \quad x &= \frac{b}{a}, & \sqrt{a+ib} &= \pm (u\sqrt{a} + iv\sqrt{a}) \\ & & \sqrt{-a+ib} &= \pm (v\sqrt{a} + iu\sqrt{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 < a < b: \quad x &= \frac{a}{b}, & \sqrt{a+ib} &= \pm (U\sqrt{b} + iV\sqrt{b}) \\ & & \sqrt{-a+ib} &= \pm (V\sqrt{b} + iU\sqrt{b}).\end{aligned}$$

$$\sqrt{1+ix} = u + iv$$

$$\sqrt{-1+ix} = v + iu$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d	
0,0	1,00 0,0	00 000	00 050	00 100	01 150	02 200	03 250	04 300	06 350	08 400	10 450	1 50
0,1	1,00 0,0	12 499	15 549	18 599	21 649	24 698	28 748	32 798	36 847	40 896	45 946	4 50
0,2	1,00 0,0	49 995	54 *044	60 *093	65 *142	71 *192	77 *240	83 *289	89 *338	96 *387	*02 *435	6 49
0,3	1,01 0,1	09 484	17 532	24 580	32 629	40 677	48 724	56 772	64 820	73 868	82 915	8 48
0,4	1,0 0,1	191 963	200 *010	209 *057	219 *104	229 *151	239 *198	249 *244	259 *291	269 *337	280 *383	10 47
0,5	1,0 0,2	291 429	302 475	313 521	324 567	336 612	347 658	359 703	371 748	383 793	395 838	11 46
0,6	1,0 0,2	407 883	420 927	432 972	445 *016	458 *060	471 *104	484 *148	497 *192	510 *235	524 *278	12 44
0,7	1,0 0,3	537 322	551 365	565 408	579 450	593 493	607 536	621 578	635 620	649 662	664 704	14 43
0,8	1,0 0,3	678 746	693 787	708 829	723 870	738 911	753 952	768 993	783 *034	798 *075	814 *115	15 42
0,9	1,0 0,4	829 156	844 196	860 236	876 276	891 315	907 355	923 394	939 434	955 473	971 512	16 40
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d	

$$x + i = U + iV$$

$$\sqrt{-x + i} = V + iU$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,0	0,7	071	107	142	178	214	250	286	323	359	396	36
	0,7	071	036	001	*966	*931	*897	*862	*828	*794	*760	35
0,1	0,7	433	470	507	545	582	620	657	695	733	771	37
	0,6	727	693	660	627	595	562	530	497	466	434	33
0,2	0,7	810	848	886	925	964	*002	*041	*080	*119	*158	38
	0,6	402	371	340	309	279	248	218	188	158	129	31
0,3	0,8	198	237	276	316	355	395	435	474	514	554	40
	0,6	099	070	041	013	*984	*956	*928	*900	*873	*845	28
0,4	0,8	594	634	674	714	754	794	834	874	914	954	40
	0,5	818	791	765	738	712	686	660	634	609	584	26
0,5	0,8	995	*035	*075	*115	*156	*196	*236	*276	*317	*357	40
	0,5	559	534	510	485	461	437	414	390	367	344	24
0,6	0,9	397	438	478	518	558	599	639	679	719	759	40
	0,5	321	298	275	253	231	209	187	166	144	123	22
0,7	0,9	800	840	880	920	960	*000	*040	*080	*120	*160	40
	0,5	102	081	061	040	020	000	*980	*960	*941	*921	20
0,8	1,0	200	239	279	319	359	398	438	477	517	556	40
	0,4	902	883	864	845	827	809	790	772	754	737	18
0,9	1,0	596	635	674	714	753	792	831	870	909	948	39
	0,4	719	701	684	667	650	633	616	600	583	567	17
x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

3. Rechtwinklige und Polarkoordinaten

3. Rectangular and polar co-ordinates

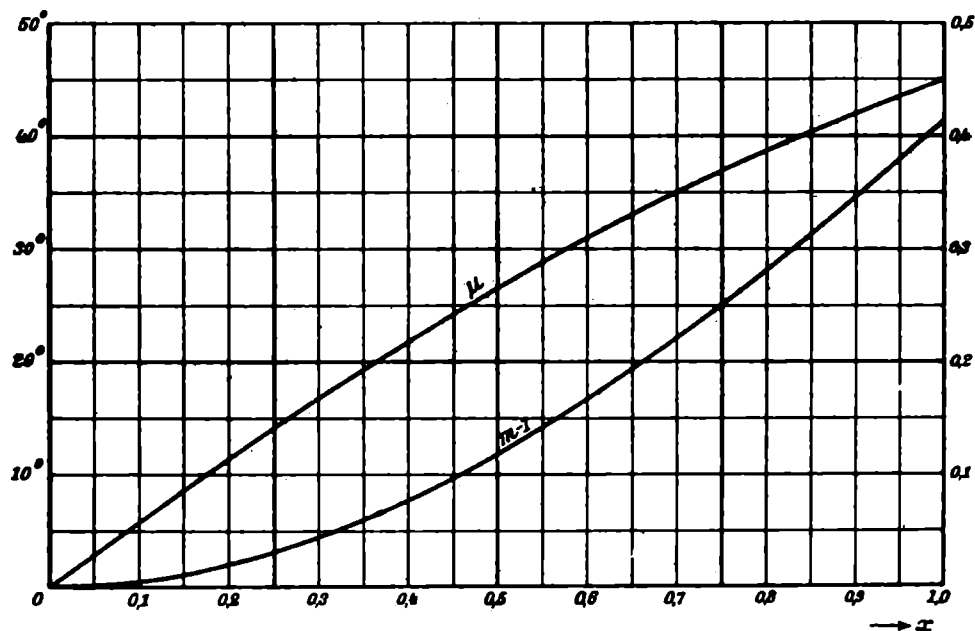


Fig. 7. $1 + ix = m e^{i\mu}$, $x + i = m e^{i(90^\circ - \mu)}$

$$1 + ix = m e^{i\mu}$$

$$x + i = m e^{i(90^\circ - \mu)}$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,00	1,0000 0,	000 0000°	005 0573°	020 1146°	045 1719°	080 2292°	125 2865°	180 3438°	245 4011°	320 4584°	405 5157°	45 573
1	1,000 0,	0500 5729°	0605 6302°	0720 6875°	0845 7448°	0980 8021°	1125 8594°	1280 9167°	1445 9740°	1620 *0312°	1805 *0885°	145 573
2	1,000 1,	2000 1458°	2205 2030°	2420 2603°	2645 3176°	2880 3748°	3124 4321°	3379 4894°	3644 5466°	3919 6039°	4204 6611°	245 573
3	1,000 1,	4499 7184°	4804 7756°	5119 8328°	5444 8901°	5778 9473°	6123 *0045°	6478 *0618°	6843 *1190°	7217 *1762°	7602 *2334°	345 572
4	1,000 2,	7997 2906°	8401 3478°	8816 4050°	9241 4622°	9675 5194°	*0120 5766°	*0573 6337°	*1037 6909°	*1513 7481°	*1998 8052°	445 572
5	1,001 2,	2492 8624°	2997 9196°	3511 9767°	4035 *0338°	4569 *0910°	5114 *1481°	5668 *2052°	6232 *2623°	6806 *3194°	7390 *3765°	544 571
6	1,001 3,	7984 4336°	8588 4907°	9202 5478°	9825 6049°	*0459 6619°	*1103 7190°	*1756 7760°	*2420 8331°	*3093 8901°	*3777 9472°	644 571
7	1,002 4,	4470 0042°	5173 0612°	5886 1182°	6610 1752°	7343 2322°	8086 2891°	8839 3461°	9601 4031°	*0374 4600°	*1156 5170°	743 570
8	1,003 4,	1948 5739°	2751 6308°	3564 6878°	4386 7447°	5218 8016°	6060 8585°	6912 9153°	7774 9722°	8645 *0291°	9527 *0859°	842 569
9	1,004 5,	0418 1428°	1320 1996°	2231 2564°	3152 3132°	4083 3700°	5024 4268°	5974 4836°	6935 5404°	7905 5971°	8886 6539°	941 568
0,1	1,0 —	0499 5,711°	0603 6,277°	0717 6,843°	0841 7,407°	0975 7,970°	1119 8,531°	1272 9,090°	1435 9,648°	1607 10,204°	1789 10,758°	144 561
2	1,0 10×1,	1980 1310°	2181 1860°	2391 2407°	2611 2953°	2840 3496°	3078 4036°	3325 4574°	3581 5110°	3846 5642°	4120 6172°	238 540
3	1,0 10×1,	4403 6699°	4695 7223°	4995 7745°	5304 8263°	5622 8778°	5948 9290°	6283 9799°	6626 *0305°	6977 *0807°	7336 *1306°	326 512
4	1,0 10×2,	7703 1801°	8079 2294°	8462 2782°	8853 3268°	9252 3750°	9659 4228°	*0073 4702°	*0494 5174°	*0923 5641°	*1360 6105°	407 478
5	1,1 10×2,	1803 6565°	2254 7022°	2712 7474°	3177 7924°	3649 8369°	4127 8811°	4613 9249°	5105 9683°	5603 *0114°	6108 *0541°	478 442
6	1,1 10×3,	6619 0964°	7137 1383°	7661 1799°	8190 2211°	8727 2619°	9269 3024°	9817 3425°	*0371 3822°	*0930 4216°	*1495 4606°	542 404
7	1,2 10×3,	2066 4992°	2642 5375°	3224 5754°	3811 6129°	4403 6501°	5001 6870°	5603 7235°	6211 7596°	6823 7954°	7440 8309°	598 369
8	1,2 10×3,	8063 8660°	8690 9008°	9322 9352°	9958 9693°	*0599 *0030°	*1245 *0365°	*1894 *0696°	*2548 *1023°	*3207 *1348°	*3870 *1669°	646 335
9	1,3 10×4,	4537 1987°	5208 2302°	5882 2614°	6562 2923°	7242 3229°	7932 3531°	8623 3831°	9316 4128°	*0015 4421°	*0716 4712°	690 302

$$1 + ix = m e^{i\mu}, \quad x + i = m e^{i(90^\circ - \mu)},$$

$$\operatorname{tg} \mu = x, \quad m = \sqrt{1 + x^2} = 1 + x \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{1}{\cos \mu}.$$

$$\pm a + ib = r e^{i\varrho}.$$

A. a, b gegeben; r, ϱ gesucht: | A. Given a, b ; to find r, ϱ :

$$0 < b < a: x = \frac{b}{a}; \quad r = am, \quad \begin{cases} \varrho = \mu \\ \varrho = 180^\circ - \mu \end{cases}$$

$$0 < a < b; x = \frac{a}{b}; \quad r = bm, \quad \varrho = 90^\circ \mp \mu.$$

B. r, ϱ gegeben; a, b gesucht: | B. Given r, ϱ ; to find a, b :

$$\begin{aligned} 0 < \varrho < 45^\circ: & \mu = \varrho \\ 135^\circ < \varrho < 180^\circ: & \mu = 180^\circ - \varrho; \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 < \varrho < 45^\circ: \\ 135^\circ < \varrho < 180^\circ: \end{aligned}} \right\} a = \frac{r}{m}, \quad b = \frac{r}{m} x.$$

$$45^\circ < \varrho < 135^\circ: \quad \mu = |90^\circ - \varrho|; \quad a = \frac{r}{m} x, \quad b = \frac{r}{m}.$$

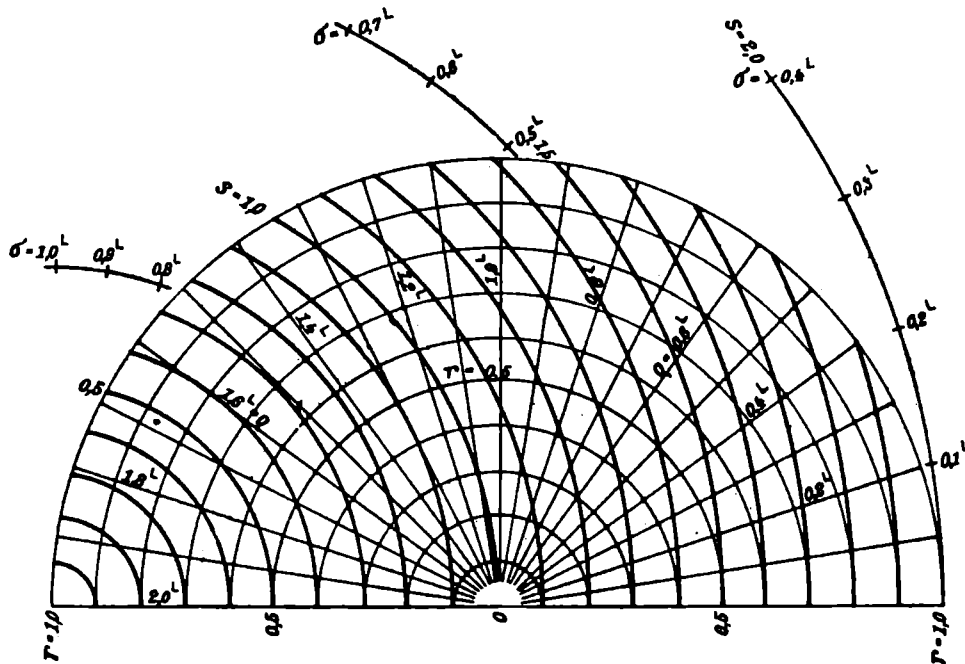


Fig. 8. $1 + ri\varrho = si^0$, $r + i\varrho = si\varrho - \sigma$

		s									$1 + r i^{\varrho} = s i^{\sigma}$	
ϱ	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0		
0,00°	1,1000	1,2000	1,3000	1,4000	1,5000	1,6000	1,7000	1,8000	1,9000	2,0000		
0,05°	1,0997	1,1995	1,2993	1,3991	1,4990	1,5988	1,6987	1,7986	1,8985	1,9985		
0,10°	1,0989	1,1979	1,2972	1,3965	1,4959	1,5954	1,6949	1,7945	1,8942	1,9938		
0,15°	1,0977	1,1954	1,2936	1,3921	1,4908	1,5896	1,6886	1,7877	1,8869	1,9863		
0,20°	1,0955	1,1918	1,2887	1,3859	1,4836	1,5815	1,6797	1,7781	1,8767	1,9754		
0,25°	1,0931	1,1872	1,2823	1,3781	1,4744	1,5712	1,6684	1,7658	1,8636	1,9616		
0,30°	1,0900	1,1817	1,2746	1,3685	1,4632	1,5586	1,6545	1,7509	1,8477	1,9447		
0,35°	1,0865	1,1752	1,2655	1,3572	1,4500	1,5438	1,6382	1,7333	1,8289	1,9249		
0,40°	1,0825	1,1677	1,2552	1,3443	1,4349	1,5267	1,6195	1,7130	1,8073	1,9021		
0,45°	1,0780	1,1594	1,2435	1,3298	1,4179	1,5075	1,5983	1,6902	1,7829	1,8764		
0,50°	1,0730	1,1501	1,2306	1,3137	1,3990	1,4861	1,5748	1,6647	1,7558	1,8478		
0,55°	1,0677	1,1401	1,2164	1,2960	1,3782	1,4626	1,5489	1,6368	1,7260	1,8163		
0,60°	1,0619	1,1292	1,2011	1,2768	1,3556	1,4371	1,5208	1,6064	1,6935	1,7820		
0,65°	1,0557	1,1176	1,1847	1,2562	1,3314	1,4096	1,4905	1,5735	1,6585	1,7450		
0,70°	1,0492	1,1053	1,1672	1,2342	1,3054	1,3801	1,4579	1,5383	1,6209	1,7053		
0,75°	1,0424	1,0923	1,1487	1,2108	1,2778	1,3488	1,4233	1,5008	1,5808	1,6629		
0,80°	1,0353	1,0787	1,1293	1,1863	1,2486	1,3156	1,3866	1,4610	1,5383	1,6180		
0,85°	1,0280	1,0646	1,1091	1,1605	1,2180	1,2807	1,3479	1,4190	1,4934	1,5706		
0,90°	1,0204	1,0500	1,0881	1,1336	1,1859	1,2441	1,3073	1,3749	1,4462	1,5208		
0,95°	1,0128	1,0351	1,0663	1,1058	1,1526	1,2059	1,2648	1,3287	1,3969	1,4686		
1,00°	1,0050	1,0198	1,0440	1,0770	1,1180	1,1662	1,2207	1,2806	1,3454	1,4142		
1,05°	0,9972	1,0043	1,0212	1,0475	1,0824	1,1251	1,1748	1,2306	1,2918	1,3576		
1,10°	0,9893	0,9886	0,9981	1,0173	1,0457	1,0827	1,1274	1,1789	1,2363	1,2989		
1,15°	0,9815	0,9729	0,9746	0,9865	1,0082	1,0392	1,0785	1,1254	1,1789	1,2382		
1,20°	0,9738	0,9573	0,9511	0,9554	0,9700	0,9946	1,0283	1,0703	1,1197	1,1756		
1,25°	0,9662	0,9418	0,9276	0,9240	0,9313	0,9491	0,9769	1,0138	1,0589	1,1111		
1,30°	0,9588	0,9265	0,9042	0,8926	0,8922	0,9029	0,9243	0,9558	0,9964	1,0450		
1,35°	0,9516	0,9116	0,8812	0,8614	0,8529	0,8562	0,8709	0,8967	0,9325	0,9772		
1,40°	0,9447	0,8972	0,8587	0,8305	0,8138	0,8091	0,8168	0,8364	0,8672	0,9080		
1,45°	0,9381	0,8833	0,8369	0,8003	0,7750	0,7620	0,7621	0,7753	0,8006	0,8373		
1,50°	0,9320	0,8701	0,8159	0,7709	0,7368	0,7151	0,7071	0,7131	0,7329	0,7654		
1,55°	0,9262	0,8578	0,7961	0,7427	0,6997	0,6690	0,6523	0,6507	0,6643	0,6922		
1,60°	0,9210	0,8464	0,7776	0,7161	0,6641	0,6238	0,5978	0,5879	0,5948	0,6180		
1,65°	0,9162	0,8360	0,7605	0,6913	0,6304	0,5804	0,5443	0,5251	0,5246	0,5429		
1,70°	0,9120	0,8268	0,7452	0,6687	0,5992	0,5393	0,4925	0,4630	0,4541	0,4669		
1,75°	0,9084	0,8188	0,7319	0,6488	0,5711	0,5013	0,4434	0,4022	0,3834	0,3902		
1,80°	0,9054	0,8121	0,7207	0,6318	0,5468	0,4677	0,3981	0,3440	0,3132	0,3129		
1,85°	0,9031	0,8069	0,7117	0,6181	0,5269	0,4395	0,3587	0,2902	0,2444	0,2351		
1,90°	0,9014	0,8031	0,7053	0,6082	0,5122	0,4181	0,3275	0,2443	0,1793	0,1569		
1,95°	0,9003	0,8008	0,7013	0,6021	0,5031	0,4046	0,3071	0,2120	0,1247	0,0785		
2,00°	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0000		

 4. Vektoraddition: $a i^{\alpha} + b i^{\beta} = c i^{\gamma}$

 4. Vector addition: $a i^{\alpha} + b i^{\beta} = c i^{\gamma}$

$$1 + r i^{\varrho} = s i^{\sigma},$$

$$r + i^{\varrho} = s i^{\varrho - \sigma}.$$

$$s = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \varrho},$$

$$\operatorname{ctg} \sigma = \operatorname{ctg} \varrho + \frac{1}{r \sin \varrho}.$$

$$r + i\ell = s i\ell^{-\sigma}$$

$$\sigma$$

ρ	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,00454	0,00833	0,01153	0,01428	0,01666	0,01875	0,02059	0,02222	0,02368	0,02500
0,10	0,00906	0,01663	0,02304	0,02854	0,03330	0,03745	0,04116	0,04443	0,04738	0,05000
0,15	0,01354	0,02487	0,03448	0,04274	0,04990	0,05617	0,06171	0,06663	0,07103	0,07500
0,20	0,01796	0,03303	0,04584	0,05685	0,06642	0,07481	0,08221	0,08880	0,09469	0,10000
0,25	0,02229	0,04107	0,05707	0,07086	0,08285	0,09337	0,10266	0,11093	0,11834	0,12500
0,30	0,02652	0,04897	0,06816	0,08473	0,09916	0,11184	0,12304	0,13302	0,14196	0,15000
0,35	0,03063	0,05669	0,07905	0,09842	0,11533	0,13019	0,14334	0,15506	0,16555	0,17500
0,40	0,03458	0,06420	0,08974	0,11192	0,13132	0,14840	0,16354	0,17703	0,18911	0,20000
0,45	0,03838	0,07147	0,10016	0,12517	0,14710	0,16645	0,18361	0,19892	0,2126	0,2250
0,50	0,04198	0,07848	0,11030	0,13815	0,16265	0,18431	0,20355	0,2207	0,2361	0,2500
0,55	0,04538	0,08518	0,12010	0,15082	0,17793	0,20195	0,2233	0,2424	0,2596	0,2750
0,60	0,04855	0,09154	0,12953	0,16313	0,19290	0,2193	0,2429	0,2640	0,2829	0,3000
0,65	0,05147	0,09752	0,13855	0,17504	0,2075	0,2364	0,2623	0,2854	0,3063	0,3250
0,70	0,05413	0,10309	0,14710	0,18650	0,2217	0,2532	0,2814	0,3067	0,3295	0,3500
0,75	0,05650	0,10821	0,15513	0,19745	0,2355	0,2696	0,3003	0,3278	0,3526	0,3750
0,80	0,05857	0,11284	0,16260	0,2078	0,2487	0,2856	0,3188	0,3487	0,3757	0,4000
0,85	0,06031	0,11695	0,16944	0,2176	0,2614	0,3011	0,3370	0,3694	0,3986	0,4250
0,90	0,06172	0,12048	0,17559	0,2266	0,2734	0,3161	0,3548	0,3898	0,4214	0,4500
0,95	0,06276	0,12340	0,18098	0,2349	0,2847	0,3304	0,3721	0,4098	0,4441	0,4750
1,00	0,06345	0,12567	0,18555	0,2422	0,2952	0,3440	0,3888	0,4296	0,4665	0,5000
1,05	0,06375	0,12723	0,18921	0,2486	0,3047	0,3568	0,4049	0,4488	0,4888	0,5250
1,10	0,06366	0,12806	0,19189	0,2539	0,3131	0,3687	0,4203	0,4676	0,5108	0,5500
1,15	0,06317	0,12811	0,19351	0,2580	0,3203	0,3795	0,4348	0,4859	0,5326	0,5750
1,20	0,06228	0,12734	0,19396	0,2607	0,3262	0,3890	0,4483	0,5034	0,5540	0,6000
1,25	0,06097	0,12572	0,19318	0,2619	0,3304	0,3971	0,4606	0,5201	0,5750	0,6250
1,30	0,05925	0,12321	0,19105	0,2615	0,3328	0,4034	0,4715	0,5358	0,5955	0,6500
1,35	0,05712	0,11980	0,18750	0,2592	0,3332	0,4077	0,4807	0,5503	0,6153	0,6750
1,40	0,05459	0,11545	0,18243	0,2548	0,3312	0,4096	0,4877	0,5633	0,6345	0,7000
1,45	0,05166	0,11016	0,17576	0,2482	0,3265	0,4087	0,4923	0,5745	0,6526	0,7250
1,50	0,04835	0,10393	0,16744	0,2392	0,3186	0,4043	0,4936	0,5832	0,6695	0,7500
1,55	0,04467	0,09677	0,15740	0,2275	0,3072	0,3958	0,4910	0,5888	0,6848	0,7750
1,60	0,04066	0,08871	0,14564	0,2130	0,2919	0,3825	0,4833	0,5902	0,6978	0,8000
1,65	0,03632	0,07978	0,13216	0,19553	0,2720	0,3633	0,4691	0,5861	0,7075	0,8250
1,70	0,03170	0,07005	0,11700	0,17508	0,2474	0,3371	0,4465	0,5741	0,7126	0,8500
1,75	0,02683	0,05959	0,10027	0,15164	0,2175	0,3029	0,4130	0,5507	0,7103	0,8750
1,80	0,02173	0,04849	0,08212	0,12536	0,18239	0,2595	0,3656	0,5105	0,6958	0,9000
1,85	0,01646	0,03686	0,06274	0,09654	0,14221	0,2065	0,3011	0,4451	0,6586	0,9250
1,90	0,01105	0,02481	0,04239	0,06562	0,09761	0,14416	0,2171	0,3423	0,5747	0,9500
1,95	0,00555	0,01248	0,02137	0,03320	0,04963	0,07424	0,11446	0,19138	0,3832	0,9750
2,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,0000	—

Gegeben $\alpha, \beta, 0 < b < a$; gesucht c, γ
Given $\alpha, \beta, 0 < b < a$; to find c, γ

$$r = \frac{b}{a}, \quad \rho = |\alpha - \beta|;$$

$$c = as, \quad \gamma = \alpha \pm \sigma, \quad \text{je nachdem } \alpha \leq \beta.$$

IV. Quadratische Gleichungen

IV. Quadratic equations

Um die Wurzeln der quadratischen Gleichung

To determine the roots of the quadratic equation

$$x^2 + px \mp q^2 = 0, \quad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = \mp q^2$$

zu bestimmen, berechne man $q > 0$ und p/q , gehe mit dem Betrag von p/q in die entsprechende Tafel ein und lese die beiden zugehörigen Werte von x/q ab. Diese sind noch mit q oder $-q$ zu multiplizieren, je nachdem p positiv oder negativ ist. Die größere der beiden Wurzeln hat immer das entgegengesetzte Zeichen wie p .

one calculates $q > 0$ and p/q and finds from the appropriate table the two corresponding values of x/q . These must be multiplied by q or $-q$ according to whether p is positive or negative. The greater of the two roots has always the opposite sign to p .

x_2/q ist überall linear interpolierbar, dagegen x_1/q in manchen Teilen der Tafeln nicht. Es genügt dann aber x_2/q zu bestimmen, weil q , durch den Betrag von x_2/q dividiert, den Betrag von x_1 ergibt.

x_2/q can be everywhere interpolated linearly, but in many parts of the table x_1/q cannot be. It suffices then, however, to determine x_2/q , since q divided by the magnitude of x_2/q gives the magnitude of x_1 .

Statt der hier gegebenen besonderen Tafeln kann man auch andere Tafeln benutzen, etwa so:

Instead of the special tables given here one can use other tables, as follows:

$$\text{I. } x^2 + px - q^2 = 0.$$

Man berechne λ oder u aus

| One can calculate λ or u from

$$\frac{p}{2q} = \operatorname{tg} 2\lambda = \operatorname{Sin} u$$

und findet damit

| and therefrom find

$$x_1 = +q \operatorname{tg} (0.5^\circ - \lambda) = +q e^{-u} \quad \text{und} \quad x_2 = -q \operatorname{tg} (0.5^\circ + \lambda) = -q e^u$$

$$\text{II. } x^2 + px + q^2 = 0, \quad |p| > 2q.$$

Man berechne ϑ oder v aus

| One can calculate ϑ or v from

$$\frac{p}{2q} = \frac{1}{\sin 2\vartheta} = \pm \operatorname{Cos} v$$

und findet damit

| and therefrom find

$$x_1 = -q \operatorname{tg} \vartheta = \mp q e^{-v} \quad \text{und} \quad x_2 = -q \operatorname{ctg} \vartheta = \mp q e^v$$

$$\text{III. } x^2 + px + q^2 = 0, \quad |p| < 2q.$$

Man berechne φ aus

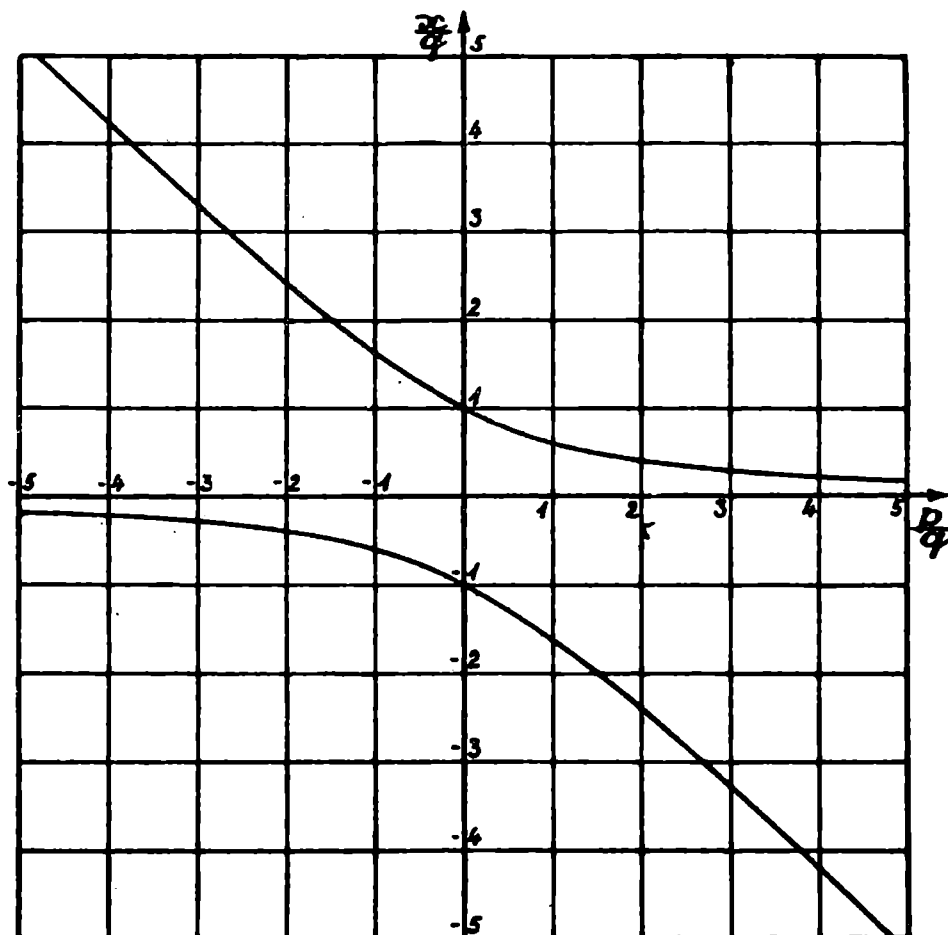
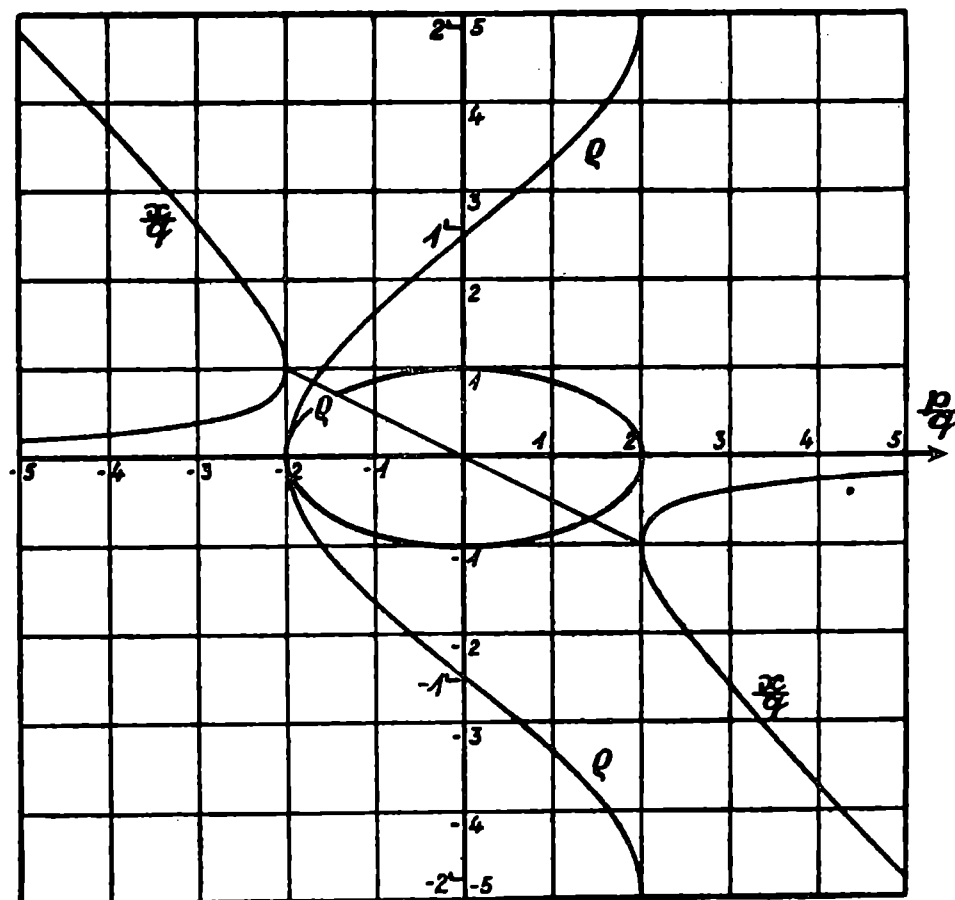
| One can calculate φ from

$$\frac{p}{2q} = \sin \varphi$$

und findet damit

| and therefrom find

$$x_{1,2} = qi^{\pm(1+\varphi)} = -q \sin \varphi \pm iq \cos \varphi.$$

Fig. 9. $x^3 + px - q^2 = 0$ Fig. 10. $x^3 + px + q^3 = 0$

$$x^2 + px - q^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (-x)^2 + (-p)(-x) - q^2 = 0$$

cfr. fig. 9

$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q}$	$\frac{x_2}{q}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q} = -\frac{q}{x_2}$	$\frac{x_2}{q}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q} = -\frac{q}{x_2}$	$\frac{x_2}{q}$
0, 00	1,0 000	— 1,0 000	1, 50	0,5 000	— 2, 0000	4, 0	0,2 3607	— 4, 236
05	0,9 753 ⁴⁹⁴	253 ⁵⁰⁶	55	0,4 902 ¹⁹⁶	0402 ⁸⁰⁴	2	2594 ^{506,5}	426 ⁹⁵
10	512 ⁴⁸²	512 ⁵¹⁸	60	806 ¹⁹²	0806 ⁸⁰⁸	4	1661 ^{466,5}	617 ^{95,5}
15	278 ⁴⁶⁸	778 ⁵³²	65	714 ¹⁸⁴	1214 ⁸¹⁶	6	0799 ⁴³¹	808 ^{95,5}
20	050 ⁴⁵⁶	— 1,1 050 ⁵⁴⁴	70	624 ¹⁸⁰	1624 ⁸²⁰	8	0000 ^{399,5}	— 5, 000 ⁹⁶
	444	556		172	828		371	96,5
25	0,8 828	328	75	538 ¹⁶⁸	2038 ⁸³²	5, 0	0,1 9258	193 ^{96,5}
30	612 ⁴³²	612 ⁵⁶⁸	80	454 ¹⁶⁴	2454 ⁸³⁶	2	8568 ³⁴⁵	386 ^{96,5}
35	402 ⁴²⁰	902 ⁵⁸⁰	85	372 ¹⁵⁸	2872 ⁸⁴²	4	7924 ³²²	579 ^{96,5}
40	198 ⁴⁰⁸	— 1,2 198 ⁵⁹²	90	293 ¹⁵²	3293 ⁸⁴⁸	6	7322 ³⁰¹	773 ⁹⁷
45	000 ³⁹⁶	500 ⁶⁰⁴	95	217 ¹⁵⁰	3717 ⁸⁵⁰	8	6757 ^{282,5}	968 ^{97,5}
	384	616					265,5	97
50	0,7 808	808	2, 00	142	4142 ⁸⁵⁸	6, 0	6226 ²³⁷⁸	— 6, 162 ⁹⁷⁶
55	621 ³⁷⁴	— 1,3 121 ⁶²⁶	1	000 ¹⁴²	5000 ⁸⁶⁶	5	5037 ²⁰⁶²	650 ⁹⁷⁶
60	362	440 ⁶³⁸	2	0,3 866 ¹³⁴	5866 ⁸⁷⁴	7, 0	4006 ¹⁸⁰⁸	— 7, 140 ⁹⁸⁰
65	440 ³⁵⁰	765 ⁶⁵⁰	3	740 ¹²⁶	6740 ⁸⁸¹	5	3105 ¹⁵⁸⁸	631 ⁹⁸²
70	265 ³⁴⁰	— 1,4 095 ⁶⁶⁰	4	621 ¹¹⁹	7621 ⁸⁸⁷	8, 0	2311 ¹⁴¹⁰	— 8, 123 ⁹⁸⁴
	330	670		113		5	1606 ¹²⁵⁸	616 ⁹⁸⁶
75	0,6 930	430 ⁶⁸⁰	5	508 ¹⁰⁷	8508 ⁸⁹³	9, 0	0977 ¹⁰⁷⁵	— 9, 110 ⁹⁸⁸
80	770 ³²⁰	770 ⁶⁹²	6	401 ¹⁰¹	9401 ⁹⁰	10, 0	0,0 9902 ⁸⁸⁵	— 10, 099 ⁹⁸⁹
85	616 ³⁰⁸	— 1,5 116 ⁷⁰⁰	7	300 ⁹⁵	— 3, 030 ⁹¹	11, 0	9017 ⁷⁴¹	— 11, 090 ⁹⁹¹
90	466 ³⁰⁰	466 ⁷¹⁰	8	205 ⁹¹	211 ⁹⁰	12, 0	0,0 8276	— 12, 083 ⁹⁹³
95	321 ²⁹⁰	821 ⁷¹⁸	9	114 ⁸⁶				
	282							
1, 00	180	— 1,6 180	3, 0	028 ⁸²	303 ⁹²			
05	044 ²⁷²	544 ⁷²⁸	1	0,2 9459 ⁸²	395 ⁹²			
10	0,5 912 ²⁶⁴	912 ⁷³⁶	2	8680 ⁷⁷⁹	487 ⁹²			
15	785 ²⁵⁴	— 1,7 285 ⁷⁴⁶	3	7938 ⁷⁴²	579 ⁹²			
20	662 ²⁴⁶	662 ⁷⁵⁴	4	7231 ⁷⁰⁷	672 ⁹³			
	238	762		674	94			
25	543 ²³²	— 1,8 043 ⁷⁶⁸	5	6557 ⁶⁴⁴	766 ⁹³			
30	427 ²²⁴	427 ⁷⁷⁶	6	5913 ⁶¹⁵	859 ⁹⁴			
35	315 ²¹⁶	815 ⁷⁸⁴	7	5298 ⁵⁸⁹	953 ⁹⁴			
40	207 ²¹⁰	— 1,9 207 ⁷⁹⁰	8	4709 ⁵⁶³	— 4, 047 ⁹⁵			
45	102 ²⁰⁴	602 ⁷⁹⁶	9	4146 ⁵³⁹	142 ⁹⁴			
1, 50	0,5 000	— 2,0 000	4, 0	0,2 3607	— 4, 236			

Für $\frac{p}{q} > 12$ berechne
For $\frac{p}{q} > 12$ compute

$$+ \frac{x_1}{q} = \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^3;$$

$$- \frac{x_2}{q} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

$$x^2 + px + q^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (-x)^2 + (-p)(-x) + q^2 = 0$$

cf. fig. 10

$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q}$	$\frac{x_2}{q}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q}$	$\frac{x_2}{q}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{x_1}{q} = \frac{q}{x_2}$	$\frac{x_2}{q}$
2,0 0	-1,0 000	-1,0 000						
2,1 0	-0,7 298 ¹¹⁰	-1,3 702 ²¹⁰	2,4 0	-0,5 367 ^{39,5}	-1,8 633 ^{139,5}	3, 20	-0,3 510 ¹³⁸	-2, 8490 ¹¹³⁸
1	188 ¹⁰⁴	912 ²⁰⁴	2	288 ³⁸	912 ¹³⁸	25	441 ¹³²	9059 ¹¹³²
2	084 ⁹⁸	-1,4 116 ¹⁹⁸	4	212 ^{36,5}	-1,9 188 ^{136,5}	30	376 ¹²⁶	9624 ¹¹²⁶
3	-0,6 986 ⁹³	314 ¹⁹³	6	139 ^{35,5}	461 ^{135,5}	35	312 ¹²⁰	-3, 019 ¹¹²⁰
4	893 ⁸⁸	507 ¹⁸⁸	8	068 ³⁴	732 ¹³⁴	40	252 ¹¹⁴	075 ¹¹¹
5	805 ⁸⁴	695 ¹⁸⁴	2,5 0	000 ³³	-2,0 000 ¹³³	3, 5	138 ¹⁰⁵	186 ¹¹¹
6	721 ⁸¹	879 ¹⁸¹	2	-0,4 934 ^{31,5}	266 ^{131,5}	6	033 ⁹⁷	297 ¹¹⁰
7	640 ⁷⁷	-1,5 060 ¹⁷⁷	4	871 ^{30,5}	529 ^{130,5}	7	-0,2 9356 ^{91,1}	407 ¹⁰⁹
8	563 ⁷⁴	237 ¹⁷⁴	6	810 ^{29,5}	790 ^{129,5}	8	8445 ^{85,1}	516 ¹⁰⁸
9	489 ⁷²	411 ¹⁷²	8	751 ^{28,5}	-2,1 049 ^{128,5}	9	7594 ^{79,8}	624 ¹⁰⁸
2,2 0	417 ⁶⁹	583 ¹⁶⁹	2,6 0	694 ²⁸	306 ¹²⁸	4, 0	6796 ^{75,1}	732 ¹⁰⁸
1	348 ⁶⁶	752 ¹⁶⁶	2	638 ²⁷	562 ¹²⁷	1	6045 ^{70,7}	840 ¹⁰⁷
2	282 ⁶⁴	918 ¹⁶⁴	4	584 ^{26,5}	816 ^{126,5}	2	5338 ^{64,7,5}	947 ^{106,5}
3	218 ⁶²	-1,6 082 ¹⁶²	6	531 ^{25,5}	-2,2 069 ^{125,5}	4	4041 ^{58,2,5}	-4, 160 ^{105,5}
4	156 ⁶⁰	244 ¹⁶⁰	8	480 ^{24,5}	320 ^{124,5}	6	2876 ^{52,5}	371 ¹⁰⁵
5	096 ⁵⁸	404 ¹⁵⁸	2,7 0	431 ²³⁶	569 ^{123,6}	8	1825 ^{47,7}	581 ¹⁰⁵
6	038 ⁵⁷	562 ¹⁵⁷	75	313 ²²²	-2,3 187 ^{122,2}	5, 0	0871 ^{435,5}	791 ^{104,5}
7	-0,5 981 ⁵⁵	719 ¹⁵⁵	80	202 ²⁰⁸	798 ^{120,8}	2	0000 ^{399,5}	-5, 000 ¹⁰⁴
8	926 ⁵³	874 ¹⁵³	85	098 ¹⁹⁶	-2, 4402 ^{119,6}	4	-0,1 9201 ^{367,5}	208 ^{103,5}
9	873 ⁵²	-1,7 027 ¹⁵²	90	000 ¹⁸⁶	5000 ^{118,6}	6	8466 ^{339,5}	415 ^{103,5}
2,3 0	821 ⁵⁰	179 ¹⁵⁰	95	-0,3 907 ¹⁷⁶	5593 ^{117,6}	8	7787 ^{31,5}	622 ¹⁰³
2	721 ^{47,5}	479 ^{147,5}	3, 00	819 ¹⁶⁶	6181 ^{116,6}	6, 0	7157 ^{278,0}	828 ^{102,8}
4	626 ⁴⁵	774 ¹⁴⁵	05	736 ¹⁵⁸	6764 ^{115,8}	5	5767 ^{235,6}	-6, 342 ^{102,4}
6	536 ⁴³	-1,8 064 ¹⁴³	10	657 ¹⁵⁰	7343 ^{115,0}	7, 0	4589 ^{202,0}	854 ^{102,0}
8	450 ^{41,5}	350 ^{141,5}	15	582 ¹⁴⁴	7918 ^{114,4}	5	3579 ^{175,4}	-7, 364 ^{101,8}
2,4 0	-0,5 367	-1,8 633	3, 20	-0,3 510	-2, 8490	8, 0	2702 ^{154,0}	873 ^{101,6}
						5	-0,1 1932 ^{136,0}	-8, 381 ^{101,4}
						9, 0	1252 ^{115,0}	888 ^{101,1}
						10, 0	0102	-9, 899 ^{100,9}
						11, 0	-0,0 9168 ^{93,4}	-10, 908 ^{100,8}
						12, 0	-0,0 8392 ^{77,6}	-11, 916

Für $2 < \frac{p}{q} = 2 + w^2 < 2,13$ berechne $-\frac{x}{q} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{8}$.
For compute

Für $-2 < \frac{p}{q} = -2 \cos \varrho' < +2$ berechne $x = q i^{\pm \varrho} = q \cos \varrho' \pm i q \sin \varrho'$.
For compute

Für $\frac{p}{q} > 12$ berechne $-\frac{x_1}{q} = \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^3$; $-\frac{x_2}{q} = \frac{p}{q} - \frac{q}{p}$.
For compute

V. Kubische Gleichungen

V. Cubic equations

A. In der kubischen Gleichung

A. In the cubic equation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 istwith the roots x_1, x_2, x_3 we have

$$A = x_1 + x_2 + x_3, \quad \frac{B}{C} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3},$$

$$E^3 \equiv C = x_1 x_2 x_3;$$

Für $y = -x$ geht die Gleichung über inFor $y = -x$ the equation changes into

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0,$$

für $y = 1/t$ infor $y = 1/t$ into

$$t^3 + \frac{B}{C}t^2 + \frac{A}{C}t + \frac{1}{C} = 0.$$

Für den Betrag r einer komplexen Wurzel
 $x = ri \pm e$ giltFor the value r of a complex root $x = ri \pm e$
holds

$$r^3 - Br^2 + ACr^2 - C^2 = 0.$$

Nachdem r hieraus bestimmt ist, erhält
man r having been derived from this, we obtain

$$\cos \varrho = \frac{Ar^2 - C}{2r^3}.$$

 E sei reell. Bei festem C seien A und B
in der Ebene auf rechtwinkligen Achsen
abgetragen. In einigem Abstand vom Null-
punkt sind dann Näherungslösungen in
der Nähe der E must be taken as real. C being con-
stant A and B may be plotted in the plane
on rectangular axes. We then obtain
approximate solutions at some distance
from the origin in the proximity of the1. A -Achse ($B = 0$):1. A -axis ($B = 0$):

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad x_3 = A, \quad |A| \gg |E|;$$

2. schiefen Achsen $B = \pm EA$:2. inclined axes $B = \pm EA$:

$$x_1 = \frac{C}{B}, \quad x_2 = \frac{B}{A}, \quad x_3 = A;$$

3. B -Achse ($A = 0$):3. B -axis ($A = 0$):

$$x_1 = \frac{C}{B}, \quad x_2 = +\sqrt{-B}, \quad x_3 = -\sqrt{-B}, \quad |B| \gg E^2.$$

Für Lösungen, die nicht von der Größen-
ordnung E sind, gelten die weiteren Nähe-
rungen:For solutions differing considerably from
 E we obtain the approximations:

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad |x| \gg |E|;$$

$$x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad |x| \ll |E|.$$

Von einem Näherungswert X gelangt
man zu einem besseren X_1 durchFrom an approximate value X we get a
better value X_1 by

$$X_1 = X + r + \frac{H}{N}r^2 + \left(\frac{2H^2}{N} - X\right)\frac{r^3}{N} + \dots,$$

wo

| where

$$Nr = C + X [X (A - X) - B]$$

$$N = B + X (3X - 2A)$$

$$H = A - 3X$$

$$X + r = \frac{C + X^2 (2X - A)}{B + X (3X - 2A)},$$

vorausgesetzt, daß $|r| < < |X|$. Wird X willkürlich angenommen, so zeigt diese Ungleichung, wie A, B, C beschaffen sein müssen, damit X näherungsweise eine Lösung ist. Aus $X = A$ ergibt sich z. B. so als besserer Wert

assuming that $|r| < < |X|$. For arbitrary X this inequality shows how A, B, C must be constituted so that X may be an approximate solution. E. g. from $X = A$ we obtain a better value

$$X + r = \frac{A^2 + C}{A^2 + B},$$

wenn

| if we have

$$|C - AB| < < |A^2 + AB|.$$

Zuweilen kommt man durch wiederholtes Einsetzen bequemer zu genaueren Werten X_1 :

More accurate values of X_1 are sometimes obtained more simply by iteration:

$$X_1 = A - \frac{B}{X} + \frac{C}{X^2}$$

$$X_1 = \frac{C}{B} + X^2 \frac{A - X}{B}$$

$$X_1 = \frac{B}{A} + \frac{X^2}{A} - \frac{C}{AX}$$

$$X_1 = \sqrt{-B + AX + \frac{C}{X}}$$

$$X_1 = \sqrt{-\frac{C}{A} + \frac{X^2}{A} + \frac{BX}{A}},$$

jedoch nur, wenn die Ableitung des benutzten Ausdrucks für X_1 einen kleineren Betrag als 1 hat. Unter den fünf angegebenen Ausdrücken für X_1 wähle man einen solchen.

however, only if the derivative by X of the expression used for X_1 is of smaller magnitude than 1. We have therefore to choose an expression of this kind among the five given.

Nachdem man eine reelle Wurzel x_1 mit der erstrebten Genauigkeit bestimmt hat, dividiere man die linke Seite der kubischen Gleichung durch $x - x_1$; dann hat man es nur noch mit einer quadratischen Gleichung zu tun.

A real root x_1 having been found with the accuracy desired, the left side of the cubic equation must be divided by $x - x_1$; now we have to deal only with a quadratic equation.

B. Es werde gesetzt:

B. Substituting:

$$x = Eu = \frac{E}{v}, \quad A = Ea, \quad B = E^2b.$$

Dann folgt

| We get

$$u^3 - au^2 + bu - 1 = 0, \quad v^3 - bv^2 + av - 1 = 0$$

(Zurückführung auf $C=1$). Da diese Gleichungen in a, b linear sind, stellen in der Ebene (a, b) die Kurven $u = 1/v$

(Reduction to $C=1$). These equations being linear with respect to a, b , the curves $u = 1/v = \text{const}$ are straight lines

= konst. Geraden dar (Fig. 11). Schräg nach rechts oben hin hat man drei positive Wurzeln, schräg nach links unten hin eine positive und zwei negative. Nach oben und unten hin hat man zwei große und eine kleine Wurzel, nach links und rechts hin eine große und zwei kleine. Große komplexe Wurzeln finden sich in der Nähe der positiven b -Halbachse, kleine in der Nähe der positiven a -Halbachse. In diesen Gebieten seien die drei Wurzeln

$$u_1 > 0, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{u_1}} e^{i\eta}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{u_1}} e^{-i\eta}.$$

Dann ist

$$a = \frac{2}{\sqrt{u_1}} \cos \eta + u_1, \quad b = 2 \sqrt{u_1} \cos \eta + \frac{1}{u_1}.$$

Then we obtain

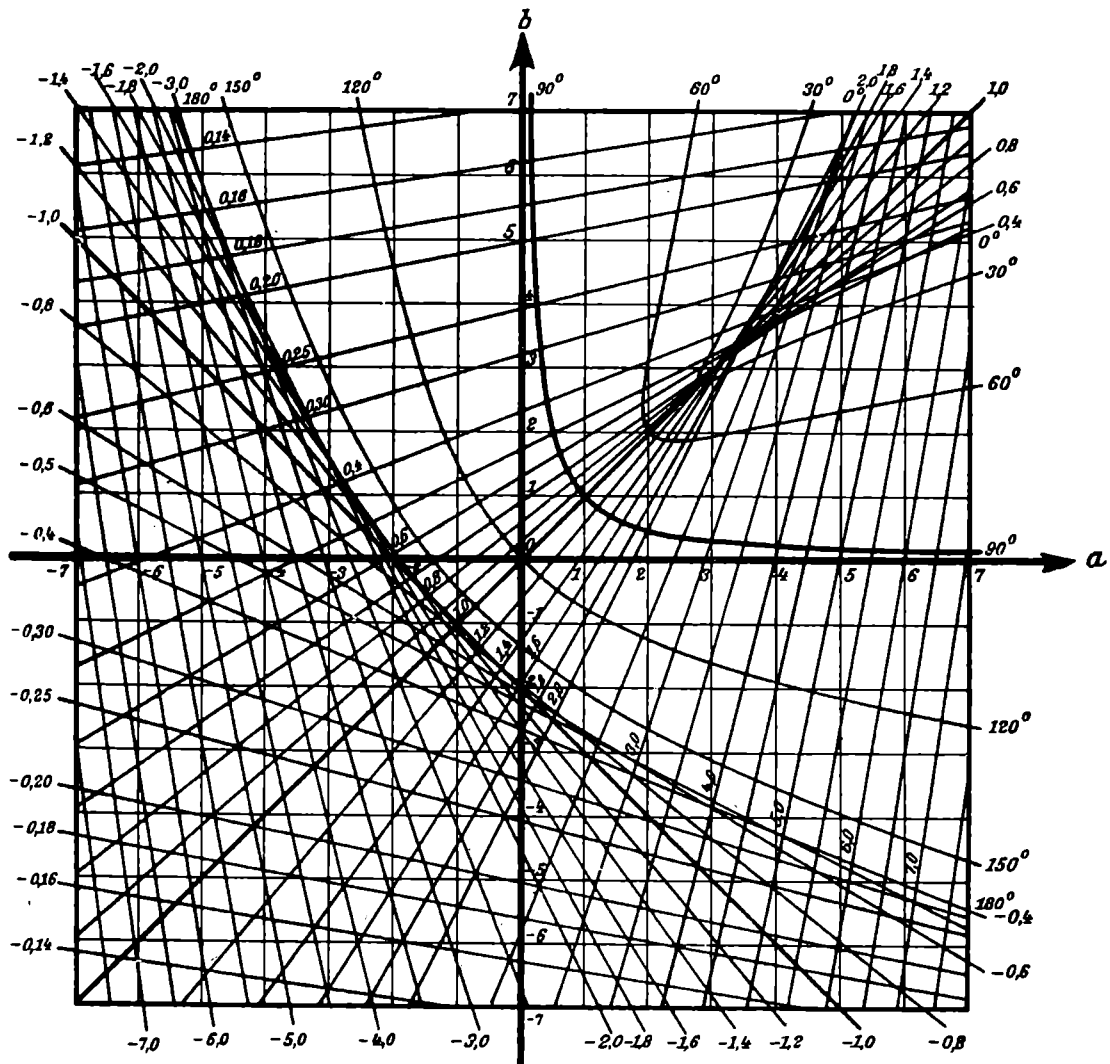


Fig. 11. Die kubische Gleichung $1 + au^3 = u^3 + bu$. In der Ebene (a, b) die Geraden $u = \text{konst.}$ und die Kurven $\sigma = \text{konst.}$ ($u := se^{i\sigma}$).

Beispiele: $a = 4,50, \quad b = 2,25: \quad u_1 = 4,0, \quad u_2 = 0,5 e^{i60^\circ}, \quad u_3 = 0,5 e^{-i60^\circ}$
 $a = 5,9, \quad b = 4,7: \quad u_1 = 5,0, \quad u_2 = 0,1, \quad u_3 = 0,4.$

Hiernach kann man die Kurven $\eta = \text{konst.}$ zeichnen. Bei kleinen und bei großen u_1 fallen sie annähernd mit Ästen der Parabeln

$$a = 2\sqrt{b} \cos \eta, \quad b = 2\sqrt{a} \cos \eta$$

zusammen. Die Kurven $\eta = 0^\circ$ und $\eta = 180^\circ$ enthalten die Fälle der Doppelwurzeln und grenzen das Gebiet der komplexen Wurzeln ab. Rein imaginäre Wurzeln finden sich auf der Hyperbel $ab = 1$ ($a, b > 0$); sie bildet die Grenze zwischen den Gebieten positiver und negativer reeller Teile. (Zu Gleichungen, die drei Wurzeln mit negativem reellem Teil haben, gelangt man erst durch ein negatives C und E .)

Im Gebiet $-7 < a, b < 7$ kann man aus der Fig. 11 zu gegebenen a, b Näherungswerte für die drei Wurzeln ablesen. Außerhalb der Figur kommt man den Wurzeln durch einfache Ausdrücke um so näher, je weiter man vom Nullpunkt entfernt ist. Einen Anhalt mögen die Beispiele der folgenden Tabelle geben:

From these equations the curves $\eta = \text{const.}$ can be drawn. For small and large values of u_1 they nearly coincide with the branches of the parabolae

The curves $\eta = 0^\circ$ and $\eta = 180^\circ$ contain the cases of double roots and mark the boundary of the region of complex roots. Roots without a real part are to be found on the hyperbola $ab = 1$ ($a, b > 0$) which forms the boundary between the regions of positive and negative real parts. (Equations which have three roots with negative real part are only obtained when C and E are negative.)

In the region $-7 < a, b < 7$ approximate values of the three roots can be read off from fig. 11 for given values of a, b . Outside the figure the roots may be the better approximated by simple expressions the further we are from zero. The examples of the following table may serve as a clue:

$$1 + au^2 = u^3 + bu$$

	$a = -100$	$a = 0$	$a = +100$
$b = +100$	$-100 + 1,010\ 3$ $-1,020\ 210$ $+0,01 - 0,000\ 098\ 06$	$\begin{cases} -0,005 + 0,000\ 000\ 005 \\ \pm i\ 10,000\ 002 \end{cases}$ $+0,01 - 0,000\ 000\ 01$	$+100 - 1,010\ 1$ $+1,000\ 000$ $+0,010\ 102\ 04$
$b = 0$	$-100 + 0,000\ 1$ $-0,100\ 050\ 02$ $+0,1 - 0,000\ 049\ 98$	$\begin{cases} e^{\pm i180^\circ} \\ = -0,5 \pm i\ 0,866 \end{cases}$ $+1,000\ 000$	$\begin{cases} -0,000\ 05 + 0,000\ 000\ 000\ 01 \\ \pm i\ (0,1 - 0,000\ 000\ 02) \end{cases}$ $+100,000\ 1$
$b = -100$	$-100,990\ 1$ $-0,01 + 0,000\ 098\ 04$ $+1,000\ 000$	$-10 + 0,005\ 003$ $-0,010\ 000\ 01$ $+10,004\ 997$	$-1 + 0,019\ 810$ $-0,010\ 102\ 06$ $+100,990\ 3$

C. Setzt man

C. Substituting:

$$-\left(\frac{A}{3}\right)^3 + \frac{AB}{6} - \frac{C}{2} = k^3, \quad x = ky + \frac{A}{3},$$

$$\frac{1}{3k^2} \left(\frac{A^2}{3} - B \right) = p,$$

so nimmt die kubische Gleichung die Form

the cubic equation assumes the form

$$y^3 + 2 = 3p y$$

an, und y wird eine dreiwertige Funktion der einen Veränderlichen $3p$ und läßt sich in einem endlichen Bereich so genau, wie man will, tabellarisch darstellen (Zahlentafel mit Fig. 12). Für die drei Lösungen gilt

and y becomes a trivalent function of the single variable $3p$ and can be tabulated in a finite region as accurately as required (Table with fig. 12). The following equations hold for the three solutions

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{3p}{2}, \quad y_1 y_2 y_3 = -2.$$

Für $3p = 3$ wird $y_1 = y_2 = 1$, $y_3 = -2$, und für $p < 1$ erhält man zwei komplexe Wurzeln:

When $3p = 3$, we obtain $y_1 = y_2 = 1$, $y_3 = -2$ and when $p < 1$, we have two complex roots:

$$\begin{aligned} y_1 &= y' + i y'' & y_2 &= y' - i y'' & y_3 &= -2 y' \\ y_1 &= s i^\sigma & y_2 &= s i^{-\sigma} & y_3 &= -2 s \cos \sigma. \end{aligned}$$

Dabei ist

Here we have

$$3p = 4y'^2 - \frac{1}{y'}, \quad y'' = \sqrt{\frac{1}{y'} - y'^2},$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{y'}}, \quad \cos \sigma = \frac{1}{s^2} = y' \sqrt{y'}.$$

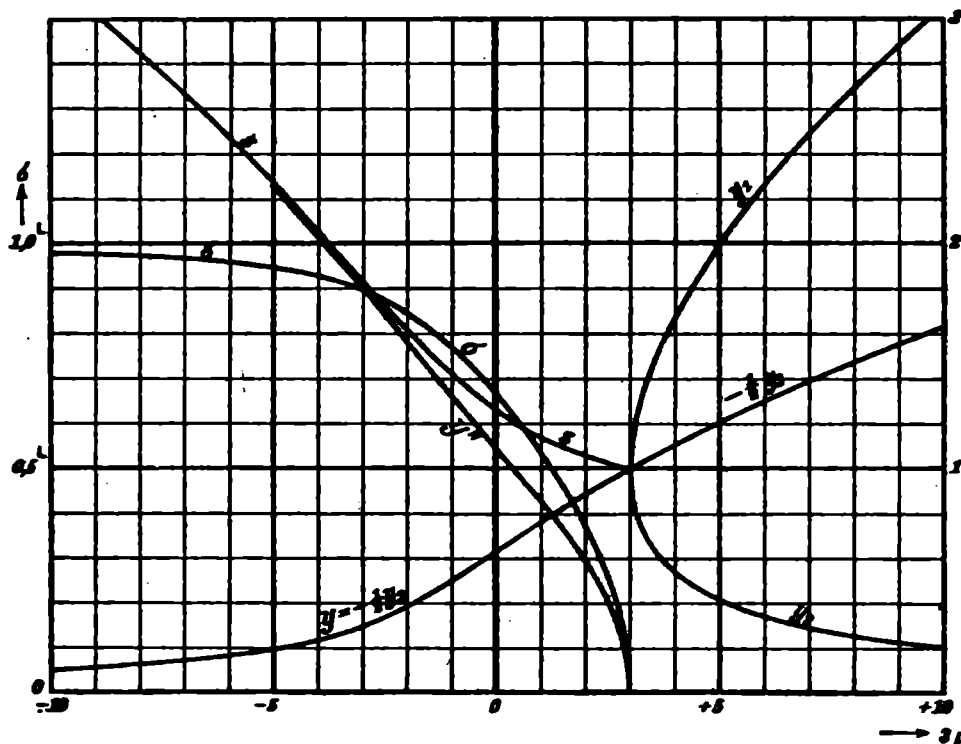


Fig. 12. Die kubische Gleichung $y^3 + 2 = 3p y$. Die Lösungen $y_n = y' + i y'' = s i^\sigma$ als Funktionen von $3p$.

Fig. 12. The cubic equation $y^3 + 2 = 3p y$. The solutions $y_n = y' + i y'' = s i^\sigma$ as functions of $3p$.

Für die Lösungen gelten die folgenden Näherungen:

1. $3p = -N$ ist eine große negative Zahl ($N \gg 1$):

$$y' = -\frac{1}{2} y_2 = \frac{1}{N} - \frac{4}{N^2} + \frac{48}{N^3} - \dots$$

$$y'' = \sqrt{N} + \frac{3}{2N^2\sqrt{N}} - \frac{105}{8N^3\sqrt{N}} + \dots$$

2. $3p$ ist eine kleine (positive oder negative) Zahl ($|p| \ll 1$):

$$y_n = \sqrt[3]{2} \varepsilon^{-2n+3} + \frac{p}{\sqrt[3]{2}} \varepsilon^{2n-3} + \frac{\sqrt[3]{2}}{12} p^2 \varepsilon^{-2n} + \dots,$$

mit

$$\varepsilon = e^{i\pi/3} = e^{i2\pi/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad n = 1, 2, 3,$$

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599210 = 1/0,79370053.$$

3. $3p \approx 3$, $p = 1 - r^2$, $r^2 = 1 - p \ll 1$, $r > 0$:

$$y' = -\frac{1}{2} y_2 = 1 - \frac{r^2}{3} - \frac{r^4}{27} - \frac{r^6}{243} - \frac{r^8}{729} - \dots$$

$$y'' = r + \frac{r^3}{18} + \frac{5r^5}{216} + \frac{r^7}{1296} + \dots$$

4. $3p \approx 3$, $p = 1 + q^2$, $q^2 = p - 1 \ll 1$, $q > 0$:

$$y_{1,2} = 1 \pm q + \frac{q^3}{3} \mp \frac{q^5}{18} - \frac{q^7}{27} \pm \dots$$

$$-\frac{1}{2} y_2 = 1 + \frac{q^2}{3} - \frac{q^4}{27} + \dots$$

5. $3p = +N$ ist eine große positive Zahl ($N \gg 1$):

For the solutions the following approximations hold:

1. $3p = -N$ is a large negative number ($N \gg 1$):

2. $3p$ is a small (positive or negative) number ($|p| \ll 1$):

5. $3p = +N$ is a large positive number ($N \gg 1$):

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{N} - \frac{1}{N} \mp \frac{3}{2N^2\sqrt{N}} - \frac{4}{N^2} \mp \frac{105}{8N^3\sqrt{N}} - \frac{48}{N^3} \mp \dots$$

$$+\frac{1}{2} y_2 = \frac{1}{N} + \frac{4}{N^2} + \frac{48}{N^3} + \dots$$

3P	y'	y''	s	σ	3P	y'	y''	s	σ
$-N$	$\frac{1}{N} - \frac{4}{N^4}$	$N^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2N^{\frac{3}{2}}}$	$N^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{N^{\frac{3}{2}}}$	$1 - \frac{2}{\pi N^{\frac{3}{2}}}$					
-5,0	0,19 414	2,2 61	2,2 70	0,94 54	-5,0	0,19 414	2,2 61	2,2 70	0,94 54
-4,9	0,10 060	3,1 51	3,1 53	0,97 968	-4,9	776	40	49	39
8	161	35	37	938	8	0,2 015	19	28	23
7	265	20	21	906	7	054	2,1 97	07	07
6	370	04	05	874	6	094	75	2,1 85	0,93 89
5	478	3,0 88	3,0 89	840	5	136	53	64	71
4	588	71	73	806	4	179	31	42	51
3	700	55	57	771	3	223	09	21	31
2	815	39	41	736	2	270	2,0 87	2,0 99	10
1	932	23	25	699	1	318	64	77	0,92 88
0	0,11 051	06	08	661	0	367	42	55	65
-8,9	173	2,9 90	2,9 92	622	-3,9	419	19	33	41
8	298	73	75	582	8	472	1 9 958	11	15
7	426	56	58	541	7	528	727	1,9 88	0,91 89
6	556	39	42	498	6	586	495	66	61
5	689	22	25	455	5	645	26	44	31
4	826	05	08	410	4	708	026	218	00
3	966	2,8 88	2,8 91	364	3	772	1,8 790	1,8 993	0,90 67
2	0,12 109	71	74	317	2	839	552	768	33
1	255	54	57	268	1	908	313	543	0,8 997
0	405	37	39	218	0	980	073	318	960
-7,9	558	19	22	166	-2,9	0,3 055	1,7 833	093	920
8	715	02	04	113	8	132	591	1,7 868	878
7	876	2,7 84	2,7 87	058	7	212	348	643	834
6	0,13 041	66	69	001	6	295	105	420	788
5	210	48	51	0,96 942	5	381	1,6 861	197	740
4	384	30	33	882	4	470	617	1,6 976	689
3	562	12	15	819	3	562	373	756	636
2	745	2,6 94	2,6 97	755	2	657	128	537	581
1	932	76	79	688	1	754	1,5 883	321	522
0	0,14 125	57	61	619	0	855	639	107	461
-6,9	322	38	42	548	-1,9	958	395	1,5 895	398
8	526	19	24	474	8	0,4 064	151	686	332
7	734	01	05	397	7	173	1,4 908	481	262
6	949	2,5 82	2,5 86	318	6	284	665	278	190
5	0,15 170	63	67	236	5	398	423	079	116
4	397	44	48	152	4	514	182	1,4 884	038
3	631	25	29	063	3	633	1,3 942	692	0,7 958
2	871	05	10	0,95 971	2	753	703	504	874
1	0,16 119	2,4 86	2,4 91	877	1	876	466	321	788
0	374	66	71	779	0	0,5 000	229	142	699
-5,9	637	46	52	677	-0,9	126	1,2 993	1,3 967	608
8	908	26	32	571	8	253	758	797	513
7	0,17 187	06	12	460	7	381	525	632	417
6	476	2,3 86	2,3 92	345	6	511	292	471	317
5	773	65	72	225	5	641	061	315	215
4	0,18 081	45	52	101	4	772	1,1 830	163	110
3	398	24	31	0,94 971	3	903	598	014	003
2	726	03	11	836	2	0,6 035	370	1,2 872	0,6 893
1	0,19 064	2,2 82	2,2 90	695	1	167	140	734	781
-5,0	0,19 414	2,2 61	2,2 70	0,94 54	-0,0	0,6 300	1,0 911	1,2 599	0,6 667

3P	y'	y''	s	σ	3P	y'	y''	s	σ
±0,0	0,6 300	1,0 911	1,2 599	0,6 667	+2,40	0,9 318	0,4 526	1,03 59	0,2 879
1	432	683	469	550	2	341	448	46	829
2	564	453	343	430	4	365	369	34	779
3	696	223	221	309	6	388	288	21	728
4	827	0,9 993	102	184	8	411	206	08	676
5	959	761	1,1 988	057	+2,50	434	123	1,02 96	623
6	0,7 090	528	877	0,5 928	2	457	038	83	569
7	220	294	769	795	4	480	0,3 952	71	514
8	349	058	665	661	6	503	863	58	458
9	478	0,8 820	564	523	8	526	772	46	401
+1,00	607	579	466	382	+2,60	549	680	33	342
05	671	457	418	310	2	572	586	21	282
10	734	335	371	238	4	595	489	09	220
15	798	211	324	165	6	617	389	1,01 97	157
20	861	087	278	090	8	640	286	85	092
25	924	0,7 962	233	015	+2,70	663	181	73	025
30	987	836	189	0,4 939	2	686	072	61	0,1 955
35	0,8 050	708	145	862	4	708	0,2 959	49	883
40	113	579	102	784	6	731	842	37	809
45	175	449	060	705	8	754	719	25	731
50	237	318	018	624	+2,80	776	592	14	650
55	299	185	1,0 977	543	1	787	526	08	608
60	361	050	936	460	2	799	458	02	565
65	422	0,6 914	896	376	3	810	388	1,00 96	520
70	483	776	856	290	4	821	316	91	474
75	544	635	818	203	5	832	243	85	428
80	605	493	780	115	6	844	166	79	380
85	666	348	742	025	7	855	087	73	329
90	726	201	705	0,3 933	8	866	004	68	276
95	786	051	668	839	9	877	0,1 919	62	221
+2,00	846	0,5 897	632	743	+2,90	888	829	56	164
2	870	835	618	705	1	900	735	51	105
4	894	773	603	665	2	911	636	45	042
6	918	710	1,05 89	625	3	922	530	39	0,0 974
8	942	646	75	585	4	933	416	34	901
+2,10	966	581	61	545	5	944	292	28	823
2	989	516	47	504	6	955	156	22	736
4	0,9 013	451	33	463	7	967	002	17	638
6	037	385	19	421	8	978	0,0 818	11	521
8	060	318	06	379	+2,99	0,9 989	0,0 579	1,00 06	0,0 369
+2,20	084	250	1,04 92	336	$3 - \varepsilon \quad 1 - \frac{\varepsilon}{9} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{54} \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \quad 1 + \frac{\varepsilon}{18} \quad \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{27\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$				
2	108	182	78	293					
4	131	112	65	249					
6	155	042	52	205					
8	178	0,4 972	38	160	3,00	1,0 000	0,0 000	1,00 00	0,0 000
+2,30	202	900	25	115					
2	225	827	12	069					
4	248	753	1,03 98	022					
6	272	679	85	0,2 975					
8	295	603	72	927					
+2,40	0,9 318	0,4 526	1,03 59	0,2 879					

V. Kubische Gleichungen
V. Cubic equations

3P	γ_1	γ_2	γ_3	3P	γ_1	γ_2	γ_3
3,00	1,0000	1,0000	-2,000	3,80	1,5 958	0,5 768	-2,1 73
3 + $\frac{2}{3}$	$1 + \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{2}{9}}$	$1 - \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{2}{9}}$	$-2 - \frac{2}{9}$	2	1,6 041	728	77
3,01	1,0 589	0,9 434	-2,0 02	4	123	688	81
2	837	206	04	6	204	648	85
3	1,1 032	034	07	8	284	610	89
4	198	0,8 890	09	3,90	364	572	94
5	344	766	11	2	444	535	98
6	479	654	13	4	521	498	-2,2 02
7	603	552	15	6	598	462	06
8	719	458	18	8	675	427	10
9	828	370	20	4,00	751	392	14
3,10	933	288	22	05	939	308	25
1	1,2 032	211	24	10	1,7 123	226	35
2	128	137	27	15	304	148	45
3	220	067	29	20	481	073	55
4	309	000	31	25	656	000	66
5	396	0,7 936	33	30	827	0,4 930	76
6	479	874	35	35	996	862	86
7	561	815	38	40	1,8 163	796	96
8	640	757	40	45	327	733	-2,3 06
9	717	702	42	50	489	671	16
3,20	793	648	44	55	648	611	26
2	940	545	48	60	806	553	36
4	1,3 080	448	53	65	961	497	46
6	216	356	57	70	1,9 115	442	56
8	348	268	62	75	266	388	65
3,30	475	184	66	80	416	336	75
2	599	104	70	85	564	286	85
4	719	027	75	90	711	237	95
6	837	0,6 953	79	95	856	189	-2,4 05
8	951	881	83	0,5	2,0 00	142	14
3,40	1,4 064	812	88	1	28	052	33
2	174	746	92	2	56	0,3 966	53
4	281	681	96	3	83	884	72
6	387	618	-2,1 01	4	2,1 10	806	91
8	491	557	05	5	36	731	-2,5 09
3,50	593	498	09	6	62	659	28
2	693	441	13	7	88	590	47
4	791	385	18	8	2,2 13	524	65
6	888	331	22	9	37	460	83
8	984	278	26	6,0	62	399	-2,6 02
3,60	1,5 078	226	30	1	86	340	20
2	171	176	35	2	2,3 10	283	38
4	263	126	39	3	33	228	56
6	354	078	43	4	56	175	74
8	443	031	47	5	79	124	91
3,70	532	0,5 985	52	6	2,4 01	074	-2,7 09
2	619	940	56	7	24	027	26
4	705	896	60	8	46	0,2 980	44
6	791	852	64	9	68	935	61
8	875	810	68	7,0	2,4 89	0,2 892	-2,7 78
3,80	1,5 958	0,5 768	-2,1 73				

3P	y_1	y_2	y_3	3P	y_1	y_2	y_3
7,0	2,4 89	0,2 892	-2,7 78	9,0	2,8 82	0,2 235	-3,1 05
1	2,5 11	849	96	1	2,9 00	210	21
2	32	809	-2,8 13	2	18	185	36
3	53	769	30	3	36	161	52
4	73	730	46	4	53	138	67
5	94	693	63	5	71	115	82
6	2,6 14	656	80	6	88	093	98
7	35	621	97	7	3,0 06	071	-3,2 13
8	54	586	-2,9 13	8	23	050	28
9	74	553	30	9	40	029	43
8,0	94	520	46	10,0	57	008	58
1	2,7 13	488	62	5	3, 141	0,1 911	-3, 332
2	33	457	78	11,0	222	824	404
3	52	427	95	5	301	744	475
4	71	397	-3,0 11	12,0	378	671	545
5	90	369	27	5	453	603	613
6	2,8 08	340	43	13,0	526	541	680
7	27	313	58	5	598	484	746
8	45	286	74	14,0	668	431	811
9	64	260	90	5	737	381	875
9,0	2,8 82	0,2 235	-3,1 05	15,0	804	335	938
				N	$N^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{N}$	$\frac{2}{N} + \frac{8}{N^4}$	$-N^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{N}$

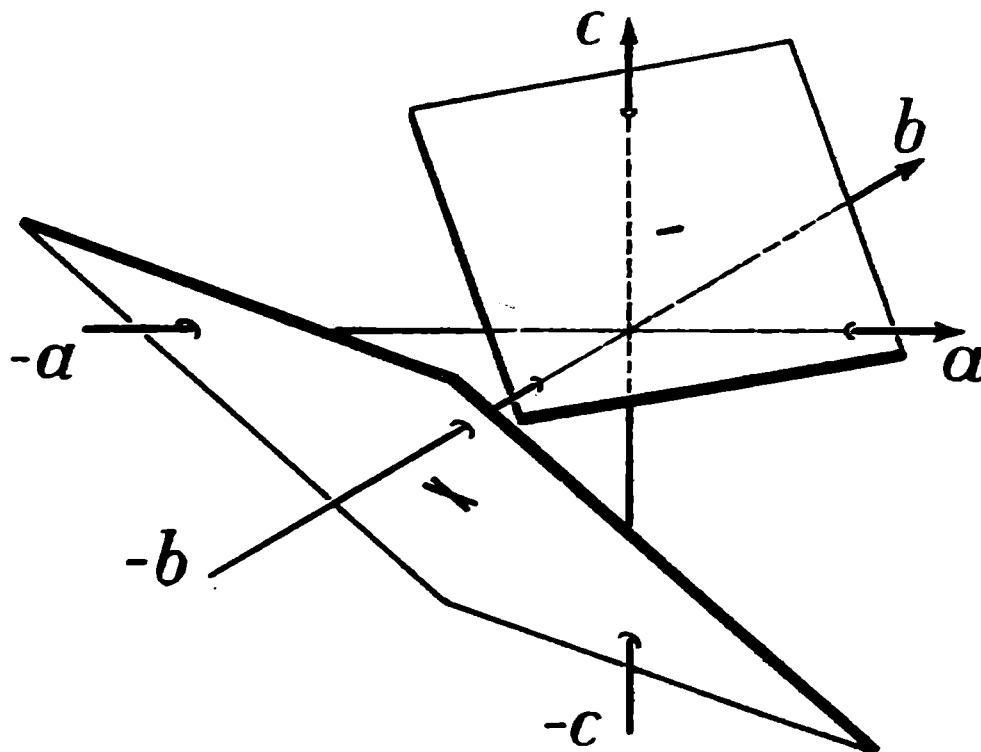


Fig. 13. Gleichungen 4. Grades
Lage der Wurzelebenen

Equations of 4th degree
Position of the root-planes

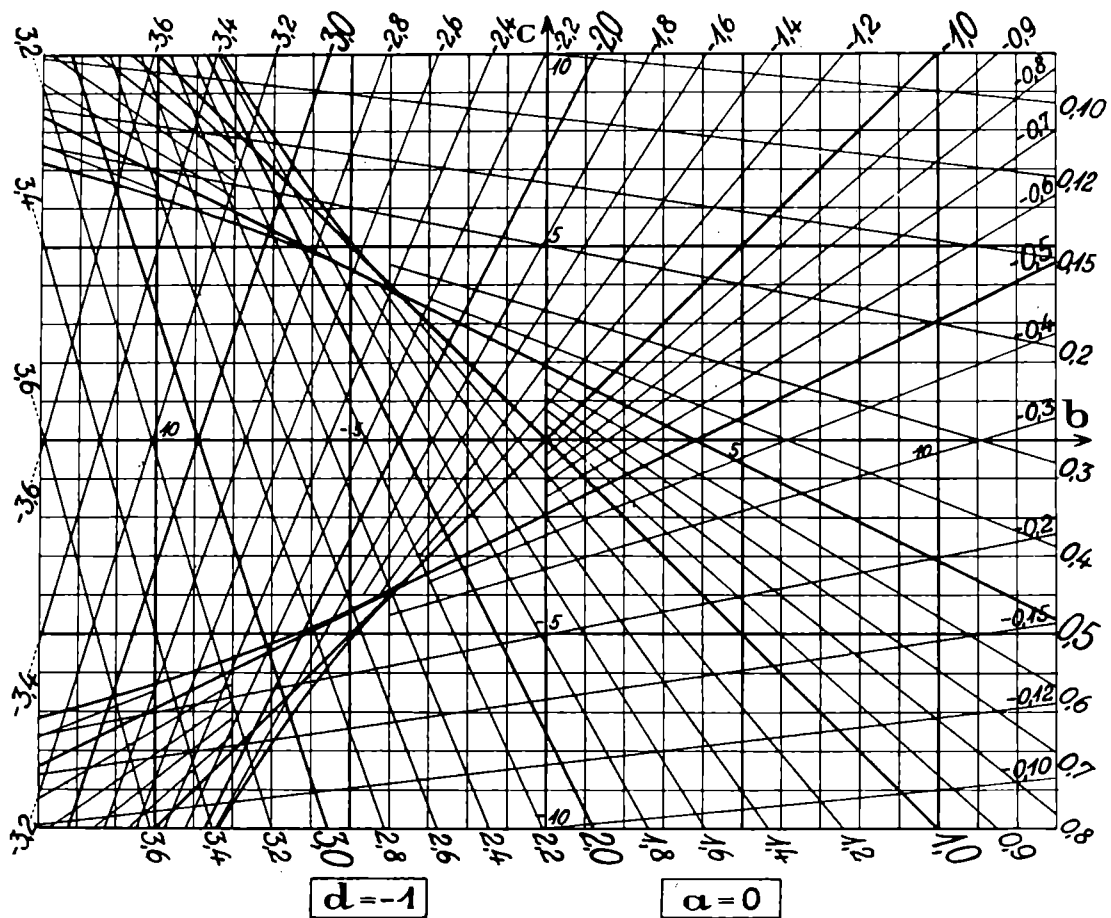


Fig. 14. Reelle Wurzeln. Real roots

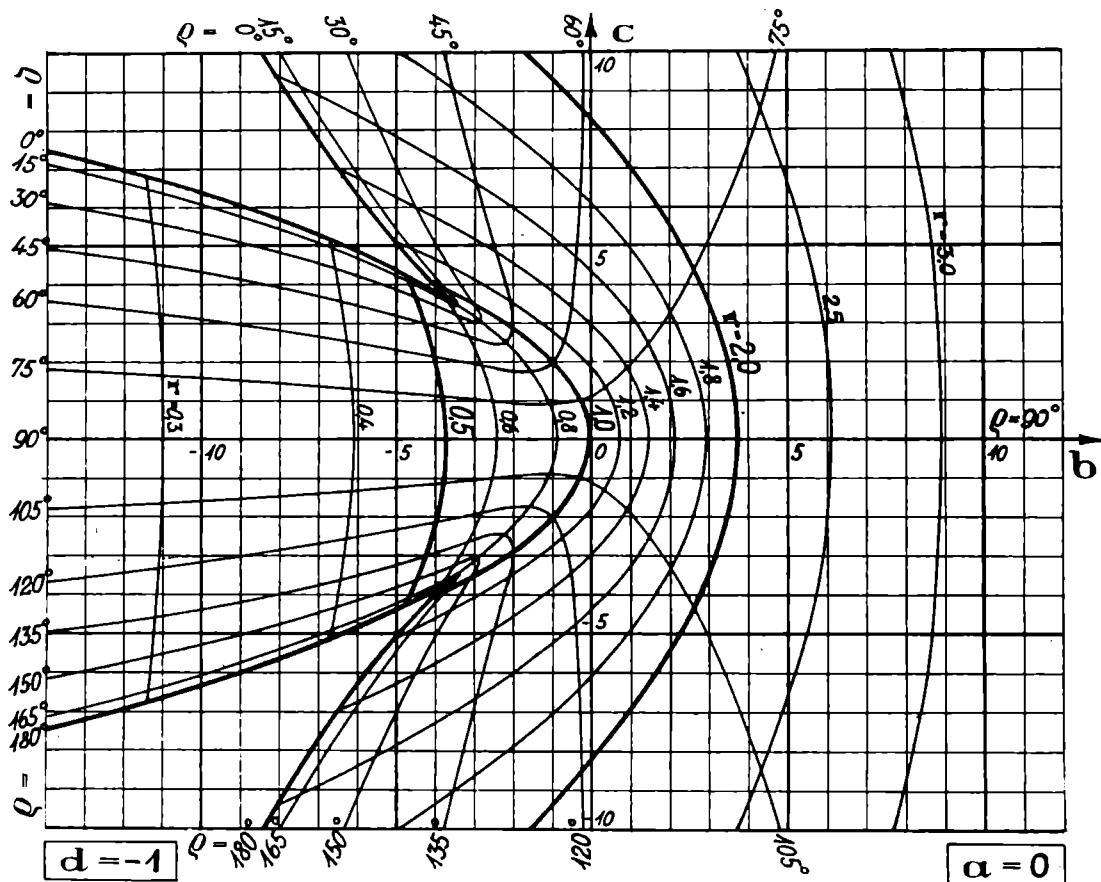


Fig. 15. Komplexe Wurzeln. Complex roots

VI. Gleichungen 4. Grades

VI. Equations of 4th degree

A. Die Vorzahlen A, B, C, D der Gleichung | A. The coefficients A, B, C, D of the equation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

sind symmetrische Funktionen der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 : | are symmetrical functions of the four roots x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{aligned} -A &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, & B &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ -\frac{C}{D} &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, & D &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Durch die Substitutionen | By putting

$$x = -y, \quad x = \frac{1}{z}, \quad x = -\frac{1}{t}$$

geht die Gleichung über in | the equation becomes

$$\begin{aligned} y^4 - Ay^3 + By^2 - Cy + D &= 0, \\ z^4 + \frac{C}{D}z^3 + \frac{B}{D}z^2 + \frac{A}{D}z + \frac{1}{D} &= 0, \\ t^4 - \frac{C}{D}t^3 + \frac{B}{D}t^2 - \frac{A}{D}t + \frac{1}{D} &= 0. \end{aligned}$$

Für x^2 gilt eine Gleichung 4. Grades mit den Vorzahlen: | For x^2 an equation of the 4th degree can be obtained with the coefficients:

$$\begin{aligned} A_1 &= -A^2 + 2B, & B_1 &= -2AC + B^2 + 2D, \\ C_1 &= 2BD - C^2, & D_1 &= D^2. \end{aligned}$$

Ebenso lassen sich nacheinander Gleichungen 4. Grades für $x^4, x^8, x^{16}, \dots$ bilden. (Verfahren von Graeffe.) | Similarly one can obtain successively equations of the 4th degree for $x^4, x^8, x^{16}, \dots$ (Graeffe's method).

Zur Bestimmung komplexer Wurzeln $re^{\pm i\varrho}, se^{\pm i\sigma}$ schreibt man die Gleichung vorteilhaft in der Form | To determine the complex roots $re^{\pm i\varrho}, se^{\pm i\sigma}$ it is preferable to write the equation in the form

$$B + Ax + Cx^{-1} + x^2 + Dx^{-2} = 0.$$

Dabei ist | Here

$$\begin{aligned} -A &= 2(r \cos \varrho + s \cos \sigma), & B &= r^2 + s^2 + 4rs \cos \varrho \cos \sigma, \\ -\frac{C}{D} &= 2\left(\frac{\cos \varrho}{r} + \frac{\cos \sigma}{s}\right), & D &= r^2 s^2 > 0. \end{aligned}$$

r^2 und $D/r^2 = s^2$ genügen der Gleichung | r^2 and $D/r^2 = s^2$ satisfy the equation

$$(r^6 + s^6) - 3(r^4 + s^4) + (AC - D)(r^2 + s^2) + 2BD - A^2D - C^2 = 0,$$

so daß man aus einem Näherungswert für r^2 einen bessern finden kann, ohne den zugehörigen Wert von ϱ zu kennen. Die Ableitung der linken Seite nach r^2 ist | so that from an approximate value for r^2 a more accurate one can be determined without knowing the corresponding value of ϱ . The derivate of the left hand side with regard to r^2 is

$$\left(1 - \frac{s^4}{D}\right) [3(r^4 + D + s^4) - 2B(r^2 + s^2) + AC - D].$$

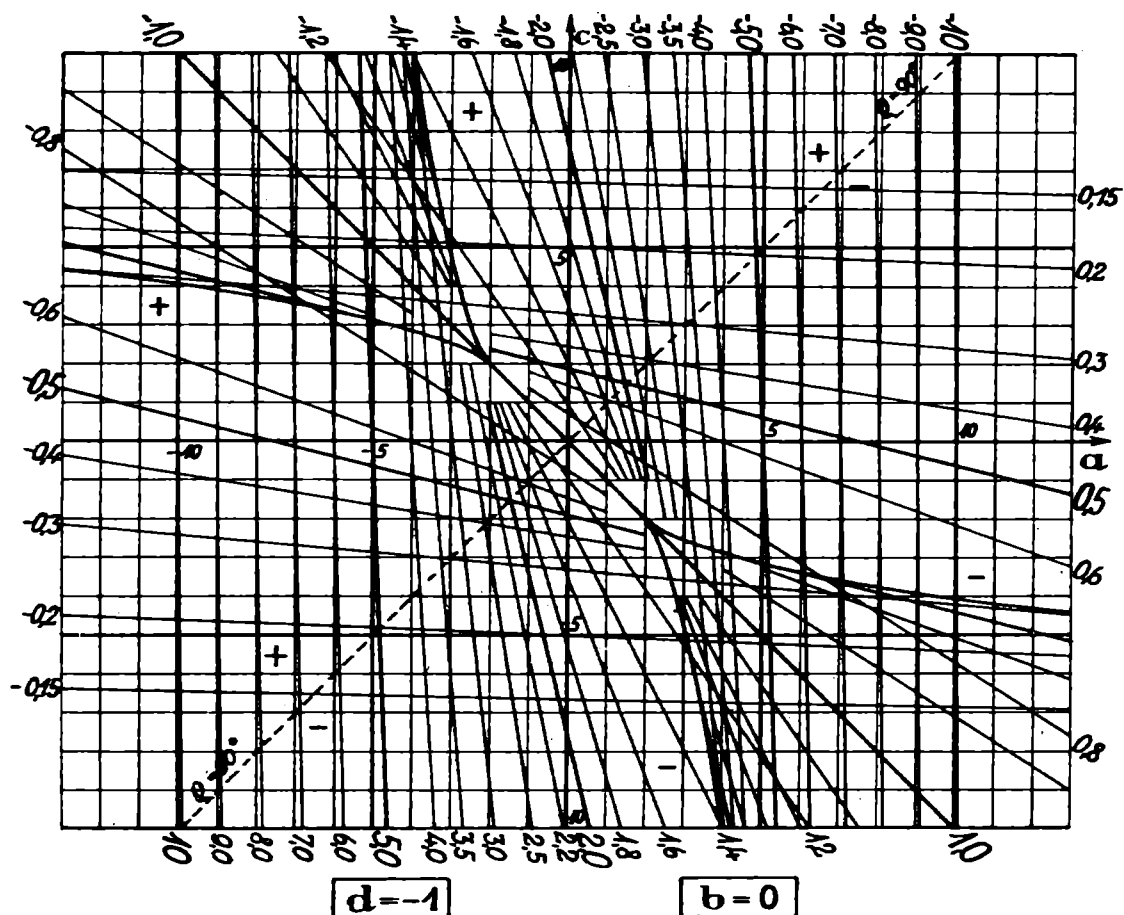


Fig. 16. Reelle Wurzeln. Real roots

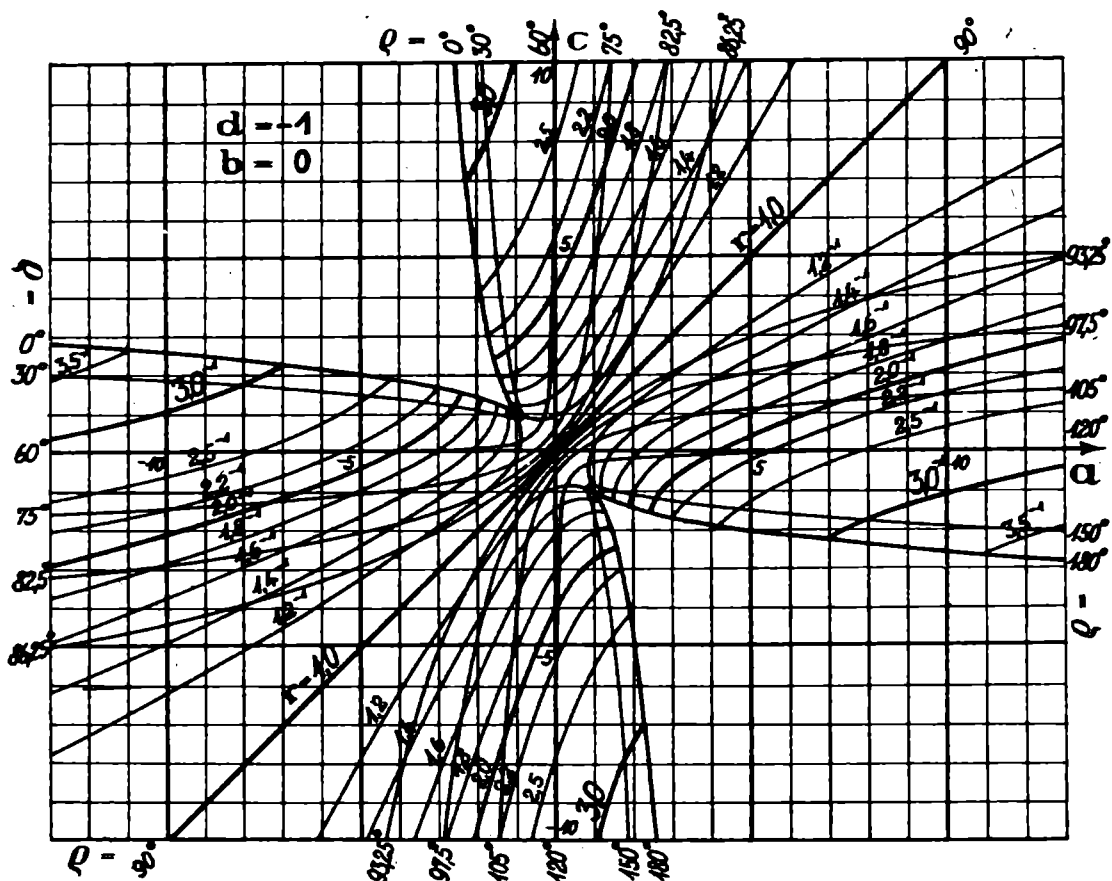


Fig. 17. Komplexe Wurzeln. Complex roots

Nachdem r^2 genau genug bestimmt worden ist, findet man

$$\cos \varrho = \frac{-Ar + \frac{C}{r}}{2(r^2 - s^2)},$$

Bei festem D denke man sich A, B, C auf drei aufeinander senkrechten Achsen abgetragen. Einer reellen Wurzel x entspricht dann eine Ebene, die von den Achsen die Stücke

$$A_0 = -x - \frac{D}{x^2}, \quad B_0 = -x^2 - \frac{D}{x^2}, \quad C_0 = -x^3 - \frac{D}{x}$$

abschneidet. Es werde $D = \pm E^4$ gesetzt mit positivem reellem E .

B. In einem Abstand vom Nullpunkt liefern einfache Ausdrücke Näherungen für die Lösungen:

I. In der Nähe der A -Achse ($B = C = 0$):

$$x_1 \approx -A, \quad x_n \approx \sqrt[n]{-\frac{D}{A}} = \varepsilon_n \sqrt[n]{\left|\frac{D}{A}\right|}, \quad n = 2, 3, 4,$$

wenn

$$|A| \gg E, \quad |B| \ll E^2, \quad |C| \ll E^3, \quad |AC| \approx |D|.$$

II a. In der Nähe der B -Achse ($A = C = 0$):

$$x_{1,2} \approx \pm \sqrt{-\frac{B}{2} + R}, \quad x_{3,4} \approx \pm \sqrt{-\frac{B}{2} - R}, \quad R = \sqrt{\frac{B^2}{4} - D},$$

wenn

$$|A| \ll E, \quad |B| \gg E^2, \quad |C| \ll E^3.$$

II b. In der Nähe der B -Achse ($A = C = 0$):

$$x_{1,2} \approx -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad x_{3,4} \approx -\frac{C}{2B} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4B^2} - \frac{D}{B}},$$

wenn

$$|B| \gg A^2, \quad |C^2|, \quad E^2.$$

Bei komplexen Wurzeln $x_{1,2} = re^{\pm i\varrho}$, $x_{3,4} = se^{\pm i\sigma}$ ist

$$r \approx \sqrt{B}, \quad s \approx \sqrt{\frac{D}{B}}, \quad \cos \varrho \approx -\frac{A}{2\sqrt{B}}, \quad \cos \sigma \approx -\frac{C}{2\sqrt{BD}}.$$

$B, D > 0$: 4 komplexe Wurzeln,
 $B, D < 0$: 2 „ „

III. In der Nähe der C -Achse ($A = B = 0$):

$$x_1 \approx -\frac{D}{C}, \quad x_n \approx \sqrt[n]{-C} = \varepsilon_n \sqrt[n]{|C|}, \quad n = 2, 3, 4,$$

When r^2 has been determined with sufficient accuracy, one finds

$$\cos \sigma = \frac{As - \frac{C}{s}}{2(r^2 - s^2)}.$$

Keeping D constant one can imagine A, B, C set out along three rectangular axes. A real root x corresponds to a plane which cuts from the axes lengths equal to

One puts $D = \pm E^4$ with positive real E .

