

CRISTIAN PRESURĂ

FIZICA POVESTITĂ

HUMANITAS

Contents

1	Mechanics	3
1.1	Some philosophical observations	3
1.1.1	Order in the world	3
1.1.2	The limits of mathematics	3
1.2	Astronomy, order in the sky	4
1.2.1	How big is the Earth?	4
1.2.2	The Sun, the Earth and the Moon	5
1.2.3	The movements of the planets	8
1.3	Newtonian mechanics	13
1.3.1	Galileo Galilei	13
1.3.2	Newton's laws of motion	14
1.3.3	Newton's Law of Universal Gravitation	16
1.3.4	The elliptical orbits of the planets	18
1.3.5	Cavendish's experiment	23
1.4	Analytical mechanics	24
1.4.1	Energy considerations	25
1.4.2	The principle of least action	27
1.4.3	Analytical mechanics: the Lagrangian formulation	28
1.5	Exercices	32

Chapter 1

Mechanics

1.1 Some philosophical observations

1.1.1 Order in the world

Probably the most deepest and profound questions we would like to answer are: "Who are we?", "How is it that we feel?", "How is it that a World exist?", etc. If we are to trace them back in history, we find immediately the notion of God. That is because God is an intuitive answer to all these type of questions, and this answer was not only accepted, but also brought by many people in their daily life. During history, God changed the way we lived, gave us rules, strength and hope. Above all however, he ordered the world.

Such an order was obvious to the old Greeks, who loved beauty. As showed by Pythagoras of Samos (569-475 BC) for example, vibrating strings produce harmonious tones *only* when the ratios of the lengths of the strings are identical with ratios between integer numbers. Today, Pythagoras is considered one of the founders of mathematics (think of the Pythagorean theorem for example). For the old Greeks, mathematics was only an image of the beautiful order which God created in the world. Its rules, determined by God, would live in an abstract space and can be applied to our mortal world.

It may be however that, for us, this order contain the *seed* of our non-belief. That is because, for example, *every time* we add the squares of the sides of a right triangle we get the square of the diagonal. At least in this case we may try to put God aside, since these things work as well without him. In fact, if we measure a diagonal that has not the right value, we either consider it a miracle, either look for a better formula. If we look in this way to the history of Science, we may see it more like a long road, in which we want to show that *all the world* may be ordered without the help of God. Some other people may also argue otherwise, like the old Greeks did, that we only try to see the order. Whatever the reasons, we are today in a very accelerated and fascinating race of finding this order.

We may argue to what extent are we closing towards our original questions. Some people would say that all the knowledge acquired in the meantime leaded us to a revolution not much different from other revolutions in the history of mankind, like the introduction of agriculture: we use our knowledge in exploiting the world we are given and, even though we know a little more about what the world is, we are far from knowing who we really are. Others, like the old prophets in the desert, would argue that the time has come, and breakthroughs in answering these fundamental questions may be realized even in our lifetime. We let the reader freedom to choose one side or

another (if he wants to) and begin our journey in exploring the order we know to exist today in the world.

Useless to say, our journey deals mainly with the question "What is the *non-living* world?". We do not touch the question of our inner soul for example. We are in this journey some external observers, beyond this *world of matter* which we try to explain with the help of *mathematics*. However, be aware, this picture is not entirely correct, as we discuss in the next section.

1.1.2 The limits of mathematics

In the mind of many people, like in the minds of old Greeks, mathematics is a science that lives in an abstract space beyond our physical world. We use it to describe this physical world, and it has thus the huge advantage that, being beyond the physical world, it is not "infected" by it. It is like taking the tools out of a box and use this tools to repair a machine. We (the observers), the tools (mathematics) and the machine (the material world) would be three *distinct* entities.

However, life was more crude to us than we maybe wanted it. If we look closely we realize that mathematics is embedded intrinsically in this world. Every time we write a formula we put some physical ink on some physical paper, every time we think, we imagine some objects whose behavior is *copied* from the physical world. In other words, even our imagination is *infected* by the things we experience in the physical world. For example, every time we think that $1 + 1 = 2$ we imagine two physical objects placed together. The resulted image would be the same for every of us, exactly as the real image of two objects is the same for every of us. Consequently, mathematics is *deduced* from (and embedded in) our world, and we are thus trying to describe the world with some tools which belong to it. In this way, as argued by many philosophers, we are never going to succeed.

The above observation would have probably remained at the level of a philosophical observation if it would not have been for the mathematician Kurt Gödel. In a famous paper published in 1931 he was able to take the above arguments on the (up to then) solid grounds of mathematics. The title of his paper refers directly to a very important book, called Principia Mathematica, and published by the well known mathematicians Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. In this book, Russell and Whitehead tried to show that there are no contradictions in mathematics, and all propositions in mathematics may be shown either false or true (the so-called *completeness*

of the theory). However, Gödel showed that in mathematics there are propositions which can not be proven either right or wrong, and thus mathematics is *incomplete*.

Some contradictory propositions are known to us from the ancient times. Consider for example the proposition "I lie". This can not be either true or false, as you can figure immediately by yourself. In fact, at a closer look, it may be observed that most of these type of contradictions (if not all) contain self references. In our simplistic view of the world, self reference would not be a problem, as we separated the observer, the mathematics, and the material world. But now remember that mathematics (even the one we imagine) is contained in the material world, and thus self-reference may be created!

Following this line of reasoning, Gödel was able to pick up a particular mathematical sentence which may be imagined as written on the piece of paper. This would refer to a part of the material world, easy to guess, exactly the written sentence. Choosing the right proposition creates then self-reference, and thus the proposition is neither false of true. Even though Gödel

proved only the incompleteness, its approach underlines the fragility of the mathematical tools we are using, and its limitations.

We may even speculate further on the type of mathematics we are using, because this is taken from our *immediate* experiences, being thus partly *limited* by them. We say easily which of two finite collections of objects have more elements, but not of infinite collections of objects, because we do not experience infinities in our daily life. It can be however shown that also infinite collections may be ordered by their number of elements. Our experience is also macroscopic and classical, which leads to a mathematics which is difficult to use in the case of microscopic particles that behave completely not classically, as we will see later.

Overall however, the mathematics that we have now is very useful, and we will use it as our main tool. We assume also the the reader has a very good knowledge of it, such that he is able to reach with us the last pages of this book.

1.2 Astronomy, order in the sky

1.2.1 How big is the Earth?

To answer this question in a manner in which some of our old ancestors did, let us try to look at the sky. The main object on the sky is, of course, the Sun, the subject of so many old tales and religions. What surprise us is the fact that he keeps coming on the sky every day. What is he, however? Xenophanes of Colophon (570-450 B.C) believed that the Sun was a collection of small bodies of fire compacted together in the morning to cross the sky. The collection would then disintegrate once the Sun returns to Earth every evening. Heraclitos of Ephesos believed as well that the Sun was different every morning. For most of the people he was just a ball of fire passing across a huge flat Earth. Surprisingly however, if we follow closely the evolution of Sun, we may say something about the shape of the Earth!

The next type of reasoning was made probably by some of the old Greeks. What looks very specific to Sun in the periodicity and uniformity of his movement. The Sun does not stop suddenly on the Sky, or jump from one place to another. He comes regularly on the Sky with such a precision that imposed him as an instrument of measuring the time. His movement is presented in Fig. 1.1. Apparently, the Sun describes daily circular movements around a fix axis. The circles are different every day, but the axis remains the same (for years and centuries), and it can be later identified as pointing towards the Polar Star.

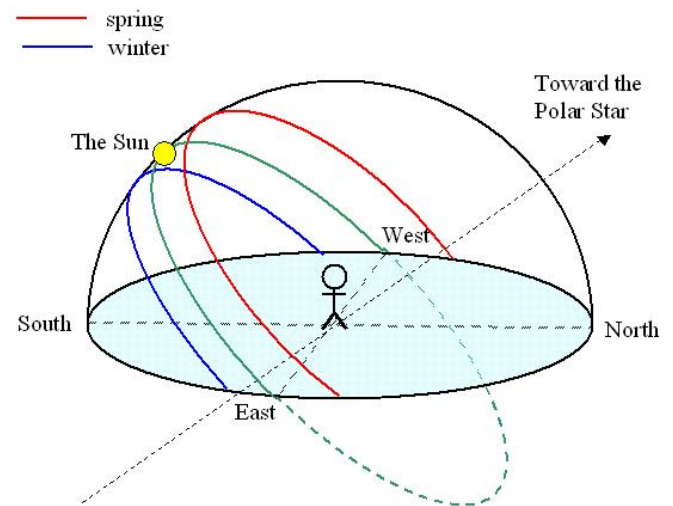


Figure 1.1: The apparent movement of the Sun on the sky

A way to measure the *uniformity* of the movement of the Sun is by using the instrument presented in Fig. 1.2. This is in fact an old sundial, used to measure the time. If the sundial is placed with its axis pointing towards the Polar Star, Then the same axis will be parallel with the axis of the rotation of the Sun as well, as presented in Fig. 1.1. As it is then easily seen, the angle which determines the position of the Sun is given by the shadow of the axis of the sundial on the inner part where are the reading marks, for all circular movements of the Sun!. Trying to measure the movement of the Sun in this way we will find out that this is very uniform, and that the Sun makes about 15 degrees in one hour, irrespective of the season and the time of measurement. If we extrapolate, this means about 360 degrees in 24 hours, precisely one day. The result, apparently obvious, bares an extraordinary power.

It looks like we can assume that that the Sun moves inside the Earth *with the same angular velocity*, and that is why we find it after 24 hours precisely at the same position, because it has moved 360 degrees. In other words, to stress the observa-

tion, we may assume that Sun describes *a whole circle* in the figure Fig. 1.1 in 24 hours, and that we see only a part of this circle! And for those who had difficulties in seeing "the red ball of fire" entering the crusty Earth and visiting periodically Hades, the lord of the dead, a much more easy assumption was to assume that *the Earth is not infinite and it may be probably rounded*.



Figure 1.2: An example of an sundial. The shadow of its axis gives the time.

If the Earth may be rounded, then probably it has a finite shape. The old Hindu thought that it is like a plate on the back of a big elephant. In this case the Sun would probably round the elephant as well. For the old Greeks however, the sphere was the perfect geometrical shape, and this argument was the basis of the assumption that the Earth is a sphere.

To check this assumption, the famous philosopher Aristotle watched the Moon eclipses. Using a sun dial, and the fact that the Sun moves uniformly, he may have *extrapolated* to find out the position of the Sun precisely when the eclipse occurred, in the middle of the night. He may have then found that the Sun is located *exactly in the position opposite to the Moon*, with respect to Earth. In other words the three would be on an imaginary line, and consequently the Earth may spread its shadow on the Moon. Aristotle gave in this way the correct explanation of the moon eclipse. Moreover however, because the shadow looks circular, *the Earth must be a sphere*, said Aristotle. And he was right. The old observation that we see first the pole of an incoming ship made him only strengthen his conclusion.

Assuming like Aristotle that the Earth is round, can we estimate his dimensions? The positive answer was given for the first time by Eratosthenes of Cyrene (a director of the famous library in Alexandria), more than two thousands year ago! In Fig. 1.3 we try to show how he did it. Eratosthenes looked at the shadows given by two identical pillars, placed in two different Egyptian cities. He noticed that the shadows have different lengths. Now imagine, if the Sun is just a small fireball hanging closely above the Earth, you can easily obtain this effect, and actually obtain the distance to the Sun by measuring the length of the shadows!

However, he started with the right assumption that Sun is very far away, and the difference in the lengths of the shadows is given by the spherical shape of the Earth (see Fig. 1.3). To make things simpler, he chose the second city Syene (a city in Egypt) at the moment when the Sun was exactly above him, and thus the the pillar from Syene would point directly toward the Sun. From the shadow of the pillar situated in Alexandria he estimated the angle α as being $\alpha = 7.2^\circ$. He knew the

distance between Alexandria and Syene, which is about 5000 stadia ($AS \approx 800$ Km in our present units). He then calculated the radius of the Earth (see Fig. 1.3) as being $R \approx AS/\alpha \approx 6300$ Km. This value is remarkably close to the actual one.

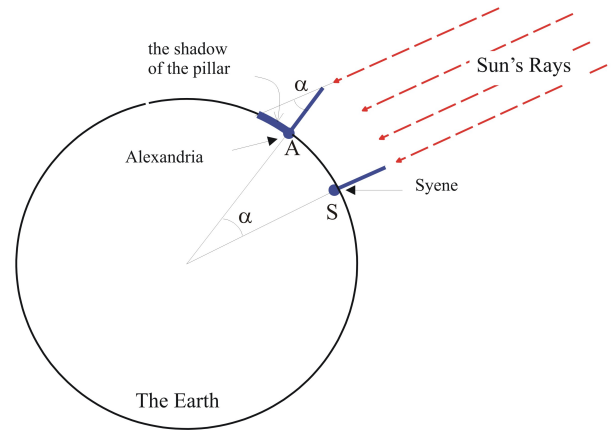


Figure 1.3: Illustrating the principle of Eratosthenes' measurement of the magnitude of the Earth

Two things are important here. First, is the fact that the distance between the two cities may be measured, and secondly that the angle given by the shadow situated in Alexandria could be measured as well. Imagine, if the Sun would be too far away, the pillar in Alexandria would give no shadow as well! Fortunately, the angle was about 7.2° . Now, let's suppose that the pillar was two meter high. Then the shadow given by the pillar would have been $2 \text{ m} \cdot \sin(7.2^\circ) \approx 25 \text{ cm}$ long, which is a distance measurable with the bear eye. In other words, the radius of the Earth can be measured by any of us, if we would have the patience and pleasure to travel between two far away cities and measure the shadows of some pillars.

This observation exemplify a point we would like to make during our presentation. To many of us, physics is a distant science, made by very specialized scientists, and whose results we barely "feel". Who can "feel" immediately that the Earth is round? However, with the right information, we can have access to this experience by ourselves. For example, next time you see only the pole of the distant ship, try to estimate yourself the magnitude of the Earth. I am sure you will get the right order of magnitude of the dimension of the Earth.

Another point to be stress here is the power of an instrument. Remember, the angle $\alpha = 7.2^\circ$ seems to be small. We can easily see that this is about the beating of a second in a watch. Looking at the problem this way, we may say that this angle is barely visible with the eye. However, we know that the eye has a better resolution, since we can distinguish two persons which are 1 m apart at a distance of 1 Km. The real resolution of the eye is then smaller than $\arcsin(1\text{m}/1\text{Km}) \approx 0.06^\circ$, about hundred times better. In the case of the angle $\alpha = 7.2^\circ$, we measured it with the help of the pillar's shadow, which is then just an *instrument* helping us getting the right value.

1.2.2 The Sun, the Earth and the Moon

We have seen in the previous section how the old Greeks found that the Earth is round and how they calculated its magnitude. We have used however in our line of arguments a crucial ingredient, namely that the shadow of the Earth can be formed on the Moon. We assumed thus that the Moon is an object (like

a stone), and not an image or something else projected on the sky. The theory that the Moon is an object, together with the other "lights" we see on the sky (the Sun, stars, falling stars, etc.), gained in popularity once a large meteorite fell near Aigos Potamoi, in 467 B.C.

This event made Anaxagoras of Clazomenae (c.a. 500 - 428 B.C.) believe that the Sun is a very hot stone, probably larger than Peloponnese! In this way the astronomy was born since, once we know that the celestial objects are *stones* traveling through the space, all what is left is to find their magnitude and three-dimensional movement. But remember, we have to find it from the Earth, which make things a little more complicated.

Here we exemplify this idea by trying to find the magnitude of the Moon, the Sun and the Earth, and their relative movement. We also try to make clear to the reader that most of the measurements presented here may be performed by the reader himself. However, what is revolutionary is of course to know what type of measurements to do. As we see often in the history of physics, new ideas and crucial measurements are just round the corner, we only have to find out which corner!

The movement

The geometry teachers say: "if we draw the correct figure, we have solved half of the problem". This is our case now. We know that the Sun, the Earth, and the Moon are like stones traveling through the empty space. We have now to find out how.

We have seen in a previous section how the magnitude and shape of the Earth were estimated, and shown in Fig. 1.1 how the Sun apparently moves on the sky. We also emphasized that he should move *around* the Earth, even though we do not see his movement in the night. Because the apparent magnitude of the Sun does not change on the sky, we may also assume that the Sun is always at *the same distance* from the Earth, and thus its movement is a circle. An encouraging results for the old Greeks, how thought that the circle is perfect, as we mentioned.

If we try to make the same measurement for the Moon, we will find a surprising result: the Moon moves also around the Earth in precisely one day, and around the same axis which points toward the Polar Star, all year long. However, for a single day, the two circles of the Sun and the Moon movements are different. Even more surprisingly, the same apparent movement hold for the stars. Again, they round the Earth in one day, all year long around the same axis. This situation is sketched in the left hand side of Fig. 1.4.

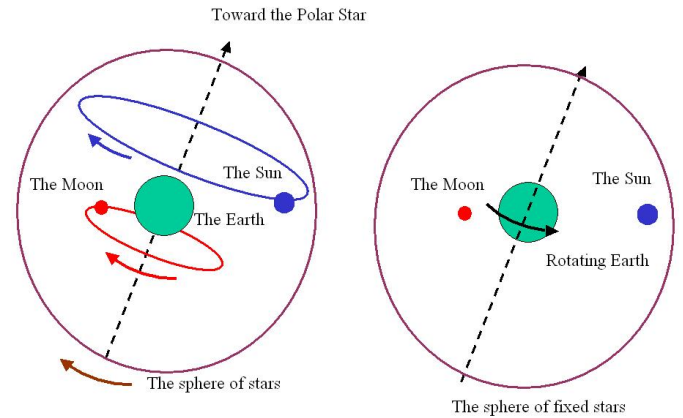


Figure 1.4: Our first cosmological model. Left: the Earth is fixed, and all the other objects (the Sun, the Moon, the stars) revolve every day with the same angular velocity around the Earth. Right: the situation is reversed: during one day, only the Earth moves

The situation is then somehow surprising. Why have these celestial objects (the Sun, the moon, and the stars) *exactly the same periods* when rounding the Earth? And also *the same axis* for their circles? Why these coincidences? The answer looks obvious today. Thus, in a first instance, given the fact that all periods are the same, and all axis point toward the same direction, we may simplify the movements as presented in the right hand side of Fig. 1.4. Here *only* the Earth rotates every 24 hours, and all the other objects are fixed! Wow!, we would say today. This must be the truth. The Earth must be *the only one which moves* (at least during one day), because in this way we simplify so much the picture, and explain then so easily the coincidences.

These arguments must have been obvious to the old Greeks as well. However, they did not accept the conclusion that only the Earth rotates around its axis during one day. The reason? First, they said, if the Earth rotates, the stars which are close to the Earth should change their apparent position *with respect to each other*. We know today that that is true, but also that the stars are so distant that the effect is very small, and it could not be observed in the time of the old Greeks.

Worse however, said the old Greeks, in the problem of the falling objects. Because the Earth rotates during the time when an object fall, the object should be left behind, and fall aside. Imagine, knowing the radius of the Earth, they could estimate the speed of the surface of the Earth, and this would be $2\pi R/24h \approx 1600\text{Km/h}$, an amazingly large number. Then, a ball falling from only 2 m high, should be 400 m left behind! This is certainly not what we see in our daily life, said the old Greeks. This argument, so powerful, had to wait almost two thousand years to be proven wrong by Galileo Galilei. We know today that, when an object falls, it gets a momentum in the direction of the movement of the Earth, from the Earth itself. In a way, we may say that both the surface of the Earth and the object travel at the same incredible velocity 1600 Km/h, and thus the object is not left behind when falling.

The above presented arguments, together with religious ones, made the Earth immobile for almost two thousands year to come. All cosmological systems that were later developed present first the movement of the celestial objects with respect to the sphere of fixed stars. At the end however, they all (including the sphere of the fixed stars) are made to revolve daily around an immobile Earth. We here take however the movement approach, that simplifies so much the problem, and *let the Earth rotate around its axis* (see the right hand side of

Fig. 1.4).

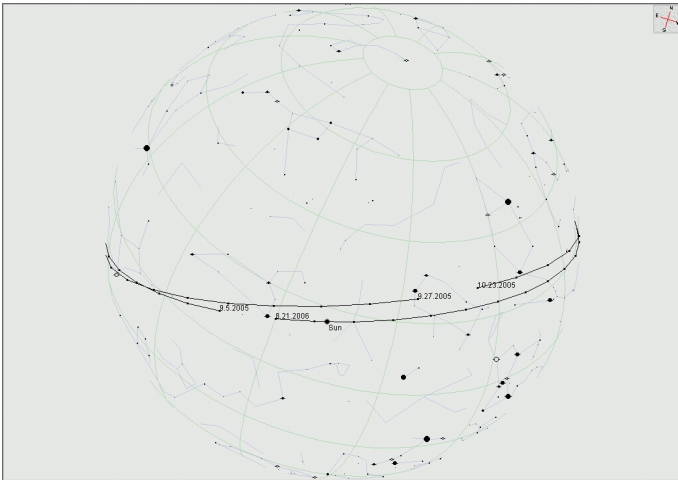


Figure 1.5: The movement of the Moon and the Sun against the background of fixed stars.

Once we admire the simplicity of our first cosmological system presented in Fig. 1.4, we may ask ourselves what is happening on a larger time frame. Does the Sun for example changes its position with respect to the rotating Earth (around its axis) during one month, one year? The answer must be positive since we see already, from Fig. 1.1, that the position of the Sun changes during the summer or winter, on a yearly bases. The same happens with the Moon (on a monthly bases now), but *not with the most of the stars!* In fact, excepting few stars (named "planets", from the Greek word for "wanderer"), all the other are just fixed, *pinned*, on a sphere we call *the sphere of the fixed stars*, during at least the lifetime of one person. Of course there is no such a sphere, but these stars are so distant, that pinning them to a very distant sphere does not make a difference at this moment.

The idea of the sphere for the fixed stars has a big *experimental advantage* however. If we look in Fig. 1.4, we see that all the other objects move with respect to the sphere of the fixed stars. In this case, we might as well observe the movement of the Moon relative to this sphere on a monthly bases, without worrying about the precise position of the Earth in its rotation. And this is very easy to measure, since we see the Moon *against the background of the stars!* In other words, we do not have to measure the position of the Moon with respect to the Earth (which would give us a bad precision in a first instance), then the position of the Stars with respect to the Earth, and then correct for the latter. Nature helped us, and we can measure directly the position of the Moon with respect to the background of the fixed and distant stars, because *this background does not seems to change for years*. If we do that, and plot the movement of the Moon in one month, we obtain a result like the one presented in Fig. 1.5. Here we included also the movement of the Sun obtained through extrapolations (because the Sun can not be seen at night).

Figure 1.5 is a kind of a celestial map. The Earth is in the center of the sphere of the fixed stars, and it rotates daily around its axis. The other celestial objects (the Sun, the Moon, or the planets) move on this sphere, as seen from the Earth. We recognise on the figure chosen the constellations called Ursa Minor and Ursa Major.

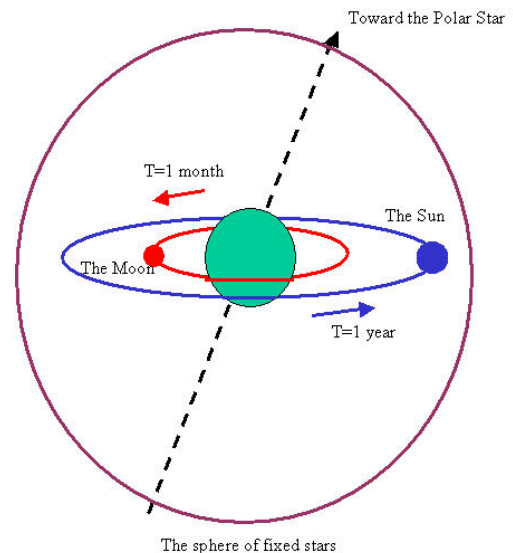


Figure 1.6: Our second cosmological model

As we can see from Fig. 1.5, The Moon makes circular movements across the sphere of the fixed stars, with a one month periodicity. Because the magnitude of the Moon seen from the Earth does not change visibly, we may assume that the Moon stays also at the same distance from the Earth, making thus circular rotations around the Earth. The same arguments apply to the yearly movement of the Sun. We then can construct a more complete scheme of the three objects, presented in Fig. 1.6, which holds for a longer period of time, years at least. In that sense, our previous system Fig. 1.4 is just a daily snapshot of it.

We also observe from the figure Fig. 1.5 that the circular orbits of the Sun and the Moon are placed more or less in the same plane. Our next goal is to find the magnitudes and the distances to the Sun and the Moon.

The magnitudes and distances

Let's begin with the Moon. We have mentioned already the importance of the Moon eclipse in determining the shape of the Earth. On the other hand, the same observation can help us in determining the magnitude of the Moon. Thus, when the shade of the Earth lies on the Moon, we can see already that that Moon is smaller then this shade.

Aristarchus of Samos (310 - 230 B.C.) took advantage of this fact, as presented in Fig. 1.5. He measured the time required for the Moon to pass the shade, and compared it with the time required to pass a distance equal with its diameter. In a simple approximation, assuming that the rays coming from the Sun are parallel, this yields directly the ration between the diameters of the Earth (which is known) and the diameter of the Moon. Aristarchus measured in this way a Moon whose diameter would be half the the Earth.

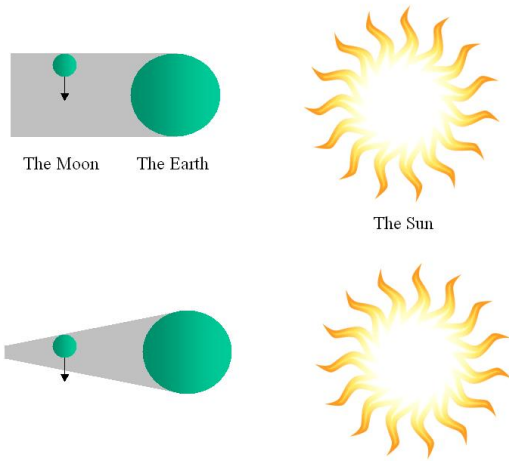


Figure 1.7: Upper panel: the eclipse of the Moon in Aristarchus's supposition. Lower panel: the right geometry

However, his assumption was not entirely correctly, as we present in the lower part of Fig. 1.5. Here, the rays coming from the Sun create in fact a cone, and the real ratio between the diameters of the Earth and the Moon is about 3.7, almost two times larger than the one given by Aristarchus. Replacing the known radius of the Earth, we obtain then for the radius of the Moon:

$$R_M = \frac{R_E}{3.7} \approx 1700 \text{ Km} \quad (1.1)$$

Knowing the magnitude of the Moon, we can determine how far it is by measuring its apparent angle on the sky! Since this is about 0.5° , we obtain a distance of:

$$EM = \frac{2 \cdot R_M}{\sin(0.5^\circ)} \approx 400000 \text{ Km} \quad (1.2)$$

Is this number very large? Certainly not. A bicyclist with an average speed of 20 Km/h would need approximately 20000 hours (about 2 years) to span this distance. This looks achievable, and we can understand the optimism of writers like Jules Verne in writing stories of traveling to the Moon.

How far and big is the Sun? Again Aristarchos from Samos gave an answer, this time by looking at the phases of the Moon. The explanation of the phases of the Moon was known long before. Thus, our ancestors observed that the shiny part of the Moon is directed always towards the Sun, as if the Moon would not generate light by itself, but it would be illuminated by the Sun. The phases of the Moon are then formed because we look at the Moon (illuminated by the Sun) *from different positions*.

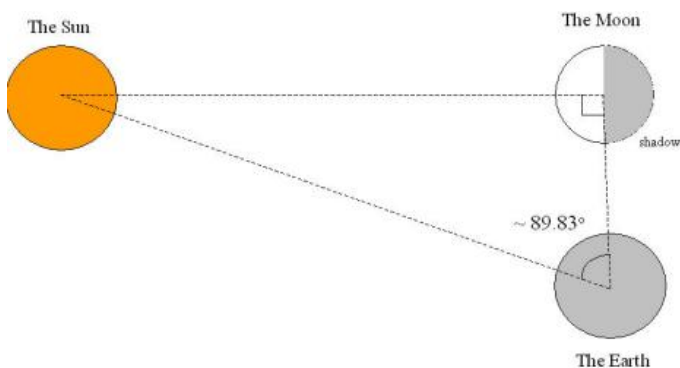


Figure 1.8: The positions of the Sun, the Earth and the Moon at the last quarter.

Aristarchos used the last quarter of the Moon, as presented in Fig. 1.8. Because we see in this case that the Moon is precisely half illuminated, the three celestial objects (the Earth, the Sun, and the Moon) should form a right triangle. The distance to the Sun can be calculated if we measure the angles of this right triangle, because we know one of its sides, namely the distance between the Earth and the Moon.

This triangle is however very elongated, because the Sun is very distant. The angle which we measure from the Earth is thus expected to be close to 90° . A small error around this value means a large error in the distance (in other words, if we measure 89° instead of 88° , we miss the distance to the Sun by a factor of two, and if we measure 90° we completely miss it). Aristarchos measured first an angle of 87° , but later he corrected this value to 89.5° , as it is mentioned by Archimedes. The actual value is in fact about 89.83° and thus very close to 90° . In this case, care must be taken for a good measurement. By using this last value, we obtain:

$$\frac{ES}{EM} = \frac{1}{\cos(89.83^\circ)} \approx 340 \quad (1.3)$$

Knowing now the distance to Moon from 1.2, we obtain for the distance to the Sun:

$$ES = EM \cdot 340 \approx 140 \text{ millions Km} \quad (1.4)$$

How much time does it take to get there by bicycle? About 700 years. For the times of the Greeks this would have looked very much, but for the modern velocities attainable with a rocket this is achievable. It is nice to notice here how perception of distances changes the advancement of the traveling means. Coming back to our problem, we know now the distance to the Sun, and we can now calculate its size by using its apparent angle on the sky, in the same way as we did it for the Moon. In fact, the apparent angle on the sky of the Sun and Moon are more or less the same (about 0.5°), as we notice during a Solar eclipse, when the Sun is covered almost precisely by the Moon. We have then:

$$R_S = \frac{ES \cdot \sin(0.5^\circ)}{2} \approx 600000 \text{ Km} \quad (1.5)$$

In this way we have found out all the essential elements of our first cosmological system presented in Fig.1.6.

1.2.3 The movements of the planets

In the previous section we have seen how we can estimate the magnitude and the movements of the Earth, the Moon and the Sun. We also mentioned that, among the thousands of fixed stars, there are some that are not "fixed" at all. They are called planets, and they change their position in a matter of years. We know today that they are not stars, but objects illuminated by the light of the Sun. However, in order to exemplify how our knowledge came to be, we start with the Greeks as well, who thought that they are just "wandering" stars.

Claudius Ptolemy

Probably one of the most influential ones was Claudius Ptolemy (87 -150 A.D.). His first crucial contribution was a good measurement of the paths of different planets. In Fig. 1.9 we present a late drawing, where he is shown wearing a crown (he is mistakenly identified with a king from the dynasty of Ptolemies who had ruled Egypt), having in his hands a measuring device, called a quadrant. Ptolemy would have used the

quadrant to measure the movements of the planets with respect to the background of the fixed stars, as discussed earlier.



Figure 1.9: Ptolemy in a late drawing, when he was confused with one of the kings of Egypt (see the crown on his head)

By looking at the form of such a simple device, we may have an idea about its angular resolution (the smallest angle under which two stars can still be separated visually). Thus, we may suppose that the smallest distance between two readable divisions of the quadrant is about $\Delta R \approx 1$ mm. This must be divided by the approximate radius of the instrument (let's say $R \approx 50$ cm), giving us an angular resolution of about $\sin(\Delta\alpha) \approx \Delta R/R \approx 0.002$, that is $\Delta\alpha \approx 0.1^\circ$. This value is in the range mentioned by Kepler, when he cites Ptolemy as saying that he never got below a precision of about sixth of a degree in making observations. However, in practice, the error introduced by the measurements made by Ptolemy were in some cases larger, to up a few degrees. In theory however, Ptolemy had just about the right resolution to get the 89.83° angle of Aristarchos from 1.8.

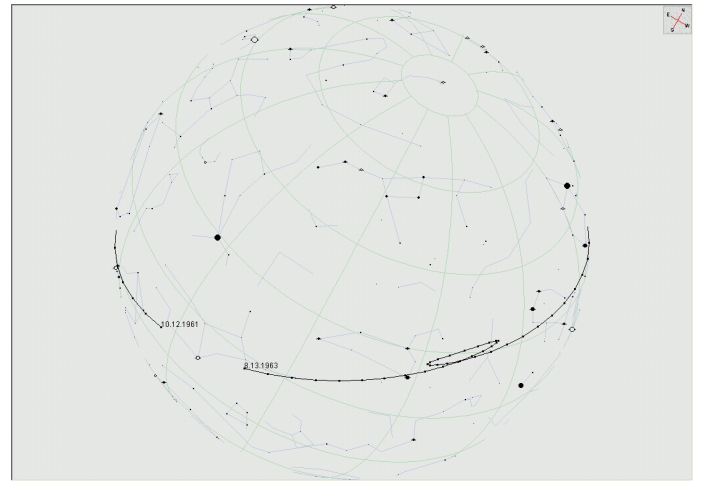


Figure 1.10: The two year periodic motion of Mars across the sky. One can see the retrograde motion of Mars as well

In Fig. 1.10 we present the movement of one of the planets, the Mars, computed by a modern software. We see that within half a year Mars travels half on the sphere of fixed stars, on a orbit which looks again circular (in a rough approximation) and which has almost the same plane as the one of the Sun. We can assume then that Mars is also evolving around the Earth within one year. However, we miss here an important point as compared with the Sun or the Earth: we *do not* see how large Mars is! We can not conclude then that Mars is evolving around the Earth at a constant distance. What shall we do? For the time being, we adopt Ptolemy's stand in *assuming* that Mars is evolving as well at a constant distance from the Earth, roughly on a circular orbit around the Earth.

If we follow closely the movement of Mars, we see that sometimes it deviates from the large circle, especially during the so-called "retrograde motion" (see Fig. 1.10). Here, for a short time (on yearly basis!), Mars is changing the direction of its movement, in a region of about 5° , observable thus by Ptolemy. The big achievement of Ptolemy was that he not only measured this retrograde motion, but even attempted *to fit* it!

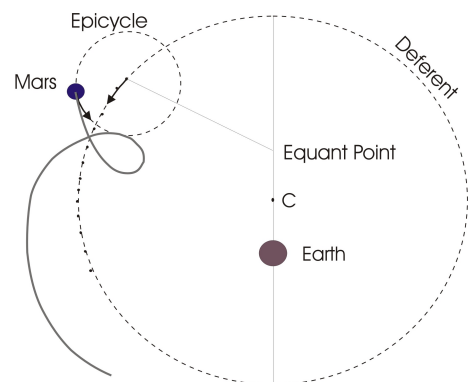


Figure 1.11: The movement of Mars in the model of Ptolemy

In order to understand his fitting model, we notice that the retrograde motion is somehow resemblant of the behavior of the side reflector attached to the wheel of a moving bicycle. The side reflector performs the circular movement of the wheel, but also advances in the direction of the movement of the bicycle. In other words, we can get the retrograde motion by letting Mars evolve on a small circle (the wheel of the bicycle) and let the center of the circle follow a larger path (the movement of the whole bicycle). This model is exactly what

Ptolemy adopted, with the larger path being the rough circle we presented in Fig.1.10, as we exemplify in Fig. 1.11.

However, soon Ptolemy found out that the model above was not sufficient to fit all the points in the measured data set he had, and he added two more elements, as presented in Fig. 1.11. The three elements of the Ptolemaic model are then:

- Mars is evolving on a small circle (the epicycle). The center of the epicycle is at the same time evolving on a larger circle around the Earth.
- The Earth is not placed in the center of the large circle, but rather aside.
- The movement of the center of the epicycle is uniform on the large circle, but not with respect to its center, but rather to another location (which is opposite to Earth with respect to the center of the large circle).

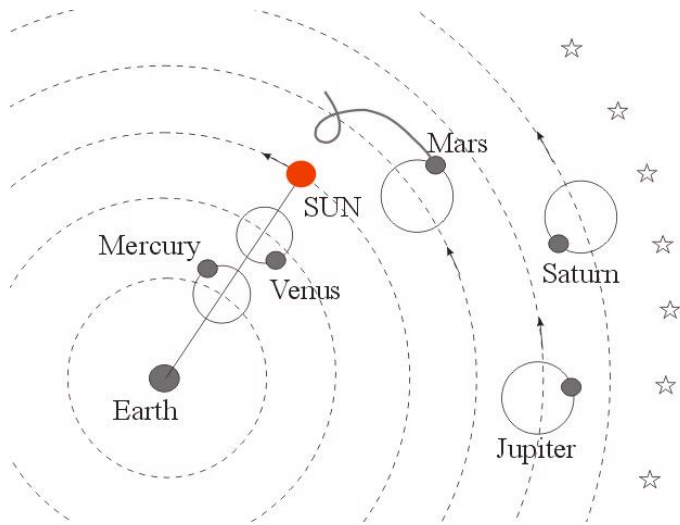


Figure 1.12: The Ptolemaic model of the planets

The final form adopted by Ptolemy, which fitted all his data for all the planets he knew, is presented in Fig. 1.12. Until the time of Copernicus, the whole model needed more than 70 parameters to fit, including planes of movement, epicycles and so on. The fits gave Ptolemy however an unexpected bonus, which Ptolemy never took advantage of: the motions of some planets were not completely uncorrelated!

One such correlation is the fact that the centers of the epicycles of the planets Venus and Mercury are *always* situated on an imaginary line that connects the Earth and the Sun (see Fig. 1.12). A less obvious one relates the movement of Mars. Thus, at the moment when Mars is closest to the Earth (during an epicycle period), the Sun, the Earth and Mars form also a line! In our search, this looks like just the right corner we are looking for...

Nicolaus Copernicus

As mentioned, Ptolemy never took advantage of this coincidences, and this model survived for more than a millennia without significant changes, until the time of Nicolaus Copernicus (1473-1543). At that time, the planetary tables based on Ptolemy were in errors up to 5° . However Copernicus drive to improve these fits was not in these errors, but rather in his belief that the model was wrong from the beginning, because it deviates from the use of uniform circular motion around its natural center.

In his quest to find a better solution, Copernicus came across *another* possible solution to the retrograde motion of Mars. In his model, he lets both the Earth and Mars evolve

around the Sun, and still gets the retrograde motion! How is that possible? Fig. 1.13 tries to explain that. We can imagine that the two planets are like two competing cars, with the car Mars on the outer circular road, going slower than the car Earth. Most of the time however, *because of the circular shape of the race*, the car Mars seems to advance as seen from the car Earth. The retrograde motion happens when the car Earth outruns the car Mars. In that instance, looking from the car Earth, for a short moment it looks like the car Mars is going backwards. This outrun happens however *only* when the car Earth gets close to the car Mars, which happens in turn more or less when the Earth, Mars and the center of the racing road (the Sun) form a line. In other words, this solution gives a *natural explanation* of the second coincidence observed by Ptolemy: at the retrograde motion, the three celestial objects are more or less situated on a line!

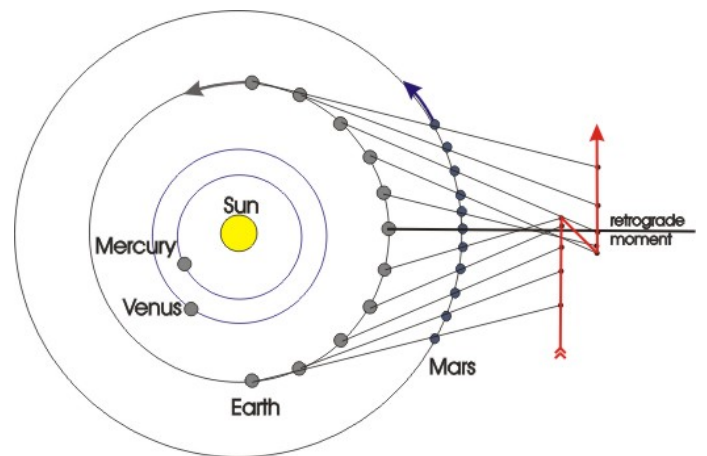


Figure 1.13: Copernicus model for the retrograde motion of Mars, and for the planets Mercury and Venus

Having confidence in this approach, Copernicus let the other planets evolve as well around the Sun. As it can be easily noticed, that explained naturally the first coincidence observed by Ptolemy, if the planets Mercury and Venus were closer to the Sun than the Earth (see Fig. 1.13). In fact, in this case, as seen from the Earth, the large circle (the deferent) on which these both planets will move in Ptolemy's representation Fig. 1.12 should be the same as the one of the Sun. In addition, the Sun itself should be in the center of the epicycles of these two planets! What happened with the Ptolemaic model? It seems like Ptolemy was getting correctly the direction to the planets Mercury and Venus, but was completely missing the distances to them. That exposes a weakness of the planetary model of Ptolemy, namely that it can not estimate planetary distances by simple means.

In contrast, the Heliocentric system's geometry provides a natural way to measure the distances of the planets from the Sun, by only measuring the apparent position of the planets on the sky! In the model of Copernicus, the only parameter is the distance from the Earth to Sun (which was however not well known at the time of Copernicus). To convince you of that, we present in the table below the results obtained by Copernicus for the distances between the Sun and the planets, relative to the distance between the Earth and the Sun. Notice the large agreement. This new opportunity was greatly speculated later by Johannes Kepler to find a better orbit fit for Mars, as we will see later.

Planet	Copernicus Model	Actual distance
Mercury	0.376	0.387
Venus	0.719	0.723
Earth	1.00	1.00
Mars	1.52	1.52
Jupiter	5.22	5.20
Saturn	9.17	9.54

We have to mention that the idea of the Earth evolving around the Sun is not new. It was proposed before by Aristarchus, but rejected because of the belief that Earth does not move. In fact, Copernicus brings other arguments as well, saying that the "natural" place of the Sun must be in the center of the Solar System, since the Sun is called "the lamp of the Universe" in some old civilizations.

However, even with the success of bringing a *new* model of the Solar system, Copernicus fails in his original goal of having simplified motion for all planets. In order to fit all the data, he still had to introduce uniform motion with respect to other point than the center of the circle, and all the other tricks that Ptolemy invented. At the end of the day the result of the fit did not improve dramatically.

Later however, the new model got a new "push" from an unexpected corner. With the use of the new invented telescopes, Galileo Galilei was able to see Mars not only as a point on the sky, but also as a disk. He then observed that the *magnitude* of this disk changed in time. Remember that, in the model of Ptolemy, Mars is moving more or less at the same distance from the Earth and thus the diameter of the disk should be almost constant. In the one of Copernicus however, the distance between the Earth and Mars largely varies, and thus the apparent size of Mars on sky should change. Galileo Galilei proved Copernicus right, and definitively ruled out the model of Ptolemy.



Figure 1.14: Tycho Brahe's main observational instrument

Tycho Brahe and Johannes Kepler

In fact, even before the telescope had a big impact in astronomy, another astronomer, namely Tycho Brahe (1546-1601), was able to significantly improve the measurements of the movements of the planets without the use of the telescope. The instrument he used, presented in Fig. 1.14, looks like a larger model of the quadrant presented in Fig. 1.9. We can estimate its errors in the same way we did it for the instrument of Ptolemy. Thus, the angle resolution is given by the smallest distance between two readable divisions on the scale, about $\delta = 1$ mm. This must be divided by the radius of the instrument, which is about $R \approx 5$ m if we believe the picture Fig. 1.14, yielding an angle resolution of about $\sin \alpha \approx \delta/R \approx 0.0002$, or $\alpha \approx 0.01^\circ$. The observed errors in the measurements of Tycho Brahe were in this order of magnitude.

The new and better measurements of Tycho made clearer the failure of the known models (of Ptolemy and Copernicus) in fitting all data. That is why Tycho Brahe set himself the task of finding a better model. He was mostly intrigued by the retrograde motion of Mars, and set the task of explaining it to his new collaborator Johannes Kepler (1571-1630). Only one year after they start collaborating Tycho Brahe dies, and Kepler inherits unexpectedly a large and valuable collection of measured data.

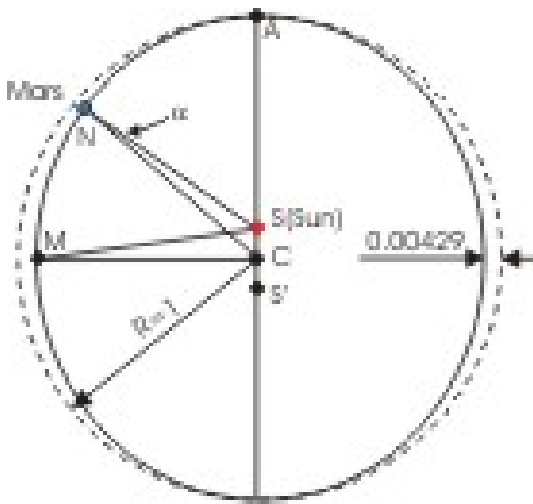


Figure 1.15: The egged shape Kepler found for the orbit of Mars. Notice the similarity with Fig. 1.11

Initially, using only circles to fit the retrograde motion, Kepler had always an error around an eighth of degree (a quart of the apparent diameter of the Moon!) which he could not get rid of. However, he knew that he could trust the measurements of Tycho Brahe, because maestro's measurements error were much smaller than this value (almost ten times smaller), as we have seen. After a long struggle with numbers (imagine that at time no computers were available) Kepler was able to find a better fit to the measured data, giving up however one of the ancient golden rules: the circularity of the orbits.

In his book, entitled "the Watershed" [?], Arthur Koestler gives a vivid description of this struggle, which we only summarize here, and which took Kepler almost six years. First, in order to construct the unknown shape of Mars' orbit, Kepler had to find sufficient number of points of the Mars' orbit. He did that by calculating the precise position of Mars with respect to the Sun, after initially calculating better the position of the Earth with respect to the Sun. At the end, he's got the position of Mars with respect to the Sun. As we have seen, this would not have been impossible for the Ptolemaic system. The shape Kepler found for the Mars' orbit looked more like an egg, as depicted in Fig. 1.15.

One of Kepler's main concerns was the deformation of this "egg", namely the ratio of its furthest and closest point AC/MC which turned out to be $AC/MC = 1.00429$. The value is close to one, as expected, because the orbit looks in a first instance a circle, but still large enough to be measured. The Sun was not situated in the center C of the "egg", but rather aside, at the location S . The apparent angle under which the points C and S were separated as seen from Mars (the angle α in Fig. 1.15) varied with the position on the orbit. However, at the position closest to the center (namely M), this angle was $5^\circ 18'$. There were, of course, other numbers that defined the orbit, and which probably Kepler dreamed of in his sleepless nights. His fortune came however when he was checking some trigonometrical tables. In Kepler's own words:

"I stumbled entirely by chance on the secant of the angle $5^\circ 18'$, which is the measure of the greatest optical elongation. When I realized that this secant equals 1.00429, I felt as if I had been awakened from a sleep."

In other words, there exist a simple relation between the angle α and the ratio AC/MC (which he calls "the greatest op-

tical elongation"): $1/\cos\alpha = AC/MC$. He realized that such a relation is not a matter of chance, and he thought that it must hold must hold for all points of the curve. What kind of shape would present it? After another long search the answer was clear: an ellipse!

In fact, as we propose in Exercise 1, the above relation is exact only for the point M on the ellipse, and for the other points (denoted by N in Fig. 1.15) it holds only to a very good approximation. In Fig. 1.15 we try quickly to show why this is the case for the point M . Here we see the secant is given by $1/\cos\alpha = MS/MC$. We have then only to show that $MS = AC$. We do that by remembering one of the features of the ellipse, namely that the sum of the distances to its foci is constant. Now, Kepler placed the Sun in one of the two foci (S or S') of the ellipse. We have then $MS + MS' = AS + AS'$. As $MS = MS'$ and $AS + AS' = 2AC$, we get $MS = AC$, and that completes our small demonstration.

Even though it took Kepler more time to realize that the curve he found was an ellipse, he came at the end with the right solution: Mars' orbit is not a circle, but an ellipse. The break with the old Greek's favorite circle was to be definitive. In addition, he also described what is known today as the Kepler's laws:

1. The orbit of a planet about the Sun is an ellipse with the Sun at one focus of the ellipse
2. A line joining the planet and the Sun sweeps out equal areas in equal intervals of time
3. The squares of the periods of the planets are proportional to the cubes of their semi-major axes

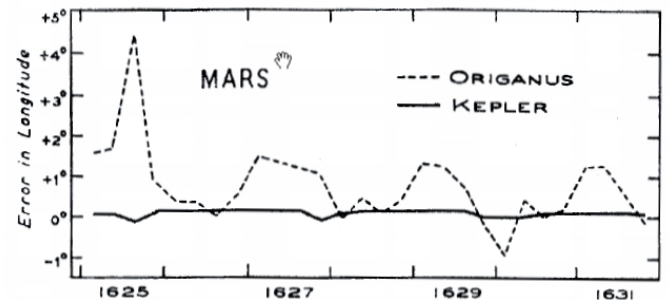


Figure 1.16: A comparison between a prediction of the orbit of Mars during the years 1625 to 1631, based on Kepler's ellipse (made by him in the *Rudolphine Tables*), and a prediction based on Copernicus' model (made by Origanus following the *Prutenic Tables*). It is said that the introduction of Kepler's ellipse improved the prediction up to a factor of 50.

Actually, during deductions, Kepler made few errors that canceled out, before stumbling onto the correct second law. These laws proved later crucial in the history of physics as we will see in the next sections.

In Fig. 1.16 we present a comparison of the errors in predicting the path of Mars given by the three models (Ptolemy or Copernicus and Kepler). As we can see, the errors accumulated in the model of Ptolemy or Copernicus are very large (4 degrees is 8 times the diameter of the Sun), and Kepler's model greatly reduces these errors. In addition, Kepler's model requires much less parameters to fit that the one of Copernicus, being thus not only quantitatively, but also qualitatively better.

1.3 Newtonian mechanics

1.3.1 Galileo Galilei

In the previous sections we have seen how some celestial objects (the Earth, the Moon or the planets) do not travel randomly through space, but rather on some given orbits. As mentioned before, the impact of these ordered phenomena on our understanding of the world is huge. For a moment, God does not seem to interfere with the planet's movements, and we can try to reveal the hidden order in this behavior, to understand it, or even to predict it. And if we found that kind of order in the sky, why not looking on Earth as well?

Galileo Galilei (1564-1642) was one of the first to try and succeed. Some even say that modern physics begins with him. There are, of course, other people who contributed in building up the ideas up to Galilei. However, in order to keep the story short, we concentrate here only on Galilei and later on Isaac Newton (1643-1727).

The main assumption of Galileo Galilei is this: if laws that describe the order in some natural phenomena are to be found, then these laws must not only be general, but *simple* as well! Imagine how lucky we are that he was right... To prove his point, Galilei analyzed the free fall of heavy objects (free fall meaning here the the body is just released without receiving some initial momentum).

In the first instance, this looks like a peculiar choice. We know that all objects fall down, and the heavier objects *seem* to fall faster than the lighter ones. However, the way the objects fall may differ from one object to another (compare the falling of stones and the one of the leaves of a tree), and thus no order would be expected. However, the reason why most of the objects fall in a different way was realized even from the antiquity: the air opposes a certain resistance. In general, it looks like the air resistance would make the determination of the order impossible (because it gives variation). The old thinkers got however around this problem by asking themselves what would be the fall if no air would be present.

The followers of Aristotle (384-322 B.C.) thought that even in this cases the heavy objects fall faster than the lighter ones. They thought that the Earth is a kind of "natural place" for all the objects, and that is why all tend to it. If some objects are heavier, then they would go faster to this "natural place". However, Galileo Galilei pointed out to a flaw in their reasoning. "Let's take a heavy and a light object, he said, and glue them together. If Aristotle was right, then the light one would tend to fall slower than the heavy one, thus slowing the motion of the heavy one. However, since they both form a heavier object, the final movement must be faster. This contradiction can only be solved by admitting that, in the absence of air, all objects fall in the same way."

The story goes in saying that Galilei experimentally verified this supposition by letting two balls (a cannon ball and a musket ball) fall down from the tower of Pisa. Even though the masses were very different (something like 0.2 kg and 100 kg), the two balls had reached the ground at the same time, verifying thus his supposition. Some people suggest today that the experiment was done probably by one of his students. We may assume that the professor was so confident in the correctness of his theory that he did what most of the present day professors would do: let some graduate students verify it experimentally. However, what is most remarkably is, of course, the fact that he went out of his bureau and let the experiment

be done! That is one of the reasons why some call him the father of modern physics.

Galileo went however further than verifying his supposition. He noticed, like we've all noticed, that the movement of the heavy objects is *accelerated*. The falling objects begin slow and later acquires speed. Is there any general law that may describe this behavior in the absence of air resistance? Can we describe it in mathematical terms, as we did it for the movement of the celestial objects? Galilei gave a positive answer to the question as well, by starting from his belief that this new mathematical law must be *simple*.