B. At a certain distance from the origin simple expressions give approximate solutions:

I. In the neighbourhood of the A axis ($B = C = 0$):

if

II a. In the neighbourhood of the B axis ($A = C = 0$):

if

II b. In the neighbourhood of the B axis ($A = C = 0$):

if

With complex roots $x_{1,2} = re^{\pm i\varrho}$, $x_{3,4} = se^{\pm i\sigma}$

$B, D > 0$: 4 complex roots,
 $B, D < 0$: 2 „ „

III. In the neighbourhood of the C axis ($A = B = 0$):

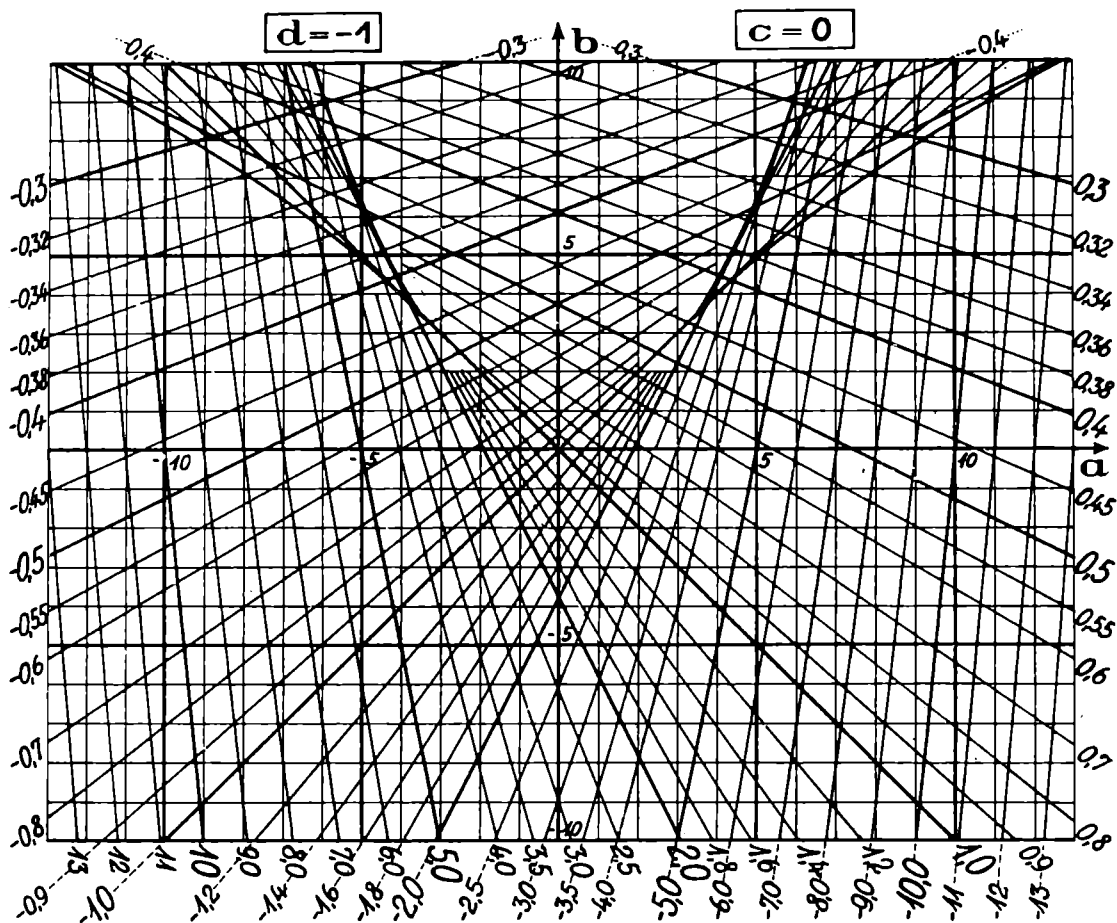


Fig. 18. Reelle Wurzeln. Real roots

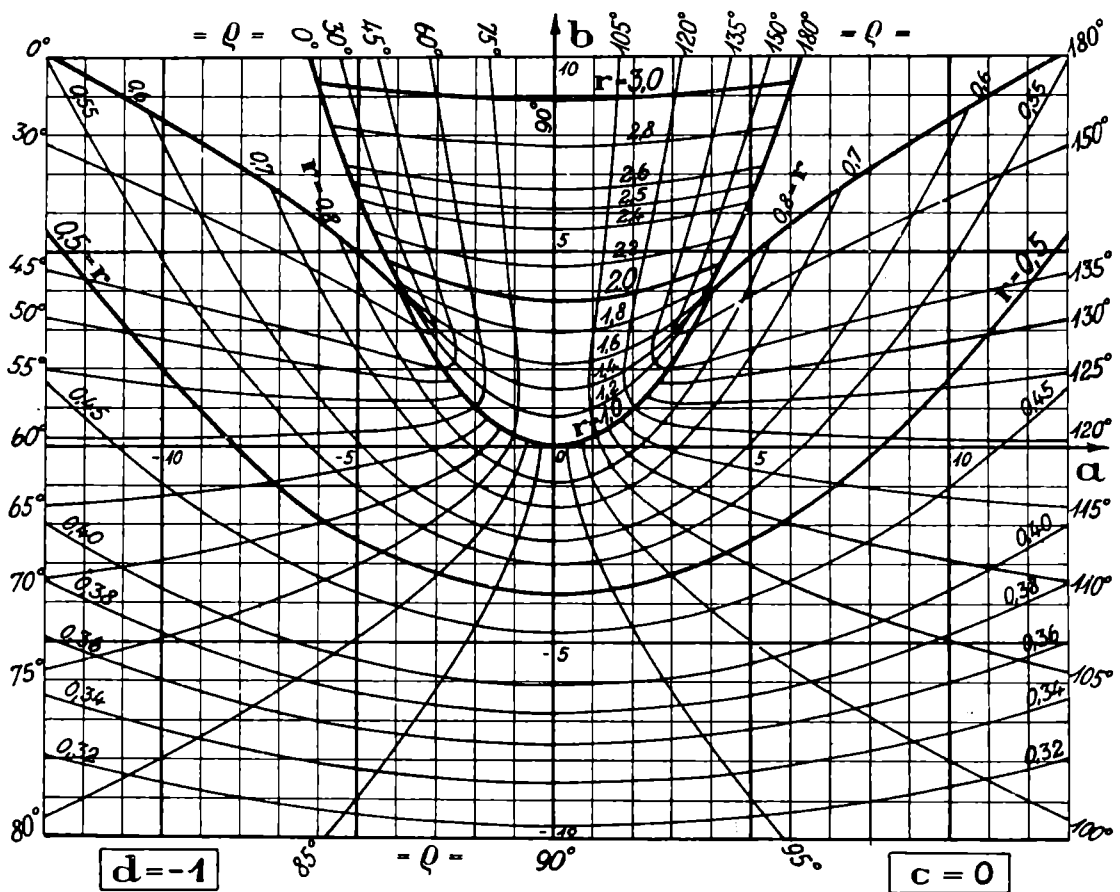


Fig. 19. Komplexe Wurzeln. Complex roots

wenn

| if

$$|A| \ll E, \quad |B| \ll E^2, \quad |C| \gg E^3, \quad |AC| \approx |D|.$$

IV. In der Nähe der beiden in der B, C -Ebene gelegenen schiefen Achsen $C = \pm BE, A = 0$:

IV. In the neighbourhood of the two inclined axes lying in the B, C plane; $C = \pm BE, A = 0$:

$$x_{1,2} \approx \pm \sqrt{-B}, \quad x_3 \approx -\frac{C}{B}, \quad x_4 \approx -\frac{D}{C},$$

wenn

| if

$$|A| \ll E, \quad |B|E \approx |C| \gg E^3.$$

V. In der Nähe der beiden in der C, A -Ebene gelegenen schiefen Achsen $C = \pm AE^2, B = 0$:

V. In the neighbourhood of the two inclined axes lying in the C, A plane; $C = \pm AE^2, B = 0$:

$$x_1 \approx -A, \quad x_2 \approx -\frac{D}{C}, \quad x_{3,4} \approx \pm \sqrt{-\frac{C}{A}},$$

wenn

| if

$$|B| \ll E^2, \quad |A|E^2 \approx |C| \gg E^3.$$

VI. In der Nähe der beiden in der A, B -Ebene gelegenen schiefen Achsen $B = \pm AE, C = 0$:

VI. In the neighbourhood of the two inclined axes lying in the A, B plane; $B = \pm AE, C = 0$:

$$x_1 \approx -A, \quad x_2 \approx -\frac{B}{A}, \quad x_{3,4} \approx \pm \sqrt{-\frac{D}{B}},$$

wenn

| if

$$|A|E \approx |B| \gg E^2, \quad |C| \ll E^3.$$

VII. In der Nähe der vier zu den Koordinatenebenen schiefen Achsen $B = \pm AE, C = \pm BE = \pm AE^2$:

VII. In the neighbourhood of the four axes inclined to the coordinate planes; $B = \pm AE, C = \pm BE = \pm AE^2$:

$$x_1 \approx -A, \quad x_2 \approx -\frac{D}{C}, \quad x_{3,4} \approx -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}},$$

wenn

| if

$$|A|E^2 \approx |B|E \approx |C| \gg E^3.$$

Die angegebenen Ausdrücke sind die strengen Lösungen der folgenden Gleichungen:

The given expressions are the rigorous solutions of the following equations:

I. $x^4 + Ax^3 + \frac{D}{A}x + D = 0.$

II a. $x^4 + Bx^2 + D = 0,$

II b. $x^4 + \left(A + \frac{C}{B}\right)x^3 + \left(B + \frac{AC+D}{B}\right)x^2 + \left(C + \frac{A}{B}D\right)x + D = 0,$

III. $x^4 + \frac{D}{C}x^3 + Cx + D = 0,$

IV. $x^4 + \left(\frac{C}{B} + \frac{D}{C}\right)x^3 + \left(B + \frac{D}{B}\right)x^2 + \left(C + \frac{B}{C}D\right)x + D = 0,$

V. $x^4 + \left(A + \frac{D}{C}\right)x^3 + \left(\frac{C}{A} + \frac{A}{C}D\right)x^2 + \left(C + \frac{D}{A}\right)x + D = 0,$

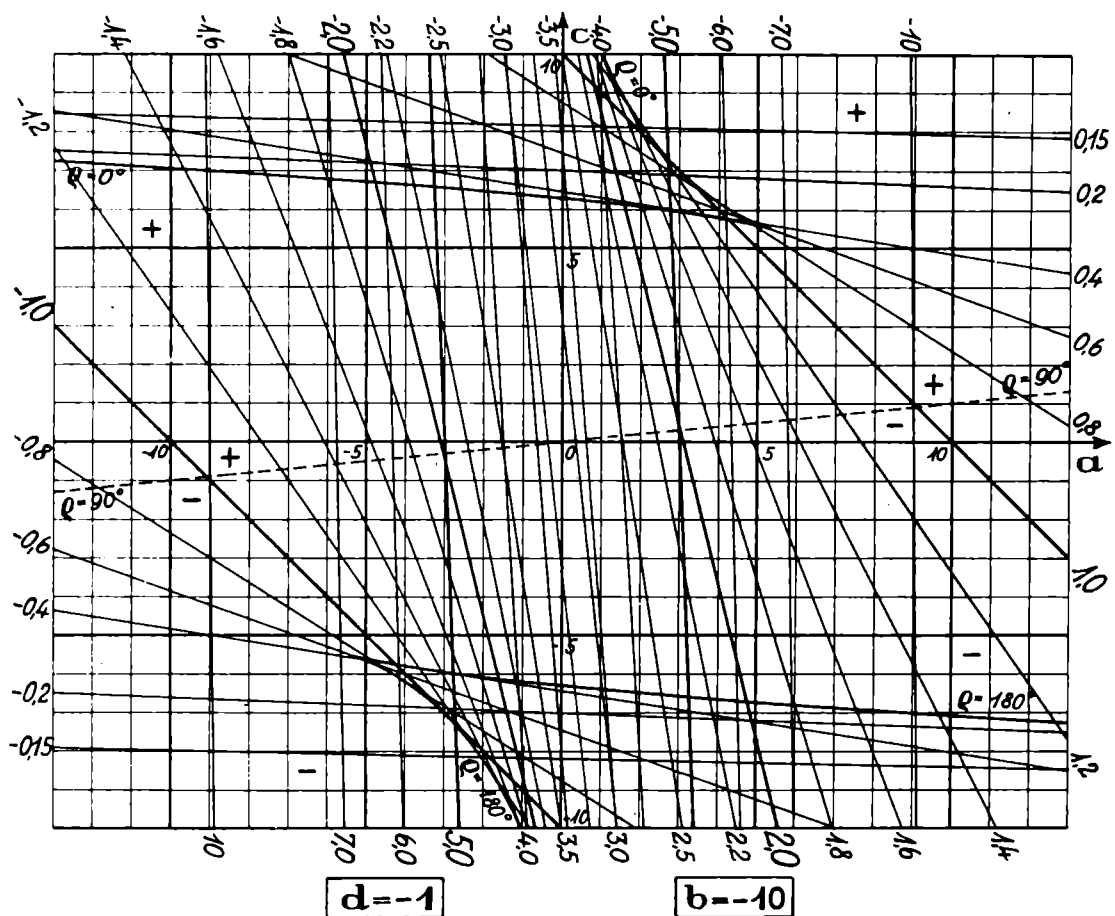


Fig. 20. Reelle Wurzeln. Real roots

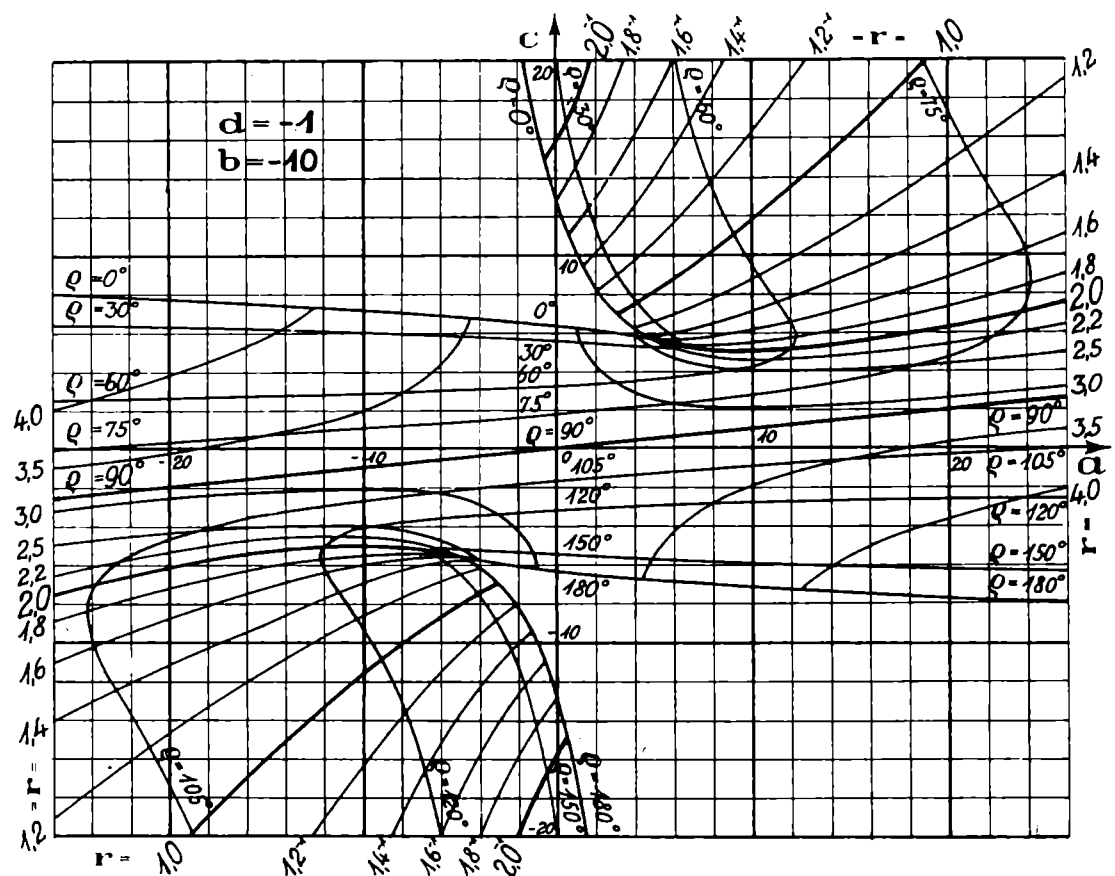


Fig. 21. Komplexe Wurzeln. Complex roots

$$\text{VI. } x^4 + \left(A + \frac{B}{A}\right)x^3 + \left(B + \frac{D}{B}\right)x^2 + \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{A}\right)Dx + D = 0,$$

$$\text{VII. } x^4 + \left(A + \frac{B}{A} + \frac{D}{C}\right)x^3 + \left(B + \frac{C}{A} + \frac{BD}{AC} + \frac{AD}{C}\right)x^2 + \left[C + \left(\frac{B}{C} + \frac{1}{A}\right)D\right]x + D = 0.$$

Die Näherung wird um so besser sein, je weniger die Vorzeichen der Ersatzgleichung von den Vorzeichen der ursprünglichen Gleichung abweichen.

Einige der angegebenen Näherungswerte kann man in der folgenden Weise verbessern. (Die Ungleichungen gelten für die Beträge.)

The approximations will be closer, the less the coefficients of the substituted equation differ from those of the original equation.

Some of the given approximations can be improved in the following manner. (The inequalities refer to the absolute values.)

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -A + \frac{B}{A} \\ X_2 &= -\frac{B}{A} + \frac{B^2}{A^2} \end{aligned} \right\}, \quad \sqrt{B} \ll \frac{A}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -\frac{B}{A} + \frac{C}{B} \\ X_3 &= -\frac{C}{B} + \frac{AC^2}{B^3} \end{aligned} \right\}, \quad \sqrt{AC} \ll \frac{B}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= -\frac{C}{B} + \frac{D}{C} \\ X_4 &= -\frac{D}{C} + \frac{BD^2}{C^3} \end{aligned} \right\}, \quad \sqrt{BD} \ll \frac{C}{2}.$$

Sowohl zwei konjugiert-komplexe Wurzeln wie zwei reelle Wurzeln mit demselben Vorzeichen sollen ein Paar heißen. (Eine positive und eine negative reelle Wurzel sollen nicht ein Paar heißen.) Wenn zwei konjugiert-komplexe Wurzeln einen positiven reellen Teil haben oder wenn zwei reelle Wurzeln positiv sind, so bilden sie ein positives Paar.

Either two conjugate complex roots or two real roots with the same sign form a pair. (A positive and a negative real root will not be called a pair.) If two conjugate complex roots have positive real parts, or if two real roots are positive, they form a positive pair.

Die folgenden unvollständigen Angaben mögen einen vorläufigen Überblick über die vier Lösungen einer Gleichung 4. Grades geben. Die Gleichung hat bei negativem D (außer einer positiven und einer negativen reellen Wurzel, von denen weiterhin nicht mehr gesprochen werden soll) ein Paar, bei positivem D zwei Paare. Meist ist das Paar bei negativem D zugleich mit C positiv oder negativ. Bei positivem D hat die Gleichung meist ein positives und ein negatives Paar. Nur in dem Oktanten I, der die Halbachsen $+A$, $+B$, $+C$ zu Kanten hat, hat die Gleichung bei negativem D ein negatives Paar, bei positivem D zwei negative Paare, und im Oktanten II', der die Halbachsen $-A$, $+B$, $-C$ zu Kanten hat, bei negativem D ein positives Paar und bei positivem D zwei positive Paare.

The following particulars although incomplete will give provisional information about the four solutions of an equation of the 4th degree. With negative D the equation has (in addition to a positive and a negative real root to which no further reference will be made) a pair, with a positive D two pairs. With negative D the pair is usually of the same sign as C . With positive D the equation has usually a positive and a negative pair. It is only in the octant I, which has the semi-axes $+A$, $+B$, $+C$ as its edges that the equation with negative D has a negative pair, and that with positive D two negative pairs, and it is only in octant II' with edges $-A$, $+B$, $-C$ that the equation with negative D has a positive pair and that with positive D two positive pairs.

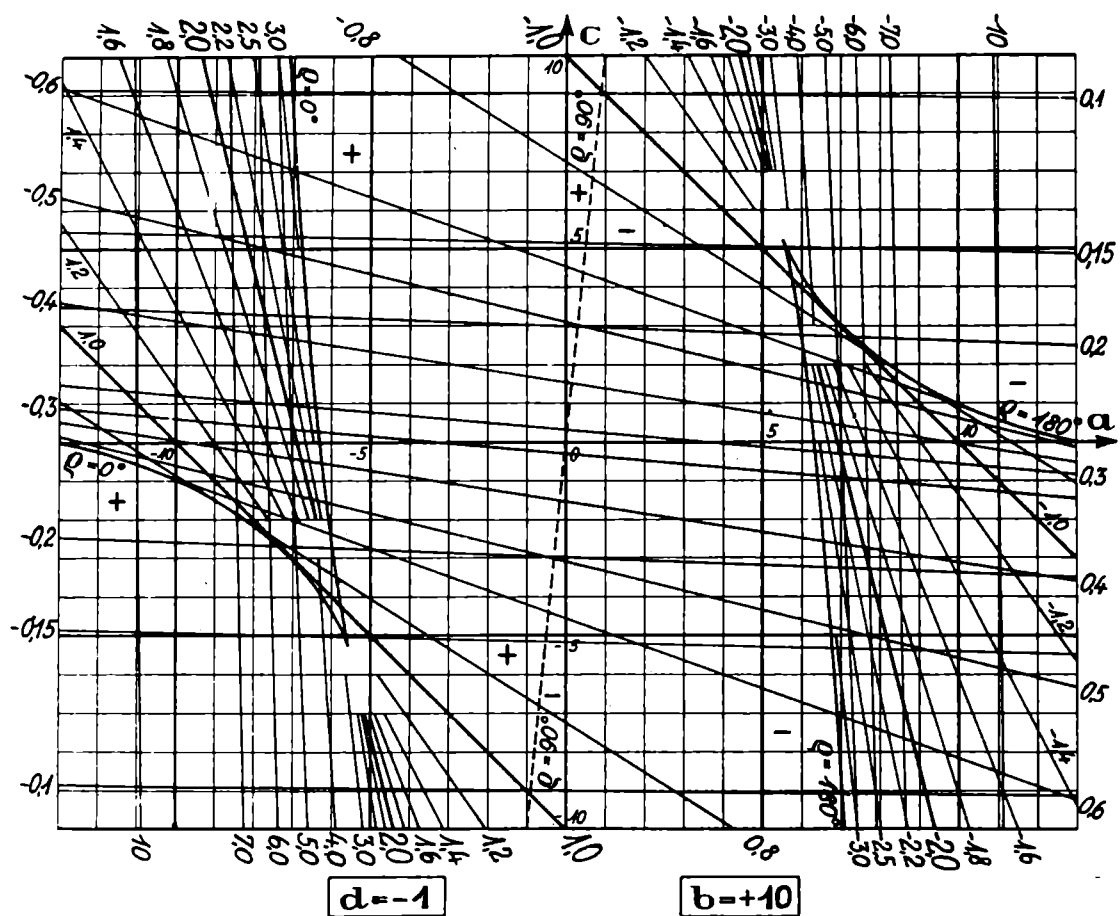


Fig. 22. Reelle Wurzeln. Real roots

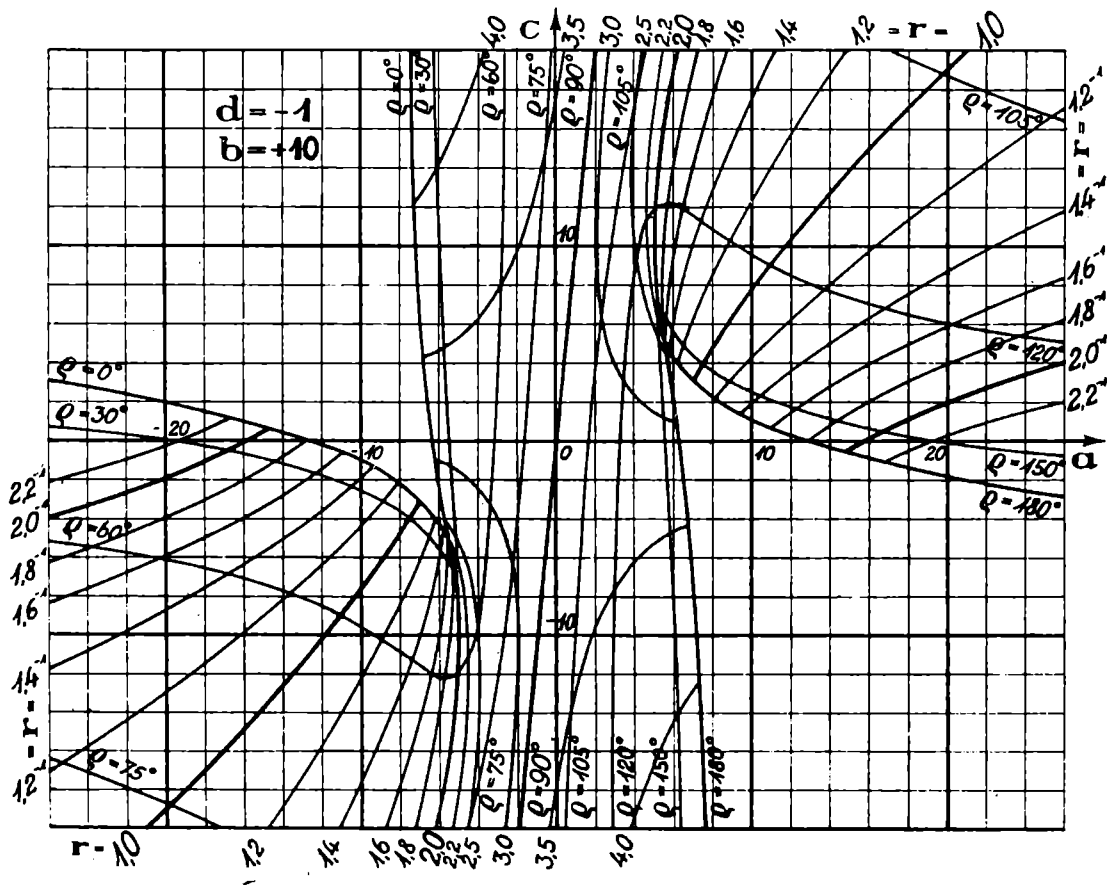


Fig. 23. Komplexe Wurzeln. Complex roots

Wenn man eine reelle Wurzel x_1 mit der erstrebten Genauigkeit bestimmt hat, dividiere man die linke Seite der Gleichung 4. Grades durch $x - x_1$; dann hat man es nur noch mit einer Gleichung 3. Grades zu tun. Ist nicht eine reelle Wurzel bestimmt worden, sondern ein komplexes Paar $ri \pm e$, so bleibt nach Division mit $x^2 - (2r \cos \varrho)x + r^2$ nur noch eine quadratische Gleichung übrig. Nach Ermittlung von zwei reellen Wurzeln x_1 und x_2 kann man durch $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ dividieren.

C. Es werde gesetzt

$$x = Eu, \quad A = Ea, \quad B = E^2b, \quad C = E^3c, \quad D = E^4d,$$

so daß $d = \pm 1$ wird. Dadurch geht die Gleichung über in

$$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0, \quad d = \pm 1.$$

Auf drei rechtwinkligen Achsen werde a nach rechts, b nach hinten, c nach oben abgetragen. Auf der Seite der positiven c (oben) soll der Oktant $(+a, +b)$ mit I, $(+b, -a)$ mit II, $(-a, -b)$ mit III, $(-b, +a)$ mit IV bezeichnet werden und entsprechend auf der Seite der negativen c (unten) mit I', II', III', IV'. Ferner sei a die Nachbarschaft der a -Achse, bc die Nachbarschaft der schiefen Achse b, c , usw., immer die Nähe des Nullpunkts ausgenommen. Für diese bieten die später folgenden Zahlentafeln einen Anhalt (S. 71).

Die Gleichung hat

kleine small	mittlere medium
0	4
3	0
2	0
1	0
1	1
1	2
2	1

Jeder reellen Wurzel u entspricht eine Ebene. Wenn $|u| \approx 1$ ist, so ist die Ebene nicht weit vom Ursprung entfernt. Kleine und große reelle Wurzeln entsprechen dagegen vom Nullpunkt weit entfernten Ebenen, sind daher nur bei großen a, b, c möglich (bei diesen aber auch mittlere Wurzeln).

If a real root x_1 has been found with the desired accuracy, the left-hand side of the 4th degree equation can be divided by $x - x_1$, giving an equation of the 3rd degree. If instead of a real root one has found a complex pair $ri \pm e$, division by $x^2 - (2r \cos \varrho)x + r^2$ gives a quadratic equation. On finding two real roots x_1 and x_2 one can divide by $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$.

C. We put

so that $d = \pm 1$. The equation thereby becomes

On three rectangular axes a is drawn to the right, b to the back and c upwards. In the upper part the octant $(+a, +b)$ will be designated I, $(+b, -a)$ II, $(-a, -b)$ III and $(-b, +a)$ IV. The corresponding octants in the lower part will be designated I', II', III', IV'. Moreover let a mean the neighbourhood of the a axis, bc the neighbourhood of the inclined axis b, c , etc., always excluding the neighbourhood of the origin, for which numerical tables which follow later will give some assistance (p. 71).

The equation has

große large	Wurzeln roots
0	beim Nullpunkt, at the origin
1	bei at a ,
2	„ b ,
3	„ c ,
2	„ bc ,
1	„ ca und abc , and
1	„ ab .

Every real root u corresponds to a plane. If $|u| \approx 1$ the plane is not far from the origin. Small and large real roots, on the contrary, correspond to planes far from the origin, and are therefore only possible with large values of a, b and c (but values of $|u| \approx 1$ are also possible with large values of a, b and c).

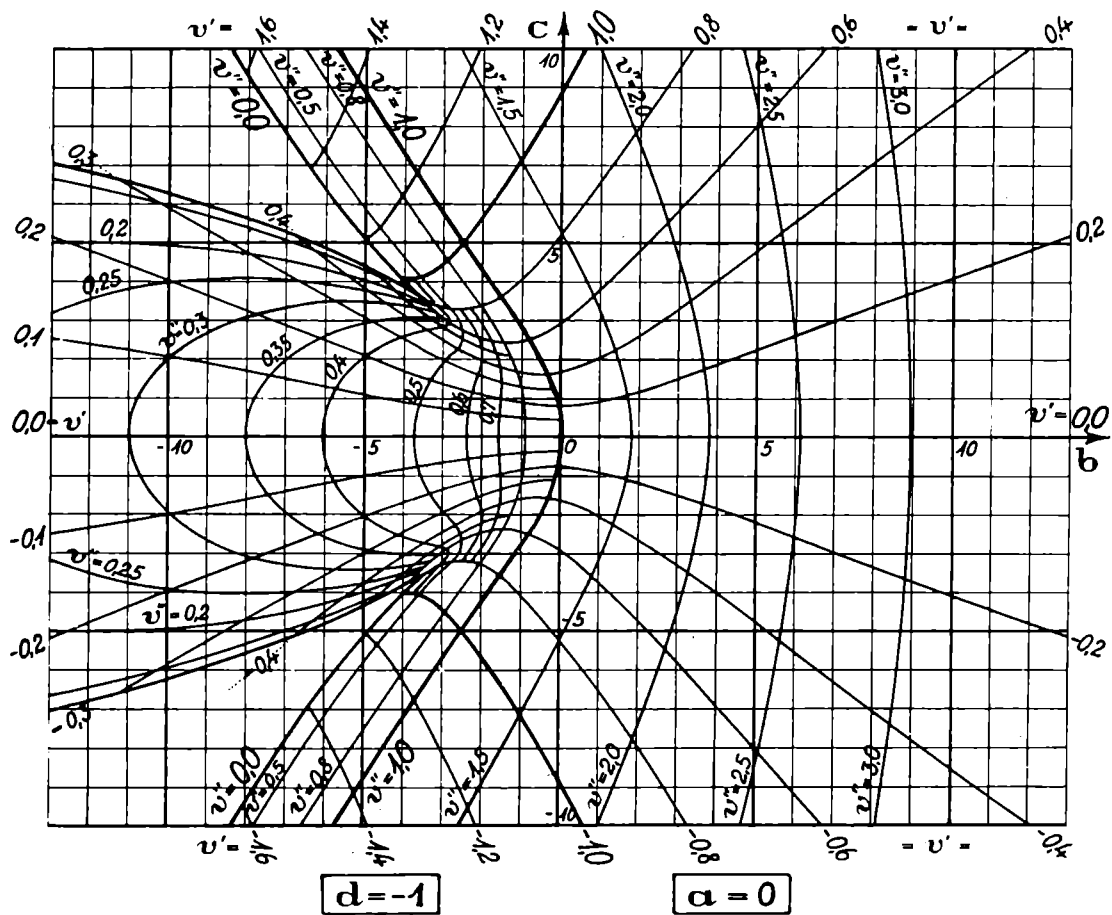


Fig. 24. Komplexe Wurzeln $v' + iv''$. Complex roots $v' + iv''$

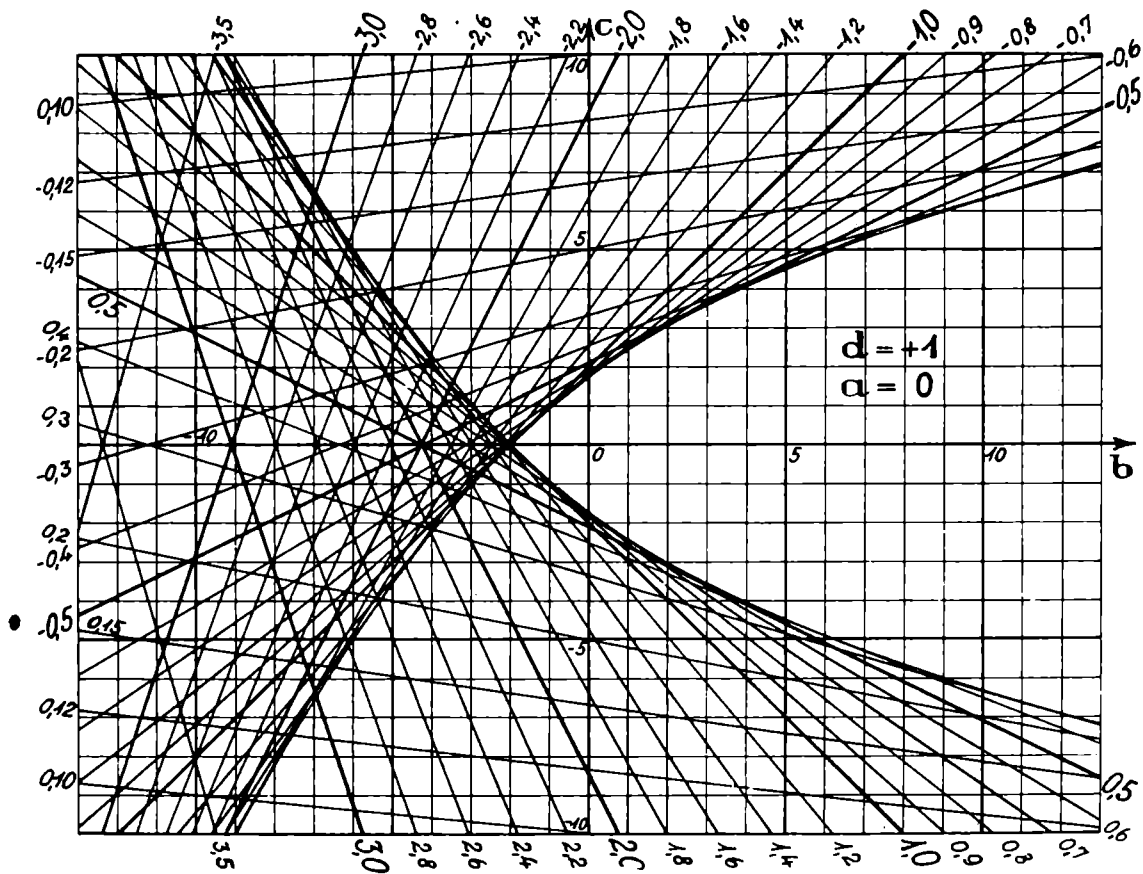


Fig. 25. Reelle Wurzeln. Real roots

Die Strecken, die eine Wurzelebene von den drei Achsen abschneidet, verhalten sich wie $1 : u : u^2$. Großen Wurzeln entsprechen folglich steile Ebenen; kleinen Wurzeln schwach ansteigende Ebenen. Bei $d = +1$ haben die von den Achsen a und c abgeschnittenen Strecken mindestens die Länge 1,755; die von der Achse b abgeschnittenen mindestens die Länge 2.

Die Ebenen für positive Wurzeln schneiden die Halbachsen $-a, -b, -c$, die Ebenen für negative Wurzeln die Halbachsen $+a, -b, +c$ (siehe Fig. 13). Dies gilt, wenn entweder $d = +1$ ist oder wenn $d = -1$ und zugleich $u^2 > 1$ ist. Daher kann bei $d = +1$ im Oktanten I keine positive, im Oktanten II' keine negative Wurzel vorkommen.

Wenn $d = -1$ ist und $u^2 < 1$ wird, so gehen die angegebenen Ebenen in solche über, die ihnen jenseits des Ursprungs gegenüberliegen. Für $0 < u < 1$ werden also die Halbachsen $+a, +b, +c$ geschnitten, für $-1 < u < 0$ die Halbachsen $-a, +b, -c$. Bei $d = -1$ gibt es daher

The intercepts made by the root-plane on the three axes are in the ratio $1 : u : u^2$. Hence steep planes correspond to large roots and slightly inclined planes to small roots. If $d = +1$ the intercepts on the a and c axes have at least a length of 1,755, and that on the b axis of at least 2.

The planes for positive roots cut the semi-axes $-a, -b, -c$, those for negative roots the semi-axes $+a, -b, +c$ (see Fig. 13). This applies either when $d = +1$ or when $d = -1$ and $u^2 > 1$. Hence if $d = +1$ no positive root can occur in octant I and no negative root in octant II'.

If $d = -1$ and $u^2 < 1$ the given planes are replaced by others lying opposite to them on the other side of the origin. If $0 < u < 1$ the semi-axes $+a, +b, +c$ are cut, if $-1 < u < 0$ the semi-axes $-a, +b, -c$. For $d = -1$ there are therefore

im Oktanten in the octant	I	keine großen positiven Wurzeln no large positive roots
„	III'	kleinen „ „ small „ „
„	II'	großen negativen „ large negative „
„	IV	kleinen „ „ small „ „

Für eine komplexe Wurzel $u = re^{i\varrho}$ erhält man die Beziehungen

For a complex root $u = re^{i\varrho}$ one obtains the relations

$$(ar^2 - c)r + 2(r^4 - d) \cos \varrho = 0,$$

$$[(ar^2 + c)r + 2(r^4 + d) \cos \varrho] \cos \varrho = r^4 - br^2 + d,$$

daraus

| hence

$$(a + 2r \cos \varrho)r^3 = cr + 2d \cos \varrho = \frac{r^4 - br^2 + d}{2 \cos \varrho}$$

oder

| or

$$a \cdot 2 \cos \varrho = \frac{d}{r^3} - \frac{b}{r} + r(1 - 4 \cos^2 \varrho),$$

$$c \cdot 2 \cos \varrho = r^3 - br + \frac{d}{r}(1 - 4 \cos^2 \varrho).$$

Man findet also a und c zu jedem $d = \pm 1, b, r, \varrho$, mithin auch in einer Ebene $b = \text{konst}$ die Kurven $r = \text{konst}$ und $\varrho = \text{konst}$.

One finds thus a and c for each $d = \pm 1, b, r, \varrho$, and hence also the curves $r = \text{const.}$ and $\varrho = \text{const.}$ in a plane $b = \text{const.}$

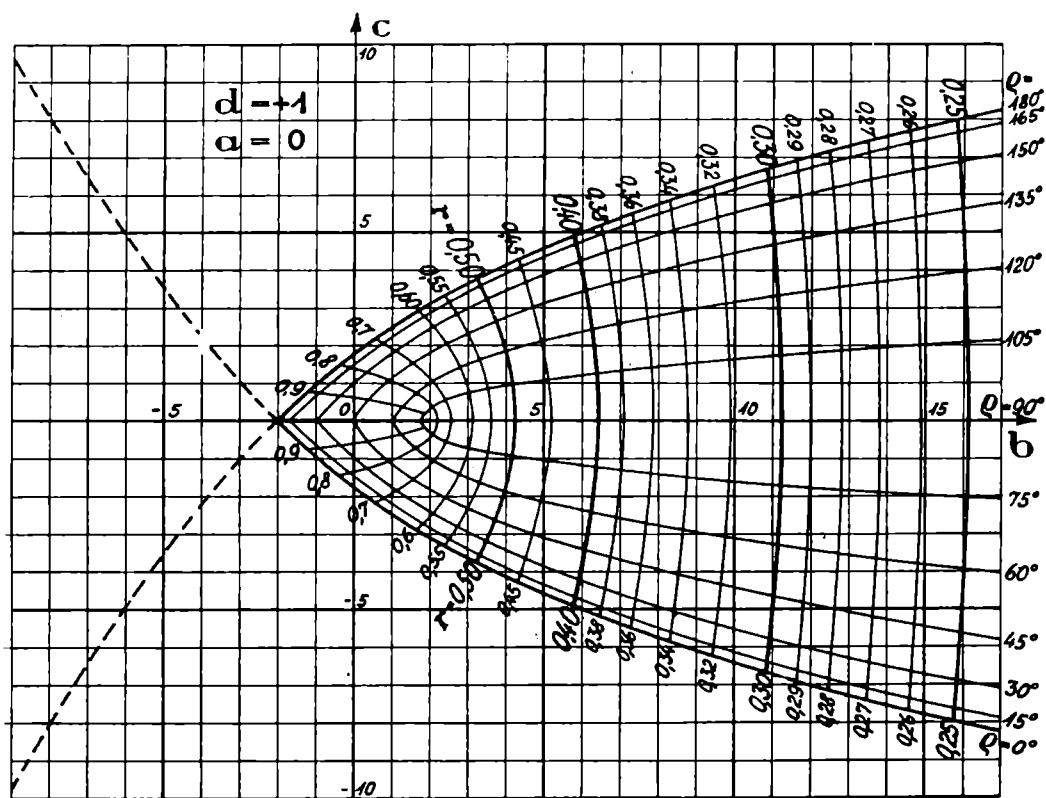


Fig. 26. Komplexe Wurzeln. Complex roots

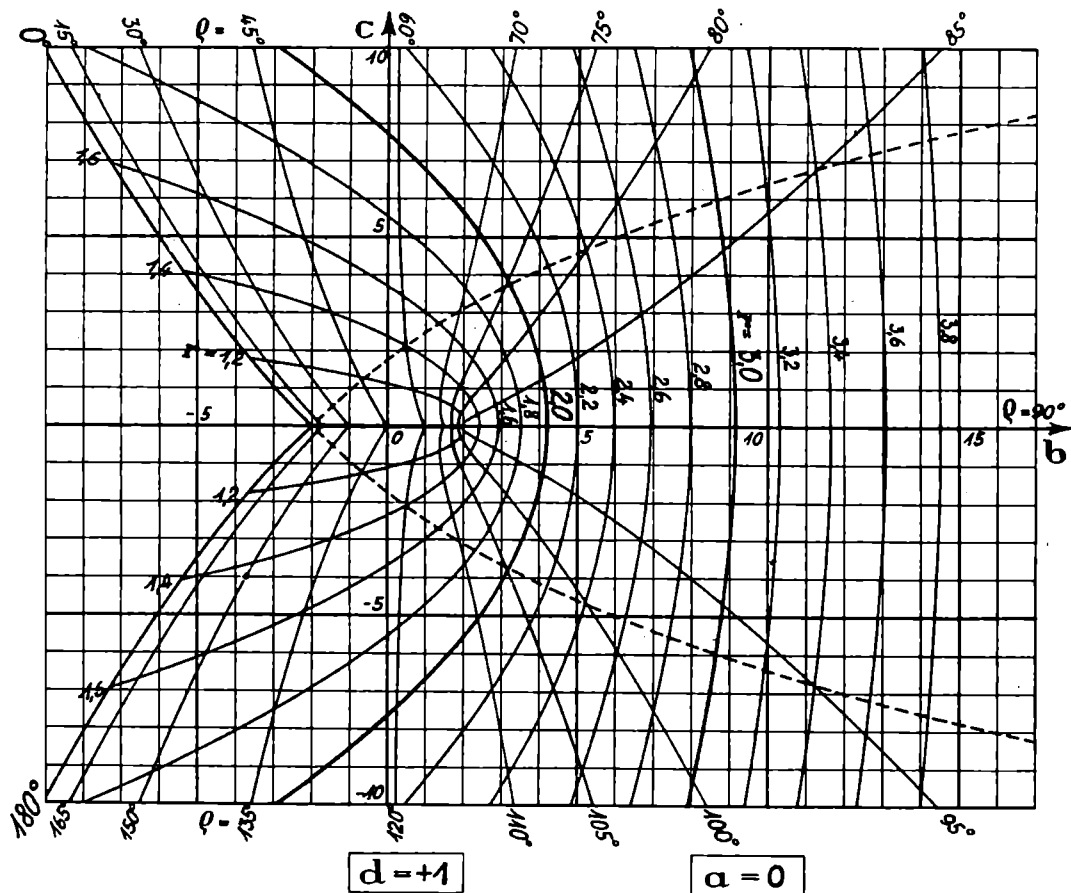


Fig. 27. Komplexe Wurzeln. Complex roots

Im Falle $\cos \varrho = 0$ (also $u = \pm ir$) trennt die Fläche 3. Ordnung (Regelfläche)

In the case $\cos \varrho = 0$ (so that $u = \pm ir$) the surface of the 3rd order (ruled surface)

$$c^2 + a^2d = abc$$

die Gebiete positiver und negativer komplexer Paare. Auf der Grenze ist

separates the regions of positive and negative complex pairs. At the boundary

$$0 < r^2 = \frac{c}{a} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - d} \approx \frac{b}{2} \pm \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{b}\right) \quad \text{für } |b| \gg 1.$$

Bei $d = -1$ gilt nur das obere Vorzeichen:

For $d = -1$ only the upper sign can be used, thus

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - d} \approx b \quad (|b| \gg 1).$$

Bei $d = +1$ muß $b^2 > 4$ sein; es gelten dann beide Vorzeichen:

For $d = +1$ b^2 must be > 4 , then either sign can be used:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1} \approx \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1} \approx b, \quad (|b| \gg 1).$$

Zwischen diesen beiden Flächen hat die Gleichung als Lösungen im Oktanten I zwei negative Paare, im Oktanten II' zwei positive Paare, im übrigen ein positives und ein negatives Paar.

Between these two surfaces the solutions of the equation are two negative pairs in octant I, two positive pairs in octant II' and in addition a positive and a negative pair.

Die beiden Fälle $\cos \varrho = \pm 1$ oder $\sin \varrho = 0$ oder

The two cases $\cos \varrho = \pm 1$ or $\sin \varrho = 0$ or

$$\pm 2a = \frac{d}{r^2} - \frac{b}{r} - 3r, \quad \pm 2c = r^2 - br - 3\frac{d}{r}$$

liefern die Doppelwurzeln, die den Übergang von den komplexen zu den reellen Wurzeln bilden. Mit wachsendem r schmiegen sich diese Grenzkurven in allen Ebenen $b = \text{konst}$ der kubischen Parabel $c = -4(a/3)^3$ an, mit abnehmendem r der kubischen Parabel $a = -4(c/3)^3$. Für $r \approx 1$ nähern sie sich in einer Ebene $b = \text{konst}$ der Hyperbel $ac = (b/2)^2$, also in jeder Ebene einer andern Hyperbel.

give the double roots that form the transition from the complex to the real roots. With increasing r these boundary curves in all planes $b = \text{const.}$ approximate to the cubic parabola $c = -4(a/3)^3$, with decreasing r to the cubic parabola $a = -4(c/3)^3$. For $r \approx 1$ in a plane $b = \text{const.}$ they approach the hyperbola $ac = (b/2)^2$, hence a different hyperbola in every plane. In such a plane the boundary curves $\cos \varrho = \pm 1$ (i. e. $\sin \varrho = 0$) for large values of b cut from the a axis the approximate lengths

In einer solchen Ebene schneiden die Grenzkurven $\cos \varrho = \pm 1$ (also $\sin \varrho = 0$) bei großem b von der a -Achse annähernd die Stücke

$$a_1 \approx \pm 2\sqrt{b},$$

$$a_2 \approx \pm 2(-bd/3)^{1/5}$$

ab und von der c -Achse die Stücke

and from the c axis the lengths

$$c_1 \approx \pm 2\sqrt{bd},$$

$$c_2 \approx \pm 2(-b/3)^{1/5}.$$

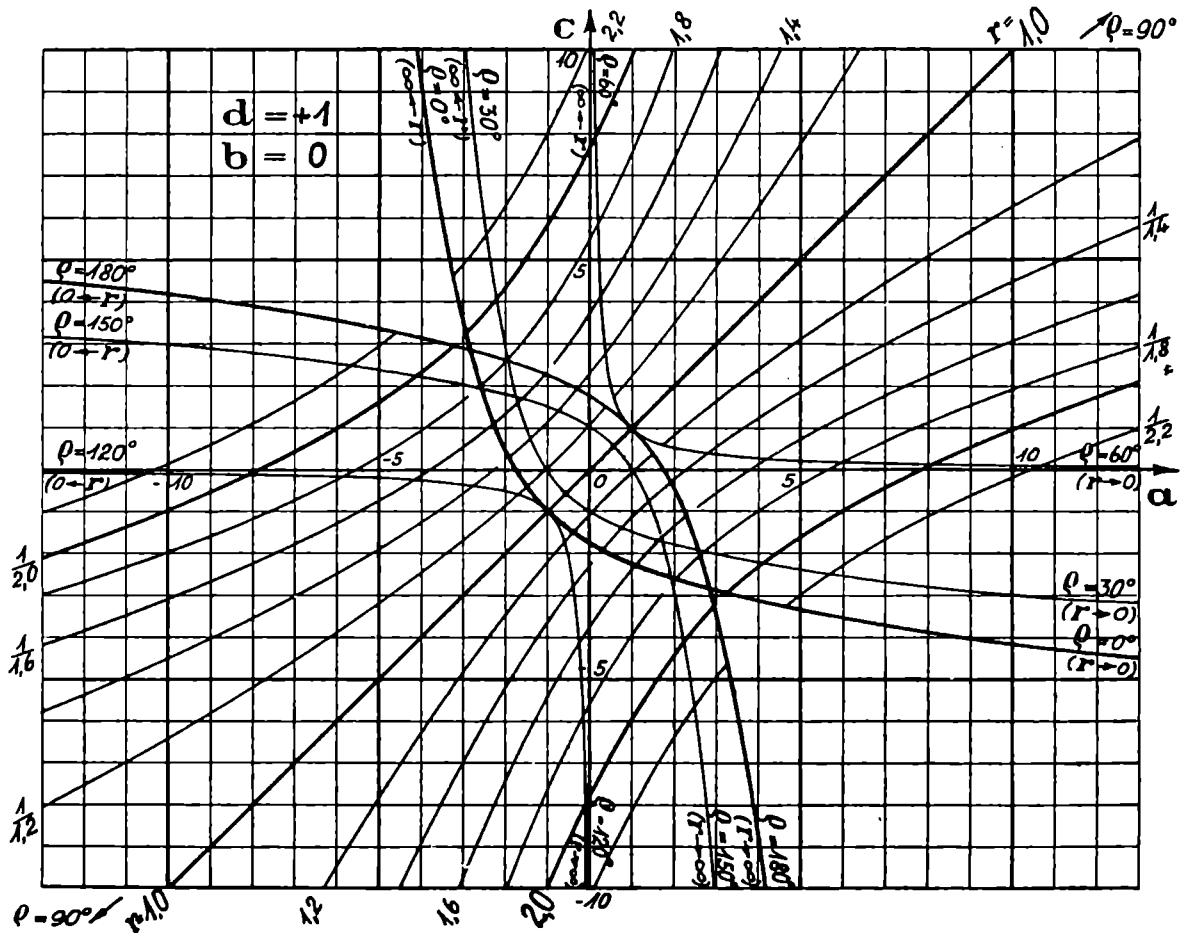
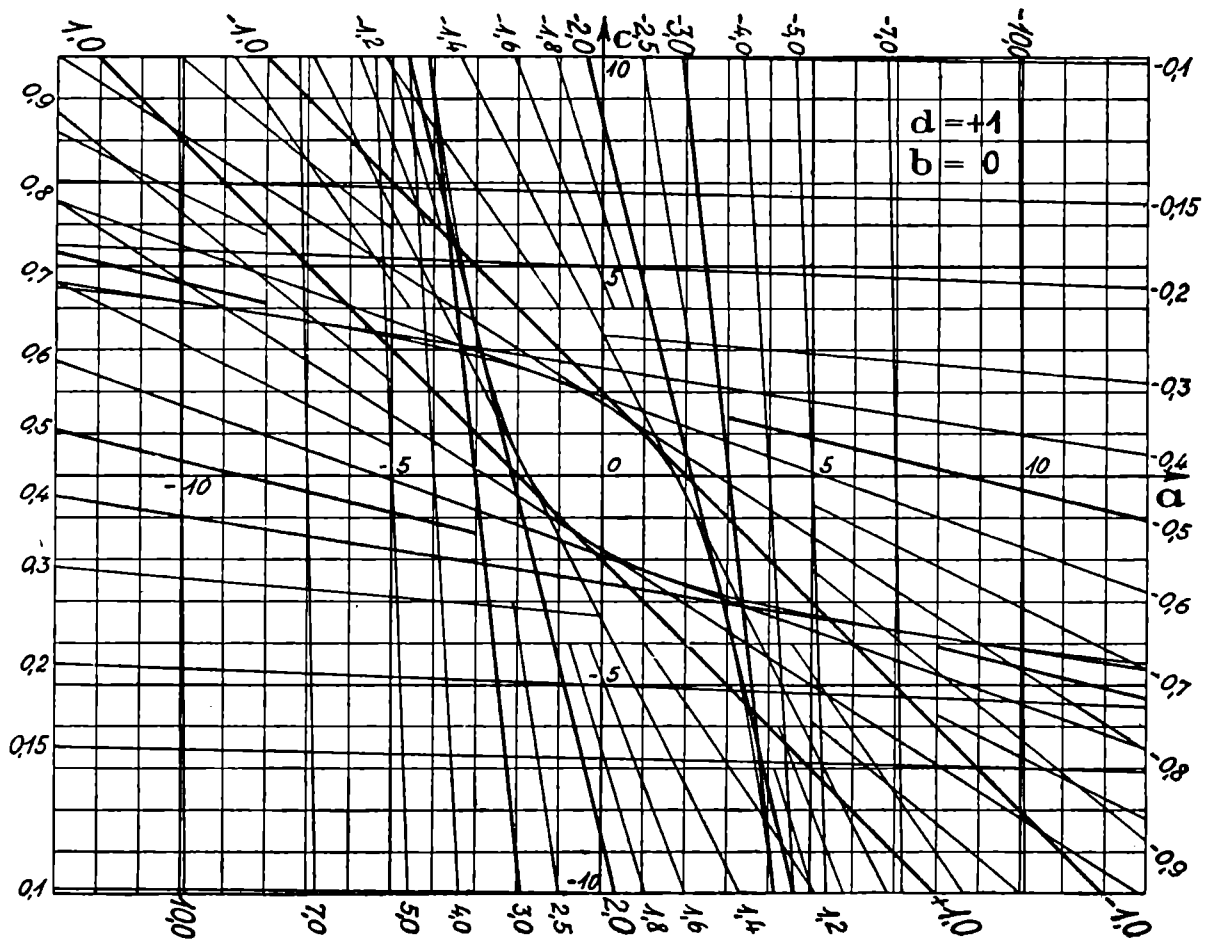
Bei großem b bilden die Grenzkurven Spitzen mit den Koordinaten

For large values of b the boundary curves form sharp points with the coordinates.

$$a_1 \approx \pm \sqrt{3b}, \quad c_1 \approx \pm (b/3)^{1/5} \quad \text{und} \quad a_2 \approx \pm \sqrt{\frac{b}{3d}}, \quad c_2 \approx \pm \sqrt{3bd}.$$

Bei $d = +1$ und negativem b gibt es also keine solche Spitzen, bei positivem b

For $d = +1$ and negative b there are no such points, for positive b two pairs of



zwei Spitzenpaare, bei $d = -1$ ein Spitzenpaar sowohl bei positivem wie bei negativem b .

Bei $d = +1$ finden sich 4 komplexe Wurzeln in einem Raum, dessen Oberfläche die positive b -Achse von $b = -2$ an wie ein Schlauch umhüllt. Bei kleinem b ist sein Querschnitt ein schief liegendes Bogenzweieck (Fig. 37), bei großem b fast ein Quadrat von der Seitenlänge $4\sqrt{b}$, dessen Seiten der a -Achse und der c -Achse parallel sind (Fig. 36). Wenn $b > 6$ wird, schneidet jede der beiden Grenzkurven sich selbst und bildet darauf das schon erwähnte Spitzenpaar, so daß in den Oktanten I und II' je ein mit b immer größer werdendes Dreieck entsteht (Fig. 38). Im Dreieck in I hat die Gleichung 4 negative und in dem Dreieck in II' 4 positive reelle Wurzeln.

Links oben und rechts unten ($ac < 0$) hat die Gleichung bei $d = +1$ und positivem b zwei reelle Paare verschiedenen Vorzeichens; rechts oben und links unten ($ac > 0$) ein reelles und ein komplexes Paar, links unten beide positiv, rechts oben beide negativ. Bei negativem $b < -2$ hat die Gleichung links unten ein positives reelles und ein negatives komplexes Paar, rechts oben ein negatives reelles und ein positives komplexes Paar.

Bei $d = -1$ hat die Gleichung links oben ein positives, rechts unten ein negatives reelles Paar, links unten und rechts oben ein komplexes Paar mit dem Vorzeichen von $-ab$.

D. Setzt man in Abschnitt A

points, for $d = -1$ one pair of points both for positive and negative b .

For $d = +1$ there are 4 complex roots in a space the surface of which surrounds the positive b axis from $b = -2$ like a tube. When b is small its cross-section is a slanting figure enclosed by two arcs (Fig. 37); when b is large it is almost a square of side $4\sqrt{b}$, the sides of which are parallel to the a and c axes (Fig. 36). If $b > 6$ each of the boundary curves cuts itself and produces the above mentioned pair of sharp points, so that in each octant I and II' there is a triangle which increases with b (Fig. 38). The equation has 4 negative real roots in the triangle in I and 4 positive real roots in that in II'.

Top left and bottom right ($ac < 0$) the equation has for $d = +1$ and positive b two real pairs of opposite sign; top right and bottom left ($ac > 0$) one real and one complex pair, bottom left both positive, top right both negative. For negative $b < -2$ the equation has bottom left a positive real and a negative complex pair, top right a negative real and a positive complex pair.

For $d = -1$ the equation has top left a positive, bottom right a negative real pair, bottom left and top right a complex pair with the sign of $-ab$.

D. If in Section A one puts

$$\lambda^4 \delta = -\frac{3}{256} A^4 + \frac{1}{16} A^2 B - \frac{1}{4} AC + D, \quad \delta = \pm 1, \quad \lambda > 0,$$

$$-\frac{3}{8} A^2 + B = \lambda^2 \beta, \quad \frac{1}{8} A^3 - \frac{1}{2} AB + C = \lambda^3 \gamma,$$

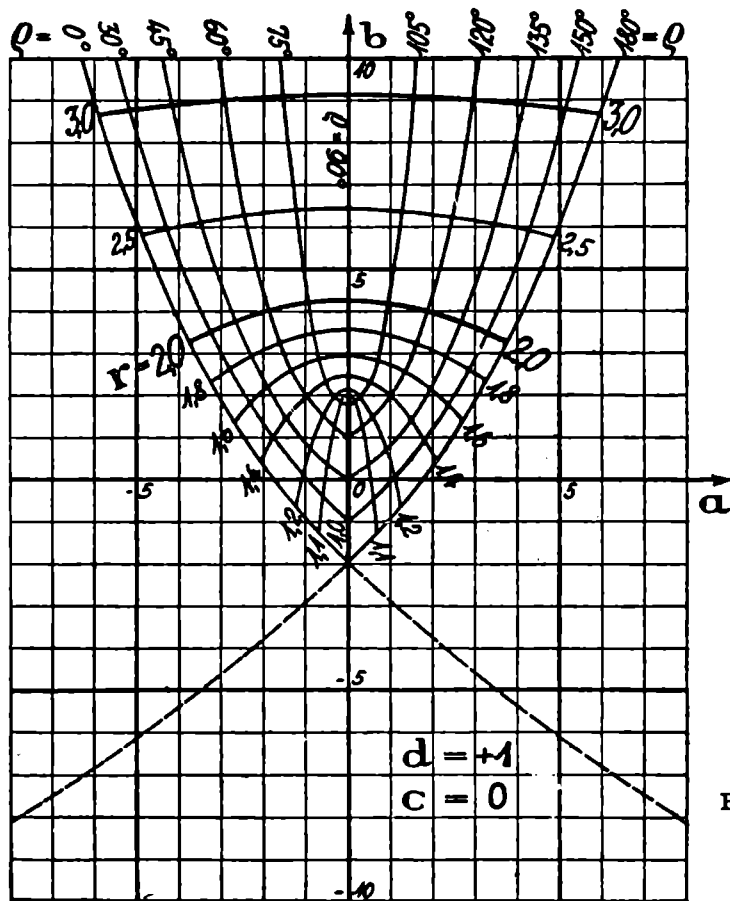
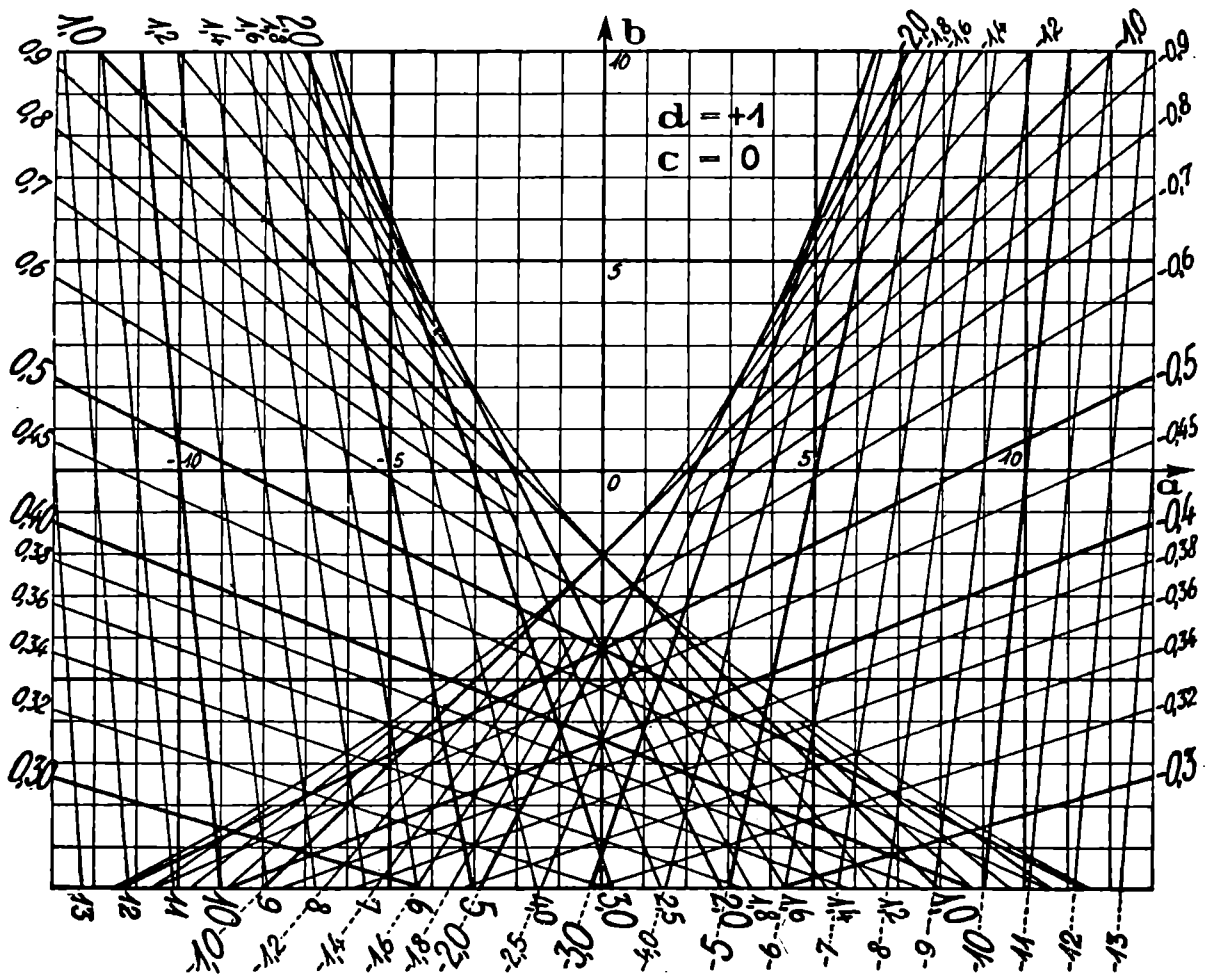
so geht die Gleichung für x über in

| then the equation for x becomes

$$v^4 + \beta v^2 + \gamma v + \delta = 0, \quad \delta = \pm 1.$$

Das ist aber der Sonderfall $a = 0$ der Gleichung für u des vorigen Abschnitts. Er ist in den Fig. 14, 15, 25, 26, 27 dargestellt. In diesen sind jetzt b, c, u durch β, γ, v zu ersetzen. Zur graphischen Darstellung genügt eine Ebene, nämlich die Ebene mit den Achsen β, γ (Fig. 24, 39, 40).

which is, however, the special case $a = 0$ of the equation for u of the previous section. It is represented in Figs. 14, 15, 25, 26, 27. In these, b, c, u are now to be replaced by β, γ, v . A single plane suffices for graphical representation viz. the plane with the axes β, γ (Figs. 24, 39, 40).



Bei $\delta = -1$ hat die Gleichung für v in dieser Ebene oben ein positives, unten ein negatives Paar; links in der Nähe der β -Achse und rechts überall ein komplexes, links sonst ein reelles Paar.

Bei $\delta = +1$ hat die Gleichung für v fast überall ein positives und ein negatives Paar, links zwei reelle, rechts nahe bei der β -Achse zwei komplexe Paare. Rechts oben ist das komplexe Paar positiv, das reelle negativ, rechts unten das reelle Paar positiv, das komplexe negativ.

Bei einer komplexen Wurzel $v = \frac{\sqrt{s} + i\sqrt{t}}{2}$ gilt

$$s[(\beta + s)^2 - 4\delta] = \gamma^2, \quad t = \frac{2\gamma}{\sqrt{s}} + 2\beta + s.$$

Wo die Figuren aufhören, kommt man den Wurzeln durch einfache Ausdrücke um so näher, je weiter man vom Nullpunkt entfernt ist. Einen Anhalt bieten die Beispiele in den beiden folgenden Tabellen.

For $\delta = -1$ the equation for v has in this plane a positive pair above and a negative pair below; left, near the β axis, and right, everywhere, a complex pair, left also a real pair.

For $\delta = +1$ the equation for v has almost everywhere a positive and a negative pair, left two real and right, near the β axis, two complex pairs. Top right the complex pair is positive, the real negative; bottom right the real pair is positive, the complex pair negative.

For a complex root $v = \frac{\sqrt{s} + i\sqrt{t}}{2}$ we have

Where the figures cease one can approximate the more closely to the roots by simple expressions, the further one is removed from the origin. The examples in the two following tables may give some assistance.

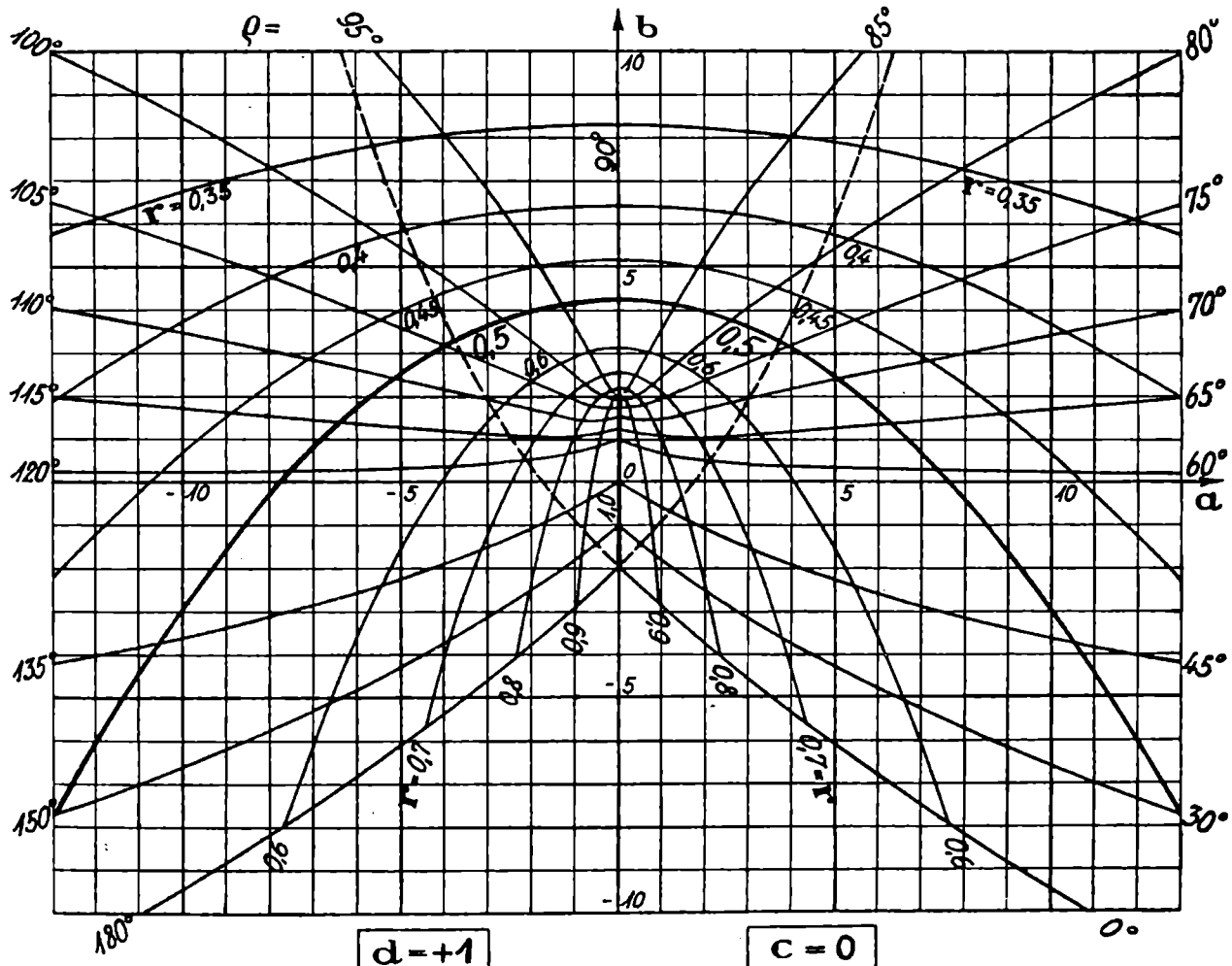


Fig. 32. Komplexe Wurzeln. Complex roots

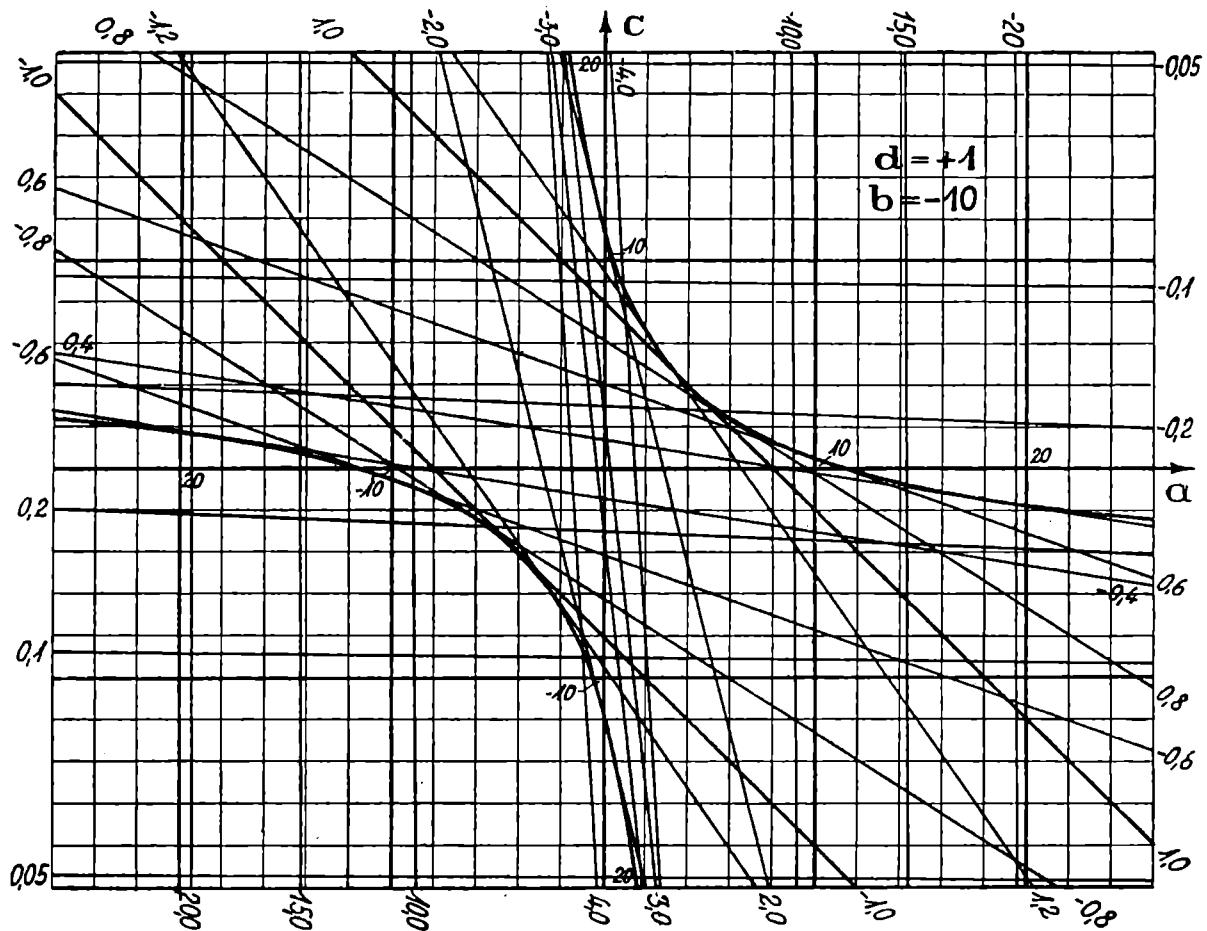


Fig. 33. Reelle Wurzeln. Real roots.

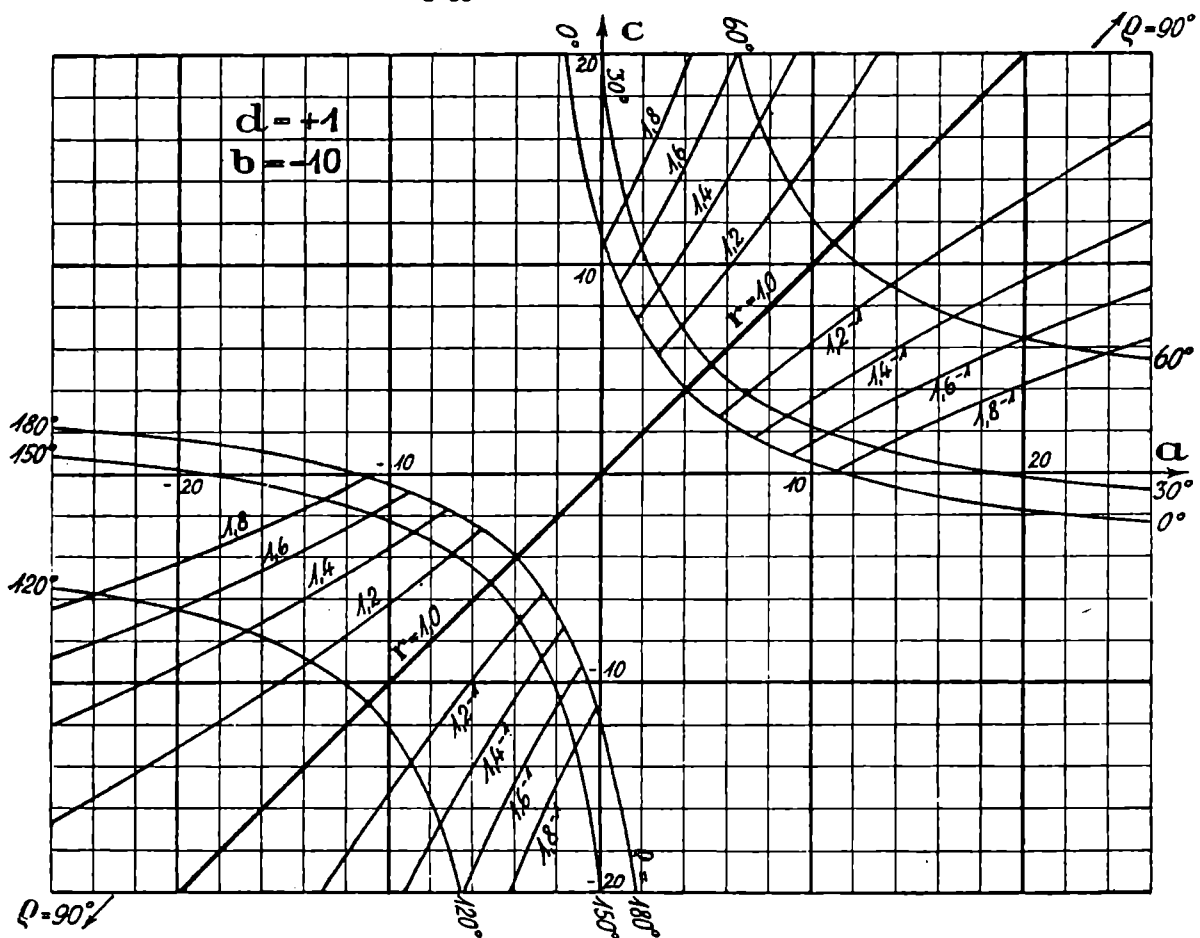


Fig. 34. Komplexe Wurzeln. Complex roots

$$v^4 + \beta v^2 + \gamma v - 1 = 0$$

67

	$\beta = -100$	$\beta = 0$	$\beta = +100$
$\gamma = +100$	$+ 0,010\ 102$ $+ 1$ $+ 10 - 0,542\ 879$ $- 10,467\ 223$	$\left\{ \begin{array}{l} + 2,317\ 460 \\ \pm i\ 4,019\ 739 \\ + 0,01 - 10^{-10} + 4 \cdot 10^{-18} \\ - 10^{\frac{2}{3}} - 0,003\ 330 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} + 0,495\ 049 \\ \pm i\ 10,037\ 187 \\ + 0,01 - 0,000\ 098 \\ - 1 \end{array} \right.$
$\gamma = 0$	$\pm 10,000\ 5$ $\pm i(0,1 - 5 \cdot 10^{-6} + 9 \cdot 10^{-10})$	± 1 $\pm i$	$\pm i\ 10,000\ 5$ $\pm (0,1 - 5 \cdot 10^{-6} + 9 \cdot 10^{-10})$
$\gamma = -100$	$- 0,010\ 102$ $- 1$ $+ 10,467\ 223$ $- 10 + 0,542\ 879$	$\left\{ \begin{array}{l} - 2,317\ 460 \\ \pm i\ 4,019\ 739 \\ + 10^{\frac{2}{3}} + 0,003\ 330 \\ - 0,01 + 10^{-10} - 4 \cdot 10^{-18} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} - 0,495\ 049 \\ \pm i\ 10,037\ 187 \\ + 1 \\ - 0,01 + 0,000\ 098 \end{array} \right.$

$$v^4 + \beta v^2 + \gamma v + 1 = 0$$

	$\beta = -100$	$\beta = 0$	$\beta = +100$
$\gamma = +100$	$+ 1,020\ 425$ $+ 10 - 0,544\ 136$ $- 10,466\ 387$ $- 0,01 + 0,000\ 098\ 048$	$\left\{ \begin{array}{l} + 2,324\ 125\ 3 \\ \pm i\ 4,019\ 738\ 0 \\ - 10^{\frac{2}{3}} + 0,003\ 338\ 132 \\ - 0,01 - 10^{-10} - 4 \cdot 10^{-18} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} + 0,495\ 239\ 5 \\ \pm i\ 10,036\ 228\ 5 \\ - 1 + 0,019\ 622\ 95 \\ - 0,010\ 102\ 05 \end{array} \right.$
$\gamma = 0$	$\pm (10 - 0,000\ 500\ 06)$ $\pm 0,100\ 005\ 000\ 9$	$i^{+0,5}$ $i^{+1,5}$	$\pm i(10 - 0,000\ 500\ 06)$ $\pm i\ 0,100\ 005\ 000\ 9$
$\gamma = -100$	$+ 0,01 - 0,000\ 098\ 048$ $+ 10,466\ 387$ $- 10 + 0,544\ 136$ $- 1,020\ 425$	$\left\{ \begin{array}{l} + 0,01 + 10^{-10} + 4 \cdot 10^{-18} \\ + 10^{\frac{2}{3}} - 0,003\ 338\ 132 \\ - 2,324\ 125\ 3 \\ \pm i\ 4,019\ 738\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} + 0,010\ 102\ 05 \\ + 1 - 0,019\ 622\ 95 \\ - 0,495\ 239\ 5 \\ \pm i\ 10,036\ 228\ 5 \end{array} \right.$

$$10^{\frac{2}{3}} = 4,641\ 588\ 834$$

Jede der folgenden sechs Einsetzungen ist nur dann anzuwenden, wenn dabei λ und μ klein gegen 1 werden. Eine der vier Wurzeln ist dann $w \approx 1$. Sie wird im folgenden genauer angegeben. Meist wird man so Näherungswerte für alle vier Lösungen v erhalten.

1. Wenn γ klein gegen $\beta^{1,5}$ und β groß ist: Durch Einsetzen von

$$\beta = -\frac{1}{h^2}, \quad v = \frac{w}{h} \quad \left(\begin{array}{l} h \text{ zweiwertig} \\ \text{two-valued} \end{array} \right)$$

entsteht

| we have

$$w^4 = w^2 + \lambda w + \mu \quad \text{mit} \quad \lambda = -h^3 \gamma = \frac{\gamma h}{\beta} \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\delta}{\beta^2}.$$

Lösung:

Solution:

$$w \approx 1 + \frac{\lambda + \mu}{2} \left(1 - \frac{3\lambda + 5\mu}{4} + \frac{8\lambda^2 + 27\lambda\mu + 21\mu^2}{8} \right).$$

Each of the six following substitutions is only to be employed if λ and μ thereby become small compared with unity. One of the four roots is then $w \approx 1$. It will be more accurately given in the following. One will usually obtain in this way approximate values for all four solutions v .

1. If γ be small compared with $\beta^{1,5}$ and β be large: By putting

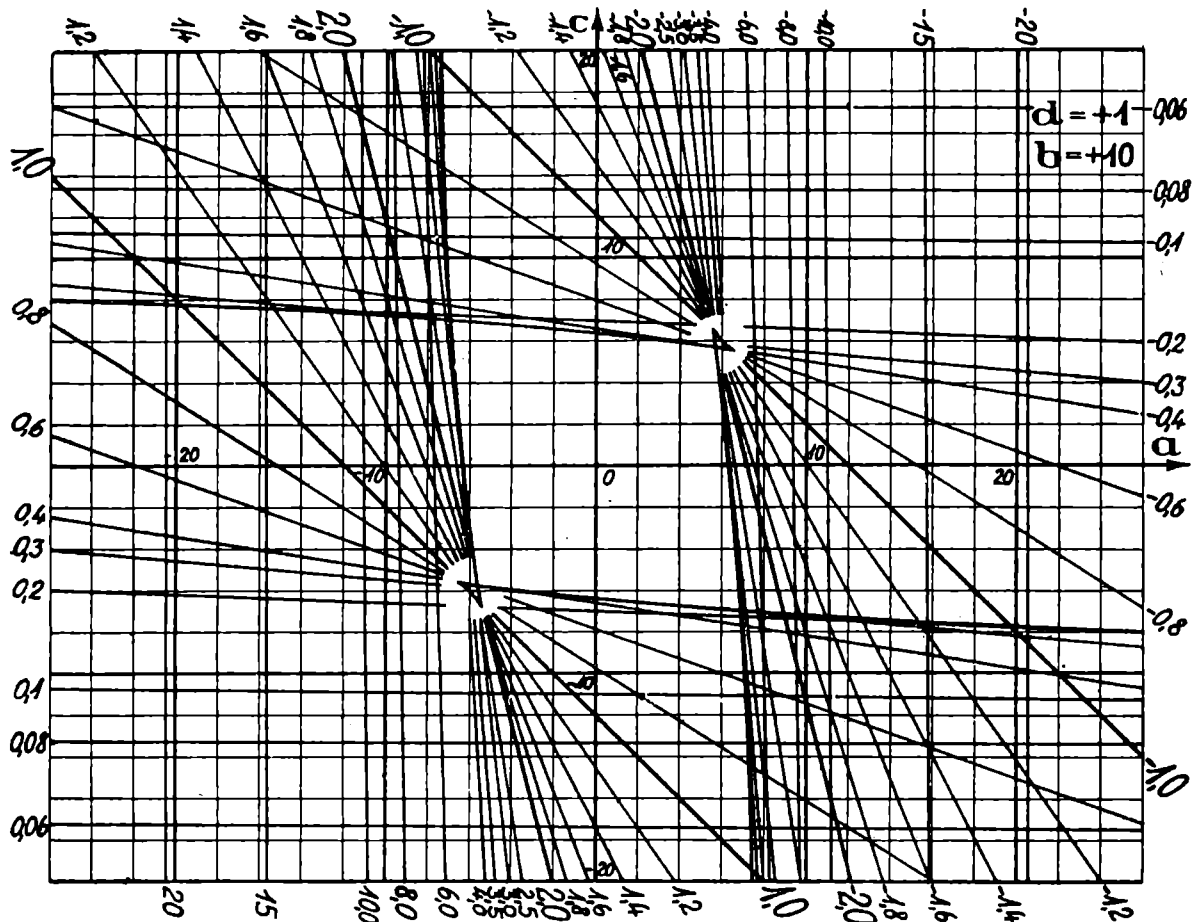


Fig. 35. Reelle Wurzeln. Real roots

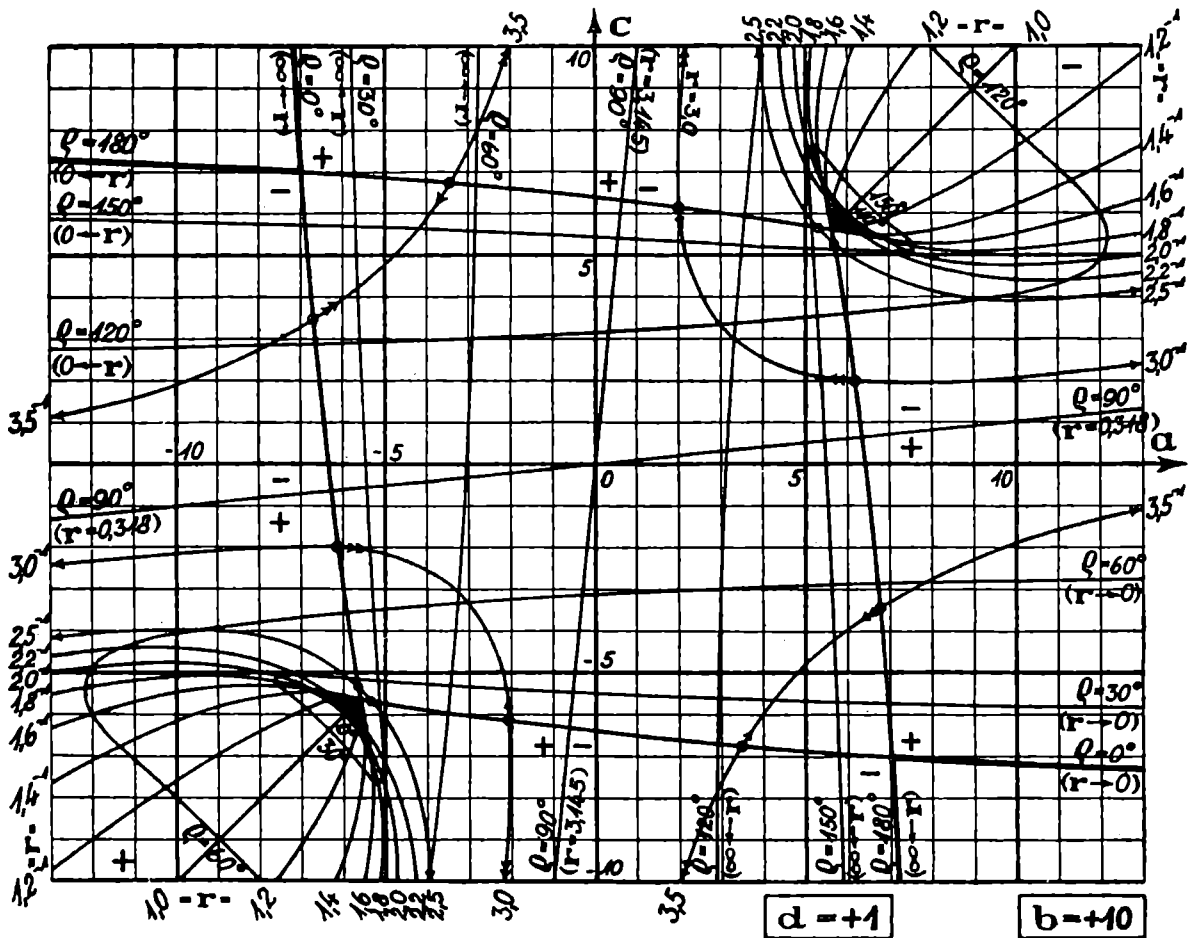


Fig. 36. Komplexe Wurzeln. Complex roots

2. Wenn $\beta^{1,5}$ klein gegen γ und γ groß ist: Durch Einsetzen von | 2. If $\beta^{1,5}$ be small compared with γ and γ be large: By putting

$$\gamma = -\frac{1}{h^3}, \quad v = \frac{w}{h} \quad \left(\begin{array}{l} h \text{ dreiwertig} \\ h \text{ three-valued} \end{array} \right)$$

entsteht | we have

$$w^4 = \lambda w^2 + w + \mu \quad \text{mit} \quad \lambda = -\beta h^2 = \frac{\beta}{\gamma h} \quad \text{und} \quad \mu = -h^4 \delta = \frac{h \delta}{\gamma}.$$

Lösung:
Solution: $w \approx 1 + \frac{\lambda + \mu}{3} \left(1 - \frac{2\mu}{3} + \frac{-\lambda^2 + 7\lambda\mu + 20\mu^2}{27} \right).$

3. Wenn β und γ klein sind: Durch Einsetzen von | 3. If β and γ be small: By putting

$$\delta = -h^4, \quad v = hw \quad \left(\begin{array}{l} h \text{ vierwertig} \\ h \text{ four-valued} \end{array} \right)$$

entsteht | we have

$$w^4 = \lambda w^2 + \mu w + 1 \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{\beta}{h^2} = \frac{\beta h^2}{\delta} \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\gamma}{h^3} = \frac{\gamma h}{\delta}.$$

Lösung:
Solution: $w \approx 1 + \frac{\lambda + \mu}{4} \left(1 + \frac{\lambda - \mu}{8} - \lambda \frac{\lambda + 3\mu}{32} \right).$

4. Wenn $\beta \approx \gamma$ und beide groß sind: Durch Einsetzen von | 4. If $\beta \approx \gamma$ and both be large: By putting

$$v = -\frac{\gamma}{\beta} w$$

entsteht | we have

$$w^2 = \lambda w^4 + w + \mu \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{\gamma^2}{\beta^2} \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\beta \delta}{\gamma^2}.$$

Lösung:
Solution: $w \approx 1 + (\lambda + \mu) [1 + (3\lambda - \mu) - (6\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2)].$

5. Wenn γ^2 klein gegen β und β groß ist: Durch Einsetzen von | 5. If γ^2 be small compared with β and β be large: By putting

$$\beta = -\frac{\delta}{h^2}, \quad v = hw \quad \left(\begin{array}{l} h \text{ zweiwertig} \\ h \text{ two-valued} \end{array} \right)$$

entsteht | we have

$$w^2 = \lambda w^4 + \mu w + 1 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\delta}{\beta^2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\gamma h}{\delta}.$$

Lösung:
Solution: $w \approx 1 + \frac{\lambda + \mu}{2} \left(1 + \frac{7\lambda + \mu}{4} + \lambda \frac{33\lambda + 15\mu}{8} \right).$

6. Wenn β klein gegen γ^2 und γ groß ist: Durch Einsetzen von | 6. If β be small compared with γ^2 and γ be large: By putting

$$v = -\frac{\delta}{\gamma} w$$

entsteht | we have

$$w = \lambda w^4 + \mu w^2 + 1 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{\gamma^4 \delta} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\beta}{\gamma^2 \delta}.$$

Lösung:
Solution: $w \approx 1 + (\lambda + \mu) [1 + 2(2\lambda + \mu) + (22\lambda^2 + 23\lambda\mu + 5\mu^2)].$

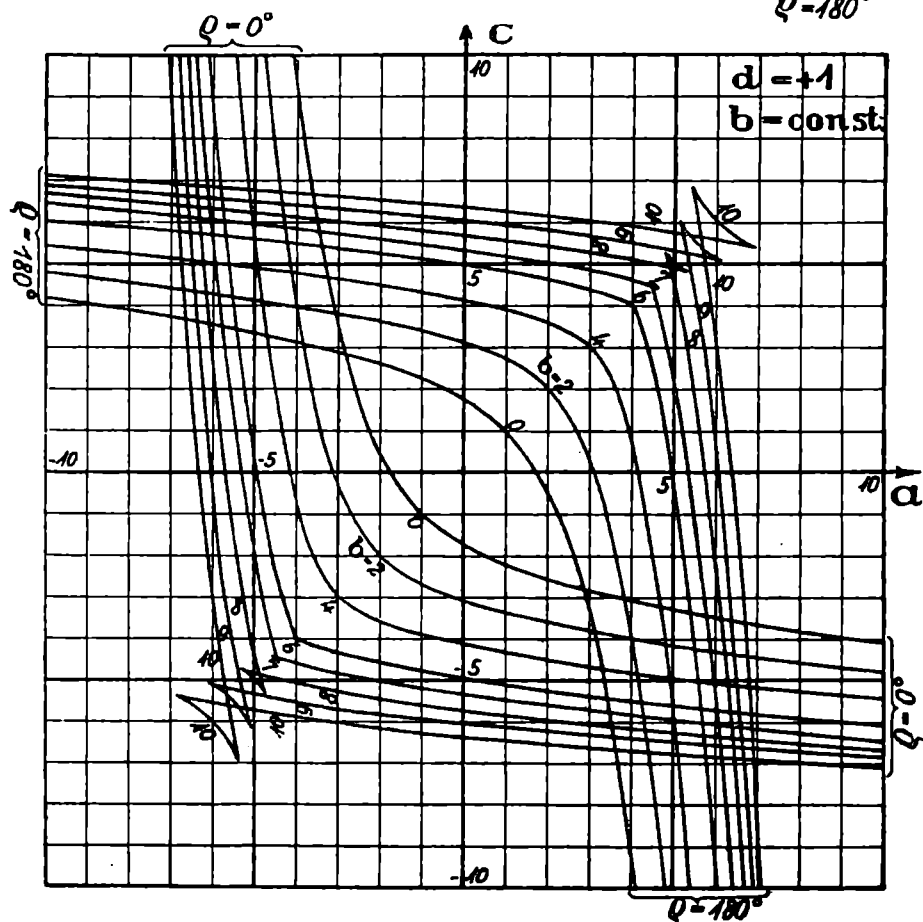
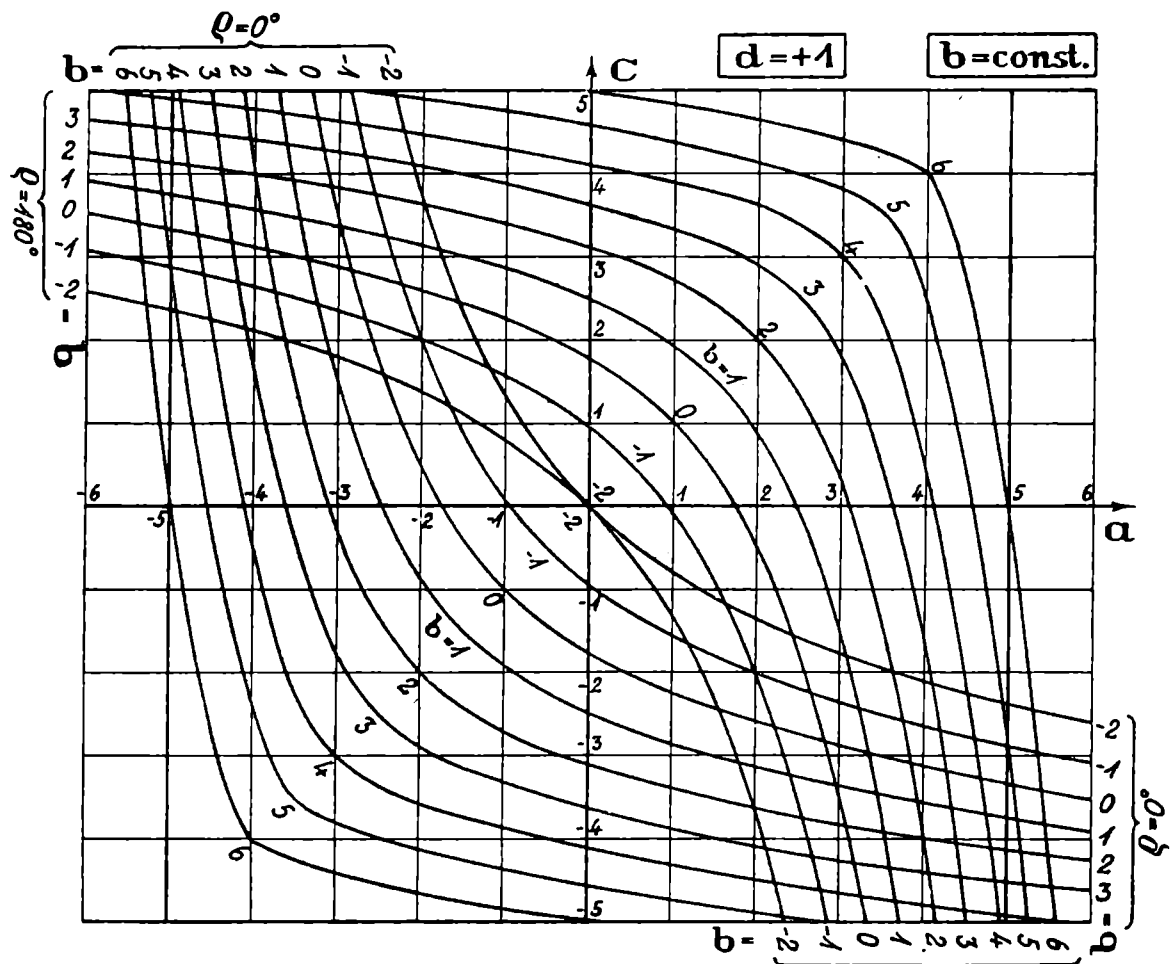


Fig. 37, 38. Kurven $q = 0^\circ$, $q = 180^\circ$. (Trennung der reellen und komplexen Wurzeln)
 Fig. 37, 38. Curves $q = 0^\circ$, $q = 180^\circ$. (Separation of the real and complex roots)

$$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + 1 = 0$$

71

a	b	c	$i \pm 0,5$	$i \pm 1,5$
0	0	0		
1	0	0	$0,8447i \pm 0,5790$	$1,1838i \pm 1,6600$
-1	0	0	$0,8447i \pm 1,4210$	$1,1838i \pm 0,3400$
0	1	0	$i \pm \frac{1}{2}$	$i \pm \frac{1}{2}$
0	-1	0	$i \pm \frac{1}{2}$	$i \pm \frac{1}{2}$
0	0	1	$0,8447i \pm 1,6600$	$1,1838i \pm 0,5780$
0	0	-1	$0,8447i \pm 0,3400$	$1,1838i \pm 1,4210$
0	1	1	$0,8017i \pm 1,4786$	$1,2474i \pm 0,7107$
0	1	-1	$0,8017i \pm 0,5214$	$1,2474i \pm 1,2893$
0	-1	1	-1	$1,1510i \pm 0,4481$
0	-1	-1	$0,7549$	$1,1510i \pm 1,5519$
1	0	1	-1	$i \pm \frac{1}{2}$
1	0	-1	$0,7287i \pm 0,4336$	$1,3723i \pm 1,5664$
-1	0	1	$0,7287i \pm 1,5664$	$1,3723i \pm 0,4336$
-1	0	-1	1	$i \pm \frac{1}{2}$
1	1	0	$0,8017i \pm 0,7107$	$1,2474i \pm 1,4786$
1	-1	0	-1	$0,8688i \pm 0,4481$
-1	1	0	$0,8017i \pm 1,2893$	$1,2474i \pm 0,5214$
-1	-1	0	1	$0,8688i \pm 1,5519$
1	1	1	$i \pm 0,8$	$i \pm 1,6$
1	1	-1	$0,6814i \pm 0,5012$	$1,4676i \pm 1,4388$
1	-1	1	-1	$i \pm 0,5484$
1	-1	-1	$0,7632i \pm 0,2658$	$1,3103i \pm 1,7342$
-1	1	1	$0,6814i \pm 1,4388$	$1,4676i \pm 0,5012$
-1	1	-1	$i \pm 0,4$	$i \pm 1,2$
-1	-1	1	$0,7632i \pm 1,7342$	$1,3103i \pm 0,2658$
-1	-1	-1	$0,5807$	$i \pm 1,4516$

Die Beträge aller dieser Wurzeln liegen zwischen 0,5 und 2.
The absolute values of all these roots lie between 0,5 and 2.

a	b	c	-1	+1	$\pm i$
1	0	0	-1,3803	0,8192	$0,9405i \pm 1,1500$
-1	0	0	-0,8192	1,3803	$0,9405i \pm 0,8500$
0	1	0	-0,7862	0,7862	$\pm 1,2720i$
0	-1	0	-1,2720	1,2720	$\pm 0,7862i$
0	0	1	-1,2207	0,7245	$1,0632i \pm 0,8500$
0	0	-1	-0,7245	1,2207	$1,0632i \pm 1,1500$
0	1	1	-1	0,5698	$1,3247i \pm 0,8962$
0	1	-1	-0,5698	1	$1,3247i \pm 1,1038$
0	-1	1	-1,4656	1	$0,8261i \pm 0,8181$
0	-1	-1	-1	1,4656	$0,8261i \pm 1,1819$
1	0	1	-1,6181	0,6181	$\pm i$
1	0	-1	-1	1	$i \pm \frac{1}{2}$
-1	0	1	-1	1	$i \pm \frac{1}{2}$
-1	0	-1	-0,6181	1,6181	$\pm i$
1	1	0	-1	0,6823	$1,2105i \pm 1,1819$
1	-1	0	-1,7550	+1	$0,7549i \pm 1,1038$
-1	1	0	-0,6823	+1	$1,2105i \pm 0,8181$
-1	-1	0	-1	1,7550	$0,7549i \pm 0,8962$
1	1	1	-1,2907	0,5188	$1,220i \pm 1,0595$
1	1	-1	-0,6610	0,8484	$1,3354i \pm 1,2933$
1	-1	1	-1,9275	0,7748	$0,8183i \pm 0,9405$
1	-1	-1	-1,5129	1,1787	$0,7488i \pm 1,2933$
-1	1	1	-0,8484	0,6610	$1,3354i \pm 0,7067$
-1	1	-1	-0,5188	1,2907	$1,220i \pm 0,9405$
-1	-1	1	-1,1787	1,5129	$0,7488i \pm 0,7067$
-1	-1	-1	-0,7748	1,9275	$0,8183i \pm 1,0595$

$$u^4 + au^3 + bu^2 + cu - 1 = 0$$

6.