He compared this new accelerated movement with the uniform movement. In the uniform movement the distance x grows linearly in time, and the velocity v of the object (defined as the distance traveled in a certain time) is constant:

$$x(t) = vt \quad (1.6)$$

Since we've noticed that the velocity is increasing in the free fall, said Galilei, let's assume that it has the *simplest* behavior as well! In this particular case, by comparison with the uniform movement, that would mean that the velocity would increase *linearly* in time:

$$v(t) = at \quad (1.7)$$

Here a would be a constant that would take, of course, the name of *acceleration*. It looks simple today, but for Galilei, who did not know differential calculus (invented later by Newton and Gottfried Wilhelm Leibnitz) this posed a very difficult problem. He was used with the term of *averaged velocity*, as being the ratio between a certain distance traveled by an object and the time interval it took it. The velocity in the above formula is *instantaneous*, and it has thus in principle no time available to be measured! No one could ever measure an *instantaneous* velocity by measuring the positions of the moving object, but only *averaged velocity* between certain positions. Galilei used in his explanations still the *averaged velocity* and, even though he was able to come out with the right results, the calculation were tedious, involving a lot of geometry. We turn now however directly to the differential calculus, to write down the proposed behavior of the objects in the free fall:

$$v(t) = \dot{x}(t) = at \quad (1.8)$$

We are interested in finding the position $x(t)$ from the above equation, a result that we can check experimentally. Using the modern mathematics, one gets it immediately by integration:

$$x(T) = \int_0^T \dot{x}(t) dt = \int_0^T at \cdot dt = x_0 + a \frac{T^2}{2} \quad (1.9)$$

If we take the initial position to be zero, $x_0 = 0$, then we see that we expected a *quadratic* behavior of the distance with time. The only thing left is to measure experimentally the free fall, to check for this behavior!

However, Galileo Galilei was faced with another problem when trying to verify the above mathematical law for the free fall. After he minimized the air resistance by choosing heavy balls, he looked at the time it took for the balls to fall down. These times are however at most in the range of few seconds, and it was very difficult to him to measure not only this small times, but also the proper position at which the balls found themselves. Galilei used either water clocks available in his



Figure 1.17: Galileo around the experiment with the rolling ball. Late painting (1841) by G. Bezzuoli

time, or even his own heartbeat, however the time resolution of both were poor. That is why he turned himself to a different solution, namely a ball rolling down on a slope (see Fig. 1.17).

This solution introduced additional problems, like the friction, which he solved by polishing very well the slope and creating channels on it on which the ball could roll. Also the round shape of the ball played a role, slowing down the movement. However, Galilei was lucky, because even though these technical problems altered the absolute values he deduced from the measurement (like the acceleration), they did not affect the main conclusion Galilei wanted to make, namely that the motion will be uniformly accelerated.

Because of the slope, the time of fall is now considerably larger, and Galilei could do the measurements to prove his point. To our regret, no documents survived with the original data of Galileo for this experiment. In order to see what kind of data had Galileo, we turn to an experiment done by group of students at the University of Rice. They tried to reconstruct the slope according to Galileo's writings, and measure the time in the same way Galileo did, namely with water clock consisting of a bucket with a small hole drilled in the bottom. We present their results in the following table, in arbitrary units. If they obey the law 1.9, then in every moment the ratio $x(t)/t^2$ must be constant, as presented in the last column.

$x(t)$	t	$x(t)/t^2$
0	0	-
25	17.1	0.085
50	25.4	0.078
75	28.5	0.092
100	34.23	0.085

We can see from the above table that the ratio $x(t)/t^2$ is constant to some degree (due to large errors), and thus indeed the motion is *uniformly accelerated*. We may ask ourselves to what extent is this relevant to the free fall problem, since we are using here a slope. Here we may follow the answer of Galilei, who argued that if we tilt the slope, at one point, when the slope is almost vertically, the rolling movement will become *smoothly* a falling movement. The two behaviors must be the same then. That this was true, only later experiments could confirm.

1.3.2 Newton's laws of motion

The experiments with the rolling ball on a slope brought Galilei an unexpected bonus. He observed that the ball, after rolling down the slope, would tend to go further, unless faced with an upward slope in front of it (in that case, it will climb the new slope almost at the same height as the original height). Of

course, friction would damp the movement in time, and at one point the ball would stop from rolling. Imagine however that no friction would exist. What would then happen with the rolling ball? The answer of Galilei was crucial in the developments of further ideas.

If no friction exists, he said, and no upward slope, then the ball *would roll forever* with the same velocity, until eventually finds an upwards slope to climb and stop at the same height as the initial one. In other words, by generalizing the argument, if there is no friction, and nobody is pushing or pulling the ball, the ball keeps going with the same velocity for ever. This supposition, later to become Newton's *first law*, address an older question: "What happens with the moving objects if nobody acts on them?" According to Aristotle, they should decrease their speed, because they loose the initial "momentum" needed to push the object further. Galileo states something else: the objects would keep moving. This somehow comes in contradiction with our daily experience: if we do not push an object, it will eventually stop. But this is due to friction, as argued by Galilei.

Isaac Newton (1643-1727) took over these ideas of Galilei, and improved them further. He accepted that a ball which is not acted upon will not change the way it moves. But he was interested *additionally* in how to quantify the actions that change the movement of the ball. The notion which he chose was the one of *force*. Force is a very usual word in our daily life. It mainly express the amount of action one needs to change something else. Its a natural experience that we need larger *forces* to move faster the objects around, or to lift heavier objects. It is not always measurable (think of the persuasive force), but in the experiments Newton had in mind the force was measurable, for example with the help of a spring.

Imagine a set of experiences with a scalable spring and a body on a horizontal table *without friction* (see Fig.1.18), along a *single* direction. Every time we pull the body, we can measure the force we use on the scale of the spring. We pull or push the spring and this, in turn, is going to act in the same way on the body, indicating however *at the same time* the force we use. The force is now measurable, and indicated by the elongation of the spring Δx . We assume that this elongation (or contraction) of the spring gives the *instantaneous* magnitude of the force, with the help of the relation $F = k \cdot \Delta x$, where k is a given constant of the spring. Of course, this is more like an ideal situation, because the spring itself may have a delay in adjusting its length to the changes in forces. The spring is this case an *force etalon*. To avoid experimental problems, we will ignore how it is made (for us it will be like a black box), and assumes that it gives an instantaneous response.

We will find etalons important in other theories, like the special and general relativity. The etalons there (watches and

rulers) are seen as well as black boxes, somehow as instruments from an outside Universe used in ours. The reason why we would rather not open them is because, once open, they may lead to self-reference situations as the one mentioned in the beginning of this book. In other words, we need etalons to measure the Universe, and describe it quantitatively. But then, because the etalons are part of the Universe, they must be described as well by this theory, and thus a self-reference loop is created. We do not have anymore a single starting point, we have a chicken and egg problem. We will try to exemplify better this point in the case of special relativity, and show how we may get around this problem.

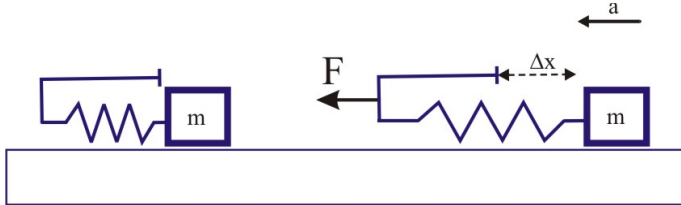


Figure 1.18: A body on a frictionless table. Left: The body is at rest and the spring is not elongated. Right: The body is pulled and accelerated, and at the same time the spring is elongated, giving an indication of the force F at that moment

The spring of Fig.1.18 is a very good device to measure at the same time the force applied *and* the change in movement. Following the line of Galilei, Newton chose the *acceleration* of the body as the quantity describing the change in movement. For a movement in a single direction:

$$a(t) = \ddot{x}(t) \quad (1.10)$$

In case of a uniformly accelerated movement $a(t) = a$ is constant. We may imagine the set of experiments Newton had in mind to construct his arguments. First, he may have checked experimentally (with the spring in Fig.1.18) that the uniformly accelerated movement is realized when the force that drags the body is *constant*. In other words, the experiments showed that a *constant force* applied to a body lead to a *uniformly accelerated movement*. In addition, the same experiments would have proven that the force applied *to the same body* was always *proportional* with the induced acceleration, which was not obvious!

Newton summarized these *experimental* findings in saying that each body has an *inertial mass* m , which is defined as the ratio between the force applied to it and the acceleration it gives to the body (and being thus a *constant* of that body):

$$m = \frac{F}{a} \quad (1.11)$$

The word "inertial" stresses the fact that the *inertial mass* is a property related to the movement of the body. We can rephrase the above conclusion in saying that a constant force that acts on a body induces an acceleration proportional with the inertial mass of the body. We can also go further and assume, like Newton, that this happens at any *instantaneous* moment. In other words, for any non-uniform movement, where we vary in time the force $F(t)$, the instantaneous acceleration of the body at any moment t is given by:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (1.12)$$

The above relation holds for a movement in a single direction, like the ones we have in mind in Fig. 1.18. What will however happen in a three-dimensional space? Here Newton introduced the notion of a *vector*, which has not only magnitude, but also *direction*. The acceleration itself becomes a

vector (like the velocity), that quantifies the changes in the position vector $\mathbf{r}$ of the body $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. Also force becomes a vector $\mathbf{F}(t)$.

In our previous case we had only one force acting on the body. What will happen if we have *more* forces acting at the same time on the body? According to Newton, we have to calculate the *total force* $\mathbf{F}(t)$ acting on the body, as a *vectorial sum* of all individual forces $\mathbf{F}_i(t)$ acting at that time on the body

$$\mathbf{F}(t) = \sum_i \mathbf{F}_i(t) \quad (1.13)$$

In the end, Newton generalized the above results in the form of its *second law*, that holds for *any* type of movement: at each moment, the change in the motion (given by the instantaneous acceleration), equals the *total force* applied to the body divided by the inertial mass of the body:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)}{m} \quad (1.14)$$

The total force $\mathbf{F}(t)$ here is as a *vectorial sum* of all forces (constructed as *vectors*) acting on the body. In Ex. 1 we propose an exercise that makes use of the vectorial form of the force, in the case of the circular movement.

Of course, when we are not using force etalons (like the spring), there may be a confusion in quantifying the forces. Imagine few bodies pushing one another. What are the forces? Newton was able to give a partial answer to this by stating his *third law*: for every action there is an equal and opposite reaction. This law looks obvious from our daily experience. For example, when we step off a boat, the boat tends to move in the opposite direction. It hides our lack of knowledge of the real interactions between bodies, and it has a disadvantage in that it is not always easy to implement (think of the millions of pieces of sand, the friction, or even water). The reason it works, we know today, is because of the way the microscopic forces act, and the fact they also obey this principle (being equal in magnitude and opposite), either they are nuclear or electromagnetic forces. In Ex. 1 we propose another exercise that makes the reader more familiar with this principle.

Up to this point we had in mind only experiments where some people pull or push some bodies. There is, however, a *natural* source of motion around us: the attraction of the Earth! We notice that the three laws of Newton do not refer to it, they are made in complete ignorance of gravity. They can be however applied to it, by imagining that the Earth attracts the bodies with a kind of *invisible* rope. That the Earth attracts the bodies we mentioned before. For each body the attraction can be quantified with the same force etalon (let's say the spring), and each body acquires in this way a *weight* W , which has the dimensions of force. We can do that by *weighting* the body with the help of the spring.

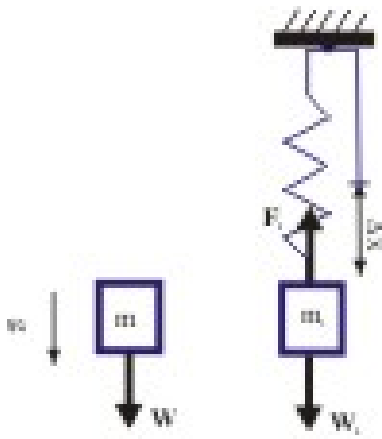


Figure 1.19: Left: A body in free fall. Right: A body attached to a spring

Now, when weighting a body of *inertial mass* m let's say, as in Fig. 1.19, we do *not* have an expectation of the weight W . That is because the *inertial mass* m and W refer to two independent type of experiments: the first involves movements, and the second one is static. That is why we expect them to be two independent numbers. However, after doing the experiments, we will notice that the ratio between the weight W and the inertial mass m is the same for all objects:

$$\frac{W}{m} = g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (1.15)$$

In other words, the weight W and the inertial mass m are not independent! In fact, one does not have to do the weighting experiments to prove this, because the proof can be found in Galilei's experiments. Thus, as we can see from Fig. 1.19, we can also apply Newton's second law to the free fall, assuming that the Earth attracts the body *always* (not only when we weight the body), with a force that equals its weight W . Because the weight is constant, we obtain a uniformly accelerated movement, with the acceleration a given by:

$$a = \frac{W}{m} = g \quad (1.16)$$

But an uniformly accelerated movement is exactly what Galileo Galilei experimentally verified! In other words, Newton is able to *explain* why the free fall studied and measured by Galilei is best described by the uniformly accelerated movement. In addition, we know from Galilei that the acceleration in free fall $a = g$ is *the same* for all objects, as Galileo showed by dropping the two balls from the Pisa tower. If so, then the ration W/m must be the same for all objects, according to the previous relation, and this proves again our earlier supposition.

In the literature regarding this subject one defines most of the time a new constant, called the *gravitational mass* m_g , as $m_g = W/g$. This is in fact the one we refer when we say that a certain object weights $m_g = 4 \text{ Kg}$ let's say. The previous results assert then that the gravitational mass and inertial mass are equal. We will consider so from now on, and call both quantities simply the mass m .

The proportionality between the inertial mass m and the weight W is, in Newton's theory, an independent empirical fact, not something that follows from the first principles of the theory. He was aware that this proportionality does not apply to forces in general, citing as an example the force of magnetism, which is not proportional to the mass of the attracted body. We may imagine a "free fall" of different metal pieces attracted by a magnet. The accelerations of different metal pieces are going

to be different in this case. Thus the proportionality in the case of gravity is an accidental fact. It connects intrinsically movement and gravity, but Newton could not explain why and how.

We know today that indeed, the movement is intrinsical connected with gravity through the equations of general relativity of Einstein. Here, gravity becomes in fact a set of equations that *describe* the movement given the presence of some material objects and the forces between them. We will see however that the story is not that simple. Since gravity is used by Einstein to explain the movement, we would expect it to take the place of Newton's second law. It was suggested that, in this case, the source of the movement (that is, the weight in Newton's theory), should be described by the collection of all the other things *except* gravity. In other words, the mass of the particles may be fully calculated from all the other interactions, electromagnetical, weak, strong, or something else. These attempts have been tried, as we will see, but did not prove successful. At the end of the day, one still needs an *a priori* constant m_0 that enters the mass of the particle. However, as it was also shown true, the other forces contribute also partly to the inertial mass of the particle with a constant m_1 , such that the total mass of the body is $m = m_0 + m_1$.

At the end of this section we make an observation probably obvious to most of the readers. It is namely crucial that we are able to read correctly the analytical formulas describing physical behavior. On way to check that is to make a small exercise in our mind (or on a piece of paper), to see if we are able to give a *numerical solution* to the problem, with the help of a *computer*. Once we try that, we come to the point where we have to understand and implement the meaning of each letter in that formula, with its units as well! Let's take the example of Newton's second law 1.14, as a small exercise, in case of linearly movement.

We wonder if 1.14 really gives the evolution of a body, once all the forces acted upon it are known at any time. The fact is not obvious, because the formula gives an acceleration. For the mathematicians, the acceleration is a second derivative, and the differential equation 1.14 may be solved either with the help of the boundary conditions (initial and final positions), or with the help of initial conditions (position and velocity). If we take the second case, we can find also numerically the solution by implementing an iteration procedure, starting from the discrete definition of the derivative. Namely, at each iteration we calculate two things, the new position and the new velocity:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + v(t_n)(t_{n+1} - t_n) \quad (1.17)$$

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + \frac{F(t_n)}{m}(t_{n+1} - t_n) \quad (1.18)$$

If we take the time steps t_n sufficiently close to each other, we will come up with a numerical result close to the analytical one. The above procedure ensure us that 1.14 gives the path once the initial position $x(t_0)$ and velocity $v(t_0)$ are known. In Ex.1 we propose a numerical problem that can use this approach.

1.3.3 Newton's Law of Universal Gravitation

In the previous section we have seen how gravity played a testing ground for Newton's ideas. Thus, by assuming that the Earth attracts all objects on it, Newton was able to deduce Galilei's law for free fall and, in addition, to realize the intrinsic connection between gravity and movement. But there is much more than that.

As story goes, when Newton was very young (about 23), he was sitting under an apple tree. At one moment, he saw an

apple falling down. His explanation was, of course, that that apple was attracted by the Earth. But this time his thoughts went even further. What if the tree would be very high? Then of course, the apple would fall as well. But what if the tree would be as high as the Moon? Probably the apple would fall as well. But, wait a minute, what if the Moon is a kind of apple? Would the Moon be attracted as well? Yeah, that's it, the Moon *is attracted* by Earth, but it does not seem to fall....

You see the problem, the Moon does not fall. If Newton was to generalize the attraction to all bodies around the Earth, he would have a huge problem. We, as parents, have it always when asked by our kids why does the Moon follows us, or why does it not fall. Our answer is most of the time something like: "because he likes to follows us and it is kept fixed on the sky with thread". But Newton had a much more difficult task (or challenge, depends how you look at it).

Newton knew however that the Moon orbits around the Earth. According to Newton's second law, this implies already that some forces act on the Moon, since otherwise it would follow a linear trajectory. The presence of the attraction of the Earth would have to change its trajectory, make the Moon fall on the Earth, if possible. But wait a minute, is this not what we see? The trajectory is curved around the Earth. That means that the Earth tries to attract the Moon, curves its otherwise its linear trajectory toward the Earth, but not enough to make it fall. In the next moment the process repeats, creating at the end a curved trajectory. In Fig. 1.20 we try to explain this process.

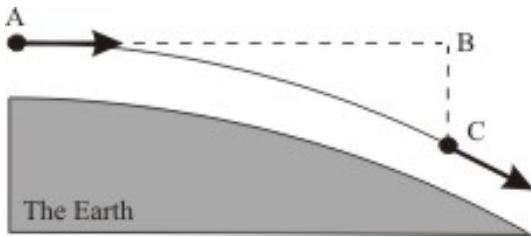


Figure 1.20: Newton's idea: If launched horizontally, the moon will also fall at the same time. If the speed of the Moon is properly adjusted, than the Moon fall just enough to be always at the same distance from the Earth.

Here the Moon would move on the linear trajectory AB if not attracted by Earth. However, *because* it is attracted, it will *fall* at the same time on a distance equivalent to BC . At the end of the day, the Moon moves from A to C . If the numbers are *well adjusted*, it may happen that A and C are on a circle, at the same distance from the Earth, and the velocity of the Moon at point C is again parallel to the surface of the Earth (as it was in A). Then, the process will continue in the same way, and the Moon will circle the Earth. We would have to explain later these fine adjustments, but for a moment let's forget about it, and see if the values are realistic.

We know the distance to the Moon $EM \approx 400000$ Km from 1.2, and we also know the Moons' one month periodicity. We can then estimate the velocity of the Moon as $v = 2\pi EM / (1 \text{ month}) \approx 3500$ Km/h. On the other hand, the movement from A to B is expected not to be accelerated, because the gravitational attraction does not act along this AB line, but perpendicular on it (see the vectorial form of Newton's second law 1.14). Then we have $AB = vt$ (where t is the time of travel from A to B), that gives a traveled distance of $AB \approx 60$ Km within one minute $t = 1$ min. If the point C is situated at the same distance from the center of the Earth as the point A (that distance being EM) we first have to solve a small geometrical problem. We do not show here, but the following relation holds for small segments AB

$$BC \approx \frac{AB^2}{2 \cdot EM} = \frac{v^2}{EM} \frac{t^2}{2} \approx 9m \quad (1.19)$$

The initial velocity in A is parallel to the surface and points to B , and the gravitational attraction force acts perpendicular on this AB trajectory. Then again, from the vectorial form of 1.14, we may say that along the radial direction BC , the Moon performs a *free fall*. The Moon should then drop the distance of $BC=9$ m in precisely one minute. We can see already in the previous equation 1.19 a quadratic behavior with time, like in the free fall formula 1.9 of Galilei. That means that the Moon would have to fall indeed on the Earth as Newton supposed, if he wants to keep its distance to the Earth constant. We can now estimate the acceleration of the free fall by comparing 1.19 and 1.9, to get $g_M = 2BC/t^2 = v^2/EM = 0.0025m/s^2$.

This value would be much smaller then the one on the surface of the Earth. Since we may assume that the mass m of the objects is the same everywhere in space, we may conclude the the weight $W = mg_M$ is different than on the surface of Earth, namely smaller. The idea that the Earth attracts the objects with smaller forces when the objects are further away was not new. Kepler already suggested an inverse-square law behavior when trying to justify his non-circular motion, in addition to the *anima motrix* (driving soul), a driving force that keeps the planets bound to the Sun. Mathematically, we may write his assumption as:

$$W(r) = mg(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad (1.20)$$

where r is the distance from the center of the Earth to the object. If that is true, we see immediately that the ratio of the free fall accelerations g (on Earth) and g_M (at the Moon's location) should be inversely proportional with the square of the distances R_E (the Earth radius) and EM (the distance Earth-Moon). Since we know now all the values, we may check that immediately:

$$\frac{g}{g_M} = \frac{9.8}{0.0025} \approx 4000 \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{EM}{R_E}\right)^2 = \left(\frac{400000}{6300}\right)^2 \approx 4000 \quad (1.22)$$

In other words, the supposition of Kepler was right! The Earth attracts the Moon with a force that decreases inversely proportional with the distance. And, as Newton showed, the Moon will fall on Earth, but precisely in such a way as to circle the Earth. We mention here that the above calculation was made when Newton was only 23, but published only 16 years later. The reason seems to have been a wrong definition of mile, used by Newton, and Newton's concern that the shape of the Earth was not taken into account.

Having this success, Newton went further, and assumed that *the Moon attracts the Earth as well*, with the same type of force. The influence on Earth is this time smaller, because the size of the Moon is smaller, but not negligible. In fact, if we take into account the dimensions of the two objects, we can estimate that both the Earth and the Moon rotate monthly at the same time around a fixed point, called the common *center of mass*. This point lies at about 1500Km from the center of the Earth (see Fig. 1.21). The situation resembles the one having two children keeping hands together and rotating around the common center.

However, since Newton had at that time no astronomical observations to confirm this monthly rotation of the Earth, he concentrated his attention to another effect, namely the tides of the oceans. The tides are periodical phenomena (about 12

hours) that refer to the cyclic rise and fall of seawater (see Fig. 1.21). It was known from antiquity that when the Moon is up on the sky we have high tides. Newton went further and assumed that the tides are created by the moon's attraction. How would that work? We try to give a short explanation in Fig. 1.21.

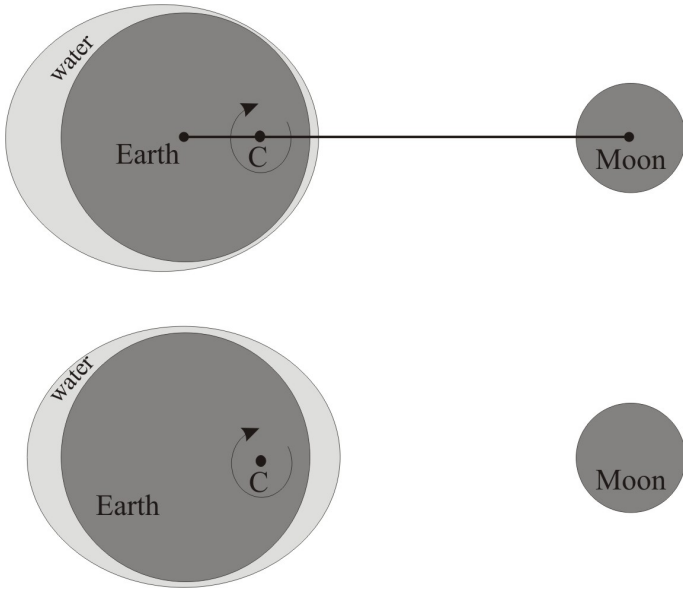


Figure 1.21: The formation of tides. Upper panel: the Earth and the Moon are rigidly fixed to each other and rotate in the *absence* of the gravitational attraction. Lower panel: The Earth and the Moon rotate in the same way, but due to the gravitational attraction only.

In the upper figure we plot an imaginary case, when the Earth and Moon are fixed on a huge rigid bar, and that bar rotates around the center of mass in the same way the two celestial objects move in reality. We then ignore the gravitational attraction between the Earth and the Moon, and consider what is happening with the water on the surface of the Earth. As it can be easily imagined, the water on the surface of the Earth bulges on the side opposite to the Moon. In technical terms, it is the centrifugal force that pushes this water away.

Now consider what happens if we remove the rigid bar and add the gravitational attraction between the Moon and the Earth. Then the Moon attracts also the water, creating another bulge on the side of the Moon, like in the lower panel of Fig. 1.21. Considering that the Earth is rotating daily while these effects are happening, we expect two tides occurring each day, and this is exactly what we see, confirming Newton's supposition. Numerical estimates lead to the heights of the tides of about 1m, the right order of magnitude.

Having confidence that the Moon attracts the Earth as well, Newton combined this result with one from 1.20, to propose its Universal Law of attraction, namely that two bodies *attract* each other with equal forces, proportional with the masses of the two bodies, and inversely proportional to the distance d between them:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (1.23)$$

The formula above gives only the magnitude. The force is however a vector, that gives information also about the direction, as we have seen in 1.14. We can make also in this case a vector, if we multiply the magnitude with the unity vector (a vector with magnitude 1) that points from one body (located at $\mathbf{r}_1$) toward the other (located at $\mathbf{r}_2$). This can be written as:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (1.24)$$

Then, the force with which the body located at $\mathbf{r}_2$ is attracted the body located at $\mathbf{r}_1$ is

$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (1.25)$$

where $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ is the distance between the two bodies and G is a constant, called *the gravitational constant*. This is today one of the fundamental constants of Nature, whose value however Newton did not know. We see that this is because of the lack of knowledge of the mass of the Earth, and we will address this problem later. We also see that the above formula satisfy the principle of action and reaction, the two forces with which the two bodies attract each other being opposite and equal in magnitude.

We can see now the power of the cosmological system Newton found. Namely, the formula above gives us the forces which act between cosmological objects, and Newton's second law 1.14 provides us with how the bodies react to these force. In a numerical approach, we can use the first one to determine the forces, and then the second one to compute the next infinitesimal position of the celestial bodies. Then recompute the new forces in the new positions, and so on, until the evolution of the celestial objects is deducted. The two formula's 1.25 and 1.14 hold the key to the movement of the celestial bodies!

The above model is, of course, not a final one for the whole Universe. We can see that it does not explain the heating of the objects, the rust of the metals, or the growth of the plants. We can be happy that we found a small order out of the whole Universe, but also feel small at the same time, thinking of what is lying ahead. In the words of Newton, we found only a small beautiful stone out of the huge collection from the bottom of the sea...

1.3.4 The elliptical orbits of the planets

As we have seen in the previous chapter, Newton was able to estimate that the gravitational force has an inverse square-law behavior, by looking in the first instance at the circular orbits of the planets. But he also knew the results of Kepler, namely that the orbits are in fact *elliptical*. Even though it may look like a disadvantage, the elliptical orbits proved to be exactly what Newton needed in order to spectacularly confirm his theory. In this section we will see how.

First, we have seen in the previous section the weakness of Newton's argument: the distance of flight AB (from Fig.1.20) and the free fall distance BC must be *precisely* adjusted in such a way that the final orbit is a circle. However, we do not expect such a perfect adjustment in practice. Why would be the Moon placed exactly on that orbit? And if so, the Moon is still hit by all kind of meteorites who can change its trajectory, little by little, from the original circle. The Moon may be hit toward the Earth, and then we may expect that the Moon changes its trajectory *slowly*, falling maybe in a *spiral* toward the Earth. Shall we fear such a disaster? Maybe not because, you see, we have to put the problem in a little bit different way.

We may start from Newton's law of gravitation, and ask ourselves, what would a *general* trajectory of the Moon look like, *irrespective* of its initial position and velocity? If we find a spiral toward the Earth, we may worry, but maybe there is no need to worry.

Now, let's state mathematically the general problem we want to solve. We take a huge body of mass M (the Earth) at rest in the center of coordinates (see Fig. 1.22). Then we place a lighter object of mass m (the Moon) at a certain given location $\mathbf{r}(0) = x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j}$. We take both objects to be punctual, and assume that the heavier body (of mass M) is not influenced by the lighter one, and thus it will stay in the center of reference. Then we give the lighter object an initial momentum in the xy plane. Its given initial velocity will be $v_x(0)\mathbf{i} + v_y(0)\mathbf{j}$. During the movement, the light object is attracted by the larger one according to 1.25. Knowing M , m and the initial values $x(0)$, $y(0)$, $v_x(0)$, $v_y(0)$, can we calculate the trajectory $\mathbf{r}(t)$ of the light body?

One way to do it is numerically. As discussed in one of the previous sections, we can estimate the position and velocity at iteration time t_{n+1} from the previous ones at t_n , through the following formulas:

$$\mathbf{r}(t_{n+1}) \approx \mathbf{r}(t_n) + \mathbf{r}'(t_n)(t_{n+1} - t_n) \quad (1.26)$$

$$\mathbf{v}(t_{n+1}) \approx \mathbf{v}(t_n) + \frac{\mathbf{F}(t_n)}{m}(t_{n+1} - t_n) \quad (1.27)$$

The gravitational force $\mathbf{F}(t_n)$ acting on the lighter body is given by 1.25, and can be computed knowing the position $\mathbf{r}(t_n)$. By successive steps, taking a sufficiently small interval $t_{n+1} - t_n$, one may find numerically a good approximation of the trajectory. In Ex.1 we propose such a numerical determination of the orbit.

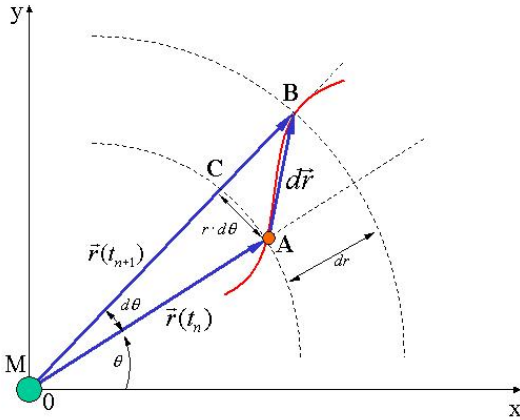


Figure 1.22: The movement of the body between two infinitesimally closed locations A and B.

We concentrate here however on an analytical solution, mainly because it can be done without a big effort. There are however other situations (like three objects attracting gravitationally one another), that can not yet be solved analytically. We start by simply writing down a vector, called *angular momentum*, associated with the light body at any moment:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t) \quad (1.28)$$

For the moment $\mathbf{L}(t)$ is a unknown vector, defined as the vectorial product of the trajectory $\mathbf{r}(t)$ and the impulse $m\mathbf{v}(t)$.

Let's however calculate its derivative with respect to time t . We have:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)] \quad (1.29)$$

Using $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ and $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$ we get:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{v}(t) \times m\mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{a}(t) \quad (1.30)$$

The first term is zero, because of the definition of the vectorial product, and for the second one we can Newton's gravitational law 1.14 to replace the acceleration $\mathbf{a}(t)$:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t) \quad (1.31)$$

However, from Fig.1.22, we see that the gravitational force $\mathbf{F}(t)$ acts always toward the origin, where the heavier body of mass M is situated. Consequently, the force $\mathbf{F}(t)$ and the position $\mathbf{r}(t)$ are collinear, and their vectorial product is also zero. We arrive then at:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = 0 \quad (1.32)$$

Because the derivative is zero, the vector $\mathbf{L}(t)$ must be constant in time, and equal with its initial value

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(0) = [x(0) * v_y(0) - y(0) * v_x(0)]\mathbf{k} = L\mathbf{k} \quad (1.33)$$

Its magnitude L is thus constant, and *known* from the initial values. Moreover, the vector lies in the z direction, pointing out of the xy plane. Because of its definition 1.28, $\mathbf{L}(t)$ must be always also perpendicular on $\mathbf{r}(t)$, and consequently the vector $\mathbf{r}(t)$ must lie in the xy plane. The trajectory takes place thus in the xy plane, which makes the calculations simpler.

We can see now that the system evolves in the xy plane, and we may turn to cylindrical coordinates, which are more appropriate in this case. We then monitor the position of the lighter body not through $x(t)$ and $y(t)$, but rather through $r(t)$ and $\theta(t)$ (see Fig. 1.22). Now let's turn back to the angular momentum 1.28, and rewrite it using the new chosen cylindrical coordinates. We first have, using a small trick related to the vector product,

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t) \times m \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = m \frac{\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (1.34)$$

In the above relation we have moved from a differential equation to a relation between infinitesimal measures (like dt or $d\mathbf{r}$). We now try to rewrite the infinitesimal vector $\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t)$ appearing on the right hand side, with the help of the figure 1.22. From the OAB triangle we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}(t) &= |\mathbf{r}(t)| \cdot |d\mathbf{r}(t)| \cdot \sin(\widehat{OAB}) \cdot \mathbf{k} \approx \\ &\approx r(t)|d\mathbf{r}(t)| \cdot \cos(\widehat{CAB}) \cdot \mathbf{k} = r(t) \cdot AC \cdot \mathbf{k} = r(t)^2 d\theta(t) \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

where we have used the infinitesimal relation $AC = r \cdot d\theta$ (see Fig. 1.22). Replacing this result in 1.34, we get

$$\mathbf{L}(t) = L\mathbf{k} = \frac{m}{dt}[r^2(t)d\theta(t) \cdot \mathbf{k}] = mr^2(t)\dot{\theta}(t) \cdot \mathbf{k} \quad (1.35)$$

In the above relation $1/dt$ is not a derivative, but an infinitesimal number, so we were allowed to place it inside the parentheses and reconstruct the derivative. The magnitude L is thus given by:

$$L = mr^2(t)\dot{\theta}(t) \quad (1.36)$$

Because the angular momentum L is conserved during the movement (see 1.32), we know that the above product is constant, even though we do not know the exact $r(t)$. We can see the above formula like a relation between $r(t)$ and $\theta(t)$ during the movement. Useless to say, we have to find another relation between $r(t)$ and $\theta(t)$.

To do that, we start from the Newton's vectorial formula 1.25 for the law of gravitation, which we immediately combine with its second law 1.14. In this way we calculate the change in the movement due to the gravitational attraction:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.37)$$

To ease the calculation, we define the constant $k = GM$. We now multiply both sides with the velocity vector $\mathbf{v}(t)$ to get:

$$-mk \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^2 r} = m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.38)$$

Both sides can be computed with the help of the following tricks:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [r^2] &= \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}] = 2\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r}\mathbf{v} \\ \frac{d}{dt} [v^2] &= \frac{d}{dt} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] = 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

Replacing them in the previous formula, we get:

$$-\frac{mk}{2r^3} \frac{d}{dt} [r^2] = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [v^2] \quad (1.39)$$

leading to:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv^2}{2} - \frac{mk}{r} \right] = 0 \quad (1.40)$$

Now let's get back in using the time t , and remember that $r = r(t)$ and $v = v(t)$ are functions of time. We can then safely conclude that the number in the parentheses of the above formula is a constant of motion, because its derivative is zero. As we will see later, we are actually calculating the *total energy* of the moving body (which can be split into the kinetic and potential part). For us it is just a number that can be calculated from the initial conditions (and it is thus *known*), given by

$$E = \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{mk}{r(t)} \quad (1.41)$$

We have now to translate this in cylindrical coordinates as well. By looking again at the triangle ABC from Fig. 1.22, we deduce

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}(t)|}{|dt|} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{|dt|} = \quad (1.42)$$

$$= \frac{\sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2}}{|dt|} = \sqrt{\dot{r}(t)^2 + r^2[\dot{\theta}(t)]^2} \quad (1.43)$$

Replacing this into 1.41, and using 1.36, we get

$$E = \frac{m\dot{r}(t)^2}{2} + \frac{r^2(t)[\dot{\theta}(t)]^2}{2} - \frac{mk}{r(t)} = \frac{m\dot{r}(t)^2}{2} + \frac{L^2}{2r(t)^2} - \frac{mk}{r(t)} \quad (1.44)$$

We can have a look at our two important results 1.36 and 1.44. From both of them the derivatives $\dot{r}(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ can be extracted. We may then rewrite this two formulas in forms which are perfect for a numerical implementation:

$$d\theta(t) = dt \frac{L}{mr^2(t)} \quad (1.45)$$

$$|dr(t)| = dt \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - \frac{L^2}{2r(t)^2} + \frac{mk}{r(t)}}} \quad (1.46)$$

Here we start with the initial position r_0 , θ_0 and with the initial values L and E (which contain in fact information about the initial velocity). The angular momentum L and the total energy E will be constant during the motion, as we discussed previously. Then, we implement an iteration process in which at each step t_{n+1} the next position is calculated from the previous position r_n , θ_n with the help of $r(t_{n+1}) = r(t_n) + dr$ and $\theta(t_{n+1}) = \theta(t_n) + d\theta$ and the above formulas. We have a small problem with the sign of dr , but we can ignore that for the moment, assuming that the sign does not change abruptly.

However, the above numerical implementation suggests us an analytical solution as well. If we look carefully at the above formula's, we see that time does not enter specifically. We can divide then the two parts, to get the derivative of θ with respect to r , and thus to reconstruct directly the trajectory!

$$\frac{d\theta(t)}{dr(t)} = \frac{d\theta}{dr} = \frac{L/(mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{mk}{r}}}} \quad (1.47)$$

We have left the module of $|dr|$ aside (supposing that we calculate the trajectory only in region $dr > 0$) and intentionally suppressed the time t , to stress that the above relation can be seen as a relation between θ and r alone! If we integrate it, we get $\theta = \theta(r)$, that is the trajectory, *without* having however information how fast the light body moves on it. We have then:

$$\theta(r) = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{mr}\sqrt{2rE - rL^2 + 2mk}} \quad (1.48)$$

The above integral can be easily computed as giving

$$\theta(r) = \arccos\left(\frac{L/r - mk/L}{\sqrt{2mE + m^2k^2/L^2}}\right) + \theta_0 \quad (1.49)$$

We choose the initial point $\theta_0 = 0$, and define two other constants p and e as

$$p = \frac{L^2}{mk} \quad (1.50)$$

$$e = \sqrt{1 + 2Ep/k} \quad (1.51)$$

These are just constants, because L and E are constants, and can be computed from the initial conditions as well. We rewrite then the trajectory equation 1.49 as:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1.52)$$

This trajectory equation depends in fact on only two constants p and e , that can be traced back to the total energy E and the angular momentum L using 1.50. The constant p is always positive and gives more or less the *averaged distance* between the small body m and the large body M . The constant e , called *eccentricity*, gives the variation within this distance. If $e = 0$, there are no variation, and the trajectory is a circle.

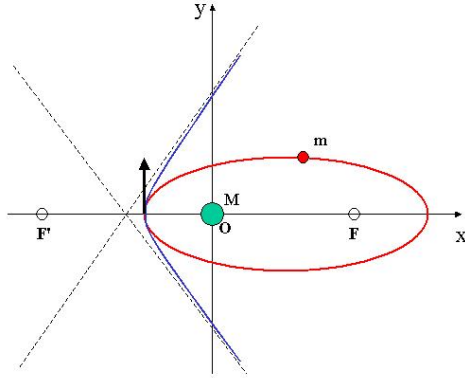


Figure 1.23: The two possible orbital motions: the ellipse and the hyperbola. The large body is located at one of the two foci.

We see from 1.50 that the eccentricity e depends on the sign of the total energy E . When $E < 0$ we have $0 < e < 1$ and when $E > 0$ we have $e > 1$. This leads two different trajectories, plotted in Fig. 1.23. The first one is an *ellipse*, and the second one is called a *hyperbola*. The first case refers to the body m circling around the large body M , and the second one to the situation where the body m passes *only once* near the body M , and then escapes never returning back. In both cases, the large body M is located at one of the two foci of the curves. The ellipse is, of course, the big success of Newton.

We see now that Newton was able to show that the Moon, when orbiting around the Earth, it will not fall on a spiral towards the Earth at a later time (happy we are!), but rather orbit on an elliptical trajectory. But the eccentricity of the Moon trajectory could not be measured in Newton's time. However, the above solution holds for any lighter object attracted by a larger one, like the planet Mars attracted by the Sun. As we know from Kepler that the trajectory of Mars is an *ellipse*, we can only express in few words the joy Newton must have felt when he calculated the ellipse trajectory for the first time.

But Newton's laws give not only the ellipse as the trajectory of the planets, but also proves Kepler second and third law. We do not show this here, and point the reader to the exercise Ex.1. We point however to other two success of Newton law of gravitation, namely the orbits of the comets, and the prediction of the planet Neptune.

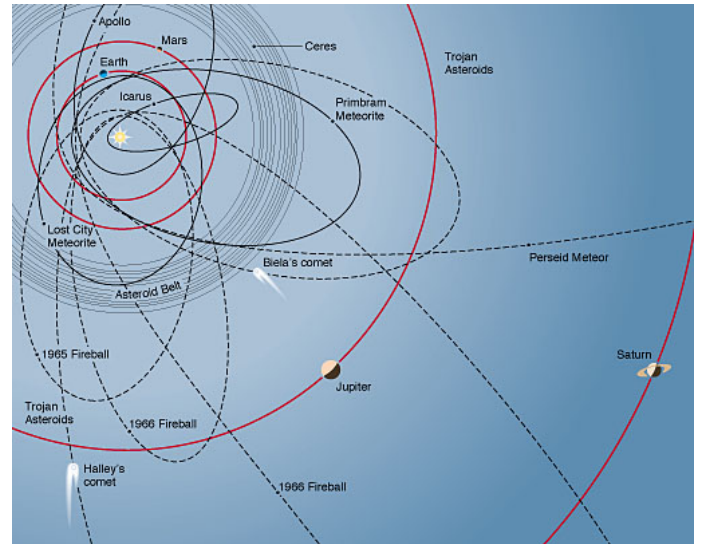


Figure 1.24: A very vivid representation of the many possible orbits the comets may have

In Fig. 1.24 we present the trajectory of comet Halley, together with the trajectories of many other comets. The comet Halley is named after Edmund G. Halley (1656-1743), who was the first to suggest that comets were natural phenomena of the solar system, in orbit around the Sun. Their orbits may either be ellipses, or hyperbolas (in which case they pass the Solar system only once). Halley was able to calculate the orbit of its comet short time after Newton's developed his theory, and show that this is a very elongated ellipse ($e = 0.967$). He predicted the comet would return again in 1758, and the comet did arrive in March 1759, 17 years after he died.

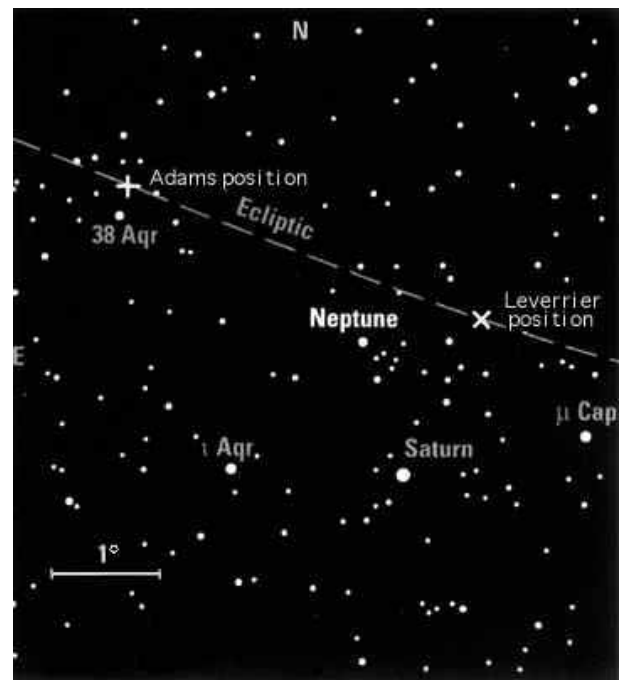


Figure 1.25: The first predictions of the position of Neptune by Adams and Leverrier

Another late success of Newton theory may be considered the prediction of the planet Neptune. This planet was first observed by Galilei, with the help of his new telescope, but Galilei failed in recognizing that Neptune was a planet. In fact,

Galilei was unlucky, because precisely when he made the measurements, Neptune turned retrograde, remaining more or less stationary in the sky (as we saw for the planet Mars). Galileo thought that Neptune was a star.

Much more later, when Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) computed tables of planetary positions, a discrepancy between the measured and calculated value of the planet Uranus was observed. Two explanations came forward. One was that an unknown planet disturbed Uranus's movement. This was put forward at almost the same time by the Englishmen John Couch Adams (1819-1892) and the Frenchman Le Verrier (1811-1877). A second assumption, favored by George Biddell Airy (1801-1892), was that Newton's gravitational law broke down, and it should be replaced.

At the end, Adams and Verrier were right. They were able to predict the position and mass of the new planet at close locations were months later the planet was indeed observed (see Fig.1.25). Amazingly enough, they based their prediction solely on Newton's gravitational law applied between different planets and the Sun. However, the intuition of Airy was also right. After many more years, better measurements on the Mars' orbit showed that Newton's gravitational law breaks indeed down. That coincided with the birth of Einstein's theory of general relativity.

1.3.5 Cavendish's experiment

As soon as Newton showed that he can derive the elliptical orbit of Mars, his theory was accepted. However, one would like to test in a laboratory that all objects attract each other. As it can be easily imaginable, this is a difficult task, because the gravitational force between two small objects is very small. And there is one more thing. The fits of the planets' orbits do not give the absolute value of the gravitational constant G from 1.25. In fact, looking at 1.25, we see that we are bound to know from astronomical calculations only a *product* of the constant G with the square of a kind of mass etalon, which may be taken as the mass of the Earth. In other words we know only GM_E^2 , and we have to find either G or the mass of the Earth M_E .

We may try first to have an idea ourselves of the small attraction forces we deal on Earth, by estimating the gravitational attraction between two people at a distance of $1m$. Thus, let's consider that the density ρ of Earth is the same as of the water (we may be a factor of 10 off, but probably not more than that). Knowing the Earth radius $R \approx 6000 \text{ Km}$ we estimate the mass of Earth as the product of the density and volume: $M = \rho 4\pi R^3/3 \approx 10^{24} \text{ Kg}$. We can now estimate G by writing down the weight of an object at the surface of the Earth:

$$G \frac{Mm}{R^2} = mg \quad (1.53)$$

By replacing M just calculated, the radius R , and $g \approx 10m/s^2$, we get: $G \approx 4 \cdot 10^{-10} m^3/(s^2 Kg)$. We can then estimate the attraction force between two people of about 70 Kg , placed at a distance of 1 m , using 1.25, as being $F \approx 10^{-6} \text{ Kg}m/s^2$. This is equivalent to a mass of $F/g = 0.1 \text{ milligram}$! We can see now why we can not observe this force in our daily life. But this force is also not that small, amounting to the weight of a light ant. Because ants can be moved away by small draughts in the air, we have an idea of the sensitivity of the experimental device that must be constructed.

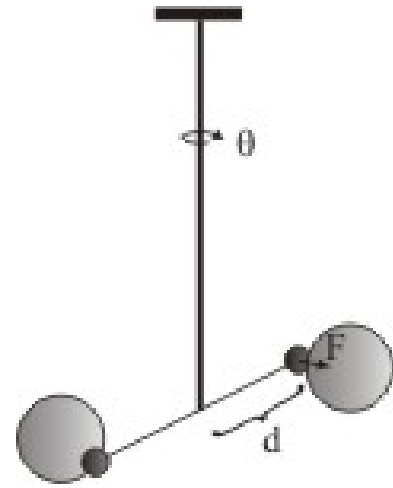


Figure 1.26: A small sketch illustrating the principle of the torsion balance of Cavendish

In 1797, Henry Cavendish (1731-1810) set himself the task to prove in a laboratory that two small objects indeed attract each other, and to measure the mass density of the Earth (which in turn leads to G). He started with the instrumental set-up presented in Fig.1.27, developed before him by his friend Rev. John Mitchell, and upon an idea of a balance used successfully to measure electrostatic and magnetic forces by Coulomb (1736-1810).

The Cavendish torsional balance (see Fig.1.26 and Fig.1.27) consists of two large and heavy *lead balls* (about 20 cm in diameter) that attract two smaller lead balls (about 5 cm in diameter). The two small balls are attached to a *torsion fiber* that is strong enough to support the two bodies, and flexible enough to react to the small expected forces. The attraction force makes the torsion fiber rotates to a certain equilibrium position which can be read on a scale. In other words, the *torsion fiber* rotates visibly if an ant is pushing it and, in addition, it does that in a reproducible way!

In the beginning Cavendish had to calibrate the torsion fiber, whose rotation angle is proportional with *the torque* exert on it:

$$\tau = 2Fd = k\theta \quad (1.54)$$

Here F is the attraction force between the two balls, and d is the distance from the ball to the center (see Fig.1.26). A factor of 2 appears because there are two equal forces F acting in the same direction. The constant k is a property of the torsion fiber, and it was not calibrated with a known force, but rather from the oscillations the torsion fiber makes when it is placed outside its equilibrium and let vibrate. In this case, the period of the oscillations is given by:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m(d^2 + 2r^2/5)}{k}} \quad (1.55)$$

where r is the radius of the small ball. It must be said that Cavendish didn't know the above formula, and he had to derive *indirectly* k by comparing the period T for the torsional balance with the period of an pendulum of length d .

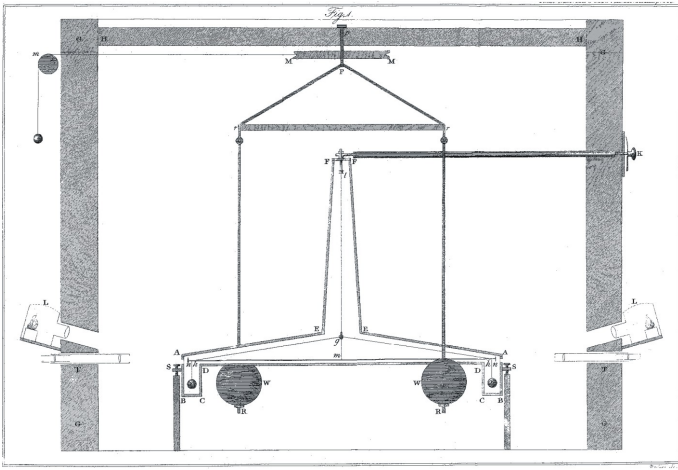


Figure 1.27: The torsion balance of Cavendish

In the end, Cavendish isolated the whole balance into a closed room, to prevent draughts (see Fig.1.27), as we have seen that these exert forces of the order of the ones expected to be measured, and being about the weight of a small ant. He read the scale of the torsional balance through a small window.

Cavendish measured for his torsion balance a period of $T = 7$ min for the selected lead balls. Knowing now k (see 1.55), he then could measure the attraction force with 1.54, by reading the angle θ . For reading, he used a Vernier scale, which allowed him to read the scale to 1/100 inch (about 0.3 mm). He then did few sets of measurements, all indicating a constant deviation of about 15 divisions (about 1.5 mm, visible thus!) due to the gravitational attraction. Now he could calculate the attraction force F . However, from this value Cavendish did not derive the value of G , but rather that of the density of the

Earth. He reported a value for the Earth density 5.48 larger than that of the water, even though he made in fact a small mistake when averaging the data for more measurements. His corrected average is 5.45, only 1.3 lower than the right value.

With a good knowledge of these other constants (g , the Earth's radius R), the gravitational constant G may be obtained. The present accepted value is:

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3 s}{Kg} \quad (1.56)$$

In the end we mention only that, miraculously, Cavendish measurements did not indicate a variation in the gravitational force with the size of the objects (for objects of the same mass). This was a crucial worry for Newton, who thought that the size affects the simple formula 1.25 given by him. This type of anomaly was however not observed even in astronomy, as applied for example to the Moon, for whom the Earth does not certainly look like a point. We will solve later the mystery of these observations, once we discuss Gauss electrical fields. The main result is that a spherical object behaves like a point object as far as the gravitational force is considered. If the shape is other than spherical, then it may play an important role.

With the determination of the gravitational constant G we have completed the Newtonian system. The system provides a beautiful way of predicting the movement of celestial objects up there in the sky, on basis on *only* two equations: the law of gravitation 1.25 and the second law of Newton 1.14. Here on Earth we still manage to predict some phenomena if we use the spring etalon to quantify some of the forces, and the principle of action and reaction. A lot remains unknown, a lot to be found. However, before going further, we study in the next section an alternative mathematical description of the Newtonian mechanics, namely the analytical mechanics.

1.4 Analytical mechanics

We did not discuss extensively the Newtonian system in the previous sections. For example, when calculating the ellipse orbits, we mentioned notions like *angular momentum*, or *energy*, without further entering into details. And what we did was not completely wrong. Ultimately, notions like these help us to understand better and describe the physical system. From a mathematical perspective however, they are not crucial. Because the Newtonian system is complete by itself, one could calculate its solution (like the orbits) without these notions, or inventing many other additional ones. One can do it even numerically, in which case one would have little insight into the physics involved, but still would get the right solution.

The funny aspect of it is that the final physical model (of every part of the world we want to describe) is meant to be *purely* mathematical at the end. We may, from time to time, get insight into an *unknown* physical system using notions like energy, but at the end of the day we are expecting to come up with a *self consistent mathematical model* describing the phenomena. In other words, once we construct the whole physical model of that particular piece of world, we submit it to the mathematicians, and they do whatever they want with it! They may add other notions, remove the one used by us (like energy), and even invent alternative mathematical models that give the same results!

The above observation is useful for us (especially if we are physicists) as well. Not only we may find other formulations later useful, but we better understand from the beginning that what we construct is a mathematical model of the piece of the world we are looking at. For example, we may better take the force vector (introduced by Newton) as a mathematical tool, rather than a real physical object. In the real world there are probably no material arrows pointing at every location in space according to Newton's law. Later, we may find equivalent mathematical models of the Newtonian system that do not contain the force.

We may wander of course further if what we consider real existence is not only a mirror of what we experience. The attributes of material objects (like color, size) are then in fact numbers and notions in a certain mathematical model we have in mind. Color of an object may be related to how we perceive light reflected by that object, and the size of an elementary particle may be later perceived as how efficiently that particle scatters other tiny particles. At the end of the day, we may not have precise knowledge of what the world is, but rather of how we perceive it.

We want to present in the following sections such a mathematical model equivalent to the Newtonian system, called the Lagrangian formalism. Because of the complexity involved,

and because it solves a problem already solved before by the Newtonian system, it may look boring. However, this alternative mathematical model will provide insight into the physical processes, and we are surely going to use it extensively in our following chapters. In addition to the Lagrangian formalism, there is also an Hamiltonian formalism, which we however do not address here.

1.4.1 Energy considerations

We restrict in this and the next section, for simplicity, to a *point particle* of mass m , moving under the gravitational attraction of others objects which are far away (see for example Fig.1.28). At any point $\mathbf{r}$ in the space, the force acting on the particle is denoted by $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, which is a vectorial sum all the gravitational forces generated by the objects far away. We suppose that the far away bodies do not move, and thus the force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ is independent of time.

Impulse, momentum, work and kinetic energy

Let's consider that the particle m moves under the influence of force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ from $\mathbf{r}_1$ at time t_1 to $\mathbf{r}_2$ at time t_2 . By using the second law of Newton 1.14, we can calculate then a integral that it is known as the *impulse* generated on the particle:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m d\mathbf{v} = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1) \quad (1.57)$$

The first part of the above relation, the impulse, sums up in a way the external changes brought to the body during the movement. The second part is a change in the state of the body from the initial time t_1 to the final time t_2 . In fact, the product of the mass m and velocity $\mathbf{v}$ is commonly called the *momentum* of the particle:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.58)$$

We see thus in 1.57 that *the impulse acting on the body equals its change in momentum*.

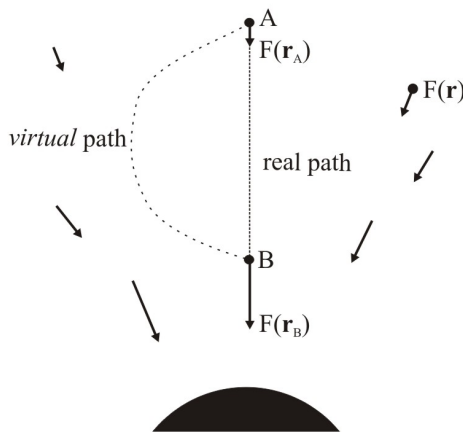


Figure 1.28: A *free fall* (no initial velocity) of a small body from A to B. The free fall real path is a line in this case

We can also calculate what it is called *the work* done on the body during its movement as:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.59)$$

This integral may be performed on the *real trajectory* of the particle (the one which the particle takes as a result of the attraction of the far away bodies), but it can also be calculated on other imaginary pathes (see Fig.1.28), that are not real trajectories of the particle. If we calculate the work on the *real trajectory*, we can use again the second law of Newton 1.14 to get:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \quad (1.60)$$

If we note that:

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.61)$$

then we can write the previous formula as:

$$W = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (1.62)$$

If we define the kinetic energy of the particle at a certain point as:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (1.63)$$

we see that the work done on the *real trajectory* of the particle equals the difference in kinetic energy of the initial and final points:

$$W = T_2 - T_1 \quad (1.64)$$

Potential energy

We see that the *work* itself 1.59 is an interesting tool, because it depends only on the forces acting in the region of interest. Given then these forces, and choosing an arbitrary path, can we calculate easier the work done? The answer is positive in the cases of the so-called *conservative forces*, out of which the gravitational force is an example.

In the case of *conservative forces*, the work done depends only on the initial and final point of the chosen path, but *not* on the intermediate points (see Fig.??). For these type of forces, one can write the work done as:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(r_1) - U(r_2) \quad (1.65)$$

The term $U(\mathbf{r})$ is called *potential energy*. We see that we can then rephrase the definition of the conservative forces: they are the ones for which the work done on any close loop is zero. By using 1.64, the above definition leads to a relation that holds on the real path:

$$U(r_1) + T_1 = U(r_2) + T_2 \quad (1.66)$$

Observe that the terms of the above equations are values in any point of the real trajectory. Then, this result tells us that *the sum of the potential and kinetic energy is constant on a real trajectory*. We call this sum the total energy of the particle:

$$E = U(r) + T = \text{constant} \quad (1.67)$$

In the relation 1.65 we have seen how the work can be easily computed from the potential energy. Is it possible to compute the force as well? To check that, let's rewrite the difference in the potential energy between two points, using some mathematical tools (which the reader can read about in the included mathematical annex):

$$U(r_1) - U(r_2) = - \int_{U_1}^{U_2} dU = - \int_{r_1}^{r_2} \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.68)$$

where the gradient of the *potential energy* field $U(\mathbf{r})$ is defined in a cartesian frame of reference as:

$$\nabla U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.69)$$

By comparison with formula 1.65, we see that the force field $F(\mathbf{r})$ can be deduced from the *potential energy* field $U(\mathbf{r})$ as:

$$F(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.70)$$

All good, but is the gravitational force a conservative force? cause otherwise we did the work in vane... Fortunately, it is. In fact, it turns out that all the *fundamental forces* present in nature (gravitational, electromagnetic, weak and strong) are conservative!

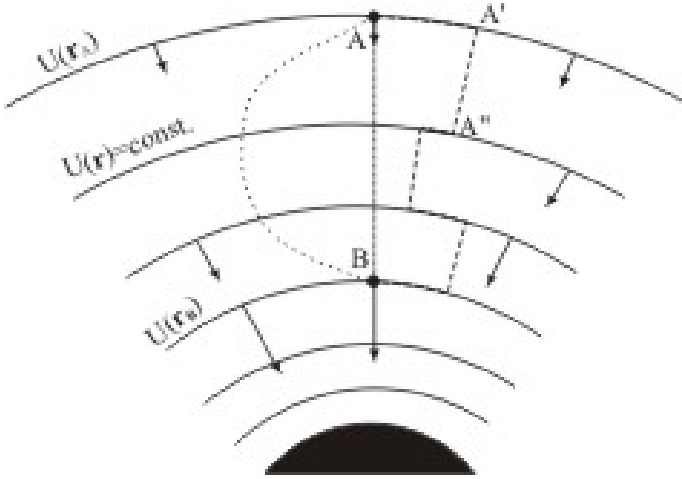


Figure 1.29: A plot of the potential energy field associated with Fig.1.28. The work done on the lines of constant potential (such as AA'') is zero. That is why the work done on the path AA'..B is the same as the one done on the original path AB

We show here that, exploiting the form 1.70. We know the force field $F(\mathbf{r})$ given by the gravitational forces, namely 1.25. If we find a potential energy field $U(\mathbf{r})$ that satisfy the relation 1.70, that that would mean automatically that our gravitational force is conservative! We are not going to deduce here the potential energy field, but we are rather going to give you directly the result. Thus, in the case of a single planet M situated at the center of system of coordinates, and that spreads its attraction across the Universe, the potential energy field $U(\mathbf{r})$ is:

$$U(\mathbf{r}) = -m \frac{GM}{r} \quad (1.71)$$

where m is the mass of the small body we started with. We check that 1.70 is satisfied, if we use the definition 1.69, to obtain the every useful relation:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.72)$$

That leads to

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) = -m \frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.73)$$

The above formula is identical with Newton's law 1.25, and that automatically proves our assumption in case of a single planet.

In case of more planets, creating a very complicating potential energy field, we see that the relation 1.70 still holds, because of the additivity of the ∇ operator: each planet gives its own potential energy field 1.71. However, in this case one has to take into account the position of the different planets. The generalization is in case straight forward, with the potential energy field of a planet situated at $\mathbf{r}'$ given by $U(\mathbf{r}) = -mGM/(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

We see that the mass m of our small body enters as a constant that multiply some values. To simplify the formula's, one usually defines what is called an *gravitational field* $V(\mathbf{r})$ of the large bodies, that is independent of the mass of the small body m . Then one calculates the *potential energy* field with $U(\mathbf{r}) = mV(\mathbf{r})$. Collecting the formula's above, we see that the *gravitational field* $V(\mathbf{r})$ of a large body of mass M situated at the center of coordinates is

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} \quad (1.74)$$

$$U(\mathbf{r}) = mV(\mathbf{r})$$

We can look back at formula 1.41 and recognise different elements named there. Thus, the value E , which was proven constant during movement, is in fact the total energy of the light body. Using 1.67, we can recognize in 1.41 the kinetic energy of the form 1.63 and the potential energy of the form 1.71.

We end up this section with a few comments. Even though we did not study them in detail, we introduced the notion of kinetic, potential and total energy in a simple case. The total energy is a sum of the first two, and must be constant during the motion. Later we will see how these concepts developed in case of more complex systems.

Anticipating however, the notion of total energy of a certain object turns out to be important in physics. From the mathematical point of view, it is rather boring. Here, if we suppose that we know all the parameters of our theory, the total energy is just one of the variables that prove constant during some kind of changes (the change may be also something else then movement). However, for the physicist, the total energy is a very useful notion, because it provides insight to some physical phenomena without knowing the whole theory. For example, when studying interactions between light and matter, we may not know the large theory that incorporates both. We can however use the concept of energy for both (light and matter) to derive predictions about the interaction, assuming that the total energy will conserve. The right choices of the potential and kinetic energies in this cases become crucial.

1.4.2 The principle of least action

We have seen in the previous section how the sum of the kinetic energy T and the potential energy U of a point particle leads to its total energy E , that must be constant during a trajectory. However, not only the sum of the two energies plays an important role in physics, but also their difference! For that, let's consider the difference between the kinetic energy and the potential energy of a particle during its movement, and let call this variable the Lagrangian L :

$$L(t) = T(t) - U(\mathbf{r}) \quad (1.75)$$

This is a number *associated with the particle* at any moment t : by T we mean its kinetic energy 1.63 at that moment, and by U we mean the potential energy $U(\mathbf{r})$ at the location $\mathbf{r}(t)$ where the particle finds at that time. The time integral of the above lagrangian L along a trajectory path is called in popular terms the action S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}) \right] dt \quad (1.76)$$

Again, when doing the integration, we mean the velocity $\mathbf{v}$ of the particle at the moment t , that is $\mathbf{v}(t)$, and the position $\mathbf{r}$ also at the moment t , that is $\mathbf{r}(t)$. The nice thing about the above integral is that we can calculate it not only on real path trajectories, *but also on virtual trajectories*, in other words on paths on which the particle will actually never move according to Newtonian laws! We can see that by looking directly at the integral: all we need is the velocity $\mathbf{v}(t)$ on the virtual path at a certain moment to get the kinetic energy, and the position $\mathbf{r}(t)$ to get the potential energy. In mathematical terms, the above formula defines a functional $S[\mathbf{r}(t)]$. The functional S provides in this case for each function $\mathbf{r}(t)$ (which is the virtual or the real path) a number S .



Figure 1.30: A particle of mass m that can move only in one dimension, on a line. At each location the potential energy is $U(x)$

As an example, let's choose the case of a particle confined to a one dimensional movement, along the x line (see Fig. 1.30). Its position is given then by $x(t)$. Let's now suppose that the force acting on it at each position is conservative. In this one dimensional case we write the relation 1.70 as

$$F(x) = -U'(x) \quad (1.77)$$

$V(x)$ is supposed known. The particle will move on the line according to the Newtonian law $F(x) = m\ddot{x}$. Let's suppose that one such real path is the one plotted in Fig.1.31, and denoted by $x(t)$. On this one we would not have $-U'(x) = m\ddot{x}$ in every point. One may imagine also other "non-realistic" movements, like the one plotted additionally in Fig.1.31, and denoted by $x'(t)$, which we take close to the real path. This may be called a *virtual* path, because it will *not* result from Newton's equations of motion. However, all the paths chosen have a thing in common: *they start from the same position at the same initial time, and end at the same position at the same final time*. Now, we can show that we can restate the equation of motion of Newton under the following form:

Theorem 1.4.1 *Of all the virtual pathes that may be realized having the same start and arrival (meaning they start at the same point, at the same time, and end at the same point at the*

same time), the one which the particle takes has the action S either a maximum or a minimum (in other words, an extreme).

This is called "*the principle of least action*". Even though the new formulation may seem cumbersome, it has extremely reach consequences in physics. But let's first demonstrate it. For that, let's start supposing that the path $x(t)$ is *unknown*, but we take it in such a way as to have the action S *already* an extreme (minimal for example). The action on this path is written as:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m(\frac{dx}{dt})^2}{2} - U(x) \right] dt \quad (1.78)$$

Again, reading the above integral is crucial: by $U(x)$ we mean the potential energy in the point $x = x(t)$ at the moment t . Now, let's choose a different path $x'(t)$ (see Fig.1.31), having the same start and arrival, but being close to the original one $x(t)$. This is supposed to have a larger action S , remember, because S was minimum for the path $x = x(t)$. We can write such a close path as $x'(t) = x(t) + \eta(t)$, where $\eta(x)$ is supposed to be infinitesimal. The action on the path $x'(t)$ can be written according to 1.76 as:

$$S[x'(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m(\frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt})^2}{2} - U(x + \eta) \right] dt \quad (1.79)$$

In all the above formula's time t is *the only variable*. The other variables, like $U(x + \eta)$, are supposed to be obtained by first calculating $x(t)$ and $\eta(t)$ at that particular time t , and then using this values to determine the potential at the position $x(t) + \eta(t)$.

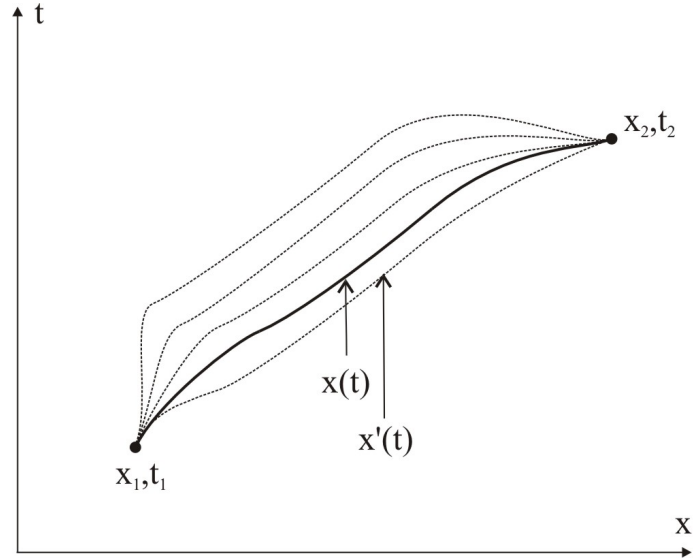


Figure 1.31: The principle of least action. The path $x(t)$ which the particle takes, and a very one close to it, $x'(t)$, are shown

The terms of the previous integral can be expanding if we take into account that $\eta(t)$ is infinitesimal. In the first order we *ignore* the terms quadratic in η , because they are of a larger order, and we write the approximation:

$$U(x + \eta) = U(x) + \eta U'(x) \quad (1.80)$$

where $U'(x)$ is the derivative of the original function $U(x)$ with respect to the variable x . We write then the action as:

$$S[x'(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m(\frac{dx}{dt})^2}{2} - U(x) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta U'(x) \right] dt \quad (1.81)$$

The first term is the action $S[x(t)]$ from 1.78. The variation in action $\delta S = S[x'(t)] - S[x(t)]$ between the two pathes is given then *by the second term*. A first inspection of this is useful in reading correctly the terms involved. Here, by η we mean $\eta(t)$ at the moment t . By $U'(x)$ we mean the derivative of the function $U(x)$ with respect to x , derivative that must be calculated in the point $x = x(t)$ at the moment t , and so on. Remember anytime: you know how to "read" an equation if you can implemented numerically. Can you in this case?

Let's now use partial differentiation to rewrite this second term as:

$$\delta S = m \frac{dx}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[m \frac{dx}{dt} \right] \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) U'(x) dt \quad (1.82)$$

Now remember, we chose only pathes $x'(t)$ close to $x(t)$ having all the same start and arrival (see Fig. 1.31). In other words, at the start time t_1 and also at arrival time t_2 , we have $x(t_1) = x'(t_1)$ and $x(t_2) = x'(t_2)$ or $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. That makes the first term in the above integral zero. The part which is left may be written as:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) - U'(x) \right] \eta(t) dt \quad (1.83)$$

From all the possible pathes $x'(t) = x(t) + \eta(t)$ we have chosen the one for which $S[x(t)]$ is minimal. Then, the above variation δS must be zero *irrespective of* $\eta(t)$ chosen! However, we can see that this is possible only if the part in parentheses is zero *for any moment* t , because $\eta(t)$ may be arbitrary. We have then the following equation at any moment t :

$$\frac{d}{dt} \left[m \frac{dx}{dt} \right] = -U'(x) \quad (1.84)$$

By remembering the definition 1.77 of the potential in a field of conservative forces $F(x) = -U'(x)$, we see that in fact the above result is the second law of Newton 1.14 in every point of its trajectory! In other words, the path $x(t)$ which has S minimal is the real path, where the particle behaves according to Newton's laws! Our result is thus the proof of theorem 1.4.1 we state in the beginning of this section, for the simple case of a particle in a potential energy field $U(x)$.

We can see here the strong "philosophical" implications of our result. We just found, in this simple case, another mathematical formulation that describes the moving of the particle, with the same results. As mentioned already, this makes us cautions in attributing a real existence to the force of Newton (in the sense of having real arrows all over in space). Since both the Newtonian and analytical mechanics approach give the same movement for the particle, they both can be used as a mathematical tool to derive the real behavior of the particle. What is real then? Well, better consider real only the results of the experiment, but not all the intermediate mathematical tools we use to get those results (like the force for example). However, even though we may use one mathematical model over another, its true that any of them may carry additional physical insights (about a deeper underlying theory for example). That is why is always good to know all the mathematical models.

This may sound surprising, because the analytical form looks a little bit counterintuitive. If a particle moves on the

path of smallest action among *all* the paths having the same start and *the same arrival*, we may wonder how does it know that this is the right path, and how does it know from the beginning? First, as we will see later in the chapter of quantum mechanics, in the quantum world the particle really travels on *all* the other pathes *at the same time* during the movement, and makes itself visible *only* on the path with the minimal action. Secondly, the analytical form is indeed not local, like the Newtonian form, defying our causal expectation. With that we mean that we have to calculate the path at the final time as well, and *then* decide which path is correct for the particle. And we have to do that in *the beginning* of the movement. In Newton's formulation the particle decides at each moment, "on place", which direction to follow. However, the integral form for the action hides in fact a differential form. The fact that the action is minimum on the any real path means in fact that it is minimum on each infinitesimal part of it. And that will be a causal formulation, which in fact is identical will Newton's second law, as we have seen.

We mention here that the theorem 1.4.1 applies not only to the example chosen here, but to all other possible physical cases. For each physical system one can define a lagrangian L such that the action is minimal for the real behavior. In *most of the cases*, this lagrangian is written as the difference between a kinetic energy and the potential energy. The are however cases (like relativity for example) when the two energies can not be precisely defined, but still a proper lagrange can be found. There seems to be no general receipt for writing the lagrangian, and for the complex cases one needs always a certain skill is finding the right lagrangian.

It is also worth to say here that Richard Feynman, the main promotor of this approach in quantum mechanics, thought in the first instance that it may bring to light quantum physics otherwise hidden in conventional approaches. In other words, the analytical mechanics applied to quantum theory would predict real behaviors that can not be predicted by the conventional quantum mechanics. We have to mention however that, despite its huge mathematical success in modeling physical systems, the approach involving the action in quantum mechanics proved *equivalent* to the existing models.

1.4.3 Analytical mechanics: the Lagrangian formulation

Generalized coordinates

If we try to use the Newtonian mechanics in practical situation, we may find out that the real positions of the constituents are not always the best choice. Consider the pendulum, presented in Fig.1.32. Here we see that the Newtonian's mechanics needs two cartesian coordinates (x and y) in order to describe the position of the ball. However, there is always a relation between these two, because the ball keeps swinging on a circle. In fact, the position of the ball may be described in fact only by the angle θ . We call θ a generalized coordinate, meaning that we know the precise location of the ball by knowing θ .

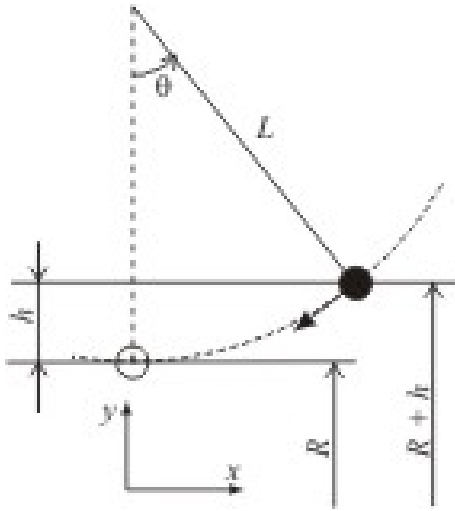


Figure 1.32: The pendulum. R represents here the distance to the center of the Earth

It turns out that each mechanical system has its own general coordinates, denoted mostly by $q_1, \dots, q_n$. Here n denotes the number of degrees of freedom ($n = 1$ in case of the pendulum). The rate of time variations of these quantities ($\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$) are called *general velocities*.

To find out the behavior of the system in terms of the general coordinates, one starts usually with a good choice for the lagrangian. For most of the non-relativistic mechanical systems this is not a big problem, as this can be written as the difference between the kinetic and potential energy (see 1.75), calculated in turn from the Newtonian mechanics. If the system has more components, one could also in general sum up the potential and kinetic energy of individual components to find out the potential and kinetic energy of the whole system. Again, there is no gold criteria that gives the correct lagrangian in every case. In fact, the only criteria is that the behavior of the system with the chosen lagrangian should be the same as the one using classical Newtonian mechanics formula's.

One general constraint of the form of the lagrangian is however that it should be an *analytical formula* (meaning in very simplistic terms that you can write it on a piece paper with a pen), having variables only the general coordinates ($q_1, \dots, q_n$), their generalized velocities ($\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$) and the time t : $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$. The reason for this has to do with the form of the equations of motions the lagrangian will lead to. This should be the same as the Newtonian's ones, that contain at most second derivatives with respect to time. For example, in the case of the pendulum, the kinetic energy will be given by the Newtonian mechanics:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} \quad (1.85)$$

For the potential energy, we would have to start with 1.71, where the Earth is considered at the center of system of coordinates. However, things simplify a lot if we take into account that the distance to the center of Earth is very large (meaning we are looking only at small objects on the surface of the Earth, see Fig. 1.32). If we calculate the difference in the potential energy between an arbitrary position and the rest position ($\theta = 0$), by using 1.71 we find:

$$\begin{aligned} U(\theta) - U(0) &= -m \frac{GM}{R+h} + m \frac{GM}{R} = \\ &= mGM \frac{h}{R(R+h)} \approx m \frac{GM}{R^2} h = mgh \end{aligned}$$

where we have used the value of the free fall acceleration g . Because the potential in the rest position $U(0)$ is just a constant, and because in the equations of motion matters only the differences in potential energy from different positions (as we will see later as well), we may remove this constant, to get:

$$U(\theta) = mgh = mgl(1 - \cos \theta) \quad (1.86)$$

Then, the lagrangian in the case of pendulum is:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos \theta) \quad (1.87)$$

Another example is the Kepler problem we have solved in one of the previous sections. In this case the most natural choice of the generalized coordinates are the distance to the central planet r and the angle θ (see Fig. 1.22). The kinetic energy of the moving body, and its potential energy where calculated in fact before, and they can be recognized in 1.41, which gives the total energy $E = T + V$, that was further processed into 1.44. The *lagrangian* L is the difference $L = T - V$, meaning in practice just a sign change in 1.41 and 1.44:

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mk}{r} \quad (1.88)$$

We see that in these cases that time did not enter specifically into the lagrangian, even though we may construct cases in which it does.

The Euler-Lagrange equations

The behavior of the system in analytical mechanics is obtained with the help of the *principle of least action* 1.4.1. According to this, the real generalized trajectory $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$, is the one on which the action S is an extreme:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (1.89)$$

Starting from this principle, we are going to deduce now the equations of motion of the system, much in the same way as we did it in section ???. To simplify things however, we consider a lagrangian $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ that does not explicitly depend on time.

To start with, we take another generalized path $\{q'_1(t), \dots, q'_n(t)\}$, infinitesimally closed to $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$. We may say the functions $q'_i(t)$ are very close to the functions $q_i(t)$. A condition of the principle of least action 1.4.1 is that the start and arrival of these two pathes are *identical*. In other words $q'_i(t_1) = q_i(t_1)$ and $q'_i(t_2) = q_i(t_2)$ with $i = 1, \dots, n$.

Because the path $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$ is an extreme (being the real one), the variation of the action S in the first approximation must be zero (as we also discussed in ??). Let's first denote the variation between the two paths by δ , which is supposed to be infinitesimal. We have for example $q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$, and $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Here $\delta q_i(t)$ may be read as *function* close to zero. However, you may read it also as a difference between two *numbers*, $q'_i(t)$ and $q_i(t)$, at the same time t ! The *difference*

of the two actions between the two pathes can be then written as:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) dt \quad (1.90)$$

Here δ is allowed to "enter" the integral because the time ends of the integrals are the same for both pathes. The above value must be zero, as discussed before. Further, we can write

$$\delta L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \quad (1.91)$$

The above equation must be correctly read out. If you have problems, take your time to read it carefully. Here $L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$ must be seen as an analytical function of the terms $q_i, \dot{q}_i$ (and by analytical we mean functions like $\sin \dot{q}_i, q_i^2$, etc.). Then, the derivatives can be performed with respect to the terms q_i and $\dot{q}_i$, like with any other variables (for example $\partial(\sin \dot{q}_i)/\partial \dot{q}_i = \cos \dot{q}_i$). In the case of the pendulum 1.87 we have

$$\delta L(\theta, \dot{\theta}) = (-mgl \sin \theta) \delta \theta + (ml^2 \dot{\theta}) \delta \dot{\theta} \quad (1.92)$$

Also this equation may be again seen as a function of time (meaning that all the terms involved, $\delta L = \delta L(t)$, $\delta \theta = \delta \theta(t)$, $\delta \dot{\theta} = \delta \dot{\theta}(t)$ are *functions* of time), or as a difference between two *numbers* of the two different generalized trajectories *at the same time*. It's up to you to make the choice, as soon as you are able to get the meaning of it (which means at the end that you are able to implement the equation numerically on a computer...). We give up in the following lines writing the time t explicitly, to make the form of the equations easier to read and compare. However, remember any time you read them, that the time t is present.

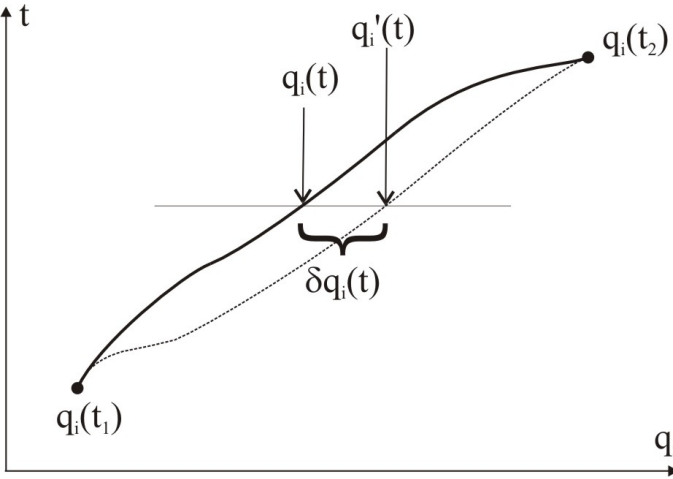


Figure 1.33: The principle of least action

For the second term of 1.91 we have

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} [\delta q_i] \quad (1.93)$$

Here we could interchange δ and d/dt in view of the discussion before: if the two $q_i = q_i(t)$ and $q'_i = q'_i(t)$ are seen as functions of the time t , then d/dt acts as a differentiation in time, and δ as a difference between the two pathes at *the same time*.

We use now again partial differentiation like in the case of a particle in an potential energy field $U(x)$ (section ??), to write further:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} [\delta q_i] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \delta q_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \quad (1.94)$$

We can now replace this into 1.93, then into 1.91. We then obtain for the δS (given by 1.90), the following form:

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt \quad (1.95)$$

The first term on the right hand side is zero, because the two paths must have the same start and the same arrival (as discussed before), leading to $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Now remember, we have chosen the original path $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$ the one on which the action is an extreme (the principle of least action 1.4.1). Accordingly, $\delta S = 0$ must be zero, for any infinitesimally closed path $\{q'_1(t), \dots, q'_n(t)\}$, in other words for any difference $\{\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)\}$. Consequently, the last term of 1.95 must be also zero for any $\delta q(i)$:

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = 0 \quad (1.96)$$

But the part in parentheses is a function *that can be calculated only from the original path* $q_i(t)$. The only place where the choice for the other path $q'_i(t)$ enters is outside the parentheses, through $\delta q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t)$. Because the integral is zero for any choice of $\delta q_i(t)$, and because $\delta q_i(t)$ may take *any* infinitesimal values, the only solution is that the term in parentheses is zero *at any time* t , and for *any coordinate* i ! We have then the following relation that the original path q_i must obey at any time t , for any coordinate i :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.97)$$

The above equations are called *the Euler-Lagrange equations*. They define n equations of motion, since we have one such equation for each coordinate i . From these we can calculate the original path $q_i(t)$ that satisfy the principle of least action.

Remember that we did not write explicitly the time in the equations above, to make it easier to be read. However, if you "read" the equation above carefully, you see that it leads to differential equations in time and coordinates that must be solved. To exemplify this, let's take the lagrangian of the pendulum 1.87. It has only one $n = 1$ coordinate $q_1 = \theta$, and for this (see also 1.92) the Euler-Lagrange equation will read:

$$(-mgl \sin \theta) - \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (1.98)$$

which leads to:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (1.99)$$

with the solution

$$\theta(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \phi \right) \quad (1.100)$$

where A and ϕ are constants representing the amplitude A and the initial phase ϕ . We see that the period of the oscillation will be:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.101)$$

In the case of the Kepler problem, whose lagrangian was written in 1.88 we have two generalized coordinates r and θ , and thus two Euler-Lagrange equations 1.97:

$$\begin{aligned} \left(r\dot{\theta}^2 - \frac{mk}{r^2}\right) - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= 0 \\ 0 - \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

We recognized in the second one the conservation of the angular momentum 1.36.

At the end of this chapter we propose some mechanics problems to be solved using this formalism of analytical mechanics. The reader is strongly encouraged to try some, not only to practice, but also to enjoy the beauty and simplicity of analytical mechanics.

Conservation laws

There is an interesting direct result of the Euler-Lagrange equations of motion 1.97, which we saw in the case of the Kepler problem. Namely, let us see what's happening if the lagrangian does not contain *explicitly* one of the coordinates q_k (in which case q_k is called a *cyclic coordinate*). Then we have $\partial L / \partial q_k = 0$ and consequently the second term of 1.97 must be zero *at any time* t for that cyclic coordinate k :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (1.102)$$

The term in the parentheses is called *the generalized momentum*. According to the relation above, it must be *constant in time* for a cyclic coordinate:

$$p_k(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = cst. \quad (1.103)$$

We write here $p_k(q_i, \dot{q}_i)$ to remind you that the generalized momentum p_k may be seen as an analytical function of the variables $\{q_1, \dots, q_n\}$ and $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$, that is obtain from the analytical function $L(q_i, \dot{q}_i)$ through the differentiae 1.104. The previous relation tells us that the value of this analytical function p_k is *constant along the real trajectory path*. Here again, we have to have in mind the analytical form of L , which gives us, by differentiations, a function $p_i(q_i, \dot{q}_i)$ which we called generalized momentum. This function is thus a constant of motion in case of cyclic coordinates.

To make things clear, we come back to the example of the Kepler problem. The lagrangian was written as 1.88. We see that the coordinate θ does not enter explicitly the lagrangian, and it is thus a *cyclical coordinate*. The generalized momentum associated with this coordinate is

$$p_\theta(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} = cst. \quad (1.104)$$

This must be constant during the motion, according to what we discussed earlier. But this is in fact *the angular momentum* we defined in 1.36, and which we knew is constant during the motion. We see thus how the analytical mechanics gives us naturally some constants of motion more difficult to get then in the case of the Newtonian approach.

Another constant of motion, in case that the Lagrangian does not depend explicitly on time, is the total energy:

$$E(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (1.105)$$

We let the proof be done in Exercise 1. For us it is important only to note that the total energy has the form we know $E = T + V$ only when the kinetic energy is a quadratic function of the generalized velocities $T = \sum_{i,j} a_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$. In the case of the Kepler problem, that satisfies this condition (see 1.88), we get thus for the energy

$$E = m\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mk}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mk}{r}$$

that is precisely the form 1.44 we found out. We stop here with the introduction into analytical mechanics, making only few observations.

First of all, *any* mechanical system may be described by a lagrangian. Its form may be difficult to find in some cases, but once found, it will describe *completely* the whole system. In fact, we will take this principle further in quantum mechanics, and even to the whole Universe! We will describe the behavior of the electromagnetic field with a single lagrangian, then the behavior of the quantum electromagnetic field with a better lagrangian, then we include in this lagrangian the behavior of the particles inside nucleus, and so on. In the end, we will write down *a single huge lagrangian* that almost describes the complete behavior of *the physical world* we know of! If you want, take a glimpse at it, you will find it at ???. Its called the lagrangian of the *standard model* and we have to admit that it still lacks one important ingredient, namely the general relativity (which we can include in another lagrangian, namely ???). In fact, at this moment, all our knowledge of the physical world is concentrated in these two lagrangians.

Secondly, the main task of a physicist is to find the right lagrangian of a certain system. Once the lagrangian was found, he can describe completely the system and, as we discussed, the problem may be submitted to a mathematician. With the help of the cyclical coordinates the mathematician may find generalized moments that conserve, but for him they are just useful numbers in describing the behavior of the system. The physicist however may recognize known quantities, like the total energy, angular momentum, total number of particles, and so on. For him these are useful notions in finding another lagrangian for a another system, or combining two interconnected systems.

We try in this book to take the side of the physicist, by constructing lagrangians for different system (or combining them), using known notions like energy, momentum, and so on. We will stop however every time we found the right lagrangian, and move further to another physical process, until we find the two lagrangians ??, ?? were mentioned to contain the whole knowledge of the physical world we have today.

1.5 Exercices

- EXERCISE 1.1
pune oscilatorul armonic ca ai nevoie la cuantica pune oscilatorul armonic ca ai nevoie la cuantica pune oscilatorul armonic ca ai nevoie la cuantica
- EXERCISE 1.2
demonstreaza la egg spaed kepler ca relatia lui Kepler e doar pentru M si nu pentru toata curba!
- EXERCISE 1.3
pune sa faca si kepler
- EXERCISE 1.4
pune sa faca si calcule numerice
- EXERCISE 1.5
arata ca curba lui kepler este o elipsa
- EXERCISE 1.6
forta centrifuga inainte de tides
- EXERCISE 1.7
we propose an exercise that makes use of the vectorial form of the force, in case of the circular movement.
- EXERCISE 1.8
Here we propose another exercise that makes the reader more familiar with this principle.
- EXERCISE 1.9
In Ex. we propose a numerical problem that can use this approach.
- EXERCISE 1.10
In Ex we propose such a numerical determination of the orbit.
- EXERCISE 1.11
But Newton's laws give not only the ellipse as the trajectory of the planets, but also proves Kepler second and third law. We do not show this here, and point the reader to the exercise Ex.
- EXERCISE 1.12
Arata ca energia iese din Lagrangian cu formula data, pronind de la ecuatiile de miscare.

Contents

2	Electromagnetism	35
2.1	Fluidul electric, cimpul electric si cimpul magnetic	35
2.1.1	Fluidul electric	35
2.1.2	Cimpul electric	37
2.1.3	Curentul electric	39
2.1.4	Cimpul magnetic	40
2.1.5	Creearea cimpului magnetic	42
2.1.6	Fora Lorentz	43
2.2	Structura clasica a materiei	45
2.2.1	Electronul	45
2.2.2	Atomul	48
2.2.3	Forme de materie	52
2.3	Cimpul electromagnetic	56
2.3.1	Faraday's law	56
2.3.2	Maxwell equations for the electromagnetic field	58
2.3.3	Undele electromagnetice	60
2.3.4	Energia cimpului electromagnetic	62
2.4	The momentum of the electromagnetic field	66
2.5	Solutiile ecuatiilor lui Maxwell	66
2.5.1	The vector and scalar potentials	66
2.5.2	Solutiile generale ale cimpului electromagnetic	68
2.6	Lagrangeanul cimpului electromagnetic	70
2.6.1	Lagrangeanul unui cimp	70
2.6.2	Cimpul electromagnetic in vid	73
2.6.3	The lagrangian equations in the presence of charges	74
2.7	Lumina	77
2.7.1	The speed of light	77
2.7.2	Light as an electromagnetic wave	78
2.7.3	The energy and momentum density of a light wave	79
2.7.4	Different frames of reference	79
2.8	Exercices	83

Chapter 2

Electromagnetism

2.1 Fluidul electric, cimpul electric si cimpul magnetic

Dupa cum am vazut in capitolul precedent, sistemul lui Newton descrie corect *interactia gravitationala* dintre obiecte, asa cum sunt planetele masive ale sistemului solar sau bilele din experimentul lui Cavendish. Pentru alte tipuri de interactii ce apar pe Pamint, teoria lui Newton inca se descurca de minune, daca utilizam *principiul actiunii si reactiunii* si folosim intotdeauna un *etalon* sa masuram forte necunoscute.

Asa insa cum am mentionat in capitolul precedent, nu ne asteptam *in prima instanta* ca natura tuturor fortelor sa fie tot gravitationala. Atractia gravitationala este prea mica, de marimea greutatii unei furnici mici, asa cum am vazut. Ea nu poate deci explica adeziunea scociului, sau puterea muschilor nostri, de exemplu.

Forta gravitationala este prea mica si pentru a explica atractia unui *magnet*, sau hirtutiutele ridicate de un pieptene atunci cind acesta este *frecat*. Aceste doua exemple sunt niste forte rar intilnite si mici, fara prea multe utilitati practice (exceptind utilizarea magnetului in navigatie), motiv pentru care au si fost ignorate secole de-a rindul.

Este insa remarcabil cum tocmai studiul acestor doua forte excentrice, facute de niste oameni poate excentrici la rindul lor, a dus la schimbarea profunda a modului de viata astazi. Caci adeseori in fizica, mica exceptie de la regula unui sistem "descopera" un alt sistem mai profund. Totul este sa *remarcam* si apoi sa *studiem* exceptia. Vom vedea pe parcusul acestei sectiuni cum cele doua interactii mentionate mai sus au pus bazele descoperirii unei alte interactii decit cele gravitacionale, si anume interactia *electromagnetica*.

2.1.1 Fluidul electric

The word "electricity" comes from the Greek word "elektron" for amber. Amber is fossilized tree sap that has hardened as hard as a stone. The old Greeks noticed a strange effect: when rubbing amber against a piece of fur, the amber would start attracting particles of dust and small feathers. Later on, these type of experiments (that appear more like a play for children today) were pursued by William Gilbert (1544 - 1603) in England. In 1827 Michael Faraday (1791-1867) was popularising them in a series of six Christmas lectures for children at the Royal Institution in 1826.

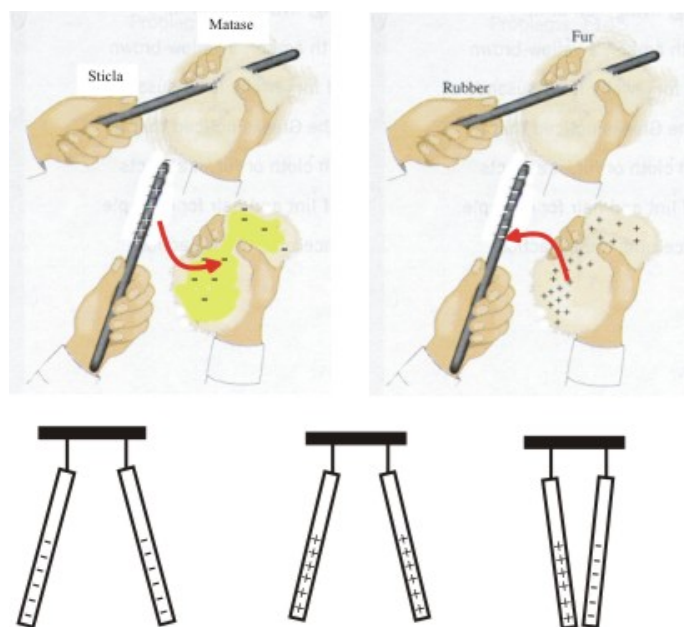


Figure 2.1: Upper left: A glass rod is rubbed against a piece of silk. The *negative electric fluid* goes from the rod to the silk. Upper right: A rubber rod is rubbed against a piece of fur. The negative fluid goes from the fur to the rod. Lower: After rubbing, the same type of rods repel, and opposite type attract each other

In Fig. 2.1 we present two out of this set of experiments. Here, we either rub a glass rod against a piece of silk, or a rubber rod against a piece of fur. After rubbing, they would start also attracting small feathers or small pieces of paper. Up to now, nothing new. However, after rubbing, if we approach the glass rod and the rubber rod, we will see that they *attract* slightly each other. Moreover, if we approach two rods of the *same type* that were rubbed according to the above procedure (two rubbed glass rods, or two rubbed rubber rods) we will see that they *repel* each other!

In the beginning, people did not know what was causing the attraction or repulsion. Gilbert assumed for example that the materials heat up when rubbed, and some kind of mysterious material is released that is responsible for the attraction. Many more years later, it was Faraday to give the right explanation, building up on the work done before. Thus, Faraday correctly supposed that all materials have two kinds of *electric fluids*, a

negative fluid and a *positive fluid*. The *positive fluid* is bound to the material, it can not move. In contrast, the *negative fluid* may go from one object to another, for example when rubbed.

In their normal state, all objects have *equal quantities* of these two types of electric fluids, meaning that they are *neutral*. This equilibrium is however disturbed when some action is performed, like rubbing. In Fig.2.1 we exemplify this. When the glass rod is rubbed against a piece of silk, some of the *negative fluid* goes from the rod to the silk. However, when a rubber rod is rubbed against a piece of fur, some of the *negative fluid* goes from the fur to the rod. The *positive fluid* does not move in either case.

To explain the fact that the rods repel or attract (depending on their type), like in Fig.2.1, Faraday had simply to assume that *the same type of fluids repel*, and *opposite type of fluids attract*. The attraction force between the positive and negative electric fluid explains naturally explain why most of the objects seem to be neutral: the two fluids attract each other and neutralize each other on different objects. That is why we do not see the negative fluid spreading around in large quantities like water.

However, the repelling force bares in itself a problem that still troubles today. Thus, since the two negative electric fluids repel each other, we may expect that *different* parts of the *same* negative fluid repel each other as well. In a sense, the negative fluid does not only lack the necessary cohesion, but it is like a bomb, it may explode any moment! We will see later that the problem is partially solved if we assume an atomistic point of view for the fluid, namely that the fluid is made up of very small discrete parts, called *electrons*. The electrons themselves will repel each other then, but they will be kept in the proximity of the unmoveable positive fluid (which is attracting them). In a sense, it is the positive fluid that keeps the electrons close to each other to some extent, creating the necessary cohesion of the negative fluid. The problem is not however definitely solved, since we can look at the electron itself as made of even smaller negative parts that again repel each other! This problem is still not satisfactory answered today.

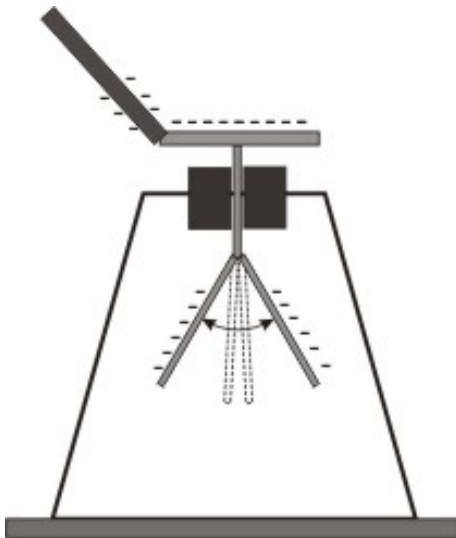


Figure 2.2: The electroscope: if a conductive rod with negative electric fluid is touching the upper metallic part, the negative fluid will spread all over, making the two thin metal leaves repel each other. The angle of deflection is a measure of the quantity of electric fluid present in the initial conductive rod

Desigur ca pentru cuantificarea "cantitatii" de fluid electric

avem nevoie de o noua unitate, care sa reflecte noile proprietati electrice ale acestuia. Aceasta unitate se noteaza cu C si se numeste Coulomb. In plus, ne vom referi de acum incolo la "cantitatea de fluid electric" prin denumirea de *sarcina electrica*. Ea se noteaza in mod obisnuit cu q sau Q . Marimea acesteia determina cantitatea de fluid electric, si poate avea valori pozitive sau negative, in functie de tipul fluidului electric. Avem deci

$$[q] = 1 \text{ C}$$

In sistemul international de unitati (SI), utilizat pe parcursul acestei carti, ea este de fapt o marime derivata din curentul electric. Motivul este ca, atunci cind s-a impus alegerea ei, fortele de atractie electrice erau mai dificil de masurat decit curentul electric. Astfel, 1 C ne poate aparea artificial ales azi. Forta de atractie intre doua bile incarcate fiecare cu numai un miliCoulomb $Q = 1 \text{ mC}$ si situate la 1m este aproape echivalenta cu greutatea unei tone!

Urmatoarea sarcina este desigur cuantificarea cantitatii de fluid, ori a sarcinii electrice q , asa cum am denumit-o. Pentru aceasta, s-a pornit de la observatia practica ca anumite obiecte preiau foarte usor si conduc fluidul electric. Acestea se numesc conductoare, sau *metale*. Observatia de mai sus a premis constructia primului tip de instrument care putea masura cantitatea de fluid electric (ori cantitatea de sarcina electrica), numit *electroscop* si prezentat in Fig.2.2. Astfel, daca un conductor incarcat cu sarcina electrica atinge capatul metalic al electroscopului atunci ii cedeaza acestuia o parte din sarcina electrica. O parte din aceasta se scurge pe "aripile" electroscopului si le indeparteaza (pentru ca am vazut ca doua bucati incarcate cu astfel de fluid se vor respinge). Cu cit e mai multa sarcina electrica, cu atit aripile se indeparteaza mai mult. Desi masuratoarea nu este poate precisa, este o prima indicatie a cantitatii de sarcina electrica.

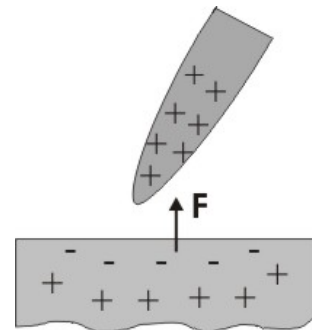


Figure 2.3: Electrostatic induction: the electrically charged rod attracts negative charges at the edge of the piece of paper. This in turn attracts the whole piece of paper that can be lifted up if small enough

Rationamentele de mai sus, desi corecte, par ca nu poate totusi explica o experienta cotidiana a noastra simpla: pieptenele frecat care atrage mici hirtiute! Caci, intr-adevar, desi pieptenele are dupa frecare in excess fie fluid pozitiv, fie negativ, hirtiuta nu a fost nici frecata, nici atinsa, si deci ea este inca neutra, avind cele doua fluide in egalitate! De ce este atunci atrasa? Explicatia acestui fenomen, prezentata in (vezi Fig. 2.3) este *polarizarea* fluidelor in hirtiuta. Astfel, daca o parte din fluidul electric negativ se poate extrage din materiale, nu e de mirare ca el *se si poate deplasa* intr-o oarecare masura in ele. Atunci, pieptenele incarcat (pozitiv de exemplu) va atrage inspre el fluidul electric negativ (mobil) din hirtiuta, care care

va atrage va atrage hirtiuta dupa el! Motivul pentru care fluidul negativ din hirtiuta nu iese de tot din hirtie are de-a face cu coeziunea sa, ce are loc prin intermediul sarcinilor pozitive imobile, asa cum am mentionat mai sus. Cu alte cuvinte, sarcinile negative ar iesi afara din hirtie, dar sunt atrase de sarcinile pozitive imobile din hirtie!

Pe de alta parte, pieptenele va respinge fluidul pozitiv din hirtiuta. Cum cele doua cantitati de fluid sunt egale (hirtia e neutra), ne putem astepta ca cele doua forte de atractie si respingere sa fie agale in valoare absoluta si deci sa se compenseze! Vedem astfel ca rationamentul de mai sus ramine corect *numai* *daca* forta de atractie a fluidului negativ este mai mare decat cea de respingere a fluidului pozitiv. Ori acest lucru se poate intimpla usor daca presupunem o *variatie cu distanta* a fortelor de atractie si respingere electrostatice! Fortele ar trebui sa fie mai mari cind fluidele electrice sunt in apropiere (cum e cel negativ) si mai mici cind ele sunt la departare (cel pozitiv).

O astfel de variatie nu este desigur suprinzatoare, si ne aduce aminte de comportarea fortei gravitationale. Sa consideram de exemplu doua bile metalice de dimensiune mica, incarcate cu astfel de fluide electrice, avind sarcinile electrice q_1 si q_2 , ce vor fi fost masurate cu electrocopul din Fig.2.2. Ne intrebam care este comportarea fortei electrice de interactiune intre ele, ca functie de distanta (vezi Fig. 2.4).

Forta electrica de atractie sau respingere intre corpurile incarcate electric a fost masurata pentru prima data de Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), printr-un instrument foarte asemanator cu cel al lui Cavendish folosit la masurarea fortei gravitationale (vezi capitolul precedent). Rezultatul este uimitor de asemanator cu cel gravitacional ??:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (2.1)$$

unde d este distanta dintre cele doua bile, iar ϵ_0 este o constanta universala avind valoarea

$$\epsilon_0 = 8.854 \frac{C^2 s^2}{m^3 kg} \quad (2.2)$$

We notice here the the sign of the force (attraction or repulsion) is given by the product of charges. The force is positive for the same type of charges ($q_1 q_2 > 0$), meaning that the two charged balls will repel. The force is negative for different type of charges ($q_1 q_2 < 0$), meaning that the two charged balls will attract. In fact, we can write the vectorial form of the Coulomb force in the same way as we did for the gravitational interaction ?? and write down the force with which the ball located at $\mathbf{r}_1$ attracts or repels the ball located at $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (2.3)$$

where $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ and the last term represent in fact the unity vector.

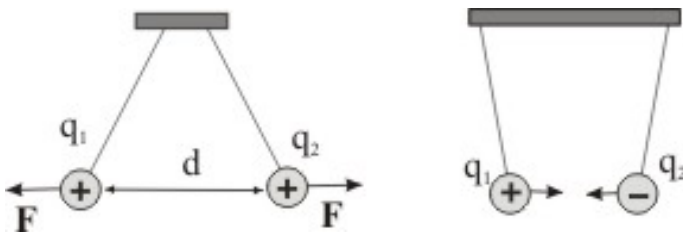


Figure 2.4: Left: Two charges of the same type repel. Right: Two opposite type of charges attract each other

Desi se stie mai putin, cel care a verificat primul forma patratica a atractiei electrostatice a fost, ca si in cazul fortei gravitationale, tot Cavendish! Istoria spune ca Franklin a observat ca o sfera metalica goala incarcata cu "fluid" atrage o bile de pluta, daca bila de pluta este in afara sferei metalice, dar nu daca e in interiorul ei. La o intalnire a Societatii Regale Britanice, Franklin i-a comunicat aceasta "curiozitate" lui Joseph Priestley (1733-1804). Acesta, observind ca efectul este identic cu cel calculat teoretic pentru forte gravitationale, a tras concluzia ca fortele electrice trebuie sa aiba aceeasi comportare ca cele gravitationale. Cavendish, auzind aceasta argumentare, a repetat foarte bine aranjamentul lui Franklin si a dovedit ca exponentul distantei d din 2.1 este fie 2, fie difera de 2 printr-o valoare mai mica de 0.03! Din pacate el nu si-a publicat nicio data rezultatul. In exercitiul 2 propunem cititorului sa verifice ca efectul de mai sus are loc intr-adevar numai daca forta prezinta o variatie invers proportionala cu patrutul distantei.

In this section we have seen how the two types of electric fluids (negative and positive) came into being, and what is the electrical interaction between these. In the next section we try to reformulate this interaction in a slightly different way.

2.1.2 Cimpul electric

Partea din electromagnetism care se ocupa cu fortele de atractie Coulomb dintre sarcinile electrice considerate in nemiscare se numeste *electrostatica*. Ceea ce este remarcabil in electrostatica este asemanarea uimitoare cu gravitatia lui Newton (vezi 2.1 si ??). Singura diferenta este faptul ca masele corpurilor in teoria lui Newton sunt pozitive, pe cind sarcinile electrice pot fi si pozitive si negative.