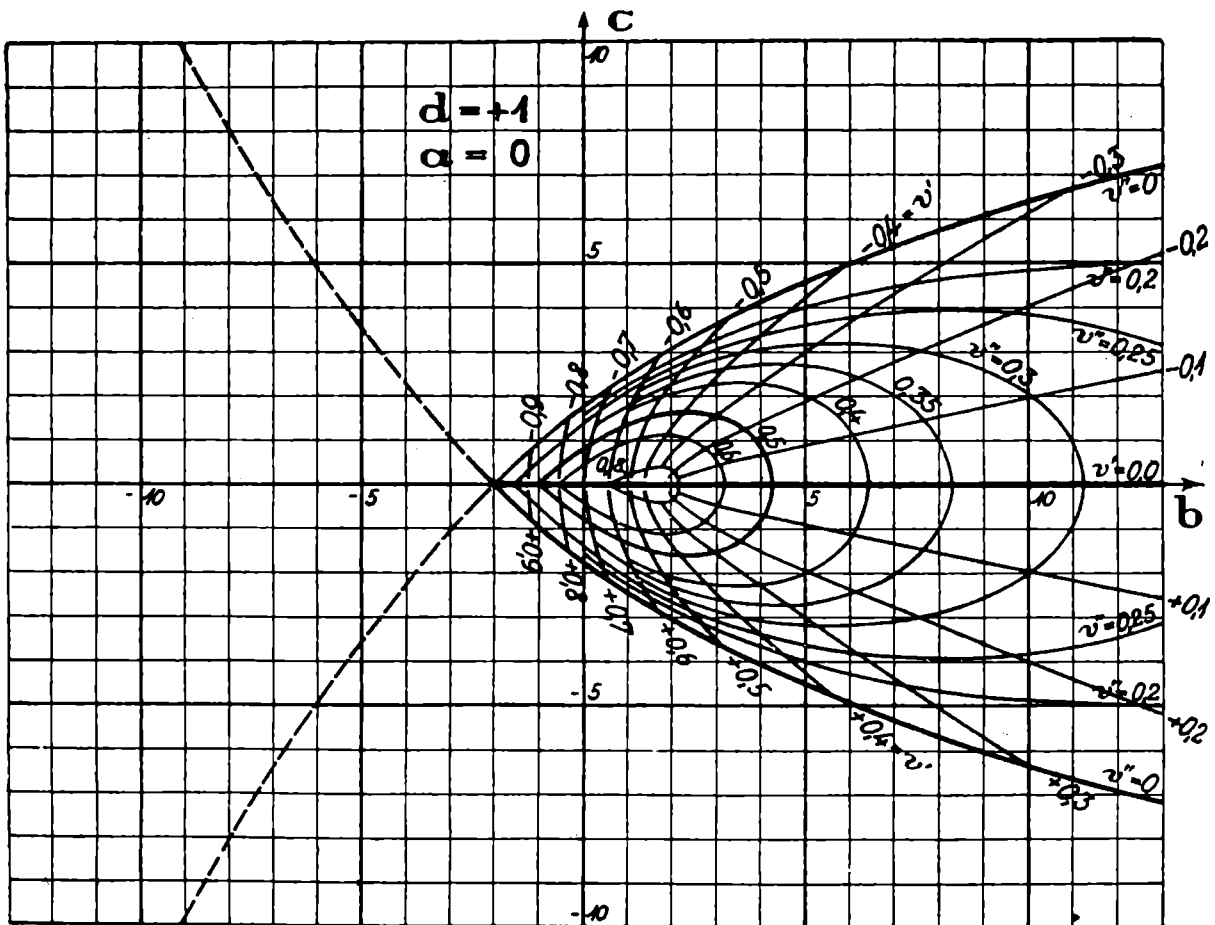
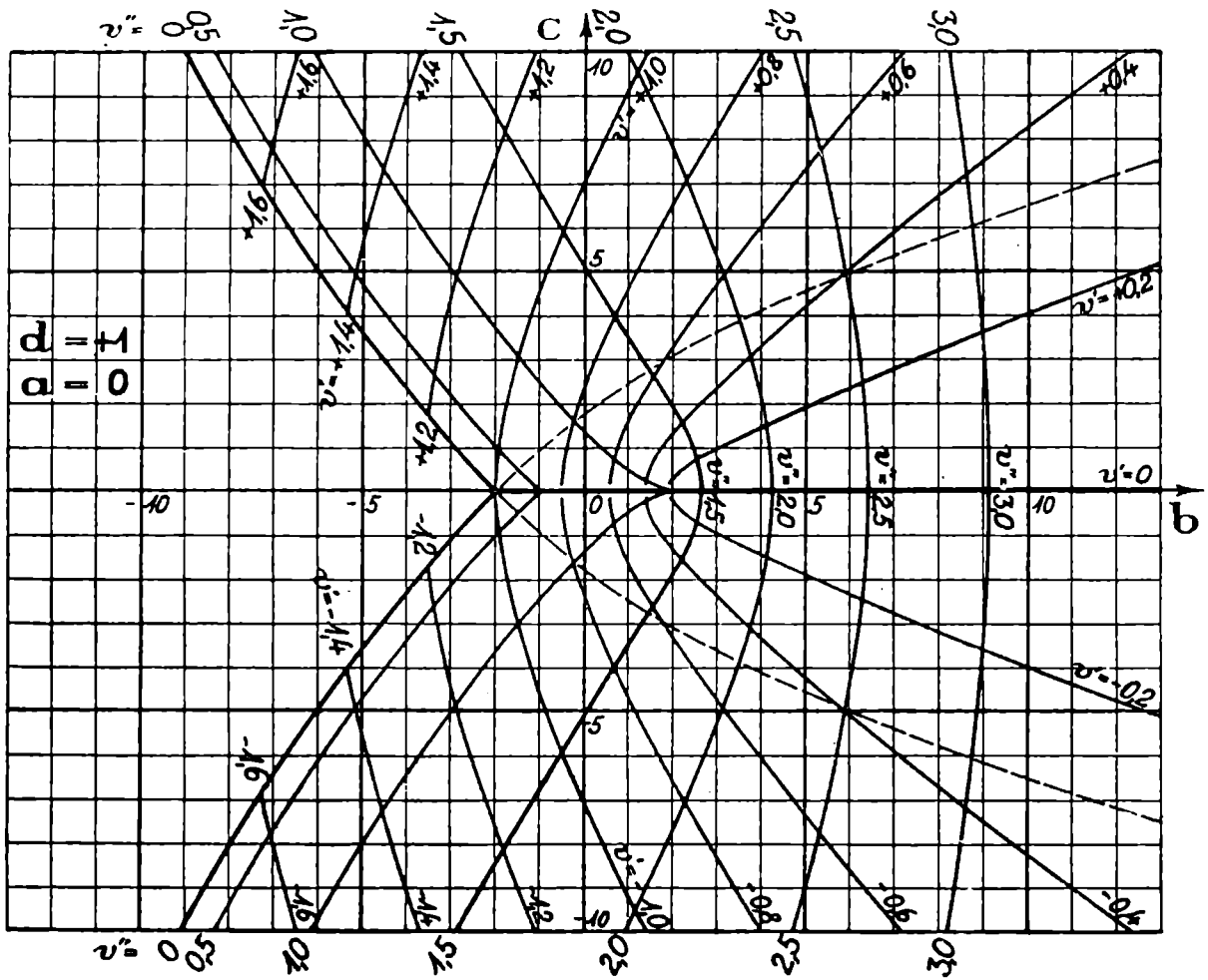


Fig. 39, 40. Komplexe Wurzeln $v' + iv''$. Complex roots $v' + iv''$.

Kreisfunktionen

Circular functions

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^{i \cdot \frac{2}{\pi} x}$$

$$\exp ix = e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x = i^{\frac{2}{\pi} x},$$

$$ix = \cos x^{\perp} + i \sin x^{\perp} = \cos \left(\frac{\pi}{2} x \text{ rad} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} x \text{ rad} \right),$$

$$ix = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2} x \right)^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{2} x \right)^{2n+1},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \frac{17x^6}{315} + \frac{62x^8}{2835} + \frac{1382x^{10}}{155925} + \frac{21844x^{12}}{6081075} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \dots, \quad |x| < \pi,$$

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{3 \sin^5 x}{40} + \frac{5 \sin^7 x}{112} + \frac{35 \sin^9 x}{1152} + \frac{63 \sin^{11} x}{2816} + \dots, \quad |\sin x| < 1,$$

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \dots, \quad |\operatorname{tg} x| < 1,$$

$$ix + i^{-x} = 2 \cos x^{\perp}, \quad ix - i^{-x} = i 2 \sin x^{\perp}, \quad ix^{-1} + i^{1-x} = 2 \sin x^{\perp}.$$

$x =$	$-2,0^{\perp}$	$-1,5^{\perp}$	$-1,0^{\perp}$	$-0,5^{\perp}$	0	$+0,5^{\perp}$	$+1,0^{\perp}$	$+1,5^{\perp}$	$+2,0^{\perp}$
$\sin x =$	0	$-\sqrt{0,5}$	-1	$-\sqrt{0,5}$	0	$+\sqrt{0,5}$	$+1$	$+\sqrt{0,5}$	0
$\cos x =$	-1	$-\sqrt{0,5}$	0	$+\sqrt{0,5}$	1	$+\sqrt{0,5}$	0	$-\sqrt{0,5}$	-1
$\operatorname{tg} x =$	0	$+1$	∞	-1	0	$+1$	∞	-1	0
$\operatorname{ctg} x =$	∞	$+1$	0	-1	∞	$+1$	0	-1	∞

$x =$	$y \pm 2^{\perp}$	$y \pm 1^{\perp}$	$-y$	$1^{\perp} \pm y$	$2^{\perp} \pm y$	$-1^{\perp} \pm y$
$\sin x =$	$-\sin y$	$\pm \cos y$	$-\sin y$	$\cos y$	$\mp \sin y$	$-\cos y$
$\cos x =$	$-\cos y$	$\mp \sin y$	$+\cos y$	$\mp \sin y$	$-\cos y$	$\pm \sin y$
$\operatorname{tg} x =$	$+\operatorname{tg} y$	$-\operatorname{ctg} y$	$-\operatorname{tg} y$	$\mp \operatorname{ctg} y$	$\pm \operatorname{tg} y$	$\mp \operatorname{ctg} y$
$\operatorname{ctg} x =$	$+\operatorname{ctg} y$	$-\operatorname{tg} y$	$-\operatorname{ctg} y$	$\mp \operatorname{tg} y$	$\pm \operatorname{ctg} y$	$\mp \operatorname{tg} y$

$$\sin^2 x = a^2 = 1 - b^2 = \frac{c^2}{1 + c^2} = \frac{1}{1 + d^2},$$

$$\cos^2 x = 1 - a^2 = b^2 = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{d^2}{1 + d^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{a^2}{1 - a^2} = \frac{1 - b^2}{b^2} = c^2 = \frac{1}{d^2},$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{1 - b^2} = \frac{1}{c^2} = d^2.$$

$$ix + y = ix i^y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \left| \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \right.$$

$$ix(i^y \pm i^{-y}) = ix + y \pm ix - y.$$

$$2 \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} y = \cos(x - y) \pm \cos(x + y) \quad \left| \quad 2 \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} y = \sin(x + y) \pm \sin(x - y) \right.$$

$$i^{2x} \pm i^{2y} = i^{x+y} (i^{x-y} \pm i^{y-x}),$$

$$\sin 2x \pm \sin 2y = 2 \frac{\sin}{\cos} (x+y) \frac{\cos}{\sin} (x-y),$$

$$\begin{aligned} \cos 2x \pm \cos 2y &= \pm 2 \frac{\cos}{\sin} (x+y) \frac{\cos}{\sin} (x-y) \\ &= 2 \left[\cos^2 x - \left(\frac{\sin}{\cos} y \right)^2 \right] = 2 \left[-\sin^2 x + \left(\frac{\cos}{\sin} y \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Es sei
Let $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \psi = \left| \frac{b}{a} \right|$, $0 < \frac{\varphi}{\psi} < 1$, $\varphi + \psi = 1$,

$a = |a| (-1)^\alpha$, $b = |b| (-1)^\beta$.
Dann ist
Then

$$a \cos x + b \sin x = r \cos [x - (-1)^{\alpha-\beta} \varphi + \alpha 2] = r \sin [x + (-1)^{\alpha-\beta} \psi + \beta 2].$$

Es sei
Let $p = 4 \cos^2 x$ und $q = 4 \sin^2 x$.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$2 \cos 2x = -2 + p = 2 - q,$$

$$2 \cos 4x = +2 - 4p + p^2 = 2 - 4q + q^2,$$

$$2 \cos 6x = -2 + 9p - 6p^2 + p^3 = 2 - 9q + 6q^2 - q^3,$$

$$2 \cos 8x = +2 - 16p + 20p^2 - 8p^3 + p^4 = 2 - 16q + 20q^2 - 8q^3 + q^4,$$

$$2 \cos (n+1)x = -2 \cos (n-1)x + p \frac{\cos nx}{\cos x}.$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = -3 + p = 1 - q,$$

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = +5 - 5p + p^2 = 1 - 3q + q^2,$$

$$\frac{\cos 7x}{\cos x} = -7 + 14p - 7p^2 + p^3 = 1 - 6q + 5q^2 - q^3,$$

$$\frac{\cos (n+1)x}{\cos x} = -\frac{\cos (n-1)x}{\cos x} + 2 \cos nx.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = -2 + p = 2 - q,$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = +3 - 4p + p^2 = 3 - 4q + q^2,$$

$$\frac{\sin 8x}{\sin 2x} = -4 + 10p - 6p^2 + p^3 = 4 - 10q + 6q^2 - q^3,$$

$$\frac{\sin (n+1)x}{\sin 2x} = +\frac{\sin (n-1)x}{\sin 2x} + \frac{\cos nx}{\cos x}.$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = -1 + p = 3 - q,$$

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = +1 - 3p + p^2 = 5 - 5q + q^2,$$

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} = -1 + 6p - 5p^2 + p^3 = 7 - 14q + 7q^2 - q^3,$$

$$\frac{\sin (n+1)x}{\sin x} = +\frac{\sin (n-1)x}{\sin x} + 2 \cos nx.$$

Setzt man

| If one puts

$$\cos nx = T_n(\sqrt{p}/2) = T_n(v) \quad \text{und} \quad \sin nx = U_n(\sqrt{p}/2) = U_n(v),$$

so erhält man die Tschebyschewschen Polynome | one obtains the Chebyshev polynomials

$$T_n(v) \quad \text{und} \quad \frac{U_n(v)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Fouriersche Zerlegung der Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$: | Fourier's analysis of the powers of $\sin x$ and $\cos x$:

$$2 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = 1 \pm \cos 2x,$$

$$8 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^4 = 3 \pm 4 \cos 2x + \cos 4x,$$

$$32 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^6 = 10 \pm 15 \cos 2x + 6 \cos 4x \pm \cos 6x,$$

$$128 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^8 = 35 \pm 56 \cos 2x + 28 \cos 4x \pm 8 \cos 6x + \cos 8x,$$

$$2^{2n-1} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^{2n} = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \pm \binom{2n}{n-1} \cos 2x + \binom{2n}{n-2} \cos 4x \pm \dots$$

$$+ (\pm 1)^{n-1} \binom{2n}{1} \cos 2(n-1)x + (\pm 1)^n \cos 2nx.$$

$$4 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^3 = 3 \frac{\cos x}{\sin x} \pm \frac{\cos 3x}{\sin 3x},$$

$$16 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^5 = 10 \frac{\cos x}{\sin x} \pm 5 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin 5x},$$

$$64 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^7 = 35 \frac{\cos x}{\sin x} \pm 21 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + 7 \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \pm \frac{\cos 7x}{\sin 7x},$$

$$2^{2n} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^{2n+1} = \binom{2n+1}{n} \frac{\cos x}{\sin x} \pm \binom{2n+1}{n-1} \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + \binom{2n+1}{n-2} \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \pm \dots$$

$$+ (\pm 1)^{n-1} \binom{2n+1}{1} \frac{\cos (2n-1)x}{\sin (2n-1)x} + (\pm 1)^n \frac{\cos (2n+1)x}{\sin (2n+1)x}.$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{\sin 2x \pm \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} = \frac{-\cos 2x + \cos 2y}{\sin 2x \mp \sin 2y},$$

$$\operatorname{tg}(x+y) \operatorname{tg}(x-y) = \frac{-\cos 2x + \cos 2y}{\cos 2x + \cos 2y}, \quad \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{\operatorname{tg}(x-y)} = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y},$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}, \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x \mp y)}{\sin x \cos y}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}} = \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x,$$

$$\operatorname{tg}(0,5^\circ \pm x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}} = \operatorname{ctg}(0,5^\circ - x),$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}, \quad \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 3}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx} \arccos x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} = -\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x,$$

$$e^{px} \frac{d}{dx} e^{-px} \frac{\sin}{\cos} (qx + \beta) = -\sqrt{p^2 + q^2} \frac{\sin}{\cos} \left(qx + \beta - \operatorname{arctg} \frac{q}{p} \right),$$

$$= \pm \sqrt{p^2 + q^2} \frac{\cos}{\sin} \left(qx + \beta + \operatorname{arctg} \frac{p}{q} \right),$$

$$\frac{d}{dx} i^x = \frac{\pi}{2} i^{x+1}.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x, \quad \int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x,$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \quad \int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}, \quad \int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

$$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b+cx}{\sqrt{ac+b^2}},$$

$$\int dx \sqrt{a-2bx-cx^2} = \frac{b+cx}{2c} \sqrt{a-2bx-cx^2} + \frac{ac+b^2}{2c\sqrt{c}} \arcsin \frac{b+cx}{\sqrt{ac+b^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2-2bx-c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \frac{bx+c}{x\sqrt{ac+b^2}},$$

$$\int i^x dx = \frac{2}{\pi} i^{x-1}.$$

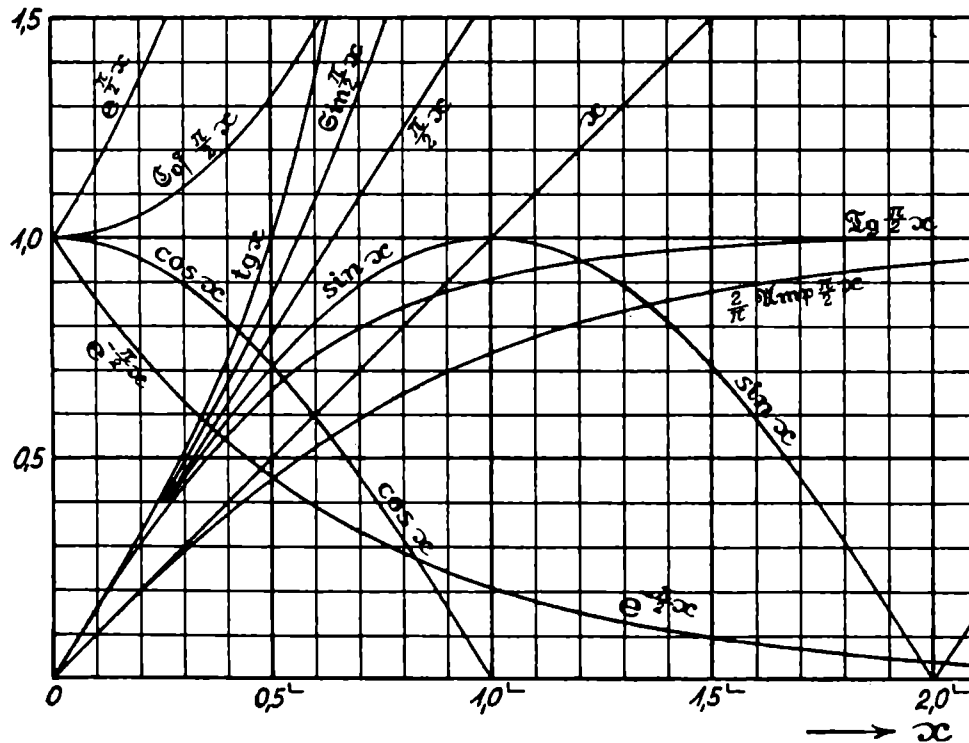


Fig. 41. Winkel in Rechten. Angles in quadrants

x	$\sin x$	$\cos x$		x	$\operatorname{tg} x$		x	$\operatorname{tg} x$	
0°	0,0 00000	1,0 000	90°	0,0°	0,0 00000	90,0°	23,0°	0,4 245	67,0°
1°	17452	0,9 998	89°	0,5°	08727	89,5°	23,5°	348	66,5°
2°	3490	994	88°	1,0°	17455	89,0°	24,0°	452	66,0°
3°	5234	986	87°	1,5°	26186	88,5°	24,5°	557	65,5°
4°	6976	976	86°	2,0°	3492	88,0°	25,0°	663	65,0°
5°	0,0 8716	962	85°	2,5°	4366	87,5°	25,5°	770	64,5°
6°	0,1 0453	945	84°	3,0°	5241	87,0°	26,0°	877	64,0°
7°	2187	925	83°	3,5°	6116	86,5°	26,5°	0,4 986	63,5°
8°	3917	903	82°	4,0°	6993	86,0°	27,0°	0,5 095	63,0°
9°	5643	877	81°	4,5°	7870	85,5°	27,5°	206	62,5°
10°	7365	848	80°	5,0°	8749	85,0°	28,0°	317	62,0°
11°	0,1 9081	816	79°	5,5°	0,0 9629	84,5°	28,5°	430	61,5°
12°	0,2 0791	781	78°	6,0°	0,1 0510	84,0°	29,0°	543	61,0°
13°	2495	744	77°	6,5°	1394	83,5°	29,5°	658	60,5°
14°	4192	703	76°	7,0°	2278	83,0°	30,0°	774	60,0°
15°	5882	659	75°	7,5°	3165	82,5°	30,5°	0,5 890	59,5°
16°	7564	613	74°	8,0°	4054	82,0°	31,0°	0,6 009	59,0°
17°	0,2 9237	563	73°	8,5°	4945	81,5°	31,5°	128	58,5°
18°	0,3 090	511	72°	9,0°	5838	81,0°	32,0°	249	58,0°
19°	256	455	71°	9,5°	6734	80,5°	32,5°	371	57,5°
20°	420	397	70°	10,0°	7633	80,0°	33,0°	494	57,0°
21°	584	336	69°	10,5°	8534	79,5°	33,5°	619	56,5°
22°	746	272	68°	11,0°	0,1 9438	79,0°	34,0°	745	56,0°
23°	0,3 907	205	67°	11,5°	0,2 0345	78,5°	34,5°	0,6 873	55,5°
24°	0,4 067	135	66°	12,0°	1256	78,0°	35,0°	0,7 002	55,0°
25°	226	0,9 063	65°	12,5°	2169	77,5°	35,5°	133	54,5°
26°	384	0,8 988	64°	13,0°	3087	77,0°	36,0°	265	54,0°
27°	540	910	63°	13,5°	4008	76,5°	36,5°	400	53,5°
28°	695	829	62°	14,0°	4933	76,0°	37,0°	536	53,0°
29°	0,4 848	746	61°	14,5°	5862	75,5°	37,5°	673	52,5°
30°	0,5 000	660	60°	15,0°	6795	75,0°	38,0°	813	52,0°
31°	150	572	59°	15,5°	7732	74,5°	38,5°	0,7 954	51,5°
32°	299	480	58°	16,0°	8675	74,0°	39,0°	0,8 098	51,0°
33°	446	387	57°	16,5°	0,2 9621	73,5°	39,5°	243	50,5°
34°	592	290	56°	17,0°	0,3 057	73,0°	40,0°	391	50,0°
35°	736	192	55°	17,5°	153	72,5°	40,5°	541	49,5°
36°	0,5 878	0,8 090	54°	18,0°	249	72,0°	41,0°	693	49,0°
37°	0,6 018	0,7 986	53°	18,5°	346	71,5°	41,5°	0,8 847	48,5°
38°	157	880	52°	19,0°	443	71,0°	42,0°	0,9 004	48,0°
39°	293	771	51°	19,5°	541	70,5°	42,5°	163	47,5°
40°	428	660	50°	20,0°	640	70,0°	43,0°	325	47,0°
41°	561	547	49°	20,5°	739	69,5°	43,5°	490	46,5°
42°	691	431	48°	21,0°	839	69,0°	44,0°	657	46,0°
43°	820	314	47°	21,5°	0,3 939	68,5°	44,5°	0,9 827	45,5°
44°	0,6 947	193	46°	22,0°	0,4 040	68,0°	45,0°	1,0 000	45,0°
45°	0,7 071	0,7 071	45°	22,5°	0,4 142	67,5°			
	$\cos y$	$\sin y$	y		$\operatorname{ctg} y$	y		$\operatorname{ctg} y$	y

$$\operatorname{tg}(45^\circ + v) = 1 : \operatorname{tg}(45^\circ - v) \quad \operatorname{ctg}(45^\circ - v) = 1 : \operatorname{ctg}(45^\circ + v)$$

x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$		x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$		x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$	
0°	0,000	1,414	90°	15°	0,259	0,966	75°	30°	0,500	0,866	60°
1°	0,017	1,413	89°	16°	0,275	0,961	74°	31°	0,515	0,857	59°
2°	0,035	1,412	88°	17°	0,291	0,956	73°	32°	0,530	0,848	58°
3°	0,052	1,411	87°	18°	0,308	0,951	72°	33°	0,545	0,839	57°
4°	0,069	1,410	86°	19°	0,324	0,946	71°	34°	0,560	0,830	56°
5°	0,087	1,409	85°	20°	0,341	0,941	70°	35°	0,575	0,821	55°
6°	0,104	1,408	84°	21°	0,357	0,936	69°	36°	0,590	0,812	54°
7°	0,121	1,407	83°	22°	0,374	0,931	68°	37°	0,605	0,803	53°
8°	0,138	1,406	82°	23°	0,390	0,926	67°	38°	0,620	0,794	52°
9°	0,155	1,405	81°	24°	0,406	0,921	66°	39°	0,635	0,785	51°
10°	0,172	1,404	80°	25°	0,423	0,916	65°	40°	0,650	0,776	50°
11°	0,188	1,403	79°	26°	0,439	0,911	64°	41°	0,665	0,767	49°
12°	0,205	1,402	78°	27°	0,456	0,906	63°	42°	0,680	0,758	48°
13°	0,222	1,401	77°	28°	0,472	0,901	62°	43°	0,695	0,749	47°
14°	0,239	1,400	76°	29°	0,488	0,896	61°	44°	0,710	0,740	46°
15°	0,256	1,399	75°	30°	0,505	0,891	60°	45°	0,725	0,731	45°
	0,	1,			0,	1,			0,	1,	
	$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y		$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y		$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y

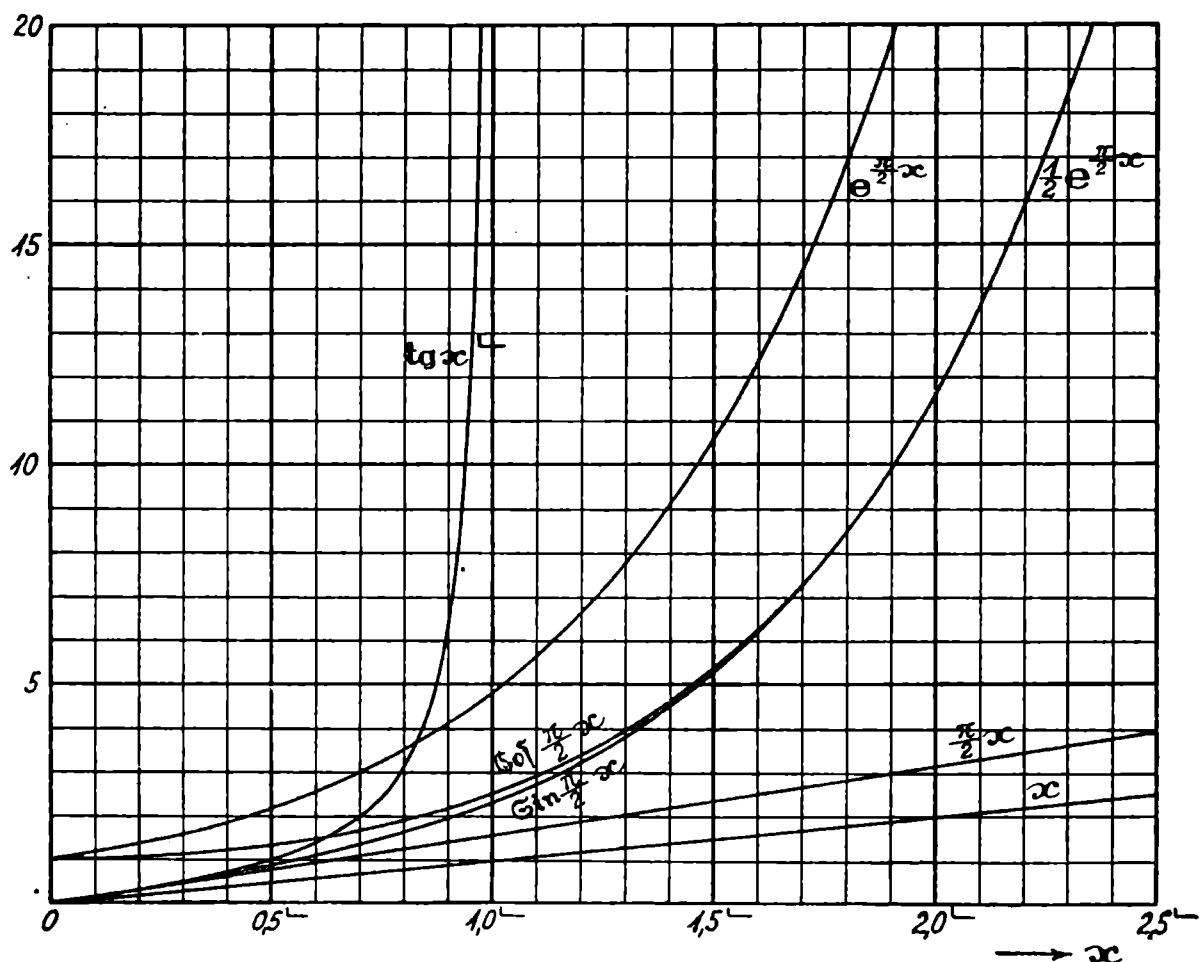


Fig. 42. Winkel in Rechten. Angles in quadrants

x	10^x = num x	$10^{-x} = 0,1$ $\times$ num $(1-x)$	$1-x$
0,00	1,0000	1,0000	1,00
1	0233 ²³³	0,9772 ²²²	0,99
2	0471 ²³⁸	550 ²¹⁸	8
3	0715 ²⁴⁴	332 ²¹²	7
4	0965 ²⁵⁰	0,9120 ²⁰⁸	6
5	1220 ²⁶¹	0,8912 ²⁰³	5
6	1481 ²⁶⁸	709 ¹⁹⁸	4
7	1749 ²⁷⁴	511 ¹⁹⁴	3
8	2023 ²⁸⁰	317 ¹⁸⁹	2
0,09	2303 ²⁸⁷	0,8128 ¹⁸⁵	1
0,10	2590	0,7943 ¹⁸¹	0,90
1	2883 ²⁹³	762 ¹⁷⁷	0,89
2	3183 ³⁰⁰	585 ¹⁷²	8
3	3490 ³⁰⁷	413 ¹⁶⁹	7
4	3804 ³¹⁴	244 ¹⁶⁵	6
5	4125 ³²⁹	0,7079 ¹⁶¹	5
6	4454 ³³⁷	0,6918 ¹⁵⁸	4
7	4791 ³⁴⁵	760 ¹⁵⁴	3
8	5136 ³⁵²	606 ¹⁵⁰	2
0,19	5488 ³⁶¹	456 ¹⁴⁷	1
0,20	5849	309 ¹⁴³	0,80
1	6218 ³⁶⁹	166 ¹⁴¹	0,79
2	6596 ³⁷⁸	0,6025 ¹³⁷	8
3	6983 ³⁸⁷	0,5888 ¹³⁴	7
4	7378 ³⁹⁵	754 ¹³¹	6
5	7783 ⁴⁰⁵	623 ¹²⁸	5
6	8197 ⁴¹⁴	495 ¹²⁵	4
7	8621 ⁴²⁴	370 ¹²²	3
8	9055 ⁴³⁴	248 ¹²⁰	2
0,29	9498 ⁴⁴³	128 ¹¹⁷	1
0,30	1,9953 ⁴⁵⁵	0,5011 ¹¹⁴	0,70
1	2,0417 ⁴⁶⁴	0,4897 ¹¹¹	0,69
2	0893 ⁴⁷⁶	786 ¹⁰⁹	8
3	1380 ⁴⁸⁷	677 ¹⁰⁷	7
4	1878 ⁴⁹⁸	570 ¹⁰⁴	6
5	2387 ⁵⁰⁹	466 ¹⁰¹	5
6	2909 ⁵²²	365 ¹⁰⁰	4
7	3442 ⁵³³	265 ⁹⁷	3
8	3988 ⁵⁴⁶	168 ⁹⁵	2
0,39	4547 ⁵⁵⁹	0,4073 ⁹²	1
0,40	5119 ⁵⁷²	0,3981 ⁹¹	0,60
1	5704 ⁵⁸⁵	890 ⁸⁹	0,59
2	6303 ⁵⁹⁹	801 ⁸⁶	8
3	6915 ⁶¹²	715 ⁸⁵	7
4	7542 ⁶²⁷	630 ⁸²	6
5	8184 ⁶⁴²	548 ⁸¹	5
6	8840 ⁶⁵⁶	467 ⁷⁹	4
7	2,9512 ⁶⁷²	388 ⁷⁷	3
8	3,020 ⁶⁹	311 ⁷⁵	2
0,49	090 ⁷⁰	236 ⁷⁴	1
0,50	3,162	0,3162	0,50
$1-y$	10^{1-y} = num $(1-y)$	$10^{y-1} = 0,1$ $\times$ num y	y

α	$1 - \cos \alpha$	α	$1 - \cos \alpha$
0,5°	0,00003808	9,0°	0,012312 ²⁷⁶
1,0°	15231	2	2864 ²⁸²
1,5°	3427	4	3428 ²⁸⁸
2,0°	0,0006092 ⁶²⁴	6	4004 ²⁹⁴
1	6716 ⁶⁵⁵	8	4592 ³⁰⁰
2	7371 ⁶⁸⁵	10,0°	5192 ³¹⁰⁶
3	8056 ⁷¹⁶	5	6745 ³²⁵⁶
4	8772 ⁷⁴⁶	11,0°	8373 ³⁴⁰⁴
5	9518 ⁷⁷⁶	5	0,020075 ³⁵⁵⁴
6	0,0010294 ⁸⁰⁷	12,0°	1852 ³⁷⁰⁴
7	1101 ⁸³⁸	5	3704 ³⁸⁵²
8	1939 ⁸⁶⁸	13,0°	5630 ⁴⁰⁰⁰
9	2807 ⁸⁹⁸	5	7630 ⁴¹⁴⁸
3,0°	3705 ⁹²⁸	14,0°	9704 ⁴³⁰
1	4633 ⁹⁵⁹	5	0,03185 ⁴⁴⁴
2	5592 ⁹⁹⁰	15,0°	407 ⁴⁶⁰
3	6582 ¹⁰²⁰	5	637 ⁴⁷⁴
4	7602 ¹⁰⁵⁰	16,0°	874 ⁴⁸⁸
5	8652 ¹⁰⁸¹	5	0,04118 ⁵⁰⁴
6	9733 ¹¹¹¹	17,0°	370 ⁵¹⁶
7	0,0020844 ¹¹⁴¹	5	628 ⁵³²
8	1985 ¹¹⁷²	18,0°	894 ⁵⁴⁸
9	3157 ¹²⁰²	5	0,05168 ⁵⁶⁰
4,0°	4359 ¹²⁴⁸	19,0°	448 ⁵⁷⁶
2	6855 ^{1308,5}	5	736 ⁵⁹⁰
4	9472 ¹³⁷	20°	0,06031 ⁶¹¹
6	0,003221 ¹⁴³	21°	6642 ⁶⁴⁰
8	507 ¹⁴⁹	22°	7282 ⁶⁶⁸
5,0°	0,003805 ^{155,5}	23°	7950 ⁶⁹⁵
2	4116 ¹⁶¹	24°	8645 ⁷²⁴
4	4438 ^{167,5}	25°	9369 ⁷⁵²
6	4773 ¹⁷³	26°	0,10121 ⁷⁷⁸
8	5119 ^{179,5}	27°	0899 ⁸⁰⁶
6,0°	5478 ^{185,5}	28°	1705 ⁸³³
2	5849 ^{191,5}	29°	2538 ⁸⁵⁹
4	6232 ^{197,5}	30°	3397 ⁸⁸⁶
6	6627 ²⁰⁴	31°	4283 ⁹¹²
8	7035 ^{209,5}	32°	5195 ⁹³⁸
7,0°	7454 ^{215,5}	33°	6133 ⁹⁶³
2	7885 ²²²	34°	7096 ⁹⁸⁹
4	8329 ²²⁸	35°	8085 ¹⁰¹³
6	8785 ^{233,5}	36°	9098 ¹⁰³⁸
8	9252 ²⁴⁰	37°	0,20136
8,0°	9732 ²⁴⁶		
2	0,010224 ²⁵²		
4	0728 ²⁵⁸		
6	1244 ²⁶⁴		
8	1772 ²⁷⁰		
9,0°	0,012312		

Für $\alpha < 2^\circ$ berechne
For $\alpha < 2^\circ$ compute

$$f(\alpha) = 1 - \cos \alpha^\circ = 1,5231 \left(\frac{\alpha}{100} \right)^2.$$

$4^\circ < \alpha$:

$$f(\alpha_0 + h) = f(\alpha_0) + \frac{1}{100} \frac{h}{100}.$$

$$f(\alpha_0 + h) = f(\alpha_0) + 1,7454 \frac{h}{100} \sin(\alpha_0 + \frac{1}{2}h)^\circ.$$

x	$\text{Amp } \frac{\pi}{2} x$	$\sin x^\perp$	$\text{Sin } \frac{\pi}{2} x$	$i^x = e^{-\frac{\pi}{2} x}$	$\cos x^\perp$	$\text{Cos } \frac{\pi}{2} x$	$i^{-ix} = e^{\frac{\pi}{2} x}$	
Rechte	Rechte							
0,00	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁵⁷¹	0 0000 ¹⁵⁷¹	—	—	00 00 ¹	1,0 000 ¹⁵⁸	1,00
1	1000 ¹⁰⁰⁰	1571 ¹⁵⁷⁰	1571 ¹⁵⁷¹	9 844 ¹⁵³	99 99 ⁴	01 ⁴	158 ¹⁶¹	0,99
2	2000 ⁹⁹⁹	3141 ¹⁵⁷⁰	3142 ¹⁵⁷²	691 ¹⁵¹	95 ⁶	05 ⁶	319 ¹⁶⁴	8
3	2999 ⁹⁹⁸	4711 ¹⁵⁶⁸	4714 ¹⁵⁷³	540 ¹⁴⁹	89 ⁹	11 ⁹	483 ¹⁶⁶	7
4	3997 ⁹⁹⁸	6279 ¹⁵⁶⁷	6287 ¹⁵⁷⁵	391 ¹⁴⁶	80 ¹¹	20 ¹¹	649 ¹⁶⁸	6
5	4995 ⁹⁹⁶	7846 ¹⁵⁶⁵	7862 ¹⁵⁷⁷	245 ¹⁴⁴	69 ¹³	31 ¹³	817 ¹⁷¹	5
6	5991 ⁹⁹⁵	9411 ¹⁵⁶²	9439 ¹⁵⁷⁹	101 ¹⁴²	56 ¹⁶	44 ¹⁶	988 ¹⁷⁴	4
7	6986 ⁹⁹³	1 0973 ¹⁵⁶⁰	1 1018 ¹⁵⁸¹	8 959 ¹⁴⁰	40 ¹⁹	60 ¹⁹	1,1 162 ¹⁷⁷	3
8	7979 ⁹⁹¹	2533 ¹⁵⁵⁷	2599 ¹⁵⁸⁴	819 ¹³⁷	21 ²¹	79 ²¹	339 ¹⁸⁰	2
9	8970 ⁹⁸⁹	4090 ¹⁵⁵³	4183 ¹⁵⁸⁹	682 ¹³⁶	99 00 ²³	01 00 ²³	519 ¹⁸²	1
0,10	9959 ⁹⁸⁷	5643 ¹⁵⁵⁰	5772 ¹⁵⁹²	546 ¹³³	98 77 ²⁶	24 ²⁶	701 ¹⁸⁵	0,90
1	1 0946 ⁹⁸⁴	7193 ¹⁵⁴⁵	7364 ¹⁵⁹⁷	413 ¹³¹	51 ²⁸	50 ²⁸	886 ¹⁸⁸	0,89
2	1930 ⁹⁸¹	1 8738 ¹⁵⁴¹	8961 ¹⁶⁰¹	282 ¹²⁹	98 23 ³¹	78 ³¹	1,2 074 ¹⁹²	8
3	2911 ⁹⁷⁸	2 0279 ¹⁵³⁵	2 0562 ¹⁶⁰⁷	153 ¹²⁷	97 92 ³³	02 09 ³³	266 ¹⁹⁴	7
4	3889 ⁹⁷⁴	1814 ¹⁵³¹	2169 ¹⁶¹¹	026 ¹²⁵	59 ³⁵	43 ³⁵	460 ¹⁹⁷	6
5	4863 ⁹⁷¹	3345 ¹⁵²⁴	3780 ¹⁶¹⁸	7 901 ¹²³	97 24 ³⁸	79 ³⁶	657 ²⁰⁰	5
6	5834 ⁹⁶⁸	4869 ¹⁵¹⁸	5398 ¹⁶²⁴	778 ¹²¹	96 86 ⁴⁰	03 18 ³⁹	857 ²⁰⁴	4
7	6802 ⁹⁶³	6387 ¹⁵¹²	7022 ¹⁶³¹	657 ¹²⁰	46 ⁴³	59 ⁴¹	1,3 061 ²⁰⁷	3
8	7765 ⁹⁵⁹	7899 ¹⁵⁰⁵	8653 ¹⁶⁴	537 ¹¹⁷	96 03 ⁴⁵	04 02 ⁴⁷	268 ²¹⁰	2
9	8724 ⁹⁵⁵	2 9404 ¹⁵⁰	3 029 ¹⁶⁵	420 ¹¹⁶	9 558 ⁴⁷	49 ⁴⁹	478 ²¹³	1
0,20	9679 ⁹⁵⁰	3 090 ¹⁴⁹	194 ¹⁶⁵	304 ¹¹⁴	511 ⁵⁰	98 ⁵¹	691 ²¹⁷	0,80
1	2 0629 ⁹⁴⁶	239 ¹⁴⁸	359 ¹⁶⁶	190 ¹¹²	461 ⁵²	0 549 ⁵⁴	908 ²²⁰	0,79
2	1575 ⁹⁴¹	387 ¹⁴⁸	525 ¹⁶⁷	078 ¹¹⁰	409 ⁵⁵	603 ⁵⁷	1,4 128 ²²⁴	8
3	2516 ⁹³⁵	535 ¹⁴⁶	692 ¹⁶⁸	6 968 ¹⁰⁹	354 ⁵⁶	660 ⁶⁰	352 ²²⁷	7
4	3451 ⁹³⁰	681 ¹⁴⁶	860 ¹⁶⁹	859 ¹⁰⁷	298 ⁵⁹	720 ⁶¹	579 ²³¹	6
5	4381 ⁹²⁴	827 ¹⁴⁴	4 029 ¹⁷⁰	752 ¹⁰⁵	239 ⁶¹	781 ⁶⁵	810 ²³⁴	5
6	5305 ⁹²⁰	3 971 ¹⁴⁴	199 ¹⁷¹	647 ¹⁰³	178 ⁶⁴	846 ⁶⁷	1,5 044 ²³⁸	4
7	6225 ⁹¹³	4 115 ¹⁴³	370 ¹⁷¹	544 ¹⁰²	114 ⁶⁶	913 ⁷⁰	282 ²⁴²	3
8	7138 ⁹⁰⁷	258 ¹⁴¹	541 ¹⁷³	442 ¹⁰¹	9 048 ⁶⁸	983 ⁷³	524 ²⁴⁶	2
9	8045 ⁹⁰²	399 ¹⁴¹	714 ¹⁷⁵	341 ⁹⁹	8 980 ⁷⁰	1 056 ⁷⁵	770 ²⁵⁰	1
0,30	8947 ⁸⁹⁴	540 ¹³⁹	889 ¹⁷⁵	242 ⁹⁷	910 ⁷²	131 ⁷⁸	1,6 020 ²⁵³	0,70
1	9841 ⁸⁹	679 ¹³⁹	5 064 ¹⁷⁷	145 ⁹⁶	838 ⁷⁵	209 ⁸¹	273 ²⁵⁸	0,69
2	3 073 ⁸⁸	818 ¹³⁷	241 ¹⁷⁸	049 ⁹⁴	763 ⁷⁷	290 ⁸⁴	531 ²⁶²	8
3	161 ⁸⁸	4 955 ¹³⁵	419 ¹⁷⁹	5 955 ⁹³	686 ⁷⁹	374 ⁸⁶	793 ²⁶⁶	7
4	249 ⁸⁷	5 090 ¹³⁵	598 ¹⁸¹	862 ⁹¹	607 ⁸¹	460 ⁹⁰	1,7 059 ²⁷⁰	6
5	336 ⁸⁶	225 ¹³³	779 ¹⁸²	771 ⁹⁰	526 ⁸³	550 ⁹²	329 ²⁷⁴	5
6	422 ⁸⁵	358 ¹³²	961 ¹⁸⁴	681 ⁸⁹	443 ⁸⁵	642 ⁹⁵	603 ²⁷⁹	4
7	507 ⁸⁵	490 ¹³⁰	6 145 ¹⁸⁵	592 ⁸⁷	358 ⁸⁷	737 ⁹⁸	882 ²⁸³	3
8	592 ⁸⁴	621 ¹³⁰	330 ¹⁸⁷	505 ⁸⁶	271 ⁸⁹	835 ¹⁰¹	1,8 165 ²⁸⁷	2
9	676 ⁸⁴	750 ¹²⁸	517 ¹⁸⁸	419 ⁸⁴	182 ⁹²	936 ¹⁰⁴	452 ²⁹³	1
0,40	760 ⁸³	5 878 ¹²⁶	705 ¹⁹⁰	335 ⁸³	8 090 ⁹³	2 040 ¹⁰⁷	745 ²⁹⁶	0,60
1	843 ⁸²	6 004 ¹²⁵	895 ¹⁹²	252 ⁸²	7 997 ⁹⁵	147 ¹⁰⁹	1,9 041 ³⁰²	0,59
2	925 ⁸¹	129 ¹²³	7 087 ¹⁹³	170 ⁸¹	902 ⁹⁸	256 ¹¹³	343 ³⁰⁶	8
3	4 006 ⁸⁰	252 ¹²²	280 ¹⁹⁵	089 ⁷⁹	804 ⁹⁹	369 ¹¹⁶	649 ³¹¹	7
4	086 ⁸⁰	374 ¹²⁰	475 ¹⁹⁷	010 ⁷⁸	705 ¹⁰¹	485 ¹¹⁹	960 ³¹⁶	6
5	166 ⁷⁹	494 ¹¹⁹	672 ¹⁹⁹	4 932 ⁷⁷	604 ¹⁰³	604 ¹²²	2,0 276 ³²¹	5
6	245 ⁷⁸	613 ¹¹⁷	871 ²⁰¹	855 ⁷⁶	501 ¹⁰⁵	726 ¹²⁵	597 ³²⁶	4
7	323 ⁷⁷	730 ¹¹⁵	8 072 ²⁰³	779 ⁷⁴	396 ¹⁰⁶	851 ¹²⁹	923 ³³¹	3
8	400 ⁷⁷	845 ¹¹⁴	275 ²⁰⁵	705 ⁷³	290 ¹⁰⁹	980 ¹³¹	2,1 254 ³³⁷	2
9	477 ⁷⁶	6 959 ¹¹²	480 ²⁰⁷	632 ⁷³	181 ¹¹⁰	3 111 ¹³⁵	591 ³⁴²	1
0,50	4 553	7 071	8 687	4 559	7 071	3 246	2,1 933	0,50
	Rechte							
		$\cos y^\perp$			$\sin y^\perp$			y

VIII. Winkel in Rechten
VIII. Angles in quadrants

81

$e^{\frac{\pi}{2}x}$ $= i^{-ix}$	$\cos \frac{\pi}{2}x$	$\sin \frac{\pi}{2}x$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$ $= i^{ix}$	x	$e^{\frac{\pi}{2}x}$ $= i^{-ix}$	$\cos \frac{\pi}{2}x$	$\sin \frac{\pi}{2}x$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$ $= i^{ix}$
			0,					0,
2, 1933 ³⁴⁷	1,3 246 ¹³⁸	0,8 687 ²⁰⁹	4 559 ⁷¹	1,00	4, 811 ⁷⁶	2, 5092 ³⁶⁵	2, 3013 ³⁹⁷	2 0788 ³²⁴
2280 ³⁵³	384 ¹⁴²	896 ²¹¹	488 ⁷⁰	1	887 ⁷⁷	5457 ³⁷⁰	3410 ⁴⁰³	0464 ³¹⁹
2633 ³⁵⁸	526 ¹⁴⁴	0,9 107 ²¹⁴	418 ⁶⁸	2	964 ⁷⁸	5827 ³⁷⁸	3813 ⁴⁰⁸	0145 ³¹⁴
2991 ³⁶⁴	670 ¹⁴⁸	321 ²¹⁶	350 ⁶⁸	3	5, 042 ⁸⁰	6205 ³⁸³	4221 ⁴¹⁵	1 9831 ³⁰⁹
3355 ³⁷⁰	818 ¹⁵²	537 ²¹⁸	282 ⁶⁷	4	122 ⁸¹	6588 ³⁹¹	4636 ⁴²¹	9522 ³⁰⁴
3725 ³⁷⁵	970 ¹⁵⁵	755 ²²¹	215 ⁶⁶	5	203 ⁸³	6979 ³⁹⁶	5057 ⁴²⁷	9218 ³⁰⁰
4100 ³⁸²	1,4 125 ¹⁵⁸	976 ²²³	149 ⁶⁴	6	286 ⁸⁴	7375 ⁴⁰⁴	5484 ⁴³³	8918 ²⁹⁵
4482 ³⁸⁸	283 ¹⁶²	1,0 199 ²²⁵	085 ⁶⁴	7	370 ⁸⁵	7779 ⁴¹¹	5917 ⁴³⁹	8623 ²⁹⁰
4870 ³⁹³	445 ¹⁶⁶	424 ²²⁸	021 ⁶³	8	455 ⁸⁶	8190 ⁴¹⁷	6356 ⁴⁴⁶	8333 ²⁸⁶
5263 ⁴⁰⁰	611 ¹⁶⁹	652 ²³¹	3 958 ⁶¹	9	541 ⁸⁸	8607 ⁴²⁵	6802 ⁴⁵³	8047 ²⁸¹
5663 ⁴⁰⁷	780 ¹⁷³	883 ²³⁴	897 ⁶¹	1,10	629 ⁸⁹	9032 ⁴³¹	7255 ⁴⁶⁰	7766 ²⁷⁷
6070 ⁴¹²	953 ¹⁷⁵	1,1 117 ²³⁶	836 ⁶⁰	1	718 ⁹⁰	9463 ⁴³⁹	7715 ⁴⁶⁶	7489 ²⁷²
6482 ⁴²⁰	1,5 129 ¹⁸⁰	353 ²³⁹	776 ⁵⁹	2	808 ⁹²	9902 ⁴⁵	8181 ⁴⁷³	7217 ²⁶⁹
6902 ⁴²⁶	309 ¹⁸⁴	592 ²⁴²	717 ⁵⁸	3	900 ⁹⁴	3, 035 ⁴⁵	8654 ⁴⁸⁰	6948 ²⁶⁴
7328 ⁴³²	493 ¹⁸⁸	834 ²⁴⁵	659 ⁵⁷	4	994 ⁹⁵	080 ⁴⁶	9134 ⁴⁸⁸	6684 ²⁶⁰
7760 ⁴⁴⁰	681 ¹⁹²	1,2 079 ²⁴⁸	602 ⁵⁶	5	6, 089 ⁹⁶	126 ⁴⁷	9622 ⁵⁰	6424 ²⁵⁶
8200 ⁴⁴⁶	873 ¹⁹⁶	327 ²⁵¹	546 ⁵⁵	6	185 ⁹⁸	173 ⁴⁸	3, 012 ⁵⁰	6168 ²⁵²
8646 ⁴⁵⁴	1,6 069 ¹⁹⁹	578 ²⁵⁴	491 ⁵⁵	7	283 ⁹⁹	221 ⁴⁹	062 ⁵¹	5916 ²⁴⁸
9100 ⁴⁶⁰	268 ²⁰⁴	832 ²⁵⁷	436 ⁵³	8	382 ¹⁰¹	270 ⁴⁹	113 ⁵²	5668 ²⁴⁴
9560 ⁴⁷	472 ²⁰⁷	1,3 089 ²⁶⁰	383 ⁵³	9	483 ¹⁰³	319 ⁵⁰	165 ⁵²	5424 ²⁴⁰
3, 003 ⁴⁷	679 ²¹²	349 ²⁶⁴	330 ⁵²	1,20	586 ¹⁰⁴	369 ⁵¹	217 ⁵³	5184 ²³⁷
050 ⁴⁹	891 ²¹⁶	613 ²⁶⁷	278 ⁵¹	1	690 ¹⁰⁶	420 ⁵²	270 ⁵⁵	4947 ²³³
099 ⁴⁹	1,7 107 ²²⁰	880 ²⁷⁰	227 ⁵⁰	2	796 ¹⁰⁸	472 ⁵²	325 ⁵⁵	4714 ²²⁹
148 ⁵⁰	327 ²²⁵	1,4 150 ²⁷⁴	177 ⁵⁰	3	904 ¹⁰⁹	524 ⁵⁴	380 ⁵⁵	4485 ²²⁶
198 ⁵⁰	552 ²²⁸	424 ²⁷⁸	127 ⁴⁸	4	7, 013 ¹¹¹	578 ⁵⁴	435 ⁵⁷	4259 ²²²
248 ⁵²	780 ²³³	702 ²⁸¹	079 ⁴⁸	5	124 ¹¹³	632 ⁵⁶	492 ⁵⁷	4037 ²¹⁹
300 ⁵²	1,8 013 ²³⁸	983 ²⁸⁵	031 ⁴⁸	6	237 ¹¹⁵	688 ⁵⁶	549 ⁵⁹	3818 ²¹⁵
352 ⁵³	251 ²⁴²	1,5 268 ²⁸⁸	2 9834 ⁴⁶⁵	7	352 ¹¹⁶	744 ⁵⁷	608 ⁵⁹	3603 ²¹³
405 ⁵⁴	493 ²⁴⁷	556 ²⁹³	9369 ⁴⁵⁷	8	468 ¹¹⁸	801 ⁵⁸	667 ⁶⁰	3390 ²⁰⁸
459 ⁵⁵	740 ²⁵¹	849 ²⁹⁶	8912 ⁴⁵¹	9	586 ¹²⁰	859 ⁵⁹	727 ⁶¹	3182 ²⁰⁶
514 ⁵⁵	991 ²⁵⁶	1,6 145 ³⁰⁰	8461 ⁴⁴⁴	1,30	706 ¹²²	918 ⁶⁰	788 ⁶²	2976 ²⁰²
569 ⁵⁷	1,9 247 ²⁶¹	445 ³⁰⁵	8017 ⁴³⁶	1	828 ¹²⁴	978 ⁶¹	850 ⁶³	2774 ¹⁹⁹
626 ⁵⁷	508 ²⁶⁵	750 ³⁰⁸	7581 ⁴³⁰	2	952 ¹²⁶	4, 039 ⁶²	913 ⁶⁴	2575 ¹⁹⁶
683 ⁵⁸	773 ²⁷¹	1,7 058 ³¹³	7151 ⁴²³	3	8, 078 ¹²⁸	101 ⁶³	977 ⁶⁵	2379 ¹⁹³
741 ⁶⁰	2,0 044 ²⁷⁵	371 ³¹⁷	6728 ⁴¹⁷	4	206 ¹³⁰	164 ⁶⁴	4, 042 ⁶⁶	2186 ¹⁹⁰
801 ⁶⁰	319 ²⁸⁰	688 ³²¹	6311 ⁴¹⁰	5	336 ¹³²	228 ⁶⁵	108 ⁶⁷	1996 ¹⁸⁷
861 ⁶¹	599 ²⁸⁶	1,8 009 ³²⁶	5901 ⁴⁰⁴	6	468 ¹³⁴	293 ⁶⁶	175 ⁶⁸	1809 ¹⁸⁴
922 ⁶²	885 ²⁹⁰	335 ³³⁰	5497 ³⁹⁷	7	602 ¹³⁶	359 ⁶⁷	243 ⁶⁹	1625 ¹⁸¹
984 ⁶³	2,1 175 ²⁹⁶	665 ³³⁵	5100 ³⁹¹	8	738 ¹³⁸	426 ⁶⁹	312 ⁷⁰	1444 ¹⁷⁸
4, 047 ⁶⁴	471 ³⁰¹	1,9 000 ³⁴⁰	4709 ³⁸⁵	9	876 ¹⁴¹	495 ⁶⁹	382 ⁷¹	1266 ¹⁷⁶
111 ⁶⁵	772 ³⁰⁷	340 ³⁴⁴	4324 ³⁷⁹	1,40	9, 017 ¹⁴³	564 ⁷¹	453 ⁷²	1090 ¹⁷³
176 ⁶⁶	2,2 079 ³¹²	684 ³⁵⁰	3945 ³⁷⁴	1	160 ¹⁴⁵	635 ⁷¹	525 ⁷⁴	0917 ¹⁷⁰
242 ⁶⁸	391 ³¹⁷	2,0 034 ³⁵⁴	3571 ³⁶⁷	2	305 ¹⁴⁷	706 ⁷³	599 ⁷⁴	0747 ¹⁶⁷
310 ⁶⁸	708 ³²³	388 ³⁵⁹	3204 ³⁶²	3	452 ¹⁵⁰	779 ⁷⁴	673 ⁷⁶	0580 ¹⁶⁵
378 ⁶⁹	2,3 031 ³²⁹	747 ³⁶⁴	2842 ³⁵⁶	4	602 ¹⁵²	853 ⁷⁵	749 ⁷⁷	0415 ¹⁶³
447 ⁷¹	360 ³³⁴	2,1 111 ³⁷⁰	2486 ³⁵⁰	5	754 ¹⁵⁴	928 ⁷⁷	826 ⁷⁸	0252 ¹⁵⁹
518 ⁷¹	694 ³⁴¹	481 ³⁷⁵	2136 ³⁴⁵	6	908 ¹⁵⁷	5, 005 ⁷⁷	904 ⁷⁹	0093 ¹⁵⁸
589 ⁷³	2,4 035 ³⁴⁶	856 ³⁸⁰	1791 ³⁴⁰	7	10, 065 ¹⁵⁹	082 ⁷⁹	983 ⁸⁰	0 9935 ¹⁵⁴
662 ⁷⁴	381 ³⁵²	2,2 236 ³⁸⁶	1451 ³³⁴	8	224 ¹⁶²	161 ⁸⁰	5, 063 ⁸²	9781 ¹⁵³
736 ⁷⁵	733 ³⁵⁹	622 ³⁹¹	1117 ³²⁹	9	386 ¹⁶⁵	241 ⁸²	145 ⁸³	9628 ¹⁵⁰
4, 811	2,5 092	2,3 013	2 0788	1,50	10, 551	5, 323	5, 228	0 9478
			0,					0,

VIII. Winkel in Rechten
VIII. Angles in quadrants

x	$e^{\frac{\pi}{2}x}$ $= i^{-1x}$	$\cos \frac{\pi}{2}x$	$\sin \frac{\pi}{2}x$	$100 e^{-\frac{\pi}{2}x}$	x	$\frac{1}{10} e^{\frac{\pi}{2}x}$	$\cos \frac{\pi}{2}x$	$\sin \frac{\pi}{2}x$	$100 e^{-\frac{\pi}{2}x}$
Rechte					Rechte				
1,50	10, 551 ¹⁶⁷	5, 323 ⁸³	5, 228 ⁸⁴	9, 478 ¹⁴⁸	2,00	2, 3141 ³⁶⁶	11, 592 ¹⁸³	11, 549 ¹⁸⁴	4, 321 ⁶⁷
1	718 ¹⁶⁹	406 ⁸⁴	312 ⁸⁶	330 ¹⁴⁵	1	3507 ³⁷²	775 ¹⁸⁶	733 ¹⁸⁶	254 ⁶⁷
2	887 ¹⁷³	490 ⁸⁵	398 ⁸⁷	185 ¹⁴³	2	3879 ³⁷⁸	961 ¹⁸⁹	919 ¹⁸⁹	187 ⁶⁵
3	11, 060 ¹⁷⁵	575 ⁸⁷	485 ⁸⁸	042 ¹⁴¹	3	4257 ³⁸⁴	12, 150 ¹⁹¹	12, 108 ¹⁸⁹	122 ⁶⁴
4	235 ¹⁷⁸	662 ⁸⁸	573 ⁹⁰	8, 901 ¹³⁹	4	4641 ³⁹⁰	341 ¹⁹⁵	300 ¹⁹⁶	058 ⁶³
5	413 ¹⁸⁰	750 ⁹⁰	663 ⁹¹	762 ¹³⁶	5	5031 ³⁹⁷	536 ¹⁹⁸	496 ¹⁹⁸	3, 995 ⁶²
6	593 ¹⁸⁴	840 ⁹¹	754 ⁹²	626 ¹³⁵	6	5428 ⁴⁰²	734 ²⁰¹	694 ²⁰²	933 ⁶²
7	777 ¹⁸⁶	931 ⁹³	846 ⁹⁴	491 ¹³²	7	5830 ⁴⁰⁹	935 ²⁰⁴	896 ²⁰⁵	871 ⁶⁰
8	963 ¹⁹⁰	6, 024 ⁹⁴	940 ⁹⁵	359 ¹³⁰	8	6239 ⁴¹⁶	13, 139 ²⁰⁷	13, 101 ²⁰⁸	811 ⁵⁹
9	12, 153 ¹⁹²	118 ⁹⁵	6, 035 ⁹⁷	229 ¹²⁹	9	6655 ⁴²²	346 ²¹¹	309 ²¹¹	752 ⁵⁹
1,60	345 ¹⁹⁶	213 ⁹⁷	132 ⁹⁸	100 ¹²⁶	2,10	7077 ⁴²⁸	557 ²¹⁴	520 ²¹⁵	693 ⁵⁷
1	541 ¹⁹⁸	310 ⁹⁹	230 ¹⁰⁰	7, 974 ¹²⁴	1	7505 ⁴³⁶	771 ²¹⁷	735 ²¹⁸	636 ⁵⁷
2	739 ²⁰²	409 ¹⁰⁰	330 ¹⁰²	850 ¹²³	2	7941 ⁴⁴²	988 ²²¹	953 ²²¹	579 ⁵⁶
3	941 ²⁰⁵	509 ¹⁰²	432 ¹⁰³	727 ¹²⁰	3	8383 ⁴⁵⁰	14, 209 ²²⁵	14, 174 ²²⁵	523 ⁵⁵
4	13, 146 ²⁰⁸	611 ¹⁰³	535 ¹⁰⁵	607 ¹¹⁹	4	8833 ⁴⁵⁶	434 ²²⁸	399 ²²⁸	468 ⁵⁴
5	354 ²¹¹	714 ¹⁰⁶	640 ¹⁰⁶	488 ¹¹⁶	5	9289 ⁴⁶⁴	662 ²³¹	627 ²³³	414 ⁵³
6	565 ²¹⁵	820 ¹⁰⁶	746 ¹⁰⁸	372 ¹¹⁵	6	9753 ⁴⁷	893 ²³⁵	860 ²³⁵	361 ⁵²
7	780 ²¹⁸	926 ¹⁰⁹	854 ¹⁰⁹	257 ¹¹³	7	3, 022 ⁴⁸	15, 128 ²³⁹	15, 095 ²⁴⁰	309 ⁵²
8	998 ²²²	7, 035 ¹¹⁰	963 ¹¹²	144 ¹¹²	8	070 ⁴⁹	367 ²⁴³	335 ²⁴³	257 ⁵¹
9	14, 220 ²²⁵	145 ¹¹²	7, 075 ¹¹³	032 ¹⁰⁹	9	119 ⁴⁹	610 ²⁴⁶	578 ²⁴⁸	206 ⁵⁰
1,70	445 ²²⁹	257 ¹¹⁴	188 ¹¹⁵	6, 923 ¹⁰⁸	2,20	168 ⁵⁰	856 ²⁵¹	826 ²⁵⁰	156 ⁴⁹
1	674 ²³²	371 ¹¹⁶	303 ¹¹⁷	815 ¹⁰⁶	1	218 ⁵¹	16, 107 ²⁵⁵	16, 076 ²⁵⁵	107 ⁴⁸
2	906 ²³⁶	487 ¹¹⁷	420 ¹¹⁸	709 ¹⁰⁵	2	269 ⁵²	362 ²⁵⁸	331 ²⁵⁹	059 ⁴⁸
3	15, 142 ²⁴⁰	604 ¹¹⁹	538 ¹²⁰	604 ¹⁰³	3	321 ⁵³	620 ²⁶³	590 ²⁶³	011 ⁴⁷
4	382 ²⁴³	723 ¹²²	658 ¹²³	501 ¹⁰¹	4	374 ⁵³	883 ²⁶⁷	853 ²⁶⁸	2, 9641 ⁴⁶²
5	625 ²⁴⁸	845 ¹²³	781 ¹²⁴	400 ¹⁰⁰	5	427 ⁵⁴	17, 150 ²⁷¹	17, 121 ²⁷¹	9179 ⁴⁵⁴
6	873 ²⁵¹	968 ¹²⁵	905 ¹²⁶	300 ⁹⁸	6	481 ⁵⁵	421 ²⁷⁵	392 ²⁷⁶	8725 ⁴⁴⁸
7	16, 124 ²⁵⁵	8, 093 ¹²⁷	8, 031 ¹²⁸	202 ⁹⁷	7	536 ⁵⁶	696 ²⁸⁰	668 ²⁸⁰	8277 ⁴⁴¹
8	379 ²⁶⁰	220 ¹²⁹	159 ¹³⁰	105 ⁹⁵	8	592 ⁵⁷	976 ²⁸⁴	948 ²⁸⁵	7836 ⁴³⁴
9	639 ²⁶³	349 ¹³²	289 ¹³²	010 ⁹⁴	9	649 ⁵⁸	18, 260 ²⁸⁹	18, 233 ²⁸⁹	7402 ⁴²⁷
1,80	902 ²⁶⁸	481 ¹³³	421 ¹³⁵	5, 916 ⁹²	2,30	707 ⁵⁹	549 ²⁹³	522 ²⁹⁴	6975 ⁴²⁰
1	17, 170 ²⁷¹	614 ¹³⁵	556 ¹³⁶	824 ⁹¹	1	766 ⁵⁹	842 ²⁹⁸	816 ²⁹⁸	6555 ⁴¹⁴
2	441 ²⁷⁷	749 ¹³⁸	692 ¹³⁹	733 ⁸⁹	2	825 ⁶¹	19, 140 ³⁰³	19, 114 ³⁰³	6141 ⁴⁰⁷
3	718 ²⁸⁰	887 ¹⁴⁰	831 ¹⁴⁰	544 ⁸⁸	3	886 ⁶¹	443 ³⁰⁷	417 ³⁰⁸	5734 ⁴⁰¹
4	998 ²⁸⁵	9, 029 ¹⁴²	971 ¹⁴³	556 ⁸⁶	4	947 ⁶³	750 ³¹²	725 ³¹²	5333 ³⁹⁵
5	18, 283 ²⁸⁹	169 ¹⁴⁴	9, 114 ¹⁴⁵	470 ⁸⁶	5	4, 010 ⁶³	20, 062 ³¹⁸	20, 037 ³¹⁸	4938 ³⁸⁹
6	572 ²⁹⁵	313 ¹⁴⁷	259 ¹⁴⁸	384 ⁸⁴	6	073 ⁶⁵	380 ³²²	355 ³²³	4549 ³⁸³
7	867 ²⁹⁸	460 ¹⁴⁹	407 ¹⁵⁰	300 ⁸²	7	138 ⁶⁵	702 ³²⁷	678 ³²⁷	4166 ³⁷⁶
8	19, 165 ³⁰⁴	609 ¹⁵¹	557 ¹⁵²	218 ⁸²	8	203 ⁶⁷	21, 029 ³³³	21, 005 ³³³	3790 ³⁷¹
9	469 ³⁰⁸	760 ¹⁵⁴	709 ¹⁵⁴	136 ⁸⁰	9	270 ⁶⁸	362 ³³⁸	338 ³³⁹	3419 ³⁶⁵
1,90	777 ³¹³	914 ¹⁵⁶	863 ¹⁵⁷	056 ⁷⁸	2,40	338 ⁶⁸	700 ³⁴³	677 ³⁴³	3054 ³⁵⁹
1	20, 090 ³¹⁸	10, 070 ¹⁵⁹	10, 020 ¹⁶⁰	4, 978 ⁷⁸	1	406 ⁷⁰	22, 043 ³⁴⁸	22, 020 ³⁴⁹	2695 ³⁵⁴
2	408 ³²³	229 ¹⁶¹	180 ¹⁶²	900 ⁷⁶	2	476 ⁷¹	391 ³⁵⁵	369 ³⁵⁵	2341 ³⁴⁸
3	731 ³²⁸	390 ¹⁶³	342 ¹⁶⁴	824 ⁷⁶	3	547 ⁷²	746 ³⁵⁹	724 ³⁶⁰	1993 ³⁴³
4	21, 059 ³³⁴	553 ¹⁶⁷	506 ¹⁶⁷	748 ⁷⁴	4	619 ⁷³	23, 105 ³⁶⁶	23, 084 ³⁶⁶	1650 ³³⁷
5	393 ³³⁸	720 ¹⁶⁹	673 ¹⁷⁰	674 ⁷²	5	692 ⁷⁴	471 ³⁷¹	450 ³⁷¹	1313 ³³²
6	731 ³⁴⁵	889 ¹⁷¹	843 ¹⁷²	602 ⁷²	6	766 ⁷⁶	842 ³⁷⁷	821 ³⁷⁸	0981 ³²⁷
7	22, 076 ³⁴⁹	11, 060 ¹⁷⁵	11, 015 ¹⁷⁵	530 ⁷¹	7	842 ⁷⁶	24, 219 ³⁸³	24, 199 ³⁸³	0654 ³²²
8	425 ³⁵⁵	235 ¹⁷⁷	190 ¹⁷⁸	459 ⁶⁹	8	918 ⁷⁸	602 ³⁹⁰	582 ³⁸⁹	0332 ³¹⁸
9	780 ³⁶¹	412 ¹⁸⁰	368 ¹⁸¹	390 ⁶⁹	9	996 ⁷⁹	992 ³⁹⁵	971 ³⁹⁶	0014 ³¹¹
2,00	23, 141	11, 592	11, 549	4, 321	2,50	5, 075	25, 387	25, 367	1, 9703

VIII. Winkel in Rechten
VIII. Angles in quadrants

83

x	$100 e^{\frac{\pi}{2}x}$	$\frac{1}{10} \cos \frac{\pi}{2}x$	$\frac{1}{10} \sin \frac{\pi}{2}x$	$100 e^{-\frac{\pi}{2}x}$	x	$100 e^{\frac{\pi}{2}x}$	$10^3 e^{-\frac{\pi}{2}x}$
Rechte					Rechte		
2,50	5 075 ⁸¹	2, 5387 ⁴⁰¹	2, 5367 ⁴⁰²	1, 9703 ³⁰⁷	3,00	1 1132 ¹⁷⁶	8, 983 ¹⁴⁰
1	156 ⁸¹	5788 ⁴⁰⁸	5769 ⁴⁰⁸	9396 ³⁰²	1	1308 ¹⁷⁹	843 ¹³⁸
2	237 ⁸³	6196 ⁴¹⁵	6177 ⁴¹⁵	9094 ²⁹⁸	2	1487 ¹⁸²	705 ¹³⁵
3	320 ⁸⁵	6611 ⁴²¹	6592 ⁴²¹	8796 ²⁹³	3	1669 ¹⁸⁵	570 ¹³⁴
4	405 ⁸⁵	7032 ⁴²⁸	7013 ⁴²⁸	8503 ²⁸⁸	4	1854 ¹⁸⁷	436 ¹³¹
5	490 ⁸⁷	7460 ⁴³⁴	7441 ⁴³⁵	8215 ²⁸⁴	5	2041 ¹⁹¹	305 ¹³⁰
6	577 ⁸⁸	7894 ⁴⁴¹	7876 ⁴⁴²	7931 ²⁸⁰	6	2232 ¹⁹⁴	175 ¹²⁷
7	665 ⁹⁰	8335 ⁴⁴⁹	8318 ⁴⁴⁸	7651 ²⁷⁵	7	2426 ¹⁹⁶	048 ¹²⁶
8	755 ⁹¹	8784 ⁴⁵⁵	8766 ⁴⁵⁶	7376 ²⁷¹	8	2622 ²⁰⁰	7, 922 ¹²³
9	846 ⁹³	9239 ⁴⁶³	9222 ⁴⁶³	7105 ²⁶⁶	9	2822 ²⁰³	799 ¹²²
2,60	939 ⁹⁴	9702 ⁴⁷	9685 ⁴⁷	6839 ²⁶³	3,10	3025 ²⁰⁶	677 ¹¹⁹
1	6 033 ⁹⁵	3, 017 ⁴⁸	3, 016 ⁴⁷	6576 ²⁵⁸	1	3231 ²¹⁰	558 ¹¹⁸
2	128 ⁹⁷	065 ⁴⁸	063 ⁴⁷	6318 ²⁵⁴	2	3441 ²¹³	440 ¹¹⁶
3	225 ⁹⁹	113 ⁵⁰	112 ⁴⁹	6064 ²⁵¹	3	3654 ²¹⁶	324 ¹¹⁴
4	324 ¹⁰⁰	163 ⁵⁰	161 ⁵⁰	5813 ²⁴⁶	4	3870 ²¹⁹	210 ¹¹²
5	424 ¹⁰²	213 ⁵¹	211 ⁵¹	5567 ²⁴³	5	4089 ²²³	098 ¹¹¹
6	526 ¹⁰³	264 ⁵¹	262 ⁵²	5324 ²³⁹	6	4312 ²²⁷	6, 987 ¹⁰⁹
7	629 ¹⁰⁵	315 ⁵³	314 ⁵²	5085 ²³⁵	7	4539 ²³¹	878 ¹⁰⁷
8	734 ¹⁰⁶	368 ⁵³	366 ⁵⁴	4850 ²³¹	8	4770 ²³³	771 ¹⁰⁶
9	840 ¹⁰⁹	421 ⁵⁴	420 ⁵⁴	4619 ²²⁸	9	5003 ²³⁸	665 ¹⁰⁴
2,70	949 ¹¹⁰	475 ⁵⁵	474 ⁵⁵	4391 ²²⁴	3,20	5241 ²⁴¹	561 ¹⁰²
1	7 059 ¹¹²	530 ⁵⁶	529 ⁵⁶	4167 ²²¹	1	5482 ²⁴⁵	459 ¹⁰¹
2	171 ¹¹³	586 ⁵⁷	585 ⁵⁶	3946 ²¹⁷	2	5727 ²⁴⁹	358 ⁹⁹
3	284 ¹¹⁵	643 ⁵⁷	641 ⁵⁸	3729 ²¹⁴	3	5976 ²⁵³	259 ⁹⁷
4	399 ¹¹⁸	700 ⁵⁹	699 ⁵⁹	3515 ²¹¹	4	6229 ²⁵⁷	162 ⁹⁶
5	517 ¹¹⁹	759 ⁵⁹	758 ⁵⁹	3304 ²⁰⁷	5	6486 ²⁶¹	066 ⁹⁵
6	636 ¹²⁰	818 ⁶¹	817 ⁶¹	3097 ²⁰⁴	6	6747 ²⁶⁵	5, 971 ⁹³
7	756 ¹²³	879 ⁶¹	878 ⁶¹	2893 ²⁰¹	7	7012 ²⁶⁹	878 ⁹¹
8	879 ¹²⁵	940 ⁶³	939 ⁶²	2692 ¹⁹⁸	8	7281 ²⁷⁴	787 ⁹⁰
9	8 004 ¹²⁷	4, 003 ⁶³	4, 001 ⁶⁴	2494 ¹⁹⁵	9	7555 ²⁷⁸	697 ⁸⁹
2,80	131 ¹²⁸	066 ⁶⁴	065 ⁶⁴	2299 ¹⁹²	3,30	7833 ²⁸²	608 ⁸⁸
1	259 ¹³¹	130 ⁶⁶	129 ⁶⁵	2107 ¹⁸⁸	1	8115 ²⁸⁷	520 ⁸⁶
2	390 ¹³³	196 ⁶⁶	194 ⁶⁷	1919 ¹⁸⁶	2	8402 ²⁹¹	434 ⁸⁴
3	523 ¹³⁵	262 ⁶⁸	261 ⁶⁷	1733 ¹⁸³	3	8693 ²⁹⁶	350 ⁸⁴
4	658 ¹³⁷	330 ⁶⁸	328 ⁶⁹	1550 ¹⁸⁰	4	8989 ³⁰¹	266 ⁸²
5	795 ¹³⁹	398 ⁷⁰	397 ⁷⁰	1370 ¹⁷⁷	5	9290 ³⁰⁵	184 ⁸¹
6	934 ¹⁴²	468 ⁷⁰	467 ⁷⁰	1193 ¹⁷⁵	6	9595 ³¹¹	103 ⁸⁰
7	9 076 ¹⁴³	538 ⁷²	537 ⁷²	1018 ¹⁷¹	7	9906 ³¹⁵	023 ⁷⁸
8	219 ¹⁴⁶	610 ⁷³	609 ⁷³	0847 ¹⁶⁹	8	2 0221 ³²⁰	4, 945 ⁷⁷
9	365 ¹⁴⁹	683 ⁷⁴	682 ⁷⁴	0678 ¹⁶⁷	9	0541 ³²⁵	868 ⁷⁶
2,90	514 ¹⁵⁰	757 ⁷⁶	756 ⁷⁶	0511 ¹⁶⁴	3,40	0866 ³³⁰	792 ⁷⁴
1	664 ¹⁵³	833 ⁷⁶	832 ⁷⁶	0347 ¹⁶¹	1	1196 ³³⁶	718 ⁷⁴
2	817 ¹⁵⁶	909 ⁷⁸	908 ⁷⁸	0186 ¹⁵⁹	2	1532 ³⁴¹	644 ⁷²
3	973 ¹⁵⁸	987 ⁷⁹	986 ⁷⁹	0027 ¹⁵⁶	3	1873 ³⁴⁶	572 ⁷¹
4	10 131 ¹⁶⁰	5, 066 ⁸⁰	5, 065 ⁸⁰	0, 9871 ¹⁵⁴	4	2219 ³⁵²	501 ⁷¹
5	291 ¹⁶³	146 ⁸¹	145 ⁸¹	9717 ¹⁵¹	5	2571 ³⁵⁷	430 ⁶⁹
6	454 ¹⁶⁵	227 ⁸³	226 ⁸³	9566 ¹⁴⁹	6	2928 ³⁶³	361 ⁶⁸
7	619 ¹⁶⁸	310 ⁸⁴	309 ⁸⁴	9417 ¹⁴⁷	7	3291 ³⁶⁹	293 ⁶⁶
8	787 ¹⁷¹	394 ⁸⁶	393 ⁸⁶	9270 ¹⁴⁴	8	3660 ³⁷⁵	227 ⁶⁶
9	958 ¹⁷⁴	480 ⁸⁶	479 ⁸⁶	9126 ¹⁴³	9	4035 ³⁸⁰	161 ⁶⁵
3,00	11 132	5, 566	5, 565	0, 8983	3,50	2 4415	4, 096

VIII. Winkel in Rechten
VIII. Angles in quadrants

x	$10 e^{\frac{\pi}{2}x}$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$	x	$10 e^{\frac{\pi}{2}x}$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$	x	$10 e^{\frac{\pi}{2}x}$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$
		0,00			0,00			0,000
3,50	2 441,5 ³⁸⁷	4 096 ⁶⁴	4,00	5 355 ⁸⁵	18 674 ²⁹¹	4,50	1 1745 ¹⁸⁶	8 514 ¹³²
1	480,2 ³⁹²	032 ⁶³	1	440 ⁸⁶	383 ²⁸⁶	1	1931 ¹⁸⁹	382 ¹³¹
2	519,4 ³⁹⁹	3 969 ⁶²	2	526 ⁸⁷	097 ²⁸²	2	2120 ¹⁹²	251 ¹²⁸
3	559,3 ⁴⁰⁵	907 ⁶¹	3	613 ⁸⁹	17 815 ²⁷⁸	3	2312 ¹⁹⁵	123 ¹²⁷
4	599,8 ⁴¹²	846 ⁶⁰	4	702 ⁹⁰	537 ²⁷³	4	2507 ¹⁹⁸	7 996 ¹²⁵
5	641,0 ⁴¹⁸	786 ⁵⁹	5	792 ⁹²	264 ²⁶⁹	5	2705 ²⁰¹	871 ¹²²
6	682,8 ⁴²⁵	727 ⁵⁸	6	884 ⁹³	16 995 ²⁶⁵	6	2906 ²⁰⁴	749 ¹²¹
7	725,3 ⁴³¹	669 ⁵⁷	7	977 ⁹⁵	730 ²⁶¹	7	3110 ²⁰⁸	628 ¹¹⁹
8	768,4 ⁴³⁹	612 ⁵⁶	8	6 072 ⁹⁶	469 ²⁵⁶	8	3318 ²¹¹	509 ¹¹⁷
9	812,3 ⁴⁴⁵	556 ⁵⁶	9	168 ⁹⁸	213 ²⁵³	9	3529 ²¹⁴	392 ¹¹⁵
3,60	856,8 ⁴⁵²	500 ⁵⁴	4,10	266 ⁹⁹	15 960 ²⁴⁹	4,60	3743 ²¹⁷	277 ¹¹⁴
1	902,0 ⁴⁶⁰	446 ⁵⁴	1	365 ¹⁰¹	711 ²⁴⁵	1	3960 ²²¹	163 ¹¹¹
2	948,0 ⁴⁶⁶	392 ⁵³	2	466 ¹⁰²	466 ²⁴¹	2	4181 ²²⁵	052 ¹¹⁰
3	994,6 ⁴⁸	339 ⁵²	3	568 ¹⁰⁴	225 ²³⁷	3	4406 ²²⁸	6 942 ¹⁰⁹
4	3 042 ⁴⁸	287 ⁵¹	4	672 ¹⁰⁶	14 988 ²³⁴	4	4634 ²³¹	833 ¹⁰⁶
5	090 ⁴⁹	236 ⁵⁰	5	778 ¹⁰⁷	754 ²³⁰	5	4865 ²³⁵	727 ¹⁰⁵
6	139 ⁵⁰	186 ⁵⁰	6	885 ¹⁰⁹	524 ²²⁶	6	5100 ²³⁹	622 ¹⁰³
7	189 ⁵⁰	136 ⁴⁹	7	994 ¹¹¹	298 ²²³	7	5339 ²⁴³	519 ¹⁰²
8	239 ⁵²	087 ⁴⁸	8	7 105 ¹¹²	075 ²¹⁹	8	5582 ²⁴⁷	417 ¹⁰⁰
9	291 ⁵²	039 ⁴⁸	9	217 ¹¹⁴	13 856 ²¹⁶	9	5829 ²⁵¹	317 ⁹⁸
3,70	343 ⁵³	2 9916 ⁴⁶⁶	4,20	331 ¹¹⁶	640 ²¹³	4,70	6080 ²⁵⁵	219 ⁹⁷
1	396 ⁵³	9450 ⁴⁵⁹	1	447 ¹¹⁸	427 ²⁰⁹	1	6335 ²⁵⁸	122 ⁹⁵
2	449 ⁵⁵	8991 ⁴⁵²	2	565 ¹²⁰	218 ²⁰⁶	2	6593 ²⁶³	027 ⁹⁴
3	504 ⁵⁵	8539 ⁴⁴⁵	3	685 ¹²²	012 ²⁰³	3	6856 ²⁶⁷	5 933 ⁹³
4	559 ⁵⁷	8094 ⁴³⁸	4	807 ¹²³	12 809 ¹⁹⁹	4	7123 ²⁷¹	840 ⁹¹
5	616 ⁵⁷	7656 ⁴³¹	5	930 ¹²⁶	610 ¹⁹⁷	5	7394 ²⁷⁵	749 ⁹⁰
6	673 ⁵⁸	7225 ⁴²⁴	6	8 056 ¹²⁸	413 ¹⁹³	6	7669 ²⁸⁰	659 ⁸⁸
7	731 ⁵⁹	6801 ⁴¹⁸	7	184 ¹²⁹	220 ¹⁹¹	7	7949 ²⁸⁴	571 ⁸⁶
8	790 ⁶⁰	6383 ⁴¹¹	8	313 ¹³²	029 ¹⁸⁷	8	8233 ²⁸⁹	485 ⁸⁶
9	850 ⁶¹	5972 ⁴⁰⁵	9	445 ¹³³	11 842 ¹⁸⁵	9	8522 ²⁹³	399 ⁸⁴
3,80	911 ⁶²	5567 ³⁹⁸	4,30	578 ¹³⁶	657 ¹⁸²	4,80	8815 ²⁹⁸	315 ⁸³
1	973 ⁶³	5169 ³⁹²	1	714 ¹³⁸	475 ¹⁷⁸	1	9113 ³⁰²	232 ⁸¹
2	4 036 ⁶⁴	4777 ³⁸⁷	2	852 ¹⁴⁰	297 ¹⁷⁶	2	9415 ³⁰⁸	151 ⁸¹
3	100 ⁶⁵	4390 ³⁸⁰	3	992 ¹⁴³	121 ¹⁷⁴	3	9723 ³¹²	070 ⁷⁹
4	165 ⁶⁶	4010 ³⁷⁴	4	9 135 ¹⁴⁴	10 947 ¹⁷⁰	4	2 0035 ³¹⁷	4 991 ⁷⁸
5	231 ⁶⁷	3636 ³⁶⁸	5	279 ¹⁴⁷	777 ¹⁶⁸	5	0352 ³²³	913 ⁷⁶
6	298 ⁶⁸	3268 ³⁶³	6	426 ¹⁵⁰	609 ¹⁶⁶	6	0675 ³²⁷	837 ⁷⁵
7	366 ⁶⁹	2905 ³⁵⁷	7	576 ¹⁵¹	443 ¹⁶²	7	1002 ³³²	762 ⁷⁵
8	435 ⁷⁰	2548 ³⁵¹	8	727 ¹⁵⁴	281 ¹⁶¹	8	1334 ³³⁸	687 ⁷³
9	505 ⁷²	2197 ³⁴⁶	9	881 ¹⁵⁷	120 ¹⁵⁷	9	1672 ³⁴³	614 ⁷¹
3,90	577 ⁷²	1851 ³⁴¹	4,40	10 038 ¹⁵⁸	09 963 ¹⁵⁶	4,90	2015 ³⁴⁹	543 ⁷¹
1	649 ⁷⁴	1510 ³³⁵	1	196 ¹⁶²	807 ¹⁵³	1	2364 ³⁵⁴	472 ⁷⁰
2	723 ⁷⁴	1175 ³³⁰	2	358 ¹⁶⁴	654 ¹⁵⁰	2	2718 ³⁵⁹	402 ⁶⁹
3	797 ⁷⁶	0845 ³²⁵	3	522 ¹⁶⁶	504 ¹⁴⁸	3	3077 ³⁶⁶	333 ⁶⁷
4	873 ⁷⁷	0520 ³²⁰	4	688 ¹⁷⁰	356 ¹⁴⁶	4	3443 ³⁷¹	266 ⁶⁷
5	950 ⁷⁹	0200 ³¹⁵	5	858 ¹⁷²	210 ¹⁴³	5	3814 ³⁷⁷	199 ⁶⁵
6	5 029 ⁷⁹	1 9885 ³¹⁰	6	11 030 ¹⁷⁴	067 ¹⁴²	6	4191 ³⁸³	134 ⁶⁵
7	108 ⁸¹	9575 ³⁰⁵	7	204 ¹⁷⁸	08 925 ¹³⁹	7	4574 ³⁸⁹	069 ⁶³
8	189 ⁸²	9270 ³⁰⁰	8	382 ¹⁸⁰	786 ¹³⁷	8	4963 ³⁹⁵	006 ⁶²
9	271 ⁸⁴	8970 ²⁹⁶	9	562 ¹⁸³	649 ¹³⁵	9	5358 ⁴⁰²	3 944 ⁶²
4,00	5 355	1 8674	4,50	11 745	08 514	5,00	2 5760	3 882
		0,00			0,00			0,000

Fortsetzung auf S. 87
Continued on p. 87

x	$\operatorname{tg} x$	$1-x$	x	$\operatorname{tg} x$	$1-x$	x	$\operatorname{tg} x$	$1-x$	x	$\operatorname{tg} x$	$1-x$
Rechte		Rechte	Rechte		Rechte	Rechte		Rechte	Rechte		Rechte
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,
0 00	0 0000	—	1 00	1 5838	9 00	2 0	3 249	8 0	4 00	0,7 265	6 00
05	0785 ¹⁵⁷⁰	9 95	05	6645 ¹⁶¹⁴	8 95	1	424 ¹⁷³	7 9	05	386 ²⁴²	5 95
10	1571 ¹⁵⁷²	90	10	7453 ¹⁶¹⁶	90	2	600 ¹⁷⁶	8	10	508 ²⁴⁴	90
15	2357 ¹⁵⁷²	85	15	8263 ¹⁶²⁰	85	3	779 ¹⁷⁹	7	15	632 ²⁴⁸	85
20	3143 ¹⁵⁷²	80	20	9076 ¹⁶²⁶	80	4	3 959 ¹⁸⁰	6	20	757 ²⁵⁰	80
25	3929 ¹⁵⁷⁴	75	25	1 9891 ¹⁶³⁰	75	5	4 142 ¹⁸³	5	25	0,7 883 ²⁵²	75
30	4716 ¹⁵⁷⁴	70	30	2 0709 ¹⁶³⁶	70	6	327 ¹⁸⁵	4	30	0,8 011 ²⁵⁶	70
35	5503 ¹⁵⁷⁴	65	35	1 529 ¹⁶⁴⁰	65	7	515 ¹⁸⁸	3	35	141 ²⁶⁰	65
40	6291 ¹⁵⁷⁶	60	40	2 353 ¹⁶⁴⁸	60	8	706 ¹⁹¹	2	40	273 ²⁶⁴	60
45	7080 ¹⁵⁷⁸	55	45	3 179 ¹⁶⁵²	55	2 9	4 899 ¹⁹³	1	45	406 ²⁶⁶	55
50	7870 ¹⁵⁸⁰	50	50	4 008 ¹⁶⁵⁸	50	3 0	5 095 ¹⁹⁶	7 0	50	541 ²⁷⁰	50
55	8661 ¹⁵⁸²	45	55	4 840 ¹⁶⁶⁴	45	1	295 ²⁰⁰	6 9	55	678 ²⁷⁴	45
60	0 9453 ¹⁵⁸⁴	40	60	5 676 ¹⁶⁷²	40	2	498 ²⁰³	8	60	816 ²⁷⁶	40
65	1 0246 ¹⁵⁸⁶	35	65	6 515 ¹⁶⁷⁸	35	3	704 ²⁰⁶	7	65	0,8 957 ²⁸²	35
70	1 040 ¹⁵⁸⁸	30	70	7 357 ¹⁶⁸⁴	30	4	5 914 ²¹⁰	6	70	0,9 099 ²⁸⁴	30
75	1 836 ¹⁵⁹²	25	75	8 203 ¹⁶⁹²	25	5	6 128 ²¹⁴	5	75	244 ²⁹⁴	25
80	2 633 ¹⁵⁹⁴	20	80	9 053 ¹⁷⁰⁰	20	6	346 ²¹⁸	4	80	391 ²⁹⁸	20
85	3 432 ¹⁵⁹⁸	15	85	2 9906 ¹⁷⁰⁶	15	7	569 ²²³	3	85	540 ³⁰²	15
90	4 232 ¹⁶⁰⁰	10	90	3 0764 ¹⁷¹⁶	10	8	6 796 ²²⁷	2	90	691 ³⁰⁶	10
0 95	5 034 ¹⁶⁰⁴	05	1 95	1 626 ¹⁷²⁴	05	3 9	7 028 ²³²	1	4 95	0,9 844 ³¹²	05
1 00	1 5838	9 00	2 00	3 2492	8 00	4 0	7 265	6 0	5 00	1,0 000	5 00
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,
Rechte		Rechte	Rechte		Rechte	Rechte		Rechte	Rechte		Rechte
$1-y$	$\operatorname{ctg} y$	y	$1-y$	$\operatorname{ctg} y$	y	$1-y$	$\operatorname{ctg} y$	y	$1-y$	$\operatorname{ctg} y$	y

Fortsetzung von S. 80
Continued from p. 80

$$\operatorname{tg}(0,5^{\circ} + v) = \operatorname{ctg}(0,5^{\circ} - v) = \frac{1}{\operatorname{tg}(0,5^{\circ} - v)} = \operatorname{ctg}(0,5^{\circ} + v)$$

x	$\operatorname{Amp} \frac{\pi}{4} x$	x	$\operatorname{Amp} \frac{\pi}{4} x$	x	$\operatorname{Amp} \frac{\pi}{4} x$	x	$\operatorname{Amp} \frac{\pi}{4} x$	x	$\operatorname{Amp} \frac{\pi}{4} x$
	Rechte		Rechte		Rechte		Rechte		Rechte
0,5 0	4 553 ⁷⁵	1,0 0	7 390 ^{39,5}	1,5 0	8 797 ^{18,5}	2, 00	94 50 ⁸⁴	3, 0	0,98 86 ¹⁶
2	703 ⁷³	2	469 ³⁸	2	834 ¹⁸	05	92 ⁷⁶	1	0,99 02 ¹⁴
4	849 ^{71,5}	4	545 ³⁷	4	870 ¹⁷	10	95 30 ⁷⁰	2	16 ¹³
6	992 ⁷⁰	6	619 ³⁶	6	904 ¹⁷	15	65 ⁶⁶	3	29 ¹⁰
8	5 132 ^{68,5}	8	691 ³⁵	8	938 ^{16,5}	20	98 ⁶²	4	39 ⁹
0,6 0	269 ⁶⁷	1,1 0	761 ³⁴	1,6 0	971 ¹⁶	25	96 29 ⁵⁶	5	48 ⁷
2	403 ^{65,5}	2	829 ³³	2	9 003 ¹⁵	30	57 ⁵²	6	55 ⁷
4	534 ^{63,5}	4	895 ³²	4	033 ¹⁵	35	83 ⁴⁸	7	62 ⁵
6	661 ^{62,5}	6	959 ³¹	6	063 ^{14,5}	40	97 07 ⁴⁴	8	67 ⁵
8	786 ^{60,5}	8	8 021 ³⁰	8	092 ¹⁴	45	29 ⁴⁰	9	72 ⁴
0,7 0	907 ⁵⁹	1,2 0	081 ^{29,5}	1,7 0	120 ^{13,5}	50	49 ³⁸	4, 0	76 ^{3,5}
2	6 025 ⁵⁸	2	140 ^{28,5}	2	147 ¹³	55	68 ³⁶	2	83 ²
4	141 ⁵⁶	4	197 ^{27,5}	4	173 ¹³	60	86 ³²	4	87 ²
6	253 ⁵⁵	6	252 ^{26,5}	6	199 ^{12,5}	65	98 02 ³⁰	6	0,999 1 ¹
8	363 ^{53,5}	8	305 ²⁶	8	224 ¹²	70	17 ²⁸	8	3 ¹
0,8 0	470 ⁵²	1,3 0	357 ²⁵	1,8 0	248 ^{11,5}	75	31 ²⁴	5, 0	5
2	574 ^{50,5}	2	407 ^{24,5}	2	271 ¹¹	80	43 ²²	5,5	8
4	675 ⁴⁹	4	456 ^{23,5}	4	293 ¹¹	85	55 ²⁰	6, 0	9
6	773 ⁴⁸	6	503 ²³	6	315 ^{10,5}	90	66 ²⁰	6,5	1,000 0
8	869 ^{46,5}	8	549 ^{22,5}	8	336 ^{10,5}	95	76 ²⁰	7, 0	1,000 0
0,9 0	962 ^{45,5}	1,4 0	594 ^{21,5}	1,9 0	357 ¹⁰	3, 00	98 86		
2	7 053 ⁴⁴	2	637 ²¹	2	377 ^{9,5}		0,		
4	141 ^{42,5}	4	679 ²⁰	4	396 ⁹				
6	226 ^{41,5}	6	719 ²⁰	6	414 ^{9,5}				
8	309 ^{40,5}	8	759 ¹⁹	8	433 ^{8,5}				
1,0 0	7 390	1,5 0	8 797	2,0 0	9 450				
0,	0,	0,	0,	0,	0,				