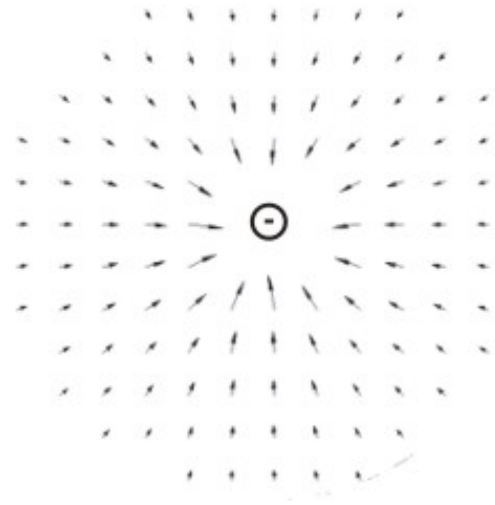


Figure 2.5: The electric field of a negative charge

Forta de atractie a lui Coulomb 2.3 o putem intelege si sub o alta forma. Astfel, sa presupunem ca de fapt sarcina q_1 , aflata in pozitia $\mathbf{r}_1$ produce un *cimp electric vectorial* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in tot spatiul (vezi Fig.??), dat de:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.4)$$

Forta cu care sarcina q_1 actioneaza asupra sarcinii q_2 aflate in punctul $\mathbf{r}_2$ este atunci conform 2.3:

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \quad (2.5)$$

Daca avem mai multe sarcini $i = 1..N$ aflate in puncte diferite $\mathbf{r}_i$, forta totala care actioneaza asupra unei sarcini de proba q localizata in pozitia $\mathbf{r}$ va fi, conform principiilor lui Newton, suma vectoriala a fortelor data de fiecare sarcina q_i :

$$\mathbf{F} = \sum_i q \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = q \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

Putem atunci privi cimpul electric sub forma urmatoare. Fiecare sarcina q_i prezenta in spatiu va crea un cimp vectorial $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ dat de 2.4. In fiecare punct $\mathbf{r}$ din spatiu, cimpul electrostatic *total* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ este o *suma* a vectorilor $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ generati de diferitele sarcini in acel punct. Forta ce actioneaza asupra sarcinii q localizate in $\mathbf{r}$ este simplu sarcina ei inmultita cu valoarea cimpului electric total $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in acea locatie.

Introducerea cimpului electric in momentul acesta nu pare sa fie decit o smecherie matematica. El este generat de sarcinile electrice si exista doar in prezenta acestora. Cu toate acestea, vom intelege utilitatea acestei notiunii cind vom vedea ca cimpul electric poate exista si *independent* de sarcinile electrice.

Remarcam in plus ca notiunile de mai sus au fost introduse pentru sarcini electrice q_i discrete. Astfel, ne-am imaginat ca avem de-a face cu niste bile foarte mici (punctuale la limita), pe care s-a asezat in excess o cantitate finita de fluid electric pozitiv sau negativ. Pentru situatii macroscopice, ar fi bine sa luam in calcul forma continua a fluidului electric.

Astfel, sa presupunem ca fluidul electric are o *densitate de sarcina electrica* data de $\rho(\mathbf{r})$. Aceasta inseamna ca un volum mic dV_i situat in punctul $\mathbf{r}_i$ (vezi Fig.2.6) are o sarcina totala $dq_i = \rho(\mathbf{r}_i)dV_i$. Apoi, putem simplifica problema asumind ca avem un singur fluid in tot spatiul, a carui *densitate de sarcina electrica* variaza in fiecare punct, fiind pozitiva, negativa, sau chiar zero (unde nu sunt sarcini).



Figure 2.6: Text:

Cimpul electric in tot spatiul se scrie atunci, ca suma vectoriala a cimpurilor date de fiecare sarcina infinitesimala dq_i din tot spatiul:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\rho(\mathbf{r}_i)dV_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.7)$$

In formula de mai sus trebuie sa efectuam adunarea pentru toate volumele mici dV_i din spatiu. Putem atunci sa o rescriem in forma integrala:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2.8)$$

unde integrala trebuie efectuata in tot spatiul. Cu alte cuvinte, o distributie *continua* fluid electric avind densitatea $\rho(\mathbf{r})$

va genera un cimp electric vectorial $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dat de relatia de mai sus. Aceasta este esenta electrostaticii. Impreuna cu formula 2.5, forte electrostatice pot fi apoi calculate.

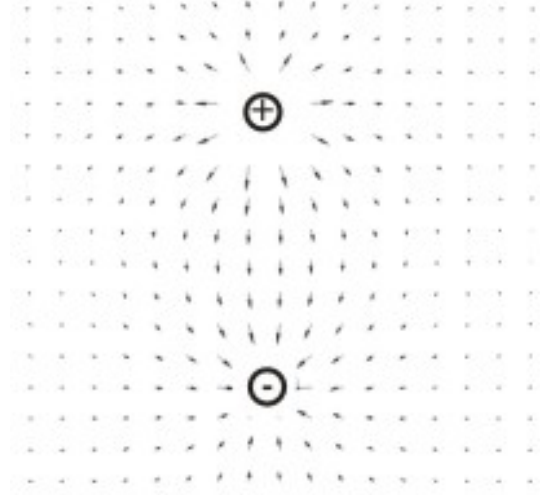


Figure 2.7: The *total* electric field of two different charges (an *electric dipole*)

Formula cimpului electric 2.8 pare inca destul de complicata. O forma mai "frumoasa" se poate obtine aplicind operatorul divergenta ∇ in stanga si dreapta formulei 2.8:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'$$

unde am folosit rezultatul ?? pentru functia lui Dirac. Utilizind proprietatea functiei lui Dirac ??, putem scrie atunci:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

Desi nu am considerat in sectiunea aceasta miscarea sarcinilor electrice, vom presupune ca relatia precedenta are loc *in orice moment de timp*, indiferent de starea de miscare a sarcinilor! Afirmatia poate parea evidenta daca consideram ca interactia electrica este instantanee, ca si interactia gravitacionala. Vom vedea insa mai tirziu ca noi pastram validitatea relatiei de mai sus, chiar atunci cind vom dovedi ca interactia electrica nu este instantanee, si aceasta pentru ca relatia precedenta este in sine o relatie *locala*.

We saw that the Coulomb force 2.3 is very similar to the Newton force ???. In the section ?? we have defined the *gravitational potential field* $V(\mathbf{r})$, taking advantage of the fact that the gravitational field is conservative. In the same way, it can be shown that the electric field is conservative as well, and that we can also define an *electric potential field* $\phi(\mathbf{r})$. The electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ is then, using the gradient 2.127, given by:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

For a point charge q , situated at the center of coordinates, the electric potential field is given by:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

This relation is similar to ?? and we can verify directly that this leads to the electric field 2.4. For a collection of point charges q_i , the electric potential field $\phi(\mathbf{r})$ is given by the sum of potential fields $\phi_i(\mathbf{r})$ of each charge, as in the case of the gravitational field. In Fig. ?? and Fig. ?? we plot $\phi(\mathbf{r})$ in the addition to the electric field vector $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

The electric potential ϕ is measured in *Volts*, which is a derived unit, as we see from 2.11. For engineers, a much more important notion is the electric potential difference between two points $U_{1,2} = \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2)$. As we can see through the analogy with ??, this gives the work done for transporting a charge q from point $\mathbf{r}_1$ to $\mathbf{r}_2$: $W = qU_{1,2}$. The electric potential difference is widely known as a measure of the strength of an electrical battery, as we will discuss in the next section.

2.1.3 Curentul electric

Am mentionat faptul ca fluidul electric negativ, din moment ce poate fi transportat prin frecare de la un material la altul, sau prin contact cu metale, poseda o anumita *mobilitate*. Cu alte cuvinte, sarcinile electrice care il compun se pot deplasate. In secolul al XVIII-lea fusesera deja construite dispozitive speciale care permiteau extragerea sarcinilor negative prin frecare si depozitarea lor pe conductori metalici. De aici, sarcinile electrice puteau fi puse apoi in miscare pentru producerea anumitor efecte, ca de exemplu scintei electrice. Cu toate acestea, un dispozitiv care sa genereze continuu sarcini electrice in miscare nu fusese descoperit.

Spre sfirsitul secolului, Luigi Galvani (1737-1798), care efectua experimente cu electricitate pe broaste, a observat un lucru curios. Astfel, el a pus in contact capetele a doua fire metalice de materiale diferite. Apoi, cu celelalte doua capete ramase libere, a atins muchii unei broaste, care astfel s-au convulsionat. Doua teorii au aparut apoi care sa explice fenomenul. Prima, sustinuta de Galvani, care spunea ca muschii genereaza electricitate, eliberata apoi de firele metalice. A doua, sustinuta de Alessandri Volta (1745-1827), care spunea ca firele de metale diferite in contact genereaza electricitate, la care muschii saracii broaste (de fapt, deja moarta) doar reactioneaza.

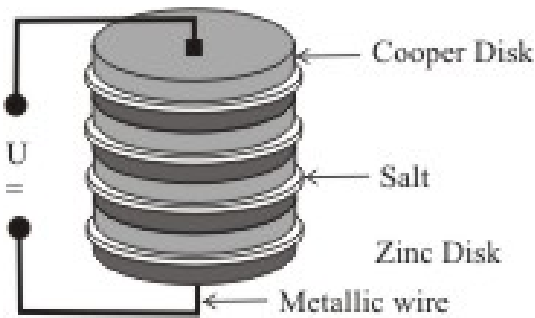


Figure 2.8: Caption baterie-volta

In final, in cazul studiat, s-a dovedit ca Volta are dreptate, desi, dupa cum a presupus Galvani, electricitatea poate fi produsa si de corpurile vii. Pentru a-si demonstra teoria, Volta a construit o succesiune de discuri de metale diferite (zinc si cupru) in contact, alternate cu bucati de carton impregnate cu sare (vezi Fig. 2.8). In acest fel, el a construit de fapt prima baterie care, fiind capabila sa genereze sarcini electrice in miscare intr-un mod continuu, s-a dovedit apoi cruciala in urmatoarele experimente de electricitate.

Sarcinile electrice generate de catre baterie sunt colectate de catre doua *fire metalice* asezate la capetele ei. S-a observat apoi ca alte fire metalice pot fi utilizate deasemenea la transportul in continuare al sarcinilor, punind astfel bazele primelor circuite electrice. Acest lucru nu trebuie sa ne surprinda caci,

dupa cum am mentionat in sectiunea precedenta, metalele sunt *conductoare*, prin ele fluidul electric circula foarte usor.

Fara a incerca sa intram in detalii, mentionam aici ca principala caracteristica a metalelor este faptul ca potentialul electric $\phi(\mathbf{r})$ pe suprafata lor este constant. Putem intelege aceasta caracteristica in felul urmatoare. In primul rind, fluidul electric negativ este compus din componente elementare (sarcini electrice numite electroni) ce se resping puternic unele cu altele. Deoarece aceste sarcini electrice sunt foarte mobile, ele se vor aseza cit mai departe posibil unele de altele, si anume in final pe suprafata conductorului, pe care nu o mai pot parasi insa.

In al doilea rind, aceasta reconfigurare a sarcinilor nu va mai produce deloc cimp electric $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in metal cind sarcinile vor fi in echilibru. Aceasta deoarece orice valoare nenula $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ va crea o forta de atractie $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ in acel loc, ceea ce ar pune din nou in miscare sarcinile electrice ce sunt foarte mobile. Daca insa $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, atunci $\phi(\mathbf{r})$ este *constant* pe suprafata metalului, conform 2.10. Bateria din Fig. 2.8 are doua capete metalice, cu potentialele ϕ_1 si ϕ_2 . Tensiunea electrica data de aceasta este diferenta acestor valori

$$U = \phi_1 - \phi_2 \quad (2.13)$$

Am vazut ca cimpul electric E in situatia electrostatica este perfect cimpului gravitacional. In acest caz tensiunea electrica U de-a lungul unui fir electric poate fi scrisa prin asemanare cu cimpul gravitacional ?? ca

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \quad (2.14)$$

Deoarece cimpul electric este conservativ in cazul electrostatic, relatia de mai sus este valabila pentru oricare doua puncte 1 si 2 din spatiu.

Cind sarcinile electrice sunt in miscare intr-un fir metalic, ne putem astepta ca cimpul electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$ sa fie diferit de zero, caci el este ce pune in miscare sarcinile. Cu toate acestea, in practica, valoarea acestuia este asa de mica, incit se considera nula de cele mai multe ori, si deci si in acest caz potentialul electric $\phi(\mathbf{r})$ se considera *constant* de-a lungul unui fir electric, iar notiunea de tensiune electrica intre cele doua capete ale bateriei poate fi folosita.

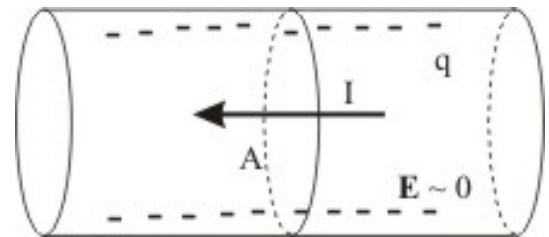


Figure 2.9: Caption fir-electric

Mult mai important, pentru fiecare fir electric care transporta sarcini electrice (vezi Fig. ??), se poate defini o marime ce caracterizeaza cantitatea de sarcina transportata in unitatea de timp prin acel fir electric, ca:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.15)$$

Aici $dq(t)$ este cantitatea mica de sarcina ce traverseaza o anumita sectiune a firului electric (de arie A in Fig. ??) in timpul infinitezimal dt . Unitatea de masura a curentului electric $I(t)$ astfel definit este atunci $A = C/s$. Aceasta notiune isi are desigur sens in masura in care *cantitatea de sarcina totala se conserva*, lucru pe care il vom asuma de acum incolo.

Puntem privi curgerea fluidului electric negativ nu numai restrinsa la firele electrice ci, exact ca intr-un fluid, avind loc in tot spatiul (vezi Fig.2.10). Atunci insa trebuie sa definim *densitatea de curent electric* $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in fiecare punct din spatiu, intr-o masura asemanatoare densitatii de curgere a unui fluid. Astfel, putem considera ca fluidul electric este facut din sarcini minuscule avind, in punctul $\mathbf{r}$, viteza $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ si densitatea (numarul de sarcini punctuale in unitatea de volum) $n(\mathbf{r})$. Sa luam cazul fluidului electric negativ, si sa consideram ca fiecare sarcina electrica are *aceeasi valoare* negativa $-e$. Atunci, in volumul mic dV se vor gasi $n(\mathbf{r})dV$ sarcini. Sarcina totala din acest volum va fi $n(\mathbf{r})dV \cdot (-e) = \rho(\mathbf{r})dV$, unde $\rho(\mathbf{r})$ este densitatea de sarcina electrica. In acest caz se defineste *densitatea de curent electric* in punctul $\mathbf{r}$ ca:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -e \cdot n(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

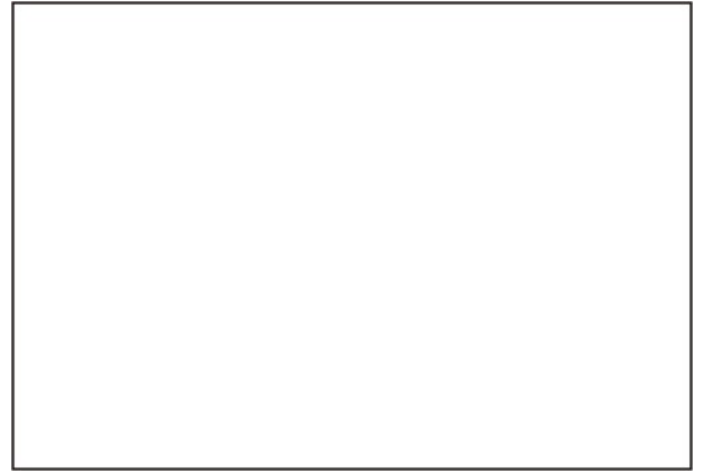


Figure 2.11: The conservation of charge

As we mentioned before, the total charge is *conserved*. Then we can write a relation by looking at what is happening with the charge in the volume V , as presented in Fig.2.11. Here, the amount of charge that leaves the volume V per unit time equals as the total current that flows through the surface S enclosing that volume V :

$$-\frac{dQ}{dt} = I_S \quad (2.19)$$

This relation can be written then as:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S}$$

where S is the surface that encloses the volume V (see Fig.2.11). Because the volume is fixed, we can bring the time differentiation inside the integral. We can also use on the right hand side the Stokes formula ??, to get

$$\int_V -\frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} dV = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV$$

The above relation must hold for *any* volume V inside the electric fluid. This is however possible only if the values in the integrand are the same:

$$-\frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (2.20)$$

The above relation gives *the conservation of charge* as a local law.

2.1.4 Cimpul magnetic

As we mentioned in the beginning, another "exotic" force is the magnetic force. This was discovered by the ancient Greeks and Chinese who observed that certain stones, called lodestones, could attract small pieces of iron. The name of Magnet comes from Magnesia, a place in Greece that contained large amounts of lodestones. The Chinese were the first ones to use magnets as compasses.

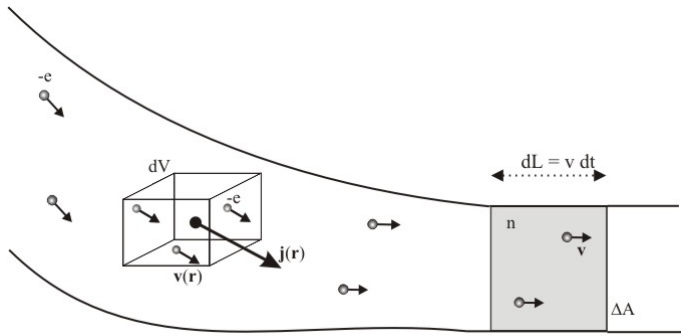


Figure 2.10: The flow of the electrical fluid is assumed continuous, much like the flow of a fluid.

Se vede astfel ca densitatea de curent are directia de miscare a sarcinilor. Sensul notiunii tocmai definite poate fi inteles daca calculam curentul electric ce trece printr-o suprafata ΔA *perpendiculara* pe directia de miscare a sarcinilor, intr-un interval de timp dt (vezi partea din dreapta a Fig.2.10). Sarcina totala ce traverseaza suprafata ΔA este $dq = -e \cdot n \Delta A dL$. Din Fig. 2.10 vedem ca $dL = v \cdot dt$. Atunci putem calcula curentul electric I cu 2.15:

$$I = \frac{dq}{dt} = -en\Delta A \cdot \frac{dL}{dt} = -en\Delta A \cdot v = j\Delta A \quad (2.17)$$

Cu alte cuvinte, curentul electric $I = j\Delta A$ ce trece printr-o suprafata orientata perpendicular pe directia de miscare a sarcinilor electrice, este densitatea de curent electric j inmultita cu aria suprafetei ΔA .

The current density $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ is a very useful notion. It tells us in which direction and with which velocity the charges move at a certain location $\mathbf{r}$. It helps us to calculate the total amount of charge that passes through any surface S per unit time, with:

$$I(t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} \quad (2.18)$$

Here $d\mathbf{S}$ is the integration element, a vector perpendicular on the surface and proportional with the area unit, as presented in Fig.2.11.

Prin incercari simple, s-a putut observa inca de la inceput ca ea are multe asemanari cu forta electrice. Astfel, un magnet are doi *poli*, Sud si Nord, precum exista doua tipuri de sarcini electrice, pozitive si negative. Polul Nord este prin conventie acel pol al magnetului care se va orienta catre nordul Pamintului in cazul in care s-ar putea misca liber. Polii de acelasi fel se resping, cei de fel opus se atrag, la fel ca in cazul sarcinilor electrice.

A visualitation of the magnetic poles can be seen in Fig. 2.12. Here, a sheet of paper was placed on a bar magnet, and small pieces of iron fillings were sprinkled on its surface. The small pieces of iron fillings become small magnets by induction, and orient themselves as seen in the figure. We will see later that they reveal the orientation of the magnetic field lines.

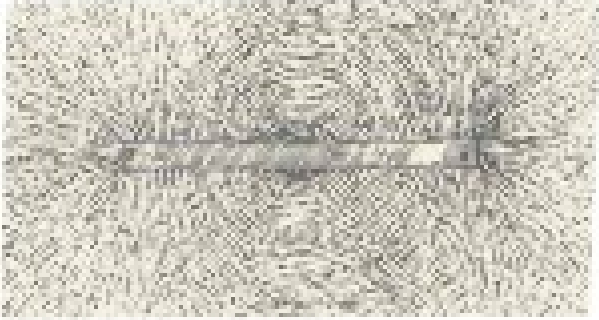


Figure 2.12: A reproduction of an image taken from ... Here, the two poles of the magnet are revealed by the two locations where the lines seem to converge.

Vom considera pentru inceput existenta fizica a acestor doi poli, undeva in interiorul magnetului, sub forma unor perechi m si $-m$. Fiecare din acesti poli se numeste atunci un *monopol*. Forma fortelor dintre monopoli m se poate deduce atunci, intr-o buna aproximatie, din masuratori efectuate pe magneti (unde efecte aditionale, ca forma magnetelor, orientarea lor etc. trebuie luate in considerare). In final, se poate ajunge la o forma de interactie intre monopoli magnetici m_1 si m_2 identica cu 2.3:

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.21)$$

Atunci, ca si in cazul sarcinilor electrice, putem presupune ca un monopol magnetic m aflat in originea sistemului de coordonate creeaza un cimp magnetic dat de

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.22)$$

Acesta va actiona asupra unui alt monopol m' aflat in punctul $\mathbf{r}$ cu forta

$$\mathbf{F} = m' \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

In Fig.2.13 prezentam forma cimpului magnetic $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pentru un magnet. Observam astfel ca liniile de cimp par sa se orienteze la capete catre cei doi poli, precum liniile de cimp electric catre sarcina electrica. In fond, liniile magnetice din Fig. ?? seamana izbitor cu cele ale cimpului electric al unui dipol prezentate in Fig. ?. Asemanarea este desigur de asteptat in virtutea faptului ca un magnet este alcatuit din doi poli magnetici, precum un dipol electric din doi poli electrici.

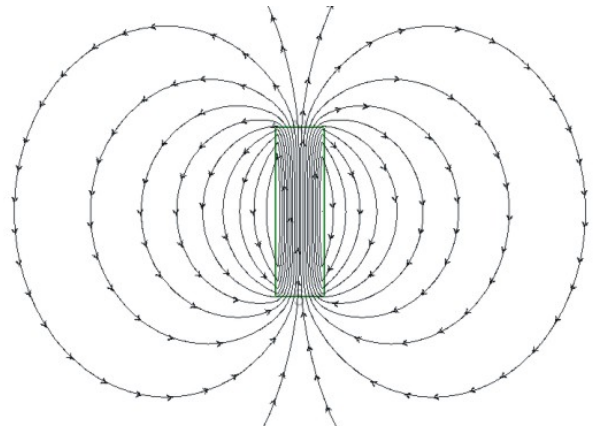


Figure 2.13: The magnetic field created by a bar magnet

Datorita faptului ca cimpul magnetic 2.22 dat de un pol magnetic are aceeaasi forma ca cel electric ?? dat de o sarcina electrica, putem reconstrui identic teoria matematica prezentata in sectiunea precedenta, si obtine o formula similara lui 2.9 pentru cimpul magnetic:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

unde ρ_m ar fi *densitatea* de poli magnetici m pe unitatea de volum. In afara magnetilor, unde poli magnetici nu exista ($\rho_m = 0$), partea din dreapta a relatiei de mai sus 2.24 va fi zero.

Toate aceste asemanari cu cimpul electric prezentate mai sus i-au facut pe oamenii de stiinta sa caute sa *separe* acesti poli magnetici m (numiti si monopoli magnetici) ce exista in magneti, unde sunt intotdeauna in perechi. Nimic mai simplu, si-au zis ei, taiem un magnet pe din doua si separam cei doi poli. Surpriza insa. Prin taiere se obtin doi magneti, care au la rindul lor fiecare doi poli (vezi Fig. 2.14)! Daca mai taiem odata, obtinem din nou cite doi magneti, si tot asa, fara ca sa putem separa vreodata polul magnetic!

O asemenea problema pare desigur fara iesire. Caci nici pina in ziua de astazi cineva n-a putut gasi un pol magnetic separat (un *monopol*). Si atunci? Desi ei nu pot fi gasiti separat, desigur ca nimic nu-i impiedica sa exista ca o "materie noua" numai in perechi in interiorul magnetilor. Cu toate acestea, o alta solutie eleganta a fost data de catre Faraday. El a presupus corect ca fortele magnetice nu este creat de o "noua materie", ci pur si simplu de catre sarcinile electrice in miscare in interiorul materialelor!

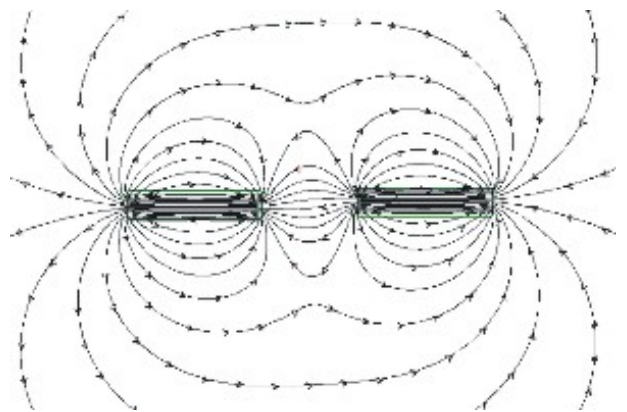


Figure 2.14: I we try to separates the poles of amagnet, we obtain two other magnets, each with two poles again!

Faptul ca cimpul magnetic poate fi creat de catre sarcini electrice in miscare va fi mai clar in sectiunea urmatoare. In acest fel, unitatea de masura a polului magnetic poate fi identificata ca rezultind din cea a sarcinii electrice, obtinind $[m] = C \cdot m/s$. Constanta μ_0 din 2.21 are atunci valoarea experimentală $\mu_0 = 1.25 \cdot 10^{-6} kg \cdot m/C^2$, iar cimpul magnetic se masoara in $[B] = kg/(C \cdot s)$.

Implicatiile ulterioare ale presupunerii lui Faraday se vor dovedi majore, mergind pina la intelegerea corecta a teoriei relativitatii. Caci, pe buna dreptate, ne putem intreba acum daca fortele magnetice ar fi privite ca ceva complet diferit de fortele electrice din moment ce ambele sunt produse de sarcini electrice.

Daca consideram ca nici in interiorul magnetilor nu exista monopoli magnetici, putem rescrie 2.24 ca:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.25)$$

Relatia de mai sus se dovedeste valabila **in tot spatiul**, ca atare chiar si in interiorul magnetilor, sau al "fluidului" electric, si ea defineste legea a doua a ecuatiilor lui Maxwell. Ea ne spune ca cimpul magnetic este o marime masurabila experimental (de exemplu cu ajutorul magnetilor), dar ea nu este produsa de monopoli magnetici ci, dupa cum vom vedea, de cimpul electric in miscare.

Observam ca legea 2.25 lasa loc de eventuali poli magnetici separati (monopoli magnetici) ca o "materie noua". Caci, *daca* acestia ar fi gasiti, atunci ar putea fi introdusi direct in relatia 2.24. Cum am mentionat insa, desi teoretic prezenta lor este *posibila*, monopoli magnetici nu au fost pina in prezent identificati.

2.1.5 Creearea cimpului magnetic

Asemanarea dintre fenomenele electrice si magnetice mentionata in sectiunea precedenta i-a determinat pe oamenii de stiinta de acum citeva veacuri sa caute daca nu cumva sarcinile electrice au o influenta asupra magnetului, sau invers. S-au incercat de exemplu experimente in care a fost testata direct forta de atractie magnetica a noilor sarcini electrice, insa aceasta a fost absenta.



Figure 2.15: A lithograph depicting Oersted's original demonstration

Primul care sa observe o astfel de corelatie intre sarcinile electrice si cimpul magnetic a fost Hans Christian Oersted

(1777-1851). In 1820 el preda un curs de electricitate si magnetism. Masa de demonstratie era plina de magneti, fire electrice si noile inventate baterii care permiteau intretinerea unui curent electric continuu (vezi Fig. 2.15). Cind curentul generat de o astfel de pila galvanica a trecut printr-un fir metalic apropiat de un magnet, Oersted a observat ca magnetul si-a schimbat directia! Cu alte cuvinte, sarcina electrica in miscare (si *nu* cea statica) formeaza un *cimp magnetic*, care astfel influenteaza magnetul.

Cu ajutorul unui mic compas putem masura orientarea acestui cimp magnetic. Dupa cum insusi Oersted a observat, am vedea astfel ca cimpul magnetic este orientat *perpendicular* pe planul definit de firul electric (daca acesta este drept) si punctul de masura, asa cum este schitat in Fig. 2.16. In plus, masuratori mai precise ale fortei magnetice arata ca cimpul $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ *descreste* cu cresterea distantei dintre punct si fir, si *creste* cu cresterea curentului electric ce traverseaza firul metalic.

Forma cimpului magnetic generat un fir electric depinde insa de *forma* firului electric. Aceasta dificultate a fost depasita de catre Jean-Baptiste Biot (1774-1862) si Felix Savart (1791-1841), care au considerat cimpul magnetic dat doar de "o bucatica mica", considerata dreapta, din firul electric (vezi Fig. 2.16). Restrind observatiile lui Oersted la aceasta parte a firului electric (considerata de lungime dL), Biot si Savart au gasit urmatoarea formula pentru cimpul magnetic generat de ea:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dL}{r^2} \mathbf{u} \times \mathbf{k} \quad (2.26)$$

unde dL reprezinta lungimea mica de fir electric luata in considerare, I curentul electric, r distanta pina la punctul de masura, iar vectorii unitate $\mathbf{u}$ si $\mathbf{k}$ determina directia vectorului de cimp magnetic (vezi Fig. 2.16). Constanta de proportionalitate μ_0 este aceeaasi care apare la atractia intre polii magnetici 2.21.

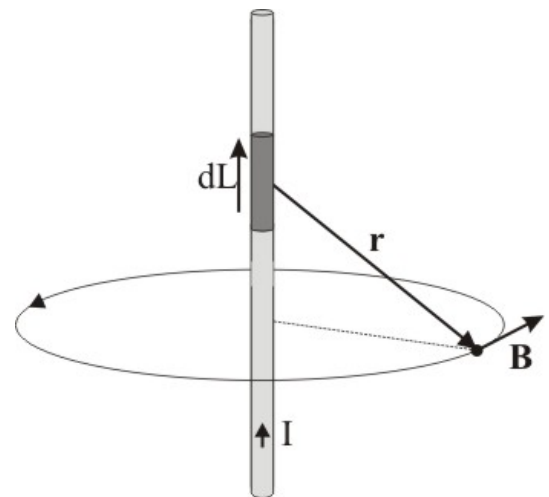


Figure 2.16: Cimpul magnetic al unui fir. Pune fir drept si oarecare!

Utilizind vectorul $d\mathbf{L} = dL \cdot \mathbf{k}$ pentru marimea si orientarea "bucatii" de fir electric, putem scrie:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.27)$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul pozitie de la "bucatarea" de fir electric la punctul de masura (vezi Fig. 2.16). Daca vrem sa calculam cimpul magnetic data de tot firul electric, trebuie sa adunam cimpurile create de fiecare "bucatarea" $d\mathbf{L}$:

$$\mathbf{B} = \int_{fir} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{fir} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.28)$$

In the formula above, $\mathbf{r}$ changes, representing always the position vector from the small piece of wire dL to the point where we calculate the field.

To see how the above formula works, we will try to apply it to the straight wire of Fig. 2.16. We first observe that the magnetic field of each small piece of the wire dL is oriented in the same direction, because of the geometry. We can then add all the values up, to obtain the magnitude of the magnetic field at the indicated position as:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{fir} \frac{|d\mathbf{L} \times \mathbf{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL \cdot a}{\sqrt{L^2 + a^2}^3} \quad (2.29)$$

Here we have used the definition of the vectorial product, that leads to $|d\mathbf{L} \times \mathbf{r}| = dL \cdot a$ as shown in Fig. 2.16. The above integral can be directly computed, leading to:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{a\sqrt{a^2 + L^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (2.30)$$

We have in the formula 2.28 an integral form. However, we are interested in a *local* form of the Biot-Savart law, like we have in the relation 2.9 and 2.25. If we do that, then we do not have to look in the whole space to say something about the magnetic field at a certain location. And in addition, we free ourselves up from the instantaneous action at distance, which is an intrinsic property of the Biot-Savart law if we consider that the electric current consist of moving charges.

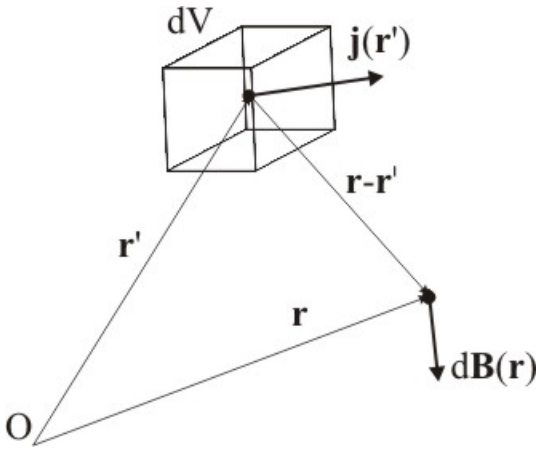


Figure 2.17: The magnetic field at the location $\mathbf{r}$ given by a small volume dV of electric fluid located at $\mathbf{r}'$

To make a local law, we have to replace the electrical current I of a wire with a *local* quantity appropriate to a liquid, such as the electric current density $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ defined in 2.16. Because the piece of the wire dL from 2.27 is infinitesimal, we may easily consider that the current density j is constant in that piece. Considering also that the wire has a small section ΔA , and using 2.17, we may write

$$I \cdot d\mathbf{L} = j \Delta A \cdot dL \cdot \mathbf{k} = dV \cdot \mathbf{j} \quad (2.31)$$

Now we generalise 2.28 taking into account that any small volume dV in space, located at $\mathbf{r}'$ may have a density of the electric fluid $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, as presented in Fig. 2.17. Then, if we want to calculate the magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ at the position $\mathbf{r}$ then we have to use the vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ instead of $\mathbf{r}$ in the formula 2.28. The magnetic field in any point of space $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ is given then by:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{space} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2.32)$$

We choose now to use the operator $\nabla \times$, that is defined, in cartesian coordinates, as:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

If we apply this operator to the relation 2.34, we notice that it will act only on $\mathbf{r}$ and not on the $\mathbf{r}'$ on the right hand side of 2.34. Consequently, the operator $\nabla \times$ will enter the integral, and we have:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{space} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2.34)$$

The operation on the right hand side can be done directly (see Exercise 2), leading to:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.35)$$

Replacing this, and using the well known property of the delta function $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ we obtain the local relation we were looking for:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

The term on the right defines the *sources* of the magnetic field, and the equation above permits the construction of the magnetic field, together with 2.36.

We discuss in the end of this section two observations. First, it seems that the Biot-Savart law 2.34 completely determines the magnetic field, so we wonder if the law Maxwell:II is satisfied. This is indeed the case, as it can be shown by directly applying the operator $\nabla \cdot$ in the Biot-Savart law 2.34. We propose this proof to the reader in Ex. 2. However, we observe that this argument does not rule out the presence of the magnetic monopoles, as these can still be added if founded experimentally.

Secondly, we may now suspect what is the source of the magnetic field in the magnets, namely some flowing electrical currents. The Biot-Savart law 2.34 gives us how these electrical currents create the magnetic field, but it does not tell us what are these electrical currents inside the magnet. We leave this question still unanswered for few sections, and we will come back with the right explanation later.

2.1.6 Forta Lorentz

Am vazut in precedenta sectiune cum un fir metalic prin care trece curent electric orienteaza un magnet, actionind deci cu o forta asupra lui. Legea actiunii si reactiunii reciproce ne sugereaza atunci ca poate si magnetul actioneaza cu o forta asupra firului metalic purtator de curent electric!

Aceasta idee l-a condus pe André-Marie Ampère (1775-1836), la constructia unui sistem in care un *magnet* deviaza de un fir electric spiralat ca o bobina. Remarcam insa ca aceasta problema nu conduce la determinarea cimpului magnetic sau

electric generat de sarcini, ci la cum *reactioneaza* sarcinile electrice in miscare (de determina curent electric) in prezenta cimpului magnetic.

Cu toate acestea, masuratori cantitative pe geometria initiala nu sunt dintre cele mai usoare. Insa, urmind descoperirea lui Oersted, Ampere stia ca *un cimp magnetic poate fi generat si de un curent electric!* Ca atara, el a construit apoi un sistem mai simplu, prezentat in Fig.2.18, si care consta din doua fire electrice paralele.

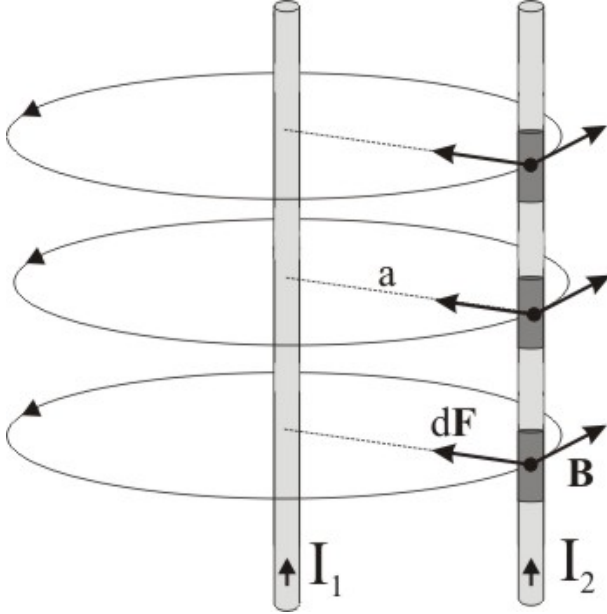


Figure 2.18: The attraction force between two wires

De aceasta data, cimpul magnetic generat de curentul electric al unui fir metalic va fi *perpendicular* pe planul din cele doua fire. Asa cum banuia Ampere, acest cimp magnetic exercita o forta asupra celui de-al doilea fir metalic strabatut de curent electric. Aceasta forta s-a putut experimental, marimea ei fiind accesibila instrumentelor vremii. Astfel, s-a putut arata ca ea este de atractie daca cei doi curenti I_1 si I_2 au acelasi sens, si de respingere daca au sens opus. In plus, aceasta forta este proportionala cu valoarea curentilor electrici I_1 si I_2 , cu lungimea firului electric L si invers proportionala cu distanta a dintre cele doua fire:

$$F = \mu_0 L \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi a} \quad (2.37)$$

Citeva lucruri sunt de remarcat in relatia de mai sus. In primul rind, ea este asa de precisa, incit este folosita in definitia unitatii de masura a curentului electric $[I] = 1 \text{ A}$, si care poarta denumirea lui Ampere. One ampere A is defined as the current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length (of negligible circular cross-section) and placed one metre apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to $2 \cdot 10^{-7}$ Newton per metre of length. We can see that the force is comparable with the one measured by Cavendish (and amounting to the weight 0.1 mg of a small ant), if the wires are about 1 cm apart. Because of this, it is the Ampere A that is taken as a base unit in the International Sytem of Units, and not the unit C of the electric charge, even though one can be defined easily from another, by $1A = 1C/s$.

Most important however, following the original idea of Ampere, we want to emphasize here that in the Fig.2.18 it is not

the curent of one electrical wire that generates directly a force on the second wire, but it is the *magnetic field* generated by the first wire that acts on the second wire. We have to identify this magnetic field, and understand further how it acts on some moving charges (that consitute the electrical current).

Cimpul magnetic exercitat de primul fir metalic intr-o pozitie de pe al doilea fir (vezi Fig.2.18) a fost calculat in relatia 2.30. Pe de alta parte, curentul electric in cel de-al doilea fir electric I_2 se poate exprima in functie de concentratia de sarcini electrice n circulind cu viteza v , conform 2.17 (where we consider that the section area of the second wire is ΔA). We can then express the curent I_1 as a function of the magnetic field B from 2.30 and replace this and 2.17 into 2.37 to get:

$$F = \mu_0 L \frac{1}{2\pi a} \frac{2\pi B \cdot a}{\mu_0} (-e)n\Delta A \cdot v \quad (2.38)$$

Ne intereseaza acum care este forta exercitata pe o singura sarcina q de catre cimpul magnetic B . Ceasta se obtine impartind forta totala de mai sus F la numarul de sarcina pe unitatea de lungime L considerata. Cum numarul acesta de sarcini este $N = n \cdot V = n\Delta AL$, we have

$$f = \frac{F}{N} = qBv \quad (2.39)$$

Intru-cit forta magnetica este perpendiculara pe directia vitezei sarcinilor si directia cimpului magnetic (vezi Fig.2.18), putem exprima 2.39 sub forma vectoriala

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.40)$$

cunoascuta si ca forta lui Lorentz. Daca in afara de cimpul magnetic si un cimp electric este prezent, atunci obtinem, incluzind si forta electrica 2.5, forta totala asupra unei sarcini in miscare:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.41)$$

Observam astfel ca impreuna cu relatia de generare a cimpului electric 2.4 si cu legea Biot-Savart 2.34, aceasta forta pare ca formeaza un sistem complet. Astfel, aceste doua legi ne arata cum sarcinile electrice genereaza cimpurile electrice (2.4) si magnetice (2.34). La rindul lor, aceste cimpuri actioneaza asupra sarcinilor conform cu forta Lorentz 2.41, si le schimba pozitia. Folosind equatiile lui Newton, noile pozitii si viteze ale sarcinilor se pot calcula, din care se pot afla noile cimpuri, si tot asa, intr-o forma asemanatoare celor discutate in capitoul despre mecanica.

Sistemul astfel construit, desi corect in limita anumitor aproximatii, ar pierde "descoperirea" si descrierea uneia din cele mai spectaculoase manifestari ale cimpurilor magnetice si electrice: propagarea undelor radio in medii in care nu este nici o sarcina electrica! Caci, dupa cum vom dicuta in urmatoarele doua sectiuni, nu numai sarcinile creeaza cimpurile electrice si magnetice, ci si cimpurile electrice si magnetice se creeaza unele pe altele!

We end this section with another observation. It seems that in the relation 2.41 some things were very well adjusted, since no constant (either ϵ_0 or μ_0) appears on the right hand side. This is indeed the case, as you may figured out already during the previous sections.

2.2 Structura clasica a materiei

De multe ori, meditind, sau cazind in rememorarea unor amintiri, privirea ni se va fi oprit pe un obiect din fata noastra, o cana, un pix, sau poate un fir de praf. In astfel de momente devenim brusc constienti de niste obiecte care alfel parca nici nu exista pentru noi. Apoi, urmarind cu privirea detaliile lor mici, de multe ori ne intrabem, de fapt din ce sunt facute ele? Dincolo de rezolutia noastra optica de aproximativ o jumatate de milimetru, nu putem vedea nimic.

Desigur ca asemenea ginduri despre structura microscopica a materiei vor fi fost des intilnite. Pina in secolul XX, cind instrumente complexe cu o rezolutie foarte mica au putut fi construite, structura a ramas insa un subiect de deductie. Insa chiar si asa, metodele de deductie, in special cele utilizate de chimisti, s-au dovedit atit de puternice in asa fel incit "maruntisurile" materiei au fost identificate si radiografiate inca inainte de a fi "vazute" direct cu instrumentele moderne.

In sectiunile precedente am studiat proprietatile fluidului electric. In aceasta sectiune vom folosi o parte din cunostintele acumulate pentru a din ce si cum este facuta materia inconjuratoare, inclusiv fluidul electric. Vom discuta despre electroni, atomi, si forme de materie.

Pentru a putea avea o valoare experimentală la sfirsitul fiecărei sectiuni, am ales sa amestecam ordinea cronologica a experimentelor. Astfel de exemplu, experienta lui J.J.Thomson de determinare a raportului dintre masa si sarcina electrica este facuta in 1897, inainte de a a lui Millikan de determinare a sarcinii sale, care este efectuata in 1909. Cu toate acestea, noi le prezentam invers, pentru a putea utiliza valoarea sarcinii electronului la determinarea masei sale. Intr-o discutie ulterioara vom prezenta experimentele de electroliza ale lui Faraday din 1833, desi si aceste experiente au avut loc cronologic inaintea experientei lui Millikan. Motivul este tot utilizarea sarcinii electronului la determinarea numarului lui Avogadro si a dimensiunii atomului.

2.2.1 Electronul

We discuss in this section our first elementary particle, the electron, out of which the negative electric fluid is made. We adress its electric charge, and its mass.

Sarcina electronului

In sectiunile precedente am introdus fluidul electric, si am vazut cum el poate genera cimpuri electrice si magnetice, si cum reactioneaza sub interactiunea lor.

De-a lungul timpului s-a banuit ca acest fluid electric nu este continuu, ca o gelatina, ci alcatuit din bucatile foarte mici, *discrete*. Noi am sugerat deja aceasta posibilitate cind am luat in discutie densitatea de sarcina electrica 2.16. Cea mai mica parte parte discernabila a acestui fluid a fost numita *electron* (meaning "amber" in Greek). Acest electron exista deci in materiale, si intrebarea care se naste este cit de mare este el, si cit are sarcina electrica (adica cit e de mare forta electrostatica generata de el).

Desi marimea sarcinii electrice a acestui electron a fost banuita corect de Faraday in experientele sale de electroliza, prezentam acum, din motive de "frumuseti", experienta mai tirzie a lui Millikan (1909). Acesta a pornit de la observatia simpla ca forta electrostatica este *suficient de mare* sa ridice, sau echilibreze, corpuri in aer, dupa cum am vazut in experientele electrostatice de la inceputul acestui capitol. Daca "fluidul" e compus dintr-un numar discret de "electroni", atunci si forta de atractie va fi discreta. Masurind diferenta in forta cind un material primeste (sau da) un electron pe rind, am putea vedea cit e sarcina electronului! Problema este insa corpurile

frecate primesc sau cedeaza un numar foarte mare de electroni, si diferenta in forta nu mai poate fi masurata.

Millikan a devenit astfel constient ca, pentru a sesiza schimbarea fortei, trebuie sa "freci" bucati foarte mici de materie, in asa fel incit prezenta unui electron sa schimbe sensibil comportarea bucatii. Cit de mici insa? Este o picatura de ajuns? In Fig 2.19 prezentam configuratia folosita de Millikan, in care va fi clar cit de mici sunt bucatile de materie frecate. Ea este in principiu usor de inteles. Avem astfel un pulverizator care produce picaturi de ulei. Datorita pulverizarii, unele picaturi se freaca de marginea orificiului de iesire, si se incarca (sau descarca) de electroni. Picaturile de ulei sunt apoi lasate sa cada liber intr-un lichid. Pe partea de sus si jos a vasului de lichid doua placi metalice au fost asezate, intre care o tensiune electrica poate fi aplicata cu ajutorul unei baterii. In acest caz, o forta electrostatica va actiona asupra picaturii, de preferabil in sus, opusa celei gravitationale. Daca tensiunea electrica este ajustata corespunzator, cele doua forte se vor echilibra si picatura va fi in echilibru:

$$qE = -Mg \quad (2.42)$$

Echilibrul se poate apoi observa mai bine cu un microscop atasat. Relatia de mai sus ne da imediat sarcina de pe o picatura, stiind masa picaturilor si presupunind ca masa electronului este mult mai mica decit cea a picaturii.

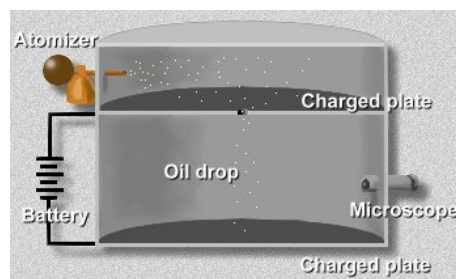


Figure 2.19: Experienta lui Millikan

First, Millikan had to find out the mass of the oil drops he used. This looks like a very difficult task, unless we see the magnitude of the oil drop directly. However, in his own words, Nature was very kind, and provided him with an indirect of measuring it. Thus, as the oil drop falls down in Fig. 2.19 we expect it to accelerate, according to Galileo's assumption. However, the air resistance plays here an important role. As the velocity of the oil drop increases, so does the resistance force. In fact, it was well known that this resistance force increases with the velocity, upon a formula given by Stokes:

$$F(v) = 6\pi r\eta v \quad (2.43)$$

Here η is the viscosity of the air and r is the radius of the oil drop. The viscosity is a known parameter, and amounted to about $\eta = 1.83610^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. At one point, the velocity of the oil drop will reach a value where the air resistance will equal the weight, and it will not increase any more. This is called terminal velocity v_m . At this moment the air resistance equals the weight, and we may write:

$$6\pi r\eta v_m = W = \rho \frac{4\pi r^3}{3} g \quad (2.44)$$

Here ρ is the mass density of the oil drop, and is also known, amounting to about $\rho = 896.0 \text{ Kg}/\text{m}^3$. For a better approximation, Millikan replaced ρ in the above formula with $\rho - \rho_{\text{air}}$, where $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ Kg}/\text{m}^3$ is the density of air. He took thus into

consideration the Archimede's principle, that says that an object immersed in a fluid (the air in our case) is lifted up by a force equal to the weight of the fluid displaced by the object.

The terminal velocity measured by Millikan is given in 2.20, as reproduced from the Nobel lecture he gave in 1924 upon receiving the Nobel prize. Taking into account the observation distance between the plates that was 13.03 cm, we see that the terminal velocity in the case of free fall was about $v_m = 1.082 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$. Replacing this into 2.44, we can then compute the radius of an oil drop, and get a value of

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_m}{2\rho g}} = 1.009 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1.009 \mu\text{m} \quad (2.45)$$

Mean times of rise in field (sec)	Divisors for speeds due to field	The elec- tron in terms of a speed
67.73	1	3.007
26.40	2	3.009
16.50	3	2.993
11.90	4	3.008
Mean time of fall under gravity 120.35		

Figure 2.20: The original results of Millikan, as presented by him at the Nobel lecture

The next thing to do would be, in principle, to put as much electrical voltage between the plates, as to keep one oil drop in equilibrium. This will insure that the electrical force will equal the weight of the oil drop, and from this we can measure the charge of the oil drop. However, practically, this is very difficult. Every time we put voltage on the plate, we will accelerate the oil drop one way or another, and it would be not easy to bring the oil drop to a halt.

A much easier approach is to consider what will happen in a presence of an electrical field oriented upwards as in the figure Fig. 2.20. In this case, we may lift up the particle. The particle will accelerate initially, but the air resistance will increase as well, and in the case as well the oil drop will reach a terminal velocity v_e . Then, the particle will rise up with constant velocity, and we may write:

$$qE - 6\pi r\eta v_e = W = 6\pi r\eta v_m \quad (2.46)$$

Now, remember, we expect to have discrete amounts of electrical charge q . In other words, we expect $q = n \cdot e$, where n is an integer, and e would be the elementary charge. From the above relation we have then:

$$v_e = \frac{n e E - W}{6\pi r\eta} = n \frac{v_m E}{W} e - v_m \quad (2.47)$$

If we keep the electric field E constant, and look imaginary at the evolution of oil drops in Fig. 2.19, we would see that there are different velocities v_e according to the charge q of each oil drop. But if the charge $q = ne$ is discrete, then we expect to measure a *discrete* set of velocities for the same electric field E ! And this is precisely what was measured by Millikan, as seen in Fig. 2.20.

In fact, from Fig. 2.20 we can now estimate the elementary charge e , using 2.47. Millikan used a voltage U up to 10 kV between the two plates separated at $d = 1.6 \text{ cm}$. This leads, according to our discussion around 2.10, to an electric field of $E = U/d$. As pointed out by him in his Nobel lecture, the electric field was *about* $E = 6000 \text{ V/cm}$, and "new in work of anything like this kind" in his own words. Using 2.47 and the observed first two velocities in Fig. 2.20, we obtain an electric charge of

$$e = \frac{W(v_2 - v_1)}{E v_m} = \frac{W}{E v_m} \left(\frac{1.303 \text{ cm}}{26.40 \text{ s}} - \frac{1.303 \text{ cm}}{67.73 \text{ s}} \right) = 1.75 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (2.48)$$

The modern accepted value for the electric charge is:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (2.49)$$

We close here, pointing out that the experiment of Millikan does not say anything about what is the elementary charge. We assumed that that was a particle (and not a property added to the matter), that we called an electron, but we have to show that experimentally, by extracting the electron from matter.

Masa electronului

Am vazut in experienta lui Millikan cum fluidul electric este compus din marimi discrete, pe care deja le-am denumit electroni, desi cel care le-a dat denumirea si i-a descoperit pentru prima oara este Joseph John Thomson (1856-1940), despre care vom vorbi aici. Spre deosebire de inaintasii sai, care au trebuit sa se multumeasca cu electronii mutindu-se de pe un material pe altul, dar niciodata liberi, Thomson i-a extras din materiale si i-a imprastiat prin aer! Instrumentul cu ajutorul caruia a realizat aceasta se numeste tub catodic si este prezentat in Fig.??.

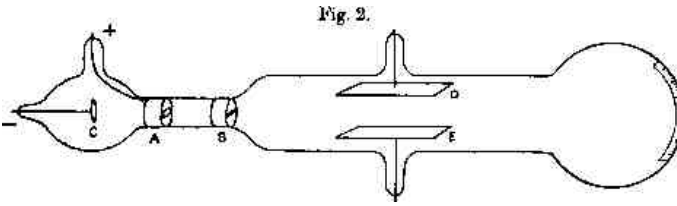
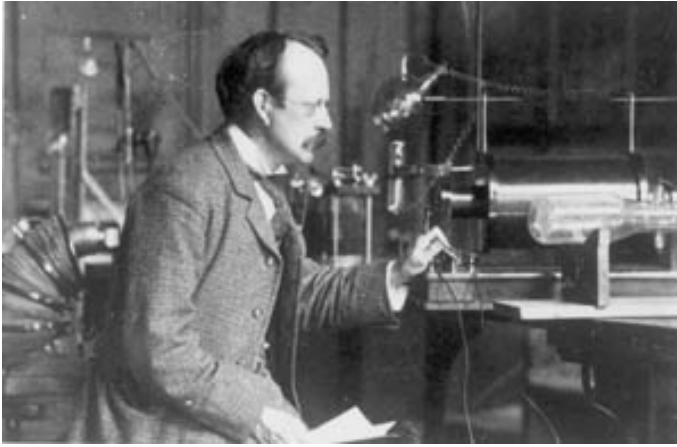


Figure 2.21: Top: A picture of J.J. Thomson in his lab. Bottom: A copy of the cathode ray tube used by him, reproduced from his original article from 1897

The instrument consist of a glass tube, partially evacuated, with two electrodes at the left side, denoted by C (from cathode) and A (from anode) in Fig. 2.21. If the electrodes are connected to a source of high electrical potential difference, a glow is to be seen around the cathode. Thomson assumed that this glow was produced by a flood of particles that were *extracted* out of the cathode by the electric field. In order to observe these particles, he extended the tube (see Fig. 2.21), and added a phosphoreus screen on the right hand side. With that screen he could measure the position of the impact of the particles, after these went through a small slit (denoted by S in Fig. 2.21).

In order to characterise these particles, Thomson addeed to more features: two additional electrodes inside the tube and a magnetic coil ¹ outside the tube (not shown in Fig. 2.21). The electric and magnetic forces created by these elements *deflected* the beam of particles coming from the cathod, and its deviation was observed and measured on the phosphoreus screen.

Deoarece aceste particule sunt deviate de cimpul electric, atunci ele trebuie sa fie incarcate electric. Thomson a presupus corect ca ei sunt *electronii* (carora le-a dat si numele), cele mai mici "bucati" purtatoare de sarcina electrica elementara. Experienta efectuata de el nu a putut insa determina direct sarcina electrica e a acestor particule, ci mai degraba raportul e/m dintre sarcina electrica e si masa electronului m . O valoare precisa pentru sarcina elementara a fost masurata insa mai tirziu de catre Millikan, asa cum am vazut in sectiunea precedenta.

The important factor in the experiment of Thomson is the *velocity* the electrons have after they are extracted and leave the left electrod's area, and enter the right hand side area (see Fig. 2.21). First he tried to obtain the velocity by measuring the increase in temperature of a body that is heated up by the impact of the released electrons on its surface. In his own words: "When these rays strike against a solid body, the temperature of the body is raised; the kinetic energy of the moving particles being converted into heat; if we suppose that all this energy is converted into heat, then if we measure the increase in the temperature of a body of known thermal capacity caused by the impact of these rays, we can determine W, the kinetic

energy of the particles". However, later he realised that by using the combination of the electric and magnetic field he could get this value as well.

Astfel, Thomson a efectuat in trei masuratori: una cu cimp magnetic, una cu cimp electric, si fara nici unul din ele. Cind nici un cimp nu e prezent, electronii selectati de "aperture" vor circula in linie dreapta catre marginea din dreapta a tubului, pe care se afla un material fluorescent. La impactul cu materialul fluorescent, lumina se emite, si astfel se poate afla pozitia nedeviată a "beamului" de electroni.

If we apply an electric field (to the right hand side of electrons in the Fig. 2.21!) we get a deviation that can be calculated from Fig. 2.22. This is because the electric field acts on the moving electrons with the force 2.5:

$$F = ma = eE \quad (2.50)$$

The electric field between the plates is calculated in the usual way (see also the previous section) as $E = U/d$ where U is the voltage between the plates and d is the distance between the plates. The angle θ of the deviation in Fig. 2.22 can be *measured* on the phosphorous screen, and also *calculated*, taking into account the length l of the electrodes.

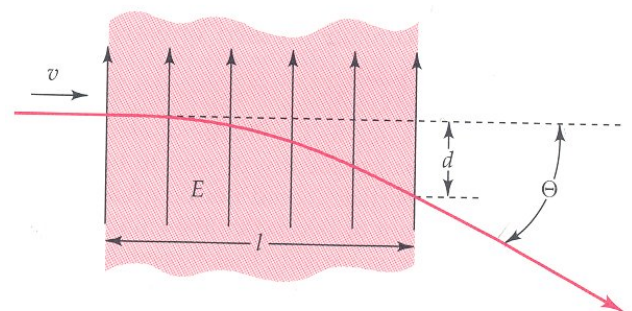
Thus, if the electrons have the velocity v , and it take them the time t to pass through the electrodes, we can write Newton's law in the two directions x and y as. On the x axis there is no force, and we have an uniform motion. On the y the motion is uniformly accelerated by the electric force (we neglect the gravitational force), and we can use the Galilei relation ?? for the distance traveled:

$$l = v_x \cdot t \simeq v_x \cdot t \quad (2.51)$$

$$y = a \frac{t^2}{2} = \frac{eE}{m} \frac{t^2}{2} \quad (2.52)$$

Here we assumed that the deflection is small, such that $v_x \simeq v$. The angle of deflection θ is then given by

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{l} = \frac{eE}{m} \frac{l^2}{2v^2} \quad (2.53)$$



Gas.	θ .	H.	F.	L.	m/e .	v .
Air	8/110	5.5	1.5×10^{10}	5	1.3×10^{-7}	2.8×10^9
Air	9.5/110	5.4	1.5×10^{10}	5	1.1×10^{-7}	2.8×10^9

Figure 2.22: Top: Bottom: PUNE

We can do the same type of calculus for only when the magnetic force is applied (Fig. 2.22). Here however, we have to use the Lorentz force 2.41 to calculate the deflection:

¹say what a coil is in a previous section, Biot Savart

$$F_m = ma = evB \quad (2.54)$$

where B is the the magnetic field. We get then the deflection in the magnetic field given by:

$$\phi = \frac{y'}{l} = \frac{evB}{m} \frac{l^2}{2v^2} = \frac{eB}{m} \frac{l^2}{2v} \quad (2.55)$$

As we can see, it was considered that the area on which the magnetic field acts is the same as the one on which the electric field acts, as shown in Fig. 2.22. Next, to ease the calculation, Michelson choose the electric and magnetic field in such a way as to have $\theta = \phi$. We can then eliminate v from the relation 2.53 and 2.55, to get

$$\frac{e}{m} = \frac{E\theta}{B^2 l} \quad (2.56)$$

In the Fig. 2.22 we present the original results obtained by Thomson, as given in his paper from 1897. In the International System of Units, this leads to a value of the above ratio of $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{C/Kg}^2$. Knowing now the value of the charge of the electron 2.49, we can compute its mass. The modern value is:

$$m_e = 9.10938 \cdot 10^{-31} \text{Kg} \quad (2.57)$$

In the course of the above presentation, we assumed rather abruptly that the particles we observe are universal, and they identify the electron. But this is not obvious from our discussion. Is the ratio e/m independent on velocity v , is it independent on the material? Here are the own words of Thomson that assure us that this is indeed the case:

"The results of the determinations of the values of e/m made by this method are very interesting, for it is found that, however, the cathode rays are produced, we always get the same value of e/m for all the particles in the rays. We may, for example, by altering the shape of the discharge tube and the pressure of the gas in the tube, produce great changes in the velocity of the particles, but unless the velocity of the particles becomes so great that they are moving nearly as fast as light, when other considerations have to be taken into account, the value of e/m is nearly constant. The value of e/m is not merely independent of the velocity. What is even more remarkable is that it is independent of the kind of electrodes we use and also of the kind of gas in the tube. The particles which form the cathode rays must come either from the gas in the tube or from the electrodes; we may, however, use any kind of substance be please for the electrodes and fill the tube with gas of any kind and yet the value of e/m will remain unaltered."

Nu ne putem opri sa facem aici citeva observatii cu privire la fotografia lui Thomson efectind unul din experimentele sale. In fata unei asemenea fotografii, cea mai mare parte din elevii unei clase are reactiunea: "asta e deja prea greu pentru mine, uite ce de fire si de tuburi are". Este de fapt o reactie naturala, pentru ca atita timp cit putem vedea cum pieptenele frecat atrage hirtuata, cum corpurile cad in jurul nostru, avem o intelegere mai facila a realitatii inconjuratoare, baza pe o experienta de ani de zile in care ne invirtim in ea. Pe de alta parte, lumea din jurul nostru este mult, mult mai complexa, cu elemente care sunt mult mai mici decit milimetrul si nu se pot vedea cu ochiul liber, cu mase mult mai mici ca gramele si nu se mai pot cintari in palma, si asa mai departe.

De aceea nu ne mai putem astepta ca sa avem access la intelegerea si cunoasterea acestor fenomene minuscule numai

cu experienta noastra cotidiana si cu instrumentele noastre naturale ca ochii, miinle. Pentru a avea acces la lumea microscopica avem nevoie de instrumente ajutatoare, care pot si (si sunt astazi) foarte complexe. Le putem privi in sa ca niste "ochelari" de vazut ceea ce in mod normal ne scapa. Cu toate acestea, fiecare experiment fizic facut astfel de instrumente exotice este nu mai putin "real" decit perceperea noastra a formei unui munte, sau a sunetului unei pasari. Este poate chiar mai "real" decit acestea din urma, caci ne ajuta sa "vedem" elementele de baza ale lumii in care traim, cele din care miinile noastre, si muntele, si pasarea sunt facute.

De aceea, orice cititor "speriat" de asemenea instrumente, este rugat sa nu renunte. Daca vreodata poate folosi un astfel de instrument, sa inceapa cu cele mai naturale intrebari: "ce masoara el?", "cit de mari sau mici sunt lucrurile sau masoara?", "unde-i e butonul care-l porneste?". Cit priveste lectura noastra, ea va fi din ce in ce mai plina de astfel de poze. Vom incerca in sa sa-l facem pe cititor sa inteleaga nu numai principiul in spatele acestora, dar si faptul ca acestea pot fi "pe bune" construite. Caci numai astfel putem intelege pe deplin straduinta omului de a cunoaste cit de poate de adinc lumea care il inconjoara.

2.2.2 Atomul

Marimea unui atom

In the previous section we have found one particle out of which matter is made, namely the electron. We saw it coming out of the matter (more precise from the cathode ray tube), and we know that it determines the electrical properties of the matter. However, we still have to adress the question of how the matter is made, what is it made of?

Pentru inceput am putem presupune ca ea este facuta dintr-o substanta continua, ca gelatina caci, daca noi oamenii nu putem s-o vedem oricum, de ce ar fi creat-o atunci Dumnezeu mai complicat? However, Democritus of Abdera (460BC - 370BC) did not quite agree with this idea. He asked this question: If you break a piece of matter in half, and then break it in half again, and again, do you eventually have to stop? In other words, can you break indefinetly the matter in half? Democritus thought that you should end at one point, by having the smallest possible bit of matter in your hand, which he called an atom. This you can not break further.

The atomic ideas of Democritus were not very welcomed by Aristotle, but anyway, without experimental facts, the proposal could remain only at the philosophical level. The first indication that Democritus might have been just right came from chemistry. Aici, un rol decisiv l-a jucat Joseph Proust (1754-1826). Pina la el, nu era clar daca nu cumva chimia e un soi de bucatarie: orice poate fi pus in oala, in orice proportii, si astfel putem obtine orice, in orice proportii.

Proust a argumentat ca daca in bucatarie putem obtine intr-adevar orice, in diverse proportii dorite de noi (chiar daca n-am numi rezultatul "mincare" intotdeauna), substantele chimice pure par sa contina numai *proportii de mase bine definite* ale materialelor constituite. Pentru a evita o eventual confuzie, subliniem ca nu toate produsele chimice ce le amestecam se vor si combina, generind alta substanta. Mai degraba, numai o parte din ceea ce amestecam va genera alta substanta, deci dupa reactie ramin si alte parti care nu se combina, ce sunt apoi date la o parte. Raportul *acestor* parti ce se amesteca este mereu *acelasi*, dupa cum a aratat Proust, si in plus *nu* poate lua orice valoare vrem noi.

For example, in any given sample of pure water, 88.8% of the mass will be Oxygen and 11.2% will be Hydrogen. We may

²verifica transformind CGS-ul lui Thomson

also think that any sample of the perfect cake is a precise proportion of the ingredients, so it does not look like Proust is saying more. However, Proust says more. He says that we can not make other water (or other *pure* substances) with *any* proportion of Oxygen and *any* proportion of Hydrogen we want. We may eventually make a substance with 5.6% of Hydrogen and 94.4% of Oxygen (called ³), but not with 50% of Hydrogen and 50% Oxygen for example. On the other hand, we may make a cake with ingredients in any proportions we want, and call that a "perfect cake".

Urmarind ideile lui Proust, John Dalton (1766-1844) a vazut ca aceasta *lege a proportiilor definite* poate fi explicata simplu si elegant in termeni de atomii lui Democritus. Daca atunci cind combinam doua substante, *precis m* atomi de la prima substanta se asociaza mereu cu *precis n* atomi de la a doua, atunci e natural ca substanta finala sa aiba mereu aceeasi proportie de masa din substantele initiale, si anume mM_1/nM_2 , unde M_1 si M_2 sunt masele celor doua tipuri de atomi (daca ei sunt diferiti). Ca o confirmare covirsitoare experimetala el a discutat situatia nitratilor, unde raportul proportiilor de sodium si oxigen poate fi exprimat mereu ca un raport de numere naturale m si n . Si astfel atomii lui Democritus si-au facut intrarea in lumea stiintifica, cu citeva presupuneri suplimentare facute de Dalton, cum ar fi faptul ca ei sunt eterni si nu se pot schimba din unul in altul.

Astazi noi luam in calcul aceste proportii atunci cind scriem formula chimica a substantei. For example, the formula for the nitrous oxyde is N_2O , and it tells us that each small unit of the nitrous oxyde (that is called a *molecule*) is made out of two atoms of Natrium N and one atom of Oxygen O . The mass proportions of the original ingredients N and O can be then calculated taken into account the masses of N and O , that are different.

Cit sunt insa atomii de mari? Pentru aceasta trebuie sa ne indreptam atentia asupra studiului gazelor, unde o observatie uimitoare a fost facuta de Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850), cind acesta a masurat *volumele* gazelor, si nu masele lor. Trebuie mai intii sa aratam cum putem masura volumul unui gaz, care se extinde mereu in incinta care i se pune la dispozitie. In cursul acestui proces insa, presiunea gazului si eventual temperatura lui *se schimba*. Principal vorbind, cind a masurat volumele gazelor, Gay-Lussac a *ajustat* volumul gazelor in asa incit sa aiba mereu aceeasi presiune si temperatura. La presiunea atmosferica normala si temperatura mediului ambiant, el a considerat volumul incintei continind gazul ca fiind volumul acelui gaz.

Masurind in acest fel *volumele* diverselor gaze, el a observat ca 2 litri de CO se combina cu 1 litru de oxigen ca sa formeze *tot* 2 litri de CO_2 ! Ciudat nu? Cu alte cuvinte, oxigenul adaugat a fost pur si simplu "absorbit" de monoxidul de carbon initial. Explicatia cea mai naturala a fost data de Amedeo Avogadro (1776 - 1856) in termeni de *molecula*: atomii celor doua substante cind se recombina formeaza un fel de atom mai mare, denumit *molecula* (mentionata mai sus in cazul N_2O). Din experientele lui Gay-Lussac putem deduce atunci ca un anumit volum de substanta gazoasa (fie ca e CO sau CO_2) are mereu *acelasi* numar de *molecula*!

Pentru a standardiza aceasta valoare, s-a luat in considerare numarul de molecule dintr-un gaz avind un volum de $V_{mol} = 22.4$ liters (aproximativ volumul a doua galeti), in conditii normale de presiune si temperatura. Acest numar este desemnat ca numarul lui Avogadro N_A , desi Avogadro insusi n-a stiut niciodata cam cit ar fi el de mare. Cantitea de un anumit tip de gaz care incapa in 22.4 liters se numeste *mol*. Cu alte cuvinte, desi un mol de substante diferite *cintarest* *diferit*, putem privi molul ca acea cantitate de un anumit gaz

care incapa in doua galeti, in conditii normale de presiune si temperatura. Gay-Lussac ne spune deci ca numarul de molecule dintr-un mol de gaz (sau din doua galeti de gaz) este acelasi (N_A) indiferent de tipul substantei.

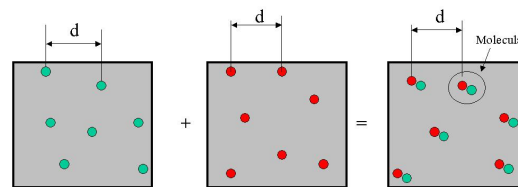


Figure 2.23: Avogadro: distanta dintre molecule e aceeași mereu.

Un alt fel de a privi aceasta lege (vezi Fig. 2.23) este sa observam ca moleculele sunt mult mai mici decit distanta intre ele, si aceasta distanta este, in medie (pentru ca intr-un gaz moleculele "alearga" prin spatiul dintre ele), *aceeasi pentru toate substantele* (in aceleasi conditii de presiune si temperatura). Cind doua substante se combina, noi molecule se formeaza, dar distanta (si deci volumul noi substante) ramine aceeasi. Aceasta este practic explicatia observatiei lui Gay-Lussac.

Problema razei aproximative a unui atom (sau a moleculei, caci ne intereseaza o valoare aproximativa) se poate reduce la problema distantei medii dintre moleculele unui gaz, facind urmatoarea deductie. Astfel, in gaze, moleculele sunt libere, iar intr-un solid sau lichid acestea sunt *impachetate strins*, unele linga altele. In gaze exista o distanta medie d intre molecule, pe cind in lichide aceasta devine chiar diametrul aproximativ al moleculei $2d$. Putem lua atunci cazul apei, si masura volumul ei in starea lichida si in starea gazoasa. Vom observa atunci ca volumul in care se cuprinde aburul de exemplu este de 1000 de ori mai mare decit volumul apei din care provine prin fierbere ⁴. Avem deci

$$\frac{V_{abur}}{V_{apa}} = \frac{(d/2)^3}{r^3} = 1000 \quad (2.58)$$

si deci raza propriu-zisa unei molecule de apa este cam $r \simeq d/20$. Observam ca daca am masura distanta universala d dintre molecule (ceea ce se reduce in fapt la masurarea numarului lui Avogadro), am putea afla apoi raza aproximativa r a unei molecule.

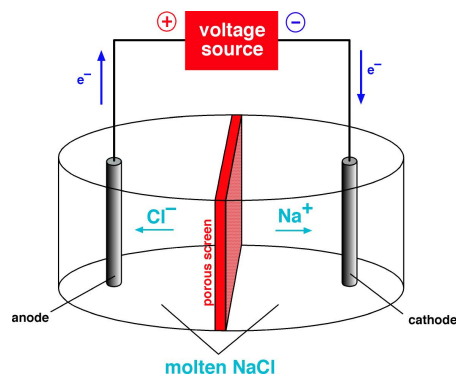


Figure 2.24: Electroliza sarii. Pune si un schech cu cum se pun electroniile componente

Pentru aceasta trebuie sa ne intorcem la Michael Faraday (1791 - 1867), si la experientele sale de *electroliza* (vezi Fig. 2.24). La inceputul secolului al XIX-lea, experientele au aratat ca diversi compusi chimici *diluati* intr-un lichid (ca sarea de exemplu) pot fi *descompusi* in componentele lor daca se

³pune ce e

⁴cine a masurat asta, tot Faraday?

trece un curent electric prin acel lichid. In urma acestui proces, *componentele se depoziteaza pe cei doi electrozi*. Fadaaday a observat ca *cantitatea de material depozitat este proportionala cu curentul aplicat si timpul cit acesta este sustinut*.

In virtutea celor discutate mai sus, vedem ca explicatia cea mai naturala a acestui fenomen este acumularea de electroni pe *una* din componentele substantei si golirea de electroni a *celeilalte* componente (vezi Fig. 2.24). Odata incarcate astfel cu sarcini pozitive si negative, cele doua componente *se separa* si sunt apoi atrase de catre cei doi electrozi (sau se evaporă). Vedem astfel ca, fata de incarcarea cu sarcini electrice ale betelor frecate folosite la inceput de Faraday, unde un anumit numar de electroni era distribuit in tot materialul, procesul de mai sus are un avantaj major: numai componentele incarcate cu sarcina electrica se aduna la electrozi!

Din valoarea masurata a curentului electric aplicat I si timpul t cit acesta este aplicat se poate calcula sarcina totala a materiei adunate pe unul din electrozi (cealalta trebuie sa fie egala si de sens opus) ca fiind $Q = I \cdot t$ (vezi formula 2.15). Apoi, materialul adunat pe electrozi poate fi indepartat si *cintarit*! Cum fiecare molecula a unui component este incarcata cu sarcina, raportul dintre sarcina totala Q si masa totala M este egal cu raportul dintre sarcina unei molecule si masa sa. Din discutia precedenta si din Fig. 2.24, vedem ca sarcina electrica a moleculei poate fi scrisa ca νe unde ν se numeste *valenta* moleculei.

Cu toate acestea, Faraday a utilizat rezultatele experientelor intr-un mod putin diferit, dar mult mai eficient. Astfel, el a masurat sarcina necesara pentru depozitarea unui *mol* de substanta (deci acea cantitate de material care evaporata s-ar cuprinde in doua galeti, si care are deci N_A molecule). Sarcina totala este atunci $Q_{mol} = N_A \cdot \nu \cdot e$, unde ν este valenta moleculei.

Deoarece el a obtinut pentru Q_{mol} valori *discrete*⁵, si stiind valorile valentei ν , el a intuit astfel ca sarcina elementara e este o constanta ce vine in marimi discrete (date de ν), dar nu a putut-o afla, pentru ca nu stia nici N_A , nici νe . Singurul lucru care l-a putut masura a fost sarcina aceluia mol de substanta impartita la valenta, care este $F = Q_{mol}/\nu = N_A \cdot e$. To his delight, a obtinut *aceeasi valoare pentru toate substantele*, si anume $F = 95485$ C/mol. Deci fiecare mol de substanta avind valenta $\nu = 1$ de exemplu, primeste mereu aceeasi sarcina electrica F . Lucru nu mai este de mirare acum, caci stim ca molul de substanta (doua galeti de gaz evaporat) are mereu acelasi numar de molecule N_A , *indiferent de tipul substantei*. Cum fiecare molecula primeste precis ν electroni, atunci este normal ca sarcina totala impartita la valenta $Q_{mol}/\nu = N_A \cdot e = F$ sa fie o *cosntanta* pentru toate tipurile de substanta.

Stiind sarcina unui electron din masuratorile lui Milikan (vezi 2.49) noi putem acum calcula numarul lui Avogadro N_A ca fiind

$$N_A = \frac{F}{e} = 6.23 \cdot 10^{-23} \text{ molecule/mol} \quad (2.59)$$

Volumul mediu ocupat de o molecula este atunci $4\pi(d/2)^3/3 = V_{mol}/N_A$. Folosind volumul unui mol $V_{mol} = 22.4$ liters (ce reprezinta in fapt definitia lui), obtinem atunci $d \simeq 40 \cdot 10^{-10} m$. Inlocuind in 2.58 obtinem o raza aproximativa a moleculor:

$$r \simeq *10^{-10} m \quad (2.60)$$

Cum o molecula are numai citiva atomi, aceasta poate fi considerata si raza aproximativa a atomilor. Vedem astfel ca un atom este de zece milioane de ori mai mic decit un milimetru, si intelegem astfel de ce nu il vedem cu ochiul liber.

De fapt, sarcina aceasta a fost asa de dificila, ca o imagine directa a atomilor a fost obtinuta abia in 1983 de catre Heinrich Rohrer and Gerd Binnig. Cei doi au primit premiul Nobel in fizica pentru acest rezultat. In Figura 2.25 prezentam o imagine directa a atomilor de pe suprafata unui cristal de MoO_3 . Tehnica folosita pentru achizitionarea acestor imagini, si care se numeste Atomic Force Microscopy, este schitata tot in Fig.2.25. Here, a very sharp tip of a cantilever is touching the surface we want to investigate. As the tip is scanned across the surface, it is deflected as it moves over the surface corrugation. The deflection is measured by a laser, as we can see in Fig.2.25. We mention only that the principle of AFM is very simple. However, the construction of the device imposed many technical challenges, that could be solved only at the end of the twentieth century.

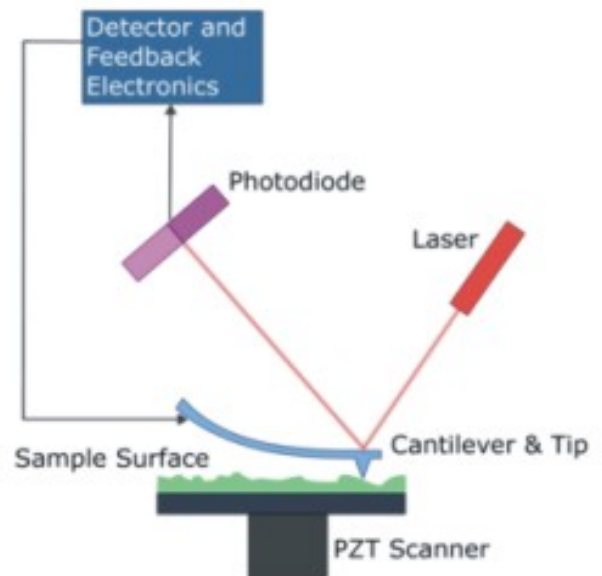
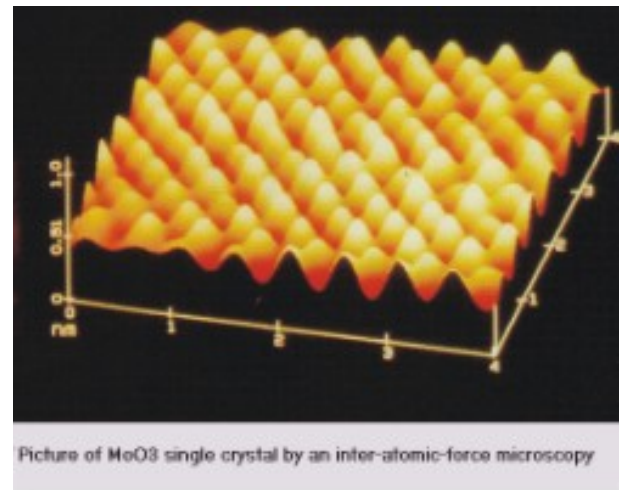


Figure 2.25: Top: Picture of MoO_3 single crystal by an atomic force microscope (AFM). Bottom: The shematic picture of an AFM

In continuare, putem estima *masa* unui atom din densitatea materialelor solide sau lichide, daca facem presupunerea corecta ca atomii sunt impachetati strins unul linga altul. Sa luam din nou cazul apei. Astfel, daca privim la moleculele de apa, deoarece acestea sunt perfect impachetate in forma lichida,

⁵(de verificat)

putem folosi densitatea medie de masa. Pentru apa, aceasta este $\rho = 1 \text{ Kg}/1 \text{ dl} = 10^{-3} \text{ Kg}/\text{m}^3$. Masa unei molecule de apa de vine atunci:

$$m \simeq \rho \frac{4\pi r^3}{3} = 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \frac{4\pi (10^{-10} \text{m})^3}{3} \simeq 3 \cdot 10^{-27} \text{Kg} \quad (2.61)$$

Vedem astfel ca masa unei molecule (sau echivalent a unui atom) este de mii de ori mai mare decit cea a unui electron, data de 2.57. Aceasta justifica pe de o parte presupunerea lui Millikan, care nu a luat in calcul masa electronului in relatiile 2.44. In plus, lucrul acesta este exprem de important daca vrem sa gasim structura atomului, asa cum vom vedea in sectiunea urmatoare.

Structura atomului

Dupa cum am vazut, electronii incarcati electric negativ sunt o parte a atomilor. Deoarece insa atomul in totalitate este neutru, el trebuie sa contina si o alta parte care are sarcina pozitiva. Aceasta (care se numeste *nucleu*) trebuie sa compenseze sarcina negativa data de electronii care intra in compozitia atomului. Pe de alta parte, masa atomului pare sa fie *mult mai mare* ca cea a electronului (cam de o mie de ori). Cum insa el are numai citiva electroni, nu ramine decit ca masa nucleului pozitiv este mult mai mare ca a electronului. Cum sunt insa aranjate aceste parti in atom, iata intrebarea la care trebuie sa raspundem acum.

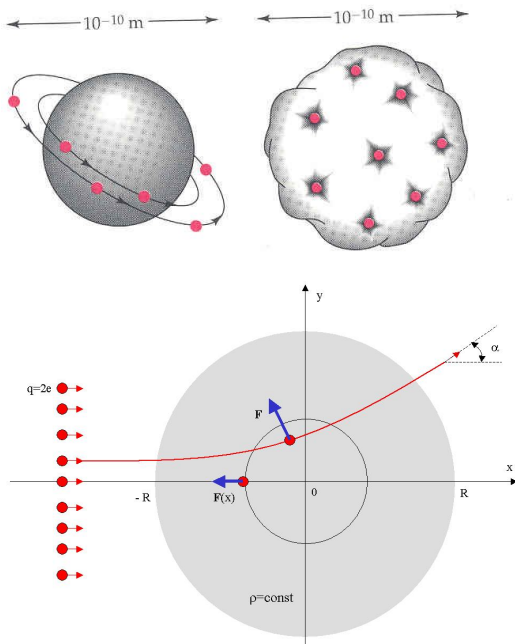


Figure 2.26: Rutherford

La timpul la care aceste idei se formau, doua propuneri au facute care merita sa fie luate in considerare. Prima, facute de Thomson, spunea ca electronii sunt imprastiati in materialul incarcat pozitiv ca niste bomboane in coliva (vezi Fig 2.26). A doua, facuta de Hantaro Nagaota, semana cu sistemul planetar (vezi Fig 2.26): electronii se invirteau in jurul unei mase mari de sarcina pozitiva, fiind atrasa de ea, precum planetele in jurul Soarelui. In ambele insa volumul sarcinii pozitive era *mare*, cuprinzind *tot* spatiul atomului.

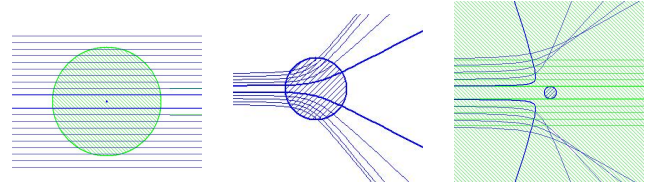


Figure 2.27: Simulatii pentru imprastierea nucleelor de Heliu-pune scala!.

Hoewver, not much after that, another physicist, Rutherford, was obtaining some very intriguing results. Impreuna cu studentii sai Geiger si Marsden, el a efectuat experiente de imprastiere cu nuclee de Heliu (care sunt atomi ionizati de Heliu ce au pierdut cei doi electroni ai sai) pe niste foite subtiri de Au ($0.6\mu\text{m}$), pentru a verifica modelul lui Thomson. In other words, he was sending a beam of Helium ions towards this foil of gold, and was measuring in which direction were the helium ions scattered by the gold foil. The intriguing result was that the helium ions were scattered much more than he was expecting. To see why, let us follow his line of thought.

Intr-o prima instanta, Rutherford a presupus ca partea pozitiva a nucleului de Au are dimensiunea de 10^{-10}m (filling thus the whole atom) si sarcina distribuita uniform in volum. Cum masa atomica a atomului de aur ($A_{Au} =$) este mult mai mare decit cea a atomului de heliu ($A_{He} =$), se poate presupune intr-o prima aproximatie ca nucleul de He este punctiform.

In figura Fig. 2.26 vedem schematic ce se poate intimpla cind ionul pozitiv de Heliu se apropie de un nucleu avind raza R si incarcat uniform tot cu sarcina pozitiva (electronul a fost indepartat din figura, deoarece masa lui este de mii de ori mai mica ca a atomului de heliu, si de deci probabil va fi "maturat" de ionul de Heliu). Apropiindu-se de nucleu, ionul de He va fi respins cu o forta electrostatica $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ orientata dinspre centrul nucleului. Cazul extrem, cind ionul ar putea fi chiar intors din drumul lui, este cel in care ionul de Heliu se indreapta direct inspre centrul atomului.

In acesta situatie exista doua posibilitati. Daca ionul de heliu are energie mare, el poate invinge treptat forta de repulsie, ajunge la centru, si merge apoi mai departe impins chiar de la spate. Daca energia lui e mica, el va fi oprit pina sa ajunga la centru, si apoi impins inapoi. Aceasta *energie critica* pe care ar avea-o nevoie ionul sa depaseasca nucleul poate fi calculata ca lucrul mecanic efectuat pentru a invinge forta $\mathbf{F}(x)$ de la $-R$ la 0 . Aceasta forta electrica de respingere este $\mathbf{F}(x) = 2e\mathbf{E}(x)$, unde $2e$ este sarcina ionului de Heliu, $\mathbf{E}(x)$ cimpul electric dat de nucleu. In Ex. 2 we propose an exercise that calculates this electric field:

$$E(x_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx_0}{R^3} \quad (2.62)$$

Vedem astfel ca cimpul electric $E(x)$ se apropie catre zero in centru, si deci si forta de repulsie asupra ionului de He va fi din ce in ce mai mica (spre deosebire de sarcina *punctuala* unde ar fi crescut la infinit). Lucrul mecanic efectuat de un eventual ion central sa ajunga la centru va fi deci:

$$L = \int_{-R}^0 F(x)dx = \int_{-R}^0 (2e) \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{R^3} dx = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(2e)Q}{R} \quad (2.63)$$

Vedem astfel ca energia minima $E_{min} = L$ a unui ion de Heliu sa treaca de centrul atomului si sa-l depaseasca astfel creste invers proportional cu raza atomului. Cu alte cuvinte, cu cit mai "labartat" este atomul (R mai mare, dar finit!), cu atit este mai usor pentru ionul de heliu sa treaca de el. In modelul atomic al lui Thomson (vezi Fig. 2.26) putem acum estima energia ionilor (si deci viteza lor cu $E_{min} = mv_{min}^2/2$, unde m

este masa ionului de He) pentru a putea trece de dincolo de centrul atomilor:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(2e)Q}{mR}} \simeq 200 \text{ km/s} \quad (2.64)$$

Ionii de He folositi de Geiger si Marsden proveneau de la o sursa radioactiva, si aveau vitezele masurate inainte de aproximativ 15000 Km/s, deci mult mai mari decat viteza minima calculata in modelul de mai sus! Datorita acestui lucru, toti ionii de He ar putea traversa atomul in modelul lui Thomson, fiind eventual deviati putin.

We may wonder however how much are the ions deviated by successive atoms. We can estimate this as well by estimating first the maximum deviation of a single atom, and then using the numbers of layers of atoms in the gold foil used in the experiment.

For a single atom of gold, unghiul *maxim* de deviere maxima se estimeaza daca observam ca acesta se realizeaza pentru ionii care se indreapta spre marginea atomului (vezi si simulatia efectuata in Fig. 2.27). Aici forta de respingere *in directia verticala*, data de $F(R) = (2e)E(R) \simeq R$ (vezi 2.62) in modelul lui Thomson, este maxima. Aceasta devine aproximativ $F \simeq (2e)(79e)/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Ea actioneaza aproximativ cit timp t ionul de heliu se afla in apropiere, adica $t \simeq (2R)/v$, unde v este viteza ionului. Impulsul astfel primit in directia verticala este aproximativ $m\Delta v \simeq F \cdot t$. Unghiul de deviatie se calculeaza atunci cu

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta v}{v} = \frac{F \cdot t}{mv} \simeq \frac{2R}{mv^2} \frac{(2e)(79e)}{(4\pi\epsilon_0 R^2)} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \quad (2.65)$$

Obtinem astfel $\alpha \simeq 0.01^\circ$, ceea ce este o valoare extrem de mica. In Fig. 2.27 prezentam deasemenea simulatia ionilor de Heliu imprastiati astfel de modelul virtual al lui Thomson, dar unghiul de deviatie este astfel atit de mic (0.01°) ca ionii au traiectorii aproape nedeviate. Cum folia de aur folosita de Rutherford avea $6 \cdot 10^{-7}m$, care are cam 10000 de straturi succesive de atomi, putem deasemenea vedea cu ajutorul rezultatului de mai sus ca valoarea maxima de deviatie a unui vreunui ion ratacit de He care tot nimereste la marginea dreapta atomilor pe care-i intilneste este de $10000 \cdot 0.01^\circ = 10^\circ$. Evenimentul acesta ar fi insa foarte, foarte rar.

Vedem astfel ca, daca modelul lui Thomson cu sarcina distribuita uniform pe toata raza atomului $R = 10^{-10}m$ este adevarat, atunci electronii proiectati de sursa radioactiva cu viteza de $v = 15000 \text{ Km/s}$ pe folia subtire ($6 \cdot 10^{-7}m$) de aluminiu trebuie sa treaca "ca prin brinza". Nici macar unul din ei nu trebuie sa fie deviat mai mult de 10° . Nu mica a fost atunci mirarea cind Rutherford si colaboratorii sai au observat ioni de heliu nu numai imprastiati in toate directiile, dar chiar trimisi inapoi, intr-un numar foarte mare (de 1 la 8000)!

Presupunind ca ionii trimisi inapoi provin de la interactia cu un singur atom, vedem atunci ca explicatia cea mai naturala a acestei "intoarceri" este faptul ca sarcina nucleului nu este "labartata" pe toata dimensiune atomului, ci concentrata intr-un *volum mai mic*, de raza R_N . Pentru ion este atunci mult mai dificil sa traverseze nucleul, cum am discutat mai sus. Deoarece R_N este mai mic acum, el are nevoie de o viteza minima mai mare 2.64 ca sa-l traverseze. The question is now, what would be the radius R_n such that even the electrons with the speed of $v = 15000 \text{ Km/s}$ are turned back? Aceasta valoare pentru R_{Nmax} o putem estima inversind 2.64 si folosind viteza experimentală v a ionilor!

$$R_N < R_{Nmax} = \frac{2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{mv^2} \simeq 2 \cdot 10^{-14}m \quad (2.66)$$

In other words, the radius of the nucleus must be *at most* $R_N \simeq 10^{-14}m$ in order to be able to send back the very energetic ions Rutherford used in his experiments. Presupunind o raza a nucleului de $R_N \simeq 10^{-14}m$, Rutherford a fost in stare nu numai sa explica de ce ionii sunt intorsi, dar si sa fiteze distributia lor unghiulara.

In trecere, sa observam ca numai 1 din 8000 din ioni sunt intorsi, datorita faptului ca exista foarte mult *spatiu gol* in atomul de raza $R \simeq 10^{-10}m$, si deci multi ioni vor trece nedeviate. This observation is by itself very surprising and with reach consequences in astrophysics. That means that the matter as we know it is made up to $10^{-13}\%$ by empty space!

In alta ordine de idei, Rutherford a fost norocos cu alegerea energiei ionilor (maximul ce se putea avea in acele vremuri) pentru ca, daca ar fi avut viteze mai mari, ar fi observat deviatii de la distributia unghilara prezisa a ionilor imprastiati. Motivul e ca raza nucleului este chiar aproximativ $R_N \simeq 10^{-14}m$, iar vitezele mai mari ar fi "probat" structura interna a nucleului, dupa cum se si efectueaza in experientele contemporane.

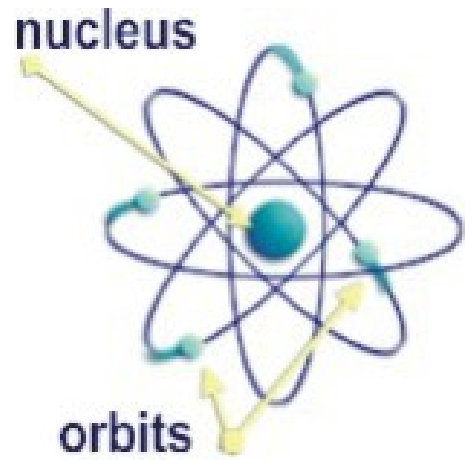


Figure 2.28: The classical model of the atom

How does an atom look like? Cum modelul lui Thomson s-a dovedit gresit, Rutherford a adoptat modelul lui Nagaoka (vezi Fig. 2.26), in care a plasat insa nucleul intr-o regiune foarte mica, de raza $R_N \simeq 10^{-14}m$. Ca atare, acest sistem este acum foarte apropiat de sistemul planetar. Pentru atomul de hidrogen de exemplu (cel mai simplu) nucleul pozitiv atrage electronul incarcat negativ, si il determina pe acesta sa evolueze pe orbite eliptice in jurul lui. Orbitale eliptice ar fi cele mai generale, si nu ar necesita o potrivire "perfecta" a vitezelor, dupa cum am discutat in capitolul de mecanica.

Intr-o eventuala aproximatie circulara a acestor orbite, am putea presupune ca electronul se afla la distanta $R \simeq 10^{-10}m$ fata de nucleu (in felul acesta el defineste "marginile" atomului). Intr-un mod asemanator sistemului planetar, evaluam viteza electronului

$$\frac{m_{el}v_{el}^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.67)$$

obtinind o viteza de $v \simeq 10^6 m/s$. Frecventa de rotatie a electronului va fi atunci $f = v/(2\pi R) \simeq 10^{15} s^{-1}$, o cifra foarte mare.

Acest model are un bonus neasteptat. Astfel, in sectiunea dedicata cimpului magnetic am observat ca nu au fost observati monopoli magnetici si ca, la sugestia lui Faraday, cimpul magnetic observat in magnetii permanenti este datorat unor curenti interni unor materiale, care persista un timp foarte indelungat. Modelul atomic de mai sus ne ofera acei curenti: din moment ce electronul se invirte in jurul nucleului, el creeaza in fapt un

curent electric, care la rindul lui creeaza un cîm magnetic! And because the electron probably does not stop from his orbital motion (like the planets do not stop from their), we can also suppose that the magnetic field is lasting for long, as it is the case with magnets. We may of course ask ourselves why not all materials are magnets then, since any atom is by itself a small magnet. The answer to this question has to do with the *orientation* of the atoms inside the materials. For example, in a gas, atoms are orientated randomly, and the *cancels out* the magnetic field **B** that must be added from all the atoms.

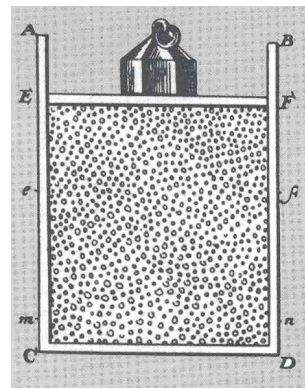


Figure 2.29: Bernoulli. Pune si o molecula + explicatii + deden molecule in miscare

2.2.3 Forme de materie

Am mentionat in primul capitol ca mecanica nu poate da o explicatie de ce corpurilor solide sunt compacte. Forta de atractie gravitationala intre doi atomi este prea mica pentru a-i tine impreuna, si acest lucru il putem intelege usor daca observam ca doua bucati de pahar spart nu se mai atrag apoi la loc. In acest capitol am vazut deja ca electromagnetismul explica in parte structura atomului, si vom vedea aici ca el explica, tot in parte, si unele forme de materie.

De aceea vom continua aici cu o mica sectiune despre cum este ordonata materia (formata din atomi) care ne incojoara. Vom aborda insa numai subiectele principale, pentru a ne forma o idee despre cit de important este electromagnetismul in jurul nostru si pentru a fi in stare sa recunoastem prezenta lui atunci cind privim "diferit" obiectele din jur.

Daca cititorul vede ca anumite exemple nu pot fi explicate deloc cu ajutorul electromagnetismului (sau prezinta inconsistente), el nu trebuie sa se descurajeze, caci in acele probleme apar simburii teoriilor viitoare. Caci, dupa cum nici o teorie nu este inca finala, in sensul de a explica tot, nu ne putem astepta la asa ceva nici din partea electromagnetismului.

Gaze

Dupa cum am amintit in sectiunile precedente, elementul fundamental al gazelor este *molecula*. Cumva, unor atomi le place sa se "lipeasca" unii de altii formind o molecula. Avem molecula de oxigen O_2 formata din doi atomi de oxigen, sau molecula de apa H_2O formata din doi atomi de hidrogen si unul de oxigen. Fiind impreuna, acesti atomi impartasesc o parte din electroni, iar nucleii lor, fiind de zece mii de ori mai mici decit atomii (dar avind masa mult mai mare decit a electronilor), isi aleg anumite *pozitii preferentiale* (vezi Fig....pusa mai devreme).

Gazul este atunci un spatiu gol umplut de astfel de molecule, care se situeaza la o distanta suficient de mare unele de altele, in asa fel incit ele pot fi privite ca niste "bile". Pe deasupra, datorita miscarii termice, aceste "bile" se ciocnesc unele de altele in miscarea lor haotica. Aceasta este in principiu toata "imaginea" clasica a gazului.

Cele mai importante proprietati se deduc dintr-o singura ecuatie, dedusa de Daniel Bernoulli (1700-1782). Astfel, Bernoulli a considerat un volum de gaz "astupat" cu un capac pe care sta o greutate (vezi Fig. 2.29, unde prezentam schema originala a ideii lui Bernoulli). Presiunea gazului e echilibrata la un moment dat de greutatea asezata.

Bernoulli a presupus corect ca aceasta presiune a gazului e data de ciocnirile permanente pe care moleculele le efectueaza cu capacul. O singura molecula ar avea in principiu 6 directii de micare (sus-jos, stinga-dreapta, fata-spate). Daca N este numarul total de molecule din vas, in orice moment $N/6$ molecule se indreapta catre capac. Moleculele se tot ciocnesc intre ele, si vor avea astfel multe viteze diferite, dar putem presupune ca ele au *in medie* viteza v . Daca H este inaltimea vasului, atunci intr-un timp $\Delta t = H/v$, toate moleculele care merg in sus (adica $N/6$) vor fi ciocnit capacul *o singura data*.

Impulsul total dat capacului in acest timp Δt va fi atunci $\Delta P = N/6 \cdot 2mv$ (unde impulsul cedat de o molecula gazului est $2mv$ pentru ca moleculele dupa ciocnire se intorc in jos cu aceeasi viteza). Conform..., forta medie F cu care aceste molecule actionaza asupra capacului va fi impulsul impartit la timp, obtinind astfel dupa inlocuiri $F = \Delta P / \Delta t = Nv^2/3H$. Presiunea exercitata atunci de gaz inspre capac este $P = F/A$, unde A este aria capacului. Daca inlocuim in relatia de mai sus, si utilizam volumul gazului dat de $V = H \cdot A$, obtinem relatia:

$$PV = \frac{2}{3} N \frac{mv^2}{2} \quad (2.68)$$

unde am separat intre paranteze energia cinetica medie a unei singure molecule. Aceasta singura formula descrie aproape complet comportarea asa-numitelor *gaze ideale*. In realitate *gazele reale* au tot felul de alte artifacte, ce tin de tipul moleculelor, regimul de lucru, etc, dar cu toate acestea formula precedenta s-a dovedit destul de buna. In plus ea ne faciliteaza intelegerea fenomenelor.

Astfel, termenul dat de *energia medie* a moleculei se asociaza imediat temperaturii. Motivul este ca atunci cind doua gaze sunt amestecate, sau aduse in contact printr-un perete subtire, ele isi egalizeaza automat *energiile medii* ale moleculelor (si *nu* vitezele lor!) in timpul nenumaratelor ciocniri, precum stim ca se intimpla cu temperatura lor.

Ce este mai ciudat, este ca relatia dintre temperatura masurata cu un termometru obisnuit cu mercur si energia medie se dovedeste a fi uimitor de simpla:

$$kT = \frac{2}{3} \frac{mv^2}{2} \quad (2.69)$$

unde k este o constanta universală, numita constanta lui Boltzmann, iar temperatura T (definită în grade Kelvin) este $T[K] = 273.15 + T[^\circ C]$. Este desigur de mirare cum o mărime (ca temperatura), ce pare arbitrar definită, să aibă o așa de simplă relație cu o cu totul altă noțiune (ca energia medie a moleculelor). Dacă temperatura obiectelor ar fi fost definită inițial altfel, de exemplu ca puterea strigatului de durere la atingerea unui obiect fierbinte, ori ca schimbarea în culoare a vreunei substanțe, relația de mai sus n-ar fi fost așa simplă. Cu toate acestea, această relație se explică prin alegerea instrumentului cu care noi definim temperatura, și anume termometrul cu mercur. Acesta se bazează pe un un material (mercur) care se dilată, urmînd o relație asemănătoare 2.68). Aceasta conduce la simpla relație 2.

Viteza medie a moleculelor de oxigen din aer poate fi acum estimată din 2. Înlocuind masa oxigenului și temperatura mediului ambiant, obținem o viteză foarte mare a moleculelor:

$$v_{O_2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{O_2}}} \simeq 50 \text{ Km/s} \quad (2.70)$$

Nu trebuie însă să ne imaginăm ca ele chiar merg 50 Km în linie dreaptă, pentru că se ciocnesc foarte repede unele de altele, pe distanțe mai mici de un micrometru!

Relația 2.68 ne aduce și un bonus neașteptat, și anume numărul lui Avogadro 2.59. Astfel, ea ne dă numărul de molecule ce se află într-un mol de gaz V_{mol} , la temperatura normală T_{aer} , și la presiune atmosferică p_{atm} . El este: $N_A = P_{atm} V_{mol} / k T_{aer}$. Pe de o parte, vedem că acesta este același indiferent de gazul ales, lucru pe care nu l-am putut explica cînd am discutat numărul lui Avogadro N_A . În al doilea rînd, această relație poate fi utilizată pentru aflarea constantei lui Boltzmann k , caci P_{atm} , V_{mol} și T_{aer} sunt cunoscute.

Cum am menționat, cele mai multe comportări ale gazelor pot fi înțelese pe baza argumentelor de mai sus, dar asta nu înseamnă că ele pot și rezolvate mereu. Complexitatea care poate apărea de la ecuația simplă 2.68 este asemănătoare cu cea ridicată de la simpla ecuație a lui Newton, atunci cînd mai multe corpuri sunt luate în considerare. În cazul gazelor cel mai bun exemplu sunt fenomenele meteorologice care nu pot fi ușor prezise, deși noi stim ecuațiile de bază ce le determină.

Solide cristaline

Materialele solide sunt poate cel mai puțin explicabile în termenii clasici. Motivul este că în ele atomii sunt "împachetați" foarte bine unul lângă altul, iar temperatura este scăzută, în așa fel încît atomii nu au suficientă energie să se poată mișca în voie. Iar cu cît temperatura devine mai scăzută, cu atît proprietățile mai "ascunse" ale atomilor (ca cele cuantice) vor juca un rol din ce în ce mai important. Cu toate acestea, o parte din proprietățile solidelor se poate explica de către electromagnetism, macar în principiu.

Un exemplu clasic este sarea (vezi figura 2.30). Aici atomii se pastrează compacti și frumos ordonați printr-o metodă foarte "ingenioasă". Astfel, un electron de pe cite un atom de Na preferă să plece și să stea pe cite un atom de Cl. Între ioni astfel creați există desigur legături de atracție, pentru că ei sunt încarcați cu sarcini opuse! Iar această legătură electrostatică de atracție este suficientă să țină atomii împreună. Cristalele astfel formate de acest tip se numesc cristale ionice, dar nu neapărat toate cristalele sunt ionice. Motivul este că, pentru ca electronul să poată "pleca" de la atomul de Na, lui îi trebuie o anumită energie, caci e atras de nucleul pozitiv. Această energie trebuie să fie cel puțin compensată de cea de atracție dintre ioni astfel formați, pentru ca cristalul să existe. Se vede

astfel că astfel de cristale nu pot conduce electricitate, caci electronii trebuie să stea pe atomii de Cl pentru a păstra cristalul intact.

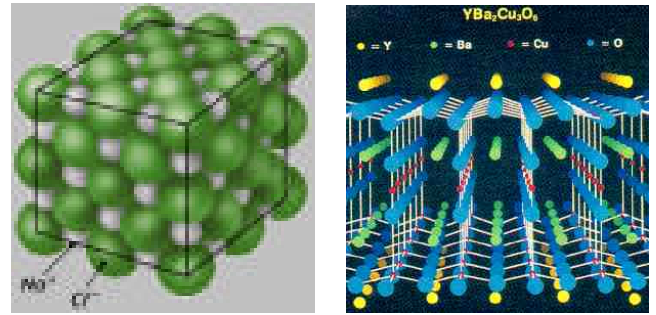


Figure 2.30: Singa: structura sării NaCl. Dreapta superconductor. distanțe. imagini artistice. Atomii nu sunt în realitate colorați!

Alte cristale sunt însă metalice, ca aurul de exemplu. Aici deși nucleele atomilor formează structuri ordonate, o parte din electroni par că se plimbă *liberi* prin cristal precum moleculele de gaz în volumul lor! De aceea aceste cristale conduc electricitate. Ce țin însă atomii împreună? Ei bine, chiar acești electroni, care formează un fel de lipici între atomi. Explicația acestui "lipici" nu poate fi însă dată clasic, ea este de natură cuantică, dar cu toate acestea multe din proprietățile metalului astfel format pot fi apoi înțelese clasic.