VIII. Winkel in Rechten
VIII. Angles in quadrants

x	$\text{Tg } \frac{1}{2}x$	$\text{Ctg } \frac{1}{2}x$	x	$\text{Tg } \frac{1}{2}x$	$\text{Ctg } \frac{1}{2}x$	x	$\text{Tg } \frac{1}{2}x$	$\text{Ctg } \frac{1}{2}x$
0,0 00	0,0 0000	∞	0,2 50	0,3 737	2, 6760	0,7 0	0,8 003	1,2 495
05	0785 ¹⁵⁷⁰	127,32	55	804 ¹³⁴	6286 ⁹⁴⁸	1	059 ⁵⁶	408 ⁸⁷
10	1571 ¹⁵⁷²	63,67	60	871 ¹³⁴	5831 ⁹¹⁰	2	113 ⁵⁴	325 ⁸³
15	2356 ¹⁵⁷⁰	42,45	65	938 ¹³⁴	5394 ⁸⁷⁴	3	166 ⁵³	245 ⁸⁰
20	3141 ¹⁵⁷⁰	31,84	70	0,4 004 ¹³²	4975 ⁸³⁸	4	218 ⁵²	168 ⁷⁷
							51	74
25	3925 ¹⁵⁶⁸	25,478	75	070 ¹³⁰	4572 ⁷⁷⁶	5	269 ⁴⁹	094 ⁷¹
30	4709 ¹⁵⁶⁶	21,236	80	135 ¹³⁰	4184 ⁷⁴⁸	6	318 ⁴⁸	023 ⁶⁹
35	5492 ¹⁵⁶⁶	18,208	85	200 ¹²⁸	3810 ⁷²⁰	7	366 ⁴⁶	1,1 054 ⁶⁶
40	6275 ¹⁵⁶⁴	15,936	90	264 ¹²⁸	3450 ⁶⁹⁴	8	412 ⁴⁵	888 ⁶⁴
45	7057 ¹⁵⁶²	14,170	95	328 ¹²⁸	3103 ⁶⁶⁸	9	457 ⁴⁴	824 ⁶¹
50	7838 ¹⁵⁶⁰	12,758	0,3 00	392 ¹²⁶	2769 ⁶³⁵	0,8 0	501 ⁴³	763 ⁵⁹
55	8618 ¹⁵⁵⁸	11,604	1	518 ¹²⁴	2134 ⁵⁹¹	1	544 ⁴²	704 ⁵⁷
60	9397 ¹⁵⁵⁶	10,642	2	642 ¹²²	1543 ⁵⁵³	2	586 ⁴¹	647 ⁵⁵
65	0,1 0175 ¹⁵⁵²	9,828	3	764 ¹²¹	0990 ⁵¹⁸	3	627 ⁴⁰	592 ⁵³
70	0951 ¹⁵⁵⁰	9,132	4	885 ¹¹⁸	0472 ⁴⁸⁶	4	667 ³⁸	539 ⁵¹
75	1726 ¹⁵⁴⁸	8,528	5	0,5 003 ¹¹⁷	1, 9986 ⁴⁵⁶	5	705 ³⁸	488 ⁴⁹
80	2500 ¹⁵⁴⁴	8,000 ⁹³⁰	6	120 ¹¹⁵	9530 ⁴²⁹	6	743 ³⁶	439 ⁴⁸
85	3272 ¹⁵⁴²	7,535 ⁸²⁸	7	235 ¹¹³	9101 ⁴⁰⁴	7	779 ³⁶	391 ⁴⁶
90	4043 ¹⁵³⁸	7,121 ⁷⁴⁰	8	348 ¹¹²	8697 ³⁸¹	8	815 ³⁴	345 ⁴⁵
95	4812 ¹⁵³⁶	6,751 ⁶⁶⁶	9	460 ¹⁰⁹	8316 ³⁵⁹	9	849 ³⁴	300 ⁴³
0,1 00	5580 ¹⁵³⁰	6,418 ⁶⁰⁰	0,4 0	569 ¹⁰⁷	7957 ³⁴⁰	0,9 0	883 ³²	257 ⁴¹
05	6345 ¹⁵²⁸	6,118 ⁵⁴⁶	1	676 ¹⁰⁶	7617 ³²²	1	915 ³²	216 ³⁹
10	7109 ¹⁵²²	5,845 ⁴⁹⁸	2	782 ¹⁰⁴	7295 ³⁰⁴	2	947 ³¹	177 ³⁹
15	7870 ¹⁵¹⁸	5,596 ⁴⁵⁶	3	886 ¹⁰¹	6991 ²⁸⁹	3	978 ³⁰	138 ³⁷
20	8629 ¹⁵¹⁶	5,368 ⁴²⁰	4	987 ¹⁰⁰	6702 ²⁷⁴	4	0,9 008 ²⁹	101 ³⁶
25	9387 ¹⁵⁰⁸	5,158 ³⁸⁶	5	0,6 087 ⁹⁸	6428 ²⁶⁰	5	037 ²⁹	065 ³⁴
30	0,2 0141 ¹⁵⁰⁶	4,965 ³⁵⁸	6	185 ⁹⁶	6168 ²⁴⁷	6	066 ²⁷	031 ³⁴
35	0894 ¹⁴⁹⁸	786 ³³²	7	281 ⁹⁴	1,5 921 ²³⁵	7	093 ²⁷	1,0 997 ³²
40	1643 ¹⁴⁹⁶	620 ³⁰⁸	8	375 ⁹²	686 ²²⁴	8	120 ²⁶	965 ³²
45	2391 ¹⁴⁹⁰	466 ²⁸⁸	9	467 ⁹¹	462 ²¹³	9	146 ²⁶	933 ³⁰
50	3136 ¹⁴⁸⁴	322 ²⁶⁸	0,5 0	558 ⁸⁸	249 ²⁰³	1,0 0	172 ²⁴	903 ^{28,5}
55	3878 ¹⁴⁷⁸	188 ²⁵²	1	646 ⁸⁷	046 ¹⁹⁴	2	220 ²³	846 ²⁷
60	4617 ¹⁴⁷²	062 ²³⁶	2	733 ⁸⁵	1,4 852 ¹⁸⁵	4	266 ^{21,5}	792 ²⁵
65	5353 ¹⁴⁶⁸	3, 944 ²²²	3	818 ⁸³	667 ¹⁷⁷	6	309 ^{20,5}	742 ²³
70	6087 ¹⁴⁶²	853 ²⁰⁸	4	901 ⁸²	490 ¹⁶⁹	8	350 ¹⁹	696 ²²
75	6818 ¹⁴⁵⁴	729 ¹⁹⁸	5	983 ⁷⁹	321 ¹⁶¹	1,1 0	388 ¹⁸	652 ^{20,5}
80	7545 ¹⁴⁴⁸	630 ¹⁸⁶	6	0,7 062 ⁷⁸	160 ¹⁵⁵	2	424 ¹⁷	611 ¹⁹
85	8269 ¹⁴⁴⁴	537 ¹⁷⁶	7	140 ⁷⁶	005 ¹⁴⁸	4	458 ^{16,5}	573 ¹⁸
90	8991 ¹⁴³⁶	449 ¹⁶⁶	8	216 ⁷⁵	1,3 857 ¹⁴¹	6	491 ¹⁵	537 ¹⁷
95	9709 ¹⁴²	366 ¹⁵⁸	9	291 ⁷³	716 ¹³⁶	8	521 ¹⁴	503 ^{15,5}
0,2 00	0,3 042	287	0,6 0	364 ⁷¹	580 ¹³⁰	1,2 0	549 ^{13,5}	472 ^{14,5}
05	113 ¹⁴²	212 ¹⁴²	1	435 ⁶⁹	450 ¹²⁴	2	576 ^{12,5}	443 ¹⁴
10	184 ¹⁴²	141 ¹³⁶	2	504 ⁶⁸	326 ¹¹⁹	4	601 ¹²	415 ¹³
15	255 ¹⁴⁰	073 ¹³⁰	3	572 ⁶⁶	207 ¹¹⁵	6	625 ^{11,5}	389 ¹²
20	325 ¹³⁸	008 ¹²⁴	4	638 ⁶⁵	092 ¹¹⁰	8	648 ^{10,5}	365 ¹¹
25	394 ¹³⁸	2, 9463 ¹¹⁸⁰	5	703 ⁶³	1,2 982 ¹⁰⁵	1,3 0	669 ¹⁰	343 ¹¹
30	463 ¹³⁸	8873 ¹¹²⁸	6	766 ⁶²	877 ¹⁰²	2	689 ⁹	321 ¹⁰
35	532 ¹³⁸	8309 ¹⁰⁷⁶	7	828 ⁶⁰	775 ⁹⁷	4	707 ⁹	301 ⁹
40	601 ¹³⁶	7771 ¹⁰³²	8	888 ⁵⁸	678 ⁹³	6	725 ⁸	283 ⁹
45	669 ¹³⁶	7255 ⁹⁹⁰	9	946 ⁵⁷	585 ⁹⁰	8	741 ⁸	265 ⁸
0,2 50	0,3 737	2, 6760	0,7 0	0,8 003	1,2 495	1,4 0	0,9 757	1,0 249

Fortsetzung auf S. 87
Continued on p. 87

x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$		x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$		x	$\sqrt{2} \sin x$	$\sqrt{2} \cos x$	
0,	0,	1,		0,	0,	1,	0,	0,		1,	0,
0 0	0 000	4 142	1,0 0	1 5	3 301	3 751	8 5	3 0	0,6 421	2 601	7 0
1	222	140	0,9 9	6	517	698	4	1	618	499	6 9
2	444	135		7	732	641	3	2	0,6 813	393	8
3	666	126		8	3 946	581	2	3	0,7 007	284	7
4	0 888	114		9	4 158	517	1	4	199	172	6
5	1 110	098		2 0	370	450	8 0	5	389	2 058	5
6	331	079		1	581	380	7 9	6	577	1 941	4
7	552	057		2	790	306	8	7	764	821	3
8	773	031		3	4 999	229	7	8	0,7 949	697	2
9	1 993	4 001		4	5 206	149	6	9	0,8 132	570	1
1 0	2 212	3 968	0,9 0	5	412	3 066	5	4 0	313	441	6 0
1	431	932	0,8 9	6	617	2 979	4	1	492	309	5 9
2	650	892		7	5 820	889	3	2	668	174	8
3	2 868	848		8	6 022	796	2	3	0,8 842	1 037	7
4	3 085	801		9	222	700	1	4	0,9 015	0 897	6
1 5	3 301	3 751	0,8 5	3 0	6 421	2 601	7 0	5	185	754	5
0,	0,	1,		0,	0,	1,	0,	6	353	608	4
	$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y		$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y	7	518	460	3
								8	681	309	2
								9	0,9 842	156	1
								5 0	1,0 000	0 000	5 0
								0,		1,	0,
									$\sqrt{2} \cos y$	$\sqrt{2} \sin y$	y

x	$\lg \frac{1}{2} x$	$\text{Ctg } \frac{1}{2} x$
1,4 0	0,97 57	1,02 49
2	71	34
4	85	19
6	98	06
8	0,98 10	1,01 93
1,5 0	22	81
2	33	70
4	43	60
6	52	50
8	61	41
1,6 0	70	32
65	88	13
70	0,99 04	1,00 96
75	18	82
80	30	70
85	40	60
90	49	51
95	56	44
2,00	63	37
1	73	27
2	80	20
3	85	15
4	89	11
5	92	08
6	94	06
7	96	04
8	97	03
9	98	02
3,0	98	02
1	99	01
2	99	01
3	99	01
4	1,00 00	00
3,5	1,00 00	1,00 00

Fortsetzung von S. 84
Continued from p. 84

x	$e^{\frac{1}{2}x}$	$e^{-\frac{1}{2}x}$	x	$e^{\frac{1}{2}x}$	$e^{-\frac{1}{2}x}$
5	2 576,0	-33882	30	2 ²⁰ 9218	-2 ⁰ 3423
6	12 392	-48070	35	2 ²⁴ 7526	1-2 ¹ 3287
7	5961	1-56776	40	1 ²⁷ 9388	-2 ⁷ 5158
8	2 ⁵⁸ 675	-53487	45	3 ¹ 4994	2-3 ¹⁰ 023
9	1 ⁸³ 794	-87249	50	1 ³⁴ 2865	-3 ⁴ 7773
10	76636	1-75070	55	3 ³⁸ 314	3-3 ⁸ 0175
11	83192	3-81328	60	4 ¹⁸ 537	1-4 ¹ 1714
12	1 ⁸⁵ 355	-86512	65	2 ⁴⁴ 1990	-4 ⁴ 4547
13	97387	1-93538	70	4 ⁸⁵ 665	1-4 ⁸ 7653
14	1 ⁰ 3553	2-1 ⁰⁸ 143	75	1 ⁶¹ 4592	-5 ¹ 6853
15	1 ¹⁰ 7093	-1 ⁰ 5850	80	5 ⁵ 3759	2-5 ⁵ 6604
16	1 ¹⁸ 223	1-1 ¹¹ 2162	85	5 ⁸ 9683	1-5 ⁸ 0328
17	1 ²³ 955	2-1 ² 5281	90	2 ⁶¹ 4942	-8 ¹ 4009
18	1 ³ 9028	-1 ² 5255	95	5 ⁶ 6425	1-5 ⁶ 5564
19	1 ³ 9153	1-1 ³ 0925	100	1 ⁸⁸ 6551	-6 ⁸ 6042
20	1 ⁴ 4403	2-1 ⁴ 2711			
25	1 ¹⁷ 1342	-1 ⁷ 8816			

$$^{\circ}7387 \equiv 0,7387 \cdot 10^{\circ}$$

$$1-^{\circ}3538 \equiv 1,3538 \cdot 10^{-\circ}$$

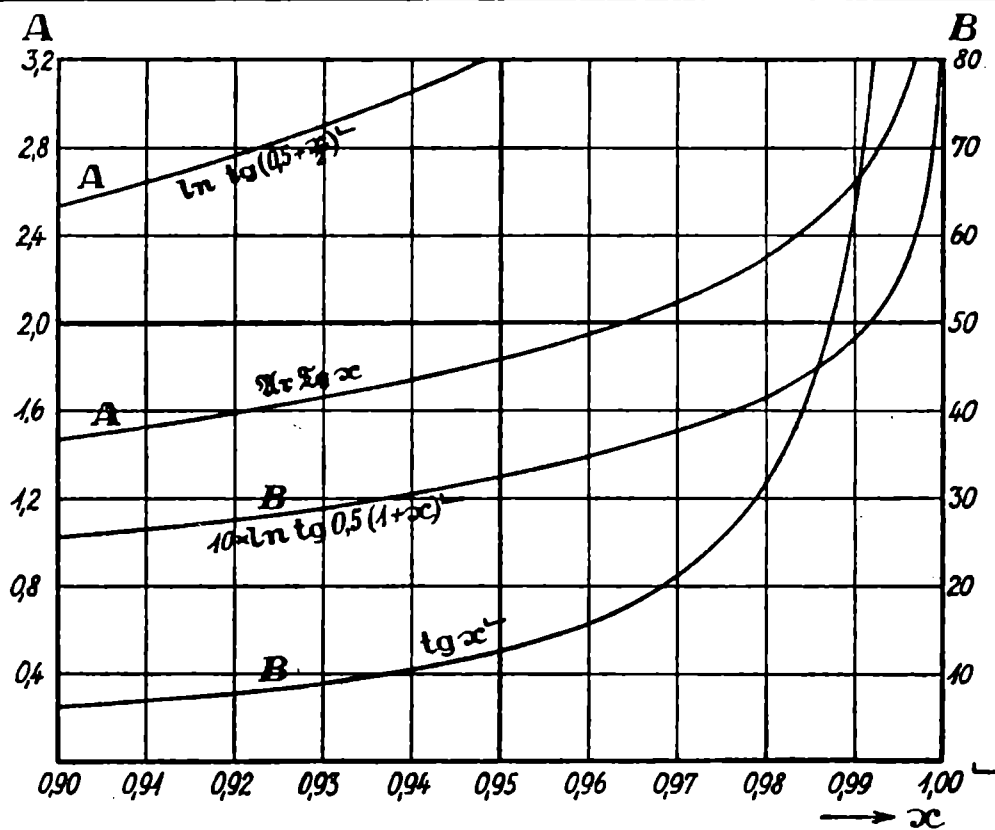
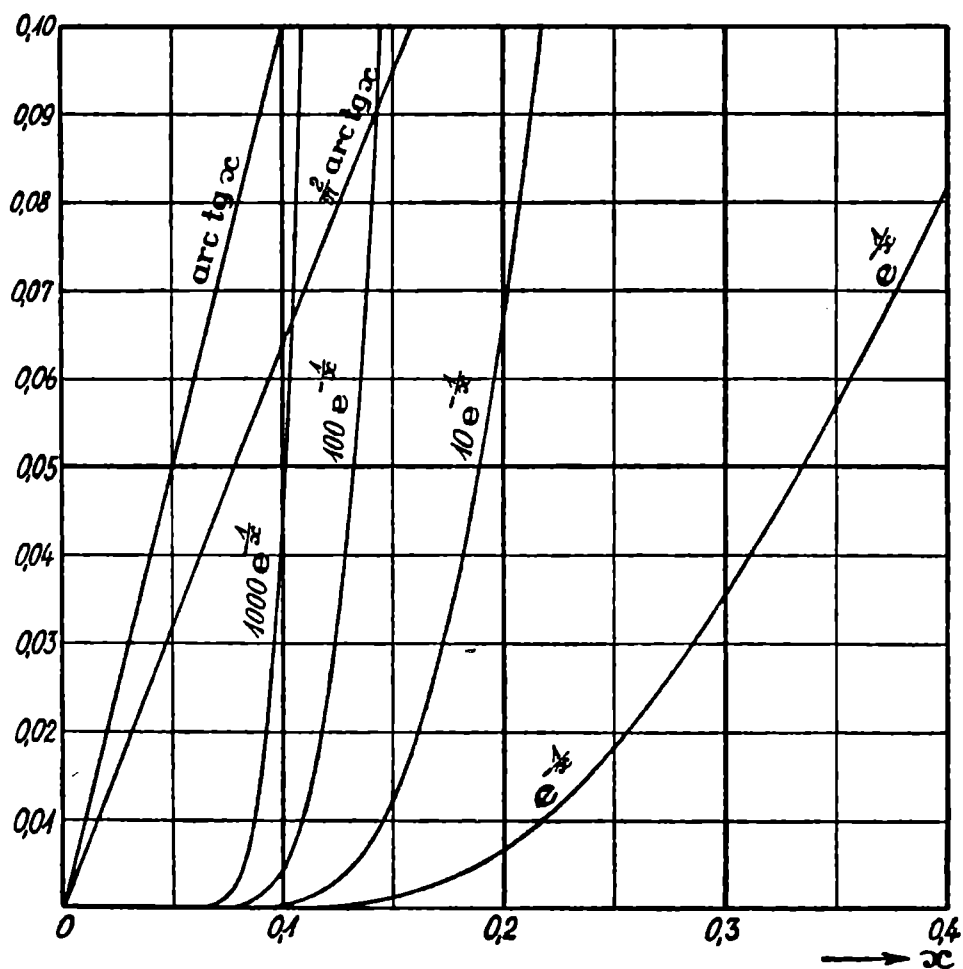


Fig. 43. Winkel in Rechten. Angles in quadrants

Fig. 44. $\exp(-\frac{1}{x})$

ϱ	$1 - \cos \varrho$	ϱ	$1 - \cos \varrho$	x	$\cos \frac{\pi}{2} x - 1$	x	$\cos \frac{\pi}{2} x - 1$
0,00 5	0,000 03064	0,09 0	0,00 9977 ^{223,5}	0,0 05	0,0 ⁴ 3084	0,1 00	0,01 2362 ²⁵⁴⁰
0,01 0	12337	2	0,01 0424 ^{228,5}	10	0,0 ³ 12337	05	3632 ²⁶⁶⁶
0,01 5	27757	4	0881 ^{233,5}	15	0,0 ³ 27759	10	4965 ²⁷⁹⁰
0,02 0	0,000 4934 ⁵⁰⁶	6	1348 ^{238,5}	0,02 0	0,000 4935 ⁵⁰⁶	15	6360 ²⁹¹⁶
1	5440 ⁵³¹	8	1825 ^{243,5}	1	5441 ⁵³¹	20	7818 ³⁰⁴²
2	5971 ⁵⁵⁵	0,1 00	2312 ²⁵¹⁸	2	5972 ⁵⁵⁵	25	9339 ³¹⁶⁶
3	6526 ⁵⁷⁹	05	3571 ²⁶⁴⁰	3	6527 ⁵⁸⁰	30	0,02 0922 ³²⁹²
4	7105 ⁶⁰⁵	10	4891 ²⁷⁶²	4	7107 ⁶⁰⁵	35	2568 ³⁴²⁰
5	7710 ⁶²⁹	15	6272 ²⁸⁸²	5	7712 ⁶²⁹	40	4278 ³⁵⁴⁶
6	8339 ⁶⁵³	20	7713 ³⁰⁰⁴	6	8341 ⁶⁵⁴	45	6051 ³⁶⁷²
7	8992 ⁶⁷⁹	25	9215 ³¹²⁴	7	8995 ⁶⁷⁹	50	7887 ³⁷⁹⁸
8	9671 ⁷⁰³	30	0,02 0777 ³²⁴⁶	8	9674 ⁷⁰³	55	9786 ³⁹²⁴
9	0,001 0374 ⁷²⁷	35	2400 ³³⁶⁶	9	0,001 0377 ⁷²⁸	60	0,0 3175 ⁴⁰⁶
0,03 0	1101 ⁷⁵²	40	4083 ³⁴⁸⁸	0,03 0	1105 ⁷⁵³	65	3378 ⁴¹⁸
1	1853 ⁷⁷⁷	45	5827 ³⁶⁰⁶	1	1858 ⁷⁷⁸	70	3587 ⁴³⁰
2	2630 ⁸⁰²	50	7630 ³⁷²⁸	2	2636 ⁸⁰²	75	3802 ⁴⁴⁴
3	3432 ⁸²⁶	55	9494 ³⁸⁶	3	3438 ⁸²⁷	80	4024 ⁴⁵⁶
4	4258 ⁸⁵¹	60	0,0 3142 ³⁹⁶	4	4265 ⁸⁵²	85	4252 ⁴⁷⁰
5	5109 ⁸⁷⁶	65	3340 ⁴⁰⁸	5	5117 ⁸⁷⁶	90	4487 ⁴⁸²
6	5985 ⁹⁰⁰	70	3544 ⁴²⁰	6	5993 ⁹⁰¹	95	4728 ⁴⁹⁶
7	6885 ⁹²⁵	75	3754 ⁴³⁴	7	6894 ⁹²⁶	0,2 00	4976 ⁵¹⁴
8	7810 ⁹⁴⁹	80	3971 ⁴⁴⁴	8	7820 ⁹⁵⁰	1	5490 ⁵⁴¹
9	8759 ⁹⁷⁴	85	4193 ⁴⁵⁶	9	8770 ⁹⁷⁵	2	6031 ⁵⁶⁷
0,04 0	9733 ¹⁰¹¹	90	4421 ⁴⁶⁸	0,04 0	9745 ^{1012,5}	3	6598 ⁵⁹³
2	0,002 1755 ¹⁰⁶⁰	95	4655 ⁴⁷⁸	2	0,002 1770 ^{1061,5}	4	7191 ⁶¹⁹
4	3875 ^{1109,5}	0,2 0	4894 ⁴⁹⁸	4	3893 ^{1111,5}	5	7810 ⁶⁴⁶
6	6094 ^{1158,5}	1	5392 ⁵²⁰	6	6116 ¹¹⁶²	6	8456 ⁶⁷³
8	8411 ¹²¹	2	5912 ⁵⁴³	8	8438 ¹²¹	7	9129 ⁷⁰⁰
0,05 0	0,00 3083 ^{125,5}	3	6455 ⁵⁶⁷	0,05 0	0,00 3086 ¹²⁶	8	9829 ⁷²⁷
2	3334 ^{130,5}	4	7022 ⁵⁹⁰	2	3338 ¹³¹	9	0,1 0556 ⁷⁵⁴
4	3595 ^{135,5}	5	7612 ⁶¹³	4	3600 ^{135,5}	0,3 0	1310 ⁷⁸²
6	3866 ^{140,5}	6	8225 ⁶³⁵	6	3871 ¹⁴¹	1	2092 ⁸¹⁰
8	4147 ^{145,5}	7	8860 ⁶⁵⁷	8	4153 ¹⁴⁶	2	2902 ⁸³⁷
0,06 0	4438 ^{150,5}	8	9517 ⁶⁸⁰	0,06 0	4445 ^{150,5}	3	3739 ⁸⁶⁵
2	4739 ¹⁵⁵	9	0,1 0197 ⁷⁰²	2	4746 ^{155,5}	4	4604 ⁸⁹³
4	5049 ¹⁶⁰	0,3 0	0899 ⁷²⁴	4	5057 ¹⁶¹	5	5497 ⁹²²
6	5369 ¹⁶⁵	1	1623 ⁷⁴⁶	6	5379 ^{165,5}	6	6419 ⁹⁵¹
8	5699 ¹⁷⁰	2	2369 ⁷⁶⁸	8	5710 ^{170,5}	7	7370 ⁹⁸⁰
0,07 0	6039 ¹⁷⁵	3	3137 ⁷⁸⁹	0,07 0	6051 ^{175,5}	8	8350 ¹⁰⁰⁹
2	6389 ^{179,5}	4	3926 ⁸¹⁰	2	6402 ^{180,5}	9	9359 ¹⁰³⁸
4	6748 ^{184,5}	5	4736 ⁸³¹	4	6763 ^{185,5}	0,4 0	0,2 0397
6	7117 ^{189,5}	6	5567 ⁸⁵²	6	7134 ^{190,5}		
8	7496 ^{194,5}	7	6419 ⁸⁷³	8	7515 ^{195,5}		
0,08 0	7885 ^{199,5}	8	7292 ⁸⁹³	0,08 0	7906 ^{200,5}		
2	8284 ^{204,5}	9	8185 ⁹¹³	2	8307 ^{205,5}		
4	8693 ²⁰⁹	0,4 0	9098 ⁹³⁴	4	8718 ²¹⁰		
6	9111 ²¹⁴	1	0,2 0032	6	9138 ^{215,5}		
8	9539 ²¹⁹			8	9569 ^{220,5}		
0,09 0	0,00 9977			0,09 0	0,01 0010 ²²⁵		
				2	0460 ^{230,5}		
				4	0921 ²³⁵		
				6	1391 ^{240,5}		
				8	1872 ²⁴⁵		
				0,10 0	0,01 2362		

Für $\varrho < 0,02$ berechne
For $\varrho < 0,02$ compute

$$f(\varrho) = 1 - \cos \varrho = 1,2337 \varrho^2.$$

$0,02 < \varrho < 0,04$:

$$f(\varrho_0 + h) = f(\varrho_0) + 2,4674 (\varrho_0 + \frac{1}{2}h)h.$$

$0,04 < \varrho$:

$$f(\varrho_0 + h) = f(\varrho_0) + 1,5708 h \sin (\varrho_0 + \frac{1}{2}h).$$

Für $x < 0,02$ berechne
For $x < 0,02$ compute

$$f(x) = -1 + \cos \frac{\pi}{2} x = 1,2337 x^2.$$

$$0,02 < x < 0,04: f(x_0 + h) = f(x_0) + 2,4674 (x_0 + \frac{1}{2}h)h. \quad 0,04 < x: f(x_0 + h) = f(x_0) + 1,5708 h \sin \frac{\pi}{2} (x_0 + \frac{1}{2}h)$$

Die Hyperbelfunktionen The hyperbolic functions

1. Definition

$$\operatorname{Sin} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v+1}}{2^{2v+1} v!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sinh x$$

$$\operatorname{Cos} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v}}{2^{2v} v!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cosh x$$

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots = \tanh x \quad (|x| < \frac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots = \sinh^{-1} x \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \sqrt{x^2 - 1} = \cosh^{-1} x.$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

2. Spezielle Werte

2. Special values

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} 0 &= 0, & \operatorname{Cos} 0 &= 1, & \operatorname{Tg} 0 &= 0 \\ \operatorname{Sin} \infty &= \infty, & \operatorname{Cos} \infty &= \infty, & \operatorname{Tg} \infty &= 1 \end{aligned}$$

3. Grundgesetze

3. Fundamental laws

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}(-x) &= -\operatorname{Sin} x, & \operatorname{Cos}(-x) &= \operatorname{Cos} x, & \operatorname{Tg}(-x) &= -\operatorname{Tg} x \\ \operatorname{Cos}^2 x &= 1 - \operatorname{Sin}^2 x, & (\operatorname{Cos} x \pm \operatorname{Sin} x)^n &= \operatorname{Cos} nx \pm \operatorname{Sin} nx. \end{aligned}$$

4. Eine Funktion ausgedrückt durch die andere

4. One function expressed by the other

$$\operatorname{Sin} x = \sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{Tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{Tg}^2 x}}, \quad \operatorname{Cos} x = \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{Tg}^2 x}}$$

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - 1}}{\operatorname{Cos} x}, \quad \frac{\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x} = \frac{1 + \operatorname{Tg} x}{1 - \operatorname{Tg} x}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} (1 + 2t) = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} (2\sqrt{t} \sqrt{1+t}) = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \sqrt{t}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} (1 - v) = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2} + \frac{v}{2(2-v)} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2} - \frac{v}{2(2-v)} \right).$$

5. Verknüpfung der Funktionen zweier Sektoren

5. Connection of the functions of two sectors

$$\operatorname{Sin} (x \pm y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y$$

$$\operatorname{Cos} (x \pm y) = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y$$

$$\operatorname{Tg} (x \pm y) = \frac{\operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y}{1 \pm \operatorname{Tg} x \operatorname{Tg} y}$$

$$\begin{array}{l|l}
\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} & \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
\operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} & \\
\operatorname{Ctg} x \pm \operatorname{Tg} y = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin x \cos y} & \operatorname{Ctg} x \pm \operatorname{Ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y} \\
\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y) \sin(x-y) \\
\sin^2 x + \cos^2 y = \cos^2 x + \sin^2 y = \cos(x+y) \cos(x-y) \\
\cos^2 x - \sin^2 y = 1 + \sin(x+y) \sin(x-y) \\
\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos(x+y) - \frac{1}{2} \cos(x-y) & \sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x-y) \\
\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y) & \cos x \sin y = \frac{1}{2} \sin(x+y) - \frac{1}{2} \sin(x-y) \\
\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x-y)}, & \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \operatorname{Ctg} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{Ctg} \frac{1}{2}(x-y) \\
\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x \pm \cos y} = \frac{\cos x - \cos y}{\sin x \mp \sin y} = \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x \pm y) \\
\frac{\operatorname{Tg} x + \operatorname{Tg} y}{\operatorname{Tg} x - \operatorname{Tg} y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} \\
\operatorname{Ar} \sin x \pm \operatorname{Ar} \sin y = \operatorname{Ar} \sin(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}) \\
\operatorname{Ar} \cos x \pm \operatorname{Ar} \cos y = \operatorname{Ar} \cos(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}) \\
\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} y = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{x \pm y}{1 \pm xy} \\
A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{B}{A}\right) = \sqrt{B^2 - A^2} \sin\left(x + \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{A}{B}\right).
\end{array}$$

6. Funktionen der Vielfachen eines Sektors

6. Functions of the multiples of a sector

$$\begin{array}{l}
\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg}^2 x} \\
\sin 3x = 4 \sin^3 x + 3 \sin x = \sin x (4 \cos^2 x - 1) \\
\sin(n+1)x = 2 \cos x \sin nx - \sin(n-1)x \\
\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x + \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x + \dots \\
\cos 2x = \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 + \operatorname{Tg}^2 x}{1 - \operatorname{Tg}^2 x} \\
\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \sin^2 x + 1) \\
\cos(n+1)x = 2 \cos x \cos nx - \cos(n-1)x \\
\cos nx = \cos^n x + \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x + \dots \\
\operatorname{Tg} 2x = \frac{2 \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg}^2 x}, \quad \operatorname{Tg} 3x = \frac{\operatorname{Tg}^3 x + 3 \operatorname{Tg} x}{3 \operatorname{Tg}^2 x + 1} \\
2 \operatorname{Ctg} 2x = \operatorname{Tg} x + \operatorname{Ctg} x \\
\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} = \frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{\cos x - 1}{\sin x} \\
\cos 2x + \cos 2y = 2 + 2(\sin^2 x - \sin^2 y) = 2(\sin^2 x + \cos^2 y) \\
\cos 2x - \cos 2y = 2(\sin^2 x + \sin^2 y) \\
(1 + \varepsilon) - \cos x = \varepsilon - 2 \sin^2 \frac{x}{2}.
\end{array}$$

7. Potenzen

7. Powers

$$2 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = \cos 2x \pm 1,$$

$$8 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^4 = \cos 4x \pm 4 \cos 2x + 3,$$

$$32 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^6 = \cos 6x \pm 6 \cos 4x + 15 \cos 2x \pm 10,$$

$$128 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^8 = \cos 8x \pm 8 \cos 6x + 28 \cos 4x \pm 56 \cos 2x + 35,$$

$$2^{2n-1} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^{2n} = \cos 2nx \pm \binom{2n}{1} \cos 2(n-1)x + \binom{2n}{2} \cos 2(n-2)x \pm \dots$$

$$+ (\pm 1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos 2x + (\pm 1)^n \frac{1}{2} \binom{2n}{n}.$$

$$4 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^3 = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \pm 3 \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$16 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^5 = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \pm 5 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + 10 \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$64 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^7 = \frac{\cos 7x}{\sin 7x} \pm 7 \frac{\cos 5x}{\sin 5x} + 21 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \pm 35 \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$2^{2n} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^{2n+1} = \frac{\cos (2n+1)x}{\sin (2n+1)x} \pm \binom{2n+1}{1} \frac{\cos (2n-1)x}{\sin (2n-1)x} + \binom{2n+1}{2} \frac{\cos (2n-2)x}{\sin (2n-2)x} \pm \dots$$

$$+ (\pm 1)^{n-1} \binom{2n+1}{n-1} \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + (\pm 1)^n \binom{2n+1}{n} \frac{\cos x}{\sin x}.$$

8. Beziehungen zu den Exponentialfunktionen und Logarithmen

8. Relations to the exponential functions and logarithms

$$\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 - \frac{e^{-x}}{\cos x},$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 + \frac{e^{-x}}{\sin x}$$

$$e^x = \cos x + \sin x = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$e^{-x} = \cos x - \sin x = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{Ar} \sin x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Ar} \cos x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad = -\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{Ar} \operatorname{ctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{tg} (1 - 2t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{t} - 1 \right)$$

$$\ln x = \operatorname{Ar} \sin \frac{x^2 - 1}{2x} = \operatorname{Ar} \cos \frac{x^2 + 1}{2x} = \operatorname{Ar} \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

9. Differentialformeln

9. Derivatives

$$d \sin x = \cos x dx, \quad d \cos x = -\sin x dx, \quad d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d \ln \sin x = \operatorname{ctg} x dx, \quad d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x dx, \quad d \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 dx}{\sin 2x}$$

$$d \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x}, \quad d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
d \operatorname{Ar} \sin x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, & d \operatorname{Ar} \cos x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\
d \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x &= \frac{dx}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1), & d \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x &= \frac{-dx}{x^2-1} \quad (x > 1, x < -1) \\
d \sin^2 x &= d \cos^2 x = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx. \\
d \operatorname{Amp} x &= d \operatorname{gd} x = \frac{dx}{\operatorname{Cof} x}, & d \operatorname{Ar} \operatorname{Amp} x &= \frac{dx}{\cos x}. \\
e^{px} \frac{d}{dx} e^{-qx} \frac{\sin}{\operatorname{Cof}} (qx + \beta) &= -\sqrt{p^2 - q^2} \frac{\sin}{\operatorname{Cof}} \left(qx + \beta - \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{q}{p} \right) \\
&= +\sqrt{q^2 - p^2} \frac{\operatorname{Cof}}{\sin} \left(qx + \beta - \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{p}{q} \right) \\
\frac{d}{dx} e^{-qx} \frac{\sin}{\operatorname{Cof}} (qx + \beta) &= \pm q e^{-\beta} e^{-2qx}.
\end{aligned}$$

10. Integralformeln

10. Integrals

$$\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x, & \int \cos x dx &= \sin x, & \int \operatorname{Tg} x dx &= \ln \operatorname{Cof} x \\
\int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \operatorname{Tg} \frac{x}{2}, & \int \frac{dx}{\sin 2x} &= \frac{1}{2} \ln \operatorname{Tg} x, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{Ctg} x \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{Tg} x, & \int \frac{dx}{\operatorname{Tg} x} &= \ln \sin x, & \int \frac{dx}{\operatorname{Cof} x} &= \operatorname{arc} \sin \operatorname{Tg} x = \operatorname{Amp} x \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{Ar} \sin x, & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{Ar} \cos x, & \int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \quad (x < 1) \\
\int \frac{dx}{x^2-1} &= -\operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x \quad (x > 1), & \int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}} &= \operatorname{Ar} \cos (1+x) \\
\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= -\operatorname{Ar} \sin \frac{1}{x}, & \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= -\operatorname{Ar} \cos \frac{1}{x} \\
\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} &= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \\
\int \frac{xdx}{a+bx+cx^2} &= \frac{1}{2c} \left[\ln(a+bx+cx^2) + \frac{2b}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right] \\
\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)} &= \frac{1}{2a} \left[\ln \frac{x^2}{a+bx+cx^2} + \frac{2b}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right] \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \sin \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \cos \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \\
\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{1}{c} \left[\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \sin \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \right] \\
\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{-1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar} \sin \frac{2a+bx}{x\sqrt{4ac-b^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{-1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar} \cos \frac{2a+bx}{x\sqrt{b^2-4ac}} \\
\int \sin^n x dx &= \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} - \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \\
\int \cos^n x dx &= \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \\
\int \operatorname{Tg}^n x dx &= -\frac{\operatorname{Tg}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{Tg}^{n-2} x dx \\
\int \frac{dx}{\sin^n x} &= -\frac{\operatorname{Cof} x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} & \int \operatorname{Ar} \sin x dx &= x \operatorname{Ar} \sin x - \sqrt{x^2+1} \\
\int \frac{dx}{\cos^n x} &= \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} & \int \operatorname{Ar} \cos x dx &= x \operatorname{Ar} \cos x - \sqrt{x^2-1} \\
\int \frac{dx}{\operatorname{Tg}^n x} &= -\frac{1}{(n-1) \operatorname{Tg}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{Tg}^{n-2} x} & \int \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x dx &= x \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2).
\end{aligned}$$

11. Näherungswerte bei kleinen Sektoren

11. Approximate values for small sectors

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &\approx 1 + \frac{x^2}{6} \approx \sqrt[3]{\cos x}, & \cos x &\approx 1 + \frac{x^2}{2}, & \frac{\operatorname{tg} x}{x} &\approx 1 - \frac{x^2}{3} \approx \sqrt[3]{\cos^3 x} \\ \cos x + \cos y &\approx 2, & \sin x + \sin y &\approx x + y, & \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y} &\approx \frac{x^2 + y^2}{6} \\ \cos x - \cos y &\approx \frac{x^2 + y^2}{2}, & \sin x - \sin y &\approx \frac{x^2}{3}, & x \operatorname{ctg} x &\approx 1 + \frac{x^2}{3} \\ \frac{\operatorname{Ar} \sin x}{x} &\approx 1 - \frac{x^2}{6}, & \frac{\operatorname{Ar} \operatorname{tg} x}{x} &\approx 1 + \frac{x^2}{3}, & \operatorname{Ar} \cos x &\approx \sqrt{2(x-1)} \\ \operatorname{Ar} \cos (1+x) &\approx \sqrt{2x} - \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{3x^2}{80} \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{5x^3}{448} \sqrt{\frac{x}{2}} \dots\end{aligned}$$

12. Näherungswerte bei großen Sektoren

12. Approximate values for large sectors

$$\begin{aligned}\sin x &\approx \cos x \approx \frac{1}{2} e^x, & \operatorname{tg} x &\approx 1 - 2e^{-2x}, & \operatorname{ctg} x &\approx 1 + 2e^{-2x} \\ \log (2 \sin x) &\approx \log (2 \cos x) \approx x \log e = Mx, & M &= 0,434\,294\,5. \\ \operatorname{Ar} \sin x &\approx \ln (2x) + \frac{1}{(2x)^2}, & \operatorname{Ar} \cos x &\approx \ln (2x) - \frac{1}{(2x)^2} \\ \operatorname{Ar} \operatorname{tg} (1-x) &\approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{x} \right) - \frac{x}{4}.\end{aligned}$$

13. Hyperbelamplitude

13. The gudermannian

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_0^x \frac{dt}{\cos t} = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} \equiv \operatorname{Amp} x \equiv \operatorname{gd} x \\ x &= \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2,3026 \log \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} + 45^\circ \right) \equiv \operatorname{Ar} \operatorname{Amp} \gamma \\ \sin x &= \operatorname{tg} \gamma, & \cos x &= \frac{1}{\cos \gamma}, & \operatorname{tg} x &= \sin \gamma \\ e^x &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, & \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \gamma &= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{6 \cos^3 x} + \dots \\ \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} - \dots & \left| \begin{array}{l} \gamma = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \dots \\ x = \gamma + \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{24} + \frac{61\gamma^7}{5040} + \dots \end{array} \right. & (\gamma < \frac{\pi}{2}). \\ \frac{x}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{\gamma}{2} + \dots \\ \operatorname{Amp} x &\approx \frac{\pi}{2} - 2e^{-x} \quad \left(\begin{array}{l} x \text{ groß} \\ \text{large} \end{array} \right) & \operatorname{Ar} \operatorname{Amp} (\frac{\pi}{2} - 2t) &= \ln \operatorname{ctg} t \approx \ln \frac{1}{t} - \frac{t^2}{3} \quad \left(\begin{array}{l} t \text{ klein} \\ \text{small} \end{array} \right)\end{aligned}$$

Wenn $\gamma = \operatorname{Amp} x$ ist, so ist $i x = \operatorname{Amp} i \gamma$.
If we have

Setzt man dann

$$\gamma = \gamma_1 + i \gamma_2$$

so wird

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{\sin x_1}{\cos x_2} \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \frac{\sin x_2}{\cos x_1}\end{aligned}$$

Putting

$$x = x_1 + i x_2,$$

we obtain

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x_1 &= \frac{\sin \gamma_1}{\cos \gamma_2} \\ \operatorname{tg} x_2 &= \frac{\sin \gamma_2}{\cos \gamma_1}.\end{aligned}$$

Die Figuren stellen die Exponentialfunktion von $1/z$ dar ($z = x + iy$). Dicht bei der „wesentlich singulären“ Stelle $z = 0$ hat man links beliebig kleine, rechts beliebig große Werte des Betrages s der Funktion, im Vordergrund und im Hintergrund Werte von der Größenordnung 1. Die Fall-Linien $\sigma = \text{konst.}$ drängen sich bei $z = 0$ immer mehr zusammen. Die die komplexen Funktionswerte darstellenden Pfeile weisen hier also nach allen Richtungen.

The figures represent the exponential function of $1/z$ ($z = x + iy$). Close by the “essentially singular” point $z = 0$ we have on the left very small values, on the right very large values, of the modulus s of the function, in the fore- and background values near unity. The lines of steepest gradient $\sigma = \text{konst.}$ crowd the closer together the nearer we approach zero. The arrows representing the complex values of the function point here in all directions.

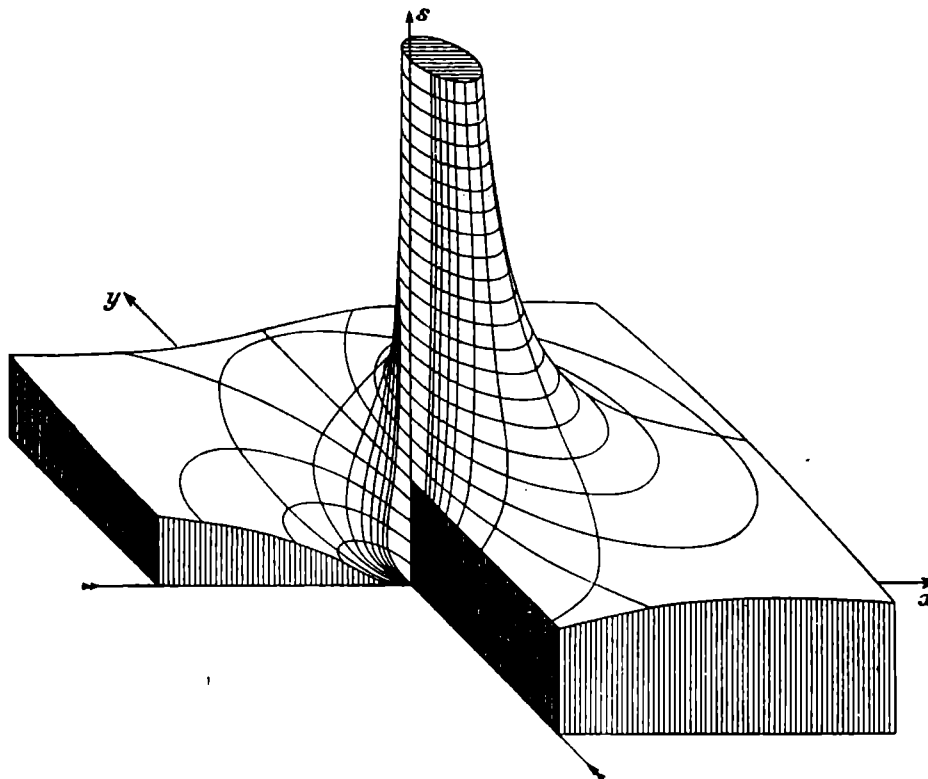
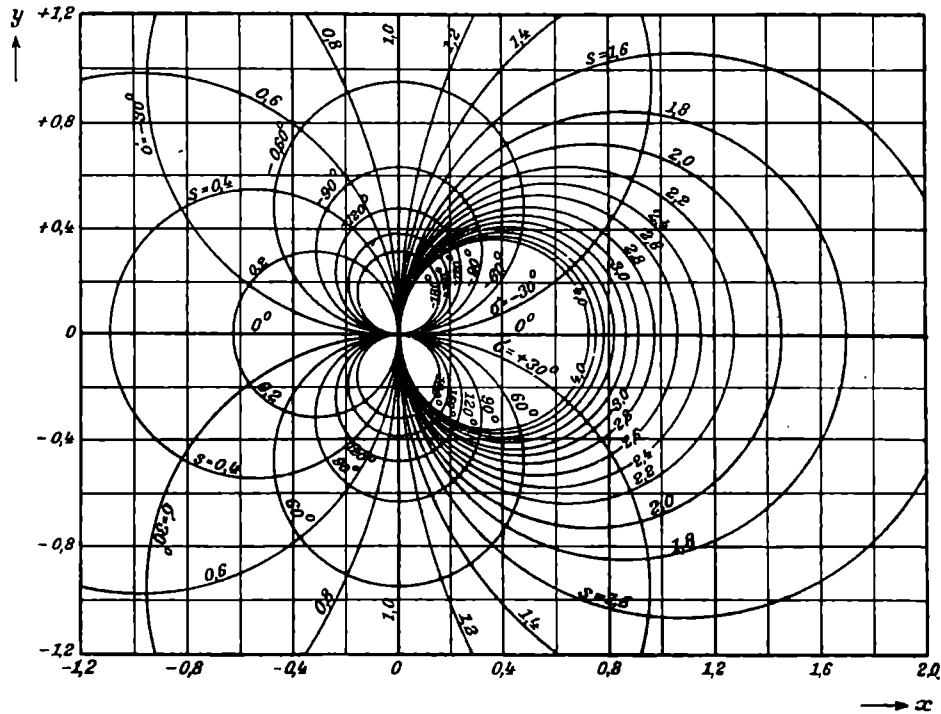


Fig. 45. Höhenkarte und Fig. 46. Relief der Exponentialfunktion $s e^{i\sigma} = \frac{1}{e^{x+iy}}$
Fig. 45. Altitude chart and fig. 46. Relief of the exponential function

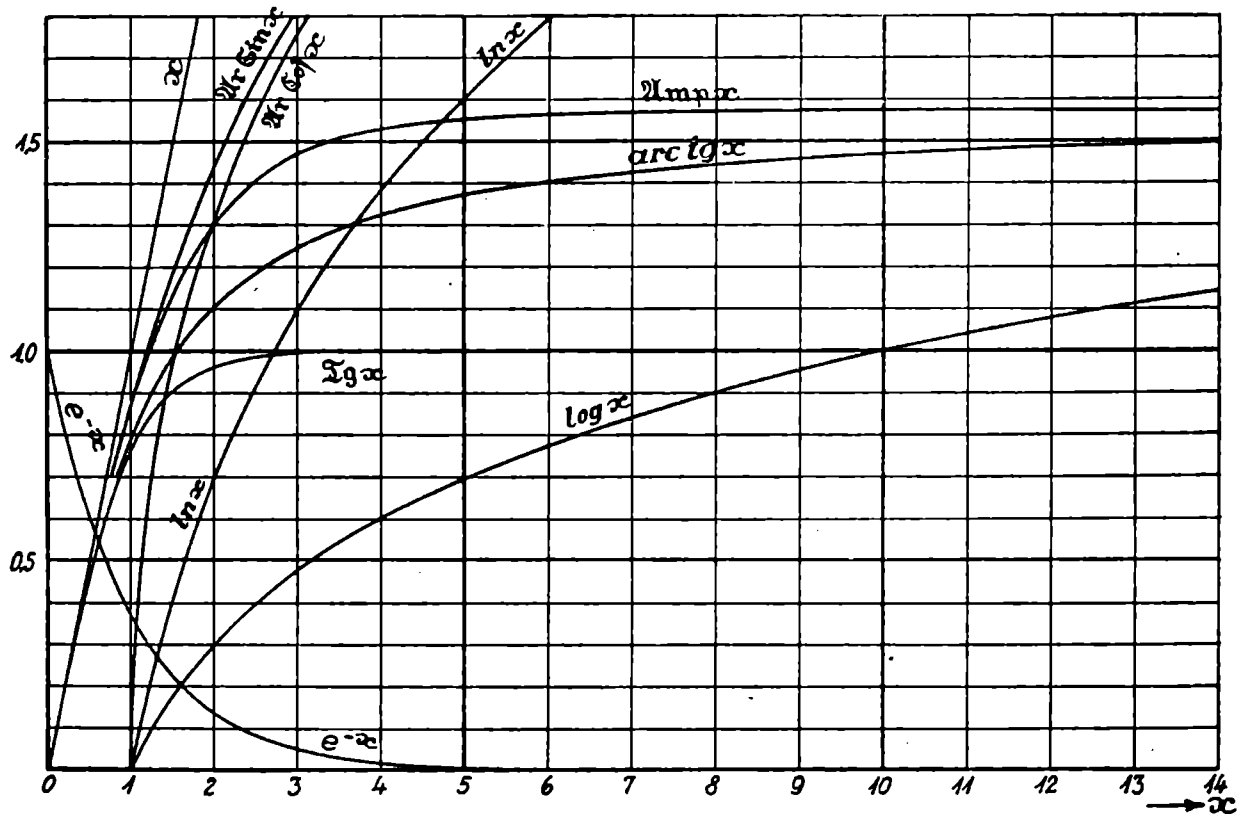
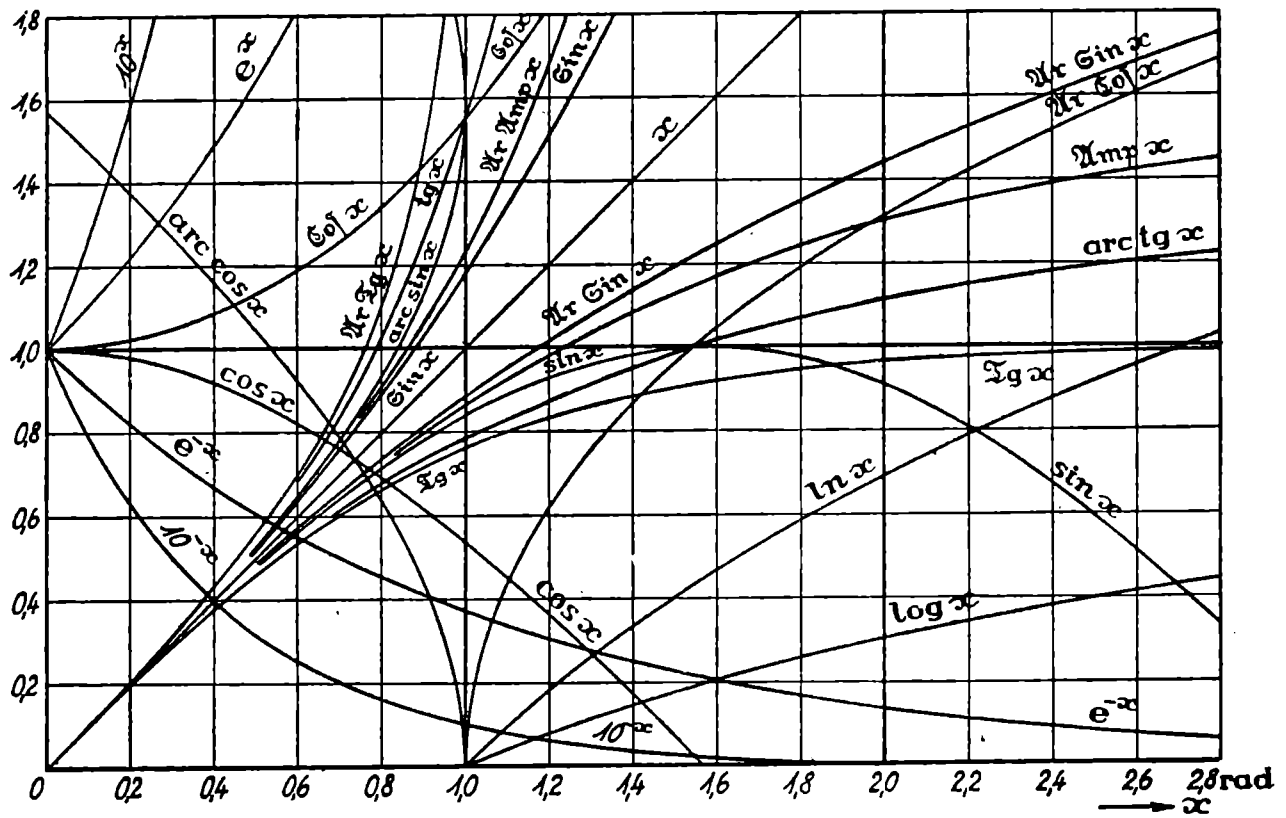
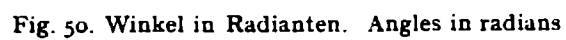
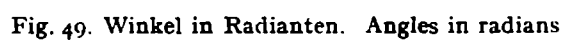


Fig. 47 und 48. Winkel in Radianten
Fig. 47 and 48. Angles in radians



x	$\text{Tg } x$	$\text{arc tg } x$	$\text{Nr Amp } x$	$\text{arc sin } x$	$\text{tg } x$	$\text{Nr Tg } x$
rad	0,	rad	0,	rad	0,	0,
0,00	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁰⁰⁰	0 0000 ¹⁰⁰⁰
1	1000 ¹⁰⁰⁰	1000 ¹⁰⁰⁰	1000 ¹⁰⁰⁰	1000 ¹⁰⁰⁰	1000 ¹⁰⁰⁰	1000 ¹⁰⁰⁰
2	2000 ⁹⁹⁹	2000 ⁹⁹⁹	2000 ¹⁰⁰⁰	2000 ¹⁰⁰⁰	2000 ¹⁰⁰⁰	2000 ¹⁰⁰¹
3	2999 ⁹⁹⁹	2999 ⁹⁹⁹	3000 ¹⁰⁰¹	3000 ¹⁰⁰¹	3000 ¹⁰⁰²	3001 ¹⁰⁰¹
4	3998 ⁹⁹⁸	3998 ⁹⁹⁸	4001 ¹⁰⁰¹	4001 ¹⁰⁰¹	4002 ¹⁰⁰²	4002 ¹⁰⁰²
5	4996 ⁹⁹⁷	4996 ⁹⁹⁷	5002 ¹⁰⁰¹	5002 ¹⁰⁰²	5004 ¹⁰⁰³	5004 ¹⁰⁰³
6	5993 ⁹⁹⁶	5993 ⁹⁹⁶	6003 ¹⁰⁰³	6004 ¹⁰⁰²	6007 ¹⁰⁰⁴	6007 ¹⁰⁰⁴
7	6989 ⁹⁹⁴	6989 ⁹⁹⁴	7006 ¹⁰⁰³	7006 ¹⁰⁰³	7011 ¹⁰⁰⁶	7011 ¹⁰⁰⁶
8	7983 ⁹⁹³	7983 ⁹⁹³	8009 ¹⁰⁰³	8009 ¹⁰⁰³	8017 ¹⁰⁰⁷	8017 ¹⁰⁰⁷
9	8976 ⁹⁹¹	8976 ⁹⁹¹	9012 ¹⁰⁰⁵	9012 ¹⁰⁰⁵	9024 ¹⁰⁰⁹	9024 ¹⁰⁰⁹
0,10	9967 ⁹⁸⁹	9967 ⁹⁸⁹	1 0017 ¹⁰⁰⁵	1 0017 ¹⁰⁰⁵	1 0033 ¹⁰¹²	1 0033 ¹⁰¹²
1	1 0956 ⁹⁸⁷	1 0956 ⁹⁸⁷	1022 ¹⁰⁰⁷	1022 ¹⁰⁰⁷	1045 ¹⁰¹³	1045 ¹⁰¹³
2	1943 ⁹⁸⁴	1943 ⁹⁸⁵	2029 ¹⁰⁰⁸	2029 ¹⁰⁰⁸	2058 ¹⁰¹⁶	2058 ¹⁰¹⁶
3	2927 ⁹⁸²	2928 ⁹⁸²	3037 ¹⁰⁰⁹	3037 ¹⁰⁰⁹	3074 ¹⁰¹⁸	3074 ¹⁰¹⁹
4	3909 ⁹⁸⁰	3910 ⁹⁷⁹	4046 ¹⁰¹⁰	4046 ¹⁰¹¹	4092 ¹⁰²²	4093 ¹⁰²¹
5	4889 ⁹⁷⁶	4889 ⁹⁷⁷	5056 ¹⁰¹²	5057 ¹⁰¹²	5114 ¹⁰²⁴	5114 ¹⁰²⁵
6	5865 ⁹⁷³	5866 ⁹⁷³	6068 ¹⁰¹⁴	6069 ¹⁰¹⁴	6138 ¹⁰²⁸	6139 ¹⁰²⁸
7	6838 ⁹⁷⁰	6839 ⁹⁷⁰	7082 ¹⁰¹⁵	7083 ¹⁰¹⁶	7166 ¹⁰³¹	7167 ¹⁰³¹
8	7808 ⁹⁶⁷	7809 ⁹⁶⁷	8097 ¹⁰¹⁸	8099 ¹⁰¹⁷	8197 ¹⁰³⁵	8198 ¹⁰³⁶
9	8775 ⁹⁶³	8776 ⁹⁶⁴	9115 ¹⁰²⁰	9116 ¹⁰²⁰	9232 ¹⁰³⁹	9234 ¹⁰³⁹
0,20	9738 ⁹⁵⁹	9740 ⁹⁵⁹	2 0135 ¹⁰²¹	2 0136 ¹⁰²²	2 0271 ¹⁰⁴³	2 0273 ¹⁰⁴⁴
1	2 0697 ⁹⁵⁵	2 0699 ⁹⁵⁶	1156 ¹⁰²⁴	1158 ¹⁰²³	1314 ¹⁰⁴⁸	1317 ¹⁰⁴⁹
2	1652 ⁹⁵¹	1655 ⁹⁵²	2180 ¹⁰²⁶	2181 ¹⁰²⁷	2362 ¹⁰⁵²	2366 ¹⁰⁵³
3	2603 ⁹⁴⁷	2607 ⁹⁴⁷	3206 ¹⁰²⁸	3208 ¹⁰²⁹	3414 ¹⁰⁵⁸	3419 ¹⁰⁵⁷
4	3550 ⁹⁴²	3554 ⁹⁴⁴	4234 ¹⁰³¹	4237 ¹⁰³¹	4472 ¹⁰⁶²	4476 ¹⁰⁶⁵
5	4492 ⁹³⁸	4498 ⁹³⁹	5265 ¹⁰³³	5268 ¹⁰³⁴	5534 ¹⁰⁶⁸	5541 ¹⁰⁷⁰
6	5430 ⁹³²	5437 ⁹³⁴	6298 ¹⁰³⁶	6302 ¹⁰³⁷	6602 ¹⁰⁷⁴	6611 ¹⁰⁷⁵
7	6362 ⁹²⁸	6371 ⁹³⁰	7334 ¹⁰³⁹	7339 ¹⁰⁴⁰	7676 ¹⁰⁷⁹	7686 ¹⁰⁸²
8	7290 ⁹²³	7301 ⁹²⁵	8373 ¹⁰⁴²	8379 ¹⁰⁴⁴	8755 ¹⁰⁸⁶	8768 ¹⁰⁸⁹
9	8213 ⁹¹⁸	8226 ⁹²⁰	9415 ¹⁰⁵	9423 ¹⁰⁵	9841 ¹⁰⁹	9857 ¹¹⁰
0,30	9131 ⁹¹	9146 ⁹²	3 046 ¹⁰⁵	3 047 ¹⁰⁵	3 093 ¹¹⁰	3 095 ¹¹⁰
1	3 004 ⁹¹	3 006 ⁹¹	151 ¹⁰⁵	152 ¹⁰⁵	203 ¹¹¹	205 ¹¹¹
2	095 ⁹⁰	097 ⁹⁰	256 ¹⁰⁶	257 ¹⁰⁶	314 ¹¹¹	316 ¹¹²
3	185 ⁹⁰	187 ⁹⁰	362 ¹⁰⁵	363 ¹⁰⁶	425 ¹¹²	428 ¹¹³
4	275 ⁸⁹	277 ⁹⁰	467 ¹⁰⁷	469 ¹⁰⁷	537 ¹¹³	541 ¹¹³
5	364 ⁸⁸	367 ⁸⁹	574 ¹⁰⁶	576 ¹⁰⁷	650 ¹¹⁴	654 ¹¹⁵
6	452 ⁸⁸	456 ⁸⁸	680 ¹⁰⁷	683 ¹⁰⁷	764 ¹¹⁵	769 ¹¹⁵
7	540 ⁸⁷	544 ⁸⁸	787 ¹⁰⁸	790 ¹⁰⁸	879 ¹¹⁵	884 ¹¹⁷
8	627 ⁸⁷	632 ⁸⁷	895 ¹⁰⁸	898 ¹⁰⁸	994 ¹¹⁷	4 001 ¹¹⁷
9	714 ⁸⁶	719 ⁸⁶	4 003 ¹⁰⁸	4 006 ¹⁰⁹	4 111 ¹¹⁷	118 ¹¹⁸
0,40	800 ⁸⁵	805 ⁸⁶	111 ¹⁰⁹	115 ¹¹⁰	228 ¹¹⁸	236 ¹²⁰
1	885 ⁸⁴	891 ⁸⁵	220 ¹⁰⁹	225 ¹⁰⁹	346 ¹²⁰	356 ¹²¹
2	969 ⁸⁴	976 ⁸⁵	329 ¹¹⁰	334 ¹⁰⁹	466 ¹²⁰	477 ¹²²
3	4 053 ⁸³	4 061 ⁸⁴	439 ¹¹⁰	445 ¹¹¹	586 ¹²²	599 ¹²³
4	136 ⁸³	145 ⁸⁴	549 ¹¹¹	556 ¹¹²	708 ¹²³	722 ¹²⁵
5	219 ⁸²	229 ⁸³	660 ¹¹¹	668 ¹¹²	831 ¹²³	847 ¹²⁶
6	301 ⁸¹	312 ⁸²	771 ¹¹²	780 ¹¹³	954 ¹²⁶	973 ¹²⁸
7	382 ⁸⁰	394 ⁸¹	883 ¹¹³	893 ¹¹⁴	5 080 ¹²⁶	5 101 ¹²⁹
8	462 ⁸⁰	475 ⁸¹	996 ¹¹³	5 007 ¹¹⁴	206 ¹²⁸	230 ¹³¹
9	542 ⁷⁹	556 ⁸⁰	5 109 ¹¹³	121 ¹¹⁵	334 ¹²⁹	361 ¹³²
0,50	4 621	4 636	5 222	5 236	5 463	5 493
	0,	0,	0,	0,	0,	0,

x	$\lg x$	$\arctg x$	$\text{Ar Amp } x$	$\arcsin x$	$\tg x$	$\arccos x$	x	$\text{Ar } \lg x$
rad		rad		rad		rad		rad
0,50	0,4 621 ⁷⁸	0,4 636 ⁸⁰	0,5 222 ¹¹⁵	0,5 236 ¹¹⁶	0,5 463 ¹³¹	1,0 472 ¹¹⁶	0,5 0	0,5 493 ¹³⁴
1	699 ⁷⁸	716 ⁷⁹	337 ¹¹⁵	352 ¹¹⁷	594 ¹³²	356 ¹¹⁷	1	627 ¹³⁶
2	777 ⁷⁷	795 ⁷⁹	452 ¹¹⁵	469 ¹¹⁷	726 ¹³³	239 ¹¹⁷	2	763 ¹³⁸
3	854 ⁷⁶	874 ⁷⁷	567 ¹¹⁶	586 ¹¹⁸	859 ¹³⁵	122 ¹¹⁸	3	901 ¹⁴¹
4	930 ⁷⁵	951 ⁷⁷	683 ¹¹⁷	704 ¹²⁰	994 ¹³⁷	004 ¹²⁰	4	0,6 042 ¹⁴²
5	0,5 005 ⁷⁵	0,5 028 ⁷⁷	800 ¹¹⁸	824 ¹²⁰	0,6 131 ¹³⁸	0,9 884 ¹²⁰	0,5 50	184 ¹⁴⁴
6	080 ⁷⁴	105 ⁷⁶	918 ¹¹⁸	944 ¹²¹	269 ¹⁴¹	764 ¹²¹	55	256 ¹⁴⁴
7	154 ⁷³	181 ⁷⁵	0,6 036 ¹²⁰	0,6 065 ¹²²	410 ¹⁴²	643 ¹²²	60	328 ¹⁴⁶
8	227 ⁷²	256 ⁷⁴	156 ¹¹⁹	187 ¹²⁴	552 ¹⁴⁴	521 ¹²⁴	65	401 ¹⁴⁸
9	299 ⁷¹	330 ⁷⁴	275 ¹²¹	311 ¹²⁴	696 ¹⁴⁵	397 ¹²⁴	70	475 ¹⁵⁰
0,60	370 ⁷¹	404 ⁷³	396 ¹²²	435 ¹²⁶	841 ¹⁴⁸	273 ¹²⁶	75	550 ¹⁵⁰
1	441 ⁷⁰	477 ⁷³	518 ¹²²	561 ¹²⁶	989 ¹⁵⁰	147 ¹²⁶	80	625 ¹⁵⁰
2	511 ⁷⁰	550 ⁷²	640 ¹²⁴	687 ¹²⁹	0,7 139 ¹⁵²	021 ¹²⁹	85	700 ¹⁵⁴
3	581 ⁶⁸	622 ⁷¹	764 ¹²⁴	812 ¹²⁹	291 ¹⁵⁴	0,8 892 ¹²⁹	90	777 ¹⁵⁴
4	649 ⁶⁸	693 ⁷¹	888 ¹²⁵	945 ¹³¹	445 ¹⁵⁷	763 ¹³¹	95	854 ¹⁵⁴
5	717 ⁶⁷	764 ⁷⁰	0,7 013 ¹²⁶	0,7 076 ¹³²	602 ¹⁵⁹	632 ¹³²	0,6 00	931 ¹⁵⁸
6	784 ⁶⁶	834 ⁶⁹	139 ¹²⁷	208 ¹³⁴	761 ¹⁶²	500 ¹³⁴	05	0,7 010 ¹⁵⁸
7	850 ⁶⁵	903 ⁶⁹	266 ¹²⁸	342 ¹³⁶	923 ¹⁶⁴	366 ¹³⁴	10	089 ¹⁶⁰
8	915 ⁶⁵	972 ⁶⁸	394 ¹²⁹	478 ¹³⁷	0,8 087 ¹⁶⁶	231 ¹³⁵	15	169 ¹⁶²
9	980 ⁶⁴	0,6 040 ⁶⁷	523 ¹³¹	615 ¹³⁹	253 ¹⁷⁰	093 ¹³⁸	20	250 ¹⁶⁴
0,70	0,6 044 ⁶³	107 ⁶⁷	654 ¹³¹	754 ¹⁴¹	423 ¹⁷²	0,7 954 ¹⁴¹	25	332 ¹⁶⁴
1	107 ⁶²	174 ⁶⁶	785 ¹³²	895 ¹⁴³	595 ¹⁷⁶	813 ¹⁴³	30	414 ¹⁶⁸
2	169 ⁶²	240 ⁶⁶	917 ¹³⁴	0,8 038 ¹⁴⁵	771 ¹⁷⁸	670 ¹⁴⁵	35	498 ¹⁶⁸
3	231 ⁶⁰	306 ⁶⁵	0,8 051 ¹³⁵	183 ¹⁴⁸	949 ¹⁸²	525 ¹⁴⁸	40	582 ¹⁷⁰
4	291 ⁶⁰	371 ⁶⁴	186 ¹³⁶	331 ¹⁵⁰	0,9 131 ¹⁸⁵	377 ¹⁵⁰	45	667 ¹⁷²
5	351 ⁶⁰	435 ⁶⁴	322 ¹³⁷	481 ¹⁵²	316 ¹⁸⁹	227 ¹⁵²	50	753 ¹⁷⁴
6	411 ⁵⁸	499 ⁶³	459 ¹³⁹	633 ¹⁵⁵	505 ¹⁹²	075 ¹⁵⁵	55	840 ¹⁷⁶
7	469 ⁵⁸	562 ⁶²	598 ¹⁴⁰	788 ¹⁵⁹	697 ¹⁹⁶	0,6 920 ¹⁵⁹	60	928 ¹⁷⁸
8	527 ⁵⁷	624 ⁶²	738 ¹⁴¹	947 ¹⁶¹	893 ¹⁹⁹	761 ¹⁶¹	65	0,8 017 ¹⁸⁰
9	584 ⁵⁶	686 ⁶¹	879 ¹⁴³	0,9 108 ¹⁶⁵	1,0 092 ²⁰⁴	600 ¹⁶⁵	70	107 ¹⁸⁴
0,80	0,6 640	0,6 747	0,9 022	0,9 273	1,0 296	0,6 435	0,6 75	0,8 199

Fortsetzung S. 100
Continued on p. 100

S. 100
p. 100

S. 111
p. 111

S. 101
p. 101

S. 110
p. 110

S. 101
p. 101

x	$\text{Ar } \lg x$	x	$\text{Ar } \lg x$	x	$\text{Ar } \lg x$	x	$\text{Ar } \lg x$	x	$\text{Ar } \lg x$
	rad		rad		rad		rad		rad
0,6 75	0,8 199 ¹⁸⁴	0,7 75	1,0 327 ²⁵⁴	0,86 0	1,2 933 ³⁹	0,90 0	1,4 722 ⁵³	0,94 0	1,7 380 ⁸⁷
80	291 ¹⁸⁸	80	454 ²⁵⁸	2	1,3 011 ³⁹	2	828 ^{54,5}	1	467 ⁸⁸
85	385 ¹⁹⁰	85	583 ²⁶²	4	089 ⁴⁰	4	937 ⁵⁵	2	555 ⁹⁰
90	480 ¹⁹²	90	714 ²⁷⁰	6	169 ⁴⁰	6	1,5 047 ^{56,5}	3	645 ⁹¹
95	576 ¹⁹⁴	95	849 ²⁷⁴	8	249 ⁴¹	8	160 ^{57,5}	4	736 ⁹²
0,7 00	673 ¹⁹⁸	0,8 00	986 ²⁸²	0,87 0	331 ^{41,5}	0,91 0	275 ⁵⁹	5	828 ⁹⁵
05	772 ²⁰⁰	05	1,1 127 ²⁸⁶	2	414 ⁴²	2	393 ⁶⁰	6	923 ⁹⁶
10	872 ²⁰²	10	270 ²⁹⁴	4	498 ^{42,5}	4	513 ^{61,5}	7	1,8 019 ⁹⁸
15	973 ²⁰⁶	15	417 ³⁰²	6	583 ^{43,5}	6	636 ⁶³	8	117 ⁹⁹
20	0,9 076 ²¹⁰	20	568 ³¹⁰	8	670 ⁴⁴	8	762 ⁶⁴	9	216 ¹⁰²
25	181 ²¹²	25	723 ³¹⁶	0,88 0	758 ^{44,5}	0,92 0	890 ⁶⁶	0,95 0	318
30	287 ²¹⁶	30	881 ³²⁶	2	847 ^{45,5}	2	1,6 022 ^{67,5}	0,9 6	1,9 459
35	395 ²²⁰	35	1,2 044 ³³⁶	4	938 ⁴⁶	4	157 ^{69,5}	7	2,0 923
40	505 ²²²	40	212 ³⁴⁴	6	1,4 030 ⁴⁷	6	296 ⁷¹	8	2,2 976
45	616 ²²⁸	45	384 ³⁵⁶	8	124 ^{47,5}	8	438 ⁷³	9	2,6 467
50	730 ²³⁰	0,85 0	562 ³⁶	0,89 0	219 ^{48,5}	0,93 0	584 ⁷⁵	0,99 9	3,8 00
55	845 ²³⁴	2	634 ^{36,5}	2	316 ^{49,5}	2	734 ⁷⁷		
60	962 ²⁴⁰	4	707 ^{37,5}	4	415 ^{50,5}	4	888 ^{79,5}		
65	1,0 082 ²⁴²	6	782 ^{37,5}	6	516 ⁵¹	6	1,7 047 ⁸²		
70	203 ²⁴⁸	8	857 ³⁸	8	618 ⁵²	8	211 ^{84,5}		
0,7 75	1,0 327	0,86 0	1,2 933	0,90 0	1,4 722	0,94 0	1,7 380		

$$1 - v = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{v} - 1 \right)$$

Fortsetzung von S. 99
Continued from p. 99

S. 99
p. 99

x	$\lg x$	$\arctg x$	$\sin x$	$\text{Amp } x$	$\text{Ar Sin } x$	$\text{Sin } x$
rad		rad		rad	rad	
0,00	0,0 0000	0,0 0000	0,0 0000	0,0 0000	0,0 0000	0,0 0000
2	2000	2000	2000	2000	2000	2000
4	3999	3998	3999	3999	3999	4001
6	5993	5993	5996	5996	5996	6004
8	7983	7983	7991	7991	7991	8009
0,10	9967	9967	9983	9983	9983	0,1 0017
2	0,1 1943	0,1 1943	0,1 1971	0,1 1971	0,1 1971	2029
4	3909	3910	3954	3954	3955	4046
6	5865	5866	5932	5932	5933	6068
8	7808	7809	7903	7904	7904	8097
0,20	9738	9740	9867	9868	9869	0,2 0134
2	0,2 1652	0,2 1655	0,2 1823	0,2 1825	0,2 1826	2178
4	3550	3554	3770	3773	3775	4231
6	5430	5437	5708	5712	5716	6294
8	7291	7301	7636	7641	7646	8367
0,30	9131	9146	9552	9560	9567	0,3 045
2	0,3 095	0,3 0970	0,3 146	0,3 147	0,3 148	255
4	275	2774	335	336	338	466
6	452	4556	523	525	526	678
8	627	6315	709	712	714	892
0,40	799	8051	894	897	900	0,4 108
2	969	9763	0,4 078	0,4 082	0,4 085	325
4	0,4 136	0,4 145	259	265	269	543
6	301	311	439	446	452	764
8	462	475	618	626	633	986
0,50	621	636	794	804	812	0,5 211
2	777	795	969	980	990	438
4	930	951	0,5 141	0,5 155	0,5 167	666
6	0,5 080	0,5 105	312	328	342	897
8	227	256	480	500	516	0,6 131
0,60	370	404	646	669	688	367
2	511	550	810	837	859	605
4	649	693	972	0,6 003	0,6 028	846
6	784	834	0,6 131	167	196	0,7 090
8	915	972	288	329	362	336
0,70	0,6 044	0,6 107	442	490	527	586
2	169	240	594	648	690	838
4	291	371	743	805	851	0,8 094
6	411	499	889	959	0,7 011	353
8	527	624	0,7 033	0,7 112	170	615
0,80	640	747	174	262	327	881
2	751	868	311	411	482	0,9 150
4	858	987	446	557	636	423
6	963	0,7 103	578	702	788	700
8	0,7 064	217	707	844	939	981
0,90	163	328	833	985	0,8 089	1,0 265
2	259	438	956	0,8 123	237	554
4	352	545	0,8 076	260	383	847
6	443	650	192	395	528	1,1 144
8	531	753	305	527	672	446
1,00	0,7 617	0,7 854	0,8 415	0,8 658	0,8 814	1,1 752

Fortsetzung S. 103
Continued on p. 103

Fortsetzung von S. 99
Continued from p. 99von S. 99
from p. 99

x	e^{-x}	$\cos x$	$\cot x$	e^x	$\arccos x$	x	$\arcsin x$	$\arccos x$
rad					rad		rad	rad
0,00	1,0 000	1,0 000	1,0 000	1,0 000	1,5 708	0,7 50	0,8 481	0,7 227
2	0,9 802 ⁹⁹	0,9 998 ¹	002 ³	202 ¹⁰¹	508 ¹⁰⁰	55	557 ¹⁵²	151 ¹⁵²
4	608 ⁹⁷	992 ³	008 ⁵	408 ¹⁰³	308 ¹⁰⁰	60	633 ¹⁵²	075 ¹⁵²
6	418 ⁹⁵	982 ⁵	018 ⁷	618 ¹⁰⁵	108 ¹⁰⁰	65	710 ¹⁵⁴	0,6 998 ¹⁵⁴
8	231 ^{93,5}	968 ⁷	032 ⁹	833 ^{107,5}	1,4 907 ^{100,5}	70	788 ¹⁵⁶	920 ¹⁵⁶
	91,5	9		109,5			158	158
0,10	0,8 869 ^{89,5}	950 ¹¹	050 ¹¹	1,1 052 ^{111,5}	706 ^{100,5}	75	867 ¹⁶⁰	841 ¹⁶⁰
2	0,8 869 ^{87,5}	928 ¹³	072 ¹³	275 ¹¹⁴	505 ¹⁰¹	80	947 ¹⁶⁰	761 ¹⁶⁰
4	694 ^{86,5}	902 ¹⁵	098 ¹⁵	503 ¹¹⁶	303 ¹⁰¹	85	0,9 027 ¹⁶²	681 ¹⁶²
6	521 ⁸⁴	872 ¹⁷	128 ¹⁷	735 ^{118,5}	101 ^{101,5}	90	108 ¹⁶⁴	600 ¹⁶⁴
8	353 ⁸³	838 ^{19,5}	162 ^{19,5}	972 ¹²¹	1,3 898 ¹⁰²	95	190 ¹⁶⁶	518 ¹⁶⁶
0,20	187 ⁸¹	801 ²¹	201 ²¹	1,2 214 ^{123,5}	694 ¹⁰²	0,8 00	273 ¹⁶⁸	435 ¹⁶⁸
2	0,7 866 ^{79,5}	759 ²³	243 ²³	461 ^{126,5}	490 ¹⁰³	05	357 ¹⁷⁰	351 ¹⁷⁰
4	0,7 866 ^{77,5}	713 ^{24,5}	289 ^{25,5}	712 ^{128,5}	284 ¹⁰³	10	442 ¹⁷⁰	266 ¹⁷⁰
6	711 ^{76,5}	664 ^{26,5}	340 ^{27,5}	969 ¹³¹	078 ¹⁰⁴	15	527 ¹⁷⁴	181 ¹⁷⁴
8	558 ⁷⁵	611 ²⁹	395 ²⁹	1,3 231 ¹³⁴	1,2 870 ^{104,5}	20	614 ¹⁷⁶	094 ¹⁷⁶
0,30	408 ^{73,5}	553 ^{30,5}	453 ^{31,5}	499 ¹³⁶	661 ¹⁰⁵	25	702 ¹⁷⁸	006 ¹⁷⁸
2	261 ^{71,5}	492 ³²	516 ³⁴	771 ¹³⁹	451 ¹⁰⁶	30	791 ¹⁸⁰	0,5 917 ¹⁸⁰
4	118 ^{70,5}	428 ^{34,5}	584 ^{35,5}	1,4 049 ¹⁴²	239 ¹⁰⁷	35	881 ¹⁸⁴	827 ¹⁸⁴
6	0,6 977 ⁶⁹	359 ³⁶	655 ³⁸	333 ¹⁴⁵	025 ^{107,5}	40	973 ¹⁸⁶	735 ¹⁸⁶
8	839 ⁶⁸	287 ³⁸	731 ⁴⁰	623 ^{147,5}	1,1 810 ^{108,5}	45	1,0 066 ¹⁸⁸	642 ¹⁸⁸
0,40	703 ^{66,5}	211 ⁴⁰	811 ⁴²	918 ¹⁵¹	593 ^{109,5}	50	160 ¹⁹²	548 ¹⁹²
2	570 ⁶⁵	131 ^{41,5}	895 ^{44,5}	1,5 220 ^{153,5}	374 ¹¹¹	55	256 ¹⁹⁴	452 ¹⁹⁴
4	440 ^{63,5}	048 ^{43,5}	984 ^{46,5}	527 ¹⁵⁷	152 ¹¹²	60	353 ¹⁹⁸	355 ¹⁹⁸
6	313 ^{62,5}	0,8 961 ^{45,5}	1,1 077 ^{48,5}	841 ¹⁶⁰	1,0 928 ^{113,5}	65	452 ²⁰⁰	256 ²⁰⁰
8	188 ^{61,5}	870 ⁴⁷	174 ⁵¹	1,6 161 ¹⁶³	701 ^{114,5}	70	552 ²⁰⁴	156 ²⁰⁴
0,50	065 ⁶⁰	776 ⁴⁹	276 ^{53,5}	487 ^{166,5}	472 ^{116,5}	75	654 ²¹⁰	054 ²¹⁰
2	0,5 945 ⁵⁹	678 ^{50,5}	383 ^{55,5}	820 ¹⁷⁰	239 ^{117,5}	0,88 0	759 ²¹	0,4 949 ²¹
4	827 ^{57,5}	577 ⁵²	494 ^{57,5}	1,7 160 ^{173,5}	004 ¹²⁰	2	801 ^{21,5}	907 ^{21,5}
6	712 ^{56,5}	473 ⁵⁴	609 ^{60,5}	507 ^{176,5}	0,9 764 ¹²⁰	4	844 ²¹	864 ^{21,5}
8	599 ^{55,5}	365 ⁵⁶	730 ^{62,5}	860 ^{180,5}	521	6	886 ²²	822 ²²
0,60	488 ^{54,5}	253 ⁵⁷	855 ^{64,5}	1,8 221 ¹⁸⁴	273	8	930 ^{21,5}	778 ^{21,5}
2	379 ⁵³	139 ⁵⁹	984 ^{67,5}	589 ¹⁸⁸	021	0,89 0	973 ^{22,5}	735 ^{22,5}
4	273 ⁵²	021 ^{60,5}	1,2 119 ^{69,5}	965 ^{191,5}	0,8 763	2	1,1 018 ²²	690 ²²
6	169 ^{51,5}	0,7 900 ⁶²	258 ⁷²	1,9 348 ^{195,5}	500	4	062 ^{22,5}	646 ^{22,5}
8	066 ⁵⁰	776 ⁶⁴	402 ⁷⁵	739 ^{199,5}	230	6	107 ^{22,5}	601 ^{22,5}
0,70	0,4 966 ⁴⁹	648 ⁶⁵	552 ⁷⁷	2,0 138 ²⁰³	0,7 954	8	152 ²³	556 ^{22,5}
2	868 ^{48,5}	518 ^{66,5}	706 ^{79,5}	544 ^{207,5}	670	0,90 0	198 ²³	510 ²³
4	771 ⁴⁷	385 ^{68,5}	865 ^{82,5}	959 ²¹²	377	2	244 ²³	464 ²³
6	677 ^{46,5}	248 ^{69,5}	1,3 030 ^{84,5}	2,1 383 ²¹⁶	075	4	290 ^{23,5}	418 ^{23,5}
8	584 ^{45,5}	109 ⁷¹	199 ^{87,5}	815 ²²⁰	0,6 761	6	337 ²⁴	371 ²⁴
0,80	493 ^{44,5}	0,6 967 ^{72,5}	374 ^{90,5}	2,2 255 ²²⁵	435	8	385 ²⁴	323 ²⁴
2	404 ^{43,5}	822 ^{73,5}	555 ^{92,5}	705 ^{229,5}	094	0,91 0	433 ²⁴	275 ²⁴
4	317 ^{42,5}	675 ^{75,5}	740 ⁹⁶	2,3 164 ²³⁴	0,5 735	2	481 ^{24,5}	227 ^{24,5}
6	232 ⁴²	524 ⁷⁶	932 ⁹⁸	632 ^{238,5}	355	4	530 ²⁵	178 ²⁵
8	148 ⁴¹	372 ⁷⁸	1,4 128 ^{101,5}	2,4 109 ^{243,5}	0,4 949	6	580 ²⁵	128 ²⁵
0,90	066 ^{40,5}	216 ⁷⁹	331 ¹⁰⁴	596 ^{248,5}	510	8	630 ^{25,5}	078 ^{25,5}
2	0,3 985 ^{39,5}	058 ⁸⁰	539 ¹⁰⁷	2,5 093 ^{253,5}	027	0,92 0	681 ^{25,5}	027 ^{25,5}
4	906 ^{38,5}	0,5 898 ^{81,5}	753 ¹¹⁰	600 ^{258,5}	0,3 482	2	732 ²⁶	0,3 976 ²⁶
6	829 ³⁸	735 ^{82,5}	973 ¹¹³	2,6 117 ²⁶⁴	0,2 838	4	784 ^{26,5}	924 ^{26,5}
8	753 ³⁷	570 ^{83,5}	1,5 199 ¹¹⁶	645 ²⁶⁹	003	6	837 ^{26,5}	871 ^{26,5}
1,00	0,3 679	0,5 403	1,5 431	2,7 183	0,0 000	8	890 ²⁷	818 ²⁷
						0,93 0	1,1 944	0,3 764

Fortsetzung S. 99
Continued on p. 99Fortsetzung S. 108
Continued on p. 108

x	$\lg x$	$\sin x$	$\text{Amp } x$	$\text{Nr Sin } x$	$\text{Sin } x$	x	$\text{Nr Cos } x$	x	$\text{Nr Cos } x$
rad			rad	rad		rad		rad	
1,00	0,7 616	0,8 415	0,8 658	0,8 814	1, 1752	1,0 0	0,0 0000	1,2 0	0,6 224
2	699 ^{41,5}	521 ⁵³	786 ⁶⁴	954 ⁷⁰	2063 ^{155,5}	1	0,1 4130	1	372 ¹⁴⁸
4	779 ⁴⁰	624 ^{51,5}	913 ^{63,5}	0,9 094	2379 ¹⁵⁸	2	0,1 9967	2	517 ¹⁴⁵
6	857 ^{39,5}	724 ⁵⁰	0,9 038	232 ⁶⁹	2700 ^{160,5}	3	0,2 4434	3	659 ¹⁴²
8	932 ^{37,5}	820 ⁴⁸	160 ⁶¹	368 ⁶⁸	3025 ^{162,5}	4	0,2 8191	4	797 ¹³⁸
	36,5	46	60,5	67,5	165,5				134
1,10	0,8 005	912	281	503	3356 ^{168,5}	1,05 0	0,3 149	5	931 ¹³²
2	076 ^{35,5}	0,9 001	400 ^{59,5}	637 ⁶⁷	3693 ¹⁷¹	2	211 ³¹	6	0,7 063
4	144 ³⁴	086 ^{42,5}	517 ^{58,5}	770 ^{66,5}	4035 ^{173,5}	4	272 ^{30,5}	7	192 ¹²⁹
6	210 ³³	168 ⁴¹	632 ^{57,5}	901 ^{65,5}	4382 ^{176,5}	6	331 ^{29,5}	8	319 ¹²⁷
8	275 ^{32,5}	246 ³⁹	746 ⁵⁷	1,0 031	4735 ¹⁸⁰	8	390 ^{28,5}	9	443 ¹²⁴
	31	37	55,5	64,5					121
1,20	337 ³⁰	320 ^{35,5}	857 ^{54,5}	160 ^{63,5}	5095 ^{182,5}	1,06 0	447 ²⁸	1,3 0	564 ¹²⁰
2	397 ²⁹	391 ^{33,5}	966 ⁵⁴	287 ⁶³	5460 ^{185,5}	2	503 ²⁸	1	684 ¹¹⁷
4	455 ²⁸	458 ^{31,5}	1,0 074	413 ^{62,5}	5831 ¹⁸⁹	4	559 ²⁷	2	801 ¹¹⁵
6	511 ²⁷	521 ^{29,5}	180 ⁵²	538 ⁶²	6209 ¹⁹²	6	613 ²⁷	3	916 ¹¹³
8	565 ²⁶	580 ²⁸	284 ^{51,5}	662 ^{61,5}	6593 ^{195,5}	8	667 ^{26,5}	4	0,8 029
									111
1,30	617 ^{25,5}	636 ^{25,5}	387 ⁵⁰	785 ^{60,5}	6984 ^{198,5}	1,07 0	720 ²⁶	5	140 ¹⁰⁹
2	668 ^{24,5}	687 ²⁴	487 ^{49,5}	906 ⁶⁰	7381 ^{202,5}	2	772 ²⁶	6	249 ¹⁰⁸
4	717 ^{23,5}	735 ²²	586 ^{48,5}	1,1 026	7786 ²⁰⁶	4	824 ²⁵	7	357 ¹⁰⁶
6	764 ²³	779 ²⁰	683 ⁴⁸	145 ^{59,5}	8198 ^{209,5}	6	874 ²⁵	8	463 ¹⁰⁴
8	810 ²²	819 ^{17,5}	779 ^{46,5}	263 ^{58,5}	8617 ²¹³	8	924 ²⁵	9	567 ¹⁰³
1,40	854 ²¹	854 ^{16,5}	872 ^{46,5}	380 ⁵⁸	9043 ²¹⁷	1,0 80	974 ²⁴⁰	1,4 0	670 ¹⁰¹
2	896 ^{20,5}	887 ¹⁴	965 ⁴⁵	496 ⁵⁷	9477 ²²¹	85	0,4 094	1	771 ¹⁰⁰
4	937 ²⁰	915 ¹²	1,1 055	610 ⁵⁷	9919 ²²⁵	90	211 ²³⁴	2	871 ⁹⁹
6	977 ¹⁹	939 ¹⁰	144 ^{43,5}	724 ⁵⁶	2, 0369	95	325 ²²²	3	970 ⁹⁷
8	0,9 015	959 ⁸	231 ⁴³	836 ⁵⁶	0827 ²³³	1,1 00	436 ²¹⁴	4	0,9 067
	18								96
1,50	051 ¹⁸	975 ⁶	317 ^{42,5}	948 ⁵⁵	1293 ^{237,5}	05	543 ²¹⁰	5	163 ⁹⁵
2	087 ¹⁷	987 ⁴	402 ⁴¹	1,2 058	1768 ^{241,5}	10	648 ²⁰⁶	6	258 ⁹³
4	121 ^{16,5}	995 ²	484 ⁴¹	167 ^{54,5}	2251 ^{245,5}	15	751 ²⁰⁰	7	351 ⁹²
6	154 ¹⁶	999 ^{0,5}	566 ⁴¹	276 ^{54,5}	2743 ²⁵¹	20	851 ¹⁹⁶	8	443 ⁹¹
8	186 ^{15,5}	1,0 000	645 ^{39,5}	383 ^{53,5}	3245 ^{255,5}	25	949 ¹⁹²	9	534 ⁹⁰
1,60	217 ^{14,5}	0,9 996	724 ³⁸	490 ^{52,5}	3756 ²⁶⁰	30	0,5 045	1,5 0	624 ⁸⁹
2	246 ^{14,5}	988 ⁶	800 ³⁸	595 ^{52,5}	4276 ²⁶⁵	35	139 ¹⁸⁶	1	713 ⁸⁸
4	275 ^{13,5}	976 ⁸	876 ³⁷	700 ⁵²	4806 ²⁷⁰	40	232 ¹⁸⁰	2	801 ^{86,5}
6	302 ^{13,5}	960 ¹⁰	950 ^{36,5}	804 ⁵²	5346 ²⁷⁵	45	322 ¹⁷⁸	4	974 ^{84,5}
8	329 ^{12,5}	940 ^{11,5}	1,2 023	906 ⁵²	5896 ²⁸⁰	50	411 ¹⁷⁴	6	1,0 143
1,70	354 ^{12,5}	917 ¹⁴	094 ³⁵	1,3 008	6456 ^{285,5}	55	498 ¹⁷²		
2	379 ^{11,5}	889 ¹⁶	164 ^{34,5}	109 ^{51,5}	7027 ²⁹¹	60	584 ¹⁶⁸		
4	402 ^{11,5}	857 ^{17,5}	233 ^{33,5}	209 ⁵⁰	7609 ^{296,5}	65	668 ¹⁶⁶		
6	425 ¹¹	822 ²⁰	300 ^{33,5}	308 ^{49,5}	8202 ³⁰²	70	751 ¹⁶⁴		
8	447 ^{10,5}	782 ²²	367 ^{32,5}	407 ^{48,5}	8806 ³⁰⁸	75	833 ¹⁶⁰		
1,80	468 ¹⁰	738 ^{23,5}	432 ^{31,5}	504 ^{48,5}	9422 ^{31,5}	80	913 ¹⁶⁰		
2	488 ¹⁰	691 ^{25,5}	495 ^{31,5}	601 ⁴⁸	3, 005	85	993 ¹⁵⁶		
4	508 ^{9,5}	640 ^{27,5}	558 ^{30,5}	697 ^{47,5}	069	90	0,6 071		
6	527 ⁹	585 ^{29,5}	619 ^{30,5}	792 ⁴⁷	134	95	148 ¹⁵⁴		
8	545 ^{8,5}	526 ^{31,5}	680 ^{29,5}	886 ⁴⁷	200	1,2 00	0,6 224 ¹⁵²		
1,90	562 ^{8,5}	463 ^{33,5}	739 ²⁹	980 ^{46,5}	268				
2	579 ⁸	396 ³⁵	797 ²⁸	1,4 073	337				
4	595 ⁸	326 ³⁷	853 ²⁸	165 ^{45,5}	408				
6	611 ^{7,5}	252 ³⁹	909 ^{27,5}	256 ^{44,5}	479				
8	626 ⁷	174 ^{40,5}	964 ²⁷	347	552				
2,00	0,9 640	0,9 093	1,3 018	1,4 436	3, 627				

Fortsetzung S. 111
Continued on p. 111S. 109
p. 109S. 109
p. 109Fortsetzung S. 103
Continued on p. 103

$$\begin{aligned} \text{Nr Cos } (1 + 2t) &= 2 \text{ Nr Sin } \sqrt{t} \\ &\approx 2t^{0,5} - \frac{1}{3}t^{1,5} \\ &\quad + 0,15t^{2,5} \end{aligned}$$

Forts. von S. 100 von S. 102
Cont. from p. 100 from p. 102

x	e^{-x}	$\cos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x$	$\operatorname{Cof} x$	e^x
rad			rad	rad		
1,00	0,3 679 36,5	0,5 403 84,5	0,7 854 49,5	0,0 0000	1,5 431 119	2, 7183 274,5
2	606 35,5	234 86	953 48,5	0,1 9967	669 122	7732 280
4	535 35	062 86,5	0,8 050 47,5	0,2 8190	913 125,5	8292 286
6	465 34,5	0,4 889 88	145 46,5	0,3 447	1,6 164 128,5	8864 291,5
8	396 33,5	713 88,5	238 46	0,3 974	421 132	9447 29,5
1,10	329 33	536 89,5	330 44,5	0,4 436	685 135,5	3, 004 30,5
2	263 32,5	357 90,5	419 44	0,4 851	956 138,5	065 31
4	198 31,5	176 91,5	507 43	0,5 232	1,7 233 142	127 31,5
6	135 31	0,3 993 92	593 42,5	584	517 145,5	190 32
8	073 30,5	809 92,5	678 41,5	913	808 149,5	254 33
1,20	012 30	624 94	761 40,5	0,6 224	1,8 107 152,5	320 33,5
2	0,2 9523 292,5	436 94	842 39,5	517	412 156,5	387 34,5
4	8938 286,5	248 95	921 39	797	725 160	456 34,5
6	8365 280,5	058 95,5	999 38,5	0,7 063	1,9 045 164	525 36
8	7804 275,5	0,2 8672 961	0,9 076 37,5	319	373 168	597 36
1,30	7253 269,5	6750 966	151 37	564	709 172	669 37
2	6714 264,5	4818 971,5	225 36	801	2,0 053 175,5	743 38
4	6185 259,5	2875 975,5	297 35,5	0,8 029	404 180	819 38,5
6	5666 254	0924 980	368 34,5	249	764 184	896 39,5
8	5158 249	0,1 8964 983,5	437 34	463	2,1 132 188,5	975 40
1,40	4660 244,5	6997 987	505 33,5	670	509 192,5	4, 055 41
2	4171 239	5023 990,5	572 33	871	894 197	137 42
4	3693 234,5	3042 992,5	638 32,5	0,9 067	2,2 288 201,5	221 42,5
6	3224 230	1057 995	703 31,5	258	691 206	306 43,5
8	2764 225,5	0,0 9067 996,5	766 31	443	2,3 103 210,5	393 44,5
1,50	2313 221	7074 998,5	828 30,5	624	524 216,5	482 45
2	1871 216,5	5077 999	889 30	801	955 220	572 46,5
4	1438 212	3079 999,5	949 29,5	974 84,5	2,4 395 225	665 47
6	1014 208	1080 1000	1,0 008 28,5	1,0 143 82,5	845 230	759 48
8	0598 204	- 0,0 0920 1000	065 28,5	308 81	2,5 305 235	855 49
1,60	0190 200	2920 999	122 28	470 79,5	775 240	953 50
2	0,1 9790 196	4918 998,5	178 27	628 78	2,6 255 245,5	5, 053 51
4	9398 192	6915 997	232 27	784 76	746 250,5	155 52
6	9014 188,5	8909 995	286 26,5	936 75	2,7 247 256,5	259 53,5
8	8637 184,5	- 0,1 0899 992,5	339 26	1,1 086 73	760 261,5	366 54
1,70	8268 180,5	2884 990,5	391 25,5	232 72	2,8 283 263	474 55,5
2	7907 177,5	4865 987,5	442 25	376 71	819 272,5	585 56
4	7552 174	6840 984	492 24,5	518 69,5	2,9 364 279	697 57,5
6	7204 170	8808 980	541 24	657 68,5	922 28,5	812 59
8	6864 167	- 0,2 0768 976	589 24	794 67,5	3, 049 29	930 60
1,80	6530 163,5	2720 971,5	637 23,5	929 66,5	107 30	6, 050 61
2	6203 160,5	4663 966,5	684 23	1,2 062 65	167 30,5	172 62,5
4	5882 157,5	6596 961,5	730 22,5	192 64,5	228 31	297 63,5
6	5567 154	8519 955,5	775 22	321 63	290 31,5	424 65
8	5259 151	- 0,3 043 95	819 22	447 62,5	353 32,5	554 66
1,90	4957 148	233 94	863 21,5	572 61,5	418 33	686 67,5
2	4661 145,5	421 94	906 21,5	695 60,5	484 33,5	821 69
4	4370 142	609 93	949 20,5	816 59,5	551 34,5	959 70
6	4086 139,5	795 92	990 20,5	935 59	620 35	7, 099 72
8	3807 136,5	979 91	1,1 031 20	1,3 053 58,5	690 36	243 73
2,00	0,1 3534	- 0,4 161	1,1 071	1,3 170	3, 762	7, 389