În Fig.2.30 prezentăm spre exemplificare un alt cristal, și anume superconductorul $Y_x b c o$, și care poate fi privit pentru temperaturi sub 100 K ca un "supermetal". În el, unii dintre electroni sunt atât de liberi, încît par că nici nu se mai ciocnesc între ei sau cu nucleele atomilor, și astfel materialul conduce electricitatea fără pierderi. De ce electronii se comportă astfel în acest material nu se știe încă nici astăzi.

O să întrebăm desigur, dar de ce atomii se atrag în astfel de cazuri în structuri atât de perfecte? Răspunsul este simplu. Încercați să magnetizați niște monede de același fel și apoi lasați-le să se atragă. Nu-i așa că obțineți o structură hexagonală ca în problema celor 3 monede a lui Titeica? Tot astfel și atomii de același tip, fiind *perfect identici* inițial, vor forma structuri regulate compactate împreună. De fapt structura regulată a cristalelor formează o evidență directă că toți atomii de același tip sunt identici.

Lichide

In order to have an idea how the atoms interact with each other, we have shortly mentioned two states of matter, the gases and the solids. To complete the picture, we add here the *liquids*.

As we have seen in the case of the gases (see 2), the temperature T of a gas is connected with the average energy of the molecules. In fact, by varying the temperature, one can have some solids (like water) transform through all the three states of matter. The easy explanation is that, as the temperature increases, so does the thermal motion of the molecules, breaking up the bonds that are created at lower temperature.

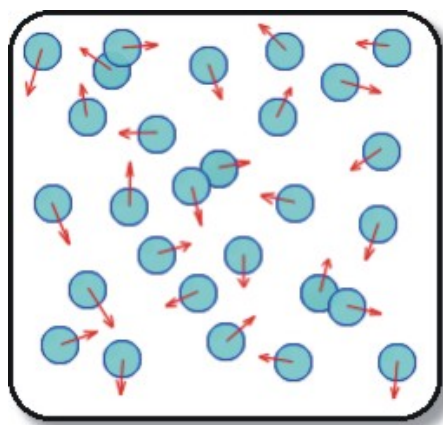


Figure 2.31: The atoms in a liquid slide around each other

In that sense, the liquids are intermediate states between the solids and gases. In the liquids (see Fig. 2.31) the thermal motion is not high enough to completely separate the molecules (like in gases), but high enough to allow the molecules *to slide around each other*, always touching each other as in the case of solids. That is why the liquids keep always the same volume, but can flow, be poured, and spilled.

Materie biologica

Desigur ca atomii se pot ordona si in alt mod decit cele trei posibilitati prezentate mai sus. Poate ca cel mai spectaculos mod suntem noi insasi. Facuti din miliarde si miliarde de atomi, aproape fiecare atom din corpul nostru isi are cite o functie. Si este ciudat cum, desi corpul nostru se foloseste aproape de fiecare din acesti atom sa traim, noi nu le cunoastem functiile, iar in viata cotidiana nici nu le realizam existenta. Daca cineva ne-ar da toti atomii de care am avea nevoie, unul cite unul, si un pistol de lipit si ne-ar zice: "Acum fa-i un om", desigur ca am ramine in imposibilitate de a face ceva. Dar nu este mai putin adevarat ca multe din aspectele corpului uman le intelegem astazi.

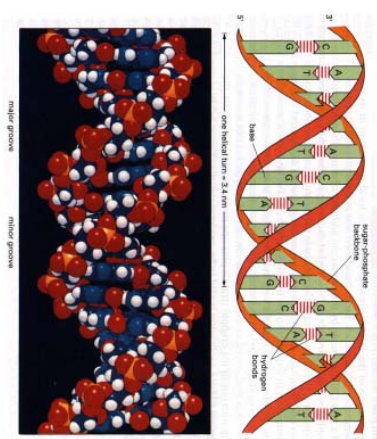


Figure 2.32: ADN

Out of the biological type of matter, two examples come preeminently out: the DNA (see Fig. 2.32) and the proteins (see Fig. 2.33). The DNA stores *the information* about the biological body, and the proteins *execute* the type of information written in the DNA. In opposition to the type of matter presented up to now, the biological matter is not ordered (like the

crystals), but rather *complex*. What what we mean is that it has such a structure where we can understand how its small bits work, but not the whole unsamble. You can understand that this is not the case of a solid, where we (in general) understand the whole ensamble, because of the regular structure.

The huge *complexity* of the biological structure became obvious especially in the last decenia. Here, the completion of the Human Genome (the complete mapping of the human DNA) in 199... played a very important role. It is probably known to the reader that every small part of the human body is a small machinery (think of the eye, the blood cell, the cell, etc.). The imediate question raised then was if such a complex structure as a human body could be a *consequence* of the fundamental laws of physics.

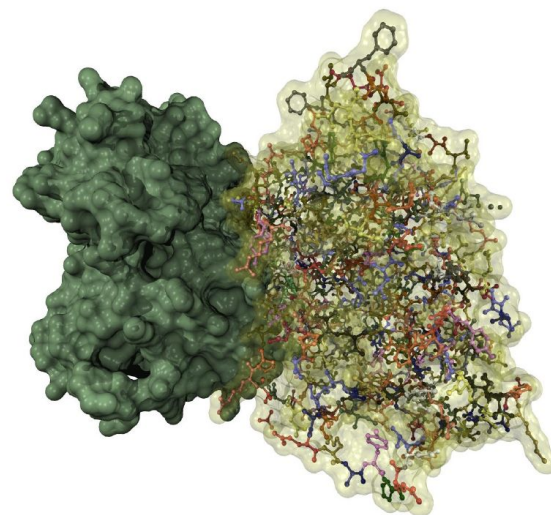


Figure 2.33: Tubulin Protein

This question has now two main answers. First, is the *evolution theory* of Darwin, that gives a positive answer. It boils down in saying that there were bilions and bilions of trials out there in the Universe, and the human body is a happy result of one of these trials. In other words, if you play bilions of years at the lottery, you may win some day. Darwin discovered also a mechanism, called "the survival of the fittest", that helped the evolution, but his theory remains essentially a chance theory.

The followers of the other main stream, called *intelligent designed*, argue the complexity is so huge, that even given the billions of bilions of trials is still not sufficient to make a human body by chance (even with the addition of Darwin's mechanism). In other words, the lottery ticket is so improbable that even playing bilions of bilions of years one can not win.

To exemplify this argument, let's take the case of the information written in the DNA, that is of the order of three billions bits ⁶. If one consider that the Earth is 4 billions years old, and that the DNA grew out of nothing, we see that we must have *the addition of one bit each year*. It is not the addition of a bit for a certain DNA that poses the problem, but rather that that must happen for almost all the members of the community we are interested, namely our ancestors. The followers of the intelligent design argue that it is *not only chance* that played here a role, and that may be other ingerients necessary (like God, extraterrestrial life, and so on). The followers of the evolution theory say that *chance is enough* to explain this, taking into account genetic mutations, sex, and the survival of the fittest.

Today it is very difficult to give a definitive answer to these question, since the above probabillities are difficult to calculate. A physicist striving with an analitical solution (a mechanical

⁶verifica

one!) for three celestial bodies orbiting around each other, without finding a solution, would probably stay away from calculating the probabilities of the apparition of the human body in the Universe, because he can not give here an exact answer. That is why the main physics community does not enter this dispute, even though the question is at the end directed towards them, namely if they can explain the apparition of the human body starting from the fundamental laws of physics.

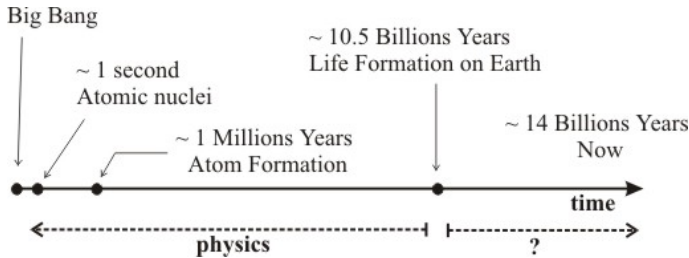


Figure 2.34: A short time line of the Universe. Notice that a better knowledge of physics (at deeper levels) makes us better understand the initial moments of the Universe. To explain life however, another approach is maybe needed

In fact, if we anticipate a little bit, and take a look closer to physics and this dispute, we realise one more thing (see

Fig.2.34), namely that, explaining *smaller and smaller structures*, the physicist explain in fact the first years, minutes, seconds, of the Universe, rather than its last billions of years! Newton's gravity explains the formations of galaxies and stars, electromagnetism may explain the formation of some type of matter, quantum mechanics explains (as we will see) the formation of the atoms, the standard model the formation of the nuclei of the atoms, and so on. In this way we go towards the understanding of the first moments of the Universe, rather than the understanding of the complexity of the human body, body that was realised in fact in the billions of years that followed.

Of course, one may argue, if the Universe is deterministic, then the knowledge of the initial moments will help us explain its later times. In other words, if we would be to introduce all data about the initial moments of the Universe on a computer, we may explain how comes that you are reading this book at this moment. We see however here the problem: since we do not have such a computer, we are not able to do these calculations, and we may even say that the biological world is not deterministic *for us*, since we can not compute it! In fact, this goes against the principle of Galilei as discussed in ??, namely that the physical process (and at the end *the whole world*) are simple, and we may have understanding of them. Is it, or is it not so? A crucial question for us, whose answer we do not have, certainly not yet in the case of the above dispute.

2.3 Cimpul electromagnetic

In primele sectiuni am vazut cum sarcinile electrice genereaza cimpuri *electrice* (prin 2.4) si *magnetice* (prin 2.34 sau 2.36). Mai precis, am studiat cazul cipurilor *electrostatice* (cind sarcinile electrice sunt imobile), si *magnetostatice* (cind curentii electrici nu variaza in timp). Am vazut de asemenea cum sarcinile electrice reactioneaza la aceste cimpuri, si anume prin forta Lorentz 2.41. Pe de alta parte, asa dupa cum am mentionat, cimpul electromagnetic este mai complex, si pentru completarea lui avem nevoie de inca doua relatii cruciale. Acestea vor descrie generarea de cimp magnetic de catre cimpul electric si invers. Cu alte cuvinte, vom vedea ca cipurile electrice si magnetice se pot genera unele pe altele chiar *in absenta sarcinilor electrice*! De aici vinde de fapt denumirea de cimp electromagnetic.

Exista in "Jurnalul de la Paltinis" al lui Liiceanu ⁷ o poveste frumoasa cu un student plecat la Noica in cautarea "adevarului filozofic". Acesta din urma se uita lung la el si-l intreaba: "Unde esti tu student?". "La electronica", vine raspunsul. "Atunci stii ce", zice Noica, "du-te tu si studiaza mai intii ecuatiile lui Maxwell, si apoi vino la mine sa discutam despre adevarul filozofic". Nu stim ce s-a intimplat mai departe cu studentul, speram insa ca nu s-a speriat de ecuatiile cerute si le-a lasat balta. Caci, desi constructia constructia cimpului electromagnetic in totalitatea lui necesita o abordare matematica mai complexa, ea se poate totusi face cu un efort rezonabil.

2.3.1 Faraday's law

Am vazut in legea lui Biot-Savart 2.34 cum curentii electrici genereaza cimp magnetic. Inca de la prima observatie experimentală a lui Oersted s-a pus problema daca nu cumva si cimpul magnetic genereaza curenti electrici, cu alte cuvinte daca cimpul magnetic este capabil sa puna sarcinile electrice in miscare.

Problema este insa mai fundamentala decit pare. Caci, chiar daca am vazut in sectiunea precedenta ca cimpul magnetic *influenta*za curentul electric, deviind sarcinile in miscare (prin Forta Lorentz 2.41), el nu poate inca *genera* un curent electric caci, atit timp cit sarcinile electrice sunt in repaus, partea magnetica a fortei Lorentz este zero! Daca cumva vreun cimp magnetic ar pune in miscare sarcinile electrice aflate initial in repaus, aceasta nu s-ar putea datora decit creerii unui cimp electric, caci numai acesta poate pune sarcinile electrice in miscare conform formulei lui Lorentz 2.41.

Aceste consideratii erau desigur destul de neclare in perioada descoperirii lui Oersted. In acea perioada lumea fizicii era preocupata din plin cu observatiile experimentale asupra electricitatii si magnetismului. Si cum Orsted observase cum curentul electric genereaza un cimp magnetic, multi fizicieni au incercat sa gaseasca experimental situatiile unde cimpul magnetic genereaza curent electric. Cum acest lucru pare dificil, ei s-au concentrat pe constructia unor magneti puternici, dar *statici*, si detectori de curenti sensibili. Oricit de mari magnetii, ei nu au parut insa sa creeze curent electric.

⁷verifica

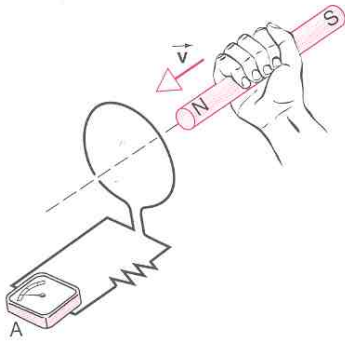


Figure 2.35: Configuratia lui Faraday

Printre acestia a fost si Michael Faraday (1791 - 1867), cu care ne-am mai intilnit in sectiunile precedente. In incercarile sale, acesta a inlocuit la un moment dat sursa clasica de cimp magnetic, si anume un magnet permanent, cu un circuit electric pentru generearea cimpului magnetic. In Fig. 2.35 prezentam schematic instrumentul construit de Faraday. Partea din stanga reprezinta circuitul electric care genereaza cimp magnetic, precum curentul electric din masuratoarea lui Ampere (vezi ??) genereaza cimp magnetic. Partea din dreapta este partea de masura. Se observa in plus forma solenoidala a firului metalic "incolacit" pe un cerc de fier, care este de fapt un "trick" pentru a mari cimpul magnetic generat (vezi Fig.2.36). Astfel, fiecare spirala a acestei bobine genereaza practic acelasi cimp magnetic, iar prezenta mai multor spirale nu face decat sa multiplice valoarea cimpului magnetic cu numarul de spirale.



Figure 2.36: Text:

Chiar insa cu acest sistem, oricât de mare cimpul magnetic static generat de circuitul electric din stnga, nici un curent electric nu se observa in circuitul din dreapta. Pina cind, din intimplare, in ziua de 29 August 1831, Faraday a observat ca acul galvanometrului se misca cind circuitul bateriei din stnga trebuie inchis sau deschis! Desigur un rezultat neasteptat. Caci acum curentul electric din circuitul din dreapta nu este generat de prezenta unor cimpuri magnetice mari dar statice, ci a unor *variabile*, cum este cel dat de inchiderea sau deschiderea circuitului electric. O exemplificare mai simpla a acestui efect este prezentata in Fig.2.37.

⁸verifica

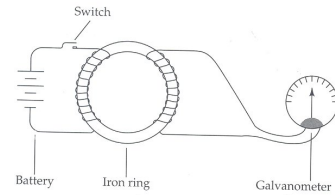


Figure 2.37: Legea lui Faraday -magnet

Este interesant de notat cum, pe linga acest rezultat a trecut ianinte Colladon (1802-1893), care a avut nesansa sa-si azeze circuitul electric ce genereaza cimp magnetic si galvanometrul in camere diferite pentru a nu lasa magnetul ⁸ sa influenteze galvanometrul. In acest fel, dupa ce bateria era conectata, pina cind Colladon se ducea in camera alaturata sa verifice curentul, acul acestuia se opriese deja din oscilatia indusa de cimpul magnetic variabil, si efectul nu a fost observat!

Faraday, in descrierile sale asupra fenomenului, nu a dat si o dezvoltare matematica completa a efectului observat, numita *inductie magnetica*, ci l-a descris "vizualizind" liniile de cimp magnetice. El a observat ca in principal *variatiile numarului liniilor de cimp magnetic ce patrund in cel de-al doilea circuit* este cea care determina marimea curentului electric indus. Aceast "numar" total de linii magnetice care traverseaza o suprafata *data S* poate fi exprimat prin notiunea de *flux magnetic*:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.71)$$

Vedem din relatia de mai sus ca fluxul magnetic este o marime scalara ce este atribuita unei suprafete anume. Aceasta suprafata este considerata *planara*, iar $d\mathbf{S}$ este elementul infinitesimal de arie al sau, perpendicular pe suprafata in orice moment. Vedem din relatia de mai sus ca fluxul magnetic este nul nu numai cind cimpul magnetic $\mathbf{B}$ este nul, dar si cind vectorul $\mathbf{B}$ este situata in planul suprafetei S , $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$. In plus, definitia 2.71 etse valabila pentru orice cimp manetic neuniform $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

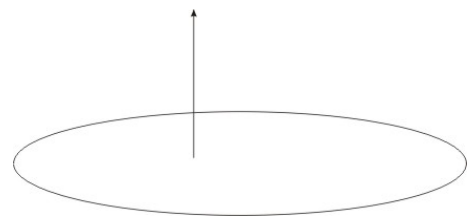


Figure 2.38: pune

Faraday a rationat apoi ca curentul electric generat in partea din dreapta a bobinei Fig. 2.35 este probabil datorat unei tensiuni electrice U induse de catre variatia cimpul magnetic. Aceasta tensiune electrica U (discutata in sectiunea 2) *indusa* este cea care pune sarcinile electrice in miscare in circuitul din dreapta figurii Fig. 2.35. Adunind obsevartiile de mai sus, putem scrie Legea inductiei electrice sub forma:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.72)$$

Sensul curentului indus este dat de regula lui Lenz: fluxul magnetic determinat de curentul indus se opune schimbarii de flux magnetic care l-a creat. Vom incerca sa detaliam acum

relatia de mai sus, cu ajutorul Fig.2.39. Remarcam in primul rind ca relatia de mai sus se refera la aceeasi suprafata S (considerata pentru inceput planara) delimitata de un fir metalic prin care poate circula un curent electric. Partea din dreapta este deja detaliata in relatia 2.71, asa ca ne concentram acum asupra partii din stanga. Tensiunea electrica U este definita in cazul *electrostatic* prin relatia 2.13 si 2.14, si anume ca diferenta potentialului electric ϕ la capetele firului electric.

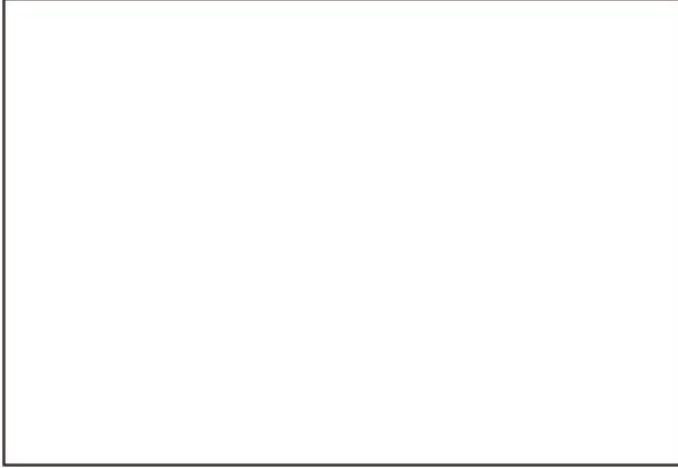


Figure 2.39: Text:

Cu toate acestea, firul electric din Fig.2.38 care incercuieste suprafata S este circular, si nu are capete. Sau putem spune ca capetele sunt unite, si atunci s-ar parea ca tensiunea electrica U trebuie sa fie zero. Iesirea din acest paradox se face realizand ca situatia experimentului Fig. 2.35 nu mai este electrostatica, si ca atare ar trebuie sa renuntam la notiunea de potential electric ϕ , data de 2.10. Aceasta pentru ca in acest caz *cimpul electric nu mai este conservativ!* Cu toate acestea, putem pastra notiunea de cimp electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, variabil de data aceasta in timp si spatiu. Davca vrem sa pastram si notiunea de tensiune electrica U data de 2.14, o putem face, dar numai considerind tensiunea electrica asociata unei anume "path", ca fiind integrala cimpului electric pe acea "path". In cazul nostru, prezentat in Fig.2.40 vom scrie tensiunea electrica indusa ca fiind:

$$U(t) = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.73)$$



Figure 2.40: Text:

Remarcam ca curba ("path") Γ este inchisa, fapt notat prin simbolul $\oint$ al integralei. Subliniam din nou faptul ca, deoarece

cimpul electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ nu mai este conservativ, nu ne asteptam ca valoarea integralei de mai sus sa fie nula. Putem aduna acum relatiile 2.71 si 2.73 si rescrie 2.72 ca:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} \quad (2.74)$$

Ne putem gindi ca relatia de mai sus este sugerata de experimentele lui Faraday numai pentru geometrii speciale, in care curba Γ de exemplu strabate partial firul electric, iar suprafata S este planara. Cu toate acestea, legea inductiei 2.72 este general valabila, adica suprafata S poate fi *orice* suprafata din spatiu (chiar si mobila!), iar curba Γ marginea sa. Dupa cum vom vedea in sectiunea ??, faptul ca legea inductiei este valabila chiar si pentru suprafete S in miscare, ori in continua deformare, conduce la rezultate surprinzatoare ce nu fac decat sa scoata in evidenta caracterul profund relativitistic al cimpului electromagnetic. Pentru a evita acestii situatii pina cind construim toate ecuatiile lui Maxwell asociate cimpului electromagnetic, ne vom restringe atentia numai asupra legii inductiei asociate suprafetelor S *imobile* si *nedeformabile*. Atunci putem introduce derivata din 2.74 in integrala, considerind cazul in care suprafata S marginita de curba Γ este *fixa*.

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} \quad (2.75)$$

Deoarece suprafata S este considerata fiza acum, am folosit derivata partiala $d\mathbf{B}/dt = \partial \mathbf{B}/\partial t$ pentru a scoate in evidenta ca cimpul $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ este variabil in spatiu si timp. Matematic vorbind, forma integrala a legii inductiei 2.74 ne spune ca in orice moment si pentru orice suprafata S (considerata aici fixa) relatia 2.74 trebuie sa fie indeplinita. Daca este asa, putem cauta o *forma locala* a acestei legi.

Pe de alta parte, pentru *orice* curba S fixa din spatiu, si pentru *orice* cimp, ca de exemplu cimpul electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, are loc urmatoarea relatie, cunoscuta ca *teorema lui Stokes* (vezi anexa matematica ?? pentru mai multe detalii):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.76)$$

Aici curba Γ este din nou curba *inchisa* ce *delimiteaza* suprafata S , iar operatorul $\nabla \times$ a fost introdus in relatia ???. Daca este asa, atunci putem combina relatiile 2.75 si 2.76 sa obtinem:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.77)$$

Deoarece relatia de mai sus trebuie sa aiba loc pentru orice suprafata S din spatiu, atunci cele doua componente din integrala trebuie sa fie egale in orice moment de timp si orice punct din spatiu. Ajungem atunci la *forma locala a legii inductiei magnetice* care este:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.78)$$

Relatia de mai sus ne arata explicit cum variatia cimpului magnetic genereaza cimp magnetic. Observam ca in aceasta comportare este independenta de sarcinile electrice!

asta a fost transformer efm. Mentioneaza numai motional efm.

2.3.2 Maxwell equations for the electromagnetic field

In sectiunile ??, ??, ?? si ?? am obtinut 4 ecuatii ce trebuie indeplinite de cimpul electromagnetic, 2.9, 2.25, 2.36, 2.78, pe care le vom colecta acum sub forma lor *locala*:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Prima relatie 2.9, ca si forma ?? din care aceasta provine, se refera in principiu numai la *cimpul electrostatic*, unde sarcinile electrice nu sunt in miscare. Motivul principal este ca relatia ?? presupune actiunea instantanee la distanta, lucru ce, anticipind, nu ne asteptam sa existe in realitate. Cu alte cuvinte, daca miscam putin sarcinile electrice in spatiu (*iesind* deci din cazul electrostatic), nu ne asteptam ca cimpul electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sa se ajusteze instantaneu in toate colturile Universului conform relatiei ??.

Cu toate acestea noi vom face aici presupunerea ca forma locala 2.9 este valabila nu numai in cazul electrostatic, dar *si in cazul general*, si deci chiar si cimpul electric este variabil! Din discutia precedenta putem intelege in felul urmator ca aceasta supozitie nu este exagerata, ba chiar are motive intemeiate de a fi corecta. Cu toate ca viteza interactiei electromagnetice este probabil finita, putem alege oricind o regiune suficient de mica in care aceasta sa para instantanee. Daca acum miscam in aceasta regiune sarcinile cu viteze nu prea mari, putem considera o situatie electrostatica in fiecare moment, in care legea 2.9 se aplica.

Folosind aceleasi argumente, o sa generalizam deasemenea formele locale 2.25 si 2.36 ale cimpului magnetostatic, presupunind ca ele au loc si pentru cimpurile magnetice variabile. Pe de alta parte, forma locala a legii inductiei nu mai trebuie generalizata, caci ea are loc pentru cimpuri variabile, asa cum am discutat in sectiunea precedenta.

Aceste patru legi 2.79 au fost "colectate" de catre James Clerk Maxwell (1831-1879), care a remarcat forma lor interdependenta. Remarcam ca relatiile 2.79 dintre cimpul magnetic $\mathbf{B}$ si electric $\mathbf{E}$ trebuie sa aiba acum loc in orice moment din timp si orice punct din spatiu:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Mai mult inasa decat atit, privind atent ecuatiile de mai sus, Maxwell a observat o mica "problema" cu ecuatia a treia. Astfel, daca se aplica operatorul ∇ si in stanga si in dreapta, se obtine:

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{B}] = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j} \quad (2.79)$$

Operatorul ∇ aplicat dupa operatorul rotor $\nabla \times$ trebuie inasa sa conduca la un rezultat nul (vezi relatia ?? din anexa), *indiferent* carui cimp este aplicat. In acest caz am obtine $\nabla \times \mathbf{j} = 0$, ceea ce evident contrazice ecuatia conservarii sarcinii electrice ??.

Solutia eleganta a acestei probleme a fost gasita de Maxwell, care a "ajustat" pur si simplu ecuatia a treia, sperind ca acest lucru sa fie si verificat experimental! Astfel, numai din considerente teoretice, el a propus forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.80)$$

Aplicind acum operatorul ∇ acestei relatii, vom obtine

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\nabla \mathbf{E})}{\partial t} = \mu_0 \nabla \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = 0 \quad (2.81)$$

unde am folosit prima ecuatie a lui Maxwell ?? si relatia de conservare a sarcinii electrice ?. Vedem ca aceasta adaugare a lui Maxwell elimina intr-un mod foarte elegant problema mentionata. Acum, divergenta rotorului cimpului magnetic este zero, asa cum trebuie.

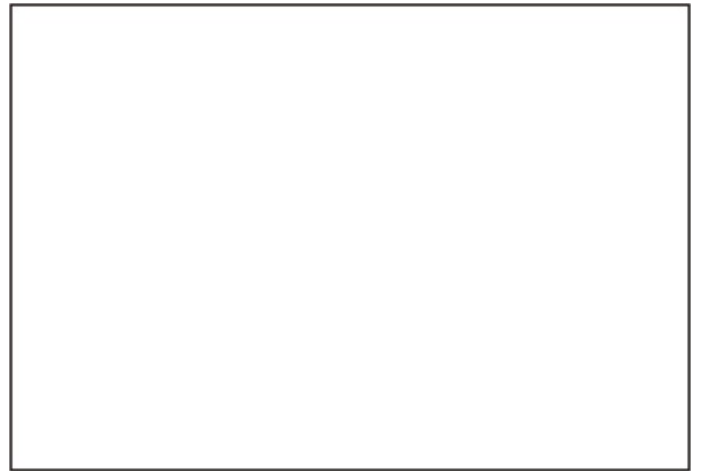


Figure 2.41: induction current-feynman

"Useless to say" ca termenul $\partial \mathbf{E} / \partial t$ adaugat in relatia 2.80 a fost pe deplin confirmat experimental. Desi matematic aparitia lui este acum evidenta, implicatiile ulterioare sunt mai putin evidente, dar majore. In 2 we propose an exercise that sheds more light on the physical meaning of this term.

Putem observa din 2.80 ca acest termen descrie un fapt uimitor, si anume ca si variatia cimpului electric este capabila de a produce cimp magnetic! Cu alte cuvinte, cimpurile magnetice se pot produce unele din altele chiar atunci cind nu sunt sarcini electrice! Rezultatul net este ca cimpurile electrice si magnetice pot exista, odata generate, si in absenta sarcinilor electrice ce le-au generat. Acest complex de cimpuri electrice si magnetice il denumim cimp electromagnetic.

Sa rescriem acum toate legile lui Maxwell la un loc, incluzind forma modificata a Legii a treia.

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned} \quad (2.82)$$

Colectia celor patru relatii de mai sus poarta numele lui Maxwell, asa cum am mentionat. In toate cele 4 ecuatii cimpurile prezente sunt variabile in timp si spatiu (ca de exemplu

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sau $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$). Ele descriu cum cimpul electromagnetic este creat de catre sarcinile electrice (in principal ecuatiile I si III), dar si cum acest cimp se dezvolta singur odata creat. In plus, la aceste ecuatii putem adauga si ecuatia fortei Lorentz 2.41 care ne arata cum sarcinile electrice se misca in acest cimp electromagnetic:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.83)$$

Ecuatiile lui Maxwell impreuna cu forta lui Lorentz formeaza un sistem complet cu o multitudine de consecinte, atat teoretice cit si practice. O parte infimezimala dintre acestea le vom discuta si noi in continuare, concentrindu-ne in mod special pe acelea care vom "provide insight" in constructia de baza a acestui cimp.

Trebuie mentionat aici ca ecuatiile obtinute de noi mai sus au loc *in vid*. Cu toate acestea, Maxwell le-a introdus si discutat nu in vid, ci in materiale. Motivul principal este ca ecuatiile lui Maxwell conduc la existenta unor unde electromagnetice, asa cum vom vedea in sectiunea urmatoare. In vremea lui Maxwell existenta undelor era de neimaginat in vid, iar fizicienii presupuneau mereu ca aceste unde sunt "purtate" de un material prezent. Este astfel cunoscut exemplul undelor sonore ce sunt transportate de aer sau apa, dar care nu se propaga in vid. Cind s-a vazut experimental ca undele electromagnetice se propaga in vid, fizicienii au introdus chiar o materie noua, necunoscuta, denumita *eter*, in care undele electromagnetice ar fi trebuit sa se propage.

Astazi inasa, atitudinea asupra legilor fizicii s-a schimbat. Daca ecuatiile lui Maxwell descriu o unda electromagnetica in vid, si daca aceasta este masurata experimental, atunci existenta ei este acceptata imediat, chiar daca este contrara intuitiei noastre. Intr-un anume fel, putem spune ca acceptam azi mai usor fenomene contrare intuitiei noastre, caci nu ne asteptam ca toate legile adingi ale fizicii sa fie imediat intelese de creierul nostru "antrenat" in lumea macroscopica inconjuratoare. Cu alte cuvinte, ne asteptam sa putem intelege si accepta usor fenomene care sunt asemanatoare cu cele "experienced in every day life", dar nu si pe acelea care au o cu totul alta comportare, la care creierul nostru nu a fost expus in decursul cresterii si maturizarii sale. Acceptind ecuatiile "ciudate" care sunt verificate experimental incercam de fapt sa ne depasim aceste bariere.

Pe de alta parte, Maxwell a fost si "norocos", caci ecuatiile electromagnetismului in materiale au o forma foarte asemanatoare cu cele din 2.82. Astfel, in cele mai multe materiale nu trebuie decit sa schimbam constantele din vid ϵ_0 si μ_0 cu constante specifice acelui material (care se noteaza cu ϵ si μ), si sa pastram aceleasi ecuatii 2.82! Nu vom intra inasa aici in detaliile acestei situatii. Mentionam inasa ca ele pot fi explicate pornind de la ecuatiile lui Maxwell in vid, si luind in calcul prezenta atomilor din materialul respectiv.

2.3.3 Undele electromagnetice

As mentioned already, the Maxwell equations 2.82 shows us that the electromagnetic field, once created by some electrical charges, can evolve away from the region they were created. To see that, let us rewrite the equations 2.82 in a region where there are no electric charges ($\rho = 0$, and $\mathbf{j} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

First, we start with the observation that the set of the equations 2.85 is linear. In other words, if two fields $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ and $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ are solutions of the equations above, then we see that $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ will also satisfy Maxwell equation. We try now to find a particular solution to the set of equations above, being aware that a general solution may be a linear superposition of many particular solutions. For that, we first assume that the solution we are looking for has an electric field $\mathbf{E}$ oriented only in the y direction in every point. We will see later that this choice leads us to the *planar* electromagnetic waves:

$$E_x = 0; \quad E_y \neq 0; \quad E_z = 0; \quad (2.84)$$

By replacing this into 2.85, we obtain

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (2.85)$$

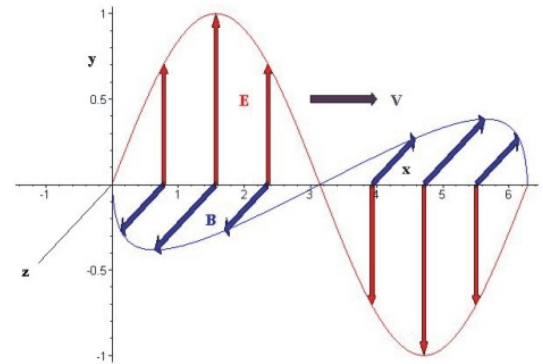


Figure 2.42: electromagnetic-wave

From here we see that there may be a spatial variation of the component E_y only in the x direction or the z direction. As we will later, this choice will define the direction of motion of the planar electromagnetic waves. We choose here:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (2.86)$$

The choices 2.84 and 2.86 define the particular solution we will find. With these choices, we go further, analyzing the fourth equation of 2.85:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (2.87)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.88)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.89)$$

From these we see that only the magnetic field component B_z varies in time. The fact that the other two components B_x

and B_y are *constant in time* may be associated with the fact that there is a *permanent magnet* close to the region of interest. However, we are not interested in these type of particular solution, so we may safely assume that $B_x = 0$ and $B_y = 0$. We see a relation for the only time varying component B_z can be then deduced from the third equation of 2.85:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.90)$$

We can now get an equation only for the electric field E_y by differentiating the third relation of 2.87 with respect to x , and using the above equation 2.90:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.91)$$

The equation above defines for us the solution for the electric field E_y we are looking for. Somebody with a mathematical background can immediately recognise here a *wave equation*. To emphasise that, let us write the above equation for a general scalar function $\phi(x)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.92)$$

As it can be immediately checked out, a solution of the above equation is given by

$$\psi(x, t) = f(x - ct) \quad (2.93)$$

where f can be *any* analytical function! In Fig.2.43 we present such a traveling wave solution. We can say in fact that the function $f(x) = \phi(x, 0)$ is the initial function $\phi(x, 0)$. At later times, the function $\phi(x, t)$ is just the same function $\phi(x, 0)$ "shifted" over the distance $d = c \cdot t$. Here c gives the *wave velocity*. The direction of the shift is in this case positive. There also exists a solution $\psi(x, t) = f(x + ct)$ that describes a wave travelling in the opposite direction.

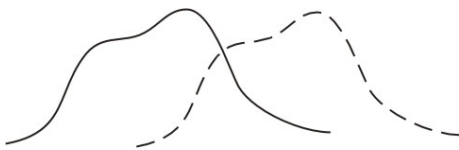


Figure 2.43: pune

Having now seen that the equation 2.92 describes a traveling wave, we can construct a wave equation for the magnetic field B_z as well, by differentiating 2.87 with respect to the time t , and using the equation 2.90. We are left with:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.94)$$

However, we should mention that not any wave solution is now appropriate. In fact, the magnetic field must be calculated from the electric field with the relation 2.87. We can now summarize in the Fig.2.43 the particular solution we found:

- The electromagnetic field in an empty space is a traveling wave with the velocity c
- The electric field E_y is perpendicular on the wave direction x

- The magnetic field B_z is perpendicular on the direction of the wave x as well as on the electric field E_y .

We can now understand that a general solution of the equations 2.85 may be formed by a linear superposition of different electromagnetic waves. Thus, in 2.84 we have chosen the direction of the polarization of the electric field (that can take in general any direction in space), and in 2.86 the direction of the wave (that can be either in the x or z direction). In Fig.2.43 we present a particular wave, namely a sinusoidal wave.

The main result we obtain here is that the electromagnetic field, once generated by some electrical charges, will travel in the empty space as an electromagnetic wave. As we saw, the velocity c of this wave may be calculated as:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 300000 \text{ Km/h} \quad (2.95)$$

This is a very important result, with far reaching consequences. Of course, we all know that it lays down the basis of our today's wireless communication, of our TV's and radio's. In the time of Maxwell however people were more interested to verify these consequences of the Maxwell equations.

The first to confirm experimentally the physical existence of the electromagnetic waves was Heinrich Hertz (1857-1894). It is here important to realize that, even though there may be electromagnetic waves in any region of space (generated by electrical charges in another region of space) we are interested here in how to generate electromagnetic waves with high intensity, so that we can measure them. To generate electromagnetic waves with high intensities, Hertz chose an *oscillating dipole* configuration, upon which all the modern radio antennas are based.

The electric dipole is composed by two opposite electrical charges equal in magnitude. It was discussed in the section ??, and its electrostatic field was presented in Fig.2.7. Here however, we make the electric dipole *oscillate* by modifying the distance between the two charges. What will happen? Obviously, if the velocity of the charges is not that high, we may assume that close to the dipole the electric field will follow the electrostatic field from Fig.2.7. At different times, the electrostatic field Fig.2.7 will take different forms, according to the distance between the charge. We try to present such a time variation of the electric field in Fig.2.44.

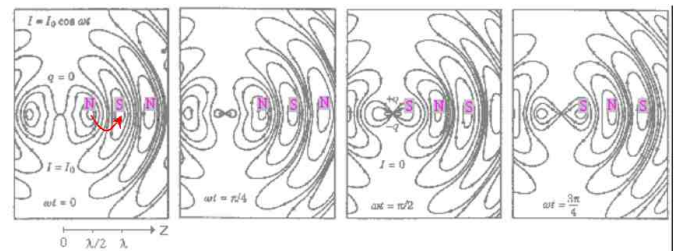


Figure 2.44: Dipolul care radiaza. Fai la unul care porneste si apoi se opreste

What about the magnetic field? First, we may recognise in the oscillating field an electrical current, that flows in the vertical direction. That magnetic field will have then the orientation depicted in the Fig.2.16 for the magnetostatic case. We see that, along the x direction, this will be perpendicular on the electric field. Here again we may consider a slowly varying case, that will lead to varying magnetic fields close to the oscillating electric dipole, depending on the value of the electrical current.

What will happen far away from the electrical dipole? To understand that, we first look at the right hand side of Fig.2.44. Here we see that there are regions (like the surface S) in which the electric field varies in time. According to the forth law of Maxwell ?? this will generate *other magnetic fields*! The same will happen with the varying magnetic field that, according to the Faraday 'induction law will generate *additional* electric fields. In their turn, the newly generated electric and magnetic field will generate other electric and magnetic field and distance further away from the electric dipole (see surface S' from Fig.2.44). Step by step, the electromagnetic field will generate itself further, acquiring at very far distances on the x axis the form of a plane wave, that will travel with the velocity c as discussed previously.

If the dipole is oscillating with a sinusoidal behaviour, than the electromagnetic wave generated in Fig.2.42 will have a simple sinusoidal form. This leads to a simple relation between the period T of the oscillations of the dipole, and the *wavelength* λ of the wave, that is defined as the distance between two maxima of the wave at a certain time:

$$\lambda = c \cdot T \quad (2.96)$$

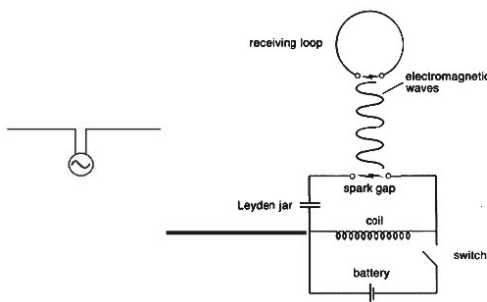


Figure 2.45: antenna + Hertz

To make an oscillating dipole, Hertz constructed an electric circuit that is still today at the heart of every radio transmitter. We sketch this in Fig.2.45 and present in Fig.2.46 an early equipment that resemble very much the one used by Hertz.

The two large balls in Fig.2.46 are two Leyden jars, devices used by the early experimentators used to build up and store electric charges. They were also referred to as "condensers" because many people thought of electricity as fluid that could be condensed. Today, we call it a capacitor, as represented in Fig.2.45. This capacitor is charged first with a help of a battery, helping us to create an electric dipole, with the two types of charges of the dipole collected by the two Leyden jars⁹. If we want to create an *oscillating* dipole, we will have to open and close the contact continuously. If we assume that we do this one time per second ($T = 1$ s), we can calculate the wavelength of the electromagnetic wave generated with 2.96 as $\lambda = c \cdot T = \dots$

To detect this wave, Hertz took a very simple approach. He constructed a simple metal loop which was interrupted. Magnetic variations in the loop will create, according to the Faraday's law ?? an electrical voltage across the loop. Again, when this voltage reaches a certain threshold, a spark can be visually observed. That will be the detection.

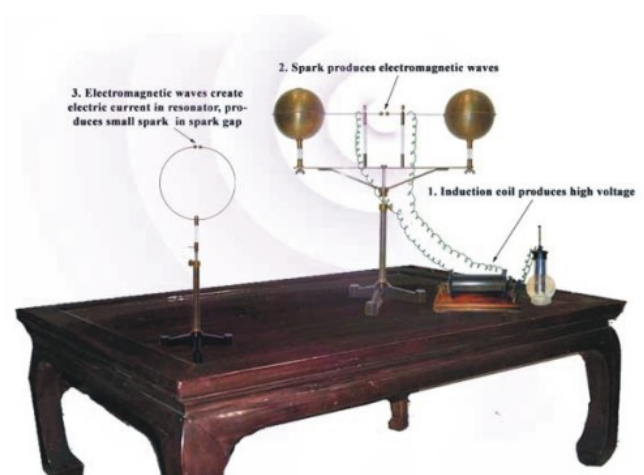


Figure 2.46: Early equipment to do the experiment of Hertz

In order to maximise the effect, we see from Fig.2.44 that we will like to have a loop as large as the surface S' , that will gather maximum magnetic flux with a magnetic field oriented in the same direction. The detection loop will need to have thus approximately the dimension of the wavelength λ . Our calculated value of ... is however too small, and will probably not create induced voltages high enough to create a visible spark. Best would be to have a detection loop as large as in the Fig.2.46 (about 0.5 m). For this however, we would need frequencies of the order of $f = 1/T = c/\lambda = \dots$ MHz.

Frequencies in this range were far too high to obtain in the time of Hertz. He was however aware that, when the condenser was discharged in the form of an electric spark, a pulse of very high frequency alternating current (in the order of hundreds of MHz) was produced as well. That is why Hertz added in the center of the emitting system of Fig.2.46 a small break, where a small spark is generated when the voltage on the capacitor reaches a threshold value. The spark can be visualised, and will restore the electric dipole to a zero value, however not before creating the high frequency alternating current. Because the oscillations died away immediately, Hertz added an additional induction coil that (if properly chosen), keeps the oscillation for a longer time.

In the original experiment, Hertz would observe that at the same time when a spark are generated in the emitting part (when the electric circuit is closed), another spark is observed in the detecting loop placed few meters away. In this way, the era of the radio communications was open, without however Hertz being aware of it. Once, when asked by a student about the possible applications of the electromagnetic waves, he answered: "It's of no use whatsoever". We should however not underestimate his words as well, as it would have been very difficult to realise modern communication with the very bulky system that Hertz used. Only with the later help of large improvements was radio communications possible.

2.3.4 Energia cimpului electromagnetic

Cum am discutat in primul capitol, un rol important in intelegerea fenomenelor mecanice il are notiunea de *energie* a unui corp. Am vazut cum, in interactiile gravitationale, *energia totala se conserva*. Aceasta notiune se poate extinde si la cimpul electromagnetic, si in asa fel incit energia totala, a cimpului electromagnetic impreuna cu a tuturor corpurilor sa se conserve. In plus, notiunea de energie a cimpului electromagnetic ne va ajuta sa construim un *lagrangean* compact ce

⁹check!

descrie deplin cimpul electromagnetic, si pe care il vom folosi in capitolele urmatoare.

The density of the electromagnetic energy

Pentru a construi *matematic* notiunea de energie a cimpului electromagnetic, sa ne amintim ca singura modalitate prin care cimpul electromagnetic actioneaza asupra unei sarcini electrice q punctiforme este data de forta Lorentz 2.41: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Vom folosi aceasta conexiune pentru a "ghici" forma energiei cimpului electromagnetic.

Fora Lorentz va accelera sarcina punctiforma si ii va impune prima energie. Energia dw primita¹⁰ astfel de sarcina trebuie sa fie cedata de cimpul electromagnetic. Dar aceasta energie dw primita de sarcina este data de lucrul mecanic dL (vezi ??) efectuat asupra sarcinii de catre forta Lorentz. Avem deci $dw = dL = \mathbf{F}d\mathbf{r}$, unde $d\mathbf{r}$ este distanta parcursa de sarcina intr-un anume timp dt pe care il vom considera infinitesimal. Folosind viteza sarcinii $\mathbf{v}$, pe care o putem considera constanta in timpul infinitesimal dt , putem scrie:

$$dw = dL = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{v}dt) = (q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v}dt = q(\mathbf{v}\mathbf{E})dt$$

Termenul corespunzator cimpului magnetic $\mathbf{B}$ este nul, deoarece componenta magnetica a fortei Lorentz este mereu perpendiculara pe viteza. Lucru mecanic este deci produs *numai* de catre cimpul electric.

Rezultatul precedent este numai pentru o singura sarcina electrica. Acum am vrea sa extindem acest rezultat la o portiune continua de fluid electric, plin de sarcini electrice. Pentru aceasta vom considera, ca si in sectiunea ??, ca intr-o unitate *infinitesimala* de volum dV exista $dN = n dV$ sarcini identice q se deplaseaza in aceeasi directie si cu aceeasi viteza $\mathbf{v}$. Aici n este concentratia de sarcini electrice. Energia cedata de cimpul electromagnetic va fi atunci, folosind relatia precedenta si relatia ?? de definitie a densitatii de curent electric, data de:

$$dNdw = dN(q\mathbf{v}\mathbf{E})dt = ndV(q\mathbf{v}\mathbf{E})dt = dt(\mathbf{j}\mathbf{E})dV \quad (2.97)$$

Energia dintr-un volum oarecare V pierduta astfel de cimpul electromagnetic in timpul infinitesimal dt este obtinuta prin sumarea energiei pierduta prin orice coltisor al sau:

$$dU_l = dt \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})dV \quad (2.98)$$

Cum cimpul electromagnetic este extins in tot spatiul, ne putem astepta ca el isi depoziteaza energia sa deasemenea in orice punct. Definim atunci $u(\mathbf{r}, t) = u(x, y, z, t)$ *densitatea de energie* a cimpului electromagnetic in punctul $\mathbf{r}$ la momentul de timp t . In relatiile urmatoare vom renunta insa in a scrie explicit variatia in timp a marimilor ce intervin, pentru a simplifica forma ecuatiilor, urmind a reveni mai tirziu asupra acestui lucru.

Energia electromagnetica dintr-un volum infinitesimal dV este atunci $u(\mathbf{r})dV$, iar energia dintr-un volum oarecare V se obtine prin sumare:

$$U = \int_V u(\mathbf{r})dV \quad (2.99)$$

Cum cimpul electromagnetic se schimba in timp, ne asteptam ca aceasta energie electromagnetica $u(\mathbf{r})$ sa "curga" in diverse directii. Sa notam atunci cu $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ vectorul care ne spune in ce directie si cit de mult curge energia electromagnetica din punctul $\mathbf{r}$. Vectorul de flux $\mathbf{S}$ al energiei electromagnetice

se numeste "vectorul Poynting", dupa numele descoperitorului sau. Energia electromagnetica care iese din volumul V in timpul infinitesimal dt pentru a se "aseza" in alte puncte din spatiu este atunci:

$$dU_f = dt \oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r})d\mathbf{A} \quad (2.100)$$

unde S este suprafata *inchisa* ce delimiteaza volumul V . Relatia precedenta este foarte asemanatoare cu relatia ?? pentru densitatea de curent electric $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Vedem ca densitatea de energie electromagnetica $u(\mathbf{r})$ joaca rolul densitatii de sarcini electrice $n(\mathbf{r})$ (vezi ?? si 2.99), iar vectorul lui Poynting $\mathbf{S}$ joaca rolul lui $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (vezi ?? si 2.100).

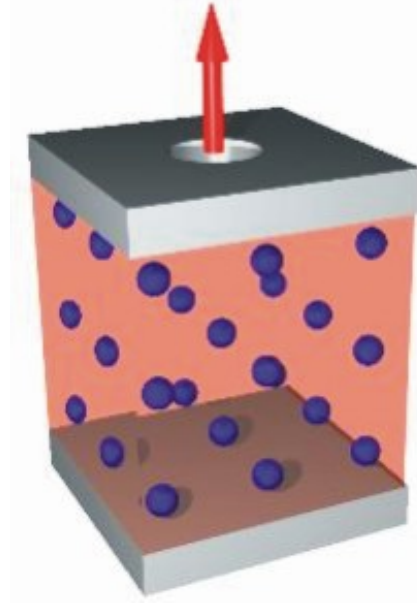


Figure 2.47: electromagnetic-energy

Facem acum bilantul energiilor electromagnetice 2.98, 2.99 si 2.100 care se modifica in volumul V in intervalul de timp infinitesimal dt : $-dU = dU_f + dU_l$, presupunind ca energia totala (a cimpului electromagnetic si a materiei) se conserva. Vom avea deci:

$$-d \int_V u(\mathbf{r})dV = dt \oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r})d\mathbf{A} + dt \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})dV \quad (2.101)$$

Ca si in cazul sectiunii ??, vom folosi teorema lui Gauss pentru fluxul vectorilor in suprafete inchise ?? pentru a obtine relatii locale. Avem deci:

$$-\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{r})dV = \int_V \nabla \mathbf{S}(\mathbf{r})dV + \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})dV \quad (2.102)$$

Considerind volumul V *fix*, putem introduce derivata termenului din stnga in integrala, si obtine:

$$-\int_V \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial t}dV = \int_V [\nabla \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})]dV \quad (2.103)$$

Cum relatia de mai sus trebuie indeplinita pentru *orice* volum V , avem atunci urmatoarea relatie ce trebuie indeplinita in orice punct din spatiu, si in orice moment de timp t :

¹⁰verifica ca e primita si nu cedata!

$$-\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.104)$$

În relația de mai sus am reintrodus scrierea explicită a variației temporale. Nu ne mai rămâne decât să identificăm, cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell, valorile $u(\mathbf{r}, t)$ și $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$. Pentru aceasta să pornim de la următoarea relație matematică, valabilă pentru orice cimpuri vectoriale, dar aplicată în cazul cimpurilor electrice $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ și magnetice $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (2.105)$$

Ambii rotori din dreapta pot fi înlocuiți direct din ecuațiile lui Maxwell 2.82. Avem atunci:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (2.106)$$

care se rescrie

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.107)$$

Ecuația de mai sus este identică cu 2.104 dacă facem identificările densității de energie electromagnetică și de fluxul său:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} \quad (2.108)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.109)$$

Identificarea făcută de noi mai sus nu pare să fie identică, dar ea conduce la rezultatul corect¹¹.

O interpretare foarte clară a vectorului lui Poynting $\mathbf{S}$ se obține dacă considerăm cazul undelor electromagnetice discutate în secțiunea precedentă. Vedem în Fig. ?? că, datorită orientării cimpurilor electrice și magnetice, vectorul lui Poynting $\mathbf{S}$ este orientat în direcția de deplasare a unde! Energia cimpului electromagnetic pare astfel ca să aibă o existență materială, ca o *substanță* care se deplasează în direcția unde. Anticipând puțin, acest lucru nu este departe de adevărul că, așa cum vom vedea în teoria relativității, unei porțiuni de cimp electromagnetic având energia U se poate atribui o masă $m = U/c^2$!

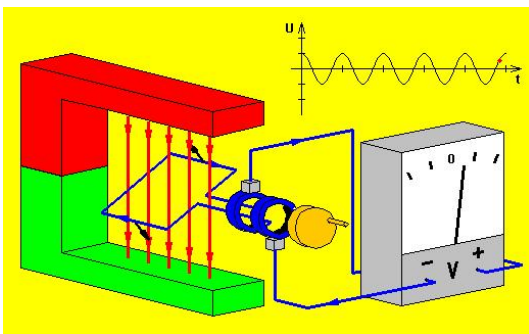


Figure 2.48: pune

The energy flowing around us

Pe de altă parte, energia cimpului electromagnetic, ca și ecuațiile lui Maxwell, ne sugerează că cimpul electromagnetic împreună cu sarcinile electrice trebuie privit *ca un tot*. Rețeaua electrică responsabilă de "aprovizionarea" noastră cu curent este un exemplu frumos cum cimpul electromagnetic nu acționează "în bucăți", ci în întregul lui. Aici imaginea noastră cea mai simplă este că electronii sunt "impinși" de către potențialul creat de priză pentru a efectua anumite sarcini în diferitele echipamente electronice pe care le avem. Să vedem în ce măsură este așa.

În Fig. 2.48 prezentăm schema generală a unui generator electric. Într-o hidrocentrală, apa în cădere mișcă elicele turbinei. Electronii din metalul ce formează conductorul se vor mișca într-un cimp magnetic. Conform formei vectoriale a forței Lorentz 2.41, electronii vor fi angrenați în mișcare *în direcția conductorului*, cu o forță dată de $F = qvB$, unde v este viteza tangențială a conductorului. Datorită geometriei, forțele din partea de sus și jos a conductorului vor avea același sens în conductor (deși sensuri opuse în spațiu!), punând astfel electronii în mișcare și creând curent electric.

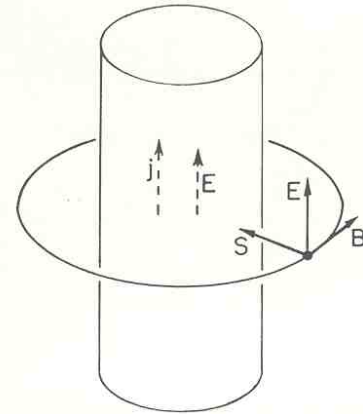


Fig. 27-5 The Poynting vector $\mathbf{S}$ near a wire carrying a current.

Figure 2.49: pune

Din Fig. 2.48 vedem că, deoarece conductorul se rotește, curentul electric își va schimba sensul în conductor la o singură rotație. Ca rezultat, curentul creat este *alternativ*, cu o frecvență dată de rotația aleasă a conductorului, și aleasă standard de 50 Hz. Simplitatea acestui generator, împreună cu avantajele transformatoarelor de curent alternativ au dus la alegerea curentului alternativ ca standard pentru gospodăria casnică.

Un element simplu care consumă energie electrică creată este prezentat în Fig. 2.49. El poate reprezenta un bec, un resistor, sau o simplă rezistență electrică. În cazul becului, energia electrică consumată se transformă în lumină, iar în cazul resistorului în căldură. Energia consumată provine de la generator, și ne interesează acum cum arată acest proces de transfer de energie, care trebuie să aibă loc prin intermediul cimpului electromagnetic.

Cu ajutorul vectorilor de cimp electric și magnetic $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$, prezentați în Fig. 2.49, putem calcula vectorul $\mathbf{S}$ (vezi 2.108)

¹¹comentează!

de transport al energiei electrice in apropierea rezistentei. Surprinzător, vedem ca el este orientat *din afara* rezistorului catre interiorul lui. Cu alte cuvinte, contrar intuiției noastre, energia cimpului electromagnetic este transferata prin partea laterala a rezistorului.

Daca am desena toata aceasta "curgere" a energiei date de generator, am obtine desenul schematic din Fig. 2.50: energia apei in cadere este transferata cimpului electromagnetic, si ea pleaca de la generator catre consumatori, "prin aer" putem spune. In cazul particular ales, aceasta energie intra pe partii laterale in rezistor, punind electronii in miscare. Vedem astfel ca imaginea noastra de "electroni impinsi de la spate" este destul de gresita, de fapt electronii fiind impinsi "din lateral" de cimpul electromagnetic, care mediaza acest transfer de energie.

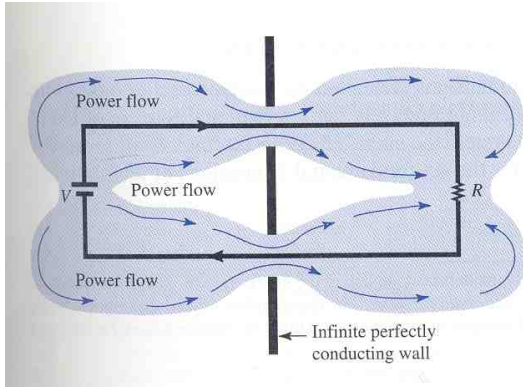


Figure 2.50: pune

Prezenta curentului alternativ determina deasemenea pierderea anumitei parti de energie electromagnetica in spatiu, sub forma de unde electromagnetice de frecvente de 50Hz. Astfel, intreaga retea pamintena de transmisie electrica actioneaza si ca o uriasa antena care transmite continuu in spatiu semnale electromagnetice de pe planeta noastra, nu insa la departari mai mari de 100 de ani lumina¹². El defineste astfel civilizatia noastra ca o civilizatie "electromagnetica".

The electromangetic mass

We have seen that the electromagnetic has an energy energy ??, and we have discussed how this energy "flows" around in case of some simple examples. We also know that the total energy conserves (in fact, that is the way we found out the energy in the electromagnetic field). When pushed in the "turbine electrice", the electrons are *transfer* the energy from the falling water to the electromagnetic field.

This raises a very interesting question. We have introduced in the section ?? the *inertial mass* of a body, as something that quatifies the opposition of the body when we want to change its state of motion. In other words, when we want to accelerate the body, *we have to give him energy* to bring him to higher velocities. The total energy that the body receives when pushed from the rest in free space is quantified in the *kinetic energy* ??:

$$U = \frac{mv^2}{2} \quad (2.110)$$

Here m is the *inertial mass* of the body. On the other hand, when we push around an electric charge of mass m , we will spend energy not only to accelerate the body (according to 2.118), *but also* to change its electromagnetic field! Some

of the energy we provide to the body will be transferred to the electromagnetic field, and we may ask ourselves if the body will reach the velocity v as calculated in 2.118!

To adress this problem, let us first calculate the total energy stored in the electromagnetic field of an electric charge q moving with the velocity $\mathbf{v}$. In addition, as seen in Fig.2.51, we consider that the the charge is uniformly distributed on the surface of a *rigid sphere* of raduis a , so that we have to calculate the electromagnetic energy only in the region *outside* the sphere. The electromagnetic field inside the rigid sphere is zero, and a will give represent the aproximate dimensions of the electric charge.

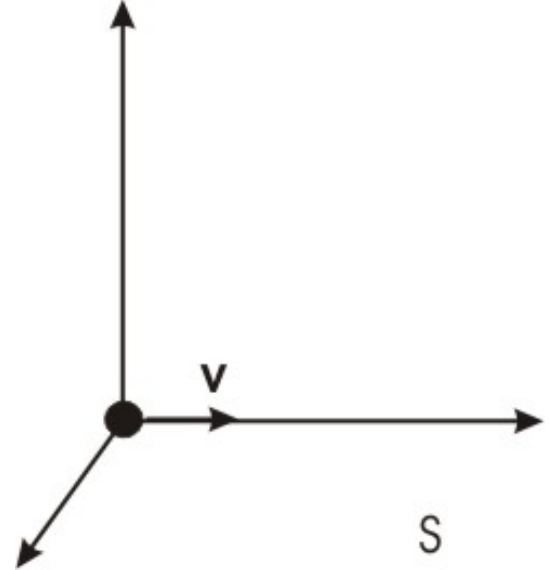


Figure 2.51: electromagnetic-mass

The electric and magnetic field given by this charge outside the shpere can be calculated starting from ?? and ??¹³ as:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3};$$

The electromagnetic energy density stored in the electric channel (see 2.108) will be :

$$U_{elec} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^4} (4\pi r^2) dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

The energy stored in the magnetic field needs a little more calculations. By looking at the Fig.2.51, we first write $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = vr \sin(\theta)$, to get

$$U_{magn} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \int_a^\infty \int_0^\pi \left(\frac{v \sin \theta}{r^2} \right)^2 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2} v^2$$

The following quantity has the diomensions of a mass:

$$m_{em} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2} \quad (2.111)$$

By using this definition, we can rewrite the calculated energy stored in the electric and magnetic channels:

¹²verifica

¹³put a formula with a magnetic field generated by a charge at the Biot-Savart law

$$U_{elec} = \frac{3}{4}m_{em}c^2; \quad U_{magn} = \frac{m_{em}v^2}{2};$$

The total energy stored in the electromagnetic field, will be a sum of the two, leading to:

$$U_{em} = \frac{3}{4}m_{em}c^2 + \frac{m_{em}v^2}{2} \quad (2.112)$$

There are few remarkable things about these equations. The total energy of the electromagnetic field has a *constant* part, and variable part that is proportional with the square of the velocity. This second part is identical with the relation 2.118 if we identify m_{em} with the *mass* of the electromagnetic field. The meaning of this is quite simple, if we make an analogy with the usual mechanics. When we accelerate the body from rest to the velocity v , we give him energy that is "stored" in the kinetic energy. When we accelerate an electric charge, we give energy not only to the body, but also to the electromagnetic field. The more we accelerate the body, the more energy the electromagnetic field takes, and stores in its magnetic part $U_{magn} = m_{em}v^2/2$.

What is remarkable is however the square dependence on the velocity. If we take into account that we have to give energy both to the body and to the electromagnetic field, we may well say that the complex formed by the charged body and the electromagnetic field has a mass that can be written as:

$$m_e = m + m_{em} \quad (2.113)$$

where m would be the mass of the uncharged body. If we think further we may also say that, if we measure the mass of a particle by measuring the force and the acceleration that it gives, we measure probably both masses, that is the experimental mass m_e , as we have to give energy both to the body and to the electromagnetic field.

There is even a more attractive solution, namely that the mass of the body is zero $m = 0$, and what we are measuring is the mass of the electromagnetic field $m_e = m_{em}$. If so, when we accelerate the body, we send energy only in the electromagnetic field. Could that be the case? Let's check that in the case of the electron, by estimating the size of a that gives $m_e = m_{em}$, where m_e is the experimental mass of the electron. Using 2.111, we get:

$$a = \frac{2}{3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \simeq 10^{-15} m \quad (2.114)$$

The value we obtain coincides with the upperbound of the dimension of the electron, as measured in many experiments and it may encourage us to believe that the mass of the electron comes in fact only from its electromagnetic field.

This supposition may receive even more ground, if we look at the first term. This is the energy that the electromagnetic field has when the charge is not moving. It can be easily understood as the energy to bring together the charges on the sphere of radius a . Since all the charges have the same sign, they will repel, and we have to push hard to bring them all close on the surface of the sphere. We may worry to the fact that the energy goes to infinity for a point charge $a = 0$. However, maybe there are no point charges, who could that ever measure with certainty?

There is however another striking thing, namely that the rest energy has a form that is very close to the famous Einstein

relation $E = mc^2$, only the factor is wrong. The factor can be however adjusted, as it depends on the model we take for the charges. We have used the charges distributed on the surface, but one may think of other models. Altogether, the electromagnetic mass gives very interesting results, that may be a clue to an underlying order of matter.

Is *all* the mass of the electron *only* the mass of the electromagnetic field? We do not have today a clear answer to this question, to your disappointment maybe. In spite of the above results, there are other drawbacks to the picture above. It is very difficult, for example, to incorporate a finite sized electron into the framework of relativistic quantum theory. Then, where does the mass of the uncharged particles come from? Are they *all* made of very small positive and negative charges?

That is why at this moment there is a general consensus to take the electromagnetic mass of the field *already incorporated* into the experimental mass. In other words, we measure the experimental mass m_e of a charged particle, and that is what we report. We do not know what is the "real" mass m of the particle (see 2.113), but we also do not care. Anyway, when we have to accelerate the whole complex body-electromagnetic field, we have to give energy to the system according to the total mass m_e . We can then also consider very small particles as point particles, or with dimensions that do not appear yet in our experiments, and we do not have to worry about the shape of the particles.

2.4 The momentum of the electromagnetic field

We have seen in the previous section how part of the mass of an electric charge is stored in the electromagnetic field. This can be even better seen if we consider that the electromagnetic field has a momentum associated with its mass.

For that, let us consider in the beginning a small unit of the electric fluid, and calculate the momentum that the electric fluid loses in the interaction with the electromagnetic field.



Figure 2.52: Text:

Taking into account the conservation of the momentum, we have then that the electromagnetic field has a momentum density of:

$$\text{labelx2 : } 5963 \mathbf{p}_{em} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.115)$$

In the exercise 2 we propose to use the above formula to calculate the momentum of the electric field of the moving charge discussed in the previous section. The result is that

$$\mathbf{p}_{em} = m_{em} \mathbf{v} \quad (2.116)$$

where m_{em} is the electromagnetic mass 2.111 and $\mathbf{v}$ is the velocity of the charge.

2.5 Soluțiile ecuațiilor lui Maxwell

2.5.1 The vector and scalar potentials

Teoria electromagnetica construita pina acum ne spune ca cimpurile magnetice si electrice exista si evolueaza in timp in asa fel incit ecuațiile lui Maxwell 2.82 sunt valabile *in orice punct din spatiu*, si *in orice moment*. Teoria pare astfel mai putin determinista, in sensul ca este mai dificil sa vizualizam cauza si efectul. Din fericire insa, exista o solutie matematica a ecuațiilor lui Maxwell, care pe deasupra lamureste si relatia cauza efect. Ea implica introducerea asa-numitelor potential vectoriale.

Constructia acestora se bazeaza pe doua relatii generale cimpurilor care au fie divergenta nula, fie rotorul nul. Astfel, legea a doua a lui Maxwell 2.82 ne spune ca divergenta cimpului magnetic este nula: $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$. Pentru simplitate, vom renunta din nou in continuare sa scriem explicit dependentia cimpurilor de spatiu si de timp. Avem deci

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.117)$$

Pe de alta parte, sunt cunoscute urmatoarele doua relatii matematice, valabile pentru orice cimpuri $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ si $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.118)$$

Prima relatie ne sugereaza, prin comparatie cu divergenta nula acimpului magnetic, ca cimpul magnetic $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ se poate scrie ca rotorul unui alt cimp $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.119)$$

Matematic, se poate de fapt demonstra ca acesta *trebuie* sa fie cazul, si anume ca mereu se poate gasi un cimp vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ care sa indeplineasca relatia de mai sus, atita timp cit divergenta cimpului magnetic este nula.

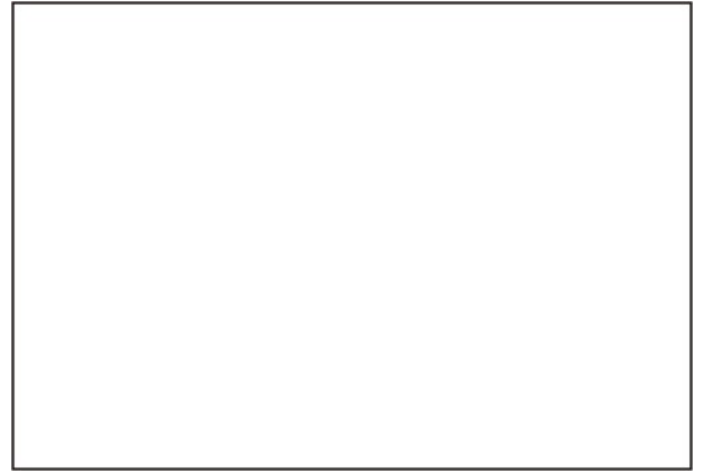


Figure 2.53: Nu e referata:

In acelasi fel putem proceda rescriind a treia lege a lui Maxwell 2.82, si folosind relatia 2.119 pentru cimpul vector $\mathbf{A}$ tocmai introdus:

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (2.120)$$

Comparand cu a doua relatie din 2.118, vedem ca putem scrie al doilea termen ca divergenta unui cimp scalar $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (2.121)$$

Din nou, se poate arata ca acest cimp scalar ϕ se poate gasi mereu, indiferent de formele cimpurilor $\mathbf{E}$ si $\mathbf{A}$, atita timp cit ele indeplinesc 2.120. Cimpul electric se scrie atunci ca:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.122)$$

In absenta cimpului magnetic, care poate fi data de $\mathbf{A} = 0$ din relatia 2.119, observam ca relatia precedenta se reduce la relatia ?? pentru cimpul electrostatic. In cazul electrostatic deci putem identifica cimpul ϕ ca potentialul electrostatic ?? . Remarcam in treacat ca absenta cimpului electromagnetic implica automat un cimp electrostatic, deoarece orice variatie in timp a cimpului electric $\mathbf{E}$ ar introduce un cimp magnetic, conform celei de-a treia legi a lui Maxwell 2.82.

Pe de alta parte, alegerile pentru cimpurile $\mathbf{A}$ si ϕ nu sunt unice! Astfel, sa presupunem ca am gasit o pereche $(\mathbf{A}, \phi)$ care indeplineste 2.121 si 2.119, si deci automat si relatiile 2.117 si 2.120, conform cu 2.118. Sa alegem atunci alt cimp scalar *oarecare* $\eta = \eta(\mathbf{r}, t)$, si sa facem urmatoarea transformare (numita *transformare de etalonare*):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \eta \quad (2.123)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.124)$$

Se poate verifica direct (prin utilizarea relatiilor 2.118) ca aceste noua cimpuri conduc la aceleasi valori pentru $\mathbf{B}$ si $\mathbf{E}$! Cu alte cuvinte, daca macar o singura pereche $(\phi, \mathbf{A})$ exista, atunci o infinitate de perechi pe care le putem alege. Atunci ne putem intreba care din aceasta multitudine de alegeri este cea "reala". Desigur ca aceasta este o intrebare mai mult filozofica caci, dupa cum am discutat, nici cimpurile $\mathbf{E}$ si $\mathbf{B}$ nu

sunt "reale", ele sunt niste instrumente matematice care descriu realitatea. Asa ca intrebarea de mai sus ar putea fi reformulata in sensul "care dintre multitudinea de cimpuri ar putea descrie mai bine realitatea?". O alegere particulara a unei perechi $(\phi, \mathbf{A})$ defineste o anumita etalonare, si noi vom face o alegere a unei astfel de etalonari putin mai tirziu.

O alta intrebare mai dificila este cea referitoare la semnificatia fizica a cimpurilor $(\phi, \mathbf{A})$. Desigur, pentru moment acestea reprezinta constructii matematice care ne ajuta sa descriem evolutia cimpurilor electromagnetice. Cu toate acestea, pentru o buna bucata de timp la inceputul acestui secol fizicienii au crezut ca ele au numai o utilitate matematica. In fond, au zis ei, cimpul electromagnetic actioneaza asupra sarcinilor electrice numai prin intermediul fortei Lorentz, si deci prin intermediul cimpurilor electrice si magnetice $\mathbf{E}$ si $\mathbf{B}$!

Observatia ramine valabila in cazul fizicii clasice. Vom vedea insa ca, in mecanica cuantica, lucrurile stau putin diferit. Aici se pot gasi situatii in care cimpul electromagnetic actioneaza asupra sarcinilor electrice pe anumite portii de spatiu unde cimpurile electrice si magnetice sunt nule ($\mathbf{E} = 0$ si $\mathbf{B} = 0$ in acele zone), dar cimpurile $(\phi, \mathbf{A})$ sunt diferite de zero! Aceste situatii se pot construi relativ usor, daca remarcam ca cimpurile electrice si magnetice date de relatiile 2.119 si 2.122 se obtin prin diferentierea cimpurilor $(\phi, \mathbf{A})$. Cu alte cuvinte, in mecanica cuantica, potentialele $(\phi, \mathbf{A})$ par au o semnificatie fizica mai profunda. In plus ecuatiile mecanicii cuantice implicand cimpul electromagnetic au o forma mult mai simpla daca folosim $(\phi, \mathbf{A})$, si vom vedea in capitolele urmatoare cum acestea vor juca rolul major in descrierea cimpului electromagnetic.

Incheind observatia precedenta, mai adaugam o singura remarca la o intrebare care apare atunci imediat. Cum alegerea perechilor $(\phi, \mathbf{A})$ nu este unica, iar acestea au semnificatie fizica in mecanica cuantica, nu influenteaza alegerea unei perechi sau alta rezultatele? Rasopunsul este negativ. In mecanica cuantica se arata (vezi sectiunea ??) ca rezultatele prezise ale masuratorilor sunt aceleasi pentru toate perechile $(\phi, \mathbf{A})$.

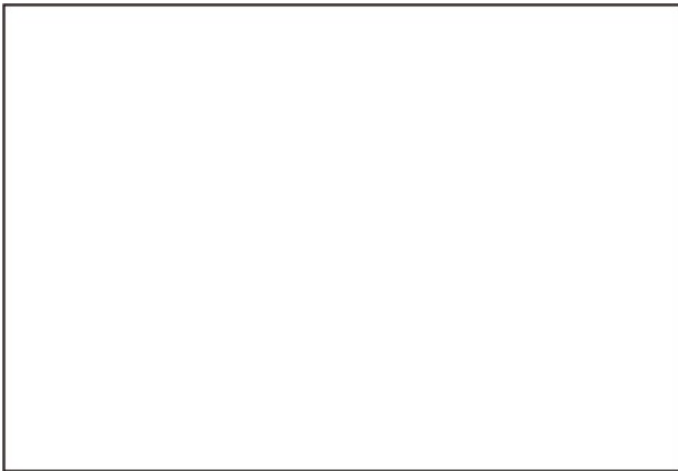


Figure 2.54: Alegerea lui $\mathbf{A}$ si ϕ nu este unica

In the previous section we have seen that there are many pairs of vector potential fields $(\phi, \mathbf{A})$ that satisfy the relations ???. Once we have found such a pair, we can construct many others with the relation ???. We may ask then which one of these pairs are "real". More important however, we may ask if these potentials are more "fundamental" than the electric field $\mathbf{E}$ and magnetic field $\mathbf{B}$.

The answer to the first is: *none* of these pairs are more real than others. We may choose to work with one pair (meaning in technical terms that we choose a gauge) or with a different

pair. From the experimental point of view, both choices will give precisely the same behaviour of the system under investigation. This is true not only in classical physics, but also in more advanced branches of physics, like quantum mechanics.

To our surprise however, in *quantum mechanics*, the vector potentials are more "fundamental" than the electric field $\mathbf{E}$ and magnetic field $\mathbf{B}$. In classical physics the vector potentials are only some mathematical tools that work as good as the electric and magnetic fields. In quantum mechanics however, they give additional predictions that can be obtained from the electric and magnetic field only using *non-physical* assumptions, such as non-locality.

In the section ?? we will show that measurement that proves experimentally that, in quantum mechanics, the vector potentials $(\phi, \mathbf{A})$ are more fundamental than the electric and magnetic fields. The experiment follows an older idea of Aharonov and Bohm who argued that, in quantum mechanics, the electrons can "feel" a region of an electromagnetic field where the electric fields $\mathbf{E} = 0$ and magnetic fields $\mathbf{B} = 0$ are zero, but the vector potentials $(\phi, \mathbf{A})$ are non-zero. How is it then possible that there are many equivalent pairs of vector potentials $(\phi, \mathbf{A})$ describing the system, and yet they all are more fundamental than the electric and magnetic fields, which are uniquely determined?

We now know that this points to a very fundamental property of all theories, called *gauge invariance*. As we will see in the chapter ??, all advanced quantum theories have these many equivalent possibilities for their vector potentials. The freedom in choosing these vector potentials allows for invariance under local phase transformations of the quantum fields (such as the wave of the electrons) as we will discuss later in the section ??. At the moment, it is important to realise that any pair of the vector potential $\phi, \mathbf{A}$ (and thus *any gauge*) is as good as all the others, and that all these vector potentials are more fundamental than the electric and magnetic fields.

2.5.2 Solutiile generale ale cimpului electromagnetic

Pentru moment, sa vedem ce vor deveni celelalte doua legi ale lui Maxwell 2.82 (prima si a patra) prin substitutiile 2.121 si 2.119:

$$\nabla \left(-\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.125)$$

$$c^2\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (2.126)$$

Pentru prima relatie vom folosi notatia $\nabla(\nabla\phi) = \nabla^2\phi$. In coordonate carteziene, acest operator are o forma foarte frumoasa. Astfel, daca folosim relatiile 2.127 si ??, vom obtine:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (2.127)$$

A doua relatie poate fi rescrisa cu ajutorul formulei $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$. Aici prin $\nabla^2\mathbf{A}$ intelegem un operator scalar 2.127 care actioneaza asupra fiecarei componente: $\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{i}\nabla^2 A_x + \mathbf{j}\nabla^2 A_y + \mathbf{k}\nabla^2 A_z$. Obtinem atunci pentru relatiile 2.125 urmatoarele forme:

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.128)$$

$$c^2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - c^2\nabla^2\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (2.129)$$

Ecuațiile de mai sus par complicate. Din fericire însă, cum am menționat, există o infinitate de perechi $(\phi, \mathbf{A})$ pe care le putem alege (ceea ce în termenii tehnici înseamnă alegerea unei etalonări). Etalonarea aleasă de noi se numește *etalonarea lui Lorentz*, și ea presupune alegerea acelei perechi $(\phi, \mathbf{A})$ care îndeplinește mereu (în orice punct din spațiu și la orice moment de timp) relația:

$$\nabla \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.130)$$

Matematic, se poate arăta că această alegere există și este unică. Acest lucru va deveni clar și pentru noi, când vom vedea că ea conduce la soluții *precise* ale cimpului electromagnetic.

În etalonarea Lorentz, cele două ecuații ramase ale lui Maxwell 2.128 iau formele extrem de elegante:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.131)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (2.132)$$

Scrise pe componente, aceste ecuații seamănă uimitor cu relațiile 2.92 descriind propagarea undelor electromagnetice în vid. Pentru cimpul scalar ϕ vom avea:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.133)$$

În locurile din spațiu unde nu există sarcini electrice ($\rho = 0$), ecuația de mai sus descrie de fapt unde ce se deplasează *în spațiu*, nu numai într-o direcție ca cele descrie de relațiile 2.92. Pentru a construi aceste soluții, să considerăm pentru început că avem o sarcină punctuală *nemiscată* $q = q(t)$ în origine. Densitatea de sarcină în tot spațiul se scrie atunci ca $\rho(\mathbf{r}, t) = q(t)\delta(\mathbf{r}, t)$.

Pentru că în afara originii nu există sarcini electrice, pentru poziții $\mathbf{r} \neq 0$ ecuația se reduce la:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.134)$$

Cum am menționat, soluția acestei ecuații este foarte asemănătoare cu soluția undelor plane din relația 2.93. Spre deosebire de relația 2.93 însă, aici trebuie să ținem cont de *simetria sferică* a problemei, unde sarcina electrică este la mijloc. Soluția generală se poate scrie atunci sub forma *undelor sferice*:

$$\psi(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} \quad (2.135)$$

Această soluție descrie practic o undă sferică ce se deplasează din centru (unde sursa unde este localizată), și a cărei intensitate scade pe măsura ce ne departăm de centru. În cazul general al undelor sferice, funcția $f(t - r/c)$ poate fi orice funcție analitică, dar în cazul nostru aceasta este unică și determinată de sursa electrică din centru.

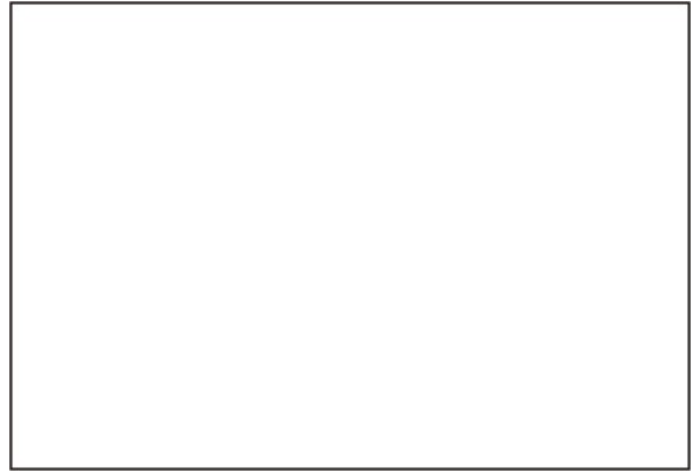


Figure 2.55: pune aici sarcina punctuală și undele sferice

Astfel, pentru poziții r apropiate de către sarcina electrică, în așa fel încât $r \ll ct$, putem scrie din 2.136:

$$\psi(r, t) = \frac{f(t)}{r} \quad (2.136)$$

Pe de altă parte, în această situație putem considera cimpul electromagnetic ca un fel de "cimp electrostatic variabil în timp". Prin aceasta vrem să spunem că în acest caz cimpul electric urmează variația în timp a cimpului electrostatic. Putem atunci rescrie relația ?? pentru cimpul scalar în forma electrostatică introducând variația în timp a sarcinii $q = q(t)$:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t)}{r} \quad (2.137)$$

Comparând relațiile 2.136 și 2.137 vedem că putem face identificarea $f(t) = q(t)/(4\pi\epsilon_0)$. Soluția generală a cimpului scalar $\phi(r, t)$ dat de o sarcină aflată în centrul sistemului de coordonate este atunci:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t - r/c)}{r} \quad (2.138)$$

După cum este prezentat în Fig.2.56, această reprezintă o undă sferică ce se deplasează de la sarcina electrică cu viteza c , identică cu viteza undelor electromagnetice ???. Prin comparație cu undele electromagnetice, relația precedentă este remarcabilă, căci ea ne spune că sarcinile electrice "transmit" undele sferice ϕ în orice condiții, chiar și când atunci sunt statice!

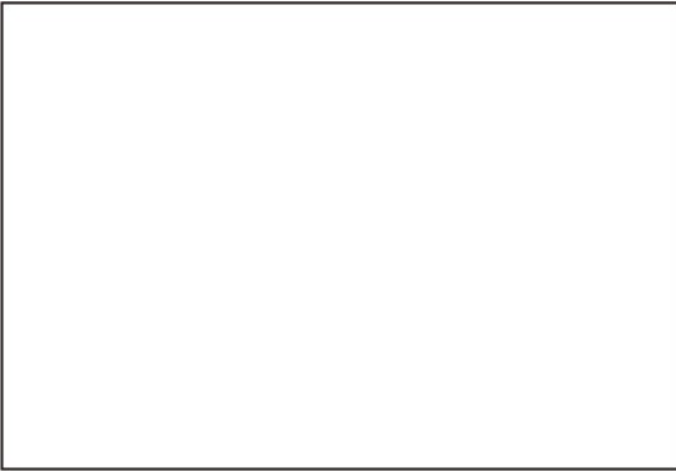


Figure 2.56: Text:

Putem acum construi solutia generala a ecuatiei 2 pentru cimpul scalar, daca luam in considerare *liniaritatea* acestei ecuatiei. Cu alte cuvinte, putem considera ca o distributie oarecare de sarcini electrice $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ este o suma de sarcini electrice aflate in diverse puncte din spatiu. De exemplu, sarcina electrica din volumul infinitesimal dV_2 aflat la pozitia $\mathbf{r}_2$ este $\rho(\mathbf{r}_2, t)dV_2$. Cimpurile date de toate aceste sarcini electrice trebuie adunate, luind desigur in calcul distanta $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ dintre punctul de calcul al cimpului scalar $\mathbf{r}_1$ si pozitia $\mathbf{r}_2$ a sarcinii electrice din volumul infinitesimal dV_2 . Aceasta sumare ia atunci forma integrala:

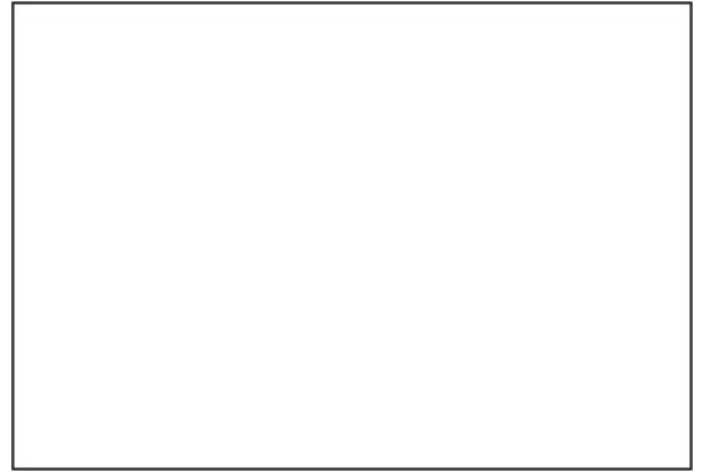
$$\phi(\mathbf{r}_1, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (2.139)$$

Relatia de mai sus ne spune ca cimpul scalar ϕ se calculeaza cu ajutorul *potentialelor retardate*. Cu alte cuvinte, fiecare sarcina electrica trimite in spatiu unde sferice ϕ , iar valoarea cimpului ϕ dintr-un anumit punct intr-un anumit moment de timp este suma tuturor acestor unde sferice. Acest potential ϕ se numeste retardat pentru ca unei sfere ii ia un timp finit sa ajunga pina in punctul de masura.

Ne intoarcem acum la a doua ecuatie din 2.131 si remarcam ca aceasta este identica cu prima daca o scriem pe cele trei componente ale sale x , y si z . Solutia acestor componente are aceeasi forma ca 2.139. Recombinind solutii acestor componente sub forma vectoriala, obtinem:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2 \quad (2.140)$$

Relatiile 2.139 si 2.140 reprezinta *solutiile generale* ale ecuatiilor lui Maxwell cautate de noi. Putem intelege acum mai bine relatia dintre cauza si efect in ecuatiile lui Maxwell, gindindu-ne la o solutie numerica in felul urmator. Stiind la un moment dat distributia sarcinilor electrice si vitezele lor, putem calcula unde sferice ($\phi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$) generate pina la un moment ulterior. Acestea vor exista insa numai intr-o sfera determinata de cit de departe pot ajunge aceste unde sferice in timpul dat! Adunam apoi unde sferice ($\phi, \mathbf{A}$) deja prezente in spatiu. Apoi, utilizind definitiile ?? putem calcula cimpurile ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) si deci fortele asupra sarcinilor cu formula lui Lorentz 2.41. Folosind legea lui Newton ?? obtinem astfel urmatoarele pozitii ale sarcinilor. Apoi reluam procedura printr-o metoda iterativa.

Figure 2.57: unde $\mathbf{A}$ si ϕ sunt ceva (unde sferice) ce "pleaca" de la electron si se propaga in spatiu

Analitic, putem sumariza aceasta procedura recapitulind principalele rezultate ale acestei sectiuni:

Cimpul electromagnetic generat de sarcini este

$$\phi(\mathbf{r}_1, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (2.141)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t) = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2 \quad (2.142)$$

Fora cu care el actioneaza asupra sarcinilor este:

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + q\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]$$

Desigur ca veti intreba, dar oare ecuatia fortei in formula de mai sus nu se poate simplifica mai departe? Ori formulele 2.141? Caci pare ca ne oprim aici brusc cu formularea matematica a electromagnetismului, tocmai cind parca am gasit o "mina de aur". Raspunsul e pozitiv. Formulele prezentate aici pot fi simplificate si mai mult, lucru pe care il vom discuta insa mai tirziu.

In finalul acestei sectiuni ne intoarcem putin la etalonarea Lorentz 2.130, relatie care trebuie sa fie indeplinita mereu de catre cimpurile ϕ si $\mathbf{A}$. Este acesta cazul? Din fericire este, si acest lucru poate fi dovedit imediat folosind solutiile deja gasite 2.141. Astfel, se poate verifica prin inlocuirea directa a solutiilor 2.141 in etalonarea Lorentz 2.130 ca aceasta conduce la relatia de conservare a sarcinii electrice ?? . Cu alte cuvinte, atita timp cit sarcina electrica totala se conserva (ceea ce noi presupunem ca este o lege fundamentala a materiei), atunci etalonarea Lorentz este satisfacuta de solutiile 2.141.

2.6 Lagrangeanul cimpului electromagnetic

We have discusses lagrangian mechanics in the section ??, treating the case of a mechanical system with many degree of freedom. We have also seen how the action principle ?? leads to the Euler-Lagrangian equations, and how these in turn describe the evolution of the system. Here we want to address a more daring task, namely to apply the lagrangian formalism to

the electromagnetic field, not at least because we will use later extensively this formalism.

2.6.1 Lagrangeanul unui cimp

We want first to define the problem, through a close analogy with the case studied in the section ??, and that is why we start from a general *field*. Let a field be described generically by one component $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$. In other words, this field takes a single value at each point location in the space. Later, in the electromagnetic case, where the field is described by four components (ϕ , A_x , A_y and A_z) we will generalise the solution obtained here.

In ?? we have discussed the lagrangian of a mechanical system with some degrees of freedom. In our field case, we may also say that we have such a situation. In the first instance, we may imagine that the field spans a discrete net of points $\mathbf{r}_k$ across the space. Then the field in *each point of space* $\phi_k(t) = \phi(\mathbf{r}_k, t)$ is one degree of freedom of the whole system. In other words, if we know the time behaviour of the fields ϕ_k in all points $\mathbf{r}_k$, then we completely know the whole field ϕ . Then, through analogy with ??, we may want to write the Lagrangean as $L = L(\phi_k, \dot{\phi}_k, t)$, where the dot represent a time derivative, as usual. However, this discrete form is very unhandy, as it involves dealing analitically with an infinite number of degrees of freedom k , and it hides the eventual simmetries of the system.

A much better way is to write the lagrangean L of a field as an *integral* over the whole space (a sum thus) of another analytical function $\mathcal{L}$, called *lagrangian density*:

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial t}) dV \quad (2.143)$$

First, we notice that we have introduced in the *lagrangian density* $\mathcal{L}$ not only the partial derivative of the field with respect to time, but also the spatial derivatives like $\partial\phi/\partial x$! We notice that the lagrangean above, if discretised, takes a form dependent only on ϕ_k and $\dot{\phi}_k$ as wanted, because the derivatives with the positions transform in differences $\partial_x \phi \rightarrow \phi_k - \phi_{k+1}$.

Secondly, we assume that the *lagrangian density* $\mathcal{L}$ introduced in 2.143 is an *analytical function* of the five variables, like the lagrangean L from the mechanical system ??. This analytical form of $\mathcal{L}$ bares *the whole information* about the field. In addition, $\mathcal{L}$ is not explicitly dependent on the spatial coordinates $\mathbf{r}$ and, in our case, also not of time t . As an example, we present here the analytical form of the lagrangian density $\mathcal{L}$ for a *scalar field*:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} \phi^2$$

We will see later (section ?? that this field, if quantized, may describe the evolution of some real particles (called *pions*) in the so-called standard model. However, the form above is relevant for the electromagnetic field as well.

Because the differentiation goes over the space coordinates x, y, z as well as over the time coordinates t , we would like to make a notation that we will use extensively along this book. Thus, we will introduce the space-time four dimensional vector:

$$x^\nu \leftrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}) \quad (2.144)$$

The variable ν ($\nu = \overline{0, 4}$) designates the *space-time* coordinates, and it is usual to be chosen as a greek letter (like ν , μ , σ , etc.). Notice that for the time coordinate x^0 we have introduces the speed of light c to make it have the same units as the

spatial coordintes. Since c is considered an universal constant, this doesn't affect the physics.

We want now to simplify the way we write the equation 2.143. For that, we notice that the field derivatives $\partial\phi/\partial x^\nu$ inside the defintion 2.143 must be taken as *variables*. In other words, we by no means are allowed to derivate some fields inside the brackets of $\mathcal{L}$ from 2.143. For these derivatives we make the notation:

$$\partial_\nu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \quad (2.145)$$

On its components, the operator ∂_ν is introduced thus as:

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (2.146)$$

We can then re-write 2.143 as:

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi) dV \quad (2.147)$$

By the convention we just established, every time we see $\partial_\nu \phi$ *inside the Lagrangian* we understand that this is just an analytical variable, we take it as a symbol, and by no means do some differentiation. With this definition for example, we can write that the lagrangian density for the scalar field as:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2 - (\partial_2 \phi)^2 - (\partial_3 \phi)^2] - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} \phi^2 \quad (2.148)$$

We can now try to write the action ?? as

$$S = \int L dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi) d^4 x^\nu \quad (2.149)$$

where $d^4 x^\nu = dx \cdot dy \cdot dz \cdot c dt$. Because c is an universal constant, we will ignore further the factor $1/c$ in the from of the above integral.

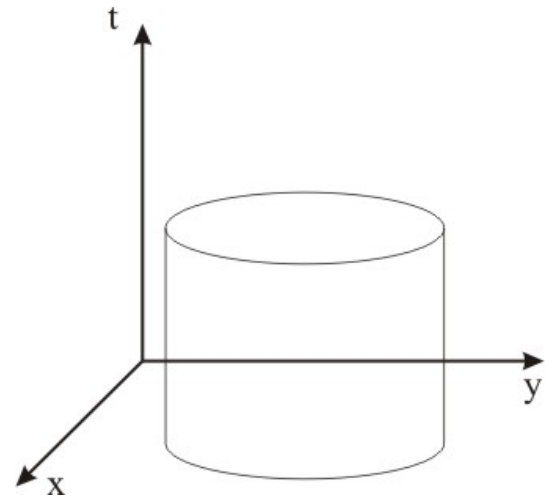


Figure 2.58: lagrangian-field-4D.jpg

The principle of the minimum action ?? tells us that the value of S is an *extreme* for a real evolution of a mechanical system, when some appropriate frontier conditions are taken. How do we translate this principle in our case? We start by visualising first the situation, and that is why we have drawn in Fig.2.58 the *space-time* evolution of a *two dimentional* field

$\phi = \phi(x, y, t)$. This field must have some equations for its evolution, that will lead to a certain real evolution of the field in time. We call it a real evolution (or a real path), and this the analogus of the real trajectory of the particle in Fig.???. By comparison with the same Fig.?? we may also want to draw arbitrary evolutions of the field, which will never happen in reality (because they do not satisfy the equations of the given field), and that we may call *virtual* evolutions, (or virtual paths). In each of these two cases we see that we can calculate the action ?? as an integral *over the whole space-time* 2.149.



Figure 2.59: Text:

We can now rephrase the principle of the least action ?? for a field in a space-time situation, compatible with the form 2.149:

1. Let us consider all arbitrary field evolutions that are continuous and that have *the same values* for the field ϕ_ν at the *boundary* of a fixed space-time volume Ω , as in the Fig.2.59.
2. The real evolution of the field $\phi(x_\nu)$ will be given than by that field variation for which the action S (defined by 2.149) is *an extreme* with respect to all other possible field variations.

The above definition should lead us to the Euler-Lagrange equations for the field. To see how it does, let us denote a real variation of the field with $\phi = \phi(x^\nu)$ (we may imagine it a possible way to fill up the space-time from Fig.2.58). Next, let us consider an arbitrary field evolution, close to the real one (we may imagine a different way to fill up the space-time from Fig.2.58). In addition, this should have the same values on the space-time boundary Ω as mentioned in the principle above. We may denote this arbitrary evolution as:

$$\phi'(x^\nu) = \phi(x^\nu) + \delta\phi(x^\nu) \quad (2.150)$$

$$\delta\phi(x^\nu) = 0; \text{ on the space-time boundary } S \text{ of } \Omega \quad (2.151)$$

These two evolutions (ϕ and ϕ'), being different ways of filling the space-time, will lead to two different actions 2.149. The difference between these two actions will be:

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi) d^4 x^\nu \quad (2.152)$$

Now it is a crucial moment, where we take into account the analytical form of the function $\mathcal{L}$, as discussed in the beginning of the section. Because of this analytical form, we may write the difference $\delta \mathcal{L}$ as:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \sum_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta (\partial_\nu \phi) \quad (2.153)$$

We have to pay attention especially to the second term $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\nu \phi)$. This derivation must be done taken into account the analytical form of $\mathcal{L}$. For example, for the scalar field 2.148 we have:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_2 \phi)} = \partial_2 \phi \quad (2.154)$$

Next, in the second term of 2.153 we will write:

$$\delta \partial_\nu \phi = \partial_\nu (\delta \phi) \quad (2.155)$$

As in the section ??, the two differentiations ∂ and δ are interchangeable. ∂ refers to variations of the same field, and δ refers to variations between the two fields ϕ and ϕ' at the same location and the same moment (see 2.150). Thus, in the formula above, $\delta \phi$ may be seen as an small arbitrary field, whose derivatives can be calculated with $\partial_\nu (\delta \phi)$.

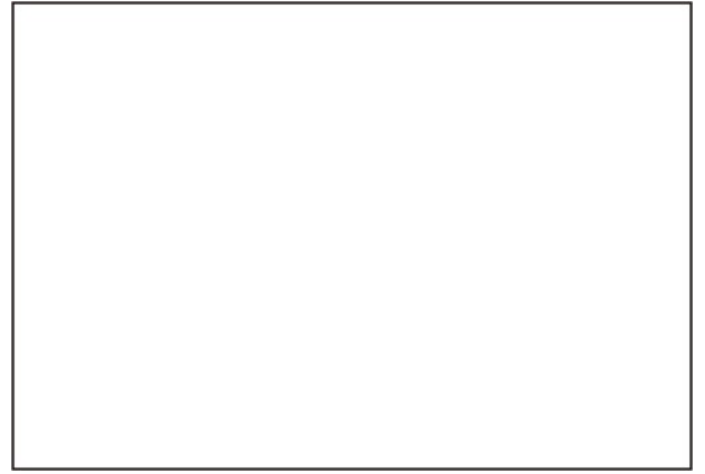


Figure 2.60: vizualizeaza lagrangienii:

We now use partial differentiations (following the recipe of section ??), to write down the second term in 2.153 as:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\nu (\delta \phi) = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta \phi \right] - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right] \delta \phi$$

Replacing this into ?? and further into 2.152 we get for the difference in action:

$$\delta S = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\nu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \right] \delta \phi \cdot d^4 x^\nu + \int_\Omega \sum_\nu \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta \phi \right] d^4 x^\nu \quad (2.156)$$

The second part can be written, according to the generalized Stokes theorem in four dimensions, as an integral on the *surface* S of the space time region Ω as:

$$\int_\Omega \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta \phi \right] d^4 x^\nu = \oint_S \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta \phi \right] \mathbf{n}_\nu d\mathbf{S} = 0$$

where $\mathbf{n}_\nu$ is the three-dimensional unity vector along the direction ν . The above integral is zero, because of the imposed boundary conditions, that say that $\delta \phi = 0$ on the surface S (see 2.150).

The principle of the least action, introduced in the beginning of this section, tells us that the variation δS from 2.156

must be zero, because S is an extreme with respect to variations around the real path ϕ :

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right) \right] \delta \phi \cdot d^4 x^{\nu} = 0$$

The above integral must be zero for *any* small difference $\delta \phi$ in the chosen fields, that respect the boundary conditions 2.150. But we see, looking at the integral, that this is possible only when the integrand is zero *in any point of the space-time*! We arrive then at the *Euler-Lagrange equation* that must be satisfied by the real field ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{\nu} \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right) = 0 \quad (2.157)$$

After a tough mathematical round, we obtained the equations that describe the real evolution of the field ϕ , starting from its *Lagrangian density* $\mathcal{L}$. To exply these equations, let us write them for the scalar field 2.148. Using 2.154, we have then:

$$-\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi - \partial_0(\partial_0 \phi) - \partial_1(-\partial_1 \phi) - \partial_2(-\partial_2 \phi) - \partial_3(-\partial_3 \phi) = 0$$

Using the definition 2.127 of the Laplacian ∇^2 , this can be written under the familiar form:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (2.158)$$

This is known as the Klein-Gordon equation. For $m = 0$ it reduces to the wave equation ??.

At the end of this section, we want to emphasize few things. First, it is crucial to take the density of the Lagrangian $\mathcal{L}$ an analytical function of the field ϕ and its derivatives $\partial_{\nu} \phi$ in the space-time. As stressed during this section, one must do a formal differentiation.

Secondly, we emphasise once more that *all the information* about the field is gathered in the analytical form of $\mathcal{L}$. This is the information we are going to hunt during this book. In fact, at the end of the book, we will summarize all the present knowledge of our physical world in a *single lagrangian density* $\mathcal{L}$, part of the so-called *the Standard Model* (see ??). Here, the total field present in the Universe has many components, associated with all the force we know, besides gravity (electromagnetic, weak and strong force).

At the end of this section, we mention that the same type of analysis can be applied to a field with more components. We do not show here, but then the principle of least action will lead to a *Euler-Lagrange equation for each component*.

2.6.2 Cimpul electromagnetic in vid

We want now to construct the *lagrangian density* $\mathcal{L}$ of the electromagnetic field in free space. As discussed before, these should lead to the Maxwell equations in free space when using the Euler-Lagrange equations. First we notice that our electromagnetic field has more components, and we have seen in the previous sections that a very good choice are vector potential fields $\phi, \mathbf{A}$. As we have seen, all the four the Maxwell equations for this components translate in fact only in the two relations

2.141 if we take the Lorentz gauge 2.130. In order to simplify the equations, we create now a four-dimensional entity A^{ν} out of the scalar ϕ and the vector $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} A^{\nu} &\leftrightarrow (A^0, A^1, A^2, A^3) = \\ &= \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right) = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \end{aligned} \quad (2.159)$$

We have introduced an additional minus sign in our definitions to be compatible with the discussion from the next chapters.

The next step is to construct the *lagrangian density* $\mathcal{L}$. We start with a guess. We have seen in the section ?? that a usual choice for a lagrangian L was a difference between the *kinetic energy* T and the *potential energy* V : $L = T - V$. The total energy E was the sum of the two: $E = T + V$. In our case, we have seen that the electromagnetic field has an *energy density* $u(\mathbf{r}, t)$, given by the formula 2.108, which can be related to the total energy (if integrated). The energy density $u(\mathbf{r}, t)$ has two parts, one given by the electric field, and the other by the magnetic field. We may consider then that one represent the kinetic energy, and the other the potential energy¹⁴ and then take the difference as a guess for the Lagrangian density:

$$\mathcal{L}(A^{\nu}, \partial_{\mu} A^{\nu}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) \quad (2.160)$$

We have to express the above relation in terms of the vector fields $A^{\nu} = (\phi/c, \mathbf{A})$. This is easy, if we take into account the relations 2.122 and 2.119, that give:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{L}(A^{\nu}, \partial_{\mu} A^{\nu}) &= \sum_{i=1}^3 c^2 (-\partial_0 A^i - \partial_i A^0)^2 - \\ &- (\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2)^2 - (\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3)^2 - (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)^2 \end{aligned} \quad (2.161)$$

Next, we have to see if the chosen Lagrangian leads to the Maxwell equations in free space, a check we can do the help of the Euler-Lagrange equations. We mentioned here that, because we use the vector fields A^{ν} , the Maxwell equations ?? and ?? are satisfied automatically. We have to verify *only* ?? and ??.

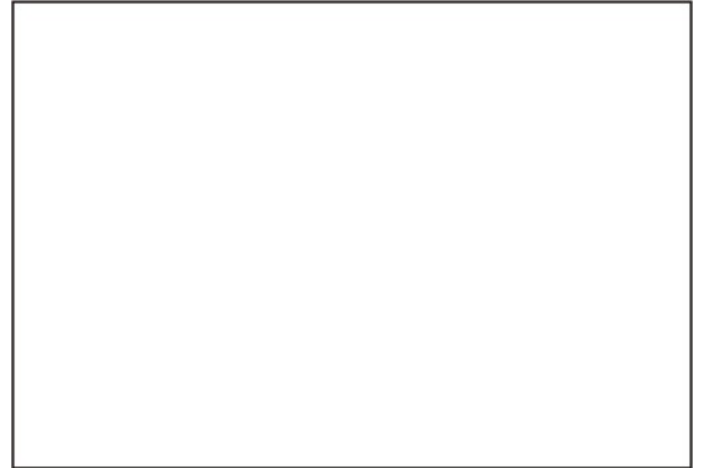


Figure 2.61: Nu e referata:

¹⁴verify that this identification may be made!

As we have mentioned previously, for a field with many components (like the field A^ν), *each component* ν must satisfy the Euler-Lagrange equation 2.157:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \right) = 0 \quad (2.162)$$

As emphasised in the previous section, the lagrangian density $\mathcal{L}$ given by 2.165 must be seen as an *analytical function* of A^ν and $\partial_\mu A^\nu$. From 2.161 we see that the lagrangian 2.165 contains only derivatives of A^ν , and thus we have $\partial \mathcal{L} / \partial A^\nu = 0$. We have then to calculate only the derivatives with respect to $\partial_\mu A^\nu$. Let's start with the scalar field $A^0 = \phi/c$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A^0)} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2 (\partial_i A^0 + \partial_0 A^i) = -\epsilon_0 c E_i \end{aligned} \quad (2.163)$$

By replacing these expressions into 2.162, we get:

$$0 = \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^0)} \right) = 0 + \sum_{i=1}^3 \partial_i (-\epsilon_0 c E_i) = -\epsilon_0 c \nabla \mathbf{E}$$

We see that the Euler-Lagrange equation for the component A^0 (or ϕ), leads to the Maxwell equation ?? in free space.

To check the last Maxwell equation ?? we write the Euler Lagrange equation 2.162 for the component $A^1 = A_x$. From 2.165 and 2.161 we have:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^1)} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2 (\partial_1 A^0 + \partial_0 A^1) = -\epsilon_0 c E_x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 A^1)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_2 A^1)} &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2 (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1) (-) = \epsilon_0 B_z c^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_3 A^1)} &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2 (\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3) = -\epsilon_0 B_y c^2 \end{aligned}$$

The Euler Lagrange equation then becomes

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0 (-\epsilon_0 c E_x) + \partial_1 (0) + \partial_2 (\epsilon_0 B_z c^2) + \partial_3 (-\epsilon_0 B_y c^2) = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right)_x \end{aligned} \quad (2.164)$$

We see that this equation is in fact the Maxwell equation ?? for the component x . The same analysis may be done for the other components. This completes our proof that the Lagrangian density 2.165 leads to the Maxwell equations for the electromagnetic field.