Fortsetzung S. 109 S. 109
Continued on p. 109 p. 109

x	e^x	$\text{Cof } x$	$\text{Sin } x$	e^{-x}	$\text{sin } x$	$-\cos x$
rad						
2,00	7,389 _{74,5}	3,762 _{36,5}	3,627 ₃₈	0,13534 ₁₃₄	0,9093 _{42,5}	0,4161 _{90,5}
2	538 _{76,5}	835 _{37,5}	703 _{38,5}	3266 _{131,5}	008 _{44,5}	342 ₉₀
4	691 _{77,5}	910 _{38,5}	780 _{39,5}	3003 ₁₂₉	0,8919 ₄₆	522 _{88,5}
6	846 ₇₉	987 ₃₉	859 _{40,5}	2745 ₁₂₆	827 ₄₈	699 ₈₈
8	8,004 ₈₁	4,065 _{39,5}	940 ₄₁	2493 _{123,5}	731 _{49,5}	875 _{86,5}
2,10	166 _{82,5}	144 ₄₁	4,022 ₄₂	2246 _{121,5}	632 _{51,5}	0,5048 ₈₆
2	331 ₈₄	226 _{41,5}	106 _{42,5}	2003 ₁₁₉	529 ₅₃	220 ₈₅
4	499 ₈₆	309 ₄₂	191 _{43,5}	1765 ₁₁₆	423 _{54,5}	390 _{83,5}
6	671 _{87,5}	393 _{43,5}	278 _{44,5}	1533 _{114,5}	314 _{56,5}	557 _{82,5}
8	846 _{89,5}	480 ₄₄	367 ₄₅	1304 ₁₁₂	201 ₅₈	722 _{81,5}
2,20	9,025 ₉₁	568 ₄₅	457 ₄₆	1080 _{109,5}	085 _{59,5}	885 _{80,5}
2	207 ₉₃	658 ₄₆	549 ₄₇	0861 _{107,5}	0,7966 _{61,5}	0,6046 ₇₉
4	393 ₉₅	750 _{46,5}	643 ₄₈	0646 _{105,5}	843 _{62,5}	204 _{77,5}
6	583 ₉₇	843 ₄₈	739 ₄₉	0435 _{103,5}	718 _{64,5}	359 _{76,5}
8	777 _{98,5}	939 ₄₉	837 ₅₀	0228 ₁₀₁	589 ₆₆	512 _{75,5}
2,30	974 ₁₀₁	5,037 ₅₀	937 ₅₁	0026 _{99,5}	457 _{67,5}	663 ₇₄
2	10,176 _{102,5}	137 ₅₁	5,039 _{51,5}	0,09827 ₉₇	322 _{68,5}	811 _{72,5}
4	381 ₁₀₅	239 ₅₂	142 ₅₃	9633 _{95,5}	185 _{70,5}	956 ₇₁
6	591 ₁₀₇	343 ₅₃	248 ₅₄	9442 _{93,5}	044 _{71,5}	0,7098 _{69,5}
8	805 ₁₀₉	449 ₅₄	356 ₅₅	9255 _{91,5}	0,6901 ₇₃	237 _{68,5}
2,40	11,023 _{111,5}	557 ₅₅	466 ₅₆	9072 ₉₀	755 _{74,5}	374 ₆₇
2	246 _{113,5}	667 _{56,5}	578 _{57,5}	8892 ₈₈	606 ₇₆	508 ₆₅
4	473 ₁₁₆	780 _{57,5}	693 _{58,5}	8716 _{86,5}	454 ₇₇	638 ₆₄
6	705 ₁₁₈	895 ₅₉	810 _{59,5}	8543 _{84,5}	300 ₇₈	766 ₆₂
8	941 _{120,5}	6,013 _{59,5}	929 _{60,5}	8374 ₈₃	144 _{79,5}	890 _{60,5}
2,50	12,182 _{123,5}	132 _{61,5}	6,050 ₆₂	8208 ₈₁	0,5985 ₈₁	0,8011 _{59,5}
2	429 _{125,5}	255 ₆₂	174 ₆₃	8046 _{79,5}	823 _{81,5}	130 ₅₇
4	680 ₁₂₈	379 ₆₄	300 _{64,5}	7887 _{78,5}	660 ₈₃	244 ₅₆
6	936 _{130,5}	507 _{64,5}	429 ₆₆	7730 _{76,5}	494 _{84,5}	356 ₅₃
8	13,197 _{133,5}	636 _{66,5}	561 ₆₇	7577 ₇₅	325 ₈₅	464 _{52,5}
2,60	464 ₁₃₆	769 _{67,5}	695 ₆₈	7427 _{73,5}	155 ₈₆	569 _{50,5}
2	736 _{138,5}	904 ₆₉	831 ₇₀	7280 ₇₂	0,4983 _{87,5}	670 ₄₉
4	14,013 _{141,5}	7,042 _{70,5}	971 ₇₁	7136 _{70,5}	808 ₈₈	768 _{47,5}
6	296 _{144,5}	183 ₇₂	7,113 _{72,5}	6995 _{69,5}	632 ₈₉	863 ₄₅
8	585 _{147,5}	327 ₇₃	258 ₇₄	6856 _{67,5}	454 ₉₀	953 ₄₄
2,70	880 ₁₅₀	473 ₇₅	406 _{75,5}	6721 ₆₇	274 ₉₁	0,9041 _{41,5}
2	15,180 _{153,5}	623 _{76,5}	557 ₇₇	6587 ₆₅	092 ₉₂	124 ₄₀
4	487 _{156,5}	776 ₇₈	711 _{78,5}	6457 ₆₄	0,39088 ₉₂₄	204 _{38,5}
6	800 _{159,5}	932 _{79,5}	868 ₈₀	6329 ₆₃	7240 ₉₃₂	281 ₃₆
8	16,119 ₁₆₃	8,091 ₈₁	8,028 ₈₂	6203 ₆₁	5376 _{938,5}	353 _{34,5}
2,80	445 ₁₆₆	253 _{82,5}	192 _{83,5}	6081 ₆₀	3499 _{945,5}	422 _{32,5}
2	777 _{169,5}	418 _{84,5}	359 ₈₅	5961 ₅₉	1608 ₉₅₂	487 ₃₁
4	17,116 ₁₇₃	587 ₈₆	529 _{86,5}	5843 ₅₈	0,29704 _{957,5}	549 _{28,5}
6	462 ₁₇₆	759 ₈₈	702 ₈₉	5727 ₅₇	7789 _{963,5}	606 ₂₇
8	814 ₁₈₀	935 ₉₀	880 ₉₀	5613 _{55,5}	5862 _{968,5}	660 ₂₅
2,90	18,174 _{183,5}	9,115 _{91,5}	9,060 ₉₂	5502 _{54,5}	3925 _{973,5}	710 _{22,5}
2	541 _{187,5}	298 ₉₃	244 _{93,5}	5393 ₅₃	1978 _{977,5}	755 ₂₁
4	916 ₁₉₁	484 _{95,5}	431 ₉₆	5287 _{52,5}	0023 _{981,5}	797 _{19,5}
6	19,298 ₁₉₅	675 ₉₇	623 ₉₈	5182 _{51,5}	0,18060 _{985,5}	836 ₁₇
8	688 ₁₉₉	869 _{99,5}	819 _{99,5}	5079 ₅₀	6089 _{988,5}	870 ₁₅
3,00	20,086	10,068	10,018	0,04977	0,14112	0,9900

x	e^x	$\cos x$	$\sin x$	e^{-x}	$\sin x$	$-\cos x$
rad						
3,00	20,086 _{202,5}	10,068 ₁₀₁	10,018 _{101,5}	0,04 979 _{49,5}	0,1 4112 _{991,5}	0,9 900 ₁₃
2	491 ₂₀₇	270 _{103,5}	221 ₁₀₄	880 _{48,5}	2129 _{993,5}	926 ₁₁
4	905 _{211,5}	477 ₁₀₅	429 _{105,5}	783 ₄₇	0142 ₉₉₆	948 _{9,5}
6	21,328 ₂₁₅	687 _{107,5}	640 ₁₀₈	689 _{46,5}	+ 0,0 8150 _{997,5}	967 ₇
8	758 ₂₂₀	902 ₁₁₀	856 ₁₁₀	596 _{45,5}	6155 _{998,5}	981 ₅
3,10	22,198 ₂₂₄	11,122 _{111,5}	11,076 _{112,5}	505 _{44,5}	4158 _{999,5}	991 _{3,5}
2	646 ₂₂₉	345 _{114,5}	301 _{114,5}	416 ₄₄	2159 ₁₀₀₀	998 ₁
4	23,104 ₂₃₃	574 _{116,5}	530 ₁₁₇	328 _{42,5}	0159 ₁₀₀₀	1,0 000 ₁
6	570 _{238,5}	807 _{118,5}	764 _{119,5}	243 ₄₂	- 0,0 1841 _{999,5}	0,9 998 _{2,5}
8	24,047 ₂₄₃	12,044 _{121,5}	12,003 _{121,5}	159 _{41,5}	3840 _{998,5}	993 ₅
3,20	533 _{247,5}	287 _{123,5}	246 ₁₂₄	076 ₄₀	5837 ₉₉₈	983 ₇
2	25,028 ₂₅₃	534 ₁₂₆	494 _{126,5}	0,03 996 ₄₀	7833 ₉₉₆	969 _{8,5}
4	534 ₂₅₈	786 ₁₂₉	747 _{129,5}	916 _{38,5}	9825 ₉₉₄	952 ₁₁
6	26,050 ₂₆₃	13,044 _{131,5}	13,006 _{131,5}	839 ₃₈	- 0,1 1813 ₉₉₂	930 ₁₃
8	576 _{268,5}	307 ₁₃₄	269 _{134,5}	763 _{37,5}	3797 ₉₈₉	904 _{14,5}
3,30	27,113 _{273,5}	575 _{136,5}	538 ₁₃₇	688 _{36,5}	5775 _{985,5}	875 ₁₇
2	660 _{279,5}	848 _{139,5}	812 ₁₄₀	615 _{35,5}	7746 _{982,5}	841 _{18,5}
4	28,219 ₂₈₅	14,127 _{142,5}	14,092 _{142,5}	544 ₃₅	9711 _{978,5}	804 ₂₁
6	789 ₂₉₁	412 ₁₄₅	377 _{145,5}	474 _{34,5}	- 0,2 1668 ₉₇₄	762 _{22,5}
8	29,371 _{296,5}	702 _{148,5}	668 _{148,5}	405 ₃₄	3616 ₉₆₉	717 _{24,5}
3,40	964 _{30,5}	999 ₁₅₁	965 _{151,5}	337 ₃₃	5554 ₉₆₄	668 _{26,5}
2	30,57 ₃₁	15,301 _{154,5}	15,268 _{154,5}	271 _{32,5}	7482 ₉₅₉	615 _{28,5}
4	31,19 _{31,5}	610 ₁₅₇	577 ₁₅₈	206 _{31,5}	9400 _{95,5}	558 _{30,5}
6	82 ₃₂	924 _{160,5}	893 _{160,5}	143 ₃₁	- 0,3 131 _{94,5}	497 ₃₂
8	32,46 ₃₃	16,245 ₁₆₄	16,214 _{164,5}	081 _{30,5}	320 ₉₄	433 ₃₄
3,50	33,12 ₃₃	573 ₁₆₇	543 ₁₆₇	020 ₃₀	508 ₉₃	365 ₃₆
2	78 _{34,5}	907 _{170,5}	877 ₁₇₁	0,02 960 _{29,5}	694 ₉₃	293 ₃₈
4	34,47 _{34,5}	17,248 ₁₇₄	17,219 ₁₇₄	901 _{28,5}	880 _{91,5}	217 ₄₀
6	35,16 _{35,5}	596 _{177,5}	567 ₁₇₈	844 ₂₈	- 0,4 063 ₉₁	137 _{41,5}
8	87 _{36,5}	951 _{180,5}	923 ₁₈₁	788 ₂₈	245 ₉₀	054 ₄₃
3,60	36,60 ₃₇	18,313 ₁₈₅	18,285 ₁₈₅	732 ₂₇	425 _{89,5}	0,8 968 _{45,5}
2	37,34 _{37,5}	682 _{188,5}	655 ₁₈₉	678 _{26,5}	604 ₈₈	877 ₄₇
4	38,09 _{38,5}	19,059 _{192,5}	19,033 _{192,5}	625 ₂₆	780 _{87,5}	783 _{48,5}
6	86 _{39,5}	444 ₁₉₆	418 _{196,5}	573 _{25,5}	955 _{86,5}	686 _{50,5}
8	39,65 ₄₀	836 ₂₀₀	811 ₂₀₀	522 ₂₅	- 0,5 128 ₈₅	585 ₅₂
3,70	40,45 _{40,5}	20,236 ₂₀₄	20,211 _{204,5}	472 _{24,5}	298 _{84,5}	481 ₅₄
2	41,26 ₄₂	644 _{208,5}	620 _{208,5}	423 ₂₄	467 ₈₃	373 _{55,5}
4	42,10 _{42,5}	21,061 _{212,5}	21,037 ₂₁₃	375 _{23,5}	633 ₈₂	262 ₅₇
6	42,95 _{43,5}	486 _{216,5}	463 ₂₁₇	328 ₂₃	797 ₈₁	148 ₅₉
8	43,82 ₄₄	919 _{221,5}	897 ₂₂	282 _{22,5}	959 ₈₀	030 ₆₀
3,80	44,70 ₄₅	22,362 _{225,5}	22,339 ₂₂₆	237 ₂₂	- 0,6 119 _{78,5}	0,7 910 ₆₂
2	45,60 _{46,5}	813 ₂₃₀	791 _{230,5}	193 ₂₂	276 ₇₇	786 _{63,5}
4	46,53 ₄₇	23,273 ₂₃₅	23,252 ₂₃₅	149 ₂₁	430 ₇₆	659 ₆₅
6	47,47 _{47,5}	743 _{239,5}	722 ₂₄₀	107 ₂₁	582 _{74,5}	529 ₆₇
8	48,42 ₄₉	24,222 ₂₄₄	24,202 _{244,5}	065 _{20,5}	731 _{73,5}	395 ₆₈
3,90	49,40 ₅₀	711 ₂₅₀	691 _{249,5}	024 ₂₀	878 _{71,5}	259 _{69,5}
2	50,40 ₅₁	25,210 _{254,5}	25,190 ₂₅₅	0,01 984 _{19,5}	- 0,7 021 _{70,5}	120 ₇₁
4	51,42 ₅₂	719 _{259,5}	700 _{259,5}	945 _{19,5}	162 _{69,5}	0,6 978 ₇₂
6	52,46 ₅₃	26,238 ₂₆₅	26,219 ₂₆₅	906 _{18,5}	301 _{67,5}	834 ₇₄
8	53,52 ₅₄	768 ₂₇₀	749 _{270,5}	869 _{18,5}	436 ₆₆	686 ₇₅
4,00	54,60	27,368	27,290	0,01 832	- 0,7 568	0,6 536

	$100 e^x$	$\cos x$	$\sin x$	e^{-x}	$-\sin x$	$\cos x$
rad						
4,00	5 460 ⁵⁵	27, 308 ²⁷⁶	27, 290 ²⁷⁶	0,01 8316 ^{181,5}	0,7 568 ^{64,5}	- 0,6 536 ⁷⁶
2	570 ^{56,5}	27, 860 ²⁸¹	27, 842 ²⁸¹	7953 ¹⁷⁸	697 ⁶³	384 ^{77,5}
4	683 ⁵⁷	28, 422 ²⁸⁷	28, 404 ^{287,5}	7597 ¹⁷⁴	823 ^{61,5}	229 ⁷⁹
6	797 ⁵⁹	28, 996 ^{292,5}	28, 979 ^{292,5}	7249 ¹⁷¹	946 ⁶⁰	071 ⁸⁰
8	915 ^{59,5}	29, 581 ³⁰	29, 564 ³⁰	6907 ¹⁶⁷	0,8 066 ^{58,5}	- 0,5 911 ^{81,5}
4,10	6 034 ⁶¹	30, 18 ^{30,5}	30, 16 ^{30,5}	6573 ¹⁶⁴	183 ^{56,5}	748 ^{82,5}
2	156 ⁶²	30, 79 ³¹	30, 77 ³¹	6245 ¹⁶¹	296 ⁵⁵	583 ^{83,5}
4	280 ^{63,5}	31, 41 ^{31,5}	31, 39 ³²	5923 ^{157,5}	406 ^{53,5}	416 ^{84,5}
6	407 ⁶⁵	32, 04 ^{32,5}	32, 03 ^{32,5}	5608 ^{154,5}	513 ^{51,5}	247 ^{85,5}
8	537 ⁶⁶	32, 69 ³³	32, 68 ³³	5299 ^{151,5}	616 ⁵⁰	076 ^{86,5}
4,20	669 ⁶⁷	33, 35 ^{33,5}	33, 34 ^{33,5}	4996 ^{148,5}	716 ⁴⁸	- 0,4 903 ⁸⁸
2	803 ⁶⁹	34, 02 ^{34,5}	34, 01 ^{34,5}	4699 ^{145,5}	812 ^{46,5}	727 ^{88,5}
4	941 ⁷⁰	34, 71 ³⁵	34, 70 ³⁵	4408 ¹⁴³	905 ^{44,5}	550 ^{89,5}
6	7 081 ^{71,5}	35, 41 ³⁶	35, 40 ^{35,5}	4122 ^{139,5}	994 ⁴³	371 ^{90,5}
8	224 ⁷³	36, 13 ^{36,5}	36, 11 ^{36,5}	3843 ¹³⁷	0,9 080 ⁴¹	190 ⁹¹
4,30	370 ^{74,5}	36, 86 ³⁷	36, 84 ^{37,5}	3569 ^{134,5}	162 ³⁹	008 ^{92,5}
2	519 ⁷⁶	37, 60 ³⁸	37, 59 ³⁸	3300 ^{131,5}	240 ^{37,5}	- 0,3 824 ^{92,5}
4	671 ^{77,5}	38, 36 ^{38,5}	38, 35 ^{38,5}	3037 ^{129,5}	315 ^{35,5}	638 ^{93,5}
6	826 ⁷⁹	39, 13 ⁴⁰	39, 12 ^{39,5}	2778 ^{126,5}	386 ^{33,5}	451 ⁹⁴
8	984 ^{80,5}	39, 93 ⁴⁰	39, 91 ^{40,5}	2525 ¹²⁴	453 ^{31,5}	263 ^{95,5}
4,40	8 145 ^{82,5}	40, 73 ⁴¹	40, 72 ⁴¹	2277 ^{121,5}	516 ³⁰	072 ⁹⁵
2	310 ^{83,5}	41, 55 ⁴²	41, 54 ⁴²	2034 ¹¹⁹	576 ^{27,5}	- 0,2 8824 ^{96,5}
4	477 ⁸⁶	42, 39 ⁴³	42, 38 ⁴³	1796 ¹¹⁷	631 ²⁶	6903 ^{96,5}
6	649 ⁸⁷	43, 25 ^{43,5}	43, 24 ^{43,5}	1562 ^{114,5}	683 ²⁴	4972 ^{97,5}
8	823 ^{89,5}	44, 12 ^{44,5}	44, 11 ^{44,5}	1333 ¹¹²	731 ²²	3030 ^{97,5}
4,50	9 002 ⁹¹	45, 01 ^{45,5}	45, 00 ^{45,5}	1109 ¹¹⁰	775 ^{20,5}	1080 ⁹⁸⁰
2	184 ^{92,5}	45, 92 ^{46,5}	45, 91 ^{46,5}	0889 ¹⁰⁸	816 ¹⁸	- 0,1 9120 ⁹⁸³
4	369 ^{94,5}	46, 85 ^{47,5}	46, 84 ^{47,5}	0673 ^{105,5}	852 ¹⁶	7154 ⁹⁸⁷
6	558 ^{96,5}	47, 80 ⁴⁸	47, 79 ⁴⁸	0462 ^{103,5}	884 ¹⁴	5180 ⁹⁹⁰
8	751 ^{98,5}	48, 76 ^{49,5}	48, 75 ^{49,5}	0255 ^{101,5}	912 ^{12,5}	3200 ^{992,5}
4,60	948 ^{100,5}	49, 75 ⁵⁰	49, 74 ⁵⁰	0052 ^{99,5}	937 ¹⁰	1215 ^{994,5}
2	10 149 ^{102,5}	50, 75 ^{51,5}	50, 74 ^{51,5}	0,00 9853 ^{97,5}	957 ^{8,5}	- 0,0 9226 ^{996,5}
4	354 ¹⁰⁵	51, 78 ⁵²	51, 77 ⁵²	9658 ⁹⁶	974 ⁶	7233 ⁹⁹⁸
6	564 ^{106,5}	52, 82 ^{53,5}	52, 81 ^{53,5}	9466 ^{93,5}	986 ^{4,5}	5237 ^{999,5}
8	777 ¹⁰⁹	53, 89 ^{54,5}	53, 88 ^{54,5}	9279 ⁹²	995 ²	3238 ^{999,5}
4,70	995 ¹¹¹	54, 98 ^{55,5}	54, 97 ^{55,5}	9095 ⁹⁰	999 ^{0,5}	- 0,0 1239 ¹⁰⁰⁰
2	11 217 ¹¹³	56, 09 ^{56,5}	56, 08 ^{56,5}	8915 ⁸⁸	1,0 000 ²	+ 0,0 0761 ¹⁰⁰⁰
4	443 ¹¹⁶	57, 22 ⁵⁸	57, 21 ⁵⁸	8739 ^{86,5}	0,9 996 ^{3,5}	2761 ⁹⁹⁹
6	675 ^{117,5}	58, 38 ⁵⁹	58, 37 ⁵⁹	8566 ⁸⁵	989 ⁶	4759 ^{998,5}
8	910 ^{120,5}	59, 56 ⁶⁰	59, 55 ⁶⁰	8396 ⁸³	977 ^{7,5}	6756 ⁹⁹⁷
4,80	12 151 ¹²³	60, 76 ^{61,5}	60, 75 ^{61,5}	8230 ^{81,5}	962 ¹⁰	8750 ⁹⁹⁵
2	397 ¹²⁵	61, 99 ^{62,5}	61, 98 ^{62,5}	8067 ⁸⁰	942 ^{11,5}	0,1 0740 ⁹⁹³
4	647 ^{127,5}	63, 24 ⁶⁴	63, 23 ⁶⁴	7907 ^{78,5}	919 ¹⁴	2726 ⁹⁹¹
6	902 ^{130,5}	64, 52 ⁶⁵	64, 51 ⁶⁵	7750 ^{76,5}	891 ^{15,5}	4708 ^{987,5}
8	13 163 ¹³³	65, 82 ^{66,5}	65, 81 ^{66,5}	7597 ⁷⁵	860 ^{17,5}	6683 ⁹⁸⁴
4,90	429 ^{135,5}	67, 15 ^{67,5}	67, 14 ⁶⁸	7447 ⁷⁴	825 ²⁰	8651 ^{980,5}
2	700 ^{138,5}	68, 50 ^{69,5}	68, 50 ⁶⁹	7299 ⁷²	785 ^{21,5}	0,2 0612 ^{976,5}
4	977 ¹⁴¹	69, 89 ^{70,5}	69, 88 ^{70,5}	7155 ⁷¹	742 ^{23,5}	2565 ⁹⁷²
6	14 259 ¹⁴⁴	71, 30 ⁷²	71, 29 ⁷²	7013 ^{69,5}	605 ^{25,5}	4509 ⁹⁶⁷
8	547 ¹⁴⁷	72, 74 ^{73,5}	72, 73 ^{73,5}	6874 ⁶⁸	644 ^{27,5}	6443 ^{961,5}
5,00	14 841	74, 21	74, 20	0,00 6738	0,9 539	0,2 8366
5,30	200 34	100, 171	100, 166	0,00 4992	0,8 3227	0,5 5437
6,00	403 43	201, 716	201, 713	0,00 2479	0,2 7942	0,9 6017

Fortsetzung S. 107
Continued on p. 107

Fortsetzung S. 107
Continued on p. 107

Fortsetzung von S. 106
Continued from p. 106

x	e^x	e^{-x}	x	$10 e^x$	e^{-x}	x	$10 e^x$	e^{-x}
		0,00			0,00			0,000
5,0 0	1 48,41 ¹⁵⁰	6 738 ^{66,5}	6,0 0	4 034 ⁴¹	2 4788 ^{245,5}	7,0 0	1 0966 ¹¹¹	9 119 ^{90,5}
2	51,41 ¹⁵³	605 ^{65,5}	2	116 ^{41,5}	4297 ^{240,5}	2	1188 ¹¹³	8 938 ^{88,5}
4	54,47 ¹⁵⁶	474 ⁶⁴	4	199 ^{42,5}	3816 ²³⁶	4	1414 ¹¹⁵	761 ^{86,5}
6	57,59 ¹⁵⁹	346 ⁶³	6	284 ⁴³	3344 ²³¹	6	1644 ¹¹⁸	588 ⁸⁵
8	60,77 ^{162,5}	220 ^{61,5}	8	370 ^{44,5}	2882 ^{226,5}	8	1880 ¹²⁰	418 ^{83,5}
5,1 0	64,02 ¹⁶⁶	097 ^{60,5}	6,1 0	459 ⁴⁵	2429 ²²²	7,1 0	2120 ^{122,5}	251 ^{81,5}
2	67,34 ¹⁶⁹	5 976 ⁵⁹	2	549 ⁴⁶	1985 ²¹⁸	2	2365 ^{124,5}	088 ⁸⁰
4	70,72 ¹⁷²	858 ⁵⁸	4	641 ^{46,5}	1549 ^{213,5}	4	2614 ^{127,5}	7 928 ^{78,5}
6	74,16 ¹⁷⁶	742 ⁵⁷	6	734 ⁴⁸	1122 ²⁰⁹	6	2869 ¹³⁰	771 ⁷⁷
8	77,68 ^{179,5}	628 ^{55,5}	8	830 ^{48,5}	0704 ²⁰⁵	8	3129 ^{132,5}	617 ^{75,5}
5,2 0	81,27 ¹⁸³	517 ⁵⁵	6,2 0	927 ⁵⁰	0294 ²⁰¹	7,2 0	3394 ^{135,5}	466 ⁷⁴
2	84,93 ¹⁸⁷	407 ^{53,5}	2	5 027 ⁵¹	1 9892 ¹⁹⁷	2	3665 ¹³⁸	318 ^{72,5}
4	88,67 ^{190,5}	300 ^{52,5}	4	129 ^{51,5}	9498 ¹⁹³	4	3941 ¹⁴¹	173 ⁷¹
6	92,48 ^{194,5}	195 ^{51,5}	6	232 ⁵³	9112 ¹⁸⁹	6	4223 ^{143,5}	031 ^{69,5}
8	96,37 ^{198,5}	092 ⁵⁰	8	338 ⁵⁴	8734 ^{185,5}	8	4510 ^{146,5}	6 892 ^{68,5}
5,3 0	2 00,34 ²⁰²	4 992 ^{49,5}	6,3 0	446 ⁵⁵	8363 ¹⁸²	7,3 0	4803 ^{149,5}	755 ^{66,5}
2	04,38 ^{206,5}	893 ^{48,5}	2	556 ⁵⁶	7999 ¹⁷⁸	2	5102 ^{152,5}	622 ^{65,5}
4	08,51 ^{210,5}	796 ^{47,5}	4	668 ⁵⁷	7643 ^{174,5}	4	5407 ^{155,5}	491 ^{64,5}
6	12,72 ²¹⁵	701 ^{46,5}	6	782 ^{58,5}	7294 ^{171,5}	6	5718 ¹⁵⁹	362 ⁶³
8	17,02 ^{219,5}	608 ^{45,5}	8	899 ^{59,5}	6951 ^{167,5}	8	6036 ¹⁶²	236 ⁶²
5,4 0	21,41 ^{223,5}	517 ⁴⁵	6,4 0	6 018 ⁶¹	6616 ^{164,5}	7,4 0	6360 ¹⁶⁵	112 ^{60,5}
2	25,88 ²²⁸	427 ⁴⁴	2	140 ⁶²	6287 ^{161,5}	2	6690 ¹⁶⁹	5 991 ⁵⁹
4	30,44 ²³³	339 ⁴³	4	264 ^{63,5}	5964 ¹⁵⁸	4	7028 ^{171,5}	873 ⁵⁸
6	35,10 ^{237,5}	253 ⁴²	6	391 ^{64,5}	5648 ¹⁵⁵	6	7371 ^{175,5}	757 ⁵⁷
8	39,85 ²⁴²	169 ⁴¹	8	520 ^{65,5}	5338 ¹⁵²	8	7722 ¹⁷⁹	643 ⁵⁶
5,5 0	44,69 ^{247,5}	087 ^{40,5}	6,5 0	651 ^{67,5}	5034 ^{148,5}	7,5 0	8080 ¹⁸³	531 ⁵⁵
2	49,64 ²⁵²	006 ^{39,5}	2	786 ^{68,5}	4737 ¹⁴⁶	2	8446 ¹⁸⁶	421 ^{53,5}
4	54,68 ²⁵⁷	3 927 ³⁹	4	923 ⁷⁰	4445 ¹⁴³	4	8818 ¹⁹⁰	314 ^{52,5}
6	59,82 ^{262,5}	849 ³⁸	6	7 063 ⁷¹	4159 ^{140,5}	6	9198 ¹⁹⁴	209 ^{51,5}
8	65,07 ²⁶⁸	773 ^{37,5}	8	205 ⁷³	3878 ¹³⁷	8	9586 ¹⁹⁸	106 ^{50,5}
5,6 0	70,43 ²⁷³	698 ^{36,5}	6,6 0	351 ⁷⁴	3604 ¹³⁵	7,6 0	9982 ²⁰²	005 ⁵⁰
2	75,89 ^{278,5}	625 ³⁶	2	499 ⁷⁶	3334 ¹³²	2	2 0386 ^{205,5}	4 905 ^{48,5}
4	81,46 ^{284,5}	553 ³⁵	4	651 ^{77,5}	3070 ^{129,5}	4	0797 ^{210,5}	808 ^{47,5}
6	87,15 ²⁹⁰	483 ^{34,5}	6	806 ^{78,5}	2811 ^{126,5}	6	1218 ²¹⁴	713 ^{46,5}
8	92,95 ²⁹⁶	414 ³⁴	8	963 ^{80,5}	2558 ^{124,5}	8	1646 ^{218,5}	620 ⁴⁶
5,7 0	98,87 ³⁰	346 ³³	6,7 0	8 124 ⁸²	2309 ¹²²	7,7 0	2083 ^{223,5}	528 ^{44,5}
2	3 04,9 ³¹	280 ^{32,5}	2	288 ⁸⁴	2065 ^{119,5}	2	2530 ^{227,5}	439 ⁴⁴
4	11,1 ³¹	215 ³²	4	456 ⁸⁵	1826 ¹¹⁷	4	2985 ²³²	351 ⁴³
6	17,3 ^{32,5}	151 ³¹	6	626 ^{87,5}	1592 ^{114,5}	6	3449 ²³⁷	265 ^{42,5}
8	23,8 ^{32,5}	089 ^{30,5}	8	801 ^{88,5}	1363 ^{112,5}	8	3923 ^{241,5}	180 ^{41,5}
5,8 0	30,3 ^{33,5}	028 ³⁰	6,8 0	978 ⁹¹	1138 ^{110,5}	7,8 0	4406 ^{246,5}	097 ^{40,5}
2	37,0 ³⁴	2 9676 ²⁹⁴	2	9 160 ^{92,5}	0917 ¹⁰⁸	2	4899 ^{251,5}	016 ^{39,5}
4	43,8 ^{34,5}	9088 ²⁸⁸	4	345 ^{94,5}	0701 ¹⁰⁶	4	5402 ^{256,5}	3 937 ³⁹
6	50,7 ^{35,5}	8512 ²⁸²	6	534 ⁹⁶	0489 ¹⁰⁴	6	5915 ²⁶²	859 ^{38,5}
8	57,8 ³⁶	7948 ²⁷⁷	8	726 ^{98,5}	0281 ^{101,5}	8	6439 ²⁶⁷	782 ^{37,5}
5,9 0	65,0 ³⁷	7394 ²⁷¹	6,9 0	923 ¹⁰⁰	0078 ¹⁰⁰	7,9 0	6973 ^{272,5}	707 ^{36,5}
2	72,4 ^{37,5}	6852 ²⁶⁶	2	10 123 ^{102,5}	0 9878 ^{97,5}	2	7518 ²⁷⁸	634 ³⁶
4	79,9 ^{38,5}	6320 ^{260,5}	4	328 ¹⁰⁴	9683 ⁹⁶	4	8074 ^{283,5}	562 ³⁵
6	87,6 ³⁹	5799 ^{255,5}	6	536 ^{106,5}	9491 ⁹⁴	6	8641 ²⁸⁹	492 ³⁵
8	95,4 ⁴⁰	5288 ²⁵⁰	8	749 ^{108,5}	9303 ⁹²	8	9219 ^{294,5}	422 ^{33,5}
6,0 0	4 03,4	2 4788	7,0 0	10 966	0 9119	8,0 0	2 9810	3 355
		0,00			0,00			0,000

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
8,0 0	2 981	0,000	9,0 0	8103	0,000
2	3 041	3355 33,5	2	8267	12 341 122
4	103 31	288 32,5	4	8434	097 120
6	165 31	223 32	6	8604	11 857 117,5
8	229 32,5	159 31	8	8778	622 115
8,1 0	294 33,5	097 31	8	88,5	392 112,5
2	361 34	035 30	9,1 0	8955	167 111
4	429 34,5	2 9753 294,5	2	9136	10 945 108
6	498 35,5	9164 289	4	9321	729 106,5
8	569 36	8586 283	6	9509	516 104
8,2 0	641 37	8020 277,5	8	9701	308 102
2	715 37,5	7465 272	9,2 0	9897	104 100
4	790 38	6921 266,5	2	1 0097	09 904 98
6	866 39	6388 261	4	0301	708 96
8	944 40	5866 256	6	0509	516 94,5
8,3 0	4 024 40,5	5354 251	8	0721	327 92,5
2	105 41,5	4852 246	9,3 0	0938	142 90,5
4	188 42,5	4360 241,5	2	1159	08 961 88,5
6	273 43	3877 236,5	4	1384	784 87
8	359 44	3404 231,5	6	1614	610 85
8,4 0	447 45	2941 227	8	1849	440 84
2	537 46	2487 223	9,4 0	2088	272 81,5
4	629 46,5	2041 218	2	2333	109 80,5
6	722 47,5	1605 214	4	2582	07 948 78,5
8	817 49	1177 209,5	6	2836	791 77,5
8,5 0	915 49,5	0758 205,5	8	3095	636 75,5
2	5 014 50,5	0347 201,5	9,5 0	3360	485 74
4	115 52	1 9944 197,5	2	3630	337 72,5
6	219 52,5	9549 193,5	4	3905	192 71,5
8	324 54	9162 189,5	6	4186	049 69,5
8,6 0	432 54,5	8783 186	8	4472	06 910 68,5
2	541 56	8411 182,5	9,6 0	4765	773 67
4	653 57,5	8046 178,5	2	5063	639 66
6	768 58	7689 175,5	4	5367	507 64,5
8	884 59,5	7338 171,5	6	5678	378 63
8,7 0	6 003 60,5	6995 168	8	5995	252 62
2	124 62	6659 165	9,7 0	6318	128 61
4	248 63	6329 162	2	6647	006 60
6	374 64,5	6005 158,5	4	6983	05 888 59
8	503 65,5	5688 155	6	7327	771 58,5
8,8 0	634 67	5378 152,5	8	7677	657 57
2	768 68,5	5073 149	9,8 0	8034	545 56
4	905 69,5	4775 146,5	2	8398	435 55
6	7 044 71,5	4482 143,5	4	8770	328 53,5
8	187 72,5	4195 140,5	6	9149	222 53
8,9 0	332 74	3914 137,5	8	9536	119 51,5
2	480 75,5	3639 135	9,9 0	9930	017 51
4	631 77	3369 132,5	2	2 0333	04 918 49,5
6	785 79	3104 129,5	4	0744	821 48,5
8	943 80	2845 127,5	6	1163	725 48
9,0 0	8 103	2590 124,5	8	1590	632 46,5
		0,000	10,0 0	2 2026	04 540 46
					0,000

Fortsetzung von S. 101
Continued from p. 101

x	arc sin x	arc cos x
	rad	rad
0,93 0	1,1 944	0,3 764
2	999	27,5 709
4	1,2 054	28 653
6	111	28 597
8	168	28,5 540
0,94 0	226	29 482
2	285	29,5 423
4	346	30,5 362
6	407	30,5 301
8	469	31 239
0,95 0	532	31,5 176
0,9 6	870	0,2 8379
7	1,3 252	4557
8	705	0033
0,990	1,4 293	0,1 4154
0,995	708	0004
0,9990	1,5 261	0,0 4473
0,9995	392	3163
0,9999	567	1414
1,0000	1,5 708	0,0 0000

$$\begin{aligned} \arcsin(1-v) &= \frac{\pi}{2} - \arccos(1-v), & \frac{\pi}{2} &= 1,570796 \\ \arccos(1-v) &= \arcsin \sqrt{(2-v)v} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{v}{2}} \\ &\approx \sqrt{2v} + \frac{v}{6} \sqrt{\frac{v}{2}} + \frac{3v^2}{80} \sqrt{\frac{v}{2}} \end{aligned}$$

Fortsetzung auf S. 112
Continued on p. 112

x	$\arctg x$	$\text{Amp } x$	$\text{Ar Cos } x$	$\text{Ar Sin } x$	x	$\arctg x$	$\text{Amp } x$	$\text{Ar Cos } x$	$\text{Ar Sin } x$
	rad	rad	rad	rad		rad	rad	rad	rad
2,00	1,1 071 ²⁰	1,3 018 ²⁶	1,3 170 ⁵⁷	1,4 436 ^{44,5}	3,00	1,2 490 ¹⁰⁰	1,4 713 ⁹⁶	1,7 627 ³⁵²	1,8 184 ³¹⁴
2	111 ^{19,5}	070 ²⁶	284 ^{56,5}	525 ^{44,5}	05	540 ⁹⁶	761 ⁹⁴	803 ³⁴⁴	341 ³¹⁰
4	150 ^{19,5}	122 ^{25,5}	397 ⁵⁶	614 ^{44,5}	10	588 ⁹²	808 ⁸⁶	975 ³³⁶	496 ³⁰⁴
6	189 ¹⁹	173 ^{24,5}	509 ^{55,5}	702 ⁴⁴	15	634 ⁹⁰	851 ⁸⁴	1,8 143 ³³²	648 ³⁰²
8	227 ^{18,5}	222 ^{24,5}	620 ^{54,5}	789 ⁴³	20	679 ⁸⁸	893 ⁸⁰	309 ³²⁶	799 ²⁹⁶
2,10	264 ¹⁸	271 ²⁴	729 ^{53,5}	875 ^{42,5}	3,25	723 ⁸⁶	933 ⁷⁶	472 ³²²	947 ²⁹²
2	300 ^{18,5}	319 ^{23,5}	836 ^{53,5}	960 ^{42,5}	30	766 ⁸²	971 ⁷²	633 ³¹⁴	1,9 093 ²⁸⁸
4	337 ^{17,5}	366 ²³	943 ^{52,5}	1,5 045 ^{42,5}	35	807 ⁸⁰	1,5 007 ⁶⁸	790 ³¹²	237 ²⁸⁴
6	372 ^{17,5}	412 ^{22,5}	1,4 048 ⁵²	130 ⁴²	40	847 ⁸⁰	041 ⁶⁴	946 ³⁰⁴	379 ²⁸⁰
8	407 ^{17,5}	457 ²²	152 ⁵¹	214 ^{41,5}	45	887 ⁷⁶	073 ⁶²	1,9 098 ³⁰⁰	519 ²⁷⁶
2,20	442 ¹⁷	501 ^{21,5}	254 ⁵¹	297 ⁴¹	3,50	925 ⁷⁴	104 ⁶⁰	248 ²⁹⁶	657 ²⁷⁴
2	476 ^{16,5}	544 ^{21,5}	356 ⁵⁰	379 ⁴¹	55	962 ⁷²	134 ⁵⁶	396 ²⁹²	794 ²⁶⁸
4	509 ^{16,5}	587 ^{20,5}	456 ^{49,5}	461 ^{40,5}	60	998 ⁷²	162 ⁵²	542 ²⁸⁸	928 ²⁶⁶
6	542 ^{16,5}	628 ^{20,5}	555 ⁴⁹	542 ^{40,5}	65	1,3 034 ⁶⁸	188 ⁵²	686 ²⁸²	2,0 061 ²⁶⁴
8	575 ¹⁶	669 ²⁰	653 ^{48,5}	623 ⁴⁰	70	068 ⁶⁸	214 ⁴⁸	827 ²⁷⁸	193 ²⁵⁸
2,30	607 ¹⁶	709 ²⁰	750 ⁴⁸	703 ^{39,5}	3,75	102 ⁶⁶	238 ⁴⁶	966 ²⁷⁶	322 ²⁵⁶
2	638 ¹⁵	749 ¹⁹	846 ⁴⁸	782 ^{39,5}	80	135 ⁶⁴	261 ⁴²	2,0 104 ²⁷⁰	450 ²⁵⁴
4	669 ^{15,5}	787 ¹⁹	942 ⁴⁷	861 ³⁹	85	167 ⁶²	282 ⁴²	239 ²⁶⁸	577 ²⁵⁰
6	700 ¹⁵	825 ^{18,5}	1,5 036 ^{46,5}	939 ³⁹	90	198 ⁶⁰	303 ⁴⁰	373 ²⁶²	702 ²⁴⁶
8	730 ¹⁵	862 ^{18,5}	129 ⁴⁶	1,6 017 ^{38,5}	95	228 ⁶⁰	323 ³⁸	504 ²⁶⁰	825 ²⁴⁴
2,40	760 ¹⁴⁶	899 ¹⁷⁴	221 ⁴⁵²	094 ³⁸²	4,0	258 ⁵⁸	342 ³⁵	634 ²⁵⁵	947 ²⁴⁰
45	833 ¹⁴⁰	986 ¹⁶⁸	447 ⁴⁴²	285 ³⁷⁴	1	316 ⁵⁵	377 ³¹	889 ²⁴⁸	2,1 187 ²³⁴
2,50	903 ¹³⁶	1,4 070 ¹⁵⁸	668 ⁴³²	472 ³⁶⁸	2	371 ⁵²	408 ²⁹	2,1 137 ²⁴³	421 ²²⁹
55	971 ¹³⁰	149 ¹⁵²	884 ⁴²⁰	656 ³⁶²	3	423 ⁵⁰	437 ²⁵	380 ²³⁶	650 ²²⁴
60	1,2 036 ¹²⁸	225 ¹⁴⁴	1,6 094 ⁴¹²	837 ³⁵⁶	4	473 ⁴⁸	462 ²⁴	616 ²³⁰	874 ²¹⁹
65	100 ¹²²	297 ¹³⁸	300 ⁴⁰⁴	1,7 015 ³⁵²	5	521 ⁴⁶	486 ²¹	846 ²²⁶	2,2 093 ²¹⁵
70	161 ¹¹⁸	366 ¹³⁰	502 ³⁹⁴	191 ³⁴⁴	6	567 ⁴⁵	507 ¹⁹	2,2 072 ²²⁰	308 ²¹⁰
2,75	220 ¹¹⁶	431 ¹²⁴	699 ³⁸⁶	363 ³³⁸	7	612 ⁴²	526 ¹⁷	292 ²¹⁵	518 ²⁰⁶
80	278 ¹¹⁰	493 ¹¹⁸	892 ³⁸⁰	532 ³³⁴	8	654 ⁴¹	543 ¹⁶	507 ²¹¹	724 ²⁰²
85	333 ¹⁰⁸	552 ¹¹⁴	1,7 082 ³⁷⁰	699 ³²⁸	9	695 ³⁹	559 ¹⁴	718 ²⁰⁶	926 ¹⁹⁸
90	387 ¹⁰⁶	609 ¹⁰⁶	267 ³⁶⁴	863 ³²⁴	5,0	1,3 734	1,5 573	2,2 924	2,3 124
95	440 ¹⁰⁰	662 ¹⁰²	449 ³⁵⁶	1,8 025 ³¹⁸					
3,00	1,2 490	1,4 713	1,7 627	1,8 184					

Fortsetzung S. 112
Continued on p. 112

x	$\arctg x$	x	$\arctg x$	x	$\arctg x$	x	$\arctg x$	x	$\text{Amp } x$
	rad		rad		rad		rad		rad
5,0	1,3 734 ³⁷	9,0	1,4 601 ¹²	20	1,5 208 ²⁴	70	1,55 65 ¹⁸	5,0	1,55 73 ^{12,5}
2	808 ^{34,5}	2	625 ^{11,5}	1	232 ²²	80	83 ¹⁴	2	98 ¹⁰
4	877 ³²	4	648 ¹¹	2	254 ¹⁹	90	97 ¹¹	4	1,56 18 ⁸
6	941 ³⁰	6	670 ^{10,5}	3	273 ¹⁹	100	1,56 08 ⁹	6	34 ^{6,5}
8	1,4 001 ^{27,5}	8	691 ¹⁰	4	292 ¹⁶	110	17 ⁸	8	47 ^{5,5}
6,0	056 ^{26,5}	10,0	711 ⁹⁴	6	324 ^{13,5}	120	25 ⁶	6,0	58 ^{4,5}
2	109 ^{24,5}	10,5	758 ⁸⁶	8	351 ¹²	140	37 ⁴	2	67 ⁴
4	158 ²³	11,0	801 ⁸⁰	30	375 ^{10,5}	160	45 ^{3,5}	4	75 ³
6	204 ²²	11,5	841 ⁷²	2	396 ⁹	180	52 ³	6	81 ^{2,5}
8	248 ^{20,5}	12,0	877 ⁶⁶	4	414 ⁸	200	58 ²⁰	8	86 ²
7,0	289 ^{19,5}	12,5	910 ⁶⁰	6	430 ^{7,5}	250	68 ¹⁴		
2	328 ^{18,5}	13,0	940 ⁵⁸	8	445 ^{6,5}	300	75 ⁸	7,0	90 ¹⁴
4	365 ^{17,5}	13,5	969 ⁵²	40	458 ⁶	400	83 ⁵	7,5	97 ⁸
6	400 ^{16,5}	14,0	995 ⁴⁸	2	470 ^{5,5}	500	88 ³	8,0	1,570 ¹
8	433 ^{15,5}	14,5	1,5 019 ⁴⁶	4	481 ⁵	600	91 ²	9,0	5 ⁴
8,0	464 ¹⁵	15,0	042 ⁴²	6	491 ^{4,5}	800	95 ^{1,5}	10,0	1,570 ⁷
2	494 ^{14,5}	16	084 ³⁶	8	500 ⁴	1000	98 ¹		
4	523 ^{13,5}	17	120 ³³			1500	1,570 ¹		
6	550 ¹³	18	153 ²⁹	50	508 ³⁶	2000	3		
8	576 ^{12,5}	19	182 ²⁶	55	526 ³⁰	3000	5		
9,0	1,4 601	20	1,5 208	60	541 ²⁶	5000	6		
				65	554 ²²	10000	7		
				70	1,5 565	25000	1,570 ⁸		

Fortsetzung von S. 99
Continued from p. 99

x	$\operatorname{tg} x$	x	$\operatorname{tg} x$	x	$\operatorname{tg} x$	x	$\operatorname{tg} x$
rad		rad		rad		rad	
0,8 00	1,0 296 ²⁰⁸	1,0 50	1,7 433 ⁴⁰⁸	1,24 0	2, 9119 ^{95,5}	1,34 0	4, 256 ¹⁹
05	400 ²¹⁰	55	637 ⁴¹⁴	2	9310 ^{96,5}	2	294 ^{19,5}
10	505 ²¹⁰	60	844 ⁴²²	4	9503 ^{97,5}	4	333 ²⁰
15	610 ²¹⁴	65	1,8 055 ⁴³⁰	6	9698 ⁹⁹	6	373 ^{20,5}
20	717 ²¹⁶	70	270 ⁴³⁸	8	9896 ¹⁰	8	414 ^{20,5}
25	825 ²¹⁸	75	489 ⁴⁴⁶	1,25 0	3, 010 ¹⁰	1,35 0	455 ²¹
30	934 ²²²	80	712 ⁴⁵⁴	2	030 ¹⁰	2	497 ^{21,5}
35	1,1 045 ²²²	85	939 ⁴⁶⁴	4	050 ^{10,5}	4	4, 540 ^{21,5}
40	156 ²²⁶	90	1,9 171 ⁴⁷²	6	071 ^{10,5}	1,40	5,798
45	269 ²²⁸	95	407 ⁴⁸²	8	092 ^{10,5}	1,45	8,238
50	383 ²³²	1,1 00	648 ⁴⁹⁰	1,26 0	113 ¹¹	1,50	14,101
55	499 ²³⁴	05	893 ⁵⁰⁰	2	135 ¹¹	1,55	48,08
60	616 ²³⁶	10	2,0 143 ⁵¹²	4	157 ¹¹	1,560	92,62
65	734 ²³⁸	15	399 ⁵²²	6	179 ¹¹	1,565	172,52
70	853 ²⁴²	20	660 ⁵³²	8	201 ^{11,5}	1,570	1255,8
75	974 ²⁴⁶	25	926 ⁵⁴⁴	1,27 0	224 ^{11,5}	$\frac{\pi}{2} - v = \frac{1 - v - v^3}{v \cdot 3 \cdot 45}$ $\frac{\pi}{2} = 1,570796$	
80	1,2 097 ²⁴⁸	30	2,1 198 ⁵⁵⁴	2	247 ^{11,5}		
85	221 ²⁵⁰	35	475 ⁵⁶⁸	4	270 ¹²		
90	346 ²⁵⁴	40	759 ⁵⁸⁰	6	293 ¹²		
95	473 ²⁵⁸	45	2,2 049 ⁵⁹²	8	317 ¹²		
0,9 00	602 ²⁶⁰	50	345 ⁶⁰⁶	1,28 0	341 ^{12,5}		
05	732 ²⁶⁴	55	648 ⁶²⁰	2	366 ^{12,5}		
10	864 ²⁶⁶	60	958 ⁶³⁴	4	391 ^{12,5}		
15	997 ²⁷²	65	2,3 275 ⁶⁵⁰	6	416 ¹³		
20	1,3 133 ²⁷⁴	70	600 ⁶⁶⁴	8	441 ¹³		
25	270 ²⁷⁸	75	932 ⁶⁸²	1,29 0	467 ^{13,5}		
30	409 ²⁸²	80	2,4 273 ⁶⁹⁶	2	493 ^{13,5}		
35	550 ²⁸⁴	85	621 ⁷¹⁶	4	520 ^{13,5}		
40	692 ²⁹⁰	90	979 ⁷³⁴	6	547 ¹⁴		
45	837 ²⁹⁴	1,1 95	2,5 346 ⁷⁵²	8	574 ¹⁴		
50	984 ²⁹⁸	1,20 0	722 ^{76,5}	1,30 0	602 ^{14,5}		
55	1,4 133 ³⁰²	2	875 ⁷⁷	2	630 ^{14,5}		
60	284 ³⁰⁶	4	2,6 029 ^{78,5}	4	659 ^{14,5}		
65	437 ³¹⁰	6	186 ⁷⁹	6	688 ¹⁵		
70	592 ³¹⁶	8	344 ^{79,5}	8	717 ¹⁵		
75	750 ³²⁰	1,21 0	503 ⁸¹	1,31 0	747 ^{15,5}		
80	910 ³²⁴	2	665 ^{81,5}	2	777 ^{15,5}		
85	1,5 072 ³³⁰	4	828 ⁸²	4	808 ¹⁶		
90	237 ³³⁴	6	992 ^{83,5}	6	839 ¹⁶		
95	404 ³⁴⁰	8	2,7 159 ^{84,5}	8	871 ^{16,5}		
1,0 00	574 ³⁴⁶	1,22 0	328 ⁸⁵	1,32 0	903 ^{16,5}		
05	747 ³⁵⁰	2	498 ⁸⁶	2	936 ¹⁷		
10	922 ³⁵⁶	4	670 ⁸⁷	4	969 ^{17,5}		
15	1,6 100 ³⁶²	6	844 ⁸⁸	6	4, 003 ^{17,5}		
20	281 ³⁶⁸	8	2,8 020 ⁸⁹	8	037 ¹⁸		
25	465 ³⁷⁴	1,23 0	198 ⁹⁰	1,33 0	072 ¹⁸		
30	652 ³⁸²	2	378 ⁹¹	2	108 ¹⁸		
35	843 ³⁸⁶	4	560 ⁹²	4	144 ¹⁹		
40	1,7 036 ³⁹⁴	6	744 ^{93,5}	6	180 ¹⁹		
45	233 ⁴⁰⁰	8	931 ⁹⁴	8	218 ¹⁹		
1,0 50	1,7 433	1,24 0	2,9 119	1,34 0	4, 256		

Fortsetzung von S. 99
Continued from p. 99

x	Ar Amp x	x	Ar Amp x	x	Ar Amp x	x	Ar Amp x																																																															
rad		rad		rad		rad																																																																
0,8 0	0,9 022 ¹⁴⁴	1,2 25	1,7 450 ²⁹⁸	1,43 0	2,6 519 ⁷²	1,5 3	3,892																																																															
1	166 ¹⁴⁶	30	599 ³⁰⁰	2	663 ⁷³	4	4,173																																																															
2	312 ¹⁴⁷	35	749 ³⁰⁶	4	809 ^{73,5}	5	4,566																																																															
3	459 ¹⁴⁹	40	902 ³¹⁰	6	956 ⁷⁵	6	5,222																																																															
4	608 ¹⁵¹	45	1,8 057 ³¹⁶	8	2,7 106 ⁷⁶	7	7,829																																																															
5	759 ¹⁵²	50	215 ³²⁰	1,44 0	258 ^{77,5}	$\frac{v}{2} - v \ln \left(1 : \text{tg } \frac{v}{2} \right)$ $= \ln \frac{2}{v} - \frac{v^2}{12}$																																																																
6	911 ¹⁵⁴	55	375 ³²⁴	2	413 ^{78,5}																																																																	
7	1,0 065 ¹⁵⁶	60	537 ³²⁸	4	570 ^{79,5}																																																																	
8	221 ¹⁵⁸	65	701 ³³⁶	6	729 ⁸¹	$\frac{v}{2} = 1,570796$																																																																
9	379 ¹⁶⁰	70	869 ³⁴⁰	8	891 ^{82,5}																																																																	
0,9 0	539 ¹⁶²	75	1,9 039 ³⁴⁶	1,45 0	2,8 056 ^{83,5}																																																																	
1	701 ¹⁶⁴	80	212 ³⁵²	2	223 ⁸⁵	Fortsetzung von S. 102 Continued from p. 102																																																																
2	865 ¹⁶⁶	85	388 ³⁵⁸	4	393 ^{86,5}																																																																	
3	1,1 031 ¹⁶⁹	90	567 ³⁶⁴	6	566 ^{88,5}																																																																	
4	200 ¹⁷⁰	95	749 ³⁷⁰	8	743 ^{89,5}	<table><tr><th>x</th><th>Tg x</th></tr><tr><td>rad</td><td></td></tr><tr><td>2, 00</td><td>0,9 640⁶⁸</td></tr><tr><td>05</td><td>674⁶²</td></tr><tr><td>10</td><td>705⁵⁴</td></tr><tr><td>15</td><td>732⁵⁰</td></tr><tr><td>20</td><td>757⁴⁶</td></tr><tr><td>25</td><td>780⁴²</td></tr><tr><td>30</td><td>801³⁸</td></tr><tr><td>35</td><td>820³⁴</td></tr><tr><td>40</td><td>837³⁰</td></tr><tr><td>45</td><td>852²⁸</td></tr><tr><td>50</td><td>866²⁶</td></tr><tr><td>55</td><td>879²²</td></tr><tr><td>60</td><td>890²²</td></tr><tr><td>65</td><td>0,99 01¹⁸</td></tr><tr><td>70</td><td>10¹⁶</td></tr><tr><td>2, 8</td><td>26¹⁴</td></tr><tr><td>9</td><td>40¹¹</td></tr><tr><td>3, 0</td><td>51⁸</td></tr><tr><td>1</td><td>59⁸</td></tr><tr><td>2</td><td>67⁶</td></tr><tr><td>3</td><td>73⁵</td></tr><tr><td>4</td><td>78⁴</td></tr><tr><td>5</td><td>82⁴</td></tr><tr><td>7</td><td>88³</td></tr><tr><td>9</td><td>0,999 2</td></tr><tr><td>4, 1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>5, 0</td><td>9</td></tr><tr><td>5, 5</td><td>1,000 0</td></tr></table>	x	Tg x	rad		2, 00	0,9 640 ⁶⁸	05	674 ⁶²	10	705 ⁵⁴	15	732 ⁵⁰	20	757 ⁴⁶	25	780 ⁴²	30	801 ³⁸	35	820 ³⁴	40	837 ³⁰	45	852 ²⁸	50	866 ²⁶	55	879 ²²	60	890 ²²	65	0,99 01 ¹⁸	70	10 ¹⁶	2, 8	26 ¹⁴	9	40 ¹¹	3, 0	51 ⁸	1	59 ⁸	2	67 ⁶	3	73 ⁵	4	78 ⁴	5	82 ⁴	7	88 ³	9	0,999 2	4, 1	5	3	6	5	7	5, 0	9	5, 5	1,000 0
x	Tg x																																																																					
rad																																																																						
2, 00	0,9 640 ⁶⁸																																																																					
05	674 ⁶²																																																																					
10	705 ⁵⁴																																																																					
15	732 ⁵⁰																																																																					
20	757 ⁴⁶																																																																					
25	780 ⁴²																																																																					
30	801 ³⁸																																																																					
35	820 ³⁴																																																																					
40	837 ³⁰																																																																					
45	852 ²⁸																																																																					
50	866 ²⁶																																																																					
55	879 ²²																																																																					
60	890 ²²																																																																					
65	0,99 01 ¹⁸																																																																					
70	10 ¹⁶																																																																					
2, 8	26 ¹⁴																																																																					
9	40 ¹¹																																																																					
3, 0	51 ⁸																																																																					
1	59 ⁸																																																																					
2	67 ⁶																																																																					
3	73 ⁵																																																																					
4	78 ⁴																																																																					
5	82 ⁴																																																																					
7	88 ³																																																																					
9	0,999 2																																																																					
4, 1	5																																																																					
3	6																																																																					
5	7																																																																					
5, 0	9																																																																					
5, 5	1,000 0																																																																					
5	370 ¹⁷⁴	1,3 00	934 ³⁷⁸	1,46 0	922 ⁹¹																																																																	
6	544 ¹⁷⁵	05	2,0 123 ³⁸⁴	2	2,9 104 ⁹³																																																																	
7	719 ¹⁷⁸	10	315 ³⁹⁰	4	290 ⁹⁵																																																																	
8	897 ¹⁸¹	15	510 ⁴⁰⁰	6	480 ^{96,5}																																																																	
9	1,2 078 ¹⁸⁴	20	710 ⁴⁰⁶	8	673 ^{98,5}																																																																	
1,0 0	262 ¹⁸⁶	25	913 ⁴¹⁶	1,47 0	870 ^{100,5}																																																																	
1	448 ¹⁹⁰	30	2,1 121 ⁴²⁴	2	3,0 071 ^{10,5}																																																																	
2	638 ¹⁹³	35	333 ⁴³²	4	28 ¹⁰																																																																	
3	831 ¹⁹⁶	40	549 ⁴⁴²	6	48 ¹¹																																																																	
4	1,3 027 ¹⁹⁹	45	770 ⁴⁵²	8	70 ¹¹																																																																	
5	226 ²⁰³	50	996 ⁴⁶²	1,48 0	92 ¹¹																																																																	
6	429 ²⁰⁶	55	2,2 227 ⁴⁷²	2	3,1 14 ^{11,5}																																																																	
7	635 ²¹⁰	60	463 ⁴⁸⁴	4	37 ^{11,5}																																																																	
8	845 ²¹⁴	65	705 ⁴⁹⁴	6	60 ¹²																																																																	
9	1,4 059 ²¹⁹	70	952 ⁵⁰⁸	8	84 ¹²																																																																	
1,1 0	278 ²²²	75	2,3 206 ⁵²⁰	1,49 0	3,2 08 ¹³																																																																	
1	500 ²²⁷	80	466 ⁵³⁶	2	34 ^{12,5}																																																																	
2	727 ²³²	85	734 ⁵⁴⁸	4	59 ^{13,5}																																																																	
3	959 ²³⁷	90	2,4 008 ⁵⁶⁴	6	86 ^{13,5}																																																																	
4	1,5 196 ²⁴²	95	290 ⁵⁸⁰	8	3,3 13 ¹⁴																																																																	
1,1 50	438 ²⁴⁸	1,40 0	580 ⁵⁹	1,50 0	41 ¹⁴																																																																	
55	562 ²⁴⁸	2	698 ⁶⁰	2	69 ¹⁵																																																																	
60	686 ²⁵²	4	818 ^{60,5}	4	99 ¹⁵																																																																	
65	812 ²⁵⁴	6	939 ^{61,5}	6	3,4 29 ¹⁶																																																																	
70	939 ²⁵⁸	8	2,5 062 ⁶²	8	61 ¹⁶																																																																	
75	1,6 068 ²⁶²	1,41 0	186 ⁶³	1,51 0	93 ¹⁷																																																																	
80	199 ²⁶⁴	2	312 ^{63,5}	2	3,5 27 ¹⁷																																																																	
85	331 ²⁶⁸	4	439 ^{64,5}	4	61 ¹⁸																																																																	
90	465 ²⁷⁰	6	568 ^{65,5}	6	97 ^{18,5}																																																																	
95	600 ²⁷⁴	8	699 ⁶⁶	8	3,6 34 ^{19,5}																																																																	
1,2 00	737 ²⁷⁸	1,42 0	831 ⁶⁷	1,52 0	73 ²⁰																																																																	
05	876 ²⁸²	2	965 ⁶⁸	1	93 ²⁰																																																																	
10	1,7 017 ²⁸⁴	4	2,6 101 ^{68,5}	2	3,7 13 ²¹																																																																	
15	159 ²⁹⁰	6	238 ⁷⁰	3	34 ²¹																																																																	
20	304 ²⁹²	8	378 ^{70,5}	4	55 ²²																																																																	
1,2 25	1,7 450	1,43 0	2,6 519	1,52 5	3,7 77																																																																	

Fortsetzung von S. 109
Continued from p. 109

x	Mr Sin x	Mr Cos x	x	Mr Sin x	Mr Cos x
	rad	rad		rad	rad
5,0	2,3 124 195	2,2 924 202	20	3,690 48	3,688 49
1	319 190	2,3 126 198	21	738 47	737 47
2	509 187	324 194	22	785 44	784 44
3	696 184	518 191	23	829 43	828 43
4	880 181	709 186	24	872 40	871 41
5	2,4 061 177	895 183	25	912 40	912 39
6	238 174	2,4 078 180	26	952 37	951 38
7	412 172	258 177	27	989 37	989 36
8	584 168	435 173	28	4,026 35	4,025 35
9	752 166	608 171	29	061 34	060 34
6,0	918 163	779 167	30	095 32	094 33
1	2,5 081 160	946 165	31	127 32	127 32
2	241 158	2,5 111 162	32	159 31	159 30
3	399 156	273 160	33	190 30	189 30
4	555 153	433 157	34	220 29	219 29
5	708 151	590 154	35	4,249	4,248
6	859 149	744 152	x	$\ln(2x) + \frac{1}{(2x)^2}$	$\ln(2x) - \frac{1}{(2x)^2}$
7	2,6 008 146	896 150			
8	154 145	2,6 046 148			
9	299 142	194 145			
7,0	441 139,5	339 142,5			
2	720 136	624 138			
4	992 132	900 134,5			
6	2,7 256 129	2,7 169 131			
8	514 125,5	431 128			
8,0	765 122,5	687 124			
2	2,8 010 119,5	935 121,5			
4	249 117	2,8 178 118,5			
6	483 114	415 116			
8	711 111,5	647 113			
9,0	934 109,5	873 110,5			
2	2,9 153 107	2,9 094 108			
4	367 104,5	310 106			
6	576 102,5	522 103,5			
8	781 100,5	729 100			
10,0	2,9982 98	2,9929 98			
10,5	3,047 92	3,042 94			
11,0	093 88	089 90			
11,5	137 86	134 84			
12,0	180 82	176 82			
12,5	221 78	217 80			
13,0	260 74	257 74			
13,5	297 72	294 74			
14,0	333 70	331 70			
14,5	368 68	366 68			
15,0	402 65	400 65			
16	467 60	465 60			
17	527 57	525 58			
18	584 54	583 54			
19	638 52	637 51			
20	3,690	3,688			

Fortsetzung von S. 108
Continued from p. 108

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
10	22 026	-44540	30	1 ¹³ 0686	-1 ¹³ 9358
11	5987	1 ¹⁵ 6702	35	1 ¹⁵ 5860	-1 ¹⁵ 6305
12	1 ¹⁶ 275	-1 ¹⁶ 144	40	2 ¹⁷ 3539	-2 ¹⁷ 4248
13	4424	2 ¹⁸ 2603	45	2 ¹⁸ 3493	-2 ¹⁸ 8625
14	1 ¹⁸ 2026	-1 ¹⁸ 315	50	2 ¹⁸ 5185	-2 ¹⁸ 9287
15	73269	3 ¹⁷ 0590	55	2 ¹⁸ 7695	-2 ¹⁸ 2996
16	78886	1 ¹⁷ 1254	60	1 ¹⁸ 1420	-1 ¹⁸ 8757
17	2 ¹⁷ 4155	-2 ¹⁷ 4140	65	1 ¹⁸ 6949	-1 ¹⁸ 5900
18	86566	1 ¹⁸ 5230	70	2 ¹⁹ 5154	-2 ¹⁹ 3975
19	1 ¹⁸ 7848	-1 ¹⁸ 5603	75	2 ¹⁹ 3733	-2 ¹⁹ 6786
20	84852	2 ¹⁹ 0612	80	2 ¹⁹ 5541	-2 ¹⁹ 8049
25	117200	1 ¹¹ 3888	85	2 ¹⁹ 8223	-2 ¹⁹ 2161
			90	1 ¹⁹ 2204	-1 ¹⁹ 8194
			95	1 ¹⁸ 1112	-1 ¹⁸ 5521
			100	2 ¹⁸ 6881	-2 ¹⁸ 3720

$$1^8 7848 \equiv 1,7848 \cdot 10^8$$

$$-1^8 5603 \equiv 0,5603 \cdot 10^{-8}$$

x	$1 - \cos x$	x	$1 - \cos x$
rad		rad	
0,0 05	0,0 ⁴ 12500	0,1 25	0,00 7802
10	0,0 ⁴ 50000	30	8438 ¹²⁷²
15	0,000 11250	35	9099 ¹³²²
20	0,000 19999	40	9784 ¹³⁷⁰
25	0,000 3125	45	0,01 0494 ¹⁴²⁰
		50	1229 ¹⁴⁷⁰
0,03 0	0,000 4500 ³⁰⁵	55	1989 ¹⁵²⁰
1	4805 ³¹⁵	60	2773 ¹⁵⁶⁸
2	5120 ³²⁵	65	3582 ¹⁶¹⁸
3	5445 ³³⁴	70	4415 ¹⁶⁶⁶
4	5779 ³⁴⁵	75	5273 ¹⁷¹⁶
		80	6156 ¹⁷⁶⁶
5	6124 ³⁵⁵	85	7064 ¹⁸¹⁶
6	6479 ³⁶⁵	90	7996 ¹⁸⁶⁴
7	6844 ³⁷⁵	95	8952 ¹⁹¹²
8	7219 ³⁸⁵		9933 ¹⁹⁶²
9	7604 ³⁹⁵	0,2 0	0,02 1969 ²⁰³⁶
		1	4103 ²¹³⁴
0,04 0	7999 ⁴¹⁰	2	6334 ²²³¹
2	8819 ^{429,5}	3	8662 ²³²⁸
4	9678 ⁴⁵⁰	4	9933 ²⁴³
6	0,001 0578 ⁴⁷⁰		
8	1518 ^{489,5}	5	0,0 3109 ²⁵²
		6	3361 ²⁶²
0,05 0	2497 ⁵¹⁰	7	3623 ²⁷¹
2	3517 ⁵³⁰	8	3894 ²⁸¹
4	4577 ^{549,5}	9	4175 ²⁹¹
6	5676 ^{569,5}		
8	6815 ⁵⁹⁰	0,3 0	4466 ³⁰¹
		1	4767 ³¹⁰
0,06 0	7995 ^{609,5}	2	5077 ³¹⁹
2	9214 ^{629,5}	3	5396 ³²⁹
4	0,002 0473 ^{649,5}	4	5725 ³³⁸
6	1772 ^{669,5}		
8	3111 ^{689,5}	5	6063 ³⁴⁷
		6	6410 ³⁵⁷
0,07 0	4490 ^{709,5}	7	6767 ³⁶⁶
2	5909 ^{729,5}	8	7133 ³⁷⁶
4	7368 ⁷⁴⁹	9	7509 ³⁸⁵
6	8866 ^{76,5}		
8	0,00 3040 ⁷⁹	0,4 0	7894 ^{398,5}
		2	8691 ⁴¹⁷
0,08 0	3198 ⁸¹	4	9525 ⁴³⁵
2	3360 ⁸³	6	0,1 0395 ⁴⁵³
4	3526 ⁸⁵	8	1301 ^{470,5}
6	3696 ⁸⁷		
8	3870 ^{88,5}	0,5 0	2242 ⁴⁸⁸
		2	3218 ^{505,5}
0,09 0	4047 ⁹¹	4	4229 ^{522,5}
2	4229 ⁹³	6	5274 ^{539,5}
4	4415 ^{94,5}	8	6353 ^{556,5}
6	4604 ⁹⁷		
8	4798 ⁹⁹	0,6 0	7466 ⁵⁷³
		2	8612 ⁵⁸⁹
0,1 00	4996 ¹⁰²²	4	9790 ^{605,5}
05	5507 ¹⁰⁷⁴	6	0,2 1001
10	6044 ¹¹²²		
15	6605 ¹¹⁷²		
20	7191 ¹²²²		
0,1 25	0,00 7802		

x	$\cos x - 1$	x	$\cos x - 1$
rad		rad	
0,0 05	0,0 ⁴ 12500	0,1 25	0,00 7823 ¹²⁷⁸
10	0,0 ⁴ 50000	30	8462 ¹³²⁸
15	0,0 ⁸ 11250	35	9126 ¹³⁸⁰
20	0,0 ⁸ 20001	40	9816 ¹⁴³⁰
25	0,0 ⁸ 3125	45	0,01 0531 ¹⁴⁸⁰
		50	1271 ¹⁵³⁰
0,03 0	0,000 4500 ³⁰⁵	55	2036 ¹⁵⁸²
1	4805 ³¹⁵	60	2827 ¹⁶³²
2	5120 ³²⁵	65	3643 ¹⁶⁸⁴
3	5445 ³³⁶	70	4485 ¹⁷³⁴
4	5781 ³⁴⁵	75	5352 ¹⁷⁸⁴
		80	6244 ¹⁸³⁴
5	6126 ³⁵⁵	85	7161 ¹⁸⁸⁶
6	6481 ³⁶⁵	90	8104 ¹⁹³⁸
7	6846 ³⁷⁵	95	9073 ¹⁹⁸⁸
8	7221 ³⁸⁵		
9	7606 ³⁹⁵	0,2 00	0,02 0067 ²⁰⁶⁴
		1	2131 ²¹⁶⁷
0,04 0	8001 ⁴¹⁰	2	4298 ²²⁶⁹
2	8821 ^{430,5}	3	6567 ²³⁷²
4	9682 ⁴⁵⁰	4	8939 ²⁴⁷
6	0,001 0582 ⁴⁷⁰		
8	1522 ^{490,5}	5	0,0 3141 ²⁵⁸
		6	3399 ²⁶⁸
0,05 0	2503 ⁵¹⁰	7	3667 ²⁷⁹
2	3523 ^{530,5}	8	3946 ²⁸⁹
4	4584 ⁵⁵⁰	9	4235 ²⁹⁹
6	5684 ^{570,5}		
8	6825 ⁵⁹⁰	0,3 0	4534 ³¹⁰
		1	4844 ³²⁰
0,06 0	8005 ^{610,5}	2	5164 ³³¹
2	9226 ^{630,5}	3	5495 ³⁴¹
4	0,002 0487 ^{650,5}	4	5836 ³⁵²
6	1788 ^{670,5}		
8	3129 ^{690,5}	5	6188 ³⁶²
		6	6550 ³⁷³
0,07 0	4510 ^{710,5}	7	6923 ³⁸⁴
2	5931 ^{730,5}	8	7307 ³⁹⁵
4	7392 ^{750,5}	9	7702 ⁴⁰⁵
6	8893 ⁷⁷		
8	0,00 3043 ^{79,5}	0,4 0	8107 ^{422,5}
		2	8950 ^{443,5}
0,08 0	3202 ⁸¹	4	9837 ^{465,5}
2	3364 ⁸³	6	0,1 0768 ^{487,5}
4	3530 ⁸⁵	8	1743 ⁵¹⁰
6	3700 ⁸⁷		
8	3874 ^{89,5}	0,5 0	2763 ⁵³²
		2	3827 ⁵⁵⁵
0,09 0	4053 ⁹¹	4	4937 ^{578,5}
2	4235 ⁹³	6	6094 ^{601,5}
4	4421 ^{95,5}	8	7297 ⁶²⁵
6	4612 ⁹⁷		
8	4806 ⁹⁹	0,6 0	8547 ^{648,5}
		2	9844 ^{672,5}
0,1 00	5004 ¹⁰²⁸	4	0,2 1189
05	5518 ¹⁰⁷⁶		
10	6056 ¹¹²⁸		
15	6620 ¹¹⁷⁸		
20	7209 ¹²²⁸		
0,1 25	0,00 7823		

Für $x < 0,03$ rad berechne
For $x < 0,03$ compute

$$f(x) = 1 - \cos x = 0,5 x^2.$$

$0,03 \text{ rad} < x < 0,06 \text{ rad}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (x_0 + \frac{1}{2}h)h.$$

$0,06 \text{ rad} < x$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \sin(x_0 + \frac{1}{2}h).$$

Für $x < 0,03$ berechne
For $x < 0,03$ compute

$$f(x) = -1 + \cos x = 0,5 x^2.$$

$0,03 < x < 0,06$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (x_0 + \frac{1}{2}h)h.$$

$0,06 < x$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \sin(x_0 + \frac{1}{2}h).$$

cf. Fig. 47, 48 p. 96

x	$\ln x$	$\lg x$	x	$\ln x$	$\lg x$
1,0002	0,000 2000 ¹⁰⁰⁰	0,000 08685 ⁴³⁴²	1,100	0,0 9531 ⁹⁰⁸	04 139 ³⁹⁴
4	3999 ¹⁰⁰⁰	17368 ⁴³⁴¹	05	9985 ⁹⁰²	336 ³⁹²
6	5998 ¹⁰⁰⁰	26050 ⁴³⁴	10	0,1 0436 ⁸⁹⁸	532 ³⁹²
8	7997 ⁹⁹⁹	3473 ⁴³⁴	15	0885 ⁸⁹⁶	728 ³⁸⁸
1,0010	9995 ⁹⁹⁹	4341 ⁴³³⁸	20	1333 ⁸⁹⁰	922 ³⁸⁶
15	0,00 14989 ⁹⁹⁸	6510 ⁴³³⁴	25	1778 ⁸⁸⁸	05 115 ³⁸⁶
20	19980 ⁹⁹⁸	8677 ⁴³³⁴	30	2222 ⁸⁸²	308 ³⁸⁴
25	24969 ⁹⁹⁷	0,001 0844 ⁴³³⁰	35	2663 ⁸⁸⁰	500 ³⁸²
30	29955 ⁹⁹⁷	3009 ⁴³²⁸	40	3103 ⁸⁷⁴	691 ³⁸⁰
1,004	3992 ⁹⁹⁶	7337 ⁴³²⁴	45	3540 ⁸⁷²	881 ³⁷⁸
5	4988 ⁹⁹⁴	0,002 1661 ⁴³²⁴	50	3976 ⁸⁶⁸	06 070 ³⁷⁶
6	5982 ⁹⁹⁴	5980 ⁴³¹	55	4410 ⁸⁶⁴	258 ³⁷⁶
7	6976 ⁹⁹²	0,003 029 ⁴³¹	60	4842 ⁸⁶⁰	446 ³⁷⁴
8	7968 ⁹⁹²	461 ⁴³⁰	65	5272 ⁸⁵⁶	633 ³⁷²
9	8960 ⁹⁹⁰	891 ⁴³⁰	70	5700 ⁸⁵⁴	819 ³⁷⁰
1,010	9950 ⁹⁸⁹	0,00 4321 ⁴³⁰	75	6127 ⁸⁴⁸	07 004 ³⁶⁸
2	0,01 1929 ⁹⁸⁷	5181 ⁴²⁸	80	6551 ⁸⁴⁶	188 ³⁶⁸
4	3903 ⁹⁸³	6038 ⁴²⁸	85	6974 ⁸⁴²	372 ³⁶⁶
6	5873 ⁹⁸³	6894 ⁴²⁷	90	7395 ⁸⁴⁰	555 ³⁶⁴
8	7840 ⁹⁸¹	7748 ⁴²⁶	95	7815 ⁸³⁴	737 ³⁶²
1,020	9803 ⁹⁷⁹	8600 ⁴²⁵	1,20	8232 ⁸³⁰	918 ³⁶¹
2	0,02 1761 ⁹⁷⁸	9451 ⁴²⁴	1	9062 ⁸²³	08 279 ³⁵⁷
4	3717 ⁹⁷⁵	0,01 0300 ⁴²³	2	9885 ⁸¹⁶	636 ³⁵⁵
6	5668 ⁹⁷³	1147 ⁴²³	3	0,2 0701 ⁸¹⁰	991 ³⁵¹
8	7615 ⁹⁷²	1993 ⁴²²	4	1511 ⁸⁰³	09 342 ³⁴⁹
1,030	9559 ^{97,5}	2837 ⁴²¹	5	2314 ⁷⁹⁷	691 ³⁴⁶
2	0,03 150 ^{96,5}	3680 ⁴²⁰	6	3111 ⁷⁹⁰	10 037 ³⁴³
4	343 ⁹⁷	4520 ⁴²⁰	7	3901 ⁷⁸⁵	380 ³⁴¹
6	537 ^{96,5}	5360 ⁴¹⁸	8	4686 ⁷⁷⁸	721 ³³⁸
8	730 ⁹⁶	6197 ⁴¹⁸	9	5464 ⁷⁷²	11 059 ³³⁵
1,040	922 ⁹⁶	7033 ⁴¹⁷	1,30	6236 ⁷⁶⁶	394 ³³³
2	0,04 114 ⁹⁶	7868 ⁴¹⁶	1	7002 ⁷⁶¹	727 ³³⁰
4	306 ^{95,5}	8701 ⁴¹⁵	2	7763 ⁷⁵⁵	12 057 ³²⁸
6	497 ^{95,5}	9532 ⁴¹⁴	3	8518 ⁷⁴⁹	385 ³²⁵
8	688 ^{95,5}	0,02 0361 ⁴¹⁴	4	9267 ⁷⁴	710 ³²³
1,050	879 ⁹⁵	1189 ⁴¹³	5	0,3 001 ⁷⁴	13 033 ³²⁰
2	0,05 069 ⁹⁵	2016 ⁴¹²	6	075 ⁷³	354 ³¹⁹
4	259 ⁹⁵	2841 ⁴¹¹	7	148 ⁷³	672 ³¹⁶
6	449 ^{94,5}	3664 ⁴¹¹	8	221 ⁷²	988 ³¹³
8	638 ⁹⁴	4486 ⁴¹⁰	9	293 ⁷²	14 301 ³¹²
1,060	826 ⁹⁴²	5306 ⁴⁰⁸⁸	1,40	365 ⁷¹	613 ³⁰⁹
65	0,06 297 ⁹³⁸	7350 ⁴⁰⁶⁸	1	436 ⁷¹	922 ³⁰⁷
70	766 ⁹³²	9384 ⁴⁰⁶	2	507 ⁷⁰	15 229 ³⁰⁵
75	0,07 232 ⁹²⁸	0,03 141 ⁴⁰²	3	577 ⁶⁹	534 ³⁰²
80	696 ⁹²⁴	342 ⁴⁰²	4	646 ⁷⁰	836 ³⁰¹
1,085	0,08 158 ⁹²⁰	543 ⁴⁰⁰	5	716 ⁶⁸	16 137 ²⁹⁸
90	618 ⁹¹⁴	743 ³⁹⁶	6	784 ⁶⁹	435 ²⁹⁷
95	0,09 075 ⁹¹²	941 ³⁹⁶	7	853 ⁶⁷	732 ²⁹⁴
1,100	0,09 531	0,04 139	8	920 ⁶⁸	17 026 ²⁹³
			9	988 ⁶⁷	319 ²⁹⁰
			1,50	0,4 055	17 609

$$\ln 2 = 0,693\ 147\ 180\ 559\ 945$$

$$\ln 3 = 1,098\ 612\ 288\ 668\ 110$$

$$\ln 5 = 1,609\ 437\ 912\ 434\ 100$$

$$\ln 7 = 1,945\ 910\ 149\ 055\ 313$$

x	$\ln x$	$\lg x$	x	$\ln x$	$\lg x$	x	$\ln x$	$\lg x$
1,50	0,4 055 ⁶⁶	1 7609 ²⁸⁷	2,50	0,9 163 ³⁹⁶	3 979 ¹⁷²	6,0	1,7 918 ¹⁶⁵	7 782 ⁷¹
2	187 ⁶⁵	8184 ²⁸⁴	55	361 ³⁸⁸	4 065 ¹⁷⁰	1	1,8 083 ¹⁶²	853 ⁷¹
4	317 ⁶⁵	8752 ²⁸⁰	60	555 ³⁸²	150 ¹⁶⁴	2	245 ¹⁶⁰	924 ⁶⁹
6	447 ^{63,5}	9312 ²⁷⁷	65	746 ³⁷⁴	232 ¹⁶⁴	3	405 ¹⁵⁸	993 ⁶⁹
8	574 ⁶³	9866 ²⁷³	70	933 ³⁶⁶	314 ¹⁵⁸	4	563 ¹⁵⁵	8 062 ⁶⁷
1,60	700 ⁶²	2 0412 ²⁷⁰	75	1,0 116 ³⁶⁰	393 ¹⁵⁸	5	718 ¹⁵³	129 ⁶⁶
2	824 ^{61,5}	0952 ²⁶⁶	80	296 ³⁵⁴	472 ¹⁵²	6	871 ¹⁵⁰	195 ⁶⁶
4	947 ^{60,5}	1484 ²⁶³	85	473 ³⁴⁸	548 ¹⁵²	7	1,9 021 ¹⁴⁸	261 ⁶⁴
6	0,5 068 ⁶⁰	2011 ²⁶⁰	90	647 ³⁴²	624 ¹⁴⁸	8	169 ¹⁴⁶	325 ⁶³
8	188 ⁵⁹	2531 ²⁵⁷	95	818 ³³⁶	698 ¹⁴⁶	9	315 ¹⁴⁴	388 ⁶³
1,70	306 ^{58,5}	3045 ²⁵⁴	3,00	986 ³³⁰	771 ¹⁴⁴	7,0	459 ¹⁴¹	451 ⁶¹
2	423 ⁵⁸	3553 ²⁵¹	05	1,1 151 ³²⁶	843 ¹⁴²	2	741 ¹³⁷	573 ^{59,5}
4	539 ⁵⁷	4055 ²⁴⁸	10	314 ³²⁰	914 ¹³⁸	4	2,0 015 ¹³³	692 ⁵⁸
6	653 ^{56,5}	4551 ²⁴⁵	15	474 ³¹⁶	983 ¹³⁸	6	281 ¹³⁰	808 ^{56,5}
8	766 ⁵⁶	5042 ²⁴²	20	632 ³¹⁰	5 052 ¹³⁴	8	541 ¹²⁶	921 ⁵⁵
1,80	878 ⁵⁵	5527 ²⁴⁰	25	787 ³⁰⁴	119 ¹³²	8,0	794 ¹²³	9 031 ^{53,5}
2	988 ⁵⁵	6007 ²³⁷	30	939 ³⁰²	185 ¹³⁰	2	2,1 041 ¹²⁰	138 ^{52,5}
4	0,6 098 ⁵⁴	6482 ²³⁴	35	1,2 090 ²⁹⁶	250 ¹³⁰	4	282 ¹¹⁸	243 ⁵¹
6	206 ^{53,5}	6951 ²³²	40	238 ²⁹²	315 ¹²⁶	6	518 ¹¹⁵	345 ⁵⁰
8	313 ⁵³	7416 ²²⁹	45	384 ²⁸⁸	378 ¹²⁶	8	748 ¹¹²	445 ^{48,5}
1,90	419 ⁵²	7875 ²²⁷	50	528 ²⁸²	441 ¹²²	9,0	972 ¹¹⁰	542 ⁴⁸
2	523 ⁵²	8330 ²²⁵	55	669 ²⁸⁰	502 ¹²²	2	2,2 192 ¹⁰⁷	638 ^{46,5}
4	627 ⁵¹	8780 ²²³	60	809 ²⁷⁶	563 ¹²⁰	4	407 ¹⁰⁵	731 ⁴⁶
6	729 ⁵¹	9226 ²²⁰	65	947 ²⁷²	623 ¹¹⁸	6	618 ¹⁰³	823 ^{44,5}
8	831 ⁵⁰	9667 ²²	70	1,3 083 ²⁷⁰	682 ¹¹⁶	8	824 ¹⁰¹	912 ⁴⁴
2,00	931 ⁵⁰	3 010 ²²	75	218 ²⁶⁴	740 ¹¹⁶	10,0	2,3 026	0 000
2	0,7 031 ⁴⁹	054 ²¹	80	350 ²⁶²	798 ¹¹⁴			
4	129 ⁴⁹	096 ^{21,5}	85	481 ²⁵⁸	855 ¹¹²			
6	227 ^{48,5}	139 ²¹	90	610 ²⁵⁴	911 ¹¹⁰			
8	324 ⁴⁸	181 ^{20,5}	95	737 ²⁵²	966 ¹¹⁰			
2,10	420 ^{47,5}	222 ^{20,5}	4,0	863 ²⁴⁷	6 021 ¹⁰⁷			
2	515 ⁴⁷	263 ^{20,5}	1	1,4 110 ²⁴¹	128 ¹⁰⁴			
4	609 ^{46,5}	304 ^{20,5}	2	351 ²³⁵	232 ¹⁰³			
6	702 ^{45,5}	345 ²⁰	3	586 ²³⁰	335 ¹⁰⁰			
8	793 ⁴⁶	385 ^{19,5}	4	816 ²²⁵	435 ⁹⁷			
2,20	885 ⁴⁵	424 ²⁰	5	1,5 041 ²²⁰	532 ⁹⁶			
2	975 ⁴⁵	464 ¹⁹	6	261 ²¹⁵	628 ⁹³			
4	0,8 065 ^{44,5}	502 ^{19,5}	7	476 ²¹⁰	721 ⁹¹			
6	154 ⁴⁴	541 ¹⁹	8	686 ²⁰⁶	812 ⁹⁰			
8	242 ^{43,5}	579 ¹⁹	9	892 ²⁰²	902 ⁸⁸			
2,30	329 ^{43,5}	617 ¹⁹	5,0	1,6 094 ¹⁹⁸	990 ⁸⁶			
2	416 ⁴³	655 ^{18,5}	1	292 ¹⁹⁵	7 076 ⁸⁴			
4	502 ^{42,5}	692 ^{18,5}	2	487 ¹⁹⁰	160 ⁸³			
6	587 ⁴²	729 ^{18,5}	3	677 ¹⁸⁷	243 ⁸¹			
8	671 ⁴²	766 ¹⁸	4	864 ¹⁸³	324 ⁸⁰			
2,40	755 ^{41,5}	802 ¹⁸	5	1,7 047 ¹⁸¹	404 ⁷⁸			
2	838 ⁴¹	838 ¹⁸	6	228 ¹⁷⁷	482 ⁷⁷			
4	920 ⁴¹	874 ^{17,5}	7	405 ¹⁷⁴	559 ⁷⁵			
6	0,9 002 ^{40,5}	909 ¹⁸	8	579 ¹⁷¹	634 ⁷³			
8	083 ⁴⁰	945 ¹⁷	9	750 ¹⁶⁸	709 ⁷³			
2,50	0,9 163	3 979	6,0	1,7 918	7 782			

n	$\ln 10^n$
10	23,025 85
20	46,051 70
30	69,077 55
40	92,103 40
50	115,129 26
60	138,155 11
70	161,180 96
80	184,206 81
90	207,232 66

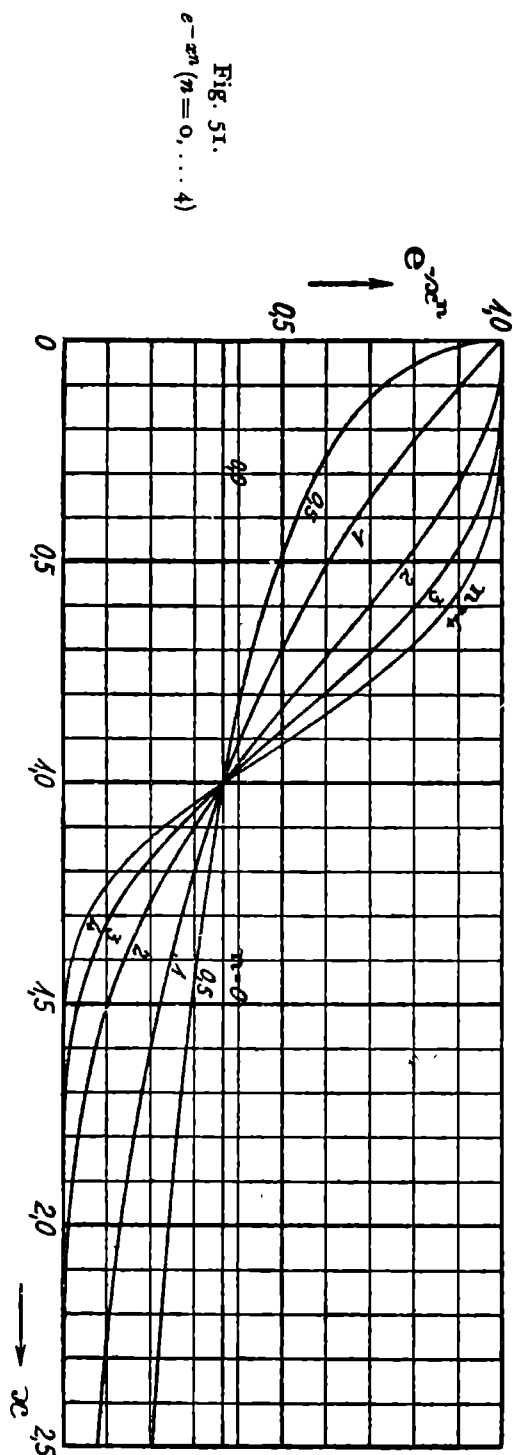
cf. p. 25

$$\ln 11 = 2,397\ 895\ 272\ 798\ 371$$

$$\ln 13 = 2,564\ 949\ 357\ 461\ 537$$

$$\ln 17 = 2,833\ 213\ 344\ 056\ 216$$

$$\ln 19 = 2,944\ 438\ 979\ 166\ 440$$



x	e^{-x^1}	x	e^{-x^1}	x	e^{-x^1}
0,00	1,0 000	0,50	0,7 788	1,50	0,1 054
01	0,9 999 ¹	52	631 ^{78,5}	52	0,0 992 ³¹
02	996 ³	54	471 ⁸⁰	54	933 ^{29,5}
03	991 ⁵	56	308 ^{81,5}	56	877 ²⁸
04	984 ⁷	58	143 ^{82,5}	58	824 ^{26,5}
					25,5
0,05	975 ⁹	0,60	0,6 977 ⁸³	1,60	773 ²⁴
06	964 ¹¹	62	809 ⁸⁴	62	725 ²³
07	951 ¹³	64	639 ⁸⁵	64	679 ^{21,5}
08	936 ¹⁵	66	469 ⁸⁵	66	636 ^{20,5}
09	919 ¹⁷	68	298 ^{85,5}	68	595 ^{19,5}
0,10	900 ¹⁹	0,70	126 ⁸⁶	1,70	556 ^{18,5}
11	880 ²⁰	72	0,5 955 ^{85,5}	72	519 ^{17,5}
12	857 ²³	74	783 ⁸⁶	74	484 ¹⁷
13	832 ²⁵	76	613 ⁸⁵	76	452 ¹⁶
14	806 ²⁶	78	442 ^{85,5}	78	421 ^{15,5}
					14,5
0,15	778 ²⁸	0,80	273 ^{84,5}	1,80	392 ¹⁴
16	747 ³¹	82	105 ⁸⁴	82	364 ¹⁴
17	715 ³²	84	0,4 938 ^{83,5}	84	339 ^{12,5}
18	681 ³⁴	86	773 ^{82,5}	86	314 ^{12,5}
19	645 ³⁶	88	510 ^{81,5}	88	292 ¹¹
					10,5
0,20	608 ³⁷	0,90	449 ^{80,5}	1,90	271 ¹⁰
21	569 ³⁹	92	290 ^{79,5}	92	251 ^{9,5}
22	528 ⁴¹	94	133 ^{78,5}	94	232 ^{9,5}
23	485 ⁴³	0,3 979 ⁷⁷	96	215 ^{8,5}	
24	440 ⁴⁵	98	827 ⁷⁶	98	198 ^{8,5}
					7,5
0,25	394 ⁴⁶	1,00	679 ⁷⁴	2,00	183 ⁷
26	346 ⁴⁸	02	533 ⁷³	02	169 ^{6,5}
27	297 ⁴⁹	04	391 ⁷¹	04	156 ^{6,5}
28	246 ⁵¹	06	251 ⁷⁰	06	144 ⁶
29	193 ⁵³	08	115 ⁶⁸	08	132 ⁶
					5
0,30	139 ⁵⁴	1,10	0,2 982 ^{66,5}	2,10	122 ⁵
31	084 ⁵⁵	12	853 ^{64,5}	12	112 ⁵
32	027 ⁵⁷	14	726 ^{63,5}	14	103 ^{4,5}
33	0,8 968 ⁶¹	16	604 ⁶¹	16	0,00 94 ^{4,5}
34	908 ⁶⁰	18	485 ^{59,5}	18	86 ⁴
					3,5
0,35	847 ⁶²	1,20	369 ⁵⁸	2,20	79 ^{3,5}
36	785 ⁶⁴	22	257 ⁵⁶	25	63 ³²
37	721 ⁶⁶	24	149 ⁵⁴	30	50 ²⁶
38	655 ⁶⁶	26	044 ^{52,5}	35	40 ²⁰
39	589 ⁶⁸	28	0,1 943 ^{50,5}	40	32 ¹⁶
					14
0,40	521 ⁶⁸	1,30	845 ⁴⁹	45	25 ¹²
41	453 ⁷⁰	32	751 ⁴⁷	50	19 ⁸
42	383 ⁷¹	34	660 ^{45,5}	55	15 ⁶
43	312 ⁷¹	36	573 ^{43,5}		
44	240 ⁷²	38	489 ⁴²	2,6	12 ⁵
					3
0,45	167 ⁷³	1,40	409 ⁴⁰	7	0,000 7 ³
46	093 ⁷⁴	42	331 ³⁹	8	4 ²
47	018 ⁷⁵	44	257 ³⁷	9	2 ¹
48	0,7 942 ⁷⁶	46	187 ³⁵	3,0	1 ⁰
49	866 ⁷⁶	48	119 ³⁴	1	1 ⁰
					1
0,50	0,7 788	1,50	0,1 054	2	0,000 0

Ein Körper von der absoluten Temperatur T sendet elektromagnetische Wellen von allen möglichen Wellenlängen λ aus. Doch verteilt sich die ausgestrahlte Energie sehr ungleichmäßig auf die verschiedenen langen Wellen. Auf die Wellen, deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, komme die Strahlungsdichte $J d\lambda$ (Watt/cm²). Dann ist nach Planck

$$J = c^2 h \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c h}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}.$$

Darin bedeutet

$$c = 299\,774 \text{ km/sek}$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,

$$h = 1,371 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Watt sek}}{\text{Grad}} \quad \text{Grad} = \text{degree}$$

die Gaskonstante des elementaren Massenteilchens (Boltzmannsche Konstante),

$$h = 0,6545 \cdot 10^{-23} \text{ Watt} \cdot \text{sek}^2$$

das Plancksche Wirkungsquantum.

Wenn man zwei Zahlen x und y einführt, indem man setzt

$$\frac{\lambda T}{x} = \frac{c h}{h} = 1,43 \text{ cm} \cdot \text{Grad} = c_2, \quad \lambda = \frac{c_2}{T} x,$$

$$\frac{\lambda^5 J}{x^5 y} = c^2 h = 0,5889 \cdot 10^{-12} \text{ Watt} \cdot \text{cm}^2 = c_1,$$

$$\frac{J}{T^5 y} = \frac{h^5}{c^5 h^4} = 0,980 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ Grad}^5} = c_3, \quad J = c_3 T^5 y,$$

so nimmt die Plancksche Gleichung die Form an:

$$\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x^5 y = 1.$$

y als Funktion von x gibt an, wie die Strahlungsdichte bei derselben Temperatur von der Wellenlänge abhängt (Zahlentafel und Fig. 52).

A body of absolute temperature T emits electromagnetic waves of all possible wave-lengths λ . The radiated energy is however very unequally distributed among the waves of different length. If we attribute to waves of wave-length between λ and $\lambda + d\lambda$ the density of radiation $J d\lambda$ (Watt/cm²), we have according to Planck

$$J = c^2 h \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c h}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}.$$

Here we have

$$c = 299\,774 \text{ km/sek}$$

the velocity of light in vacuo,

$$h = 1,371 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Watt sek}}{\text{Grad}} \quad \text{Grad} = \text{degree}$$

the gas constant for 1 molecule (Boltzmann's constant),

$$h = 0,6545 \cdot 10^{-23} \text{ Watt} \cdot \text{sek}^2$$

Planck's quantum of action.

Introducing two numbers x and y by substituting

$$\frac{\lambda T}{x} = \frac{c h}{h} = 1,43 \text{ cm} \cdot \text{Grad} = c_2, \quad \lambda = \frac{c_2}{T} x,$$

$$\frac{\lambda^5 J}{x^5 y} = c^2 h = 0,5889 \cdot 10^{-12} \text{ Watt} \cdot \text{cm}^2 = c_1,$$

$$\frac{J}{T^5 y} = \frac{h^5}{c^5 h^4} = 0,980 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ Grad}^5} = c_3, \quad J = c_3 T^5 y,$$

Planck's equation assumes the form:

$$\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x^5 y = 1.$$

y as a function of x shows how at the same temperature the density of radiation depends on the wave-length (Table and fig. 52).

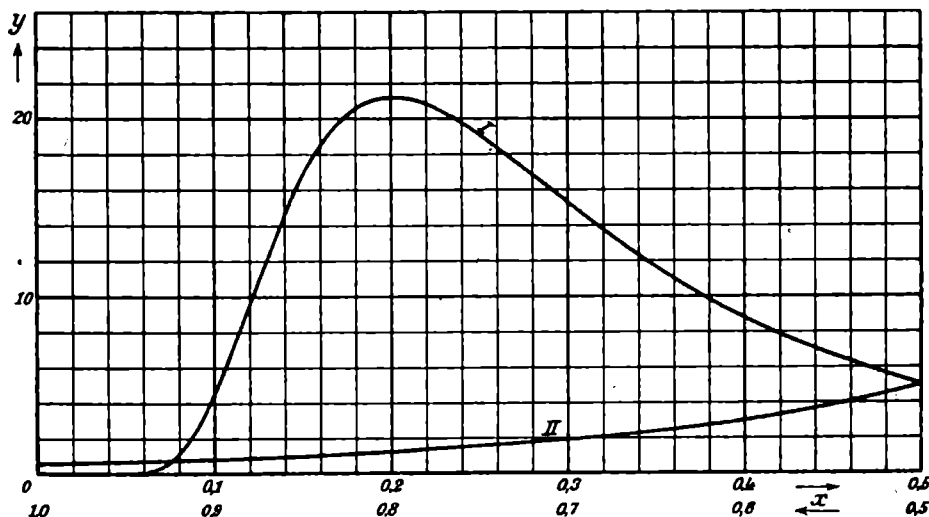


Fig. 52. Plancksche Strahlungsfunktion. Planck's radiation function

X. Plancksche Strahlungsfunktion
X. Planck's radiation function

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,060	0,0 7430	0,110	6, 998	0,160	18, 446	0,355	11, 279	0,605	2, 922
1	8990	1	7, 259	1	589	60	10, 965	10	852
2	0,1 0797	2	522	2	73	65	658	15	783
3	2875	3	787	3	86	70	360	20	717
4	5249	4	8, 053	4	99	75	069	25	653
5	7946	5	320	5	19, 12	80	9, 787	30	590
6	0,2 099	6	588	6	24	85	512	35	529
7	441	7	856	7	36	90	245	40	470
8	823	8	9, 125	8	48	95	8, 985	45	412
9	0,3 248	9	393	9	59	0,400	733	50	356
0,070	718	0,120	662	0,170	69	05	488	55	302
1	0,4 235	1	931	2	89	10	250	60	249
2	802	2	10, 198	4	20, 08	15	020	65	198
3	0,5 422	3	465	6	25	20	7, 796	70	148
4	0,6 095	4	731	8	40	25	578	75	099
5	825	5	996	0,180	54	30	368	80	052
6	0,7 613	6	11, 259	5	82	35	163	85	006
7	0,8 460	7	521	0,190	21, 02	40	6, 965	90	1, 961
8	0,9 368	8	781	5	15	45	773	95	918
9	1, 0339	9	12, 040	0,200	20	50	586	0,700	875
0,080	1373	0,130	296	05	18	55	406	05	8341
1	2471	1	550	10	11	60	231	10	1,7 939
2	3635	2	801	15	20, 99	65	061	15	548
3	4864	3	13, 050	20	82	70	5, 896	20	168
4	6160	4	296	25	61	75	736	25	1,6 797
5	7521	5	540	30	36	80	582	30	436
6	8948	6	780	35	08	85	432	35	085
7	2, 044	7	14, 017	40	19, 78	90	286	40	1,5 743
8	200	8	251	45	45	95	145	45	409
9	362	9	482	50	10	0,500	009	50	084
0,090	531	0,140	710	55	18, 74	05	4, 876	55	1,4 768
1	706	1	934	60	372	10	748	60	459
2	887	2	15, 154	65	17, 989	15	623	65	158
3	3, 074	3	371	70	600	20	502	70	1,3 865
4	267	4	584	75	206	25	385	75	580
5	466	5	793	80	16, 809	30	271	80	301
6	671	6	998	85	411	35	161	85	029
7	880	7	16, 200	90	013	40	054	90	1,2 764
8	4, 095	8	397	95	15, 617	45	3, 951	95	506
9	315	9	591	0,300	224	50	850	0,800	254
0,100	540	0,150	780	05	14, 834	55	753	05	009
1	769	1	966	10	449	60	658	10	1,1 769
2	5, 003	2	17, 147	15	070	65	566	15	535
3	241	3	324	20	13, 696	70	477	20	307
4	482	4	497	25	329	75	390	25	084
5	727	5	666	30	12, 968	80	307	30	1,0 867
6	976	6	830	35	615	85	225	35	655
7	6, 227	7	990	40	270	90	146	40	448
8	481	8	18, 146	45	11, 932	95	069	45	246
9	738	9	298	50	601	0,600	2, 995	50	048

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,855	0,9 856	0,980	0,6 235	1,21	0,3 000	1,46	0,15 325	1,71	0,08 607
60	667	85	128	2	0,2 914	7	0,14 951	2	424
65	484	90	023	3	831	8	588	3	246
70	304	95	0,5 920	4	751	9	236	4	073
75	129	1,000	820	5	674	1,50	0,13 895	5	0,07 904
80	0,8 958	1	625	6	599	1	564	6	740
85	790	2	438	7	527	2	242	7	580
90	627	3	259	8	458	3	0,12 930	8	424
95	467	4	087	9	390	4	627	9	272
0,900	311	5	0,4 922	1,30	326	5	333	1,80	124
05	158	6	764	1	263	6	047	1	0,06 979
10	009	7	611	2	202	7	0,11 770	2	838
15	0,7 863	8	465	3	144	8	500	3	701
20	721	9	325	4	087	9	239	4	567
25	581	1,10	190	5	032	1,60	0,10 984	5	437
30	445	1	060	6	0,1 979	1	737	6	309
35	311	2	0,3 935	7	928	2	496	7	185
40	181	3	814	8	878	3	262	8	064
45	054	4	699	9	8298	4	035	9	0,05 946
50	0,6 929	5	587	1,40	7831	5	0,09 814	1,90	830
55	807	6	480	1	7380	6	599	1	718
60	687	7	377	2	6943	7	389	2	608
65	571	8	277	3	6519	8	186	3	501
70	456	9	181	4	6109	9	0,08 988	4	396
75	344	1,20	089	5	5711	1,70	795	5	294

Quellenfunktionen der Wärmeleitung Source functions of heat conduction

In einem n -dimensionalen unendlich ausgedehnten gleichförmigen Körper sei anfangs eine endliche Wärmemenge im Nullpunkt zusammengedrängt und sonst keine Wärme vorhanden. Das dieser Wärmemenge proportionale und daher von der Zeit unabhängige Raumintegral der Temperatur über den unendlichen n -dimensionalen Raum sei = 1. Dann ist die Temperatur u zur Zeit $t = y/4a^2$ (a^2 = Temperaturleitfähigkeit) im Abstand x vom Nullpunkt

In an n -dimensional infinitely extended homogeneous body let a finite quantity of heat be initially concentrated at the origin and no heat at any other point. Let the volume-integral of the temperature extended over infinite n -dimensional space which is proportional to this heat quantity and therefore independent of the time, be equal to unity. Then at time $t = y/4a^2$ (a^2 = thermal conductivity) the temperature u at distance x from the origin is

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{\sqrt{\pi y}^n}.$$

Die Figuren 54—59 stellen diese Funktion dar für die Fälle $n=1$ (erhitzte Ebene, isotherme Ebenen), $n=2$ (erhitzte Gerade, isotherme Kreiszylinderflächen, $x=r$), $n=3$ (erhitzter Punkt, isotherme Kugel-
flächen, $x=R$).

The figures 54—59 represent this function for the cases $n=1$ (heated plane, isothermal planes), $n=2$ (heated straight line, isothermal cylindrical surfaces, $x=r$), $n=3$ (heated point, isothermal spherical surfaces, $x=R$).

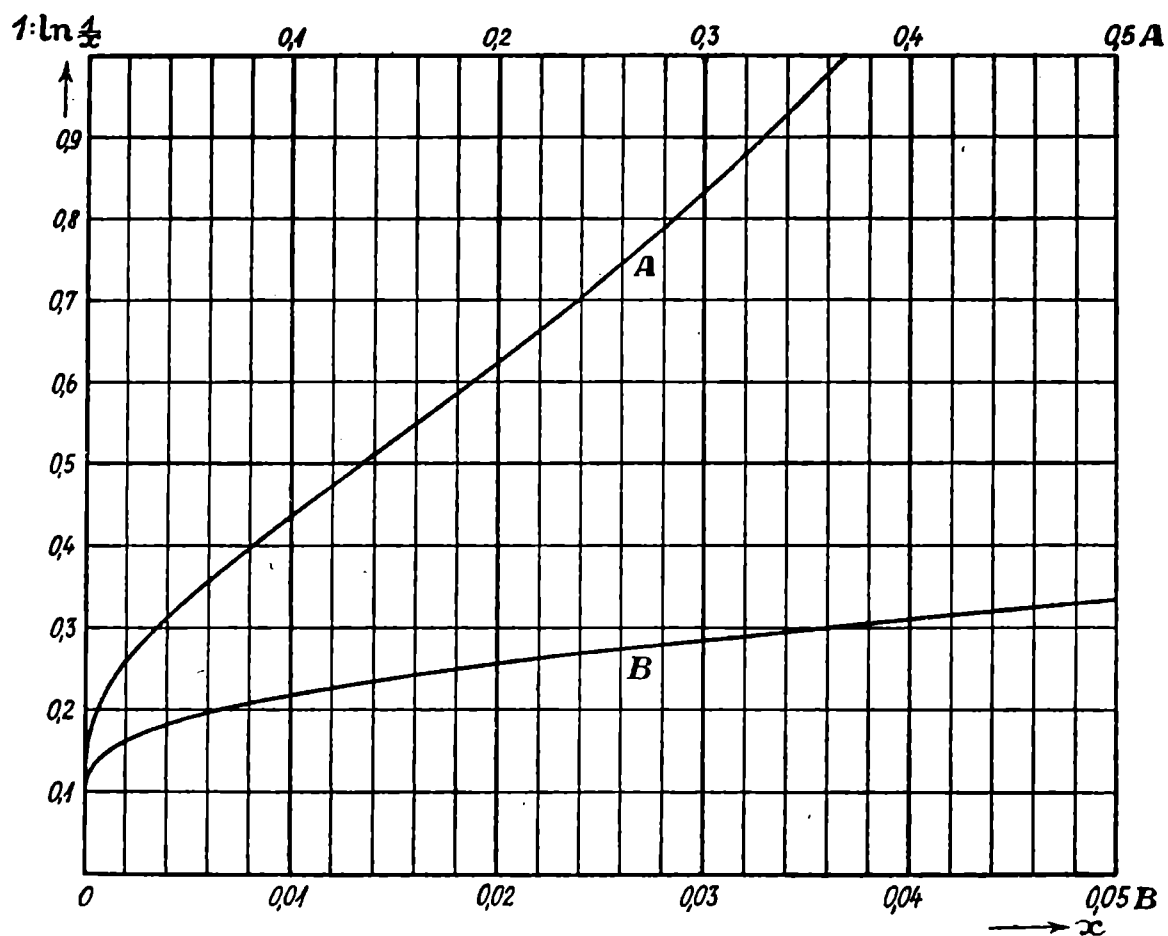


Fig. 53. $x:\ln \frac{1}{x}$ (Cf. Fig. 44 p. 88)

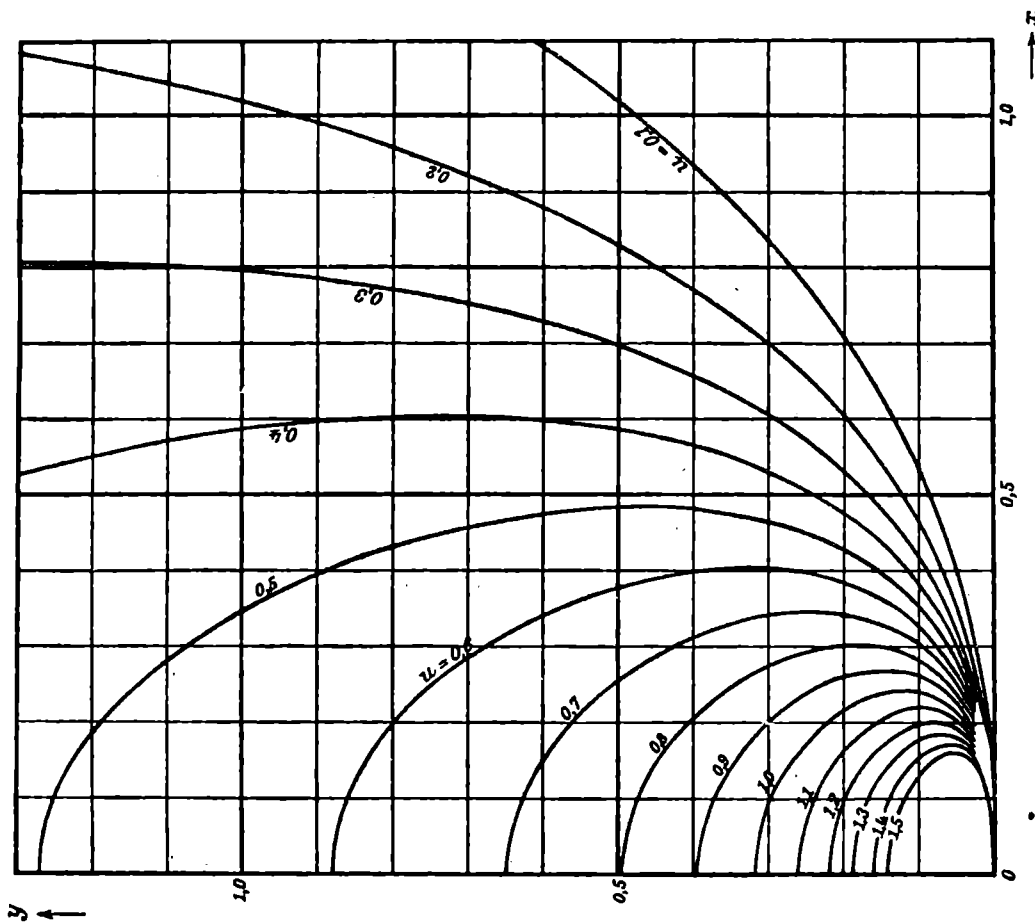


Fig. 54. Quellenfunktion der Wärmeleitung, eindimensional.

Fig. 54. Source function of heat conduction, one dimensional.

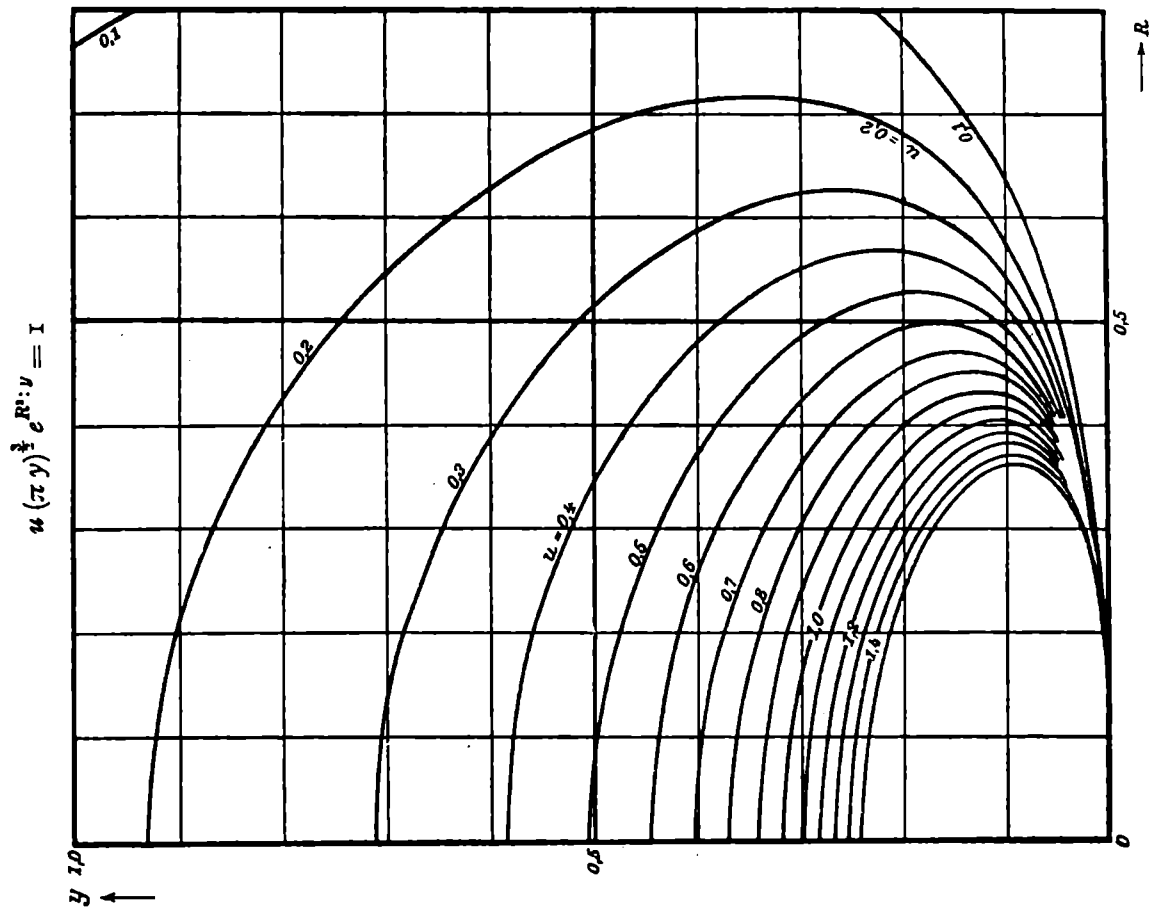


Fig. 55. Quellenfunktion der Wärmeleitung, zweidimensional
Fig. 55. Source function of heat conduction, two dimensional

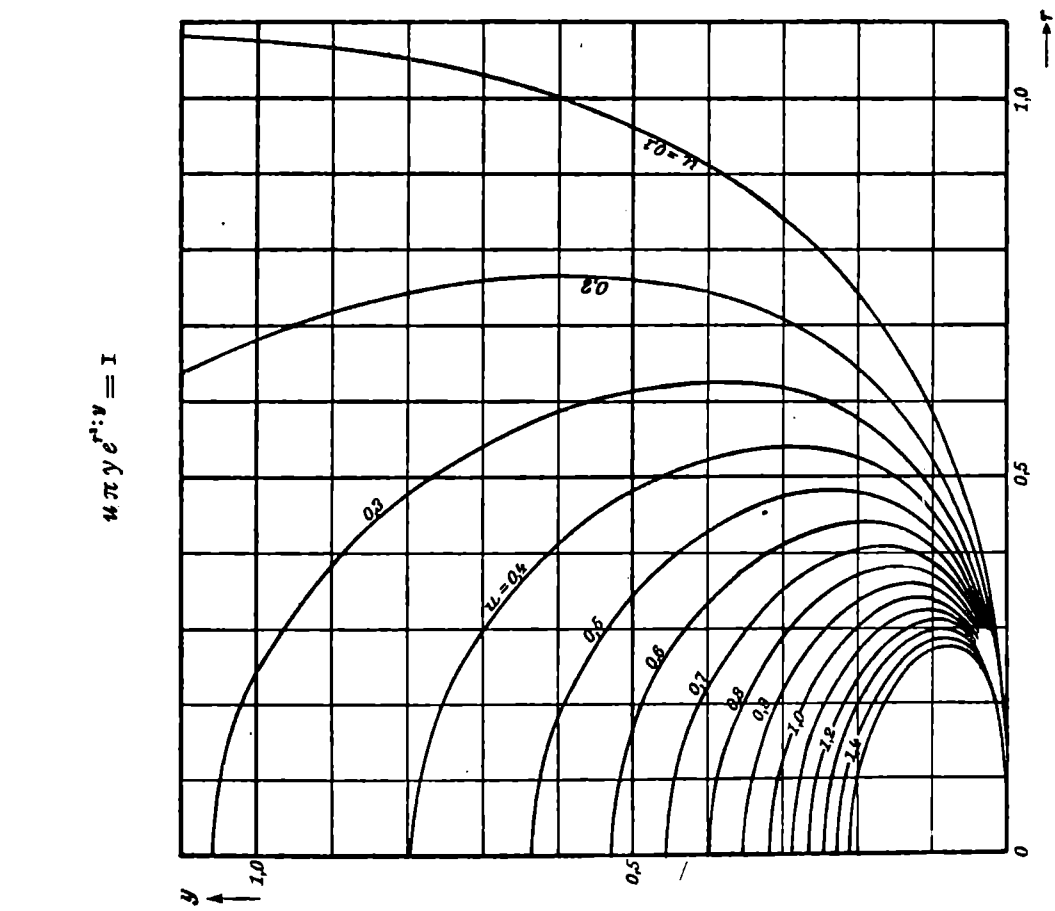


Fig. 56. Quellenfunktion der Wärmeleitung, dreidimensional
Fig. 56. Source function of heat conduction, three dimensional

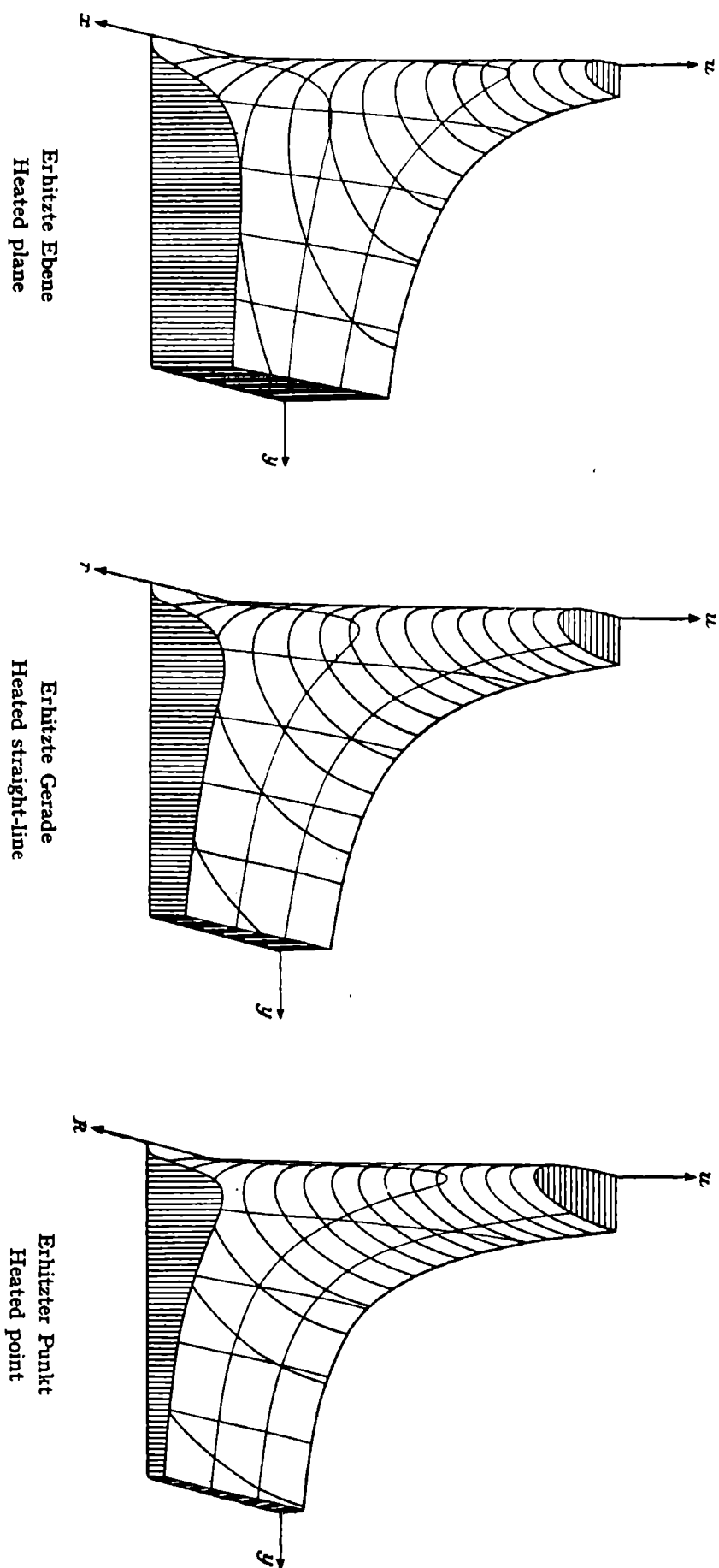


Fig. 57, 58 und 59. Quellenfunktionen der Wärmeleitung
Fig. 57, 58 and 59. Source functions of heat conduction

x	$\text{Ctg } x - \frac{1}{x}$	x	$\text{Ctg } x - \frac{1}{x}$	x	$\text{Ctg } x - \frac{1}{x}$	x	$\text{Ctg } x - \frac{1}{x}$	x	$\text{Ctg } x - \frac{1}{x}$
0,00	0,0 00000	1,00	0,3 130	2,00	0,5 373	4,0	0,7 507	11,0	0,9 091
02	06666 ³³³³	02	185 ^{27,5}	02	408 ¹⁷	1	566 ⁵⁹	5	130 ⁷⁸
04	13332 ³³³³	04	240 ^{27,5}	04	442 ¹⁷	2	623 ⁵⁷	12,0	167 ⁷⁴
06	19995 ³³³¹	06	294 ²⁷	06	476 ¹⁷	3	678 ⁵⁵	5	200 ⁶⁶
08	26655 ³³³⁰	08	348 ²⁷	08	510 ¹⁷	4	730 ⁵²	13,0	231 ⁶²
								5	259 ⁵⁶
0,10	3331 ^{332,5}	1,10	401 ^{26,5}	2,10	543 ^{16,5}	5	780 ⁵⁰	14,0	286 ⁵⁴
12	3996 ^{332,5}	12	454 ^{26,5}	15	624 ¹⁶²	6	828 ⁴⁸	5	310 ⁴⁸
14	4661 ^{331,5}	14	507 ²⁶	20	703 ¹⁵⁸	7	874 ⁴⁶	15,0	333 ⁴⁶
16	5324 ^{331,5}	16	559 ²⁶			8	918 ⁴⁴	5	355 ⁴⁴
18	5987 ³³¹	18	611 ^{25,5}	2,25	780 ¹⁵⁰	9	960 ⁴²	16,0	375 ⁴⁰
				30	855 ¹⁴⁶			5	394 ³⁸
0,20	6649 ^{330,5}	1,20	662 ^{25,5}	35	928 ¹⁴²	5,0	0,8 001	17,0	412 ³⁶
22	7310 ^{329,5}	22	713 ²⁵	40	999 ¹³⁸	1	040 ³⁹	5	429 ³⁴
24	7969 ^{329,5}	24	763 ²⁵	45	0,6 068 ¹³⁴	2	078 ³⁸	18,0	444 ³⁰
26	8628 ^{328,5}	26	813 ²⁵			3	114 ³⁶		
28	9285 ³²⁸	28	863 ^{24,5}	2,50	135 ¹³²	4	149 ³⁵	19	474 ²⁶
				55	201 ¹²⁸			20	500 ²⁴
0,30	9941 ³²⁷	1,30	912 ^{24,5}	60	265 ¹²⁴	5	182 ³³	21	524 ²²
32	0,1 0595 ³²⁶	32	961 ^{24,5}	65	327 ¹²⁰	6	215 ³¹	22	546 ¹⁹
34	1247 ³²⁵	34	0,4 010 ²⁴	70	387 ¹¹⁸	7	246 ³⁰	23	565 ¹⁸
36	1897 ^{324,5}	36	058 ^{23,5}			8	276 ²⁹	24	583 ¹⁷
38	2546 ^{323,5}	38	105 ^{23,5}	2,75	446 ¹¹⁴	9	305 ²⁸	25	600 ¹⁵
				80	503 ¹¹⁰			26	615 ¹⁵
0,40	3193 ^{322,5}	1,40	152 ^{23,5}	85	558 ¹⁰⁸	6,0	333 ²⁸	27	630 ¹³
42	3838 ^{321,5}	42	199 ²³	90	612 ¹⁰⁶	1	361 ²⁶	28	643 ¹²
44	4481 ³²⁰	44	245 ²³	95	665 ¹⁰²	2	387 ^{25,5}		
46	5121 ³¹⁹	46	291 ^{22,5}			4	438 ^{23,5}	30	667 ^{10,5}
48	5759 ³¹⁸	48	336 ^{22,5}	3,00	716 ¹⁰⁰	6	485 ²²	32	688 ⁹
				05	766 ⁹⁸	8	529 ²¹	34	706 ⁸
0,50	6395 ³¹⁷	1,50	381 ^{22,5}	10	815 ⁹⁴			36	722 ^{7,5}
52	7029 ^{315,5}	52	426 ²²	15	862 ⁹²	7,0	571 ²⁰	38	737 ^{6,5}
54	7660 ³¹⁴	54	470 ²²	20	908 ⁹⁰	2	611 ¹⁹	40	750 ⁶
56	8288 ^{312,5}	56	514 ^{21,5}			4	649 ^{17,5}	42	762 ^{5,5}
58	8913 ^{311,5}	58	557 ^{21,5}	3,25	953 ⁸⁸	6	684 ¹⁷	44	773 ⁵
				30	997 ⁸⁶	8	718 ¹⁶	46	783 ^{4,5}
0,60	9536 ³¹⁰	1,60	600 ²¹	35	0,7 040 ⁸²			48	792 ⁴
62	0,2 0156 ^{308,5}	62	642 ²¹	40	081 ⁸²	8,0	750 ^{15,5}	50	800 ³⁶
64	0773 ³⁰⁷	64	684 ²¹	45	122 ⁷⁸	2	781 ^{14,5}		
66	1387 ³⁰⁵	66	726 ^{20,5}			4	810 ^{13,5}	55	818 ³⁰
68	1997 ³⁰⁴	68	767 ^{20,5}	3,50	161 ⁷⁸	6	837 ^{13,5}	60	833 ²⁶
				55	200 ⁷⁴	8	864 ^{12,5}	65	846 ²²
0,70	2605 ^{302,5}	1,70	808 ²⁰	60	237 ⁷²			70	857 ²⁰
72	3210 ^{300,5}	72	848 ²⁰	65	273 ⁷⁰	9,0	889 ¹²	75	867 ¹⁶
74	3811 ²⁹⁹	74	888 ^{19,5}	70	309 ⁶⁸	2	913 ^{11,5}	80	875 ¹⁴
76	4409 ²⁹⁷	76	928 ^{19,5}			4	936 ¹¹		
78	5003 ^{295,5}	78	967 ^{19,5}	3,75	344 ⁶⁸	6	958 ¹¹	90	889 ¹¹
				80	378 ⁶⁸	8	980 ¹⁰	100	0,9 900
0,80	5594 ²⁹⁴	1,80	0,5 006 ^{19,5}	85	412 ⁶⁴				
82	6182 ²⁹²	82	045 ¹⁹	90	444 ⁶⁴	10,0	0,9 000 ¹⁰	x	$1 - \frac{1}{x}$
84	6766 ²⁹⁰	84	083 ¹⁹	95	476 ⁶²	2	020 ^{9,5}		
86	7346 ^{288,5}	86	121 ^{18,5}			4	039 ⁹		
88	7923 ^{286,5}	88	158 ^{18,5}	4,00	0,7 507	6	057 ^{8,5}		
						8	074 ^{8,5}		
0,90	8496 ^{284,5}	1,90	195 ¹⁸						
92	9065 ^{282,5}	92	231 ¹⁸			11,0	0,9 091		
94	9630 ²⁸¹	94	267 ¹⁸						
96	0,3 0192 ²⁷⁹	96	303 ^{17,5}						
98	0750 ²⁷⁷	98	338 ^{17,5}						
1,00	0,3 1304	2,00	0,5 373						

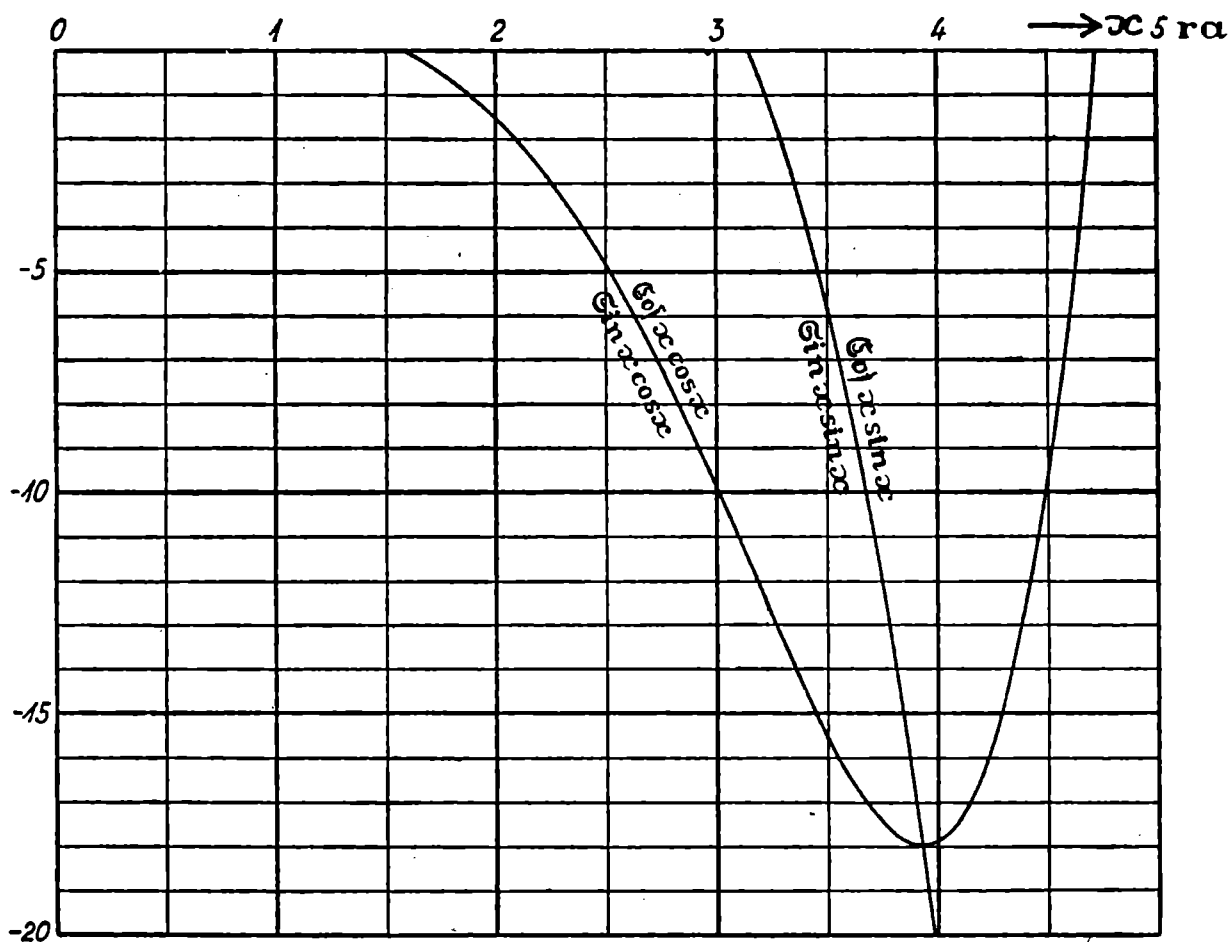
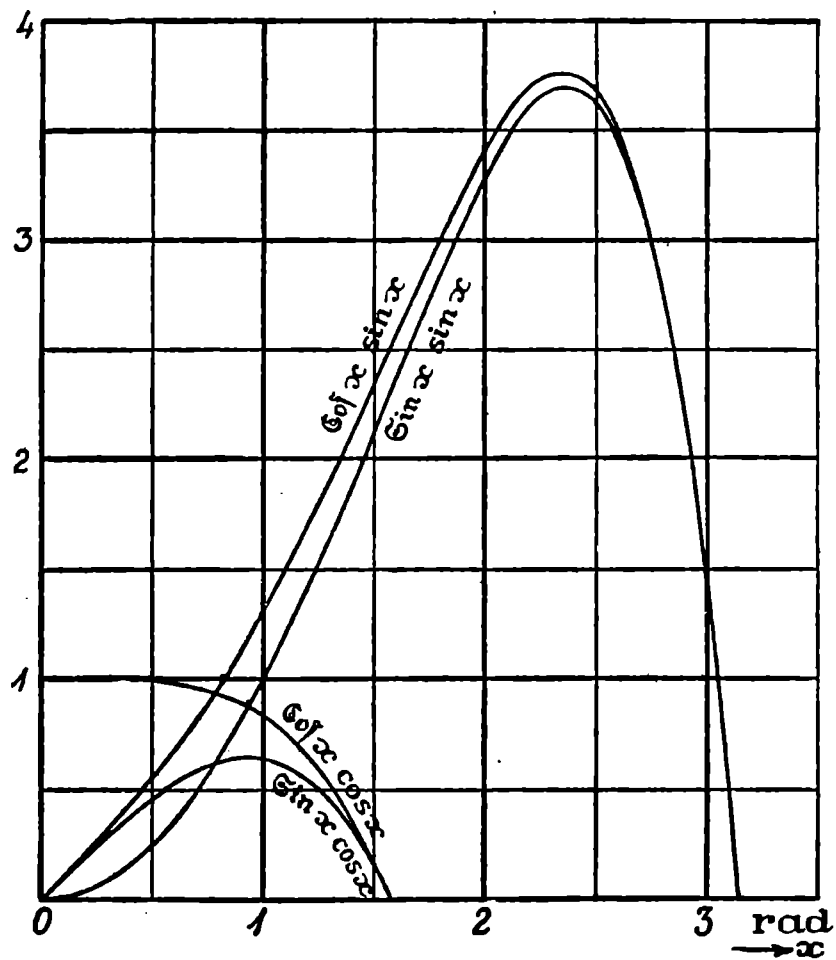


Fig. 60, 61. $\text{Sin } x \sin x$, $\text{Cof } x \cos x$, $\text{Sin } x \cos x$, $\text{Cof } x \sin x$
 (Tafeln bei Hayashi, Siebenstellige Tafeln, Berlin 1926 bei Springer (S. 205 ... 245); vgl. S. 173, III f.)

q	$q \operatorname{tg} q^{-}$	$q \operatorname{ctg} q^{-}$	q	$q \operatorname{tg} q^{-}$	$q \operatorname{ctg} q^{-}$	q	$q \operatorname{tg} q^{-}$	$q \operatorname{ctg} q^{-}$
Rechte			Rechte			Rechte		
0,0	0,000000	0,6366	6,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	12,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞
1	0,015838	0,6314	1	$\mp$ 0,9661	$\mp$ 38,51	1	$\mp$ 1,9164	$\mp$ 76,40
2	0,06498	0,6155	2	$\mp$ 2,0145	$\mp$ 19,082	2	$\mp$ 3,964	$\mp$ 37,55
3	0,15286	0,5888	3	$\mp$ 3,210	$\mp$ 12,364	3	$\mp$ 6,267	$\mp$ 24,140
4	0,29062	0,5506	4	$\mp$ 4,650	$\mp$ 8,809	4	$\mp$ 9,009	$\mp$ 17,067
5	0,5000	0,5000	5	$\mp$ 6,500	$\mp$ 6,500	5	$\mp$ 12,500	$\mp$ 12,500
6	0,8258	0,4359	6	$\mp$ 9,084	$\mp$ 4,795	6	$\mp$ 17,342	$\mp$ 9,154
7	1,3738	0,3567	7	$\mp$ 13,149	$\mp$ 3,414	7	$\mp$ 24,925	$\mp$ 5,961
8	2,4621	0,25994	8	$\mp$ 20,928	$\mp$ 2,2095	8	$\mp$ 39,39	$\mp$ 4,159
9	5,682	0,14255	9	$\mp$ 43,56	$\mp$ 1,0928	9	$\mp$ 81,45	$\mp$ 2,0432
1,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,00000	7,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000	13,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000
1	$\mp$ 6,945	$\mp$ 0,17422	1	$\mp$ 44,83	$\mp$ 1,1245	1	$\mp$ 82,71	$\mp$ 2,0748
2	$\mp$ 3,693	$\mp$ 0,3899	2	$\mp$ 22,159	$\mp$ 2,3394	2	$\mp$ 40,63	$\mp$ 4,289
3	$\mp$ 2,5514	$\mp$ 0,6624	3	$\mp$ 14,327	$\mp$ 3,720	3	$\mp$ 26,103	$\mp$ 6,777
4	$\mp$ 1,9269	$\mp$ 1,0172	4	$\mp$ 10,185	$\mp$ 5,376	4	$\mp$ 18,443	$\mp$ 9,736
5	$\mp$ 1,5000	$\mp$ 1,5000	5	$\mp$ 7,500	$\mp$ 7,500	5	$\mp$ 13,500	$\mp$ 13,500
6	$\mp$ 1,1625	$\mp$ 2,2022	6	$\mp$ 5,522	$\mp$ 10,460	6	$\mp$ 9,881	$\mp$ 18,719
7	$\mp$ 0,8662	$\mp$ 3,336	7	$\mp$ 3,923	$\mp$ 15,112	7	$\mp$ 6,471	$\mp$ 26,888
8	$\mp$ 0,5849	$\mp$ 5,540	8	$\mp$ 2,5344	$\mp$ 24,006	8	$\mp$ 4,484	$\mp$ 42,47
9	$\mp$ 0,3009	$\mp$ 11,996	9	$\mp$ 1,2512	$\mp$ 49,879	9	$\mp$ 2,2015	$\mp$ 87,76
2,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	8,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	14,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞
1	$\mp$ 0,3326	$\mp$ 13,259	1	$\mp$ 1,2829	$\mp$ 51,14	1	$\mp$ 2,2332	$\mp$ 89,02
2	$\mp$ 0,7148	$\mp$ 6,771	2	$\mp$ 2,6643	$\mp$ 25,237	2	$\mp$ 4,614	$\mp$ 43,70
3	$\mp$ 1,1719	$\mp$ 4,514	3	$\mp$ 4,229	$\mp$ 16,290	3	$\mp$ 7,286	$\mp$ 28,065
4	$\mp$ 1,7437	$\mp$ 3,303	4	$\mp$ 6,103	$\mp$ 11,562	4	$\mp$ 10,462	$\mp$ 19,820
5	$\mp$ 2,5000	$\mp$ 2,5000	5	$\mp$ 8,500	$\mp$ 8,500	5	$\mp$ 14,500	$\mp$ 14,500
6	$\mp$ 3,579	$\mp$ 1,8890	6	$\mp$ 11,837	$\mp$ 6,248	6	$\mp$ 20,095	$\mp$ 10,608
7	$\mp$ 5,299	$\mp$ 1,3757	7	$\mp$ 17,075	$\mp$ 4,433	7	$\mp$ 28,850	$\mp$ 6,980
8	$\mp$ 8,617	$\mp$ 0,9098	8	$\mp$ 27,084	$\mp$ 2,8593	8	$\mp$ 45,55	$\mp$ 4,809
9	$\mp$ 18,310	$\mp$ 0,4593	9	$\mp$ 56,19	$\mp$ 1,4096	9	$\mp$ 94,07	$\mp$ 2,3599
3,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000	9,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000	15,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000
1	$\mp$ 19,573	$\mp$ 0,4910	1	$\mp$ 57,46	$\mp$ 1,4413	1	$\mp$ 95,34	$\mp$ 2,3916
2	$\mp$ 9,849	$\mp$ 1,0397	2	$\mp$ 28,315	$\mp$ 2,9893	2	$\mp$ 46,78	$\mp$ 4,939
3	$\mp$ 6,477	$\mp$ 1,6814	3	$\mp$ 18,252	$\mp$ 4,739	3	$\mp$ 30,02	$\mp$ 7,796
4	$\mp$ 4,680	$\mp$ 2,4702	4	$\mp$ 12,938	$\mp$ 6,829	4	$\mp$ 21,196	$\mp$ 11,189
5	$\mp$ 3,500	$\mp$ 3,500	5	$\mp$ 9,500	$\mp$ 9,500	5	$\mp$ 15,500	$\mp$ 15,500
6	$\mp$ 2,6156	$\mp$ 4,955	6	$\mp$ 6,975	$\mp$ 13,213	6	$\mp$ 11,334	$\mp$ 21,472
7	$\mp$ 1,8852	$\mp$ 7,262	7	$\mp$ 4,942	$\mp$ 19,037	7	$\mp$ 8,000	$\mp$ 30,81
8	$\mp$ 1,2347	$\mp$ 11,695	8	$\mp$ 3,184	$\mp$ 30,161	8	$\mp$ 5,134	$\mp$ 48,63
9	$\mp$ 0,6177	$\mp$ 24,624	9	$\mp$ 1,5680	$\mp$ 62,506	9	$\mp$ 2,5183	$\mp$ 100,39
4,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	10,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	16,0	$\mp$ ∞	$\mp$ ∞
1	$\mp$ 0,6494	$\mp$ 25,886	1	$\mp$ 1,5997	$\mp$ 63,77	1	$\mp$ 2,5500	$\mp$ 101,65
2	$\mp$ 1,3647	$\mp$ 12,926	2	$\mp$ 3,3142	$\mp$ 31,39	2	$\mp$ 5,264	$\mp$ 49,88
3	$\mp$ 2,1910	$\mp$ 8,439	3	$\mp$ 5,248	$\mp$ 20,215	3	$\mp$ 8,305	$\mp$ 31,99
4	$\mp$ 3,197	$\mp$ 6,056	4	$\mp$ 7,556	$\mp$ 14,314	4	$\mp$ 11,915	$\mp$ 22,573
5	$\mp$ 4,500	$\mp$ 4,500	5	$\mp$ 10,500	$\mp$ 10,500	5	$\mp$ 16,500	$\mp$ 16,500
6	$\mp$ 6,331	$\mp$ 3,342	6	$\mp$ 14,590	$\mp$ 7,701	6	$\mp$ 22,848	$\mp$ 12,061
7	$\mp$ 9,224	$\mp$ 2,395	7	$\mp$ 21,000	$\mp$ 5,452	7	$\mp$ 32,78	$\mp$ 8,509
8	$\mp$ 14,773	$\mp$ 1,5596	8	$\mp$ 33,24	$\mp$ 3,509	8	$\mp$ 51,71	$\mp$ 5,459
9	$\mp$ 30,94	$\mp$ 0,7761	9	$\mp$ 68,82	$\mp$ 1,7264	9	$\mp$ 106,70	$\mp$ 2,6767
5,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000	11,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000	17,0	$\pm$ ∞	$\pm$ 0,0000
1	$\mp$ 32,20	$\mp$ 0,8078	1	$\mp$ 70,08	$\mp$ 1,7581	1	$\mp$ 107,97	$\mp$ 2,7084
2	$\mp$ 16,004	$\mp$ 1,6896	2	$\mp$ 34,47	$\mp$ 3,639	2	$\mp$ 52,94	$\mp$ 5,589
3	$\mp$ 10,402	$\mp$ 2,7005	3	$\mp$ 22,177	$\mp$ 5,758	3	$\mp$ 33,95	$\mp$ 8,815
4	$\mp$ 7,432	$\mp$ 3,923	4	$\mp$ 15,691	$\mp$ 8,283	4	$\mp$ 23,949	$\mp$ 12,642
5	$\mp$ 5,500	$\mp$ 5,500	5	$\mp$ 11,500	$\mp$ 11,500	5	$\mp$ 17,500	$\mp$ 17,500
6	$\mp$ 4,069	$\mp$ 7,708	6	$\mp$ 8,428	$\mp$ 15,966	6	$\mp$ 12,787	$\mp$ 24,224
7	$\mp$ 2,9043	$\mp$ 11,187	7	$\mp$ 5,961	$\mp$ 22,963	7	$\mp$ 9,019	$\mp$ 34,74
8	$\mp$ 1,8845	$\mp$ 17,851	8	$\mp$ 3,834	$\mp$ 36,32	8	$\mp$ 5,784	$\mp$ 54,78
9	$\mp$ 0,9345	$\mp$ 37,25	9	$\mp$ 1,8848	$\mp$ 75,18	9	$\mp$ 2,8351	$\mp$ 113,02
6,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	12,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞	18,0	$\mp$ 0,0000	$\mp$ ∞

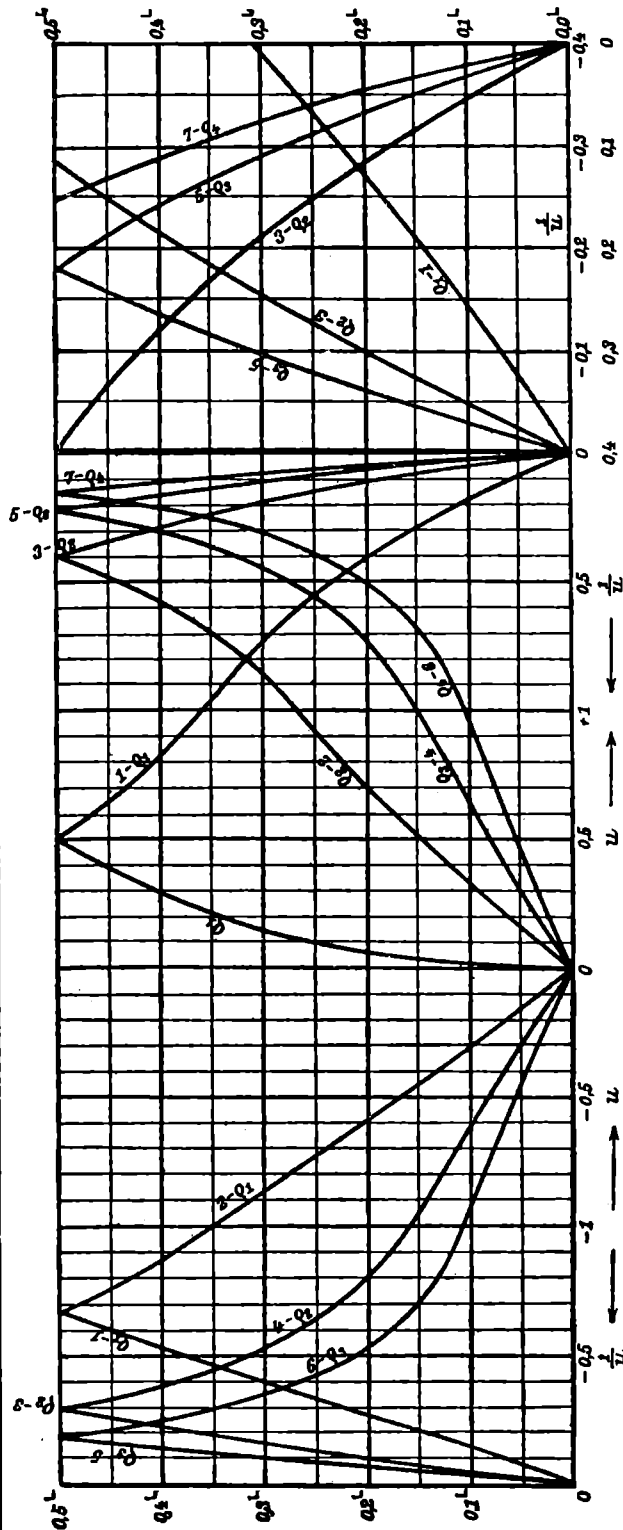
$\frac{\operatorname{ctg} \varrho}{\varrho}$	ϱ	$-\varrho \operatorname{tg} \varrho$	ϱ	$\varrho \operatorname{tg} \varrho$	ϱ	$\varrho \operatorname{tg} \varrho$	ϱ	$\frac{\operatorname{ctg} \varrho}{\varrho}$	ϱ
	Rechte		Rechte		Rechte		Rechte		Rechte
0,0 0	1,0 000	0,0 0	2,0 000	0 0	0 000	0 0	0,07 122	0,0 0	1,0 000
2	129	2	1,9 936	1	798	2	210	2	0,9 875
4	262	4	872	2	1 128	4	297	4	752
6	397	6	807	3	382	6	382	6	633
8	536	8	742	4	596	8	467	8	516
0,1 0	677	0,1 0	677	5	784	09 0	551	0,1 0	403
2	822	2	611	6	954	2	634	2	293
4	970	4	545	7	2 110	4	717	4	186
6	1,1 121	6	478	8	256	6	798	6	082
8	274	8	411	9	393	8	878	8	0,8 980
0,2 0	430	0,2 0	344	1 0	523	1 00	958	0,2 0	881
2	589	2	277	1	646	05	0,08 153	2	785
4	750	4	209	2	763	10	344	4	691
6	912	6	140	3	875	15	531	6	600
8	1,2 076	8	072	4	984	20	713	8	511
0,3 0	241	0,3 0	003	5	3 089	25	891	0,3 0	424
2	406	2	1,8 934	6	190	30	0,09 066	2	340
4	572	4	865	7	288	35	238	4	258
6	737	6	795	8	383	40	406	6	178
8	902	8	725	9	476	45	571	8	099
0,4 0	1,3 066	0,4 0	655	2 0	567	50	733	0,4 0	023
2	228	2	585	2	741	55	893	2	0,7 949
4	389	4	514	4	907	60	0,10 050	4	876
6	548	6	444	6	4 066	65	205	6	805
8	704	8	373	8	219	70	357	8	736
0,5 0	857	0,5 0	302	3 0	367	75	507	0,5 0	669
2	1,4 007	2	231	2	510	80	655	2	603
4	154	4	160	4	648	85	800	4	539
6	298	6	089	6	782	90	943	6	476
8	438	8	017	8	913	95	0,11 084	8	414
0,6 0	574	0,6 0	1,7 946	4 0	5 041	2 00	224	0,6 0	354
2	707	2	874	2	165	1	498	2	296
4	835	4	802	4	286	2	766	4	238
6	959	6	731	5	405	3	0,12 028	6	182
8	1,5 079	8	660	8	521	4	284	8	127
0,7 0	196	0,7 0	588	5 0	634	5	534	0,7 0	073
2	309	2	517	2	745	6	778	2	021
4	418	4	446	4	854	7	0,13 018	4	0,6 969
6	523	6	375	6	961	8	254	6	918
8	625	8	304	8	6 066	9	485	8	869
0,8 0	724	0,8 0	233	6 0	170	3 0	712	0,8 0	820
2	819	2	162	2	272	1	935	2	772
4	911	4	092	4	372	2	0,14 154	4	725
6	1,6 000	6	022	6	471	3	370	6	680
8	085	8	1,6 952	8	568	4	583	8	636
0,9 0	166	0,9 0	882	7 0	663	5	792	0,9 0	592
2	245	2	812	2	757	6	998	2	549
4	322	4	743	4	850	7	0,15 200	4	506
6	396	6	674	6	942	8	400	6	464
8	468	8	606	8	7 032	9	598	8	423
1,0 0	1,6 538	1,0 0	1,6 538	8 0	7 122	4 0	0,15 793	1,0 0	0,6 383
				0,00	0,0	0,0			

Für
For $0 < \varrho \operatorname{tg} \varrho < 0,001$:
 $\varrho = 0,7979 \sqrt{\varrho \operatorname{tg} \varrho}$.

Fortsetzung S. 128
Continued on p. 128

$-\varrho \operatorname{ctg} \varrho$	ϱ	$-\frac{\operatorname{tg} \varrho}{\varrho}$	ϱ	$\frac{\operatorname{tg} \varrho}{\varrho}$	ϱ	$\varrho \operatorname{ctg} \varrho$	ϱ	$\varrho \operatorname{ctg} \varrho$	ϱ
	Rechte		Rechte		Rechte		Rechte		Rechte
0,0 0	1,0 000	0,0 0	2,0 000	0,0 0	2,0 000	0,0 0	1,0 000	0,5 00	0,5 000
2	125	2	1,9 749	2	258	2	0,9 871	05	0,4 911
4	248	4	505	4	521	4	739	10	821
6	368	6	268	6	790	6	603	15	728
8	485	8	038	8	2,1 063	8	463	20	634
	62,5		123,5		516		64,5		178
	61,5		122		526		66		180
	60		118,5		538		68		186
	58,5		115		546		70		188
	57		111		552		72		194
0,1 0	599	0,1 0	1,8 816	0,1 0	339	0,1 0	319	25	537
2	710	2	602	2	616	2	171	30	438
4	819	4	395	4	893	4	019	35	336
6	926	6	196	6	2,2 170	6	0,8 863	40	231
8	1,1 030	8	005	8	444	8	701	45	123
	55,5		107		554		74		198
	54,5		103,5		554		76		204
	53,5		99,5		554		78		210
	52		95,5		548		81		216
	51		92		542		83,5		222
0,2 0	132	0,2 0	1,7 821	0,2 0	715	0,2 0	534	50	012
2	231	2	644	2	980	2	449	55	0,3 898
4	329	4	473	4	2,3 238	4	362	60	780
6	425	6	308	6	490	6	274	65	657
8	518	8	150	8	733	8	184	70	530
	49,5		88,5		530		85		228
	49		85,5		516		87		236
	48		82,5		504		88		246
	46,5		79		486		90		254
	46		76		470		92		264
0,3 0	610	0,3 0	1,6 998	0,3 0	968	0,3 0	092	75	398
2	700	2	852	2	2,4 194	2	0,7 999	80	259
4	788	4	711	4	410	4	905	85	114
6	874	6	575	6	616	6	808		0,2 9626
8	959	8	444	8	813	8	710		317
	45		73		452		101		320
	44		70,5		432		93		323
	43		68		412		94		326
	42,5		65,5		394		97		330
	41,5		63		374		98		334
0,4 0	1,2 042	0,4 0	318	0,4 0	2,5 000	0,4 0	609	0,59 0	9309
2	123	2	197	2	177	2	507	1	8089
4	203	4	080	4	346	4	402	2	8666
6	282	6	1,5 967	6	506	6	296	3	8340
8	359	8	858	8	658	8	187	4	8010
	40,5		60,5		354		102	5	7676
	40		58,5		338		103	6	7337
	39,5		56,5		320		106	7	6994
	38,5		54,5		304		109	8	6647
	37,5		52,5		288		112	9	6295
0,5 0	434	0,5 0	753	0,5 0	802	0,5 0	075		5937
2	508	2	651	2	938	2	0,6 961	1	5574
4	580	4	553	4	2,6 067	4	845	2	5206
6	652	6	458	6	190	6	726	3	4832
8	723	8	366	8	306	8	604	4	4452
	37		51		272		114	5	4066
	36		49		258		116	6	3674
	36		47,5		246		119	7	3274
	35,5		46		232		122	8	2867
	34,5		44,5		220		125	9	2453
0,6 0	792	0,6 0	277	0,6 0	416	0,6 0	479	0,60 0	2243
2	860	2	191	2	521	2	415	1	2031
4	926	4	108	4	621	4	350	2	1817
6	992	6	027	6	716	6	284	3	1600
8	1,3 057	8	1,4 948	8	806	8	218	4	1381
	32,5		39,5		180		132	5	1160
	32		38		170		134	6	0937
0,7 0	121	0,7 0	872	0,7 0	891	0,7 0	151	0,61 00	0711
2	183	2	798	2	973	2	082	1	0482
4	244	4	727	4	2,7 051	4	012	2	
6	304	6	657	6	125	6	0,5 942	3	
8	363	8	589	8	195	8	871	4	
	30,5		35,5		148		140	5	
	30		35		140		142	6	
	29,5		34		136		144	7	
	29,5		32,5					8	
0,8 0	422	0,8 0	524	0,8 0	263	0,8 0	799	0,61 50	0,2 0251
2	479	2	460	2	328	2	725	05	
4	536	4	398	4	390	4	650	10	
6	591	6	338	6	449	6	574	15	
8	646	8	279	8	506	8	496	20	
	28,5		32		130		148	25	
	28,5		31		124		150	30	
	27,5		30		118		152	35	
	27,5		29,5		114		156	40	
	27		28,5		108		158	45	
0,9 0	700	0,9 0	222	0,9 0	560	0,9 0	417		
2	753	2	166	2	612	2	337		
4	806	4	112	4	662	4	255		
6	857	6	059	6	710	6	171		
8	908	8	008	8	757	8	086		
	26,5		28		104		160		
	26,5		27		100		164		
	25,5		26,5		96		168		
	25,5		25,5		94		170		
	25		25		90		172		
1,0 0	1,3 958	1,0 0	1,3 958	1,0 0	2,7 802	0,5 00	0,5 000		

$\varrho \operatorname{tg} \varrho$	ϱ	$\varrho \operatorname{tg} \varrho$	ϱ
Rechte		Rechte	
0,04 0	0,15 793	0,2 5	0,3 746
1	985	6	811
2	174	7	874
3	361	8	936
4	546	9	996
5	729	0,3 0	0,4 055
6	909	1	112
7	0,17 087	2	168
8	263	3	223
9	438	4	277
0,05 0	610	5	329
2	951	6	380
4	0,18 284	7	430
6	610	8	479
8	929	9	527
0,06 0	0,19 242	0,4 0	574
2	550	1	620
4	853	2	665
6	0,20 151	3	710
8	443	4	754
0,07 0	731	5	797
2	0,21 014	6	839
4	293	7	880
6	568	8	921
8	839	9	961
0,08 0	0,22 106	0,5 0	0,5 000
2	369	2	076
4	628	4	150
6	884	6	222
8	0,23 137	8	292
0,09 0	386	0,6 0	359
2	632	2	424
4	876	4	487
6	0,24 117	6	549
8	355	8	609
0,1 00	590	0,7 0	667
05	0,25 165	2	724
10	724	4	779
15	0,26 269	6	833
20	800	8	885
25	0,27 318	0,8 0	936
30	825	2	986
35	0,28 320	4	0,6 034
40	803	6	081
45	0,29 276	8	128
0,1 50	739	0,9 0	173
6	0,3 064	2	217
7	150	4	260
8	233	6	302
9	314	8	343
0,2 0	392	1,0 0	0,6 383
1	467		
2	540		
3	611		
4	679		
0,2 5	0,3 746		

Fig. 62. Wurzeln ϱ_n der transcendenten Gleichung $\varrho \operatorname{tg} \varrho = u$ als Funktionen von u .Fig. 62. Roots ϱ_n of the transcendental equation $\varrho \operatorname{tg} \varrho = u$ as functions of u .

Beispiel: $u = -10 = 1: (-0,1)$. $\varrho_1 - 1^{1-} = 0,07^{1-}$; $\varrho_2 - 3^{1-} = 0,20^{1-}$; $\varrho_3 - 5^{1-} = 0,31^{1-}$.
 Example: $u = -10 = 1: (-0,1)$. $\varrho_1 - 1^{1-} = 0,07^{1-}$; $\varrho_2 - 3^{1-} = 0,20^{1-}$; $\varrho_3 - 5^{1-} = 0,31^{1-}$.
 $\varrho \approx 2n + \frac{2u}{2\pi} - \frac{(\frac{2u}{2\pi})^2}{(2\pi)^2}$; n ganz und $n > \sqrt{\frac{|u|}{2\pi}}$; n integer and $n > \sqrt{\frac{|u|}{2\pi}}$.

ϱ	$\varrho \operatorname{ctg} \varrho$	ϱ
Rechte	0,63	Rechte
0,20 251	2 0	0,09 387
017 468	1	285
0,19 780	2	181
540 480	3	077
298 484	4	0,08 971
492		106
052	5	865
0,18 802	6	757
506	7	647
549 512	8	536
293 520	9	424
033 526		114
0,17 770	3 0	310
534	1	194
503 546	2	077
230 534	3	0,07 958
0,16 953	4	838
564		123
671 572	5	715
385 582	6	591
094 594	7	464
0,15 797	8	335
606	9	204
494 618		134
185 632	4 0	070
0,14 869	1	0,06 934
644	2	796
547 658	3	654
218 676	4	509
0,13 880		148
692	5	361
534 70,5	6	209
393 71,5	7	054
250 72	8	0,05 894
106 73	9	730
0,12 960		170
73,5	5 0	560
813 74,5	1	385
664 75,5	2	205
513 76,5	3	019
360 77,5	4	0,04 825
205 78		
049 79,5	5	623
0,11 890	6	411
80,5	7	189
729 81,5	8	0,03 956
566 83	9	708
400 83,5		
233 85,5	6 0	441
062 87	1	151
0,10 888	2	0,02 832
88	3	471
712 89	4	049
534 91		
352 93	5	0,01 513
166 95	6	0,00 615
0,09 976		
96,5	0,63	
783 98		
587 100		
0,09 387	0,6	2,8 687
	0,7	465
	0,8	243
	0,9	022
	1,0	2,7 802

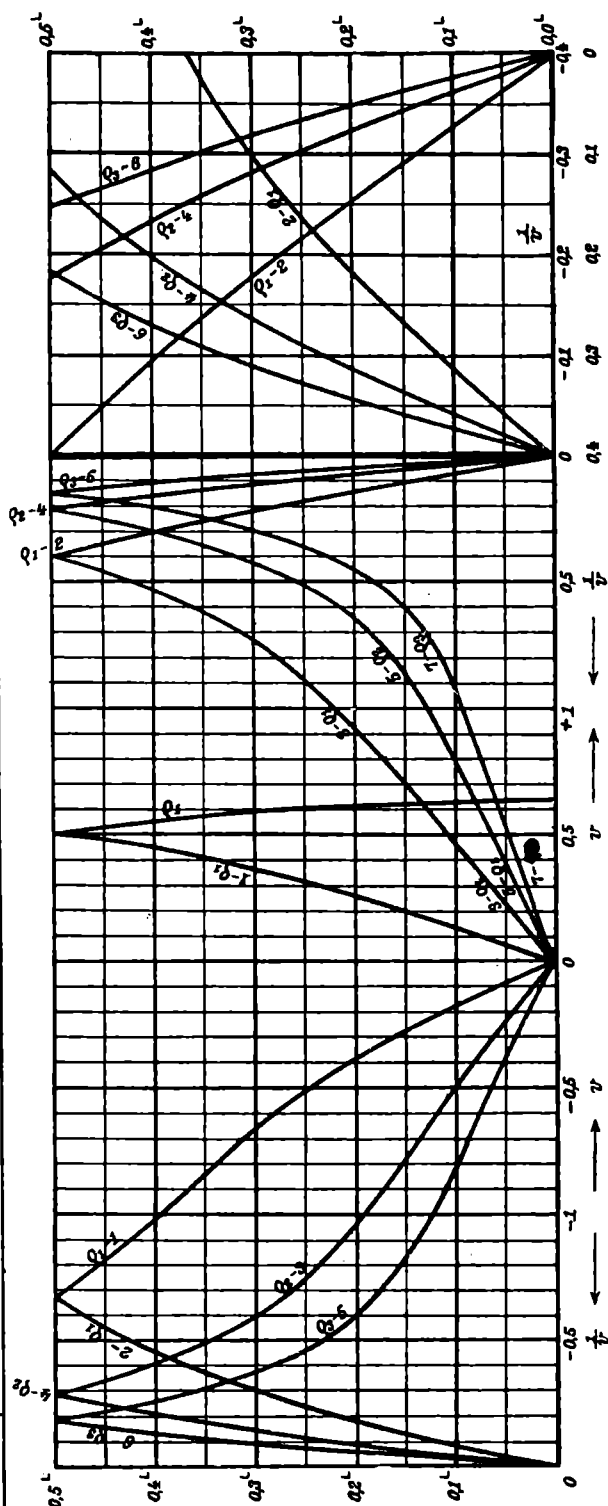


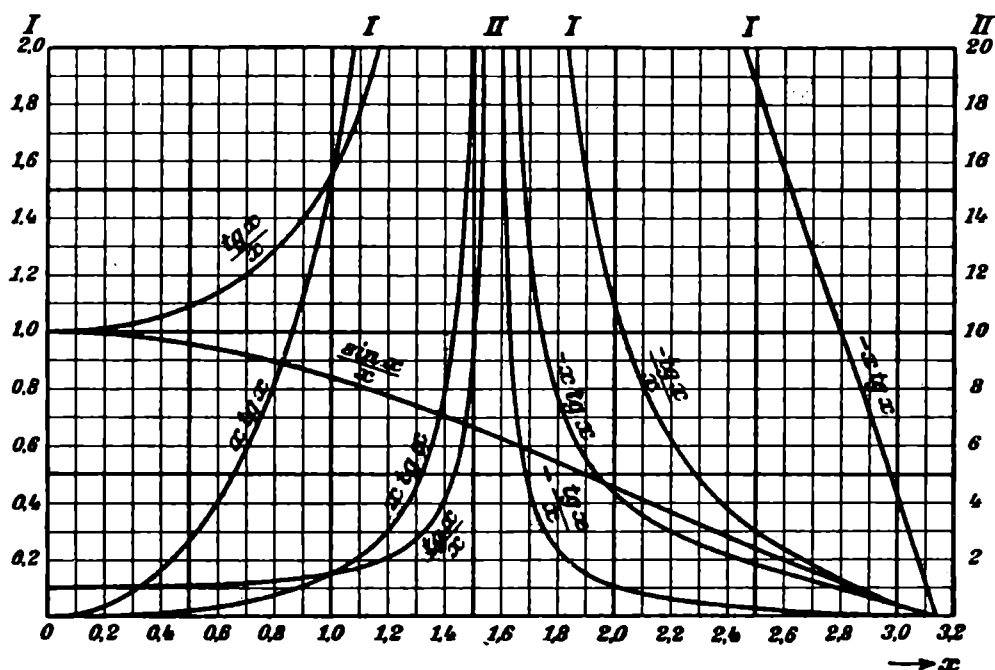
Fig. 63. Wurzeln q_n der transzendenten Gleichung $q/\operatorname{tg} q = v$ als Funktionen von v

Fig. 63. Roots q_n of the transcendental equation $q/\operatorname{tg} q = v$ as functions of v

Beispiel: $v = 0.8$. $3^{\frac{1}{2}} - q_1 = 0.17^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{2}} - q_2 = 0.10^{\frac{1}{2}}$; $7^{\frac{1}{2}} - q_3 = 0.075^{\frac{1}{2}}$.
 Example: $v = 0.8$. $3^{\frac{1}{2}} - q_1 = 0.17^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{2}} - q_2 = 0.10^{\frac{1}{2}}$; $7^{\frac{1}{2}} - q_3 = 0.075^{\frac{1}{2}}$.
 $q \approx (2n+1) \frac{\sqrt{v}}{2\pi}$; $q \approx (2n+1) \frac{(\frac{1}{2}v)^{\frac{1}{2}}}{2\pi}$.

$$<\varepsilon=0,6366198-\varrho \operatorname{ctg} \varrho<0,001:$$

$$\varrho=1,3820 \sqrt{\varepsilon}$$

Fig. 64. Die Funktionen $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ und $\frac{\sin x}{x}$ (x in Radianten)Fig. 64. The functions $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ and $\frac{\sin x}{x}$ (x in radians)

✱

XI. Transzendente Gleichungen
XI. Transcendental equations

$$1. \operatorname{tg} x = x \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \xi = a - \xi. \quad (\text{cf. p. 25})$$

Lösung:
Solution:

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7} - \dots$$

n	x_n	Max. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ Min. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	n	x_n	Max. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ Min. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
1	0	I	11	32,9564	+0,0303
2	4,4934	-0,2172	12	36,1006	-0,0277
3	7,7253	+0,1284	13	39,2444	+0,0255
4	10,9041	-0,0913	14	42,3879	-0,0236
5	14,0662	+0,0709	15	45,5311	+0,0220
6	17,2208	-0,0580	16	48,6741	-0,0205
7	20,3713	+0,0490	17	51,8170	+0,0193
8	23,5195	-0,0425			
9	26,6661	+0,0375			
10	29,8116	-0,0335			

$$2. x \operatorname{tg} x = 1 \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \operatorname{ctg} x = x; \quad x = 1,199678 \dots$$

$$3. \operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 119,26 \frac{\pi}{180}, \quad x_3 = 340,35 \frac{\pi}{180}.$$

$$4. \operatorname{tg} x = \frac{x^3 - 9x}{4x^2 - 9} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3,3422, \quad \dots$$

$$5. a) \operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} x \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos(x\sqrt{2}i) = c\sqrt{i} \quad \left(\begin{array}{l} c \text{ reell} \\ c \text{ real} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \xi = e^{-2x} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \text{with} \end{array} \quad x = (2n - 0,5) \frac{\pi}{2} - \xi \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos 2x \operatorname{ctg} 2x = -1:$$

$$x_1 = 2,3470 \text{ rad} = 1,4943^\circ, \quad x_2 = 5,4978 \text{ rad} = 3,5000^\circ, \quad \dots$$

$$b) \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \sin(x\sqrt{2}i) = s\sqrt{-i} \quad \left(\begin{array}{l} s \text{ reell} \\ s \text{ real} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \xi = e^{-2x} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \text{with} \end{array} \quad x = (2n - 0,5) \frac{\pi}{2} + \xi \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos 2x \operatorname{ctg} 2x = +1:$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2,3650 \text{ rad} = 1,5057^\circ, \quad x_2 = 5,4978 \text{ rad} = 3,5000^\circ, \quad \dots$$

$$c) \operatorname{tg} x = +\operatorname{tg} x \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \sin(x\sqrt{2}i) = s\sqrt{i} \quad \left(\begin{array}{l} s \text{ reell} \\ s \text{ real} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \xi = e^{-2x} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \text{with} \end{array} \quad x = (2n + 0,5) \frac{\pi}{2} - \xi \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos 2x \operatorname{ctg} 2x = +1:$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3,9266 \text{ rad} = 2,4998^\circ, \quad x_2 = 7,0686 \text{ rad} = 4,5000^\circ, \quad \dots$$

$$d) \operatorname{tg} x = +\operatorname{ctg} x \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos(x\sqrt{2}i) = c\sqrt{-i} \quad \left(\begin{array}{l} c \text{ reell} \\ c \text{ real} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \xi = e^{-2x} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \text{with} \end{array} \quad x = (2n + 0,5) \frac{\pi}{2} + \xi \quad \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{or} \end{array} \quad \cos 2x \operatorname{ctg} 2x = -1:$$

$$x_0 = 0,9375 \text{ rad} = 0,5968^\circ, \quad x_1 = 3,9274 \text{ rad} = 2,5002^\circ, \quad x_2 = 7,0686 \text{ rad} = 4,5000^\circ, \quad \dots$$

e) Zusammenfassung dieser vier Gleichungen:

e) Summary of these four equations:

$$\cos 2x \operatorname{ctg} 2x = \pm 1:$$

$$x_n = (n \pm 0,5) \frac{\pi}{2} - (-1)^n \xi_n \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \text{with} \end{array}$$

$$\xi_n = \frac{1}{a} \pm (-1)^n \frac{2}{a^2} + \frac{17}{3a^3} \pm (-1)^n \frac{56}{3a^4} + \dots, \quad a = e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$$

q	$q \frac{\pi}{2}$	q	$q \frac{\pi}{2}$	$q \quad 1/a = e^{-q\frac{\pi}{2}}$
1,5	2,356 195	0,5	0,785 398	1 0,207 880
3,5	5,497 787	2,5	3,926 991	3 -2 898 329
5,5	8,639 380	4,5	7,068 584	5 -3 388 203
7,5	11,780 973	6,5	10,210 176	7 1 -5 67 758
9,5	14,922 565	8,5	13,351 769	9 -6 724 947

cf. p. 25, 81. 87

$$^n 4 \equiv 0,4 \cdot 10^n; \quad ^n 9 \equiv 2,9 \cdot 10^n.$$

XII. Kreis- und Hyperbelfunktionen einer komplexen Veränderlichen
 XII. Circular and hyperbolic functions of a complex variable

1. Sinus, Cosinus

$$\begin{aligned} \sin z = s e^{i\sigma} = u + iv, \quad \cos z = c e^{i\gamma} = u_1 + i v_1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right), \quad z = x + iy = r e^{i\varrho}, \\ u = \sin x \operatorname{Cos} y, \quad v = \cos x \operatorname{Sin} y, \quad u_1 = \cos x \operatorname{Cos} y, \quad v_1 = -\sin x \operatorname{Sin} y, \\ s^2 = \sin^2 x + \operatorname{Sin}^2 y, \quad c^2 = \cos^2 x + \operatorname{Sin}^2 y, \\ 2s^2 = \operatorname{Cos} 2y - \cos 2x, \quad 2c^2 = \operatorname{Cos} 2y + \cos 2x, \\ \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{ctg} x \operatorname{Tg} y, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} x \operatorname{Tg} y. \end{aligned}$$

Für $r \ll 1$ hat manFor $r \ll 1$ we have

$$\begin{aligned} s &= r - \frac{r^3}{6} \cos 2\varrho + \frac{r^5}{144} \left(1 + \frac{1}{5} \cos 4\varrho\right) - \dots, \\ \sigma &= \varrho - \frac{r^2}{6} \sin 2\varrho - \frac{r^4}{180} \sin 4\varrho - \dots, \\ c &= 1 - \frac{r^2}{2} \cos 2\varrho + \frac{r^4}{16} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 4\varrho\right) - \dots, \\ \gamma &= 0 - \frac{r^2}{2} \sin 2\varrho - \frac{r^4}{12} \sin 4\varrho - \dots \end{aligned}$$

und für $y \gg 1$ and for $y \gg 1$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} e^y - \frac{1}{2} e^{-y} \cos 2x + \frac{1}{8} e^{-3y} (1 - \cos 4x) - \dots, \\ \sigma &= \frac{\pi}{2} - x - e^{-2y} \sin 2x - \frac{1}{2} e^{-4y} \sin 4x - \dots, \\ c &= \frac{1}{2} e^y + \frac{1}{2} e^{-y} \cos 2x + \frac{1}{8} e^{-3y} (1 - \cos 4x) + \dots, \\ \gamma &= 0 - x + e^{-2y} \sin 2x - \frac{1}{2} e^{-4y} \sin 4x + \dots \end{aligned}$$

Zwischen s, σ, c, γ bestehen die Beziehungen:The following relations hold between s, σ, c, γ :

$$\begin{aligned} s^2 \cos 2\sigma + c^2 \cos 2\gamma &= 1, \\ \operatorname{ctg} 2\sigma + \operatorname{ctg} (-2\gamma) &= \frac{1}{s^2 \sin 2\sigma} = \frac{1}{c^2 \sin (-2\gamma)}. \end{aligned}$$

2. Arcus sinus

2. Inverse sine

$$\begin{aligned} \cos 2x &= c^2 - s^2, & \operatorname{Cos} 2y &= c^2 + s^2, \\ 2 \cos^2 x &= c^2 + (1 + s)(1 - s), & 2 \operatorname{Sin}^2 y &= c^2 + (s + 1)(s - 1), \end{aligned}$$

wo

where

$$\begin{aligned} c^2 &= \sqrt{1 - 2s^2 \cos 2\sigma + s^4}, & s^2 &= \sqrt{1 - 2c^2 \cos 2\gamma + c^4}, \\ &= \sqrt{(s^2 - 1)^2 + (2s \sin \sigma)^2}, & &= \sqrt{(c^2 - 1)^2 + (2c \sin \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Wenn $s \ll 1$ ist, hat manIf $s \ll 1$, we have

$$\begin{aligned} x &= s \cos \sigma + \frac{s^3}{6} \cos 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \cos 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \cos 7\sigma + \dots, \\ y &= s \sin \sigma + \frac{s^3}{6} \sin 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \sin 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \sin 7\sigma + \dots, \end{aligned}$$

und wenn $s \gg 1$ ist,and if $s \gg 1$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\sin 2\sigma}{(2s)^3} - \frac{3 \sin 4\sigma}{2(2s)^5} - \frac{10 \sin 6\sigma}{3(2s)^7} - \frac{35 \sin 8\sigma}{4(2s)^9} - \dots, \\ y &= \ln 2s - \frac{\cos 2\sigma}{(2s)^3} - \frac{3 \cos 4\sigma}{2(2s)^5} - \frac{10 \cos 6\sigma}{3(2s)^7} - \frac{35 \cos 8\sigma}{4(2s)^9} - \dots \end{aligned}$$

Wenn $|s - 1| \ll 1$ und $\sigma \ll 0,5$ ist, so berechnet man zunächst | When $|s - 1| \ll 1$ and $\sigma \ll 0,5$, we first compute

$$\frac{c^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 (s-1)^2 + (s \sin \sigma)^2} \approx \sqrt{(s-1)^2 + \sin^2 \sigma}$$

und damit

| and therefrom

$$\cos x = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1+s}{2}(1-s)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + 1-s},$$

$$\sin y = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{s+1}{2}(s-1)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + s-1}.$$

3. Tangens

$$\operatorname{tg} z = t e^{i\tau} = U + iV, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{t} e^{-i\tau} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - z \right), \quad z = x + iy = r e^{i\varrho},$$

$$U = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{Co} 2y}, \quad V = \frac{\operatorname{Si} 2y}{\cos 2x + \operatorname{Co} 2y},$$

$$t^2 = \frac{\sin^2 x + \operatorname{Si}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{Si}^2 y} = \frac{\operatorname{Co} 2y - \cos 2x}{\operatorname{Co} 2y + \cos 2x}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\operatorname{Si} 2y}{\sin 2x}.$$

Für $x = 45^\circ$ ist $t = 1$, $\tau = \operatorname{Amp} 2y$,
For we get

$$U = \cos \tau = \frac{1}{\operatorname{Co} 2y}, \quad V = \sin \tau = \operatorname{Tg} 2y, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{Si} 2y.$$

Wenn $r \ll 1$ ist, hat man

| If $r \ll 1$, we have

$$t = r + \frac{r^3}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^5}{36} \left(1 + \frac{19}{4} \cos 4\varrho \right) + \dots,$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{r}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^3}{36} \left(1 - \frac{9}{5} \cos 4\varrho \right) - \dots,$$

$$\tau = \varrho + \frac{r^2}{3} \sin 2\varrho + \frac{7r^4}{90} \sin 4\varrho + \dots$$

Wenn $y \gg 1$ ist, hat man

| If $y \gg 1$, we have

$$U = 0 + 2e^{-2y} \sin 2x - 2e^{-4y} \sin 4x + \dots,$$

$$V = 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + 2e^{-4y} \cos 4x - \dots,$$

$$t = 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + 2e^{-4y} (1 + \cos 4x) \dots,$$

$$\operatorname{ctg} \tau = 2e^{-2y} \sin 2x \cdot (1 + e^{-4y} + \dots),$$

ferner mit $p = \frac{\cos 2x}{\operatorname{Co} 2y}$
further with

$$t = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} = 1 - p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{2} + \frac{3p^4}{8} - \dots$$

und mit $q = \frac{\sin 2x}{\operatorname{Si} 2y} = \operatorname{ctg} \tau$
and with

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} q = \frac{\pi}{2} - q + \frac{q^3}{3} - \frac{q^5}{5} + \dots$$

4. Arcus tangens

4. Inverse tangent

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cos \tau}{\frac{1}{t} - t} = \frac{2U}{1 - U^2 - V^2} = -\frac{\cos \tau}{\operatorname{Si} \theta}, \quad \operatorname{Tg} 2y = \frac{2 \sin \tau}{\frac{1}{t} + t} = \frac{2V}{1 + U^2 + V^2} = \frac{\sin \tau}{\operatorname{Co} \theta},$$

wo $\theta = \ln t$, also $\ln \operatorname{tg} z = \theta + i\tau$.
where therefore

Setzt man

Putting

$$N^2 = \operatorname{Sin}^2 \vartheta + \cos^2 \tau = \operatorname{Coj}^2 \vartheta - \sin^2 \tau,$$

$$2 N^2 = \operatorname{Coj} 2 \vartheta + \cos 2 \tau,$$

so ist

we obtain

$$N \sin 2 x = \cos \tau, \quad N \cos 2 x = -\operatorname{Sin} \vartheta,$$

$$N \operatorname{Sin} 2 y = \sin \tau, \quad N \operatorname{Coj} 2 y = \operatorname{Coj} \vartheta.$$

Für $t = 1$ und $-90^\circ < \tau < 90^\circ$ wird $x = 45^\circ$, $\operatorname{I}g y = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$.
 For $t = 1$ and $-90^\circ < \tau < 90^\circ$ we obtain $x = 45^\circ$, $\operatorname{I}g y = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$.

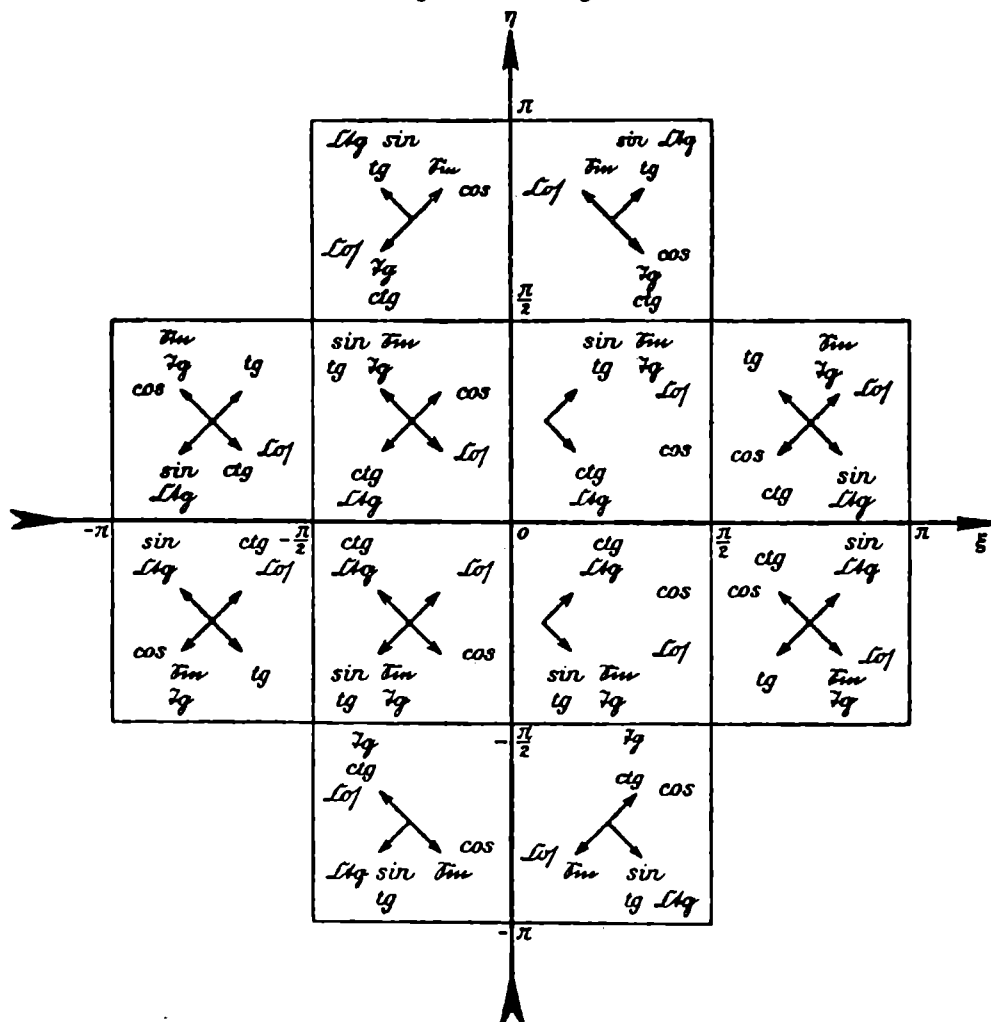
Für $\tau = 90^\circ$ und
 For $\tau = 90^\circ$ and

wird $t < 1$, $t = 1$, $t > 1$
 we get $x = 0$, x beliebig, $x = \pm 90^\circ$,
 $y = \operatorname{Ar} \operatorname{I}g t$, $y = \infty$, $y = \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} t$.

Wenn $t \ll 1$ ist, hat manIf $t \ll 1$, we have

$$x = t \cos \tau - \frac{t^3}{3} \cos 3 \tau + \frac{t^5}{5} \cos 5 \tau - \dots,$$

$$y = t \sin \tau - \frac{t^3}{3} \sin 3 \tau + \frac{t^5}{5} \sin 5 \tau - \dots,$$

Fig. 65. Vorzeichen des reellen und des imaginären Teils der Funktionen von $\xi + i\eta$ Fig. 65. Sign of the real and of the imaginary part of the functions of $\xi + i\eta$

und wenn $t \gg 1$ ist,

and if $t \gg 1$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \tau}{t} + \frac{\cos 3\tau}{3t^3} - \frac{\cos 5\tau}{5t^5} + \dots,$$

$$y = 0 + \frac{\sin \tau}{t} - \frac{\sin 3\tau}{3t^3} + \frac{\sin 5\tau}{5t^5} - \dots$$

Wenn sich t dem Wert 1 und τ einem rechten Winkel nähert, so setze man

When t approaches unity and τ approaches a right angle, we put

$$-\operatorname{Sin} \vartheta = T = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1-\frac{1-t}{2}}{\frac{1}{1-t}-1}, \quad T^2 + \cos^2 \tau = N^2.$$

Dann ist

Then we have

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\cos \tau}{T} = \frac{\cos \tau}{1-t} - \frac{\cos \tau}{2} - \frac{1-t}{4} \frac{\cos \tau}{1-\frac{1-t}{2}},$$

$$\operatorname{Sin} 2y = \frac{\sin \tau}{N}, \quad \operatorname{Cos} 4y = \frac{2+T^2-\cos^2 \tau}{N^2},$$

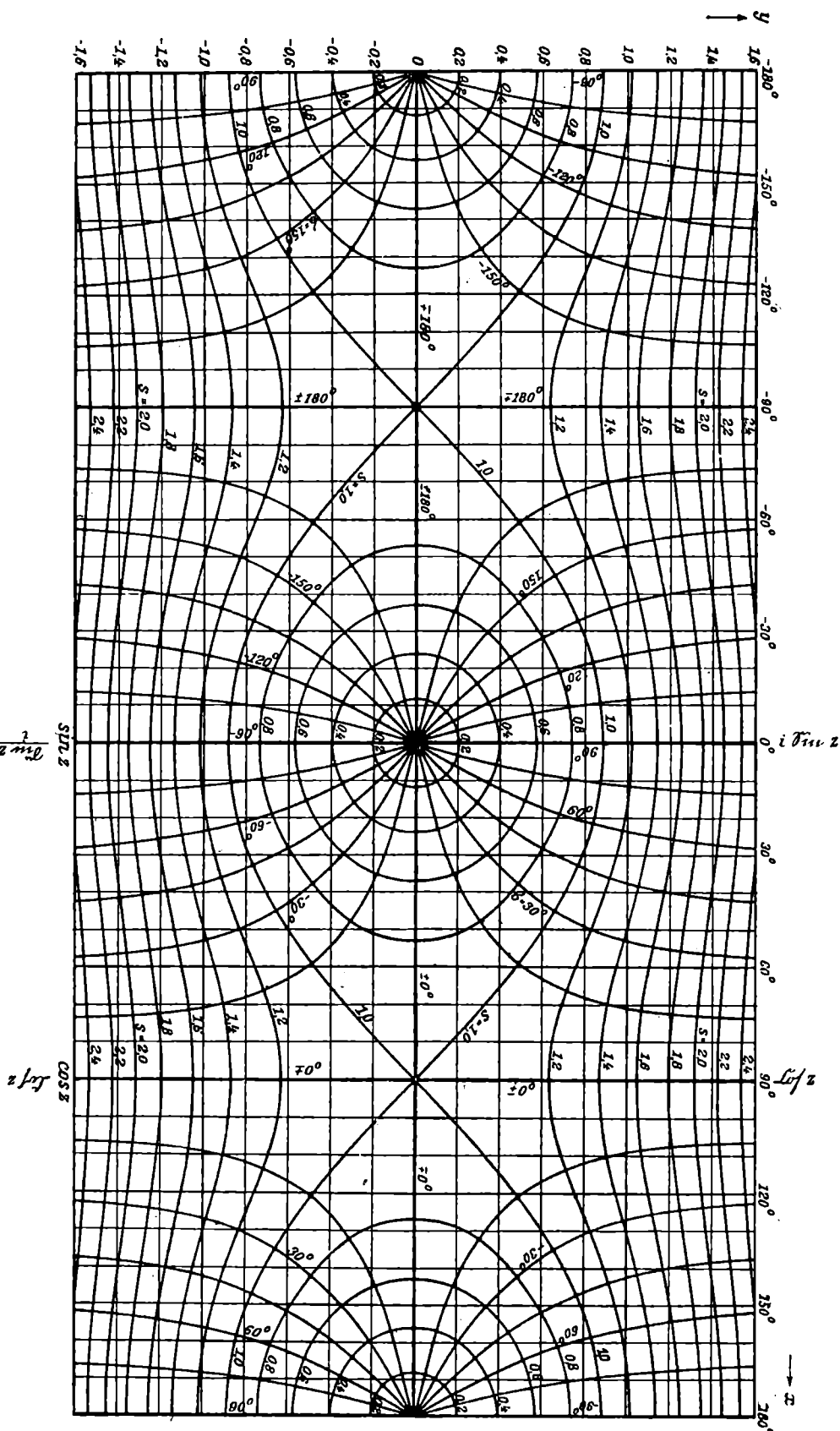
$$y \approx \frac{1}{4} \ln \frac{4}{N^2} + \frac{T^2 - \cos^2 \tau}{8} - \frac{3T^4 + 3\cos^4 \tau - 2T^2 \cos^2 \tau}{64}.$$

5. Übergang von einer Funktion auf eine andere 5. Changing from one function to another

	$\sin z =$	$\cos z =$	$i \cdot \operatorname{Sin} z =$	$\operatorname{Cos} z =$
$= \sin$	$z^{\perp} - z$	$1^{\perp} \pm z$	$\frac{iz}{z^{\perp} - iz}$	$1^{\perp} \pm iz$
$= \cos$	$\pm (z - 1^{\perp})$	$-z$	$\pm (iz - 1^{\perp})$	$\pm iz$
$= i \cdot \operatorname{Sin}$	$\frac{-iz}{i(z \pm z^{\perp})}$	$i(\pm z - 1^{\perp})$	$i z^{\perp} - z$	$\pm z - i 1^{\perp}$
$= \operatorname{Cos}$	$\pm i(z - 1^{\perp})$	$\pm iz$	$\pm (z + i 1^{\perp})$	$-z$

	$\operatorname{tg} z =$	$\operatorname{ctg} z =$	$i \cdot \operatorname{Tg} z =$	$i \cdot \operatorname{Ctg} z =$
$= \operatorname{tg}$	z	$-z \pm 1^{\perp}$	iz	$iz \pm 1^{\perp}$
$= \operatorname{ctg}$	$-z \pm 1^{\perp}$	z	$-iz \pm 1^{\perp}$	$-iz$
$= i \cdot \operatorname{Tg}$	$-iz$	$i(z \pm 1^{\perp})$	z	$z \pm i 1^{\perp}$
$= i \cdot \operatorname{Ctg}$	$i(-z \pm 1^{\perp})$	iz	$z \pm i 1^{\perp}$	z

	$\operatorname{arc} \sin z =$	$\operatorname{arc} \cos z =$ $i \cdot \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} z =$	$i \cdot \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z =$
$= \operatorname{arcsin}$	z	$\sqrt{1-z^2}$	iz
$= \operatorname{arc} \cos$ $= i \cdot \operatorname{Ar} \operatorname{Cos}$	$\sqrt{1-z^2}$	z	$\sqrt{1+z^2}$
$= i \cdot \operatorname{Ar} \operatorname{Sin}$	$-iz$	$-\sqrt{z^2-1}$	z

Fig. 66. $\sin(x + iy) = s e^{i\theta}$

Höhenkarte des Sinusreliefs. Betrachtet man die Karte von verschiedenen Seiten, so erhält man, je nach Wahl des Nullpunktes, die Funktionen $\sin z$, $\cos z$, $\cos i z$, $\pm i \sin z$.

Altitude chart of the sine-relief. If we consider the chart from different sides, we obtain the functions $\sin z$, $\cos z$, $\cosh z$, $\pm i \sinh z$, according to the choice of origin.

	$\operatorname{arctg} z =$	$\operatorname{arcctg} z =$	$i \cdot \operatorname{ArTg} z =$	$i \cdot \operatorname{ArCtg} z =$
$= \operatorname{arctg}$	z	$\frac{1}{z}$	iz	$\frac{i}{z}$
$= \operatorname{arcctg}$	$\frac{1}{z}$	z	$\frac{1}{iz}$	$-iz$
$= i \cdot \operatorname{ArTg}$	$-iz$	$\frac{1}{iz}$	z	$\frac{1}{z}$
$= i \cdot \operatorname{ArCtg}$	$\frac{i}{z}$	iz	$\frac{1}{z}$	z

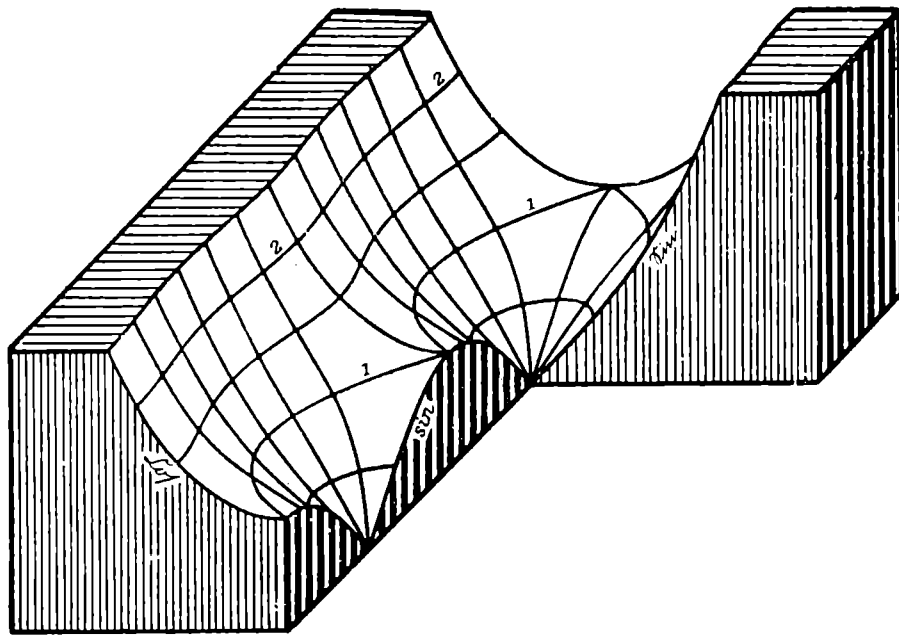
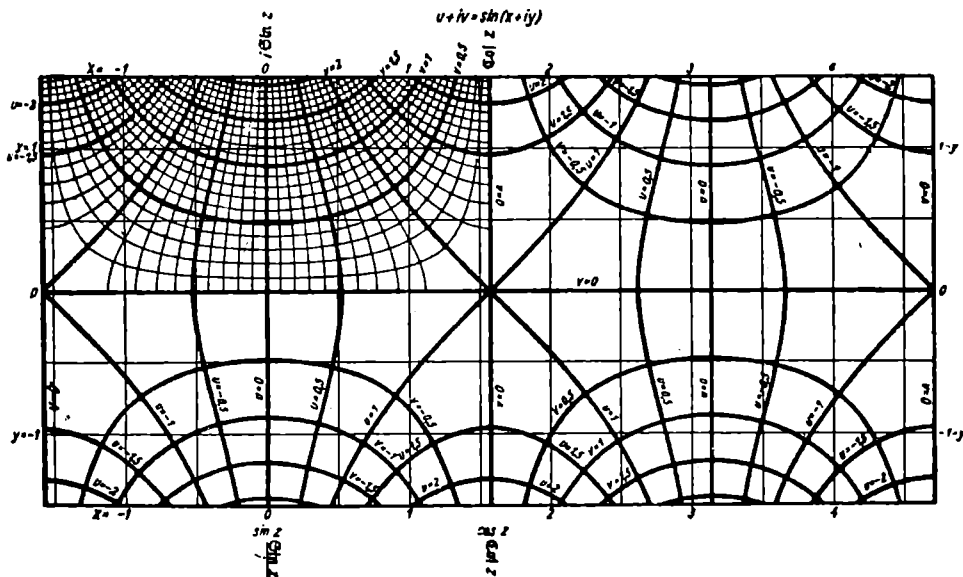


Fig. 67. Sinusrelief mit Höhenlinien und Falllinien

Fig. 67. Sine relief with contours and lines of steepest gradient

Fig. 68. $\sin z = u + iv$. Kurven $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ in der z -EbeneFig. 68. $\sin z = u + iv$. Curves $u = \text{const}$ and $v = \text{const}$ in the z plane

$$\sin(x + iy) = se^{t\sigma}$$

 x in Radianten x in radians

s	$\sigma = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,2014	0,1941	0,1732	0,1405	0,0987	0,0508	0,0000
0,4	0,4115	0,3941	0,3457	0,2748	0,1901	0,0967	0,0000
0,6	0,6435	0,6059	0,5136	0,3957	0,2673	0,1345	0,0000
0,8	0,9273	0,8311	0,6656	0,4959	0,3286	0,1637	0,0000
1,0	1,5708	1,0371	0,7854	0,5719	0,3747	0,1857	0,0000
1,2	1,5708	1,1585	0,8667	0,6261	0,4084	0,2019	0,0000
1,4	1,5708	1,2149	0,9182	0,6640	0,4329	0,2139	0,0000
1,6	1,5708	1,2439	0,9511	0,6906	0,4509	0,2228	0,0000
1,8	1,5708	1,2608	0,9730	0,7097	0,4643	0,2297	0,0000
2,0	1,5708	1,2717	0,9881	0,7237	0,4745	0,2349	0,0000
2,2	1,5708	1,2792	0,9991	0,7342	0,4823	0,2390	0,0000

 x in Graden x in degrees

s	$\sigma = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,54	11,12	9,92	8,05	5,65	2,91	0,00
0,4	23,58	22,58	19,81	15,75	10,89	5,54	0,00
0,6	36,87	34,71	29,43	22,67	15,31	7,70	0,00
0,8	53,13	47,62	38,14	28,41	18,83	9,38	0,00
1,0	90,00	59,42	45,00	32,76	21,47	10,64	0,00
1,2	90,00	66,37	49,66	35,87	23,40	11,57	0,00
1,4	90,00	69,61	52,61	38,05	24,80	12,25	0,00
1,6	90,00	71,27	54,49	39,57	25,84	12,77	0,00
1,8	90,00	72,24	55,75	40,66	26,60	13,16	0,00
2,0	90,00	72,86	56,62	41,46	27,18	13,46	0,00
2,2	90,00	73,29	57,24	42,07	27,63	13,70	0,00

 y in Radianten y in radians

s	$\sigma = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0527	0,1013	0,1423	0,1732	0,1923	0,1987
0,4	0,0000	0,1119	0,2110	0,2898	0,3458	0,3790	0,3900
0,6	0,0000	0,1878	0,3380	0,4450	0,5156	0,5558	0,5688
0,8	0,0000	0,3026	0,4884	0,6055	0,6787	0,7195	0,7327
1,0	0,0000	0,4890	0,6585	0,7643	0,8314	0,8692	0,8814
1,2	0,6224	0,7130	0,8287	0,9143	0,9719	1,0051	1,0160
1,4	0,8670	0,9093	0,9853	1,0520	1,1000	1,1285	1,1380
1,6	1,0462	1,0721	1,1248	1,1767	1,2165	1,2408	1,2490
1,8	1,1929	1,2099	1,2485	1,2896	1,3226	1,3434	1,3504
2,0	1,3170	1,3293	1,3588	1,3920	1,4197	1,4375	1,4436
2,2	1,4254	1,4349	1,4583	1,4855	1,5090	1,5244	1,5297

Genauer als unsern Figuren entnimmt man die Werte den auf S. 176 genannten Tafeln von Hawelka.

More accurate values can be obtained from the tables of Hawelka mentioned on p. 176.

Rückgang auf die positiven spitzen Winkel x, σ und $2x, \tau$
 Reduction to the positive acute angles x, σ and $2x, \tau$

(Stets erst einen Näherungswert in der Fig. 66 oder Fig. 69 ablesen!)

- a) Gegeben der komplexe Winkel;
 gesucht die Funktion.
 b) Gegeben die Funktion;
 gesucht der komplexe Winkel.

(First of all read off an approximate value from fig. 66 or from fig. 69!)

- a) Given the complex angle;
 to find the function.
 b) Given the function;
 to find the complex angle.

a)

$se^{i\varphi} = \sin \begin{matrix} x' + iy \end{matrix}$		$\Im \sin \begin{matrix} y + ix' \end{matrix}$	$\Im \sin \begin{matrix} -y + ix' \end{matrix}$
x'	φ	φ	φ
$-(180^\circ - x)$ $-x$ x $180^\circ - x$	$-(180^\circ - \sigma)$ $180^\circ - \sigma$ σ $-\sigma$	$-(90^\circ + \sigma)$ $-(90^\circ - \sigma)$ $90^\circ - \sigma$ $90^\circ + \sigma$	$-(90^\circ - \sigma)$ $-(90^\circ + \sigma)$ $90^\circ + \sigma$ $90^\circ - \sigma$
$se^{-i\varphi} = \sin \begin{matrix} x' - iy \end{matrix}$		$\Im \sin \begin{matrix} y - ix' \end{matrix}$	$\Im \sin \begin{matrix} -y - ix' \end{matrix}$

$$\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$$

$$0 < \frac{x}{\sigma} < 90^\circ$$

$$0 < \frac{y}{s} < \infty$$

a)

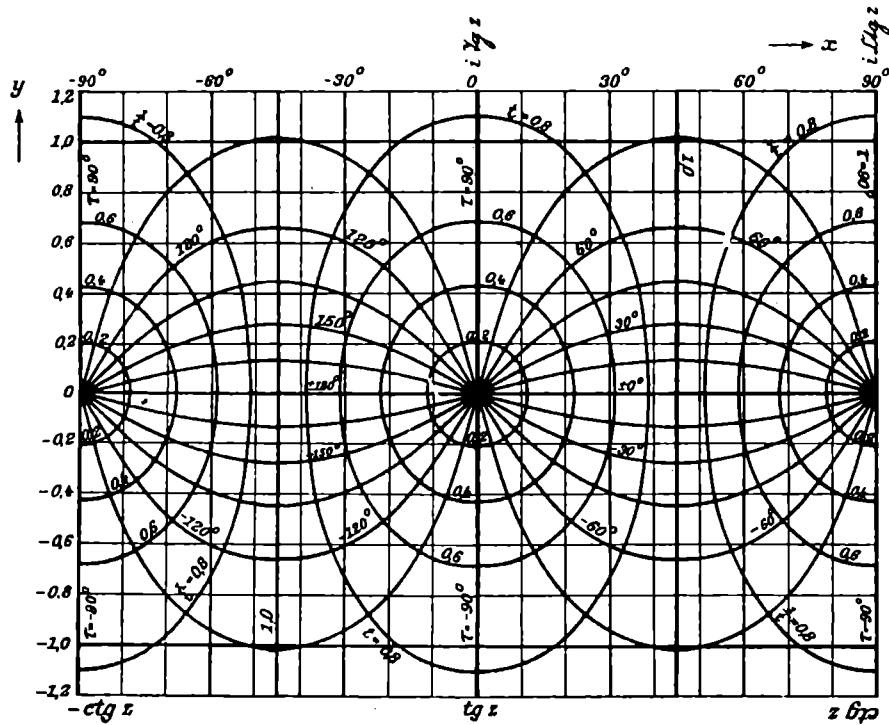
$se^{i\varphi} = \cos(x' + iy)$ $= \mathfrak{Cof}(-y + ix')$	
x'	φ
$-(90^\circ + x)$ $-(90^\circ - x)$ $90^\circ - x$ $90^\circ + x$	$180^\circ - \sigma$ σ $-\sigma$ $-(180^\circ - \sigma)$
$se^{-i\varphi} = \cos(x' - iy)$ $= \mathfrak{Cof}(y + ix')$	

b)

	$\Im \sin$
$se^{i(\frac{\pi}{2} - \sigma)}$	$y + ix$ $-y + i(\pi - x)$
$se^{i(\frac{\pi}{2} + \sigma)}$	$-y + ix$ $y + i(\pi - x)$

b)

	$\sin$	$\cos$	$\mathfrak{Cof}$
$se^{i\sigma}$	$x + iy$ $(\pi - x) - iy$	$(\frac{\pi}{2} - x) - iy$ $-(\frac{\pi}{2} - x) + iy$	$y + i(\frac{\pi}{2} - x)$ $-y - i(\frac{\pi}{2} - x)$
$se^{i(\pi - \sigma)}$	$-x + iy$ $-(\pi - x) - iy$	$(\frac{\pi}{2} + x) - iy$ $-(\frac{\pi}{2} + x) + iy$	$y + i(\frac{\pi}{2} + x)$ $-y - i(\frac{\pi}{2} + x)$

Fig. 69. $\operatorname{tg}(x + iy) = te^{iz}$

Höhenkarte des Tangensreliefs. Betrachtet man die Karte von verschiedenen Seiten, so erhält man, je nach Wahl des Nullpunktes, die Funktionen $\operatorname{tg} z$, $-\operatorname{ctg} z$, $i \operatorname{Tg} z$, $i \operatorname{Ctg} z$, $+\operatorname{ctg} z$.

Altitude chart of the tangent relief. If we consider the chart from different sides, we obtain the functions $\tan z$, $-\cot z$, $i \tanh z$, $i \coth z$, $+\cot z$, according to the choice of origin.

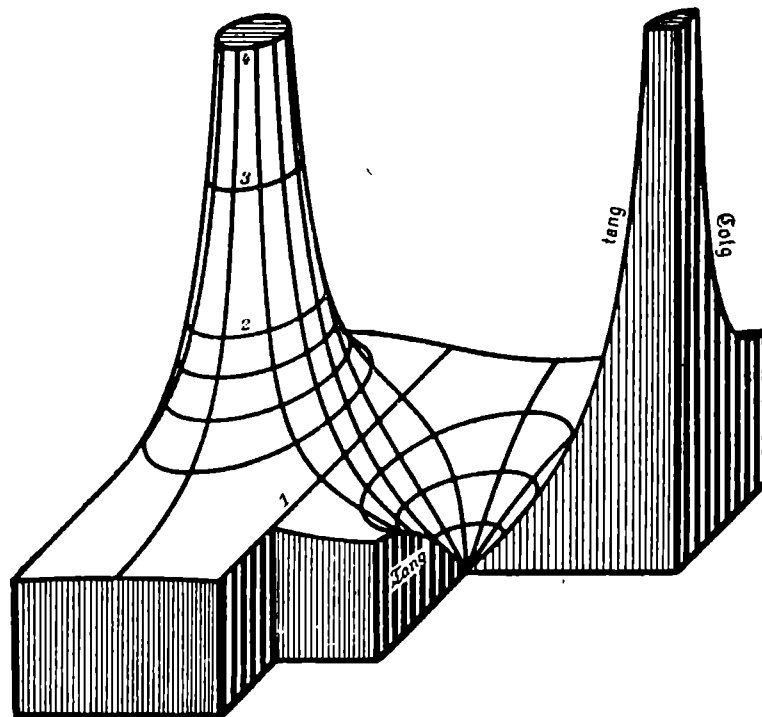
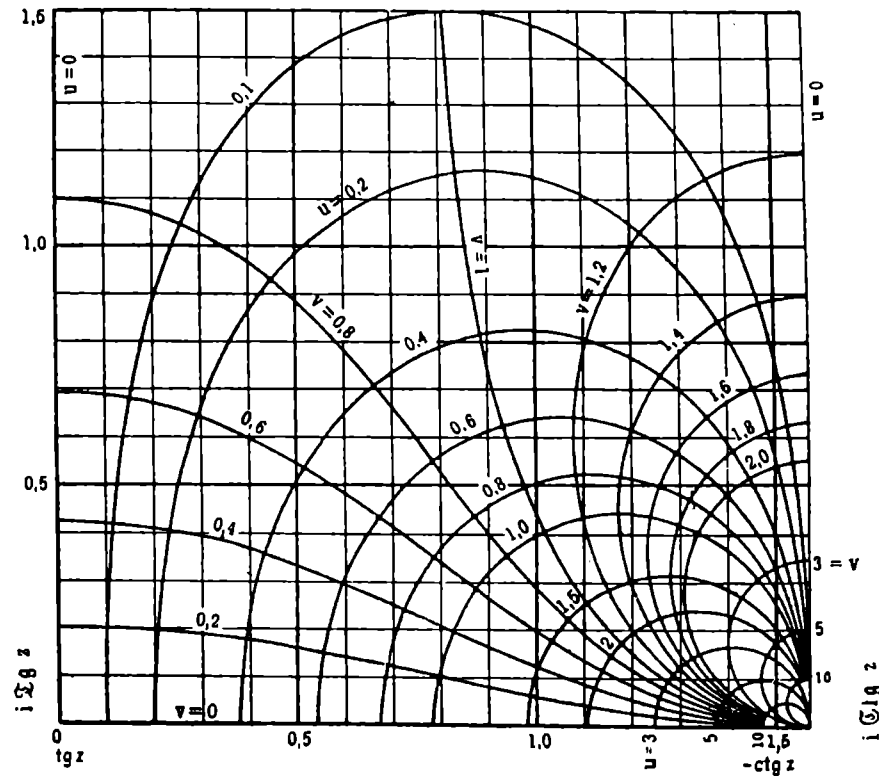


Fig. 70. Tangensrelief mit Höhenlinien und Falllinien

Fig. 70. Tangent relief with contours and lines of steepest gradient

Fig. 71. $\operatorname{tg} z = u + iv$. Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ in der z -EbeneFig. 71. $\operatorname{tg} z = u + iv$. Curves $u = \text{const.}$ and $v = \text{const.}$ in the z -plane

a)

$t^{-n} e^{i\varphi} =$		ctg $x' - iy$	$\mathfrak{C} \operatorname{tg}$ $y - ix'$	$\mathfrak{C} \operatorname{tg}$ $-y - ix'$
$t^n e^{i\varphi} =$		tg $x' + iy$	$\mathfrak{I} \operatorname{g}$ $y + ix'$	$\mathfrak{I} \operatorname{g}$ $-y + ix'$
x'	n	φ	φ	φ
$90^\circ + x$ $-(90^\circ - x)$	-1	$180^\circ - \tau$	$-(90^\circ - \tau)$	$-(90^\circ + \tau)$
$180^\circ - x$ $-x$	$+1$			
x $-(180^\circ - x)$	$+1$	τ	$90^\circ - \tau$	$90^\circ + \tau$
$90^\circ - x$ $-(90^\circ + x)$	-1			
$t^{-n} e^{-i\varphi} =$		ctg $x' + iy$	$\mathfrak{C} \operatorname{tg}$ $y + ix'$	$\mathfrak{C} \operatorname{tg}$ $-y + ix'$
$t^n e^{-i\varphi} =$		tg $x' - iy$	$\mathfrak{I} \operatorname{g}$ $y - ix'$	$\mathfrak{I} \operatorname{g}$ $-y - ix'$

$$\operatorname{tg}(x + iy) = t e^{i\varphi}$$

$$0 < x < 45^\circ$$

$$0 < y < \infty$$

$$0 < t < 1$$

$$0 < \tau < 90^\circ$$

Fortsetzung S. 143

Continued on p. 143

$$\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$$

 x in Radianen x in radians

t	$\tau = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,1974	0,1913	0,1732	0,1433	0,1027	0,0537	0,0000
0,4	0,3805	0,3719	0,3448	0,2963	0,2222	0,1208	0,0000
0,6	0,5404	0,5332	0,5094	0,4623	0,3766	0,2259	0,0000
0,8	0,6747	0,6710	0,6583	0,6314	0,5740	0,4276	0,0000
1,0	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	x

s. diese Seite, unten
see this page, below x in Graden x in degrees

t	$\tau = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,31	10,96	9,92	8,21	5,88	3,08	0,00
0,4	21,80	21,31	19,76	16,98	12,73	6,92	0,00
0,6	30,96	30,55	29,19	26,49	21,58	12,94	0,00
0,8	38,66	38,44	37,72	36,17	32,89	24,50	0,00
1,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	x

s. diese Seite, unten
see this page, below y in Radianen y in radians

t	$\tau = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0499	0,0974	0,1395	0,1732	0,1951	0,2027
0,4	0,0000	0,0902	0,1798	0,2665	0,3444	0,4019	0,4237
0,6	0,0000	0,1162	0,2368	0,3657	0,5030	0,6322	0,6931
0,8	0,0000	0,1290	0,2666	0,4239	0,6190	0,8794	1,0987
1,0	0,0000	0,1324	0,2747	0,4407	0,6585	1,0137	∞

s. S. 143
see p. 143 x in Radianen x in radians

t	$\tau = 75^\circ$	80°	85°	90°
0,80	0,4276	0,3286	0,1848	0,0000
0,82	0,4567	0,3578	0,2057	0,0000
0,84	0,4878	0,3904	0,2308	0,0000
0,86	0,5208	0,4269	0,2612	0,0000
0,88	0,5555	0,4675	0,2986	0,0000
0,90	0,5918	0,5123	0,3451	0,0000
0,92	0,6294	0,5613	0,4035	0,0000
0,94	0,6680	0,6141	0,4766	0,0000
0,96	0,7072	0,6699	0,5663	0,0000
0,98	0,7464	0,7275	0,6715	0,0000
0,990	0,7660	0,7565	0,7280	0,0000
0,999	0,7835	0,7825	0,7797	0,0000
$1-10^{-6}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000
$1-10^{-9}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000
1,00	0,7854	0,7854	0,7854	x

 x in Graden x in degrees

t	$\tau = 75^\circ$	80°	85°	90°
0,80	24,50	18,83	10,59	0,00
0,82	26,17	20,50	11,79	0,00
0,84	27,95	22,37	13,22	0,00
0,86	29,84	24,46	14,96	0,00
0,88	31,83	26,78	17,11	0,00
0,90	33,91	29,35	19,77	0,00
0,92	36,06	32,16	23,12	0,00
0,94	38,27	35,19	27,30	0,00
0,96	40,52	38,38	32,45	0,00
0,98	42,77	41,68	38,47	0,00
0,990	43,89	43,34	41,71	0,00
0,999	44,89	44,83	44,67	0,00
$1-10^{-6}$	45,00	45,00	45,00	0,00
$1-10^{-9}$	45,00	45,00	45,00	0,00
1,00	45,00	45,00	45,00	x

t	$\tau = 75^\circ$	80°	85°	90°
0,80	1,1371	1,0225	0,9409	0,9102
0,82	1,1087	0,9879	0,8991	0,8644
0,84	1,0830	0,9557	0,8584	0,8189
0,86	1,0603	0,9262	0,8191	0,7732
0,88	1,0405	0,8997	0,7814	0,7269
0,90	1,0238	0,8765	0,7455	0,6792
0,92	1,0102	0,8569	0,7124	0,6293
0,94	0,9996	0,8413	0,6831	0,5754
0,96	0,9922	0,8300	0,6595	0,5139
0,98	0,9878	0,8232	0,6441	0,4352
0,990	0,9867	0,8215	0,6401	0,3778
0,999	0,9864	0,8209	0,6387	0,2631
$1-10^{-8}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,1378
$1-10^{-9}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,0934
1,00	0,9864	0,8209	0,6387	0,0000

Genauer als unsern Figuren entnimmt man die Werte den auf S. 176 genannten Tafeln von Hawelka.

More accurate values can be obtained from the tables of Hawelka mentioned on p. 176.

Fortsetzung von S. 141 Continued from p. 141

	tg	ctg
$te^{i\tau}$	$x + iy$	$(\frac{\pi}{2} - x) - iy$
$te^{i(\pi-\tau)}$	$-x + iy$	$-(\frac{\pi}{2} - x) - iy$
$e^{i\tau}/t$	$(\frac{\pi}{2} - x) + iy$	$x - iy$
$e^{i(\pi-\tau)}/t$	$-(\frac{\pi}{2} - x) + iy$	$-x - iy$

	$\mathcal{I}g$	$\mathcal{C}tg$
$te^{i(\frac{\pi}{2}-\tau)}$	$y + ix$	$y - i(\frac{\pi}{2} - x)$
$te^{i(\frac{\pi}{2}+\tau)}$	$-y + ix$	$-y - i(\frac{\pi}{2} - x)$
$e^{i(\frac{\pi}{2}-\tau)}/t$	$y + i(\frac{\pi}{2} - x)$	$y - ix$
$e^{i(\frac{\pi}{2}+\tau)}/t$	$-y + i(\frac{\pi}{2} - x)$	$-y - ix$

Argument	sin	$\mathcal{I}g$	$\mathcal{C}tg$	ctg	tg	Sin	Coſ	cos	Erläuterung	Explanation
$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	Vorzeichenwechsel des imaginären Teils	Change of sign of the imaginary part
$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	Vorzeichenwechsel des reellen Teils	Change of sign of the real part
$90^\circ - x$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$				Übergang zum Kompl.-Winkel	Crossing to the compl. angle
$180^\circ - x$	$\lceil$	$\lceil$	$\lceil$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	$\rfloor$	Übergang zum Suppl.-Winkel	Crossing to the suppl. angle

Das Zeichen $\uparrow$ bedeutet, daß der Betrag der Funktion in seinen reziproken Wert übergeht. Umkehr des waagrechten Schenkels des rechten Winkels $\lceil$ bedeutet Vorzeichenwechsel des reellen Teils; Umkehr des senkrechten Schenkels bedeutet Vorzeichenwechsel des imaginären Teils.

The sign $\uparrow$ denotes that the absolute value of the function is transformed to the reciprocal value. Reversion of the horizontal side of the right-angle $\lceil$ signifies change of sign of the real part; reversion of the vertical side signifies change of sign of the imaginary part.

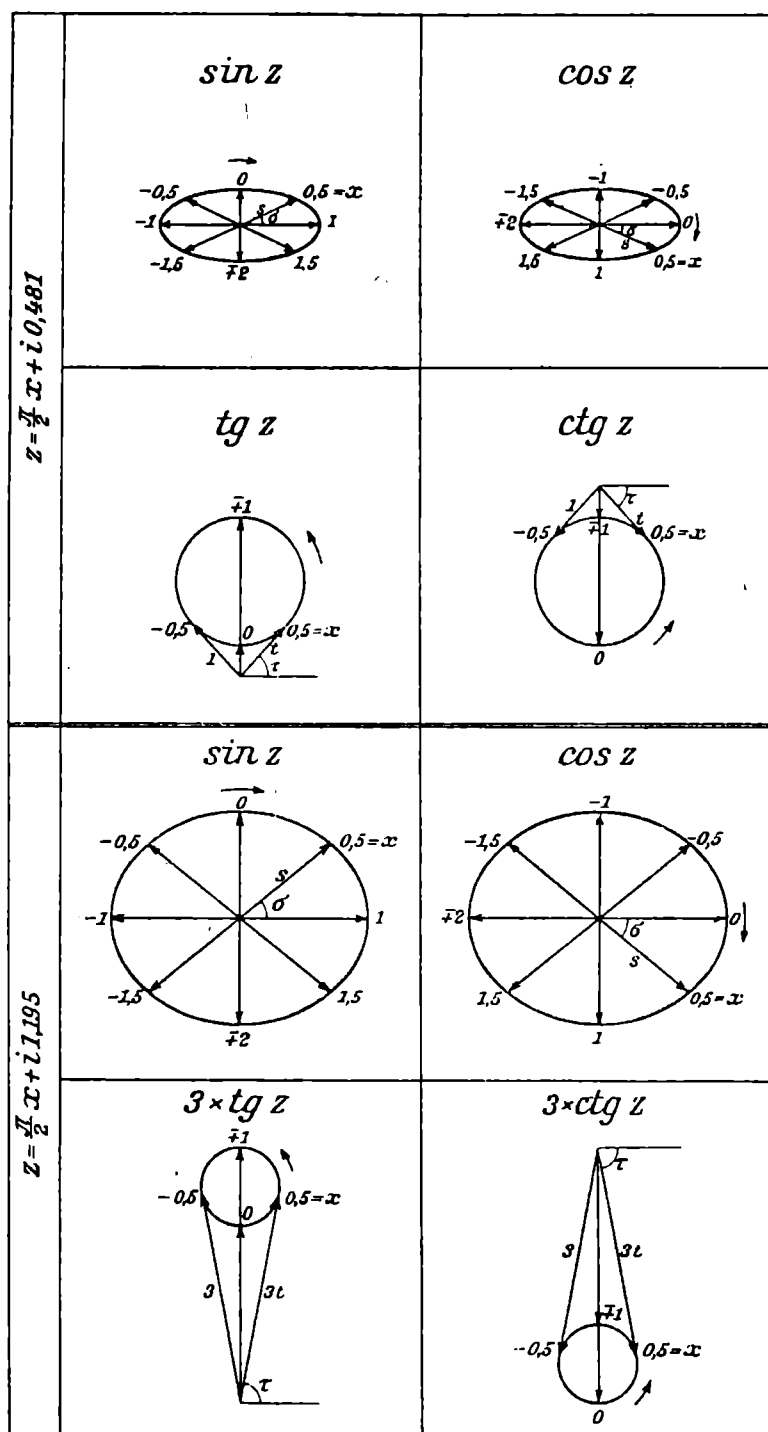


Fig. 72 a und b. Verhalten der Funktionen in den vier Quadranten oder Oktanten bei konstantem y , nämlich der Kreisfunktionen von $x + iy$ und der Hyperbelfunktionen von $y + ix$.

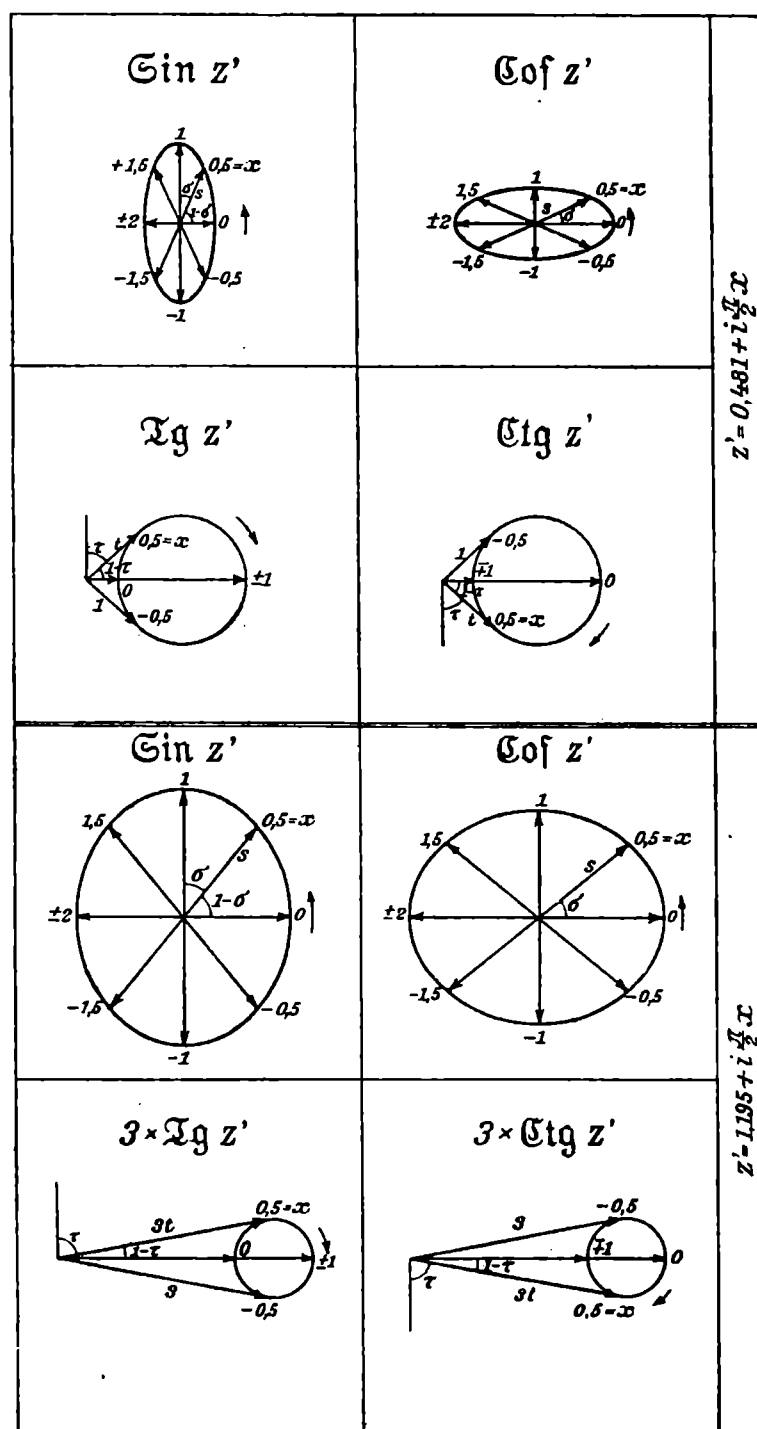


Fig. 72a and b. Behaviour of the functions in the four quadrants or octants for $y = \text{const.}$, viz. of the circular functions of $x + iy$ and of the hyperbolic functions of $y + ix$.

XIII. Die Funktion $\frac{\operatorname{tg}(i^{0,5}r)}{i^{0,5}r}$

XIII. The function $\frac{\operatorname{tg}(i^{0,5}r)}{i^{0,5}r}$

Es sei

| Let

$$hi^\eta = \frac{\operatorname{tg} z}{z} = \frac{\operatorname{tg}(r\sqrt{i})}{r\sqrt{i}}, \quad \text{wobei} \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = i^{0,5},$$

$$\text{where} \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = i^{0,5}.$$

Dann ist mit $\vartheta = r\sqrt{2}$ | Then we have with $\vartheta = r\sqrt{2}$

$$h \frac{\cos \eta}{\sin \eta} = \frac{1}{\vartheta} \frac{\operatorname{Cof} \vartheta \pm \sin \vartheta}{\operatorname{Cof} \vartheta + \cos \vartheta},$$

daher

| therefore

$$r^2 h^2 = \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{Cof}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{Sin}^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad rh = \frac{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}{\operatorname{Cof} \vartheta + \cos \vartheta}, \quad h = \frac{1}{\vartheta} \frac{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 2\vartheta - \cos^2 2\vartheta}}{\operatorname{Cof} \vartheta + \cos \vartheta},$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\operatorname{Cof} \vartheta - \sin \vartheta}{\operatorname{Cof} \vartheta + \sin \vartheta}, \quad \sin \eta = \sqrt{0,5} \frac{\operatorname{Cof} \vartheta - \sin \vartheta}{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}, \quad \cos \eta = \sqrt{0,5} \frac{\operatorname{Cof} \vartheta + \sin \vartheta}{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}.$$

Für $r \ll 1$ ist| For $r \ll 1$ we have

$$h = 1 - \frac{7}{90} r^4 + \frac{221}{22680} r^8 - \dots, \quad \frac{\pi}{2} \eta = \frac{r^2}{3} \left(1 - \frac{62}{945} r^4 + \frac{146}{22275} r^8 - \dots \right),$$

$$\frac{1}{h} = 1 + \frac{7}{90} r^4 - \frac{419}{113400} r^8 + \dots, \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{r^2}{3} \left(1 - \frac{1}{35} r^4 + \frac{142}{155925} r^8 - \dots \right),$$

$$\sin \eta = \frac{r^2}{3} \left(1 - \frac{53}{630} r^4 + \frac{12851}{1247400} r^8 - \dots \right), \quad \cos \eta = 1 - \frac{1}{18} r^4 + \frac{59}{7560} r^8 - \dots.$$

Aus

| From

$$rh i^{\eta-0,5} = \frac{1 - e^{-\vartheta} e^{i\vartheta}}{1 + e^{-\vartheta} e^{i\vartheta}}, \quad \operatorname{tg}(0,5^\perp - \eta) = \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{Cof} \vartheta}$$

folgt für $r \gg 1$ | follows for $r \gg 1$

$$rh \approx 1 - 2e^{-\vartheta} \cos \vartheta, \quad \eta \approx 0,5^\perp - \frac{4^\perp}{\pi} e^{-\vartheta} \sin \vartheta.$$

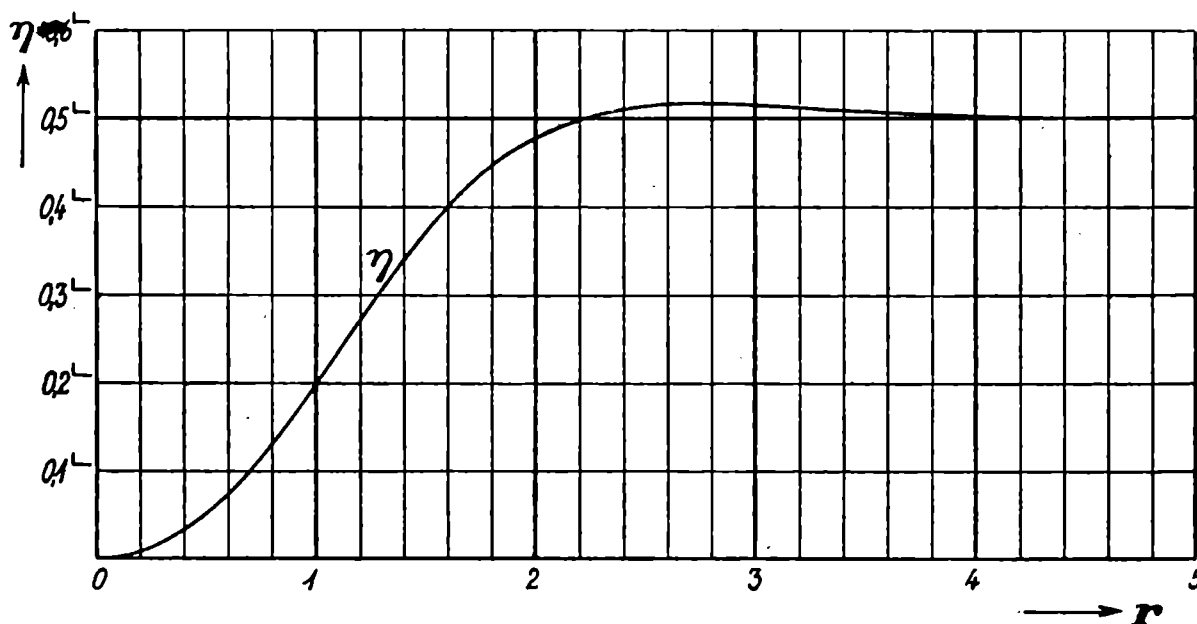


Fig. 73. $hi^\eta = \frac{\operatorname{tg}(i^{0,5}r)}{i^{0,5}r}$

Anwendung auf die Verdrängung des Wechselstroms in Metallstäben von rechteckigem Querschnitt, die in die Nuten eines Dynamoankers eingebettet sind.¹⁾

Application to the non-uniform distribution of the alternating current in conductors of rectangular section which are embedded in the slots of a dynamo armature.

Es sei ρ der spezifische Widerstand des Metalls (für warmes Kupfer $\rho \approx 2 \cdot 10^{-9}$ Ohm · cm), $\Pi = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\text{sek}}{\text{cm}}$ Ohm die Induktivitätskonstante des leeren Raumes, μ die Permeabilität (für Kupfer $\mu = 1$), $\omega/2\pi$ die Frequenz, und es werde $k^2 = i\omega \Pi \mu / \rho$ gesetzt. Beispielsweise ist für Kupfer bei 50 Hertz

Let ρ be the specific resistance of the metal (for warm copper $\rho = 2 \cdot 10^{-9}$ ohm · cm), $\Pi = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\text{sec}}{\text{cm}}$ ohm, the inductive constant of space, μ the permeability (for copper $\mu = 1$), $\omega/2\pi$ the frequency, and let $k^2 = i\omega \Pi \mu / \rho$. For example, for copper at 50 cycles per second,

$$\frac{\sqrt{i}}{k} = \sqrt{\frac{\rho}{\omega \Pi \mu}} \approx 7 \text{ Millimeter.}$$

Für die Längeneinheit des Stabes sei Q die mittlere Stromwärme, $\bar{W}$ die mittlere magnetische Energie (also $\omega 2 \bar{W}$ die Blindleistung) im Innern des Stabes, R_0 der Widerstand bei $\omega = 0$, und Λ_0/Π sei das Verhältnis der Höhe des Stabquerschnitts zur Nutbreite. Ferner bedeute J den quadratischen Mittelwert des eignen und J_1 des (phasengleichen) fremden Stromes (der durch andere, zwischen dem in Rede stehenden Stab und dem Nutengrund gelegene Stäbe fließt). Dann ist

In each unit of length of the conductor let $\bar{Q}$ be the mean power converted into heat, $\bar{W}$ the mean value of the magnetic energy stored within the conductor (so that $2 \omega \bar{W}$ is the reactive power), R_0 the resistance when $\omega = 0$, and Λ_0/Π the ratio of the height of the conductor cross-section to the slot width. Also let J be the root-mean-square value of its own current, and J_1 that of any external currents of the same phase flowing in conductors lying between it and the bottom of the slot. Then

$$\frac{\bar{Q} - i\omega 2 \bar{W}}{R_0} = J^2 E_R + J_1 (J_1 + J) F_R$$

mit
with

$$E_R = \frac{1}{h i^\eta}, \quad F_R = -4 z^2 h i^\eta,$$

und
and

$$\frac{2 \bar{W}}{\Lambda_0} + i \frac{\bar{Q}}{\omega \Lambda_0} = \frac{1}{3} J^2 E_L + J_1 (J_1 + J) F_L$$

mit
with

$$E_L = \frac{-3}{z^2 h i^\eta}, \quad F_L = h i^\eta.$$

Bei E (Eigenregung) ist z das Produkt aus h und der Querschnittshöhe; bei F (Fremderregung) ist z halb so groß. (Die Symmetrieebene des Feldes liegt bei Eigenregung auf der Staboberfläche, bei Fremderregung in der Stabmitte.) Entsprechend ist $\omega \Lambda_0 / R_0$ bei Eigenregung $= r^2$, bei Fremderregung $= (2r)^2$.

For E (self-excitation) z is the product of h and the height of the conductor cross-section; for F (external excitation) z is only half as great. (With self-excitation the plane of symmetry of the field lies on the conductor surface; with external excitation it lies in the middle of the conductor.) Accordingly $\omega \Lambda_0 / R_0 = r^2$ in the former case, and $= (2r)^2$ in the latter.

1) Siehe z. B. F. Emden, Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik (Braunschweig 1924 bei Vieweg), S. 90. — K. Küpfmüller, Einführung in die theoretische Elektrotechnik (Berlin 1932 bei Springer), S. 196; 2. Aufl., 1939, S. 217. — J. Fischer, Einführung in die klassische Elektrodynamik (Berlin 1936 bei Springer), S. 120.

In den beiden Sonderfällen $J_1 = 0$ und $J = 0$ kann man (mit $\Lambda_0 = 3L_{i0}$) schreiben: | In the two special cases $J_1 = 0$ and $J = 0$ we can (with $\Lambda_0 = 3L_{i0}$) write:

$$\begin{aligned} \frac{R' - i\omega L_{i0}'}{R_0} &= E_R, & \frac{R'' - i\omega \Lambda''}{R_0} &= F_R, \\ \frac{L_{i0}'}{L_{i0}} + i \frac{R'}{\omega L_{i0}} &= E_L, & \frac{\Lambda''}{\Lambda_0} + i \frac{R''}{\omega \Lambda_0} &= F_L. \end{aligned}$$

(Der reelle Teil von E_R wird gewöhnlich mit φ , von F_R mit ψ bezeichnet.) | (The real part of E_R is usually represented by φ and that of F_R by ψ .)

Es ist mit $\vartheta = r\sqrt{2}$

We have with $\vartheta = r\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \Re(E_R) &= \frac{\cos \eta}{h} = \frac{\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta + \sin \vartheta}{2 \operatorname{Cos} \vartheta - \cos \vartheta} = \varphi, \\ \Re(E_L) &= \frac{3 \sin \eta}{r^3 h} = \frac{3 \operatorname{Sin} \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta \operatorname{Cos} \vartheta - \cos \vartheta}, \\ \Re(F_R) &= 4r^2 h \sin \eta = 2\vartheta \frac{\operatorname{Sin} \vartheta - \sin \vartheta}{\operatorname{Cos} \vartheta + \cos \vartheta} = \psi, \\ \Re(F_L) &= h \cos \eta = \frac{1}{\vartheta} \frac{\operatorname{Sin} \vartheta + \sin \vartheta}{\operatorname{Cos} \vartheta + \cos \vartheta}; \end{aligned}$$

mithin, wenn $r \ll 1$ ist,

| thus, if $r \ll 1$,

$$\begin{aligned} \Re(E_R) &= 1 + \frac{1}{45}r^4 - \frac{1}{4725}r^8 - \dots, \\ \Re(E_L) &= 1 - \frac{2}{315}r^4 + \frac{2}{31185}r^8 - \dots, \\ \Re(F_R) &= \frac{4r^4}{3} \left(1 - \frac{17}{105}r^4 + \frac{1382}{51975}r^8 - \dots \right), \\ \Re(F_L) &= 1 - \frac{2}{15}r^4 + \frac{62}{2835}r^8 - \dots; \end{aligned}$$

und wenn $r \gg 1$ ist,

| and, if $r \gg 1$,

$$\begin{aligned} \Re(E_R) &= \frac{\vartheta}{2} [1 + 2\sqrt{2}e^{-\vartheta} \cos(\vartheta - 0,5\pi) + \dots], \\ \Re(E_L) &= \frac{3}{\vartheta} [1 - 2\sqrt{2}e^{-\vartheta} \sin(\vartheta - 0,5\pi) - \dots], \\ \Re(F_R) &= 2\vartheta [1 - 2\sqrt{2}e^{-\vartheta} \cos(\vartheta - 0,5\pi) + \dots], \\ \Re(F_L) &= \frac{1}{\vartheta} [1 + 2\sqrt{2}e^{-\vartheta} \sin(\vartheta - 0,5\pi) - \dots]. \end{aligned}$$

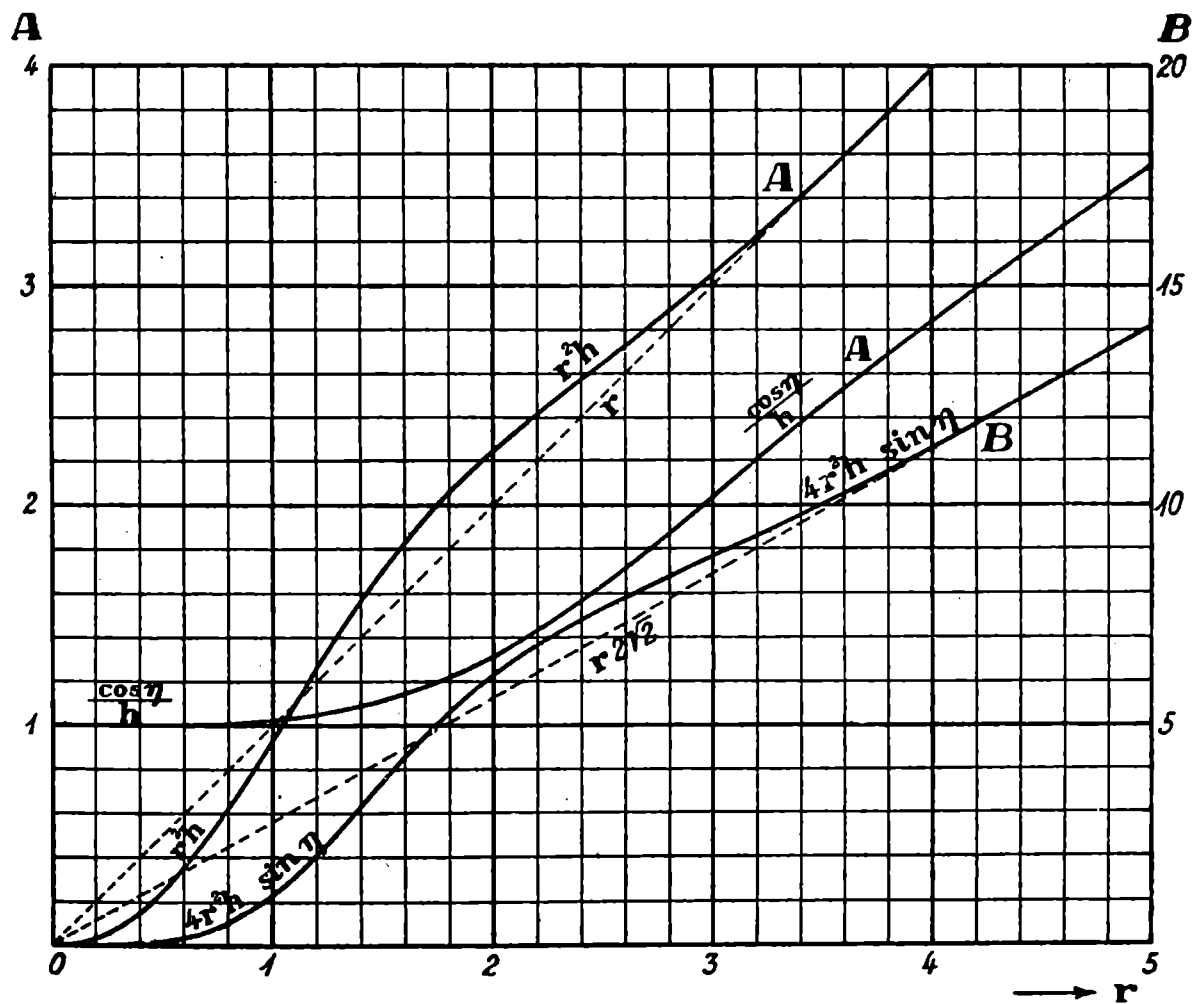
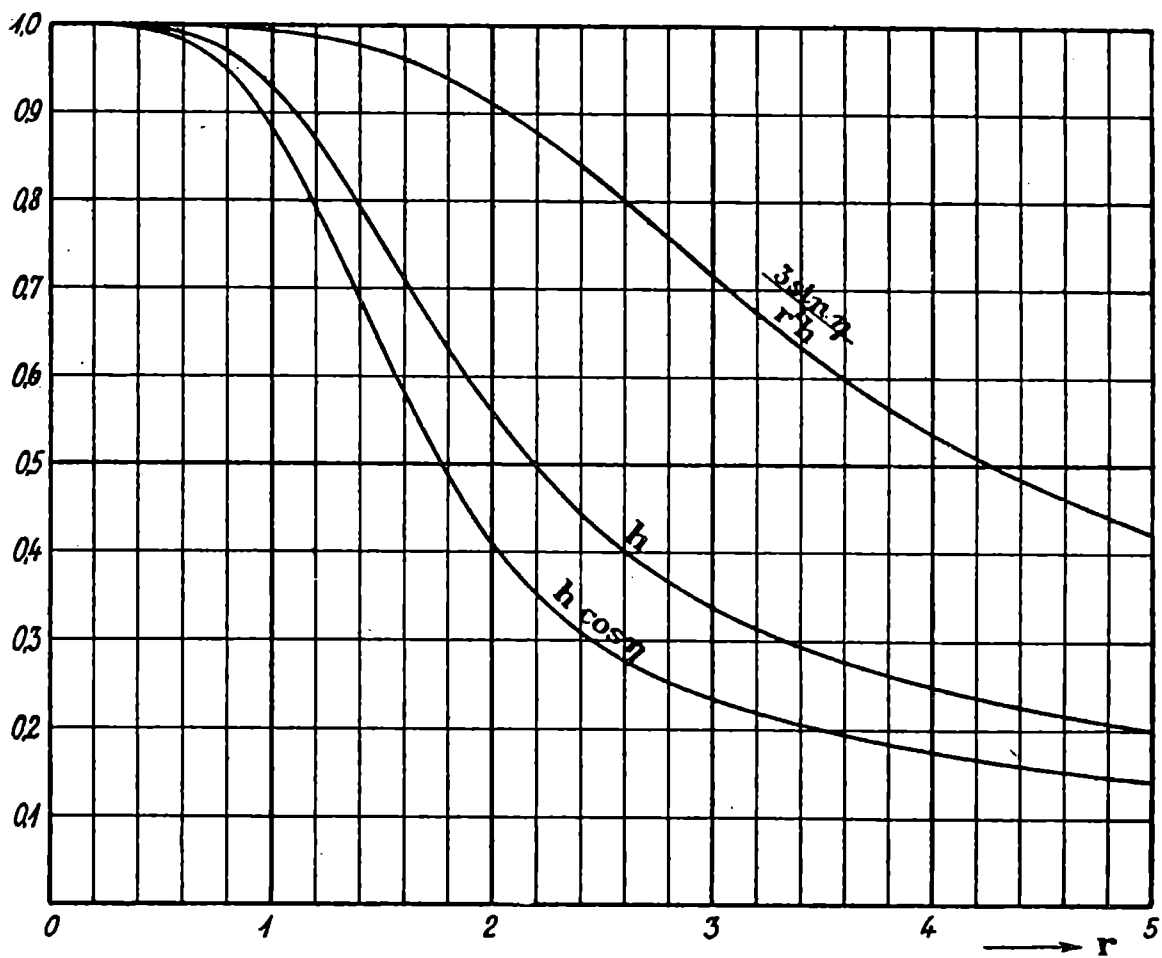


Fig. 74, 75. $h \eta = \frac{\operatorname{tg} i^{0,5} r}{i^{0,5} r}$

r	h	r	h	r	h	r	h	r	h
0,00	1,00 00	0,80	0,96 97 ¹⁵	1,60	0,7 133	2,75	0,3 747 ¹⁶⁴	5,25	0,1 9039 ³⁵⁶
0,10	1,00 00	81	82 ¹⁵	62	050 ^{41,5}	80	665 ¹⁵⁴	30	8861 ³⁵⁰
0,20	0,99 99	82	67 ¹⁶	64	0,6 968 ⁴¹	85	588 ¹⁴⁸	35	8686 ³⁴²
0,25	97	83	51 ¹⁶	66	886 ⁴¹	90	514 ¹⁴⁰	40	8515 ³³⁶
0,30	94	84	35 ¹⁶	68	804 ⁴¹	95	444 ¹³⁴	45	8347 ³³²
32	92	0,85	19 ¹⁷	1,70	722 ^{40,5}	3,00	377 ¹²⁸	5,50	8181 ³²⁶
34	90	86	02 ¹⁸	72	641 ⁴⁰	05	313 ¹²²	55	8018 ³²⁰
36	87	87	0,95 84 ¹⁸	74	561 ^{39,5}	10	252 ¹¹⁶	60	7858 ³¹⁴
38	84	88	66 ¹⁹	76	482 ^{39,5}	15	194 ¹¹²	65	7701 ³¹⁰
0,40	80	89	47 ¹⁹	78	403 ³⁹	20	138 ¹⁰⁸	70	7546 ³⁰⁴
41	78 ²	0,90	28 ¹⁹	1,80	325 ^{38,5}	3,25	084 ¹⁰²	5,75	7394 ²⁹⁸
42	76 ³	91	09 ²¹	82	248 ³⁸	30	033 ⁹⁸	80	7245 ²⁹⁴
43	73 ²	92	0,94 88 ²¹	84	172 ³⁸	35	0,2 9837 ⁹⁴⁴	85	7098 ²⁹⁰
44	71 ³	93	67 ²¹	86	096 ^{37,5}	40	9365 ⁹⁰⁶	90	6953 ²⁸⁴
0,45	68 ³	94	46 ²²	88	021 ^{36,5}	45	8912 ⁸⁷²	95	6811 ²⁸⁰
46	65 ³	0,95	24 ²²	1,90	0,5 948 ^{36,5}	3,50	8476 ⁸⁴⁰	6,00	6671 ²⁷⁶
47	62 ³	96	02 ²²	92	875 ^{35,5}	55	8056 ⁸¹⁰	05	6533 ²⁷²
48	59 ³	97	0,93 80 ²⁴	94	804 ^{35,5}	60	7651 ⁷⁸²	10	6397 ²⁶⁶
49	56 ⁴	98	56 ²⁴	96	733 ^{34,5}	65	7260 ⁷⁵⁴	15	6264 ²⁶²
0,50	52 ⁴	99	32 ²⁴	98	664 ^{34,5}	70	6883 ⁷²⁸	20	6133 ²⁵⁸
51	48 ⁴	1,00	08 ^{25,5}	2,00	595 ^{33,5}	3,75	6519 ⁷⁰⁶	6,25	6004 ²⁵⁴
52	44 ⁵	02	0,9 257 ²⁶	02	528 ³³	80	6166 ⁶⁸²	30	5877 ²⁵⁰
53	39 ⁴	04	205 ²⁷	04	462 ³³	85	5825 ⁶⁶²	35	5752 ²⁴⁶
54	35 ⁵	06	151 ^{28,5}	06	396 ³²	90	5494 ⁶⁴²	40	5629 ²⁴²
0,55	30 ⁵	08	094 ^{29,5}	08	332 ^{31,5}	95	5173 ⁶²⁶	45	5508 ²⁴⁰
56	25 ⁶	1,10	035 ^{30,5}	2,10	269 ³¹	4,00	4860 ⁶⁰⁸	6,50	5388 ²³⁶
57	19 ⁶	12	0,8 974 ³¹	12	207 ^{30,5}	05	4556 ⁵⁹²	55	5270 ²³²
58	13 ⁶	14	912 ³²	14	146 ³⁰	10	4260 ⁵⁷⁶	60	5154 ²²⁸
59	07 ⁶	16	848 ³³	16	086 ^{29,5}	15	3972 ⁵⁶⁰	65	5040 ²²⁶
0,60	01 ⁷	18	782 ³⁴	18	027 ²⁹	20	3692 ⁵⁴⁶	70	4928 ²²²
61	0,98 94 ⁷	1,20	714 ³⁵	2,20	0,4 969 ^{28,5}	4,25	3419 ⁵³⁴	6,75	4817 ²¹⁸
62	87 ⁷	22	644 ^{35,5}	22	912 ²⁸	30	3152 ⁵²⁰	80	4708 ²¹⁶
63	80 ⁷	24	573 ³⁶	24	856 ²⁷	35	2892 ⁵¹⁰	85	4699 ²¹²
64	73 ⁸	26	501 ³⁷	26	802 ²⁷	40	2637 ⁴⁹⁸	90	4494 ²⁰⁸
0,65	65 ⁹	28	427 ^{37,5}	28	748 ^{26,5}	45	2388 ⁴⁸⁶	95	4390 ²⁰⁶
66	56 ⁹	1,30	352 ^{38,5}	2,30	695 ^{25,5}	4,50	2145 ⁴⁷⁶	7,0	4287 ²⁰¹
67	47 ⁹	32	275 ³⁹	32	644 ^{25,5}	55	1907 ⁴⁶⁴	1	4086 ¹⁹⁶
68	38 ⁹	34	197 ³⁹	34	593 ²⁵	60	1675 ⁴⁵⁴	2	3890 ¹⁹¹
69	29 ¹⁰	36	119 ⁴⁰	36	543 ^{24,5}	65	1448 ⁴⁴⁶	3	3699 ¹⁸⁵
0,70	19 ¹⁰	38	039 ⁴⁰	38	494 ^{23,5}	70	1225 ⁴³⁸	4	3514 ¹⁸⁰
71	0,97 98 ¹¹	1,40	0,7 959 ^{40,5}	2,40	447 ^{23,5}	4,75	1006 ⁴²⁸	7,5	3334 ¹⁷⁶
72	87 ¹¹	42	878 ⁴¹	42	400 ²³	80	0792 ⁴²⁰	6	3158 ¹⁷¹
73	87 ¹²	44	796 ⁴¹	44	354 ^{22,5}	85	0582 ⁴¹²	7	2987 ¹⁶⁶
74	75 ¹²	46	714 ⁴¹	46	309 ²²	90	0376 ⁴⁰⁴	8	2821 ¹⁶³
0,75	63 ¹²	48	632 ^{41,5}	48	265 ²²	95	0174 ³⁹⁶	9	2658 ¹⁵⁸
76	51 ¹³	1,50	549 ^{41,5}	2,50	221 ²⁰⁸	5,00	0,1 9976 ³⁸⁸	8,0	0,1 2500
77	38 ¹³	52	466 ^{41,5}	55	117 ²⁰⁰	05	9782 ³⁸²	r	$\frac{1}{r}$
78	25 ¹⁴	54	383 ⁴²	60	017 ¹⁸⁸	10	9591 ³⁷⁴		
79	11 ¹⁴	56	299 ^{41,5}	65	0,3 923 ¹⁸⁰	15	9404 ³⁶⁸		
0,80	0,96 97	58	216 ^{41,5}	70	833 ¹⁷²	20	9220 ³⁶²		
		1,60	0,7 133	2,75	0,3 747	5,25	0,1 9039		

XIII. Die Funktion $hi^{\eta} = \frac{\lg i^{0,5}r}{i^{0,5}r}$
 XIII. The function

r	$r^2 h$	r	$r^2 h$	r	$r^2 h$	r	$r^2 h$	r
0,00	0,0 0000	0,50	0,2 4879	1,00	0,9308	2,00	2,2381	5,0
01	0010 ¹⁰	51	5874 ⁹⁹⁵	02	9632 ¹⁶²	02	2556 ^{87,5}	2
02	0040 ³⁰	52	6887 ¹⁰¹³	04	9956 ¹⁶²	04	2729 ^{86,5}	4
03	0090 ⁵⁰	53	7919 ¹⁰³²	06	1,0282 ¹⁶³	06	2900 ^{85,5}	6
04	0160 ⁷⁰	54	8969 ¹⁰⁵⁰	08	0607 ^{162,5}	08	3069 ^{84,5}	8
	90		107		163		83,5	
0,05	0250	0,55	0,3 004	1,10	0933	2,10	3236	6,0
06	0360 ¹¹⁰	56	112 ¹⁰⁸	12	1258 ^{162,5}	12	3402 ⁸³	2
07	0490 ¹³⁰	57	223 ¹¹¹	14	1582 ¹⁶²	14	3566 ⁸²	4
08	0640 ¹⁵⁰	58	335 ¹¹²	16	1906 ¹⁶²	16	3729 ^{81,5}	6
09	0810 ¹⁷⁰	59	449 ¹¹⁴	18	2228 ¹⁶¹	18	3890 ^{80,5}	8
	190		115		160	20	4050 ⁸⁰	
0,10	1000	0,60	564	1,20	2548		794	7,0
11	1210 ²¹⁰	61	682 ¹¹⁸	22	2866 ¹⁵⁹	2,25	4447 ⁷⁸²	2
12	1440 ²³⁰	62	801 ¹¹⁹	24	3182 ¹⁵⁸	30	4838 ⁷⁷⁶	4
13	1690 ²⁵⁰	63	921 ¹²⁰	26	3495 ^{156,5}	35	5226 ⁷⁷²	6
14	1960 ²⁷⁰	64	0,4 044 ¹²³	28	3805 ¹⁵⁵	40	5612 ⁷⁷²	8
	290		124		154	45	5998 ⁷⁷⁰	
0,15	2250	0,65	168	1,30	4113		770	8,0
16	2560 ³¹⁰	66	293 ¹²⁵	32	4417 ¹⁵²	2,50	6383 ⁷⁷²	
17	2890 ³³⁰	67	420 ¹²⁷	34	4718 ^{150,5}	55	6769 ⁷⁷⁶	
18	3240 ³⁵⁰	68	549 ¹²⁹	36	5015 ^{148,5}	60	7157 ⁷⁸²	
19	3610 ³⁷⁰	69	679 ¹³⁰	38	5309 ¹⁴⁷	65	7548 ⁷⁸⁶	
	390		132		145	70	7941 ⁷⁹⁴	
0,20	4000	0,70	811	1,40	5599		794	
21	4409 ⁴⁰⁹	71	945 ¹³⁴	42	5885 ¹⁴³	2,75	8338 ⁸⁰⁴	
22	4839 ⁴³⁰	72	0,5 080 ¹³⁵	44	6166 ^{140,5}	80	8740 ⁸¹²	
23	5289 ⁴⁵⁰	73	216 ¹³⁶	46	6443 ^{138,5}	85	9146 ⁸²²	
24	5759 ⁴⁷⁰	74	353 ¹³⁷	48	6716 ^{136,5}	90	9557 ⁸³²	
	490		139		134,5	95	9973 ⁸⁴²	
0,25	6249	0,75	492	1,50	6985		842	
26	6758 ⁵⁰⁹	76	632 ¹⁴⁰	52	7249 ¹³²	3,00	3,0394 ⁸⁵²	
27	7287 ⁵²⁹	77	774 ¹⁴²	54	7509 ¹³⁰	05	0820 ⁸⁶²	
28	7836 ⁵⁴⁹	78	917 ¹⁴³	56	7764 ^{127,5}	10	1251 ⁸⁷²	
29	8405 ⁵⁶⁹	79	0,6 061 ¹⁴⁴	58	8015 ^{125,5}	15	1687 ⁸⁸²	
	589		145		123	20	2128 ⁸⁹⁴	
0,30	8994	0,80	206	1,60	8261		894	
31	9603 ⁶⁰⁹	81	353 ¹⁴⁷	62	8503 ¹²¹	3,25	2575 ⁹⁰⁴	
32	0,1 0232 ⁶²⁹	82	500 ¹⁴⁷	64	8741 ¹¹⁹	30	3027 ⁹¹⁴	
33	0880 ⁶⁴⁸	83	649 ¹⁴⁹	66	8974 ^{116,5}	35	3484 ⁹²⁴	
34	1548 ⁶⁶⁸	84	799 ¹⁵⁰	68	9203 ^{114,5}	40	3946 ⁹³²	
	688		151		112,5	45	4412 ⁹⁴²	
0,35	2236	0,85	950	1,70	9428		942	
36	2943 ⁷⁰⁷	86	0,7 101 ¹⁵¹	72	9649 ^{110,5}	3,50	4883 ⁹⁵³	
37	3670 ⁷²⁷	87	254 ¹⁵³	74	9865 ¹⁰⁸	6	5836 ⁹⁶⁷	
38	4417 ⁷⁴⁷	88	408 ¹⁵⁴	76	2,0078 ^{106,5}	7	6803 ⁹⁸¹	
39	5183 ⁷⁶⁶	89	562 ¹⁵⁴	78	0287 ^{104,5}	8	7784 ¹⁰⁰	
	785		156		103	9	878 ¹⁰⁰	
0,40	5968	0,90	718	1,80	0493		100	
41	6773 ⁸⁰⁵	91	874 ¹⁵⁶	82	0695 ¹⁰¹	4,0	978 ¹⁰⁰	
42	7597 ⁸²⁴	92	0,8 031 ¹⁵⁷	84	0894 ^{99,5}	1	4,078 ¹⁰¹	
43	8441 ⁸⁴⁴	93	189 ¹⁵⁸	86	1090 ⁹⁸	2	179 ^{101,5}	
44	9304 ⁸⁶³	94	347 ¹⁵⁸	88	1282 ⁹⁶	4	382 ¹⁰²	
	882		159		95	6	586 ^{102,5}	
0,45	0,2 0186	0,95	506	1,90	1472		101,5	
46	1087 ⁹⁰¹	96	665 ¹⁵⁹	92	1659 ^{93,5}	8	791 ^{101,5}	
47	2007 ⁹²⁰	97	825 ¹⁶⁰	94	1843 ⁹²	5,0	4,994	
48	2946 ⁹³⁹	98	986 ¹⁶¹	96	2025 ⁹¹			
49	3903 ⁹⁵⁷	99	0,9 147 ¹⁶¹	98	2204 ^{89,5}			
	976		161		88,5			
0,50	0,2 4879	1,00	0,9 308	2,00	2,2381			

r	η	r	η	r	η	r	η	r	η
	Rechte		Rechte		Rechte		Rechte		Rechte
0,00	0,00 000	0,50	0,0 5284 ²¹¹	1,00	0,1 9953 ^{353,5}	2,00	0,47 68 ¹³	4,0	0,50 26 ⁸
01	002 ²	51	5495 ²¹⁵	02	0,2 0660 ^{355,5}	02	94 ^{12,5}	1	18 ⁷
02	008 ¹¹	52	5710 ²²⁰	04	1371 ³⁵⁷	04	0,48 19 ¹²	2	11 ⁵
03	019 ¹⁵	53	5930 ²²³	06	2085 ³⁵⁸	06	43 ^{11,5}	3	06 ⁴
04	034 ¹⁹	54	6153 ²²⁷	08	2801 ³⁵⁸	08	66 ¹¹	4	02 ⁴
0,05	053 ²³	0,55	6380 ²³¹	1,10	3517 ^{358,5}	2,10	88 ^{10,5}	4,5	0,499 8 ²
06	076 ²⁸	56	6611 ²³⁵	12	4234 ^{358,5}	12	0,49 09 ¹⁰	6	6 ²
07	104 ³²	57	6846 ²³⁹	14	4951 ³⁵⁸	14	29 ^{9,5}	7	4 ¹
08	136 ³⁶	58	7085 ²⁴³	16	5667 ³⁵⁷	16	48 ⁹	8	3 ¹
09	172 ⁴⁰	59	7328 ²⁴⁷	18	6381 ³⁵⁶	18	66 ^{8,5}	9	2 ⁰
0,10	212 ⁴⁵	0,60	7575 ²⁵⁰	1,20	7093 ^{354,5}	2,20	83 ⁸	5,0	2 ¹
11	257 ⁴⁹	61	7825 ²⁵⁴	22	7802 ^{352,5}	22	99 ^{7,5}	2	3 ¹
12	306 ⁵³	62	8079 ²⁵⁷	24	8507 ³⁵⁰	24	0,50 14 ^{7,5}	4	4 ¹
13	359 ⁵⁷	63	8336 ²⁶¹	26	9207 ³⁴⁷	26	29 ^{6,5}	6	5 ²
14	416 ⁶¹	64	8597 ²⁶⁴	28	9901 ^{34,5}	28	42 ^{6,5}	8	7 ¹
0,15	477 ⁶⁶	0,65	8861 ²⁶⁸	1,30	0,3 059 ³⁴	2,30	55 ⁶	6,0	8 ¹
16	543 ⁷⁰	66	9129 ²⁷²	32	127 ^{33,5}	32	67 ^{5,5}	2	9 ¹
17	613 ⁷⁴	67	9401 ²⁷⁵	34	194 ^{33,5}	34	78 ⁵	4	0,500 0 ¹
18	687 ⁷⁹	68	9676 ²⁷⁸	36	261 ^{32,5}	36	88 ⁵	7,0	0
19	766 ⁸³	69	9954 ²⁸²	38	326 ^{32,5}	38	98 ^{4,5}	8,0	0
0,20	849 ⁸⁷	0,70	0,1 0236 ²⁸⁵	1,40	391 ³²	2,40	0,51 07 ⁴	∞	0,5 000
21	936 ⁹¹	71	0521 ²⁸⁸	42	455 ^{30,5}	42	15 ⁴		
22	0,01 027 ⁹⁵	72	0809 ²⁹²	44	518 ^{30,5}	44	23 ^{3,5}		
23	122 ¹⁰⁰	73	1101 ²⁹⁵	46	579 ^{30,5}	46	30 ^{3,5}		
24	222 ¹⁰⁴	74	1396 ²⁹⁸	48	640 ^{29,5}	48	37 ^{2,5}		
0,25	326 ¹⁰⁸	0,75	1694 ³⁰¹	1,50	699 ²⁹	2,50	42 ²⁶		
26	434 ¹¹²	76	1995 ³⁰⁴	52	757 ^{28,5}	55	55 ¹⁸		
27	546 ¹¹⁷	77	2299 ³⁰⁷	54	814 ²⁸	60	64 ¹⁴		
28	663 ¹²¹	78	2606 ³¹⁰	56	870 ²⁷	65	71 ⁸		
29	784 ¹²⁵	79	2916 ³¹³	58	924 ^{26,5}	70	75 ⁴		
0,30	909 ¹²⁹	0,80	3229 ³¹⁶	1,60	977 ²⁶	2,75	77 ⁰		
31	0,02 038 ¹³³	81	3545 ³¹⁸	62	0,4 029 ^{25,5}	80	77 ²		
32	171 ¹³⁷	82	3863 ³²⁰	64	080 ^{24,5}	85	76 ⁶		
33	308 ¹⁴²	83	4183 ³²³	66	129 ²⁴	90	73 ⁸		
34	450 ¹⁴⁶	84	4506 ³²⁶	68	177 ^{23,5}	95	69 ¹²		
0,35	596 ¹⁵⁰	0,85	4832 ³²⁸	1,70	224 ^{22,5}	3,0	63 ¹³		
36	746 ¹⁵⁴	86	5160 ³³⁰	72	269 ²²	1	50 ¹⁴		
37	900 ¹⁵⁹	87	5490 ³³³	74	313 ^{21,5}	2	36 ¹⁶		
38	0,03 059 ¹⁶³	88	5823 ³³⁵	76	356 ²¹	3	20 ¹⁷		
39	222 ¹⁶⁸	89	6158 ³³⁷	78	398 ²⁰	4	03 ¹⁵		
0,40	390 ¹⁷²	0,90	6495 ³³⁸	1,80	438 ^{19,5}	3,5	0,50 88 ¹⁵		
41	562 ¹⁷⁶	91	6833 ³⁴⁰	82	477 ^{18,5}	6	73 ¹⁴		
42	738 ¹⁸⁰	92	7173 ³⁴²	84	514 ¹⁸	7	59 ¹²		
43	918 ¹⁸⁴	93	7515 ³⁴⁴	86	550 ^{17,5}	8	47 ¹¹		
44	0,04 102 ¹⁸⁷	94	7859 ³⁴⁶	88	585 ¹⁷	9	36 ¹⁰		
0,45	289 ¹⁹¹	0,95	8205 ³⁴⁷	1,90	619 ¹⁶	4,0	0,50 26		
46	480 ¹⁹⁵	96	8552 ³⁴⁸	92	651 ^{15,5}				
47	675 ¹⁹⁹	97	8900 ³⁵⁰	94	682 ¹⁵				
48	874 ²⁰³	98	9250 ³⁵¹	96	712 ¹⁴				
49	0,05 077 ²⁰⁷	99	9601 ³⁵²	98	740 ¹⁴				
0,50	0,05 284	1,00	0,1 9953	2,00	0,4 768				

r	$\frac{\cos \eta}{h}$	r	$\frac{\cos \eta}{h}$	r	$\frac{\cos \eta}{h}$	r	$\frac{3 \sin \eta}{r^2 h}$	r	$\frac{3 \sin \eta}{r^2 h}$	r	$\frac{3 \sin \eta}{r^2 h}$
0,0	1,0 000	1,50	1,1 073	2,50	1, 6372	0,0	1,00 00	3,00	0,7 156	5,50	0,3 854
1	000	52	129 ²⁸	55	6753 ⁷⁶²	1	00	05	051 ²¹⁰	55	819 ⁶⁸
2	000	54	186 ^{28,5}	60	7142 ⁷⁷⁸	2	00	10	0,6 947 ²⁰⁸	60	785 ⁶⁸
3	002 ²	56	246 ³⁰	65	7536 ⁷⁸⁸	3	0,99 99	15	844 ²⁰⁶	65	752 ⁶⁶
4	006 ⁴	58	307 ^{30,5}	70	7935 ⁷⁹⁸	4	98	20	742 ²⁰⁴	70	719 ⁶⁶
			32		806				202		
0,45	009	1,60	371	2,75	8338	5	96	3,25	641 ¹⁹⁸	5,75	687 ⁶⁴
50	014 ¹⁰	62	436 ^{32,5}	80	8745 ⁸¹⁴	6	92	30	542 ¹⁹⁸	80	655 ⁶²
55	020 ¹²	64	504 ³⁴	85	9155 ⁸²⁰	7	85 ¹⁰	35	445 ¹⁹⁴	85	624 ⁶²
60	029 ¹⁸	66	574 ³⁵	90	9567 ⁸²⁴			40	350 ¹⁹⁰	90	593 ⁶²
65	040 ²²	68	646 ³⁶	95	9981 ⁸²⁸	0,75	80 ¹²	45	257 ¹⁸⁶	95	563 ⁶⁰
70	053 ²⁶		37		830	80	74 ¹⁴		184		
75	070 ³⁴	1,70	720 ³⁸	3,00	2, 0396 ⁸³⁰	85	67 ¹⁶	3,50	165 ¹⁸⁰	6,00	534 ⁶⁰
		72	796 ³⁹	05	0811 ⁸²⁸	90	59 ²⁰	55	075 ¹⁷⁶	05	504 ⁵⁶
0,80	091 ^{4,5}	74	874 ^{40,5}	10	1225 ⁸²⁸	95	49 ²⁴	60	0,5 987 ¹⁷²	10	476 ⁵⁶
82	100 ⁵	76	955 ⁴¹	15	1639 ⁸²⁶	1,00	37 ²⁶	65	901 ¹⁶⁸	15	448 ⁵⁶
84	110 ^{5,5}	78	1,2 037 ^{42,5}	20	2052 ⁸²²	05	24 ³⁰	70	817 ¹⁶⁴	20	420 ⁵⁴
86	121 ⁶					10	09 ³⁶				
88	133 ⁶	1,80	122	3,25	2463 ⁸²⁰	15	0,9 891 ⁴⁰	3,75	735 ¹⁶⁰	6,25	393 ⁵⁴
		82	209 ^{43,5}	30	2873 ⁸¹⁴	20	871 ⁴⁴	80	655 ¹⁵⁶	30	366 ⁵²
0,90	145 ^{6,5}	84	298 ^{46,5}	35	3280 ⁸¹⁰			85	577 ¹⁵²	35	340 ⁵²
92	158 ⁷	86	390 ⁴⁸	40	3685 ⁸⁰⁴	1,25	849 ⁵⁰	90	501 ¹⁴⁸	40	314 ⁵²
94	172 ^{7,5}	88	483 ⁴⁸	45	4087 ⁸⁰⁰	30	824 ⁵⁶	95	427 ¹⁴⁴	45	288 ⁵⁰
96	187 ⁸					35	796 ⁶²				
98	203 ^{8,5}	1,90	579 ⁴⁹	3,50	4487 ⁷⁹⁴	40	765 ⁶⁸	4,00	355 ¹⁴⁰	6,50	263 ⁵⁰
		92	677 ⁵⁰	55	4884 ⁷⁸⁸	45	731 ⁷⁴	05	285 ¹³⁶	55	238 ⁴⁸
1,00	220 ⁹	94	777 ⁵¹	60	5278 ⁷⁸²			10	217 ¹³⁴	60	214 ⁵⁰
02	238 ^{9,5}	96	879 ^{52,5}	65	5669 ⁷⁷⁶	1,50	694 ⁸⁰	15	150 ¹³⁰	65	189 ⁴⁶
04	257 ¹⁰	98	984 ⁵³	70	6057 ⁷⁷²	60	610 ⁸⁸	20	085 ¹²⁶	70	166 ⁴⁸
06	277 ¹¹					65	562 ⁹⁶				
08	299 ¹¹	2,00	1,3 090 ^{54,5}	75	6443 ⁷⁶⁴	70	511 ¹⁰²	4,25	022 ¹²⁴	6,75	142 ⁴⁶
		02	199 ⁵⁵	80	6825 ⁷⁵⁷			30	0,4 960 ¹²⁰	80	119 ⁴⁴
1,10	321 ¹²	04	309 ^{56,5}	90	7582 ⁷⁴⁶	1,75	456 ¹¹⁸	35	900 ¹¹⁶	85	097 ⁴⁶
12	345 ^{12,5}	06	422 ^{57,5}	4,0	8328 ⁷³⁷	80	397 ¹²⁴	40	842 ¹¹⁴	90	074 ⁴⁴
14	370 ¹³	08	537 ^{58,5}	1	9065 ⁷²⁸	85	335 ¹³²	45	785 ¹¹²	95	052 ⁴⁴
16	396 ^{13,5}					90	269 ¹⁴⁰				
18	423 ^{14,5}	2,10	654 ^{59,5}	2	9793 ⁷²	95	199 ¹⁴⁸	4,50	729 ¹⁰⁸	7,0	030 ⁴²
		12	773 ^{60,5}	3	3, 051 ⁷²			55	675 ¹⁰⁶	1	0,2 988 ⁴²
1,20	452 ¹⁵	14	894 ^{61,5}	4	123 ⁷¹			60	622 ¹⁰²	2	946 ⁴⁰
22	482 ¹⁶	16	1,4 017 ^{62,5}	5	194 ⁷⁰	2,00	125 ¹⁵⁴	65	571 ¹⁰²	3	906 ³⁹
24	514 ^{16,5}	18	142 ^{63,5}	6	264 ^{70,5}	05	048 ¹⁶²	70	520 ⁹⁸	4	867 ³⁸
26	547 ^{17,5}					10	0,8 967 ¹⁶⁸				
28	582 ¹⁸	2,20	269 ⁶⁴	5,0	544 ^{69,5}	15	883 ¹⁷⁴	4,75	471 ⁹⁶	7,5	829 ³⁸
		22	397 ^{65,5}	2	683 ^{70,5}	20	796 ¹⁸⁰	80	423 ⁹²	6	791 ³⁶
1,30	618 ¹⁹	24	528 ⁶⁶	4	823 ^{69,5}			85	377 ⁹²	7	755 ³⁵
32	656 ^{19,5}	26	660 ⁶⁷	6	962 ^{70,5}	2,25	706 ¹⁸⁶	90	331 ⁹⁰	8	720 ³⁵
34	695 ^{20,5}	28	794 ⁶⁸	8	4, 103 ⁷⁰	30	613 ¹⁹⁰	95	286 ⁸⁶	9	685 ³³
36	736 ^{21,5}					35	518 ¹⁹⁶				
38	779 ^{22,5}	2,30	930 ^{68,5}	6,0	243 ^{70,5}	40	420 ²⁰⁰	5,00	243 ⁸⁶	8,0	0,2 652
		32	1,5 067 ^{69,5}	2	384 ^{70,5}	45	320 ²⁰²	05	200 ⁸⁴		2,121 32
1,40	824 ²³	34	206 ^{70,5}	4	525 ^{70,5}			10	158 ⁸²	r	r
42	870 ²⁴	36	347 ⁷¹	6	666 ⁷¹	2,50	219 ²⁰⁸	15	117 ⁸⁰		
44	918 ^{24,5}	38	489 ⁷²	8	808 ^{71,5}	55	115 ²⁰⁸	20	077 ⁷⁸		
46	968 ²⁵					60	011 ²¹²				
48	1,1 020 ^{26,5}	2,40	633 ^{72,5}	7,0	949 ⁷⁰⁸	65	0,7 905 ²¹⁴	5,25	038 ⁷⁶		
		42	778 ^{73,5}	8,0	5, 657	70	798 ²¹⁴	30	000 ⁷⁶		
1,50	1,1 073	44	925 ⁷⁴	r	0, 70711 r			35	0,3 962 ⁷²		
		46	1,6 073 ^{74,5}			2,75	691 ²¹⁴	40	926 ⁷⁴		
		48	222 ⁷⁵			80	584 ²¹⁶	45	889 ⁷⁰		
		2,50	1,6 372			85	476 ²¹⁴	5,50	0,3 854		
						90	369 ²¹⁴				
						95	262 ²¹²				
						3,00	0,7 156				

r	$4r^2h \sin \eta$	r	$4r^2h \sin \eta$	r	$4r^2h \sin \eta$	r	$4r^2h \sin \eta$	r	$4r^2h \sin \eta$
0,00	0,000 00	0,50	0,0 825 68	1,00	1, 1479 399	1,60	4, 272 53	2,75	8, 235 232
01	00	51	893 71	01	1878 407	62	378 52	80	8, 351 232
02	00	52	964 75	02	2285 414	64	482 51,5	90	8, 583 231
03	00	53	0,1 039 80	03	2699 421	66	585 50,5	3,0	8, 814 231
04	01 1 0	54	119 84	04	3120 428	68	686 50	1	9, 045 234
0,05	01 1	0,55	203 88	1,05	3548 436	1,70	786 49	2	9, 279 237
06	02 1	56	291 93	06	3984 442	72	884 48,5	3	9, 516 240
07	03 2	57	384 98	07	4426 448	74	981 48	4	9, 756 246
08	05 3	58	482 103	08	4874 455	76	5, 077 46,5	3,5	10, 002 249
09	08 5	59	585 108	09	5329 462	78	170 46	6	10, 251 255
0,10	13 6	0,60	693 113	1,10	5791 468	1,80	262 45,5	7	10, 506 259
11	19 8	61	806 119	11	6259 474	82	353 44,5	8	10, 765 263
12	27 11	62	925 124	12	6733 480	84	442 43,5	9	11, 028 268
13	38 13	63	0,2 049 129	13	7213 486	86	529 43	4,0	11, 296 271
14	51 16	64	178 135	14	7699 491	88	615 42	1	11, 567 275
0,15	67 20	0,65	313 142	1,15	8190 497	1,90	699 41	2	11, 842 277
16	87 24	66	455 147	16	8687 502	92	781 40,5	3	12, 119 280
17	0,00 111 29	67	602 154	17	9189 507	94	862 39,5	4	12, 399 282
18	140 34	68	756 159	18	9696 512	96	941 39	4,5	12, 681 283
19	174 4	69	915 167	19	2, 0208 516	98	6, 019 38	6	12, 964 285,5
0,20	21 5	0,70	0,3 082 173	1,20	0724 520	2,00	095 37,5	8	13, 535 286,5
21	26 5	71	255 179	21	1244 525	02	170 37	5,0	14, 108 2868
22	31 6	72	434 186	22	1769 529	04	244 36	5,5	15, 542 2854
23	37 7	73	620 193	23	2298 533	06	316 35	6,0	16, 969 2838
24	44 8	74	813 200	24	2831 536	08	386 35	6,5	18, 388 2828
0,25	52 9	0,75	0,4 013 207	1,25	3367 540	2,10	456 34	7,0	19, 802 2826
26	61 10	76	220 215	26	3907 543	12	524 33,5	7,5	21, 215 2826
27	71 11	77	435 222	27	4450 546	14	591 32,5	8,0	22, 628 2826
28	82 12	78	657 229	28	4996 548	16	656 32,5	r	2, 828 43 r
29	94 14	79	886 236	29	5544 550	18	721 31,5		
0,30	0,0 108 15	0,80	0,5 122 244	1,30	6094 553	2,20	784 31		
31	123 17	81	366 252	31	6647 555	22	846 31		
32	140 18	82	618 259	32	7202 557	24	908 30		
33	158 20	83	877 267	33	7759 558	26	968 29,5		
34	178 22	84	0,6 144 275	34	8317 560	28	7, 027 29		
0,35	200 23	0,85	419 282	1,35	8877 560	2,30	085 29		
36	223 26	86	701 290	36	9437 562	32	143 28,5		
37	249 28	87	991 298	37	9999 562	34	200 28		
38	277 30	88	0,7 289 306	38	3, 0561 563	36	256 27,5		
39	307 33	89	595 314	39	1124 57	38	311 27		
0,40	340 35	0,90	909 322	1,40	169 56	2,40	365 27		
41	375 38	91	0,8 231 330	42	281 56,5	42	419 26,5		
42	413 41	92	561 338	44	394 56	44	472 26		
43	454 43	93	899 345	46	506 56	46	524 26		
44	497 47	94	0,9 244 353	48	618 55,5	48	576 25,5		
0,45	544 49	0,95	597 361	1,50	729 55	2,50	627 252		
46	593 53	96	958 369	52	839 55	55	753 248		
47	646 56	97	1,0 327 376	54	949 54,5	60	877 242		
48	702 60	98	703 384	56	4, 058 54	65	998 238		
49	762 63	99	1,1 087 392	58	166 53	70	8, 117 236		
0,50	0,0 825	1,00	1,1 479	1,60	4, 272	2,75	8, 235		

r	$h \cos \eta$	r	$h \cos \eta$	r	$h \cos \eta$	r	$h \cos \eta$	r	$h \cos \eta$
0,00	1,0 000	1,20	0,7 937 ⁵²	2,20	0,3 523 ^{24,5}	3,20	0,2 1709 ^{69,5}	5,00	0,1 4142 ²⁷⁶
05	000	22	833 ^{52,5}	22	474 ²⁴	22	1570 ⁶⁸	05	4004 ²⁷⁰
10	0,9 999	24	728 ⁵³	24	426 ²³	24	1434 ⁶⁷	10	3869 ²⁶⁶
15	999	26	622 ⁵⁴	26	380 ^{22,5}	26	1300 ⁶⁶	15	3736 ²⁶²
20	998 ⁶	28	514 ⁵⁴	28	335 ²²	28	1168 ^{64,5}	20	3605 ²⁵⁸
25	995 ¹²	1,30	406 ^{54,5}	2,30	291 ²¹	3,30	1039 ^{63,5}	5,25	3476 ²⁵²
0,30	989 ^{1,5}	32	297 ⁵⁵	32	249 ^{20,5}	32	0912 ^{62,5}	30	3350 ²⁴⁸
32	986 ²	34	187 ⁵⁵	34	208 ²⁰	34	0787 ⁶¹	35	3226 ²⁴⁴
34	982 ²	36	077 ⁵⁵	36	168 ^{19,5}	36	0665 ^{60,5}	40	3104 ²⁴⁰
36	978 ³	38	0,6 967 ^{55,5}	38	129 ¹⁹	38	0544 ^{59,5}	45	2984 ²³⁶
38	972 ³	1,40	856 ⁵⁵	2,40	091 ^{18,5}	3,40	0425 ^{58,5}	5,50	2866 ²³²
0,40	966 ^{3,5}	42	746 ⁵⁵	42	054 ^{17,5}	42	0308 ^{57,5}	55	2750 ²²⁶
42	959 ⁴	44	636 ^{54,5}	44	019 ^{17,5}	44	0193 ⁵⁷	60	2637 ²²⁴
44	951 ⁵	46	527 ^{54,5}	46	0,2 9838 ^{168,5}	46	0079 ⁵⁶	65	2525 ²²⁰
46	941 ^{4,5}	48	418 ⁵⁴	48	9501 ¹⁶⁴	48	0,1 9967 ⁵⁵	70	2415 ²¹⁶
48	930 ⁶	1,50	310 ^{53,5}	2,50	9173 ^{159,5}	3,50	9857 ^{54,5}	5,75	2307 ²¹⁴
0,50	918 ⁷	52	203 ⁵³	52	8854 ¹⁵⁵	52	9748 ^{53,5}	80	2200 ²¹⁰
52	904 ⁸	54	097 ^{52,5}	54	8544 ¹⁵¹	54	9641 ⁵³	85	2095 ²⁰⁴
54	888 ^{8,5}	56	0,5 992 ⁵²	56	8242 ¹⁴⁷	56	9535 ⁵²	90	1993 ²⁰²
56	871 ^{9,5}	58	888 ⁵¹	58	7948 ^{142,5}	58	9431 ^{51,5}	95	1892 ²⁰⁰
58	852 ^{10,5}	1,60	786 ^{50,5}	2,60	7663 ¹³⁹	3,60	9328 ⁵¹	6,00	1792 ¹⁹⁶
0,60	831 ^{11,5}	62	685 ⁵⁰	62	7385 ¹³⁵	62	9226 ⁵⁰	05	1694 ¹⁹²
62	808 ^{12,5}	64	585 ⁴⁹	64	7115 ^{131,5}	64	9126 ^{49,5}	10	1598 ¹⁹⁰
64	783 ¹⁴	66	487 ⁴⁸	66	6852 ¹²⁸	66	9027 ⁴⁹	15	1503 ¹⁸⁶
66	755 ¹⁵	68	391 ^{47,5}	68	6596 ¹²⁵	68	8929 ^{48,5}	20	1410 ¹⁸⁴
68	725 ^{16,5}	1,70	296 ^{46,5}	2,70	6346 ¹²²	3,70	8832 ^{47,5}	6,25	1318 ¹⁸⁰
0,70	692 ^{17,5}	72	203 ^{45,5}	72	6102 ^{118,5}	75	8596 ⁴⁷	30	1228 ¹⁷⁸
72	657 ¹⁹	74	112 ^{44,5}	74	5865 ^{115,5}	80	8366 ⁴⁶	35	1139 ¹⁷⁴
74	619 ^{20,5}	76	023 ⁴⁴	76	5634 ^{112,5}	85	8143 ^{44,5}	40	1052 ¹⁷²
76	578 ^{21,5}	78	0,4 935 ⁴³	78	5409 ¹¹⁰	90	7925 ^{42,5}	45	0966 ¹⁷⁰
78	535 ²³	1,80	849 ^{41,5}	2,80	5189 ^{107,5}	95	7713 ^{41,5}	6,50	0881 ¹⁶⁶
0,80	489 ²⁵	82	766 ⁴¹	82	4974 ^{104,5}	4,00	7506 ^{40,5}	55	0798 ¹⁶⁴
82	439 ²⁶	84	684 ⁴⁰	84	4765 ¹⁰²	05	7304 ^{39,5}	60	0716 ¹⁶²
84	387 ²⁸	86	604 ³⁹	86	4561 ^{99,5}	10	7106 ^{38,5}	65	0635 ¹⁵⁸
86	331 ^{29,5}	88	526 ³⁸	88	4362 ^{97,5}	15	6912 ^{37,5}	70	0556 ¹⁵⁶
88	272 ^{30,5}	1,90	450 ³⁷	2,90	4167 ⁹⁵	20	6723 ³⁷	80	0400 ¹⁵¹
0,90	211 ^{32,5}	92	376 ³⁶	92	3977 ⁹³	4,25	6538 ^{36,5}	90	0249 ¹⁴⁷
92	146 ^{34,5}	94	304 ³⁵	94	3791 ⁹¹	30	6356 ^{35,5}	7,0	0102 ¹⁴³
94	077 ^{35,5}	96	234 ^{34,5}	96	3609 ^{88,5}	35	6178 ³⁵	1	0,0 9959 ¹³⁸
96	006 ³⁷	98	165 ^{33,5}	98	3432 ^{86,5}	40	6003 ^{34,5}	2	9821 ¹³⁵
98	0,8 932 ³⁹	2,00	098 ^{32,5}	3,00	3259 ⁸⁵	45	5832 ³⁴	3	9686 ¹³¹
1,00	854 ⁴⁰	02	033 ^{31,5}	02	3089 ⁸³	4,50	5664 ^{33,5}	4	9555 ¹²⁷
02	774 ^{41,5}	04	0,3 970 ^{30,5}	04	2923 ^{81,5}	55	5499 ^{32,5}	7,5	9428 ¹²⁴
04	691 ⁴³	06	909 ³⁰	06	2760 ^{79,5}	60	5337 ^{31,5}	6	9304 ¹²¹
06	605 ⁴⁴	08	849 ²⁹	08	2601 ⁷⁸	65	5178 ³¹	7	9183 ¹¹⁸
08	517 ^{45,5}	2,10	791 ^{28,5}	3,10	2445 ^{76,5}	70	5022 ^{30,5}	8	9065 ¹¹⁵
1,10	426 ⁴⁷	12	734 ^{27,5}	12	2292 ⁷⁵	4,75	4869 ^{30,5}	9	8950 ¹¹¹
12	332 ^{47,5}	14	679 ^{26,5}	14	2142 ^{73,5}	80	4718 ^{29,5}	8,0	0,0 8839
14	237 ⁴⁹	16	626 ²⁶	16	1995 ⁷²	85	4570 ²⁹		0,70711
16	139 ⁵⁰	18	574 ^{25,5}	18	1851 ⁷¹	90	4425 ^{28,5}	r	r
18	039 ⁵¹	2,20	0,3 523	3,20	0,2 1709	95	4282 ²⁸⁰		
1,20	0,7 937					5,00	0,1 4142		

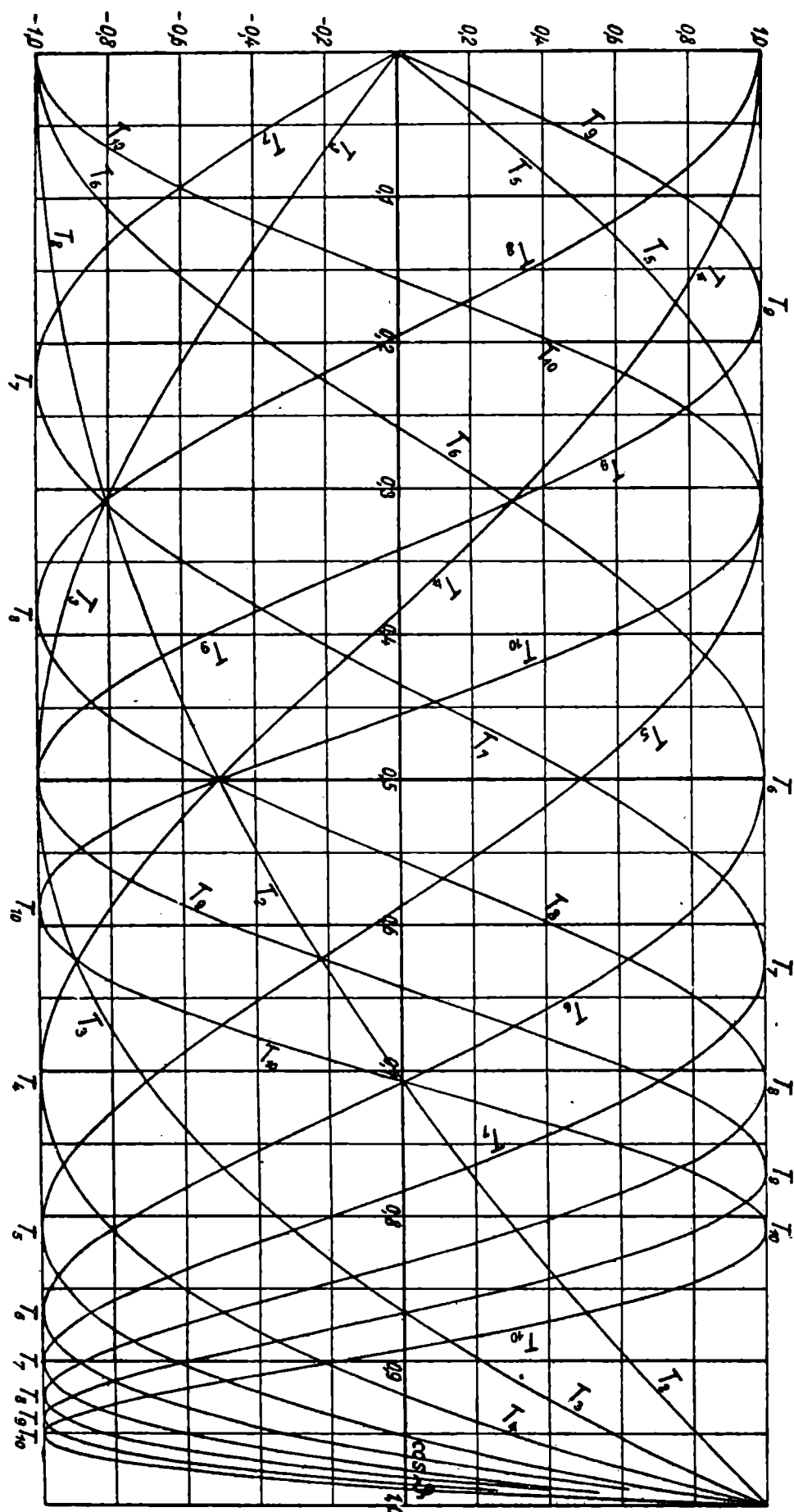


Fig. 76. Tschebyschewsche Polynome $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ (vgl. S. 75)
 Fig. 76. Chebyshev's polynomials (cf. p. 75)

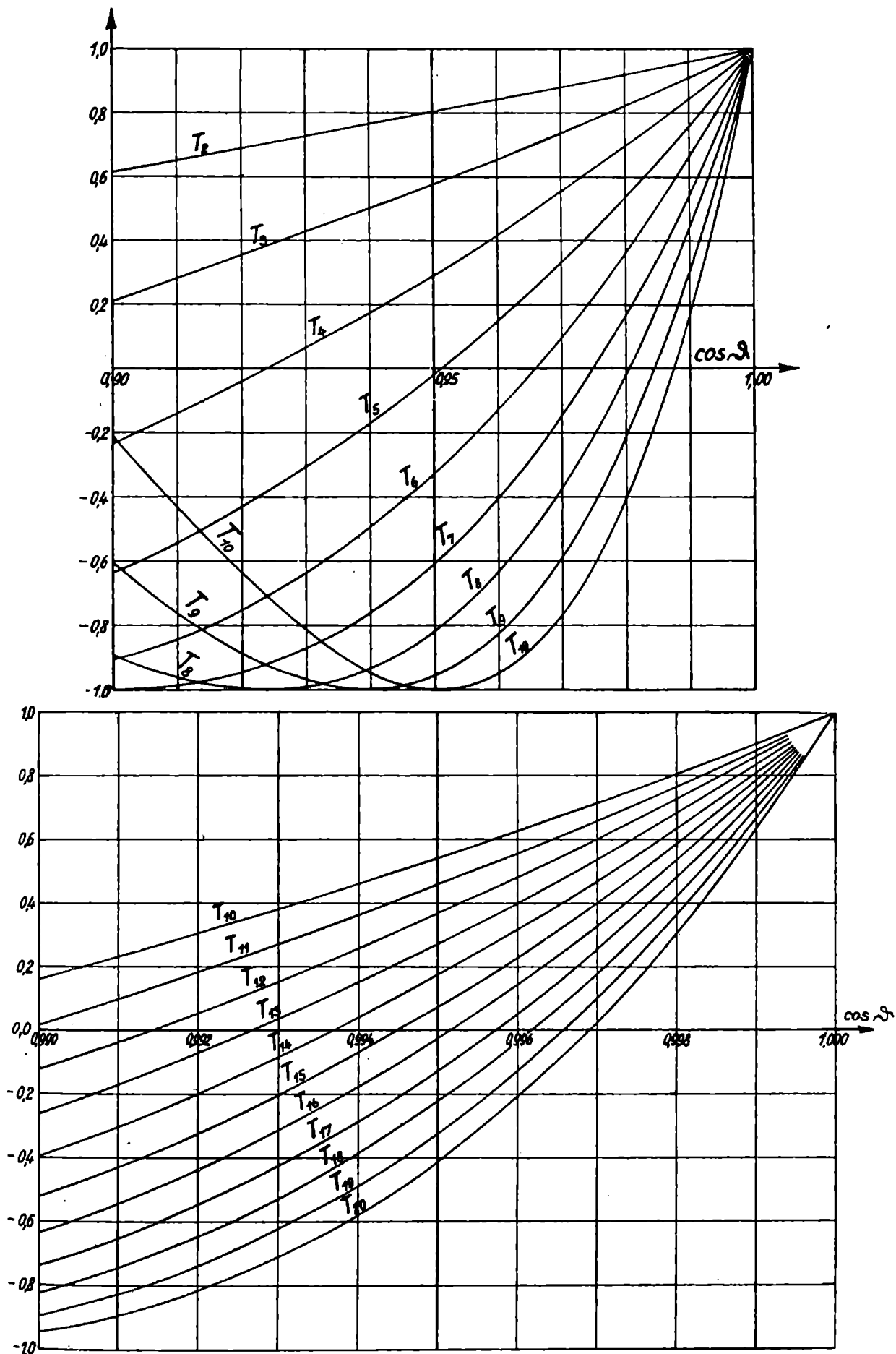


Fig. 77. 78. Tschebyschewsche Polynome $\cos n \theta = T_n(\cos \theta)$ (vgl. S. 75)
Fig. 77. 78. Chebyshev's polynomials $\cos n \theta = T_n(\cos \theta)$ (cf. p. 75)

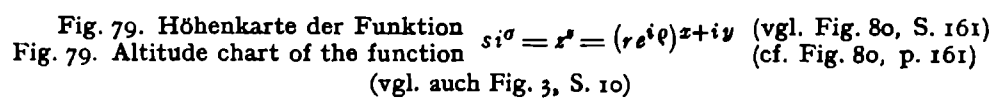


Fig. 79. Höhenkarte der Funktion $si^\sigma = z^\sigma = (re^{i\varphi})^{\sigma} x + iy$ (vgl. Fig. 80, S. 161)
 Fig. 79. Altitude chart of the function $si^\sigma = z^\sigma = (re^{i\varphi})^{\sigma} x + iy$ (cf. Fig. 80, p. 161)
 (vgl. auch Fig. 3, S. 10)

XVI. Näherungsrechnungen mit Polynomen

XVI. Approximate calculations with Polynomials

In den Polynomen

In the polynomials

$$y = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4,$$

$$Y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4,$$

$$z = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$$

sei jedes Glied klein gegen das vorhergehende.

let every term be small compared with the preceding term.

Produkt $yY \approx z$:Product $yY \approx z$:

$$\alpha = a + A,$$

$$\beta = aA + b + B,$$

$$\gamma = aB + bA + c + C,$$

$$\delta = bB + aC + cA + d + D.$$

Quotient $y/Y \approx z$:Quotient $y/Y \approx z$:

$$\alpha = a - A, \quad \beta = A^2 - aA + b - B,$$

$$\gamma = aA^2 - A^3 - aB - bA + 2AB + c - C,$$

$$\delta = A^4 - aA^3 + 2aAB + bA^2 - 3A^2B - bB + B^2 - aC - cA + 2AC + d - D.$$

Potenzen:

Powers:

$$y^n \approx 1 + nax + B_n x^2 + C_n x^3 + D_n x^4.$$

$$B_2 = a^2 + 2b, \quad \frac{C_2}{2} = ab + c, \quad D_2 = b^2 + 2ac + 2d;$$

$$\frac{B_3}{3} = a^2 + b, \quad C_3 = a^3 + 6ab + 3c, \quad \frac{D_3}{3} = a^2b + b^2 + 2ac + d;$$

$$\frac{B_4}{2} = 3a^2 + 2b, \quad \frac{C_4}{4} = a^3 + 3ab + c,$$

$$D_4 = a^4 + 12a^2b + 6b^2 + 12ac + 4d;$$

$$\frac{B_n}{n} = \frac{n-1}{2}a^2 + b, \quad \frac{C_n}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}a^3 + (n-1)ab + c,$$

$$\frac{D_n}{n} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}a^4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}a^2b + \frac{n-1}{2}b^2 + (n-1)ac + d.$$

$$B_{-1} = a^2 - b, \quad C_{-1} = -a^3 + 2ab - c, \quad D_{-1} = a^4 - 3a^2b + b^2 + 2ac - d;$$

$$B_{-2} = 3a^2 - 2b, \quad \frac{C_{-2}}{2} = -2a^3 + 3ab - c,$$

$$D_{-2} = 5a^4 - 12a^2b + 3b^2 + 6ac - 2d;$$

$$\frac{B_{-3}}{3} = 2a^2 - b, \quad C_{-3} = -10a^3 + 12ab - 3c,$$

$$\frac{D_{-3}}{3} = 5a^4 - 10a^2b + 2b^2 + 4ac - d;$$

$$\frac{B_{-4}}{2} = 5a^2 - 2b, \quad \frac{C_{-4}}{4} = -5a^3 + 5ab - c,$$

$$D_{-4} = 35a^4 - 60a^2b + 10b^2 + 20ac - 4d;$$

$$\frac{B_{-n}}{n} = \frac{n+1}{2}a^2 - b, \quad \frac{C_{-n}}{n} = -\frac{(n+1)(n+2)}{6}a^3 + (n+1)ab - c,$$

$$\frac{D_{-n}}{n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24}a^4 - \frac{(n+1)(n+2)}{2}a^2b + \frac{n+1}{2}b^2 + (n+1)ac - d.$$

$$\begin{aligned}
2B_{0,5} &= -\frac{a^3}{4} + b, & 2C_{0,5} &= \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \\
2D_{0,5} &= -\frac{5a^4}{64} + \frac{3a^3b}{8} - \frac{b^3}{4} - \frac{ac}{2} + d; \\
3B_{1/6} &= -\frac{a^3}{3} + b, & 3C_{1/6} &= \frac{5a^3}{27} - \frac{2ab}{3} + c, \\
3D_{1/6} &= -\frac{10a^4}{81} + \frac{5a^3b}{9} - \frac{b^3}{3} - \frac{2ac}{3} + d; \\
nB_{1/n} &= -\frac{n-1}{2n}a^2 + b, & nC_{1/n} &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}a^3 - \frac{n-1}{n}ab + c, \\
nD_{1/n} &= -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^3}a^4 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}a^2b - \frac{n-1}{2n}b^2 - \frac{n-1}{n}ac + d. \\
2B_{-0,5} &= \frac{3}{4}a^2 - b, & 2C_{-0,5} &= -\frac{5a^3}{8} + \frac{3ab}{2} - c, \\
2D_{-0,5} &= \frac{35a^4}{64} - \frac{15a^3b}{8} + \frac{3b^3}{4} + \frac{3ac}{2} - d; \\
3B_{-1/6} &= \frac{2a^3}{3} - b, & 3C_{-1/6} &= -\frac{14a^3}{27} + \frac{4ab}{3} - c, \\
3D_{-1/6} &= \frac{35a^4}{81} - \frac{14a^3b}{9} + \frac{2b^3}{3} + \frac{4ac}{3} - d; \\
nB_{-1/n} &= \frac{n+1}{2n}a^2 - b, & nC_{-1/n} &= -\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}a^3 + \frac{n+1}{n}ab - c, \\
nD_{-1/n} &= \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{24n^3}a^4 - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}a^2b + \frac{n+1}{2n}b^2 + \frac{n+1}{n}ac - d. \\
\frac{2}{3}B_{1,5} &= \frac{a^3}{4} + b, & \frac{2}{3}C_{1,5} &= -\frac{a^3}{24} + \frac{ab}{2} + c, & \frac{2}{3}D_{1,5} &= \frac{a^4}{64} - \frac{a^3b}{8} + \frac{b^3}{4} + \frac{ac}{2} + d; \\
\frac{3}{2}B_{1/6} &= -\frac{a^3}{6} + b, & \frac{3}{2}C_{1/6} &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c, & \frac{3}{2}D_{1/6} &= -\frac{7a^4}{162} + \frac{2a^3b}{9} - \frac{b^3}{6} - \frac{ac}{3} + d; \\
\frac{n}{m}B_{m/n} &= \frac{m-n}{2n}a^2 + b, & \frac{n}{m}C_{m/n} &= \frac{(m-n)(m-2n)}{6n^2}a^3 + \frac{m-n}{n}ab + c, \\
\frac{n}{m}D_{m/n} &= \frac{(m-n)(m-2n)(m-3n)}{24n^3}a^4 + \frac{(m-n)(m-2n)}{2n^2}a^2b + \frac{m-n}{2n}b^2 + \frac{m-n}{n}ac + d. \\
\frac{2}{3}B_{-1,5} &= \frac{5a^3}{4} - b, & \frac{2}{3}C_{-1,5} &= -\frac{35a^3}{24} + \frac{5ab}{2} - c, \\
\frac{2}{3}D_{-1,5} &= \frac{105a^4}{64} - \frac{35a^3b}{8} + \frac{5b^3}{4} + \frac{5ac}{2} - d; \\
\frac{3}{2}B_{-1/6} &= \frac{5a^3}{6} - b, & \frac{3}{2}C_{-1/6} &= -\frac{20a^3}{27} + \frac{5ab}{3} - c, \\
\frac{3}{2}D_{-1/6} &= \frac{55a^4}{81} - \frac{20a^3b}{9} + \frac{5b^3}{6} + \frac{5ac}{3} - d; \\
\frac{n}{m}B_{-m/n} &= \frac{m+n}{2n}a^2 - b, & \frac{n}{m}C_{-m/n} &= -\frac{(m+n)(m+2n)}{6n^2}a^3 + \frac{m+n}{n}ab - c, \\
\frac{n}{m}D_{-m/n} &= \frac{(m+n)(m+2n)(m+3n)}{24n^3}a^4 - \frac{(m+n)(m+2n)}{2n^2}a^2b + \frac{m+n}{2n}b^2 + \frac{m+n}{n}ac - d.
\end{aligned}$$

Umkehrung: Aus

| Reversion: From

$$z = \frac{y}{x} = 1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5$$

folgt

| follows

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{y} \approx 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5,$$

wo

| where

$$\begin{aligned} A &= a, & B &= 2a^2 + b, & C &= 5a^3 + 5ab + c, \\ D &= 14a^4 + 21a^2b + 6ac + 3b^2 + d, \\ E &= 7(6a^5 + 12a^3b + 4a^2c + 4ab^2 + ad + bc) + e. \end{aligned}$$

Potenzen von Polynomen mit zwei Veränderlichen**Powers of polynomials with two variables**

Es sei

| Let

$$z^n = 1 + nax + nby + C_n x^2 + D_n xy + E_n y^2 + F_n x^3 + G_n x^2y + H_n xy^2 + K_n y^3$$

und

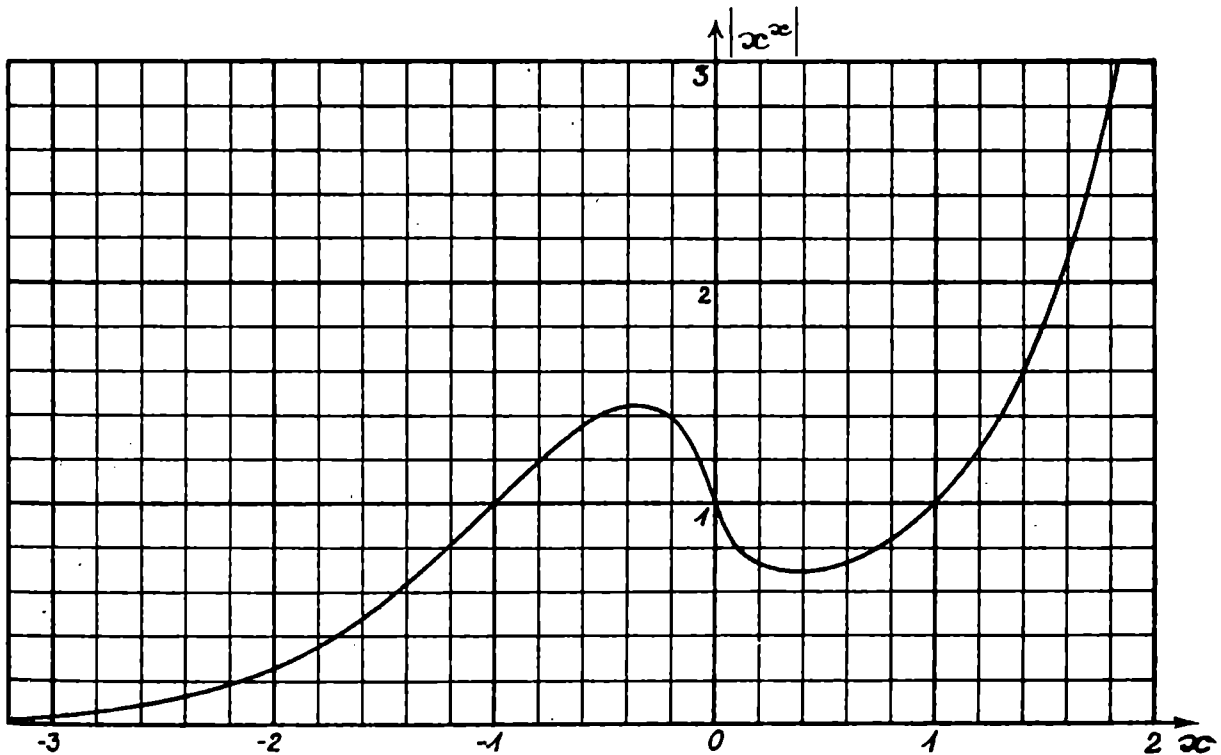
| and

$$C_1, D_1, E_1, \dots = c, d, e, \dots$$

Dann ist

| Then

$$\begin{aligned} C_2 &= a^2 + 2c, & D_2 &= 2(ab + d), & E_2 &= b^2 + 2e, & F_2 &= 2(ac + f), \\ G_2 &= 2(ad + bc + g), & H_2 &= 2(ae + bd + h), & K_2 &= 2(be + k); \\ C_3 &= 3(a^2 + c), & D_3 &= 3(2ab + d), & E_3 &= 3(b^2 + e), \\ F_3 &= a^3 + 6ac + 3f, & G_3 &= 3(a^2b + 2ad + 2bc + g), \\ H_3 &= 3(ab^2 + 2ae + 2bd + h), & K_3 &= b^3 + 6be + 3k; \\ C_4 &= 2(3a^2 + 2c), & D_4 &= 4(3ab + d), & E_4 &= 2(3b^2 + 2e), \\ F_4 &= 4(a^3 + 3ac + f), & G_4 &= 4(3a^2b + 3ad + 3bc + g), \\ H_4 &= 4(3ab^2 + 3ae + 3bd + h), & K_4 &= 4(b^3 + 3be + k). \end{aligned}$$

Fig. 80. $|x^x|$

$$(1-x)^q \approx 1 - qx - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - a_6 x^6.$$

q	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
		0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,000	000	0000	0000	0000
0,1	0,045	285	2066	1612	1316
0,2	0,080	480	3360	2554	2043
0,3	0,105	595	4016	2972	2384
0,4	0,120	640	4160	2995	2296
0,5	0,125	625	3906	2734	2051
0,6	0,120	560	3360	2285	1676
0,7	0,105	455	2616	1727	1237
0,8	0,080	320	1760	1126	0788
0,9	0,045	165	0866	0537	0367
1,0	0,000	000	0000	0000	0000
$\frac{1}{4}$	0,09375	5469	3760	2820	2232
$\frac{1}{3}$	0,11111	6173	4115	3018	2347
$\frac{2}{3}$	0,11111	4938	2881	1920	1387
		0,0	0,0	0,0	0,0

$$a_1 = q, \quad a_{m+1} = a_m \frac{m-q}{m+1} = a_m - a_m \frac{1+q}{m+1},$$

$$a_m = q \frac{1-q}{2} \left(1 - \frac{1+q}{3}\right) \left(1 - \frac{1+q}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1+q}{m}\right),$$

$$(1+x)^q \approx 1 + q \left(1 - \frac{1-q}{2} x\right) x + a_3 \left[\left(1-x\right) + \frac{1+q}{4} x\right] x^3 + a_5 \left[\left(1-x\right) + \frac{1+q}{6} x\right] x^5.$$

$$\frac{1}{(1-x)^q} \approx 1 + qx + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6.$$

q	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0,0	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,055	0,0385	0,0298	0,0245	0,0208
0,2	0,120	0,0880	0,0704	0,0591	0,0512
0,3	0,195	0,1495	0,1233	0,1061	0,0937
0,4	0,280	0,2240	0,1904	0,1676	0,1508
0,5	0,375	0,3125	0,2734	0,2461	0,2256
0,6	0,480	0,4160	0,3744	0,3444	0,3215
0,7	0,595	0,5355	0,4953	0,4656	0,4423
0,8	0,720	0,6720	0,6384	0,6129	0,5924
0,9	0,855	0,8265	0,8058	0,7897	0,7766
1,0	1,000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	1,875	2,1875	2,4609	2,7070	2,9327
2,0	3,000	4,0000	5,0000	6,0000	7,0000
$\frac{1}{4}$	0,1562	0,1172	0,0952	0,0809	0,0708
$\frac{1}{3}$	0,2222	0,1728	0,1440	0,1248	0,1110
$\frac{2}{3}$	0,5556	0,4938	0,4527	0,4225	0,3990

$$b_1 = q, \quad b_{m+1} = b_m \frac{m+q}{m+1} = b_m + b_m \frac{1-q}{m+1},$$

$$b_m = q \left(1 + \frac{1-q}{2}\right) \left(1 + \frac{1-q}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1-q}{m}\right),$$

$$\frac{1}{(1+x)^q} \approx 1 - q \left[\left(1-x\right) + \frac{1-q}{2} x\right] x - b_3 \left[\left(1-x\right) + \frac{1-q}{4} x\right] x^3 - b_5 \left[\left(1-x\right) + \frac{1-q}{6} x\right] x^5.$$

XVII. Einige Bemerkungen über Zahlenrechnungen

XVII. Some remarks on numerical calculations

Eine eigentliche Belehrung über das Rechnen findet man in besonderen Büchern. (Siehe „Hilfsmittel für den Rechner“ unter IV, V, VI, S. 173.) Hier kann nur an einige Einzelheiten erinnert werden, insbesondere an solche, die sich auf die Benutzung der vorliegenden Tafeln beziehen.

Eine der wichtigsten Fragen ist, wie man sich gegen Irrtümer schützen kann. Dazu empfiehlt es sich, niemals nur einen einzelnen Zahlenwert abzulesen oder zu bestimmen, sondern auch benachbarte, auch wenn man sie nicht braucht. Ehe man in eine Zahlentafel eingeht, wird man gut tun, sich den Gang der Funktion an der benutzten Stelle durch einen Blick auf die zugehörige graphische Darstellung (meist eine Kurve) zu unterrichten und von ihr einen rohen (etwa zweiziffrigen) Wert abzulesen und dann erst in die Zahlentafel einzugehen.

Gewöhnlich wird der gesuchte Funktionswert nicht in der Tafel abgelesen werden können, sondern man muß ihn aus den in der Tafel vorhandenen Werten durch Interpolation bestimmen. Unsere Tafeln sind fast durchweg für lineare Interpolation bestimmt, und zwar im folgenden Sinne: Der größte Fehler, der bei der linearen Interpolation entstehen kann, soll nicht mehr als $0,5 \cdot 10^{-4}$ des Funktionswertes y betragen. Dazu darf der Tafelschritt h nicht größer sein als $0,02 \sqrt{y/y''}$ und die zweite Differenz Δ'' nicht größer als $y/2500$, so daß Δ'' in dem Bereich $10\,000 < y < 30\,000$ (größere Werte kommen nicht vor) über die sonst übliche feste Grenze 4 bis auf 12 steigen kann. Dieser Grenzwert ist nicht streng eingehalten worden, sondern der Tafelschritt ist auf die Werte 1, 2, 5 beschränkt worden. Im allgemeinen ändert sich also der Schritt in jeder Tafel. Nur für die Funktionen e^x , e^{-x} , $\operatorname{Ei} x$, $\operatorname{Co} x$, $\sin x$, $\cos x$ ergibt sich so der konstante Schritt $h = 0,02 \operatorname{rad} \approx 1,15^\circ \approx 0,0127^\circ$.

In die Tafeln sind fast überall die ersten Differenzen eingedruckt¹⁾, aber zur Bequemlichkeit des Rechners auf den Schritt 1 umgerechnet. Der Rechner braucht dann nur die aus den überhängenden Ziffern seines

A true instruction on calculations will be found in special books. (See „Useful books for the computer“ IV, V, VI, p. 173). Here we can only remind the reader of some details, especially of such referring to the use of these tables.

One of the most important questions is, how to guard against errors. For this, the computer must be advised never to read off or to determine only one single value, but also adjoining ones, even when not needed. Before entering into a table, it is advisable to inform oneself about the course of the function in the passage used, by a glance at the appropriate graphical representation (mostly a curve), and to read off from it a rough value (say two-figured) and thereupon to enter into the numerical table.

Usually one will not be able to read off from the table the desired value of the function, but it must be determined by interpolation from the values given in the table. Our tables are almost entirely adapted for linear interpolation and that in the following sense: the greatest error which can be made in linear interpolation must not exceed $0,5 \cdot 10^{-4}$ of the function value y . For this purpose the interval h of the table must not exceed $0,02 \cdot \sqrt{y/y''}$, and the second difference Δ'' must not exceed $y/2500$, so that Δ'' in the domain $10\,000 < y < 30\,000$ (greater values do not appear) can rise above the otherwise usual limit 4, up to 12. This limit has not been strictly observed, but the interval of the table has been confined to the values 1, 2, 5. Thus in general the interval varies in each table. Only for the functions e^x , e^{-x} , $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, $\cos x$ results the constant interval $h = 0,02 \operatorname{rad} \approx 1,15^\circ \approx 0,0127^\circ$.

Almost everywhere the first differences were printed into the tables¹⁾, recalculated on the interval 1 for the benefit of the computer. The computer need then only multiply the number formed by the exceeding

1) *Schräg gedruckte Differenzen* weisen darauf hin, daß die lineare Interpolation nicht ausreicht.

1) The *obliquely* printed differences indicate, that the linear interpolation is insufficient.

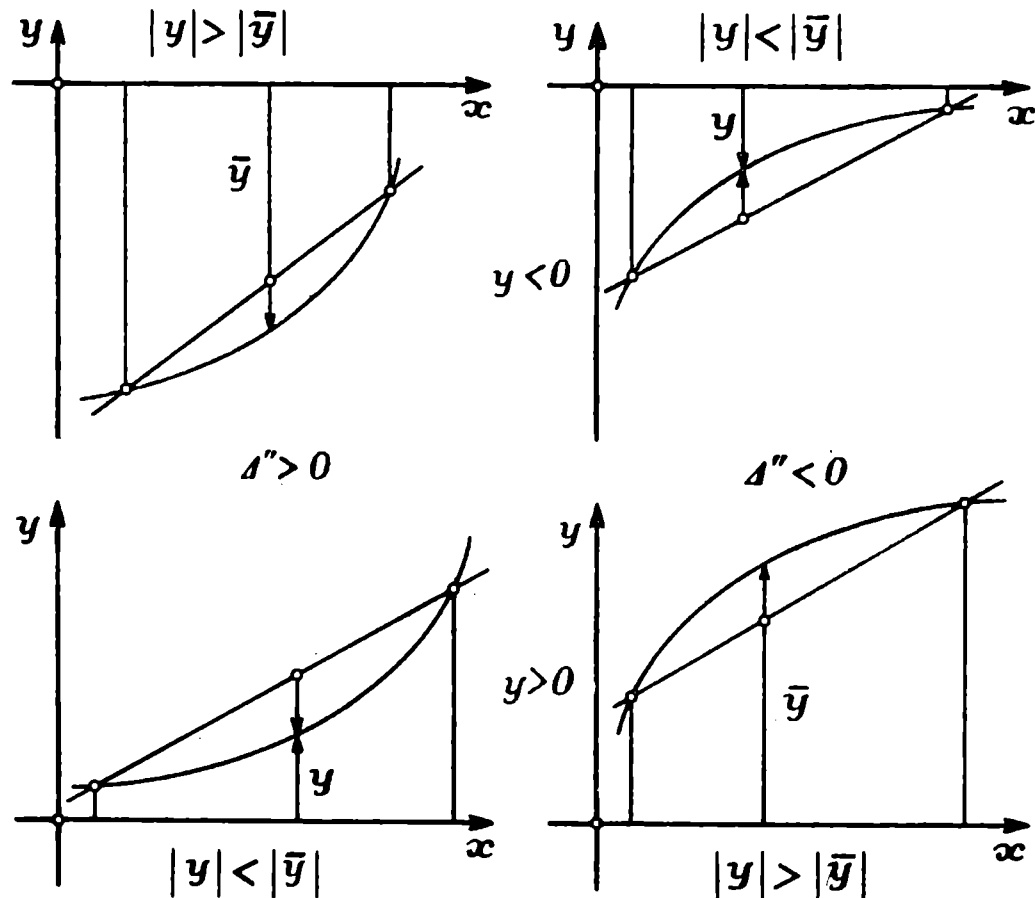
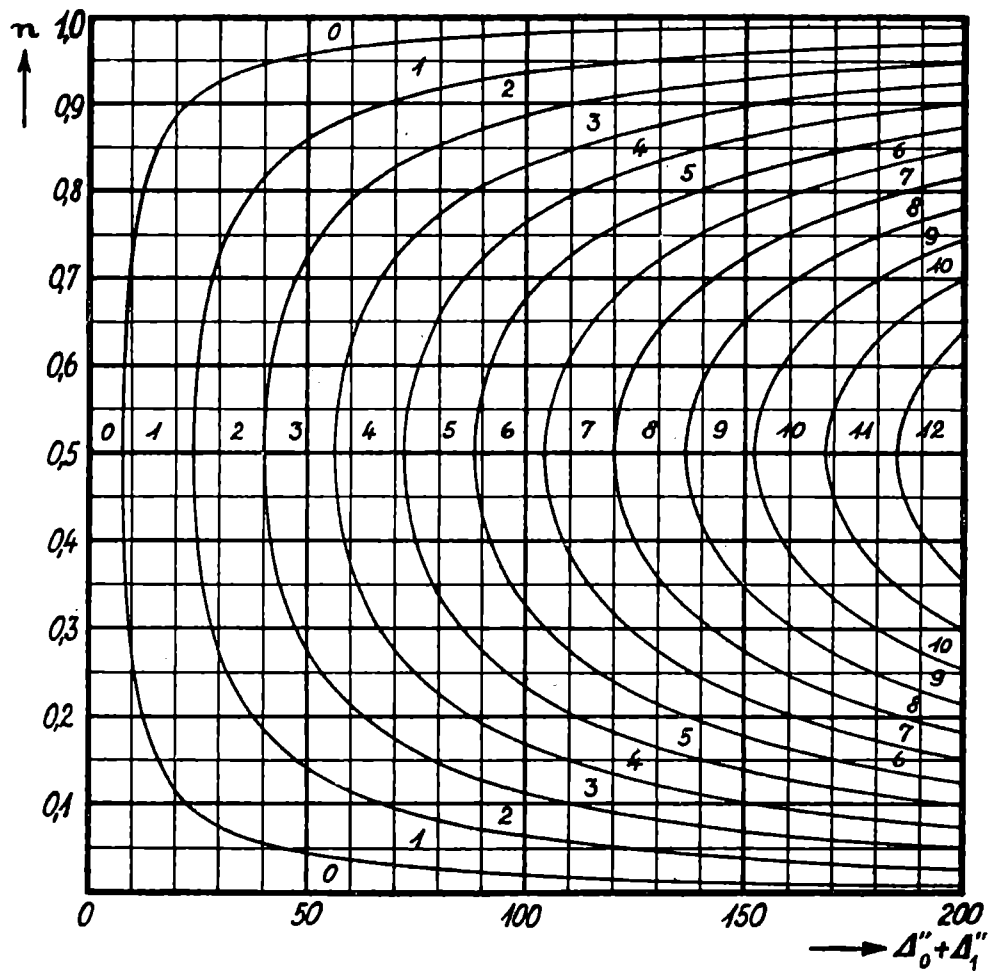


Fig. 81, 82. Quadratische Interpolation (vgl. S. 163)
 Fig. 81, 82. Quadratic interpolation (cf. p. 165)

Argumentwertes gebildete Zahl mit der in der Tafel abgelesenen Differenz zu multiplizieren. Diese Multiplikation führt man am besten mit dem Rechenschieber aus (oder mit einer kleinen Rechenmaschine). Die Multiplikation Ziffer für Ziffer mit Hilfe kleiner Multiplikationstafeln mit einem einziffrigen Faktor (sogenannte P. P.) ist zu umständlich und als veraltet anzusehen.

Man kann sich mit der linearen Interpolation begnügen, wenn die Verbesserung, die die quadratische Interpolation ergibt, zu vernachlässigen ist. Sonst muß man diese berücksichtigen. Sie ist $= -n \frac{1-n}{4} (\Delta_0'' + \Delta_1'')$, wenn $x = x_0 + n$ ist, also höchstens vom Betrage $(\Delta_0'' + \Delta_1'')/16$. Am bequemsten liest man die quadratische Verbesserung von der Fig. 81 ab. In jeden Flächenstreifen zwischen zwei benachbarten Kurven ist der Zahlenwert der quadratischen Verbesserung eingeschrieben, der für jeden Punkt dieses Streifens gilt. Ob die lineare Verbesserung um die quadratische zu vergrößern oder zu verkleinern ist, zeigt die Fig. 82. Man beachte, daß

$$\Delta_0'' + \Delta_1'' = \Delta_{1,5}' - \Delta_{-0,5}'$$

ist.

Durch eine große erste Differenz wird die Genauigkeit der linearen Interpolation an sich nicht beeinträchtigt. Nur kann dabei die Multiplikation mit dem Rechenschieber zu ungenau werden. Am besten benutzt man dann eine kleine Rechenmaschine, sonst eine Multiplikationstafel („Rechentafel“).

Andererseits ist es ratsam, sich zu überlegen, ob man wirklich alle Stellen braucht, die die Tafel bietet, insbesondere, ob nicht die Ausgangszahlen der Rechnung die Genauigkeit, die die Tafel bietet, unwirksam machen. Dann wäre es unpraktisch, mit allen Stellen der Tafelwerte zu rechnen.

Bei vielstelligen Tafeln sind Interpolationen höheren Grades kaum zu umgehen. Bei solchen Interpolationsrechnungen benutze man das Heft „Interpolation and allied tables“ von L. J. Comrie. Siehe „Hilfsmittel für den Rechner“ unter IX d), S. 174.

end-figures with the difference read off in the table. This multiplication will best be made by the slide-rule or a small calculating machine. A multiplication figure by figure with the help of small multiplication tables with a one-figure factor (so-called P. P.) is too troublesome and may be considered obsolete.

We may be content with linear interpolation, if the correction resulting from quadratic interpolation is negligible. Otherwise the latter must be taken into account.

It is equal to $-n \frac{1-n}{4} (\Delta_0'' + \Delta_1'')$, if x is $= x_0 + n$, that does not exceed the value $(\Delta_0'' + \Delta_1'')/16$. The easiest way would be to read the quadratic correction off from fig. 81. Into each plane stripe between two adjoining curves has been written the numerical value of the quadratic correction, which holds for every point in this stripe. Whether the linear correction must be increased or decreased by the quadratic correction, is shown in fig. 82. Note that

The accuracy of linear interpolation in itself is not impaired by a great first difference. However, multiplication with a slide-rule may become too inexact. It is best to use a small calculating machine, or a multiplication table („calculating table“).

On the other hand it is advisable to consider whether all the figures which the table offers are really needed, especially whether the starting numbers of the calculation make the accuracy of the table ineffective. In that case it would not be practical to compute with all the figures of the table values.

In many-figure tables interpolations of higher degree are hardly to be omitted. For such calculations of interpolation use the booklet „Interpolation and allied tables“ by L. J. Comrie. See „Useful books for the computer“ under IX d), p. 174.

Winkel, ausgedrückt in Grad, Minuten und Sekunden, in die Rechnung einzuführen, ist in der Technik und in der Physik fast immer unzweckmäßig. Besser unterteilt man den Grad dezimal. Auch die Angabe der Winkel in Radianten (sog. Bogenmaß), die für die Buchstabenrechnung so bequem ist, ist für die Zahlenrechnung meist sehr unbequem, namentlich bei Winkeln, die einen Rechten übertreffen. Wenn man bei kleinen Winkeln Reihen benutzt, wird man die Winkel in Radianten ausdrücken. Abgesehen von solchen Ausnahmen, rechnet man besser nicht mit Radianten.

Die vorteilhafteste Winkleinheit für Zahlenrechnungen ist fast immer der rechte Winkel, ganz besonders aber dann, wenn die Winkel 4° übertreffen. Es sind π Radianten = 2 Quadranten = 2° . Auch für komplexe Darstellungen ist der rechte Winkel eine sehr gut geeignete Winkleinheit. Denn es bedeutet i° einen Pfeil von der Länge 1, der gegen die Halbachse der positiven reellen Zahlen um einen Winkel von 90° vorgedreht ist. Die Funktionen

$$y = A i^{hx} + B i^{-hx} \quad \text{und} \quad y = C \cos (hx - \gamma)^\circ$$

genügen der Differentialgleichung

$$y'' + \left(\frac{\pi}{2}h\right)^2 y = 0.$$

Dabei ist $1/h$ die Viertelwellenlänge.¹⁾

Bei einer Reihe ist es für die Zahlenrechnung nicht das Wichtigste, ob sie konvergent oder divergent ist. Eine Reihe ist für die Zahlenrechnung gut brauchbar, wenn ihr Anfang stark konvergiert. Sie ist für Zahlenrechnungen um so geeigneter, je näher schon ihr erstes Glied dem gesuchten Wert kommt, so daß die weiteren Glieder nur noch kleine Verbesserungen bedeuten.

Eine schlechte Darstellung liegt vor, wenn der gesuchte Wert als Differenz zweier fast gleicher Zahlen erscheint, weil die Rechnung dadurch an Genauigkeit einbüßt. Dann wird man nach einer bessern Darstellung suchen. Doch ist es nicht immer leicht, eine bessere zu finden.

Sog. „strenge“ geschlossene Ausdrücke können in einem Bereich der Veränderungen für die Auswertung sehr unvorteil-

To introduce angles, expressed in degrees, minutes and seconds, into calculation, is almost always inopportune in engineering and physics. A decimal subdivision of the degree is better. Also the statement of the angles in radians (so-called circular measure) which is so convenient for letter-calculation, is mostly very inconvenient for numerical calculation, specially with angles greater than a right angle. With small angles, using series we express the angles in radians. Setting aside such exceptions, it is better not to compute with radians.

The best angle-unit for numerical calculations is almost always the right angle, especially when the angles exceed 4° . π radians = 2 quadrants = 2° . Also for complex representations the right angle is a very convenient angle unit. For i° means an arrow of the length 1, which is advanced towards the half-axis of the positive real numbers by an angle of 90° . The functions

satisfy the differential equation

Therein $1/h$ is the quarter wave length.¹⁾

For a numerical calculation in a series it is not the most important, whether it be convergent or divergent. A series is useful for numerical calculation, if its beginning is convergent. It is all the more convenient for numerical calculation, the closer its first term already comes up to the value desired so that the further terms mean only slight corrections.

We have a bad representation when the value desired appears as the difference of two almost equal numbers, because thereby the calculation loses in accuracy. In that case we shall search for a better representation. But it is not always easy to find a better one.

So-called „rigorous“ close expressions may, in a domain of the variable, become of great disadvantage for evaluation,

¹⁾ Siehe auch Ausschluß für Einheiten und Formelgrößen (AEF): „Winkleinheiten und Winkelteilungen“, Elektrotechn. Zeitschr. 1937, S. 286.
Also see

haft werden, nämlich wenn ein solcher Ausdruck eine Differenz enthält, bei der der Subtrahend dem Minuend nahe kommt. Das Ergebnis wird dann mit der erstrebten Genauigkeit viel bequemer ausgerechnet, wenn man den Ausdruck in eine Reihe entwickelt entweder für sehr kleine oder für sehr große Werte der Veränderlichen. Siehe z. B. Abschnitt XIII, S. 148.

Wenn die Genauigkeit des Rechenschiebers nicht mehr ausreicht, so muß man entweder zur Logarithmentafel oder zur Produktentafel oder zur Rechenmaschine übergehen. Um den Preis einer Produktentafel kann man sich etwa sechs siebenstellige Logarithmentafeln kaufen und um den Preis einer Rechenmaschine mit Handbetrieb etwa 12 bis 40 Produktentafeln. Trotz dem hohen Preis werden Rechensmaschinen viel benutzt, weil man mit ihnen sehr bequem und schnell und vor allem sicher rechnet. Sogar Maschinen, die mehrere tausend Mark kosten, werden viel gekauft. Durch eine Rechenmaschine werden auch die Augen weniger angestrengt als durch einen Rechenschieber.

Ingenieure und Physiker seien nachdrücklich darauf hingewiesen, daß sie die teuren Rechenmaschinen fast nie nötig haben und daß die kleinen billigen Rechenmaschinen etwa mit fünf Schlittenstellungen (wie z. B. die Maschine Brunsviga 10) fast immer für ihren Bedarf genügen. Diese kleinen Maschinen haben überdies den sehr wichtigen Vorteil, daß sie auf dem Schreibtisch weniger Platz beanspruchen, einen leiseren Gang haben und leichter sind. Wo große und kleine Maschinen zugleich zur Verfügung stehen, macht man die Erfahrung, daß die kleinen Maschinen am meisten benutzt werden.

Nur selten einmal muß ein Ingenieur oder Physiker mit sehr vielen Stellen rechnen. Aber auch dann versagt die kleine Rechenmaschine nicht, sondern die Rechnung wird nur etwas umständlicher als auf einer großen vielstelligen Rechenmaschine. Die Maschine habe s Schlittenstellungen (etwa $s = 5$). Wenn man dann z. B. zwei vielstellige Zahlen auf der Maschine multiplizieren will, so zerlegt man jede Zahl in Gruppen von je s Ziffern, etwa

namely when such an expression contains a difference in which the subtrahend nears the minuend. Then the result will be computed more easily with the desired accuracy if the expression is developed in a series either for very small or very large values of the variable. See for inst. Chapt. XIII, p. 148.

If the accuracy of the slide-rule is no longer sufficient, we must either pass over to the logarithmic or the multiplication table or to the calculating machine. For the price of a multiplication table we can either buy 6 seven-figure logarithmic tables, and for the price of a hand operated calculating machine about 12 to 40 multiplication tables. In spite of the high price, calculating machines are often used, because calculation with them is very convenient, quick and above all reliable. Even machines costing several thousand marks are often bought. A calculating machine will also try the eyes much less than a slide-rule.

Engineers and physicists should impressively be advised that they will hardly ever need such expensive calculating machines, and that the small cheap machines with about 5 positions of the carriage (as for inst. the Brunsviga 10) will mostly be sufficient for their wants. These small machines have the very important advantage of taking up less room on a writing-table, make less noise and are less heavy. Where both, large and small machines are available, we find, that the small machines are chiefly used.

It is rare that an engineer or physicist has to compute with a great many figures. But even if so, the small calculating machine would not disappoint him; the calculation only becomes somewhat more troublesome than on a large many-figure machine. Supposing the machine to have s positions of the carriage (say $s = 5$), when multiplying two many-figure numbers on the machine, each number is divided into groups of s figures each, for inst.:

$$A + a + \alpha + \dots \quad \text{und} \quad B + b + \beta + \dots$$

and

Dabei mögen (was sich durch Heraussetzen einer ganzen Potenz von 10 immer erreichen läßt) A, B die Dezimalstellen 0 bis $s-1$ einnehmen; a, b die Stellen s bis $2s-1$; α, β die Stellen $2s$ bis $3s-1$; usw. Dann berechnet man auf der Maschine nacheinander die einzelnen Produkte der Summe

$$AB + (Ab + aB) + (A\beta + ab + \alpha B) + \dots,$$

soweit erforderlich. AB reicht von der Dezimalstelle -1 oder 0 bis $2s-2$; Ab und aB von der Stelle $s-1$ oder s bis $3s-2$; $A\beta, ab, \alpha B$ von der Stelle $2s-1$ oder $2s$ bis $4s-2$; usw. Jedes Produkt nimmt $2s-1$ oder $2s$ Stellen ein.

Um ein Beispiel vor Augen zu führen, multiplizieren wir π mit $\sqrt{2}$. Es sei also

$$\begin{array}{lll} A = 3,1415 & a = 0,0^4 92653 & \alpha = 0,0^8 58979 \\ B = 1,4142 & b = 0,0^4 13562 & \beta = 0,0^8 37310. \end{array}$$

Dann erhalten wir folgende, ohne weitere Erläuterung verständliche Rechnung:

$$\begin{array}{r} AB = 04,442\ 709\ 30 \\ Ab = \quad\quad 042\ 605\ 023\ 0 \\ aB = \quad\quad 131\ 029\ 872\ 6 \\ A\beta = \quad\quad\quad 1\ 172\ 093\ 650 \\ ab = \quad\quad\quad 1\ 256\ 559\ 986 \\ \alpha B = \quad\quad\quad 0\ 834\ 081\ 018 \\ \hline \pi\sqrt{2} = 4,442\ 882\ 938\ 158\ 334\ 654 \end{array}$$

Die Faktoren sind mit 15 Stellen oder 14 Dezimalen eingesetzt worden. Das Produkt wird daher nur mit weniger als 14 Dezimalen brauchbar sein. Richtig lauten nämlich die letzten 6 Dezimalen ... 366 247. Das Produkt ist also mit 12 Dezimalen oder 13 geltenden Stellen erhalten worden. Das Produkt ist um zwei Stellen ärmer als die Faktoren.

Hätte man die Faktoren mit 9 Dezimalen eingesetzt, so hätte man von dem Produkt nur 7 Dezimalen erhalten.

Um ein Teilprodukt an seine richtige Stelle zu bringen, nimmt man von jedem der beiden Faktoren nur die erste Ziffer mit ihrem Stellenwert, z. B.

$$ab \geq 9 \cdot 10^{-5} \times 1 \cdot 10^{-5} = 09 \cdot 10^{-10} = 0,000\ 000\ 000\ 9.$$

An Stelle der als Produkt aus den beiden Ziffern gefundenen zweiziffrigen Zahl (hier 09) wird meist eine größere treten (hier 12). Demnach

$$ab = 0,000\ 000\ 001\ 2 \dots$$

Thereby let A, B take the decimal places 0 to $s-1$, (which can always be obtained by setting out an entire power of 10); a, b the places s to $2s-1$; α, β the places $2s$ to $3s-1$ etc. Now compute on the machine successively the several products of the sum

as far as required. AB goes from the decimal place 1 or 0 to $2s-2$; Ab and aB from the place $s-1$ or s to $3s-2$; $A\beta, ab, \alpha B$ from the place $2s-1$ or $2s$ to $4s-2$; etc. Each product takes $2s-1$ or $2s$ places.

To give an example, we multiply π with $\sqrt{2}$. Let therefore be

we get the following calculation which can be understood without further explanation:

The factors have been put in with 15 places or 14 decimals. Therefore the product can be applied only with less than 14 decimals. For, accurately given, the last 6 decimals are ... 366 247. Consequently the product was obtained with 12 decimals or 13 significant figures. The product is poorer than the factors by two places.

Had the factors been put in with 9 decimals, only 7 decimals of the product would have been obtained.

In order to bring a partial product into its proper place, we take from each of the two factors only the first figure with its place-value, for inst.:

In the place of the two-figure number found (here 09) obtained as the product of the two figures, there will in most cases appear a higher number (here 12). Accordingly

Zwischen das Komma und das zweiziffrige Produkt sind soviel Nullen zu schieben, wie beide Faktoren zusammen hinter dem Komma haben (hier 8 Nullen).

Um alle Produkte aus zwei Ziffern als zweiziffrige Zahlen behandeln zu können, haben wir im Vorhergehenden den einziffrigen Produkten eine Null vorgesetzt (09 statt 9). Dadurch werden einfachere Regeln ermöglicht. Außerdem wird die Übersicht und Kontrolle erleichtert.

Auch auf einer Rechenmaschine mit 10 Schlittenstellungen hätte man unser 13stelliges Produkt nicht ohne Spaltung der Faktoren, d. h. nicht in einem einzigen Gang berechnen können. Unser Beispiel zeigt, daß man auch mit einer kleinen Rechenmaschine schnell zu hohen Stellenzahlen vordringen kann, weil die Teilprodukte verschiedenen Ranges stark gegeneinander versetzt sind, nämlich um s (hier 5) Stellen.

Nicht ganz so bequem ist die Division mit einem vielstelligen Divisor $A + a + \alpha + \dots$. Ein vielstelliger Zähler ist so zu bewältigen, wie vorher angegeben. Wir wollen daher den Zähler (Dividenden) = 10 annehmen, d. h. im wesentlichen: Wir beschränken uns darauf, den Kehrwert einer vielstelligen Zahl zu suchen. Es sei also eine vielstellige Zahl $B + b + \beta + \dots$ gesucht, so daß

$$(B + b + \beta + \dots)(A + a + \alpha + \dots) = 10$$

wird.

Berechnung von B : Man bestimmt B so, daß $B(A + a) < 10$ möglichst nahe an 10 herankommt; anders ausgedrückt: so, daß BA eben noch unter $10 - [Ba]$ bleibt. Hierzu genügt es, Ba (aus den ersten 1 oder 2 Ziffern von B und a) auf 1 oder 2 Stellen zu berechnen, was durch die eckigen Klammern angedeutet sei. Auf der Maschine stellt man A ein und dreht so lange, bis im Empfangswerk eine Zahl erscheint, die $10 - [Ba]$ noch nicht erreicht, bei einer weiteren Drehung aber schon überschreiten würde.

Berechnung von b : Mit dem so berechneten B berechnet man auf der Maschine genau

$$c = 10 - BA < 0,1^{s-2}.$$

c ist die dekadische Ergänzung von BA .

Between the decimal point and the two-figure product so many zeros have to be put in as both factors together have behind the decimal point (here 8 zeros).

To be able to treat all products from two figures as two-figure numbers we have in the above placed a zero before the one-figure products (09 instead of 9). Simpler rules are thereby made possible. Besides, the summary and control are easier.

Even on a calculating machine with 10 positions of the carriage we could not have computed our 13-figure product without splitting the factors, i. e. in a single process. Our example shows that even with a small calculating machine we can quickly penetrate into high values, because the partial products of different rank have been set over against each other strongly, namely by s (here 5) places.

Division with a many-figure divisor $A + a + \alpha + \dots$ is not quite so convenient. A many-figure numerator has to be treated as shown above. Therefore we will imagine the numerator (dividend) = 10, that is, essentially we confine ourselves on seeking the reciprocal of a many-figure number. Let thus a many-figure number $B + b + \beta + \dots$ be sought, so that

is the result.

Calculation of B : We determine B so that $B(A + a) < 10$ comes up to 10 as closely as possible. In other words: so, that BA remains just below $10 - [Ba]$. To obtain this, it is sufficient to compute Ba (from the first one or two figures of B and a) up to one or two places which shall be marked by square brackets. On the machine we set up A and go on turning until in the receiving register appears a number which does not come up to $10 - [Ba]$, but would outvalue it in a further turn.

Calculation of b : With B calculated in this way we compute accurately on the machine

Sie reicht bis in die Dezimalstelle $2s-2$. | reaches into the decimal place $2s-2$.
Darauf bestimmt man b so, daß | Thereupon we determine b so, that

$$b(A + a + \alpha) \approx 10 - B(A + a + \alpha) = c - Ba - [B\alpha] = d' - [B\alpha],$$

folglich | results. Hence we obtain

$$bA \approx d' - [B\alpha] - [ba]$$

wird. $B\alpha$ und ba braucht man dazu nur mit 1 oder 2 Ziffern. Auf der Maschine stellt man wieder A ein und dreht so lange, bis das Produkt seinen eben noch zulässigen Wert erreicht hat.

$B\alpha$ and ba we need here only with one or two figures. Into the machine we set A again and turn, until the product has attained its just admissible value.

Berechnung von β : Mit dem so bestimmten b berechnet man auf der Maschine genau

Calculation of β : With b so determined we compute in the machine accurately

$$d = c - Ba - bA = d' - bA < 0,1^{2s-2}.$$

d reicht bis in die Dezimalstelle $3s-2$. | d goes up to the decimal place $3s-2$.
Darauf bestimmt man β so, daß | Thereupon we determine β so that

$$\beta A \approx 10 - (B + b)(A + a + \alpha) \approx d - Ba - ba = e'$$

wird, nachdem man auf der Maschine wieder A eingestellt hat. Dabei können etwa die zwei letzten Ziffern von β falsch werden (β zu groß).

results, after having set A into the machine again. It is possible that the two last figures of β come wrong (β too large).

Schließlich berechnet man noch auf der Maschine genau

Finally we calculate on the machine exactly

$$e = d - Ba - ba - \beta A = e' - \beta A < 0,1^{3s-2}.$$

e reicht nach rechts bis in die Dezimalstelle $4s-2$. Dann ist

To the right, e goes up to the decimal place $4s-2$. Now

$$(B + b + \beta)(A + a + \alpha) = 10 - e + (b\alpha + \beta a) + \beta\alpha.$$

Die Glieder in der Klammer auf der rechten Seite können nach links höchstens bis in die Dezimale $3s-2$ reichen.

The terms in brackets on the right side can towards the left reach into the decimal $3s-2$ at the utmost.

Die folgenden Formeln mögen es erleichtern, den beschriebenen Rechnungsgang zu überblicken:

The following formulas may make it easier to take in at a glance the calculation described:

$$\begin{aligned} BA + d' &= 10 - Ba, & 0 < d' < 0,1^{s-1}A, \\ bA + e' &= d' - B\alpha - ba, & 0 < e' < 0,1^{2s-1}A, \\ \beta A + e &= e', & 0 < e < 0,1^{3s-1}A. \end{aligned}$$

Als Beispiel berechnen wir $\varrho = 10/\pi$. Wir setzen

As an example we compute $\varrho = 10/\pi$. We put

$$\pi = A + a + \alpha + \dots \quad \text{und} \quad \varrho = B + b + \beta + \dots$$

Die Maschine habe $s = 5$ Schlittenstellungen. Dann ist

Let the machine have 5 positions of the carriage. In that case we have

$$A = 3,1415 \quad a = 0,0^4 92653 \quad \alpha = 0,0^8 58979.$$

Berechnung von B : $a \approx 1 \cdot 10^{-4}$ und $B \approx 3$, daher $Ba \approx 0,0^3 3$ und $BA \approx 9,9997$. Man stellt auf der Maschine

Calculation of B : $a \approx 1 \cdot 10^{-4}$ and $B \approx 3$, therefore $Ba \approx 0,0^3 3$ and $BA \approx 9,9997$. We set into the machine

31415 ein und findet als größtes zulässiges Produkt | 31415 and find as the highest permissible product

$$BA = 9,999\,394\,50 \quad \text{mit} \quad B = \underline{3,1830}.$$

Berechnung von b : | Calculation of b :

$$c = 10 - BA = 0,0^3\,605\,50 \quad \text{und} \quad Ba = 0,0^3\,294\,914\,499\,0,$$

$$\text{somit} \quad d' = c - Ba = 0,0^3\,310\,585\,501\,0 \approx bA.$$

Folglich $b \approx 0,0^3\,1$ und $ba \approx 0,0^8\,9$. | Ferner $Ba \approx 0,0^8\,2$, daher
Hence and Further therefore

$$Ba + ba \approx 0,0^7\,11 \quad \text{und} \quad bA \approx 0,0^3\,310\,574.$$

Wir stellen auf der Maschine 31415 ein und finden als größtes zulässiges Produkt | We set 31415 into the machine and find as the highest permissible product

$$bA = 0,0^3\,310\,571\,831\,5 \quad \text{mit} \quad b = \underline{0,0^4\,98\,861}.$$

Berechnung von β : | Calculation of β :

$$\begin{aligned} d &= d' - bA = \underline{0,0^7\,13\,669\,5} \\ Ba &= 0,0^7\,01\,877\,301\,570 \\ ba &= 0,0^7\,09\,159\,768\,233 \\ Ba + ba &= \underline{0,0^7\,11\,037\,069\,803} \\ \beta A &\approx e' = \underline{0,0^7\,02\,632\,430\,197} \end{aligned}$$

Auf der Maschine wird 31415 eingestellt. Als größtes zulässiges Produkt ergibt sich | 31415 is set into the machine. As the highest permissible product we get

$$\beta A = 0,0^8\,2\,632\,419\,925 \quad \text{mit} \quad \beta = \underline{0,0^9\,837\,95}.$$

Dem Produkt unsrer Faktoren fehlt an 10 ungefähr noch $e = 0,0^{13}\,10\,272$. Wir werden also ϱ mit 13 brauchbaren Dezimalen erhalten haben: | The product of our factors still wants about $e = 0,0^{13}\,10\,272$ up to 10. Consequently we shall have obtained ϱ with 13 efficient decimals:

$$\varrho = 3,183\,0|98\,861|837\,9.$$

(Tatsächlich $\varrho = \dots 837\,906\,715\dots$). Auch auf einer großen Rechenmaschine etwa mit 10 Schlittenstellungen ist dieses Ergebnis nur in zwei Schritten (Teilen) zu gewinnen.

(In fact ϱ is $= \dots 837\,906\,715\dots$). In a big calculating machine with, say, 10 positions of the carriage this result can also be obtained only in two operations.

Wenn man für a, α, b, β auch negative Werte zuläßt, wird die Rechnung bequemer, weil man keine Korrekturgrößen zu berechnen braucht. Nur tritt die Gefahr hinzu, daß man sich in den Vorzeichen irrt. Den geänderten Rechnungsgang zeigen wir, indem wir nochmals $\varrho = 10/\pi$ berechnen. Wir wählen

If for a, α, b, β , also negative values are admitted, the calculation becomes more convenient, as no corrections need be calculated. There is only the additional danger of errors in signs. We show the altered calculation process by again calculating $\varrho = 10/\pi$. We choose

$$A = 3,14160 \quad a = -0,0^5\,7\,346\,4 \quad \alpha = -0,0^{10}\,10\,207.$$

Wir haben also A zu groß gewählt. Wir wählen auch noch B zu groß: $B = \underline{3,1831}$. | Thus we have chosen A too large. We choose B too large also: $B = \underline{3,1831}$. If

Wenn wir uns auf 4 Dezimalen beschränken, wären das die richtigen Werte. Wir erhalten damit

we confined ourselves to four decimals, those would be the correct values. Therefore we obtain

$$\begin{array}{rcl}
 c = 10 - AB = -0,0426\,96 \\
 Ba = -0,0423\,384\,325\,84 \\
 bA \approx d' = -0,0403\,575\,674\,16 \\
 bA = -0,0403\,575\,769\,12 \\
 d = d' - bA = +0,0400\,000\,094\,96 \\
 d = +0,09\,094\,96 \\
 Ba = -0,09\,032\,489\,901\,7 \\
 + 0,09\,127\,449\,901\,7 \\
 ba = +0,09\,008\,361\,672\,48 \\
 \beta A \approx e' = +0,09\,119\,088\,229\,22 \\
 \beta A = +0,09\,119\,088\,631\,20 \\
 e = -0,09\,000\,000\,401\,98
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{mit} \\
 \text{with}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 b = -0,051\,138\,2. \\
 \beta = +0,01037\,907.
 \end{array}$$

Das Produkt aus dem angenommenen Divisor und dem gefundenen Quotienten übertrifft 10 ungefähr um $0,0^{15}4$. Demnach haben wir 15 brauchbare Dezimalen zu erwarten, also 2 Dezimalen mehr als vorher:

The product from the supposed divisor and the found quotient exceeds 10 by about $0,0^{15}4$. Hence we may expect 15 efficient decimals, consequently 2 decimals more than before:

$$\begin{aligned}
 q &= 3,183\,101\,138\,2 | 37\,907 \\
 &= 3,183\,098\,861\,837\,907.
 \end{aligned}$$

Die folgenden Formeln geben einen Überblick über diesen Rechnungsgang:

The following formulae give a survey of this calculation process:

$$BA + c = 10, \quad bA + d = c - Ba, \quad \beta A + e = d - Ba - ba.$$

Die Quotiententeile B, b, β werden so gewählt, daß die Reste c, d, e möglichst klein werden. Nur A und B müssen positiv sein.

The quotient parts B, b, β are so chosen, that the remainders c, d, e become as small as possible. Only A and B must be positive.

Es empfiehlt sich, zur Probe den Quotienten mit dem Divisor zu multiplizieren.

It is advisable for proof to multiply the quotient with the divisor.

Einige oft gebrauchte Konstanten

Some often used constants

$$\begin{aligned}
 \pi/2 &= 1,570\,796\,327 = 1 : 0,636\,619\,772 \\
 \pi^2 &= 9,869\,604\,401 = 1 : 0,101\,321\,184 \\
 \sqrt{\pi} &= 1,772\,453\,851 = 1 : 0,564\,189\,584 \\
 \sqrt{\pi/2} &= 1,253\,314\,137 = 1 : 0,797\,884\,561 \\
 e &= 2,718\,281\,828 = 1 : 0,367\,879\,441 \\
 \pi^3 &= 31,006\,276\,68 = 1 : 0,032\,251\,534\,43 \\
 \pi^4 &= 97,409\,091\,03 = 1 : 0,010\,265\,982\,255 \\
 \pi^5 &= 306,019\,684\,8 = 1 : 0,003\,267\,763\,643 \\
 \pi^6 &= 961,389\,193\,6 = 1 : 0,001\,040\,161\,473 \\
 e^{\frac{\pi}{2}} = i^{-1} &= 4,810\,477\,381 = 1 : 0,207\,879\,576\,4 = 1 : i^i \\
 \pi\sqrt{2} &= 4,442\,882\,938 = 1 : 0,225\,079\,079 \\
 \sqrt[3]{\pi} &= 1,464\,591\,888 = 1 : 0,682\,784\,063\,3
 \end{aligned}$$

Hilfsmittel für den Rechner Useful books for the computer

I. Produkten-Tafeln.

- a) H. Zimmermann, Rechentafeln. (Berlin 1929 bei W. Ernst.) 204 Seiten. Produkte bis 99 mal 999. Ausgabe A 6,80 *RM*. Ausgabe B 8,20 *RM*.
- b) L. Zimmermann, Rechentafeln, große Ausgabe. (Berlin-Grunewald bei Herbert Wichmann.) 225 Seiten. Produkte bis 99 mal 999. Preis 7,00 *RM*.
- c) A. L. Crelle, Rechentafeln. (Leipzig 1930 bei Gruyter.) 501 Seiten. Produkte bis 999 mal 999. Preis 26,00 *RM*.
- d) J. Peters, Neue Rechentafeln (Berlin 1909 bei Gruyter.) 501 Seiten. Produkte bis 99 mal 9999. Preis 20,00 *RM*.
- e) Brit. Ass. Adv. Sc., Mathematical tables, vol. V, Factor table (London 1935, durch Cambridge University Press), 291 Seiten. Faktoren der Zahlen bis 100 000. (Großes Format.) Preis 17,60 *RM*.

II. Größere Tafeln einfacher Funktionen.

- a) M. van Haften, Reziprokentafeln. (Groningen 1926 bei Noordhoff.) 50 Seiten. Kehrwerte von 1 ... 10 000 mit 7 geltenden Stellen. Preis 5,20 *RM*.
- b) W. H. Oakes, Table of the reciprocals of numbers 1 ... 100 000 mit 7 geltenden Stellen. (London 1864 bei Leyton.) 205 Seiten. Preis 21,00 *RM*.
- c) P. Timpenfeld, Quadrate von 1 ... 12 000, Kuben von 1 ... 1200. (Dortmund 1926 bei Krüger.) 123 Seiten. Preis 4,00 *RM*.
- d) L. Zimmermann, Quadrate von 1 ... 100 009. (Liebenwerda 1925 bei Reiss.) 187 Seiten. Preis 6,40 *RM*.
- e) J. Blater, Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 ... 200 000. (Mödling 1887 bei J. Thomas.) 205 Seiten. Preis 12,00 *RM*.
- f) J. Plassmann, Tafel der Viertel-Quadrate aller Zahlen von 1 ... 20 009 zur Erleichterung des Multiplizierens vierstelliger Zahlen. (Leipzig 1933 bei Jänecke.) 226 Seiten. Preis 6,40 *RM*.
- g) J. Bojko, Viertelquadrate der Zahlen 1 bis 20 000. (Zürich 1909 bei E. Speidel.) 23 + 20 Seiten. Preis 1,50 *RM*.
- h) Barlow's Tables of squares, cubes, square roots, cube roots and reciprocals of all integer numbers up to 10 000, 3. Aufl. (London 1930 bei Spon.) 208 Seiten. Preis 6,50 *RM*.
- i) L. M. Milne-Thomson, Standard table of square roots. (London 1929 bei G. Bell.) 90 Seiten. Preis 6,50 *RM*.

III. Rechen-Instrumente und -Maschinen.

- a) A. Galle, Math. Instrumente. (Leipzig 1912 bei Teubner.) 187 Seiten. Preis 5,60 *RM*.
- b) K. Lenz, Die Rechen- und Buchungsmaschinen. (Leipzig 1932 bei Teubner.) 122 Seiten. Preis 5,40 *RM*.
- c) L. Couffignal, Les machines à calculer. (Paris 1933 bei Gauthier-Villars.) 86 Seiten. Preis 2,00 *RM*.

IV. Zahlenrechnen.

- a) J. Lüröth, Numerisches Rechnen. (Leipzig 1900 bei Teubner.) 194 Seiten. Vergriffen.
- b) L. Schrutka, Zahlenrechnen. (Leipzig 1923 bei Teubner.) 146 Seiten. Preis 2,70 *RM*.
- c) U. Cassina, Calcolo numerico. (Bologna 1928 bei Zanichelli.) 451 Seiten. Preis 17,60 *RM*.
- d) G. Cassinis, Calcoli numerici, grafici e meccanici. (Pisa 1928 bei Mariotti-Pacini.) 672 Seiten. Preis 22,00 *RM*.
- e) E. Maccaferri, Calcolo numerico approssimato. (Milano 1919 bei U. Hoepli.) 200 Seiten. Preis 3,25 *RM*.

V. Graphisches Rechnen.

- a) R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. (Wien und Leipzig 1924 bei Deuticke.) 183 Seiten. Preis 4,20 *RM*.
- b) C. Runge, Graphische Methoden. (Leipzig 1928 bei Teubner.) 142 Seiten. Preis 5,40 *RM*.

VI. Praktische Analysis.

(Interpolation, genäherte Integration und Differentiation, Reihen, algebraische, transzendente und Differential-Gleichungen.)

- a) O. Biermann, Mathematische Näherungsmethoden. (Braunschweig 1905 bei Vieweg.) 227 Seiten. Preis 8,00 *RM*.
- b) H. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. (Leipzig 1903 bei Teubner.) 159 Seiten. Vergriffen.
- c) H. L. Rice, Theory and practice of Interpolation. (Lynn 1899 bei Nichols.) 234 Seiten. Enthält Tafeln der Vorzahlen für die Interpolation bis zur 5. Ordnung. Preis 24,50 *RM*.
- d) T. N. Thiele, Interpolationsrechnung. (Leipzig 1909 bei Teubner.) 175 Seiten. Preis 10,00 *RM*.

- e) J. F. Steffensen, Interpolation. (Englisch.) (London 1927 bei Baillière, Tindall & Cox.) 248 Seiten. Preis 36,80 RM
- f) C. Runge und H. König, Numerisches Rechnen. (Berlin 1924 bei Springer.) 371 Seiten. Preis 15,93 RM
- g) H. v. Sanden, Praktische Analysis. (Leipzig 1923 bei Teubner.) 195 Seiten. Preis 5,60 RM
- h) Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. (Leipzig 1928 bei Gruyter.) 344 Seiten. Preis 21,50 RM
- i) E. T. Whittaker and G. Robinson, The calculus of observations. A treatise on numerical mathematics. (London 1924 bei Blackie and Son.) 395 Seiten. Preis 18,50 RM
- k) R. Radau, Formules d'interpolation. (Paris 1891 bei Gauthier-Villars.) 96 Seiten. Preis 3,50 RM
- l) J. B. Scarborough, Numerical mathematical Analysis. (Baltimore 1930, Johns Hopkins Press.) 416 Seiten. Preis 23,00 RM
- m) M. Lindow, Numerische Infinitesimalrechnung. (Berlin u. Bonn 1928 bei F. Dümmler.) 176 Seiten. Preis 18,00 RM
- n) K. Hayashi, Tafeln für die Differenzenrechnung sowie ... (Berlin 1933 bei Springer.) 66 Seiten. Preis 12,00 RM
- o) L. M. Milne-Thomson, Calculus of finite Differences. (London 1933 bei Macmillan.) 558 Seiten. Preis 26,50 RM

VII. Formelsammlungen.

- a) E. P. Adams, Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions (Theta-Funktionen). (Washington 1922 Smith. Inst.) 314 Seiten. Preis 14,70 RM
- b) W. Laska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. (Braunschweig 1888 bis 1894 bei Vieweg.) 1071 Seiten. Preis brosch. 22,50 RM
- c) E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl. (Berlin 1936 bei Springer.) 381 Seiten. Preis 27,00 RM
- d) G. Petit-Bois, Tafeln unbestimmter Integrale. (Leipzig 1906 bei Teubner.) 154 Seiten. Vergriffen.
- e) B. O. Peirce, A short table of integrals, 2. ed. (Boston 1910 bei Ginn.) 151 Seiten. Preis 1,80 RM
- f) J. Thomae, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen. (Leipzig 1905 bei Teubner.) 44 Seiten. Vergriffen.
- g) G. Prévost, Tables des fonctions sphériques. (Paris u. Bordeaux 1933 bei Gauthier-Villars.) S. 136—157. (Großes Format.) Preis 13,20 RM
- h) H. B. Dwight, Tables of integrals and other mathematical data. (New York 1934 bei Macmillan.) 222 Seiten. Preis 6,00 RM

VIII. Hilfsmittel zur harmonischen Analyse.

- a) C. Runge und F. Emde, Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. (Braunschweig bei Vieweg.) Text 1,00 RM (Formulare vergriffen.)
- b) L. Zipperer, Tafeln zur harmonischen Analyse. (Berlin 1922 bei Springer.) In Mappe 3,78 RM
- c) P. Terebesi, Rechenschablonen für harmonische Analyse. (Berlin 1930 bei Springer.) In Mappe 16,20 RM
- d) L. W. Pollak, Rechentafeln zur harmonischen Analyse. (Leipzig 1926 bei Barth.) 160 große Seiten. Preis 30,00 RM
- e) W. Lohmann, Harmonische Analyse zum Selbstunterricht. (Berlin 1921 bei Fischers med. Buchh.) Preis 1,00 RM
- f) A. Hußmann, Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese. (Berlin 1938 bei Springer.) Preis 9,60 RM
- g) K. Stumpff, Tafeln und Aufgaben zur harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung. (Berlin 1939 bei Springer.) 174 Seiten. Preis 39,60 RM

IX. Interpolationstafeln.

- a) E. Chappell, Table of Coefficients ... (London 1929, Selbstverlag, 41 Westcombe Park Road, S. E. 3.) 27 große Seiten. Für die Interpolation nach Gauß, Bessel, Everett. α) 7 bis 10 Dezimalen, Schritt: 0,001; β) genaue Werte (5 bis 16 Dezimalen), Schritt: 0,01. Preis 4,00 RM
- b) A. J. Thompson, Table of the Coefficients of Everett's ...; Tracts for computers V. (Cambridge 1921, University press.) XVI + 20 Seiten. 10 Dezimalen, Schritt: 0,001. Preis 3,30 RM
- c) H. T. Davis, Tables of higher math. functions, vol. I. (Bloomington 1934, Principia Press.) 377 Seiten. Für die Interpolation nach Gregory, Stirling, Bessel, Everett und für die Differentiation nach Gregory, Everett. (S. 101—147.) 6 bis 14 Dezimalen, Schritt: 0,01. Preis 14,00 RM
- d) L. J. Comrie, Interpolation and allied tables. (Sonderdruck aus Nautical Almanac for 1937, London 1936, H. M. Stationery Office.) Für die Interpolation nach Bessel, Everett sowie für Differentiation. 45 Seiten. 3 bis 10 Dezimalen. Preis 0,90 RM
- e) L. J. Comrie, Interpolation tables (Sonderdruck aus Nautical Almanac for 1931, London 1929, H. M. Stationery Office). Für die Untertafelung (Unterteilung in 5 oder 10 Teile) nach dem Endziffer-Verfahren. 36 Seiten. Preis 0,90 RM
- f) K. Pearson, On the construction of tables and on interpolation, Part I/II. (Cambridge 1920, University Press, Tracts for computers No. II/III.) 70 u. 54 Seiten. Preis 5,20 RM

Verzeichnis von Tafeln der elementaren Transzendenten

I. Kreisfunktionen von Winkeln mit Dezimalteilung des Grades.

- a) C. Bremiker, Log.-trig. Tafeln mit fünf Dezimalstellen. (Berlin 1906, Weidmannsche Buchhandlung.) 191 Seiten. Natürliche Werte der Kreisfunktionen mit vier Dezimalen. Winkel um 0,1 Grad fortschreitend. Preis 2,10 RM
- b) A. Schülke, Vierst. Log.-Tafel. (Leipzig 1932 bei Teubner.) 40 Seiten. Wie bei a) Preis 1,80 RM
- c) Ph. Lötzbeyer, Vierst. Tafeln zum logarithmischen und natürlichen Rechnen. (Leipzig 1930 bei Teubner.) 44 Seiten. Wie bei a). Preis 2,00 RM
- d) Siehe unter III, i). — Wie bei a).
- e) O. Lohse, Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen. (2. Aufl., Leipzig 1935 bei Engelmann.) 113 Seiten. Kreisfunktionen mit fünf Dezimalen. Winkel um 0,01 Grad fortschreitend. Preis 6,00 RM
- f) J. Peters, Siebenstellige Werte der trigon. Funktionen. (Berlin 1918, Goerz, Teubner.) 384 Seiten. Winkel um 0,001 Grad fortschreitend. Preis 18,00 RM u. 21,00 RM
- g) J. Peters, Kreis- und Evolventenfunktionen. (Bonn 1937 bei Dümmler.) 217 Seiten. Sechs Dezimalen. Winkel um 0,01 Grad fortschreitend. Preis 20,00 RM

II. Kreisfunktionen von Winkeln in Dezimalteilen des Rechten.

- a) H. Gravelius, Fünfst. log.-trig. Tafeln. (Berlin-Leipzig 1886 bei Georg Reimer.) 203 Seiten. Kreisfunktionen mit vier Dezimalen. Winkel um 0,001 Rechten fortschreitend. Vergriffen.
- b) F. G. Gauß, Fünfst. log.-trig. Tafeln für Dezimalteilung des Quadranten. (Stuttgart 1926 bei Wittwer.) 140 Seiten. Wie bei a). Preis 5,85 RM
- c) J. Hoüel, Recueil de formules et de tables numériques. (Paris 1901 bei Gauthier-Villars.) LXXI + 64 Seiten. Wie bei a). Preis 2,20 RM
- d) F. Balzer und H. Dettwiler, Fünfst. natürliche Werte der Kreisfunkt., 2. Aufl. (Stuttgart 1938 bei Wittwer.) 101 Seiten. Winkel um 0,0001 Rechten fortschreitend. Preis 3,60 RM
- e) G. Steinbrenner, Fünfst. trig. Tafeln neuer Tlg. zum Masch.-Rechnen. (Braunschweig 1914 bei Grimme, Natalis u. Co.) 174 Seiten. Wie bei d). Preis 10,00 RM
- f) J. Peters, Sechst. trig. Tafel für neue Teilung. (Berlin 1930 bei Wichmann.) 170 Seiten. Gibt auch sec und cosec. Winkel um 0,0001 Rechten fortschreitend. Preis 18,00 RM
- g) J. Ph. Hobert u. L. Ideler, Nouvelles tables trigonométriques. (Berlin 1799, Librairie de l'École Réelle.) 351 Seiten. Funktionswerte mit 7 Dezimalen. Winkel von 0,00 000 bis 0,03 000 in Schritten von 0,000 01, von 0,0300 bis 0,5000 in Schritten von 0,0001. Vergriffen.
- h) Roussilhe und Brandicourt, Tables à 8 décimales des valeurs naturelles des sinus, cosinus et tangentes. (Paris 1925 bei Dorel.) 139 Seiten. Wie bei d). Vergriffen.
- i) Brit. Ass. Adv. Sc. Math. Tables, vol. I. (London 1931.) 72 Seiten. $\sin \pi x$, $\cos \pi x$ mit 15 Dezimalen für $x = 0,0001 \dots 0,0100$, Schritt 0,0001; 15 ... 16 Stellen für $x = 0,01 \dots 4,00$, Schritt 0,01; 15 Dezimalen für $x = 0,1 \dots 10,0$, Schritt 0,1 (bis 20 Stellen). Preis 8,80 RM
- k) K. Hayashi, Tafeln für die Differenzenrechnung. (Berlin 1933 bei Springer.) 66 Seiten. $e^{\pi x}$, $e^{-\pi x}$, $\sin \pi x$, $\cos \pi x$ 7- bis 8-stellig für $x = 0,01 \dots 10,00$, Schritt 0,01. Preis 12,00 RM
- l) J. Peters, Sechst. Werte der trigonometrischen Funktionen. (Berlin 1938 bei Wichmann.) 512 Seiten. Winkel um 0,000 01 Rechten fortschreitend. Preis 43,00 RM

III. Hyperbelfunktionen und Exponentialfunktion einer reellen Veränderlichen und Kreisfunktionen von Winkeln im Bogenmaß.

- a) W. Ligowski, Tafeln der Hyperbel- und Kreisfunktionen. (Berlin 1890 bei Ernst u. Korn.) 104 Seiten. Gibt $\sin$, $\cos$, tg , $\sin$, $\cos$ von $x = 0,00$ bis 2,00 mit sechs Dezimalen und $\sin$, $\cos$ von $x = 2,00$ bis 8,00 sechs- bis achtstellig in Schritten von 0,01. Preis 6,00 RM
- b) C. Burrau, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. (Berlin u. Leipzig 1907 bei W. de Gruyter.) 63 Seiten. Gibt $\sin$ und $\cos$ von $x = 0$ bis 1,609 und $\cos$ und $\sin$ von $x = 0$ bis 8,009 in Schritten von 0,001. Preis 4,00 RM
- c) C. F. Becker und C. E. van Orstrand, Hyperbolic functions. (Washington 1909, Smithsonian Institution.) 321 Seiten. Enthält zahlreiche Tafeln in Schritten von 0,0001 und 0,001 (natürliche Zahlen und Logarithmen). Preis 16,80 RM
- d) K. Hayashi, Fünfst. Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sowie der Funktionen e^x und e^{-x} . (Berlin und Leipzig 1938 bei Gruyter.) 182 Seiten. Wie bei c) (ohne Logarithmen). Preis 9,00 RM
- e) U. Meyer und A. Deckert, Tafeln der Hyperbelfunktionen. (Wittenberg 1924 bei Ziemsen.) 78 Seiten. Gibt $\sin$, $\cos$, tg von $x = 0$ bis 3,009 und $\sin$, $\cos$, tg in Schritten von 0,001, dazu die Logarithmen. Preis 3,50 RM
- f) K. Hayashi, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion. (Berlin 1926 bei Springer.) 283 Seiten. Preis 43,20 RM

- g) K. Hayashi, Fünfstellige Funktionentafel. (Berlin 1930 bei Springer.) 176 Seiten. Gibt die Kreis-, Exponential- und Hyperbelfunktionen sowie ihre Umkehrungen für $x = 0,00$ bis $10,00$ in Schritten von $0,01$. Preis 27,00 RM
- h) Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, 26. Aufl., Bd. I. (Berlin 1931 bei Ernst u. Sohn.) 1199 Seiten. Funktionswerte mit 5 Dezimalen für $x = 0,00$ bis $1,60$ in Schritten von $0,01$ und für $x = 1,6$ bis $6,0$ in Schritten von $0,1$. Preis 16,50 RM
- i) L. M. Milne-Thomson und L. J. Comrie, Standard four-figure mathematical tables. (London 1931 bei Macmillan.) 245 Seiten. Kreisfunktionen für $x = 0,0000$ bis $0,0350$ in Schritten von $0,0001$. Kreis-, Hyperbel- und Exponentialfunktionen für $x = 0,000$ bis $1,570$ in Schritten von $0,001$. Preis 8,40 RM
- k) Brit. Ass. Adv. Sc., Math. Tables, vol. I. (London 1931.) 72 Seiten. $\sin x$, $\cos x$ mit 15 Dezimalen für $x = 0,1 \dots 50,0$, Schritt $0,1$; 11 Dezimalen für $x = 0,001 \dots 1,600$, Schritt $0,001$. Preis 8,80 RM
- l) J. W. Campbell, Numerical Tables of hyperbolic and other functions. (Boston 1929 bei Houghton Mifflin.) 76 Seiten. Vierstellig. Schritt $0,001$ und $0,01$. Preis 4,50 RM
- m) H. W. Holtappel, Tafeln von e^x . (Groningen 1938 bei Noordhoff.) 132 Seiten. Gibt e^x und e^{-x} mit 10 Dezimalen für $x = 0,000 \dots 9,999$ und e^x mit 20 Dezimalen für $10^n x = 1 \dots 999$, wo $n = 1, 2, 3, 4$. Preis 8,00 RM

IV. Kreis- und Hyperbelfunktionen einer komplexen Veränderlichen.

- a) A. E. Kennelly, Tables of complex hyperbolic and circular functions. (Cambridge 1914, Harvard University Press.) 212 Seiten, dazu ein großer Atlas. Enthält viele Tafeln, z. B. $\sin$ und $\cos$ von $z = 0$ bis $3,95 + i 2,00$ in Schritten von $0,05$ und $i 0,05$. Preis 15,60 u. 20,00 RM
- b) L. Cohen, Formulae and tables for the calculation of alternating current problems. (New York 1913 bei McGraw-Hill.) 282 Seiten. Enthält am Schluß die von W. E. Miller berechnete Tafel des $\sin$ und $\cos$ von $z = 0$ bis $0,98 + i 1,00$ in Schritten von $0,02$ und $i 0,02$. Preis 14,60 RM
- c) U. Meyer, Fluchtlinientafeln des Hyperbeltangens einer komplexen Veränderlichen. (Organisation, Verlagsges. m. b. H., S. Hirzel, Berlin.) Vergriffen.
- d) R. Hawelka, Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im Komplexen in Schritten von $0,02$ und $i 0,02$. Gebrauchsanweisung deutsch, englisch, französisch. (Elektrotechnischer Verein in Berlin 1931.) 109 Seiten. Preis 7,50 RM

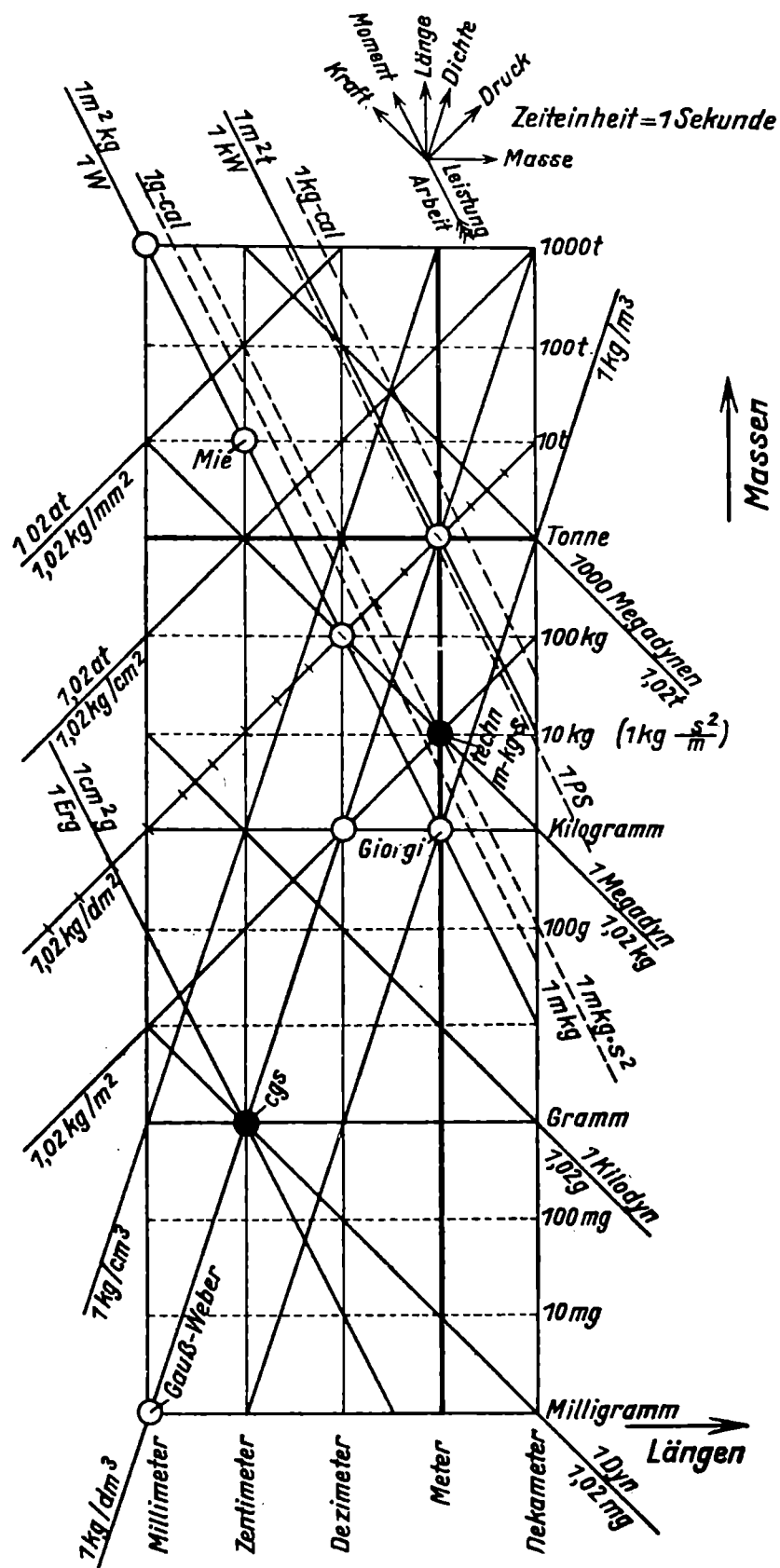


Fig. 83. Logarithmisches Diagramm der mechanischen Einheiten. Geraden durch einen Punkt geben Einheiten eines Maßsystems an

Fig. 83. Logarithmic diagram of the mechanical units. Straight lines through a point give units of a system

Sachverzeichnis

Die schräg gedruckten Zahlen geben die Seiten für die Zahlentafeln an

- Amp $\frac{1}{2} x$ 80, 85
- Amp x 93, 94, 100, 102, 109
- Ar Amp x 98, 99, 111
- arc cos x 99, 101, 108
- Ar Cos x 102, 103, 109, 112
- arc sin x 98, 99, 101, 108
- arc tg x 98, 99, 100, 103, 109
- Ar Sin x 100, 102, 109, 112
- Ar Tg x 98, 99

- Bemerkungen über Zahlenrechnungen 163
- Binomischer Satz 162
- Biquadratische Gleichungen 49
- Bücherverzeichnis 173

- cos x (x in Graden) 77
- cos $x \cdot \sqrt{2}$ (x in Graden) 78
- 1 — cos α (α in Graden) 79
- cos x (x in Radianen) 101, 103, 104, 105, 106
- 1 — cos x (x in Radianen) 113
- cos $x^{\frac{1}{2}}$ 80
- cos $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$ 87
- 1 — cos $q^{\frac{1}{2}}$ 89
- Cos x 101, 103, 104, 105, 106
- Cos $x - 1$ 113
- Cos $\frac{1}{2} x$ 80, 81, 82, 83
- Cos $\frac{1}{2} x - 1$ 89
- Cos x cos x , Cos x sin x 124
- ctg x (x in Graden) 77
- ctg x (x in Rechten) 85
- Ctg $\frac{1}{2} x$ 85, 87
- ctg $q \cdot q$; $\frac{\text{ctg } q}{q}$ 125, 126 . . . 129

- Einheiten, mechanische (Logarithmisches Diagramm) 177
- Elementaren Transzendenten, Verzeichnis von Tafeln der 175
- $e^{\frac{1}{2} x}$, $e^{-\frac{1}{2} x}$ 80, 81, 82, 83, 84, 87
- e^x , e^{-x} 101, 103 . . . 108, 112
- e^{-x^n} 116
- Exponentialfunktion 80ff., 101ff.
- : e^{-x^2} 116
- : $e^z = e^{x+iy}$ 95
- : $10^x = \text{num } x$ 79

- Faktorentafel 20 . . . 24
- Fakultäten 24
- Funktion, Exponential- 80ff., 101
- , —: e^{-x^n} 116, e^{-x^2} 116
- Funktionen, Hyperbel- 90
- , —, einer komplexen Veränderlichen 132
- , Kreis- 73
- , —, einer komplexen Veränderlichen 132

- Funktion, Langevinsche 123
- , Quellen-, der Wärmeleitung 119
- , Plancksche Strahlungs- 117, 118, 119
- $\frac{\text{tg}(i^{0,5} x)}{i^{0,5} x}$ 146, 150 . . . 155
- z^z 158, 161

- Gleichungen, biquadratische 49
- , kubische 38, 44 . . . 47
- , quadratische 34, 36, 37
- 4. Grades 49
- , transzendente 130
- Gudermannscher Winkel $\text{gd } x = \text{Amp } x$ 94, 80, 100, 102, 109

- Hyperbelamplitude Amp x 94, 80, 100, 102, 109
- Hyperbelfunktionen 90, 80ff., 98ff.
- und Kreisfunktionen einer komplexen Veränderlichen 132

- i^{12} , i^{-12} 80, 81, 82, 83, 84, 87

- Kehrwerte 12, 13
- der Quadrate 14, 15, 16
- von komplexen Zahlen 26, 27
- Komplexen Veränderlichen, Kreis- und Hyperbelfunktionen einer 132
- Komplexe Zahlen, Kehrwerte 26, 27
- , Quadratwurzeln 27, 28, 29
- , Rechtwinklige und Polarkoordinaten 29, 30
- , Vektoraddition 32, 33
- Konstanten, oft gebrauchte 172
- Kreisfunktionen, Formeln 73
- , Winkel in Graden 77 . . . 79
- , — Radianen 98ff.
- , — Rechten 80, 85, 87, 89
- und Hyperbelfunktionen einer komplexen Veränderlichen 132
- Kuben 14, 15, 16
- Kubikwurzeln 18, 19
- Kubische Gleichungen 38, 44

- Langevinsche Funktion Ctg $x - \frac{1}{x}$ 123
- lg x 114, 115
- ln x 114, 115

- M , $\frac{1}{M}$, Vielfache von 25
- Mechanische Einheiten, logarithmisches Diagramm 177

- Näherungsrechnungen mit Polynomen 159
- num $x = 10^x$ 79

- $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}$, Vielfache von 25
 Plancksche Strahlungsfunktion 117, 118, 119
 Polar- und rechtwinklige Koordinaten 29, 30
 Polynomen, Näherungsrechnungen mit 159
 —, Tschebyschewsche 75; 156, 157
 Potenzen Fig. 1, 2 (S. 1), Fig. 3 (S. 10), Fig. 4 (S. 11)
 — -Tafel 2 . . . 9
 — —, Beispiele zur 8, 9
 — von 2, 3, 5, 7, 11 17

 Quadrate 12, 13
 —, Kehrwerte der 14, 15, 16
 Quadratwurzeln 18, 19
 — aus komplexen Zahlen 27, 28, 29
 Quadratische Gleichungen 34, 36, 37
 Quellenfunktionen der Wärmeleitung 119

 Rechnen mit komplexen Zahlen 26
 Rechnungen, Bemerkungen über Zahlen- 163
 —, Näherungs-, mit Polynomen 159
 Rechtwinklige und Polarkoordinaten 29, 30
 Reziproke 12, 13
 — der Quadrate 14, 15, 16
 — von komplexen Zahlen 26, 27

 $\sin x$ (x in Graden) 77
 — (x in Radianten) 100, 102, 104, 105, 106
 — (x in Rechten) 80
 $\sin x \cdot \sqrt{2}$ (x in Graden) 78
 $\sin x \cdot \sqrt{2}$ 87
 $\sin x$ 100, 102, 104, 105, 106
 $\sin \frac{x}{2}$ 80, 81, 82, 83
 $\sin x \sin x$, $\sin x \cos x$ 124
 Strahlungsfunktion, Plancksche 117, 118, 119
 Stromverdrängung bei Nutenankern 147

 Tafeln der elementaren Transzendenten, Verzeichnis von 175
 $\operatorname{tg} x$ (x in Graden) 77
 — (x in Radianten) 98, 99, 110
 — (x in Rechten) 85
 $\operatorname{tg} e \cdot e, \frac{\operatorname{tg} e}{e}$ 125; 126 . . . 129
 $\operatorname{tg} x$ 98, 99, 100, 102, 111
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ 86; 87
 $\frac{\operatorname{tg}(i^{0,5}r)}{i^{0,5}r}$ 146; 150 . . . 155
 Transzendente Gleichungen 130
 Transzendenten, Verzeichnis von Tafeln der elementaren 175
 Tschebyschewsche Polynome 75; 156, 157

 Vektoraddition 32, 33
 Verdrängung von Wechselstrom in Metallstäben bei Nutenankern 147
 Verzeichnis von Büchern 173
 — — Tafeln der elementaren Transzendenten 175
 Vielfache von $M, \frac{1}{M}$ 25
 — — $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}$ 25

 Wärmeleitung, Quellenfunktionen der 119
 Wechselstromverdrängung in Metallstäben bei Nutenankern 147
 Wurzeln, Quadrat- und Kubik- 18, 19
 — aus komplexen Zahlen 27, 28, 29

 Zahlenrechnungen, Bemerkungen über 163

General index

The obliquely printed page numbers refer to the tables

- Alternating current, non-uniform distribution of 147
 $\text{Amp } \frac{x}{2} = \text{gd } \frac{x}{2}$ 80, 85
 $\text{Amp } x = \text{gd } x$ 93, 94, 100, 102, 109
 Approximate calculations with polynomials 159
 $\text{Ar Amp } x = \text{gd}^{-1} x$ 98, 99, 111
 $\text{arc cos } x = \cos^{-1} x$ 99, 101, 108
 $\text{Ar Cos } x = \cosh^{-1} x$ 102, 103, 109, 112
 $\text{arc sin } x = \sin^{-1} x$ 98, 99, 101, 108
 $\text{arc tg } x = \text{tg}^{-1} x$ 98, 99, 100, 103, 109
 $\text{Ar Sin } x = \sinh^{-1} x$ 100, 102, 109, 112
 $\text{Ar Tg } x = \text{tgh}^{-1} x$ 98, 99
- Binomial theorem 162
 Books, list of 173
- Calculations, approximate, with polynomials 159
 —, remarks on numerical 163
 Chebyshev's polynomials 75, 156, 157
 Circular and hyperbolic functions of a complex variable 132
 Circular functions 73
 —, angles in degrees 77, 78, 79
 —, angles in quadrants 80, 85, 87, 89
 —, angles in radians 98f.
 Complex numbers, reciprocals 26, 27
 —, rectangular and polar co-ordinates 29, 30
 —, square roots 27, 28, 29
 —, vector addition 32, 33
 Complex variable, circular and hyperbolic functions of a 132
 Computation with complex numbers 26
 Constants, often used 172
 $\cos x$ (x in degrees) 77
 $\cos x \cdot \sqrt{2}$ (x in degrees) 78
 $1 - \cos \alpha$ (α in degrees) 79
 $\cos x$ (x in radians) 101, 103, 104, 105, 106
 $1 - \cos x$ (x in radians) 113
 $\cos x^{\perp}$ 80
 $\cos x^{\perp} \cdot \sqrt{2}$ 87
 $1 - \cos \varrho^{\perp}$ 89
 $\cos^{-1} x$, $\cosh x$, $\cosh^{-1} x$ see $\text{arc cos } x$, $\text{Cos } x$,
 $\text{Ar Cos } x$
 $\text{Cos } x = \cosh x$ 101, 103 . . . 106
 $\text{Cos } x - 1 = \cosh x - 1$ 113
 $\text{Cos } \frac{x}{2} = \cosh \frac{x}{2}$ 80, 81, 82, 83
 $\text{Cos } \frac{x}{2} - 1 = \cosh \frac{x}{2} - 1$ 89
 $\text{Cos } x \cos x = \cosh x \cos x$, $\text{Cos } x \sin x$
 $= \cosh x \sin x$ 124
 $\text{ctg } x$ (x in degrees) 77
 $\text{ctg } x$ (x in right angles) 85
- $\text{Ctg } \frac{x}{2} = \text{ctgh } \frac{x}{2}$ 86, 87
 $\text{ctg } \varrho \cdot \varrho; \frac{\text{ctg } \varrho}{\varrho}$ 125, 126 . . . 129
 Cube roots 18, 19
 Cubes 14, 15, 16
 Cubic equations 38, 44 . . . 47
 Current, alternating, non-uniform distribution of 147
- Distribution, non-uniform, of alternating current 147
- Elementary transcendents, list of tables of the 175
 Equations, cubic 38, 44 . . . 47
 — of 4th degree 49
 —, quadratic 34, 36, 37
 —, transcendental 130
 $e^{\frac{x}{2}}$, $e^{-\frac{x}{2}}$ 80, 81, 82, 83, 84, 87
 e^x , e^{-x} 101, 103 . . . 108, 112
 e^{-x^n} 116
 Exponential function 80f., 101f.
 — e^{-x^2} 116
 — $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}}$ 95
 — $10^x = \text{num } x$ 79
- Factorials 24
 Factor table 20 . . . 24
 Functions, circular 73
 —, — of a complex variable 132
 —, exponential 80, 101
 —, — e^{-x^n} 116, e^{-x^2} 116
 —, hyperbolic 90, 80, 98
 —, — of a complex variable 132
 —, Langevin's 123
 —, Planck's radiation 117, 118, 119
 —, source, of heat conduction 119
 — $\frac{\text{tg}(i^0, s r)}{i^0, s r}$ 146; 150 . . . 155
 — z^s 158, 161
- Gudermannian, the, $\text{gd } x = \text{Amp } x$ 94, 80, 100, 102, 109
 $\text{gd } \frac{x}{2}$ see $\text{Amp } \frac{x}{2}$
 $\text{gd}^{-1} x$ see $\text{Ar Amp } x$
- Heat conduction, source functions of 119
 Hyperbolic functions 90, 80f., 98f.
 — and circular functions of a complex variable 132
 $i^i x$, $i^{-i} x$ 80, 81, 82, 83, 84, 87

- Langevin's function $\mathfrak{E}tg\,x = \frac{1}{x}$
 $= ctgh\,x - \frac{1}{x}$ 123
- List of books 173
- — tables of the elementary transcendentials 175
- $\lg\,x$ 114, 115
- $\ln\,x$ 114, 115
- $M, \frac{1}{M}$. Multiples of 25
- Mechanical units (Logarithmic diagram) 177
- Multiples of $M, \frac{1}{M}$ 25
- — $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}$ 25
- Non-uniform distribution of the alternating current 147
- $\text{num}\,x = 10^x$ 79
- Numerical calculations, remarks on 163
- $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}$. Multiples of 25
- Planck's radiation function 117, 118, 119
- Polar and rectangular co-ordinates 29, 30
- Polynomials, approximate calculations with 159
- , Chebyshev 75, 156, 157
- Powers fig. 1, 2 (p. 1), fig. 3 (p. 10), fig. 4 (p. 11)
- , table of 2 . . . 9
- , —, examples of the use of the 8, 9
- of 2, 3, 5, 7, 11 17
- Quadratic equations 34, 36, 37
- Radiation function, Planck's 117, 118, 119
- Reciprocals 12, 13
- of complex numbers 26, 27
- of the squares 14, 15, 16
- Rectangular and polar co-ordinates 29, 30
- Roots, square and cube 18, 19
- of complex numbers 27, 28, 29
- Remarks on numerical calculations 163
- $\sin\,x$ (x in degrees) 77
- (x in radians) 100, 102, 104, 105, 106
- (x in right angles) 80
- $\sin\,x \cdot \sqrt{2}$ (x in degrees) 78
- $\sin\,x \cdot \sqrt{2}$ 87
- $\mathfrak{S}in\,x = \sinh\,x$ 100, 102, 104, 105, 106
- $\mathfrak{S}in\,\frac{x}{2} = \sinh\,\frac{x}{2}$ 80, 81, 82, 83
- $\mathfrak{S}in\,x \sin\,x = \sinh\,x \sin\,x$, $\mathfrak{S}in\,x \cos\,x = \sinh\,x \cos\,x$ 124
- $\sinh\,x$, $\sin^{-1}x$, $\sinh^{-1}x$ see $\mathfrak{S}in\,x$, arc $\sin\,x$, $\mathfrak{A}r\,\mathfrak{S}in\,x$
- Source functions of heat conduction 119
- Squares 12, 13
- , reciprocals of the 14, 15, 16
- Square roots 18, 19
- — of complex numbers 27, 28, 29
- Tables of the elementary transcendentials, list of 175
- $tg\,x$ (x in degrees) 77
- (x in radians) 98, 99, 110
- (x in right angles) 85
- $tg\,e \cdot e; \frac{tg\,e}{e}$ 125, 126 . . . 129
- $\mathfrak{T}g\,x = \tanh\,x$ 98, 99, 100, 102, 111
- $\mathfrak{T}g\,\frac{x}{2} = \tanh\,\frac{x}{2}$ 86, 87
- $tgh\,x = \tanh\,x$, $tg^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ see $\mathfrak{T}g\,x$, arc $tg\,x$, $\mathfrak{A}r\,\mathfrak{T}g\,x$
- $\frac{tg\,(i^{0,8}r)}{i^{0,8}r}$ 146, 150 . . . 155
- Transcendental equations 130
- s, list of tables of the elementary 175
- Units, mechanical (logarithmic diagram) 177
- Vector addition 32, 33