It is interesting to note that, since we get to the Maxwell equations, the lagrangian density 2.165 is good for *any gauge* we take for the vector potentials. In other words, the action ?? is a *local extrema* for all gauges. If we want to work with a certain gauge, then we may even simplify further the form 2.165 of the Lagrangian density. It is thus possible to select first a subclass of vector potentials A^ν , given by a certain gauge (like the Laurentz gauge ??), and then work within that subclass (applying, for example, the principle of least action). As an example, we present in the exercise 2 the lagrangian density in the Lorentz gauge.

2.6.3 The lagrangian equations in the presence of charges

We now turn to the cases when electric charges are present. We first consider that the charges are brought in and moved by some external observer, and we are interested only in what is the electromagnetic field created by these charges. In other words, we consider that the created electromagnetic field *does not influence* charges in their movements.

Let be the charge configuration given by $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t})$. From this one may compute the electric current density $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ as well, with the help of the conservation law ???. Next, we observe that we want to find only *only* the electromagnetic field A^ν , and thus the Lagrangian density will depend only on A^ν and $\partial_\mu A^\nu$, because this is what we can vary when applying the principle of least action $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu)$.

Next, we look at the Lagrangian density for the free field 2.165 (or 2.161) and ask ourselves what terms must be added in order to obtain the Maxwell equations ?? and ?? *in the presence of electric charges*, if we use the Euler-Lagrange equations 2.162. This task turns out to be very easy, as we can see that the Maxwell equations contain a term proportional with the charges ρ and $\mathbf{j}$. Since the Euler-Lagrange equations 2.162 contain also a differentiation with respect to the field A^ν (that was zero in the case where no charges were present), we may try directly:

$$\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu) = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) + (\mathbf{j} \mathbf{A} - \rho \phi) \quad (2.165)$$

We see that the above form immediatly gives the Maxwell equations ?? in the presence of charges, when using the Euler Lagrange equations, through the terms:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^0} = -c\rho; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^i} = j_i;$$

For example, we have the following Lagrange-equation for the fields $A^0 = \phi/c$ and $A^1 = A_x$, if we use directly the results 2.163 and 2.164:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^0)} \right) = -c\rho + \epsilon_0 c \nabla \mathbf{E} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_1} - \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^1)} \right) = j_x - \epsilon_0 c^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right)_x \end{aligned}$$

These represent the Maxwell equations ?? and ??. The other two ?? and ?? are satisfied automatically by the potential vectors A^ν , as we mentioned before.

The lagrangian density 2.165 is a great result. It show us, through a simple formula, how the electromagnetic field is generated by the electric charges. But it does not show how the electromagnetic field influences the movement of the electric charges. We know now that that is done through the Lorentz force 2.41. We can include in our theory this aspect, by adding another term to the Lagrangians we wrote up to now. However, we restrict ourselves to a simpler problem, one which is going to be very helpful in future chapters, namely the movement of a charged point particle through the electromagnetic field.

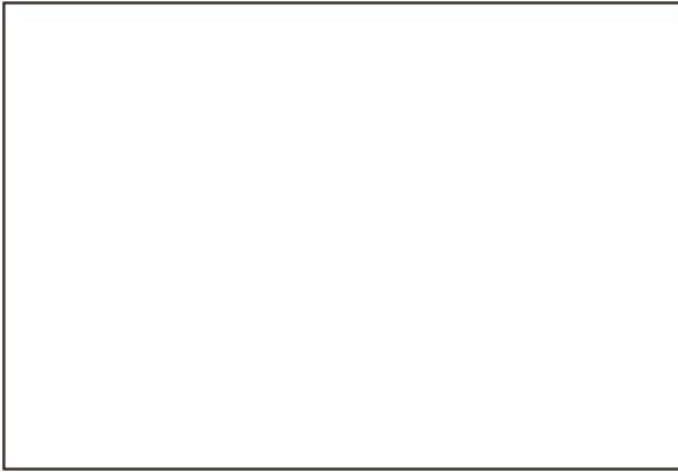


Figure 2.62: Nu e referata:

Thus, let us consider a known electromagnetic field given by the potentials $(\phi, \mathbf{A})$, and a point charge q . The Lagrangian of the free point charge is simply given by:

$$L_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2} \quad (2.166)$$

Notice that this is a full Lagrangian, as in ??, and not a Lagrangian density, as it is the case for the fields.

Next, we may add the part in the Lagrangian that is responsible for the interaction between the point charge and the electromagnetic field. For that, we have only to consider the second part in 2.165, and replace the charge density $\rho(\mathbf{r}') = q(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = q\mathbf{v}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Noticing that we have to integrate on the whole space, as in ??, we obtain for the interaction part of the Lagrangian:

$$\begin{aligned} L_I(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \int [q\mathbf{v}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{A}(\mathbf{r}') - q(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' \\ &= q\mathbf{v}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - q\phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

The Lagrangian that describes the movement of a particle of charge q is the sum of 2.167 and ??:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2} + q\mathbf{v}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - q\phi(\mathbf{r}) \quad (2.167)$$

We have to show now that this Lagrangian does indeed lead to the Lorentz force 2.41. For that, let us apply the Euler-Lagrange equation ?? for the component x . We have:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= q \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{v}\mathbf{A}(\mathbf{r})] - q \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial v_x} &= mv_x + qA_x(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.168)$$

In the first equation we may rewrite the second term using the vector identity ??. If we take the x component of this, we may write:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x + \\ &\quad + [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_x \end{aligned}$$

If we use the above relation for $\mathbf{v}$ and $\mathbf{A}$ we have:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x \quad (2.169)$$

Next, we have to take the time derivative from the second equation 2.168. We have to take care to the time derivative with respect to the term $qA_x(\mathbf{r})$. Because the particle is moving, the derivative must be written as:

$$\frac{d}{dt} A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_x(\mathbf{r}, t) + v_x \frac{\partial}{\partial x} A_x(\mathbf{r}) \quad (2.170)$$

Replacing the above result and 2.169 in the Euler-Lagrange equation ??, we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} &= qv_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + q[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x - q \frac{\partial \phi}{\partial x} - \\ &- ma_x - q \frac{\partial A_x}{\partial t} - qv_x \frac{\partial A_x}{\partial x} = -ma_x + q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] + \\ &+ q[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x = -ma_x + qE_x + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = 0 \end{aligned}$$

We see that we've the Lorentz equation for the x component. The Lorentz force in the previous formula is clearly visible.

Even though we have shown that the Lagrangian 2.167 describes correctly the movement of a charge particle in an electromagnetic field, a much more deeper question arises. Indeed, we have constructed the Lagrangian 2.167 starting from the Lagrangian density 2.165. But the formula 2.165 describes how the electric charges *generate* the electromagnetic field, and 2.167 how the charges *react* to the electromagnetic field! There is clearly a logical problem here, since we do not expect to find out immediately how a charge *react* to the electromagnetic field, from the formula's that show us how it *generates* the electromagnetic field!

In a different way, we may say that we deduced the Lorentz force 2.41 from the Maxwell equations that can be obtained from 2.165. This point would however not be new to us, as we have discussed in the section ??. There we have also "deduced" in a way the Lorentz force from a generalisation of the Faraday's law. So, what is happening? Clearly, the nature is hiding more fundamental principles in our equations...

A first answer to our observation lies in the way we have defined the electromagnetic fields. If we look at the definition 2.4 for the electric field $\mathbf{E}$ we see that it is "tailored" already to give the electrostatic force $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. In a way, we may be tempted to say that we introduced the electromagnetic field only as a *mathematical structure* that mediates the interaction between the charges. This idea has some resemblance with what we are going to discuss in the section ??, where we will show that, starting from a general principle (called gauge invariance), one can "construct" the electromagnetic field as a mediator for the interaction between the charges.

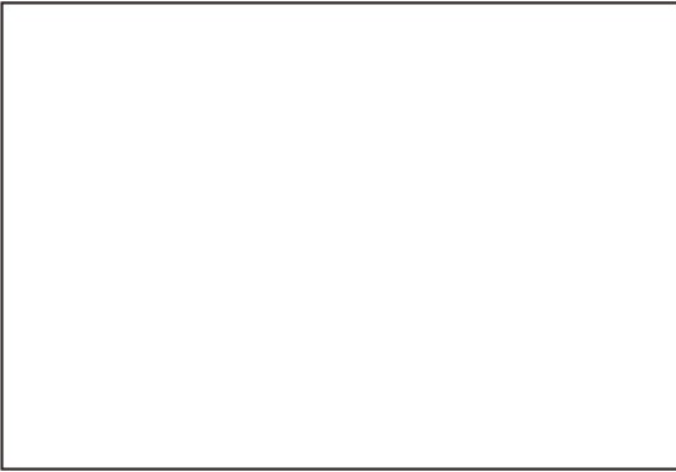


Figure 2.63: Nu e referata:

However, the probable answer is not this. The electromagnetic field *has* a physical existence, as we can see for example that it travels alone away from the charges. Later we will see that it has particles, called *photons*, no more less real than the electrons themselves. Probably, the best answer lies into the *unified form* of the equations of the matter. To show how it works, we may use the Lagrangian 2.167 and Lagrangian den-

sity 2.165 to write a single Lagrangian that describes *both* the electric field generated by n electric charges q_i and the interaction among them through the electromagnetic field:

$$L = L_p + L_{EM} + L_I \quad (2.171)$$

$$L_p = \sum_{i=1}^n \frac{mv_i^2}{2}$$

$$L_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} \int [\mathbf{E}(\mathbf{r})^2 - c^2 \mathbf{B}(\mathbf{r})^2] d^3r$$

$$L_I = \sum_{i=1}^n \frac{mv_i^2}{2} + q_i \mathbf{v}_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) - q_i \phi(\mathbf{r}_i)$$

Here we have a *unified* Lagrangian that describes the results from our first two chapters. The Lagrangian L_p describes the free particles of charges q_i and velocities v_i . The Lagrangian L_{EM} describes the free electromagnetic field. The *interaction* Lagrangian L_I is crucial. It describes how the charges interact with the electromagnetic field and it adds not only how the electromagnetic field is *generated* by the electric charges q_i , but also how this electromagnetic charges *react* to the electromagnetic field.

2.7 Lumina

2.7.1 The speed of light

In the section ?? we have calculated the speed of the electromagnetic waves in empty space, and we have shown (see ??) that it equals $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 3 \cdot 10^8$ Km/s. This value, calculated from Maxwell's equations, is remarkably close to the known velocity of light. That made Maxwell to propose that *the light is a traveling electromagnetic wave*.

This discovery, proved later right, had huge implication in physics. We are not going to discuss here all the electromagnetic aspects of light, but we are going instead to concentrate only on few aspects that are useful for our future discussions. We start first by showing the way the speed of light was determined first.

Faptul ca lumina traverseaza spatiul cu o viteza foarte mare pare evident din toate observatiile cotidiene. Galilei chiar a incercat sa masoare viteza luminii cu ajutorul unor semnale luminoase, fara succes insa. Prima reusita a fost a lui Olaf Romer (1676), un astronom danez care a fost preocupat de perioadele de revolutie ale satelitilor lui Jupiter, tocmai descoperiti de Galilei.

Pentru o masuratoare mai precisa a perioadei de revolutie (definit ca timpul in care unul din sateliti se invarte in jurul lui Jupiter), Romer a masurat doi timpi consecutivi la care satelitul tocmai intra in umbra generata de Soare in spatele lui Jupiter. In Fig. 2.64 prezentam o schema, impreuna cu o frumoasa fotografie a celui mai mare satelit al lui Jupiter, Ganymede. Deoarece revolutia satelitilor lui Jupiter este aproape uniforma, ne asteptam ca perioada de revolutie sa fie aceeaasi, indiferent cind este masurata. Ea este in cazul lui Ganymede de ordinul a $\tau \simeq 7$ zile. Spre surprinderea sa, Romer a observat ca perioada de revolutie observata δT depinde de momentul in an cind este masurata, variind cu valori

de ordinul a cîteva minute (sa remarcam precizia necesara in masurarea timpului).

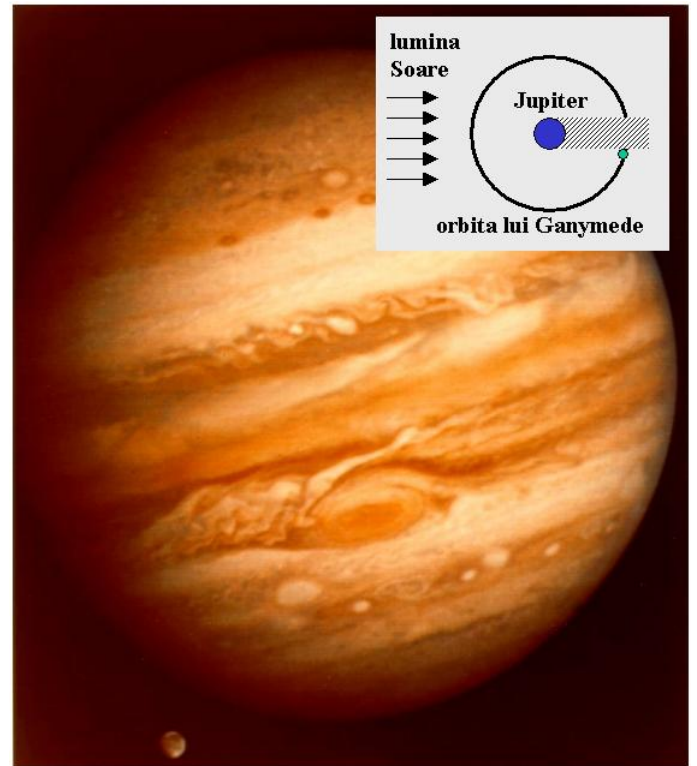


Figure 2.64: fig:ganymede

Observind ca perioada de revolutie pare mai mica cind Pam-

intul in miscarea sa se apropie de Jupiter, si mai mare cind se indeparteaza, Romer a atribuit corect acest efect vitezei finite a luminii. Practic, in primul caz, intre cele doua masuratori consecutive de intrare a lui Ganymede in umbra lui Jupiter, Pamintul vine "in intimpinarea" luminii. Timpul de revolutie astfel masurat δT_1 este de fapt mai mic decit cel real τ cu valoarea deplasarii Pamintului impartita la viteza luminii. Stiind viteza Pamintului v si aproximind ca Pamintul se indreapta exact catre Jupiter, avem:

$$\delta T_1 = \tau - \frac{v * \delta T_1}{c} \quad (2.172)$$

In acelasi fel estimam timpul masurat pe Pamint intre cele doua evenimente cind Ganymede intra in umbra lui Jupiter, pentru cazul cind Pamintul se indeparteaza de Jupiter:

$$\delta T_2 = \tau + \frac{v * \delta T_2}{c} \quad (2.173)$$

Cum pe periada unui an planeta Jupiter nu se misca prea mult, vom gasi ca cele mai favorabile momente de masurat δT_1 si δT_2 sunt la un interval de o jumate de an. Din relatiile de mai sus avem viteza luminii:

$$c = v \frac{\delta T_1 + \delta T_2}{\delta T_1 - \delta T_2} \quad (2.174)$$

Cum δT_1 si δT_2 sunt ambele de ordinul a 7 zile si difera in ordinul a citeva minute, masuratoarea trebuie sa fie precisa. Datorita acestui fapt, Romer a utilizat o metoda putin diferita decit cea prezentata sumar mai sus [?], constind practic in masurarea mai multor evenimente, obtinind in final o valoare de $c \simeq 200.000 Km/s$, cam doua treimi din valoarea celei reale:

$$c = 299.793 Km/s \quad (2.175)$$

Obs: aici e ceva putred ce nici Born n-a discutat: este posibil ca sa vezi intrarile din pozitii ale Pamintului diferite cu jumatate de an? Ca daca imi imaginez figura, rezulta ca o data din doua pozitii, Ganymede e in spatele lui Jupiter si deci nu poate fi vazut cind intra in umbra!!

2.7.2 Light as an electromagnetic wave

Since the measured velocity of light 2.175 and the calculated velocity of the electromagnetic waves ?? are about the same, Maxwell's proposal that light is an electromagnetic wave didn't encounter much opposition. In fact, it was known that the light is a wave, starting with the work of Robert Hooke (1635-1703) and Christian Huygens (1629-1695). At that time however, it was not known what was actually "waving" in light. Maxwell proposed that the electric field $\mathbf{E}$ and magnetic field $\mathbf{B}$ vectors are the ones that are "waving".

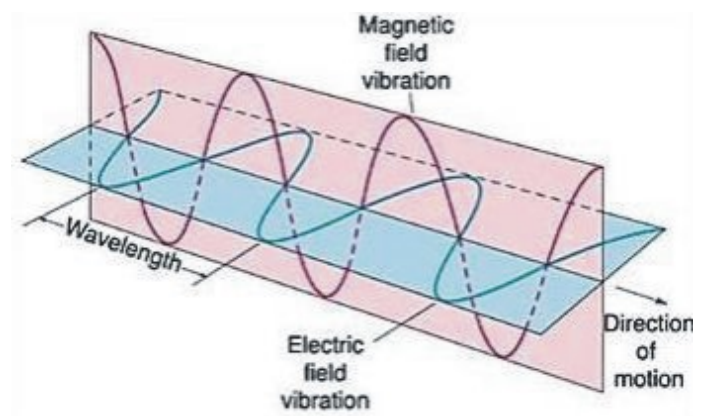


Figure 2.65: Caption

In Fig.2.65 we present the electromagnetic field associated with a light wave. As we can see, this Figure is almost an identical copy of the Fig.2.43 that was shown for a general electromagnetic wave. In Fig.2.65 we can distinguish the plane in which the electric field $\mathbf{E}$ oscillates, called the *polarization plane* of the light, and the direction of the light wave. The main difference with Fig.2.43 is that we consider *sinusoidal* waves when we talk about light. The collection of all possible frequencies of these oscillations is called *the spectrum*. In Fig.2.66 we present the spectrum of the electromagnetic waves. Notice that the relation between the wavelength λ and the frequency ν is $\lambda = c\nu$ as discussed in ??.

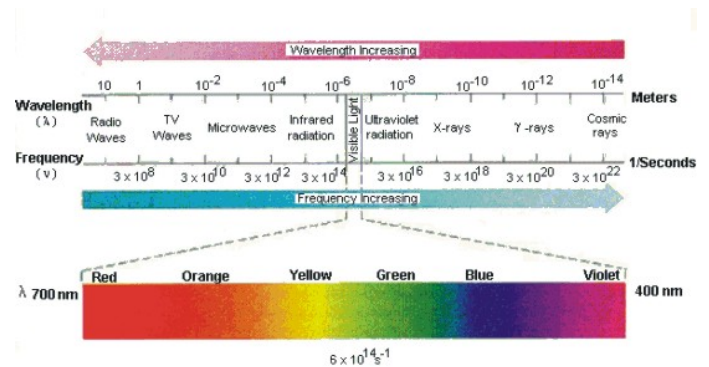


Figure 2.66: Caption

We see in Fig.2.66 that the spectrum of the electromagnetic waves is very large. The region we call *light* is situated in the centrum, and varies only from about $\lambda = 400nm$ to $\lambda = 700nm$. In this region, *each color is associated with a certain frequency* of the electromagnetic wave. These frequencies are however incredibly high for our day by day experience, being around $5 \cdot 10^{14} s^{-1}$. It must be said that there is no clear border between different frequency regions, each region being mainly associated to different applications, or baring some historical origin (like γ -rays). The range of the visible light is determined by the sensitivity of the human eye.

Looking at the high frequency of the visible light, we see that Maxwell's proposal put however a big strain to the experimentalists. How could they prove directly in the laboratory that the visible light is an electromagnetic wave? Even before him however, Michiel Faraday showed that light can be influenced by magnetic fields. Faraday sent light through an optically transparent material, subject to strong magnetic fields. He discovered that the *polarisation plane* (see Fig.2.65) of the lightwave were rotated when the light path and the direction of the applied magnetic field were parallel.

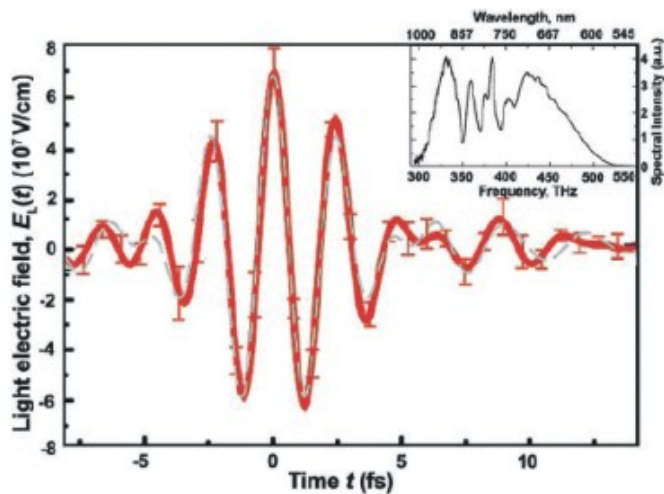


Figure 2.67: Caption

In the end, first direct measurements of the oscillating electric field of the light wave were obtained only recently. In Fig.2.67 we present a result of such measurement. On the vertical axis is a measure of the strength of the electric field, and on the horizontal time one has use $tex1fs = 10^{-15}s$. We see that the measurement is not continuous, and it shows only a "glimp" of the oscillating electric field.

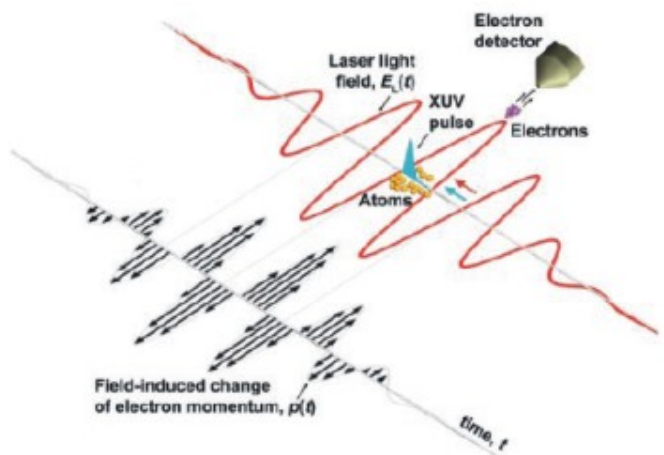


Figure 2.68: Caption

It is interesting to show here how the measurement was done, even though we may address some aspects that we are going to adress in later chapter. In Fig.2.68 we show the schematic of the measurement, made in 2005 by a group of scientists from the Technische Universitat Wien, Universitat Bielefeld, and the Max Planck Institut. Here one *two pulses* of light of different frequencies. They are obtained from very fast *lasers*, which can consider for the moment very powerful sources of light.

A first XUV pulse, with a frequency of $22.5 \cdot 10^{15}Hz$, is focused into a collection of gas atoms. The pulse is very short and, because the frequency of this pulse is high, *some of the electrons are knocked out* from the atoms they are in (this effect is known as photoionization, and we will address it in the section ??).

Next, a second pulse of light is sent to the collection of gas atoms that contain now some free electrons as well. The free electrons will directly react to the electric field **E** of the incoming light wave. As we can see in Fig.2.68, the electric field **E**

will "shoot" the electrons in a direction parallel with the one of the electric field, by the force $e\mathbf{E}$, where e is the electric charge of the electrons. The velocity of these ejected electrons is further measured by an electron detector, which is oriented along the right direction (see Fig.2.68).

At the end, in order to obtain the electric field at different moments of time (see the plot Fig.2.65), one has to swipe the very short pulse of XUV light across the much much longer second pulse of light, and to measure for each situation the energy of the ejected electrons, as this gives how strong was the electric field **E**.

2.7.3 The energy and momentum density of a light wave

Here I calculate

$$p = ...$$

(2.176)

$$E = pc$$

(2.177)

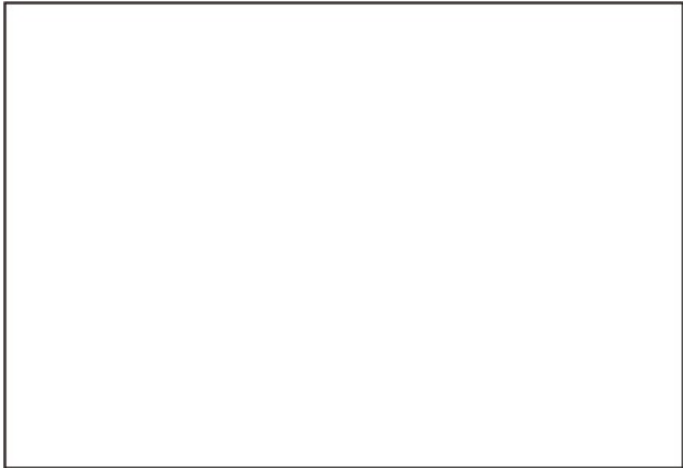


Figure 2.69: Text:

Seeing in the section ?? that the electromagnetic field carries a momentum, you may wonder how this momentum can be transfered to other charges, as it is the moment transfered between mechanical bogdies when they "se ciocnesc" with each other. In the formula ?? we have already the general answer, but let us consider here a particular case, where a beam of light impenges onn a metalic plate.

2.7.4 Different frames of reference

In this chapter we have "solved" the electromagnetic field in two approaches. The first was writing down the Maxwell equations ??, together with the Lorentz force ??. In the second equivalent approach, we have constructed the lagrangian 2.171. These equations tells us how the electric charges generate the electromagnetic field, and how the electric charges react to the electromagnetic field.

At the same time however, the same equations hold the seeds for further developments. We will adress some of them here, by talking about different frames fo reference.

Transformations of the electromagnetic field

Up to now we have developed the electromagnetic system in a *single* inertial frame of reference. We did not discuss extensively which one it was, and the best choice for it seems to be the inertial frame of reference that is fixed on the surface of the Earth, since all the experiments that led to Maxwell equations were experiments done in the laboratory. There are inertial frames of reference, like for example the ones that are not moving with respect to the Sun. In fact, a general definition of the inertial frames of reference would include all the frames of reference that move *with constant velocity* with respect to the background of fixed stars (and thus would not suffer accelerations).

The relevance of choosing an inertial frame of reference comes from the following observations. Let's consider first a charge moving in a constant magnetic and electric field (like in Fig. 2.70) and then let's consider that we stay on the moving charge. What kind of electromagnetic fields are we going to see? Are we going to experience the same electric field $\mathbf{E}$ and the same magnetic field $\mathbf{B}$?

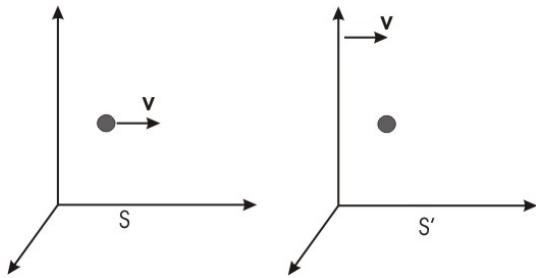


Figure 2.70: moving-on-a-charge

The answer to this question is negative, and we show now why. We first denote with S the inertial frame of reference in which the charge is moving (see Fig. 2.70) and with S' the inertial frame that is fixed with the moving charge. Due to the presence of the magnetic field, the charge will move in the frame S in a direction perpendicular to its velocity, as seen in Fig. 2.70. The force responsible for this is, of course, the Lorentz force 2.41:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.178)$$

On the other hand, we may analyze the same situation from the frame S' . Here we may expect that the charge experience the same electric and magnetic fields and consequently, in this frame of reference S' , there is no magnetic force according to the Lorentz equation 2.178, since the velocity of the charge is zero in this frame! In other words, an observer A placed in S (see Fig. 2.70) will tell that the charge is moving in a direction y perpendicular on the speed, while an observer B placed in S' , that moves with the charge, will say that the charge is not moving in the direction y ! A clear contradiction!

How do we solve this contradiction? One straightforward way is to assume that the Lorentz force 2.178 takes a different form when written in the frame S' . We may include terms that make the charge move in the direction y as well, like a force $q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ that depend on the *velocity* $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ of the frame of reference S' . We may even want to alter the Maxwell equation in the inertial frame S' . Are we allowed to do so?

Here we touch a very crucial point for our whole story, that we want it to make clear now. The point is, are we allowed to choose other Maxwell equation for electromagnetic field in the frame S' than for the frame S ? As an example, can we choose some forms of these equations in the frame of reference of the Earth, and other forms in the frame of reference that is fixed with respect to the Sun?

We may say in the beginning, as mentioned above that, at least, the Maxwell equations we found are true in the inertial

frame of the Earth, since all the experiments were made here. Notice that these equations are simple, and they do not contain any constant related to the velocity of the Earth! And in fact, the direction of the velocity of the Earth changes in a year, but no effect was even measured that would change the form of the Maxwell equations.

Next, we ask ourselves what we would be the form of the Maxwell equations in the frame of the reference of the Sun. Looking at the simplicity of the Maxwell equation, we do not expect certainly to add very complicated terms when we consider the new system of reference. And, most importantly, we do not expect terms related to the velocity of the Sun, since we did not find them in the frame of reference of the Earth. In other words, we do not expect terms that would "divulgate" the velocity of the frame of reference in which the equation are written. The most natural answer is that we expect to have in the frame of reference of the Sun *the same Maxwell equations* as in the frame of reference of the Earth where we have found them out. This is a natural answer if we take into account that our Earth is not privileged in Universe.

If you are not convinced by the arguments above, we can bring you the experimental evidence gathered in the last century from the satellites that were sent across the Solar system, and that reported precisely the same thing. In fact, if the Maxwell equations would change when the satellites would land on another planets, or travel in the Solar systems, then we may expect that the whole electronics on board would fail to work properly!

We may argue that maybe there are terms in the Maxwell equations that depend on the frame of reference (and that would make the equations different from one frame to another), like velocity of the frame of the reference, but we did not measure yet this terms. As we will see also in the next chapter, these terms *have not been found*, even with a very accurate measurements. We see thus that:

- We have measured the Maxwell equations in the inertial frame of the Earth.
- The equations do not contain any term related to the velocity of the Earth, to any measured accuracy.
- The Earth is not special in the Universe.

From these arguments we may say thus that:

The Maxwell equations are the same in any inertial frame of reference!

We are going to come back many times to this crucial consequence, and on this we going to build together the theory of relativity in the next chapter.

We come back now to the problem we introduced in the beginning of this chapter, and presented in Fig. 2.70. We see now that *we can not change the Maxwell equations* for the observer A' in S' . He must use the same Maxwell equations as the observer A in S . But if so, they would report different things with respect with the movement of the charge, as we saw. The observer A would say that the charge is moving in the direction y , while the observer A' would argue that it does not. What is the solution out of these situation?

The solution is to admit that the electric and magnetic fields that the two observers experience are *different*! If the observer A observes the field $\mathbf{E}$, then the second observer A' observes an electric field $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E}$. This is quite strange, as we may expect the electric field $\mathbf{E}$ be like a rigid arrow in the space, that is the same from wherever we look at. However, we already emphasised in the first chapter that this approach in physics may mislead us. We have to look at most of the

physical concepts like at some mathematical tools that lead us to the interpretation of the world that *explain and predict* the results of the measurements. Thus:

The electric field $\mathbf{E}$ and magnetic field $\mathbf{B}$ take different values if measured in different frames of reference!

In our case, the fact that the electromagnetic field experienced in different system of references changes with the frame of reference should not disturb us too much. It does not mean that the electromagnetic field does not have a physical reality. The electromagnetic field is certainly real, except that we experience it in a different way, from different frames of reference. It is like looking at a statue, that shows different images if looked at from different angles.

If we accept that the electromagnetic field values $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ change with the system of the reference in which they are measured, than we can solve the paradox in Fig.1. Thus, we suppose that the observer A' from the frame S' experiences an electric field given by:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.179)$$

This is called a transformation from one reference to another. We will see in the next chapter that this represent a very good approximation of the relativistic transformation. For us, is important to realise that now the paradox is solved, since the observer A' will report as well that the charge moves in the y direction. He will measure the force $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}$, the same as the force 2.178 measured by the observed A . Both observers A and A' will now agree on the movement of the charge, following the same Maxwell equations, but different electromagnetic fields.

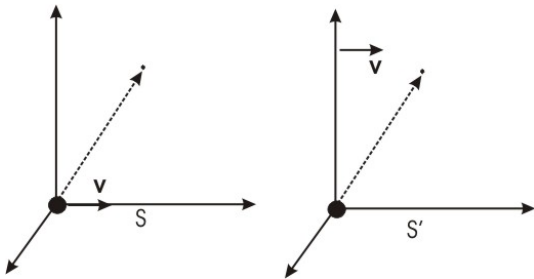


Figure 2.71: biot-savart-transformation

We now ask ourselves how the magnetic field transforms. For that, we take another particular situation, presented in Fig.2.71. Here, in the frame S we have static electric charges q at the origin of the frame of reference. The electric field at a location at a location $\mathbf{r}$ is given by:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (2.180)$$

Now, let us consider the inertial frame of reference S' , which moves with a certain velocity v . In the frame S' , we will experience at the location $\mathbf{r}$ both an electric field $\mathbf{E}'$ and a magnetic field $\mathbf{B}'$. Because the Maxwell equations are the same in any inertial frame, we can write directly the magnetic field $\mathbf{B}'$ in the frame S' , from the Biot-Savart law ??:

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \quad (2.181)$$

Using the relation 2.180, we can re-write the above relation as:

$$\mathbf{B}' = -\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (2.182)$$

This relation express, in a particular case, how part of the electric field $\mathbf{E}$ in the frame reference S may be experienced as a magnetic field $\mathbf{B}$ in the frame S' .

We may start with a situations were both electric field $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ exist in the beginning, unlike our examples 2.179 and 2.182. In this case, at small velocities $\mathbf{v}$ of the frames of references, we have to add the dominant fields to the transformations 2.179 and 2.182. Our relations for transforming a field from one frame to reference to another become then:

$$\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.183)$$

$$\mathbf{B}' \simeq \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (2.184)$$

By using the sign $\simeq$ we have emphasised that these transformation relations are *approximations* of the much better relativity transformations as we will see later. They give us a good feeling that *the electromagnetic fields must transform from one frame to another*, if we want to have the same predictions of a phenomenon from both frames of reference, and using the same Maxwell equations.

What is special about the Lorentz force

We want now to adress some aspects related to the Lorentz force, and its relevance to the field transformations form one frame of reference to another. We start with a simple experiment, presented in the Fig.2.72.

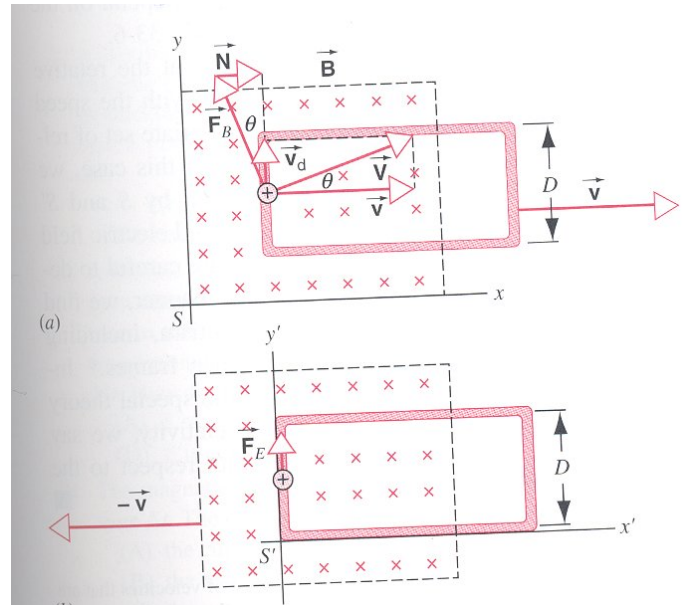


Figure 2.72: Faraday motional

Here we have a metal bar that is rolling over a metal frame situated in a fixed magnetic field. Because of the Lorentz force 2.41, the electrons are moved along the bar, as shown in the Fig.2.72. We may say that the electrons feel an "pseudo-electric" field $\mathbf{E}$ whose value may be calculated from the Lorentz Force:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.185)$$

where $\mathbf{v}$ is the velocity of the metal frame. If so, we can calculate a so-called *motional* emf, by integrating over the whole metal frame, including the metal bar:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = EL = vBL \quad (2.186)$$

On the other hand, we can calculate the variation in time of the magnetic flux Φ inside the loop created by the metal frame and metal bar. We have:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLvt) = -BLv \quad (2.187)$$

As we can see, we can write in this case a relation that is identical with the Faray's law 2.74:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.188)$$

The situation is striking. We have started with the Lorentz force, that has nothing to do with the local magnetic field variations and we have ended up with a relation identical to the Faray's law 2.74. Our situation refers to a moving frame and a fixed magnetic field, and the Faraday's law 2.74 refers to a static frame and a changing magnetic field. The situations are very different, and we certainly do not expect in the first instance to obtain the same result!

The situation is so striking, that it led some physicist propose a much more general Faraday's law, *one that applies to moving frames as well*, not only to fixed frames, as we discussed in the section 2.74. In that case, the emf would have a *transformational* part (the one used usually by us, and given by the change in time of the magnetic field), and a *motional* part, one that appears only in the moving frames, and it is given by the Lorentz law. This proposal would not be completely new, because even Faraday had difficulties extracting the two parts from his experiments. In his original work, he refer to the "frame moving relative to the magnetic field", a proposition very "dangerous" if taken just like that. It was Maxwell who used the law only for a static frame, to deduce his localised form of the law 2.78.

We are going to avoid going discussing further this general Faraday's law, that is still a matter a controversy, and discuss the problem from a different point of view. We think that the relation 2.188 is not a coincidence. The fact that the magnetic part of the Lorentz force has the form $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ must have a deeper meaning. Because we find in some cases generalisations of the Faraday's law to moving frames by using this particular form of the Lorentz form means that the form of the Lorentz force is special, and it can not take any form we want.

We may find the previous statement too bold. In fact, from a computeristic point of view, we may choose any form we want for the electromagnetic force acting on charges, if we are given the freedom to do it. In a numerical approach, *any function* can be used for the force ?? to compute the position of the charges at the next iteration. This is true. However, we do not have to forget the very important point that we want to be able to compute the same movement from *any* frame of reference, with the *same* Maxwell equations in each frame. However, even this thing may not scare us, as we are able to transform the electromagnetic field from one frame to another, and thus predict and measure the same behaviour of the charges from both frames of reference.

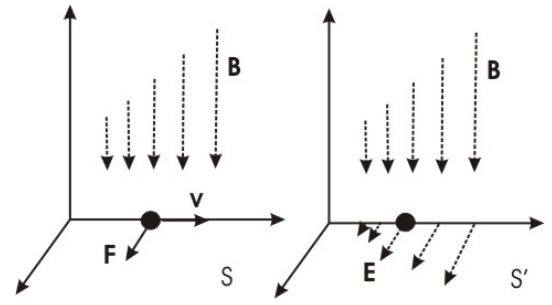


Figure 2.73: non-uniform-magnetic-field

In order to see if we can choose other forms for the electromagnetic force, let us have a look at Fig.2.73. Here we have, is the frame S , an electric charge traveling with the velocity $\mathbf{v}$ in a magnetic field that has a linear distribution in space, as showed in Fig.2.73. We make the assumption that the velocity is small compared with the velocity of light, and that the Maxwell equations are the same in every frame of reference, as mentioned before. We are looking now at a form for the electromagnetic force that is dependent on the velocity:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_m(\mathbf{v}, \mathbf{B}); \quad \text{with } \mathbf{F}_m(0, \mathbf{B}) = 0 \quad (2.189)$$

Since there is no electric field in the frame S , the charge will feel only the magnetic force. Now, let us consider a frame of reference S' that is moving at the save velocity as the charge. First we have to find approximate values for the electric and magnetic field in this new frame of reference. For the magnetic field, we take into account that the velocity is small, and thus it is expected that, at a time t the observer in the frame S' will experience more or less the same magnetic field $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ as in the system S . The correction are small and are of a second order.

What about the electric field the observer from S' experience? Because we assume that we start with the same Maxwell equations, we do not have to think what is the transformation for the electric field from S to S' . Much simpler, we can apply the Maxwell third law ?? to calculate the electric field $\mathbf{E}'$ directly in S' . We have then:

$$\mathbf{E}' = \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.190)$$

Because the charge is not moving in the frame S' , we have $\mathbf{F}_m(0, \mathbf{B}) = 0$, and the charge experiences only the electric force:

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.191)$$

Now, in order for the two observers from S and S' observe the same movement of the charge, that should report the same force. By equalising ?? and ??, we get then:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.192)$$

in other words just the Lorentz force! This result is again remarkable. It seems that the Lorentz force is chosen in such a way as to allow the observers from two different inertial frames of references to report the same behaviour of the electric charges!

The next question we have to adress is the following: "Have the Maxwell equations such a form that *always*, when we switch the inertial frame of reference (and transform of course the electromagnetic fields with relations close to ??), we obtain *the same behaviour* of the electric charges? If so, then the Maxwell equations are not only beautiful, but also *natural*. We do not

expect than that some of the observers will tell the truth (by correctly predicting what is going to happen, and thus having thus access to the "right" knowledge), and the others not! We then remind you of this very important point:

Two observers from two different inertial frames of references must obtain the same behaviour of the electric charges.

Does the Maxwell system of the electromagnetic field satisfy *always* the above principle? It would be very difficult to us to prove this, and we are not going to try to address it. But we are going to give in the next section an example that *does not* seem to obey the above principle!

The constancy of the velocity of light

In the section ?? we have introduced the electromagnetic waves in vacuum. In the section ?? we have shown that light is also an electromagnetic wave. It is thus common to refer to the velocity of the electromagnetic waves as the velocity of light, having the value c in vacuum, given in ?? and ??.

At a first look, nothing seems to be special about c . However, there are few things special. First, *the velocity of light does not seem to depend on the velocity of the source*. We can see that very well if we look at the relations ?? for the vector potential $\mathbf{A}$ in the Lorentz gauge. This relation shows that the vector $\mathbf{A}$ represents a traveling spherical wave with the velocity c irrespective of the vector $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$ that represents the velocity of the charges. In other words, irrespective of what the electrical charges do (and thus irrespective of their velocities), the spherical waves of $\mathbf{A}$ and ϕ created by them travel at the velocity of light. As these spherical waves may represent light, we may say thus that light travels at the same speed c irrespective of the source.

We can see that more simply by looking at the relations ?? for the electromagnetic waves in vacuum, where the electric field $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are involved. These relations show that the velocity of the electromagnetic waves is *always* c , irrespective of how this electromagnetic field was generated (which we did not even need to address).

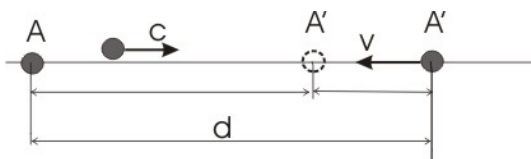


Figure 2.74: relative-velocity

Next, we remind the reader the fact that we expect to have the same Maxwell equations in all inertial frames of references. With respect to the velocity of light this means that:

The velocity of light is the same in any inertial frame of reference!

In a single frame of reference it is O.K. thus, but the above observations create problems if we address the light (and thus the

travelling electromagnetic wave) in a *different inertial frame of reference*. Let's look at the Fig.2.74. There we see a traveling electromagnetic wave from two inertial frames of reference, S and S' (it can be however *any* other travelling wave or object). Next we ask the question: if a wave is created by the fixed observer A , and received by the observer A' what is the velocity reported by the two observers? If we denote with t the time needed for the wave to travel from A to A' we get:

$$\begin{array}{lll} A: & d = c \cdot t + v \cdot t \rightarrow & c = \frac{d}{t} - v \\ A': & d = c' t \rightarrow & c' = \frac{d}{t} \end{array}$$

The two observers will thus report *different* velocities of the light in the two inertial frames of reference. This result looks to us normal, as we encounter it every day: we know that we experience differently the relative velocity of a "pion" depending on the velocity of a car we are in. All of the phenomena we encounter in classical physics have this property. This result is however in clear contradiction with our expectation in electromagnetism, since the velocity c is supposed to be the same in any inertial frame of reference!

We may even amplify the paradox by addressing the question the way Einstein did. If we travel along the electromagnetic wave at the same velocity c what will happen? Will the traveling wave be at rest with respect to us? No way, it should move with the same velocity c with respect to us! But how would that be possible now? And anyway, we do not expect to see "static" electromagnetic waves, as these always are traveling at the velocity c according to equations ??, in any inertial frame of reference.

How do we save the day now? One way is to question the Maxwell equations. However, the above observations refer only to the velocity of light, and this is where we have to concentrate ourselves. We may question the physical reality of feeling the light. But this can not be as well questioned, as we measure in this way at precise moments stars that were created millions of years before.

To exit this very difficult point, we make the same reasoning as Einstein did. He took as an *experimental fact* that the light is traveling at the same velocity c in any inertial frame of reference, and asked himself what else can be changed. Where do we miss in our reasoning? Well, he said, there is one thing which we actually never tested, and always took it for granted, namely our usual notions of *space and time*. If we give up these notions as absolute, then we would be allowed to use different distances in different frames of reference and different time intervals as well, and then we may come up with the solution where the two observers would measure the same velocity of light!

This approach proved crucial in the history of physics. Once we do that, we will obtain a system where the Maxwell equations are the same in every frame of reference, and the observers from different frames of reference will agree on their results *in any situation*. In addition, the electromagnetic field must be transformed from one frame of reference to another, as we discussed before. Changing our notions of absolute space and time is however not an easy task, as we will see in the next chapter.

2.8 Exercises

electromagnetic (ceva ciudat oricum!) dau light storage!

• EXERCISE 2.2

Aici da-i aplicatie la Gauss. zii ca e ca si cum numai sarcina din centru conteaza.

In interiorul atomului putem aplica regula lui Gauss 2.9 pentru o suprafata circulara de raza x_0 in jurul centrului atomului. Cacam mai intii fluxul electric prin suprafata ca

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \oint E(\mathbf{r}) dA(\mathbf{r}) = E(x_0) \oint dA(\mathbf{r}) = E(x_0)(4\pi x_0^2) \quad (2.193)$$

unde am tinut cont ca cimpul electric pe suprafata $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ este orientat in directia $d\mathbf{A}(\mathbf{r})$ iar modulul sau este mereu acelasi $|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = E(\mathbf{r}) = E(x_0)$. Sarcina $Q(x_0)$ cuprinsa in aceasta suprafata se scrie pe de alta parte:

$$Q(x_0) = \rho \frac{4\pi x_0^3}{3} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \frac{4\pi x_0^3}{3} \quad (2.194)$$

unde ρ este densitatea de sarcina iar Q sarcina totala a nucleului de Aur. Inlocuind in 2.193 si facind simplificari de rigoare, obtinem:

$$E(x_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx_0}{R^3} \quad (2.195)$$

• EXERCISE 2.3

In exercitiul 2 propunem cititorului sa verifice ca efectul de mai sus are loc intr-adevar numai daca forta prezinta o variatie invers proportionala cu patrutul distantei.

• EXERCISE 2.4

The operation on the right hand side can be done directly (see Exercise), leading to:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \mathbf{j}((r)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.196)$$

• EXERCISE 2.5

First, it seems that the Biot-Savart law 2.34 completely determines the magnetic field, so we wonder if the law Maxwell:II is satisfied. This is indeed the case, as it can be shown by directly applying the operator $\nabla \cdot$ in the Biot-Savart law 2.34. We propose this proof to the reader in Ex.

• EXERCISE 2.6

Using the formula ?? try to recalculate the momentum of the electromagnetic field. Consider the same case of a particle whose electric charge is spread uniformly on a surface of a sphere, as in the section ?. If the charge is moving with the velocity v show that the momentum stored in the electromagnetic field is:

$$p_{em} = m_{em} v \quad (2.197)$$

• EXERCISE 2.7

Find the Lagrangian that leads to the following field equations (also known as Proca equations):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (2.198)$$

$$(\square + m^2) A^\mu = 0 \quad (2.199)$$

They describe the so-called massive spin 1 particles, like the intermediate bosons $W^\pm$ of weak interactions.

• EXERCISE 2.8

In 2 we propose an exercise that sheds more light on the physical meaning of this term. Here I put the displacement current in case of a capacitor, as done by Feynmann (18-4).

• EXERCISE 2.9

For example, in the Lorentz gauge ??, one can write $\mathcal{L}$ as:

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) \quad (2.200)$$

Can you deduce the field equations ?? starting from this gauge?

Contents

3	Teoria Relativitatii Restrinse	85
3.1	Este viteza informatiei electromagnetice (a luminii) constanta?	85
3.1.1	Electromagnetismul, o teorie asemanatoare aruncarii bilelor?	86
3.1.2	Electromagnetismul, o teorie mecanica a undelor? - Eter neantrenat	87
3.1.3	Electromagnetismul, o teorie mecanica a undelor? - Eter antrenat	88
3.1.4	Problema masuratorilor	88
3.2	Presupunerile lui Einstein	89
3.2.1	Relativitatea timpului si spatiului	90
3.2.2	Transformarile Lorentz	90
3.2.3	Intervalul dintre doua evenimente	91
3.2.4	Geometria spatiu-timpului	92
3.2.5	Observatii	92
3.3	Dinamica Relativista	92
3.3.1	Masa variabila	93
3.3.2	Viteza maxima a corpurilor	94
3.3.3	Echivalenta masa-energie	94
3.4	Vectorii spatiu-timpului	95
3.4.1	Vectorul impuls-energie	95
3.4.2	Reformularea ecuatiei lui Newton	96
3.4.3	Reformularea ecuatiilor lui Maxwell	96
3.5	Recapitulare	97
3.6	Exercitii	98
3.7	Idei	98

Chapter 3

Teoria Relativitatii Restrinse

In capitolul precedent am vazut cum electromagnetismul, elaborat in parcursul secolului XIX, explica foarte bine fenomenele electrice si magnetice. Pe parcursul prezentarii teoriei am insistat asupra mentinerii *unui singur sistem de referinta xyz* in care aceasta teorie se elaboreaza, si anume cel "absolut" in care materia isi desfasoara existenta, asa cum era presupus de catre Newton. El ar fi astfel legat *rigid* de un "spatiu absolut", in nemiscare si mereu acelasi.

Prezenta unui astfel de "spatiu absolut" este usor de acceptat pentru mintile noastre, desi filozofic s-ar gasi destule obiectii unei asemenea notiuni. Pentru moment sa acceptam aceasta notiune, si sa vedem ca fata de acest "spatiu absolut" Soarele, sau sistemul de stele fixe ar putea fi in nemiscare. Insa cu siguranta Pamintul se misca fata de acesta, pentru ca se invirte in jurul Soarelui. Pentru momente mici de timp, miscarea acestuia poate fi chiar privita ca rectilinie si uniforma in raport cu "spatiul absolut".

Problema miscarii Pamintului devine importanta din urmatoarea motiv. Noi am fi vrut sa obtinem ecuatiile lui Maxwell pentru cimpul electromagnetic in sistemul de referinta al acestui "spatiu absolut". Cu toate acestea, inconstient, am efectuat *toate experientele* de electromagnetism pe Pamint. Astfel, am dovedit valabilitatea ecuatiilor lui Maxwell intr-un sistem de referinta care este fix cu Pamintul, si deci *nu* in sistemul de referinta "absolut"! Sintem astfel in situatia unui zugrav care zugravesce o casa foarte frumos si, la intorcerea proprietarului, ii arata acestuia munca minuntata. Proprietarul este de acord, facind insa observatia ca casa e a vecinului, si nu a lui.

carea ei. La acest moment, nimic nu ne garanteaza ca in final celei doi observatori vor calcula aceeasi miscare coform ecuatiilor lor, desi miscarea reala va fi desigur unica! Si atunci este foarte probabil ca observatorul "absolut" va folosi alte ecuatii decat cele ale lui Maxwell pentru descrierea fenomenelor electromagnetice, in asa fel incit rezultatele observabile (ca miscarea corpurilor de exemplu) sa fie aceleasi.

Pe de alta parte, ne-am astepta atunci ca observatorul "absolut" sa posede ecuatii mai simple (caci fiind "absolut", este privilegiat). Cu toate acestea, ecuatiile lui Maxwell, asa cum sunt ele prezentate in forma vectoriala ϕ si $\vec{A}$ (si verificate experimental pentru sistemul de referinta fix cu Pamintul) sunt deja foarte simple. Aceasta simplitate ne sugereaza ca ele ar trebui totusi sa fie valabile si in sistemul de referinta "absolut". Dar, conform argumentelor de mai sus, este foarte putin probabil ca acelasi sistem de ecuatii ale lui Maxwell sa fie valabil in ambele sisteme de referinta.

Daca am accepta ca ecuatiile lui Maxwell sunt valabile (datorita simplitatii) in sistemul "absolut", atunci cel mai probabil ar fi ca ele nu sunt totusi valabile in sistemul de referinta al Pamintului. Acest lucru ar fi posibil daca experientele pe care le-am facut noi pe Pamint *nu ar fi fost suficient de precise* sa contina si efecte datorate miscarii Pamintului fata de sistemul "absolut". Daca aceste efecte ar fi fost pierdute din neglijenta, desigur ca atunci am observa ca si in sistemul Pamintului, ca si in cel "absolut" ecuatiile sunt la fel. Dar au fost ele neglijate?

3.1 Este viteza informatiei electromagnetice (a luminii) constanta?

In aceasta sectiune presupunem ca ecuatiile lui Maxwell, asa cum au fost ele deduse in capitolul precedent, nu sunt corecte pentru in sistemul de referinta al Pamintului, asa cum am crezut. Pentru a vedea cit de precisi trebuie sa fim sa observam erorile facute, sa consideram cazul unei sarcini statice pe Pamint care, conform..., trimite continuu informatia ϕ cu viteza luminii (vezi si Fig.3.2).

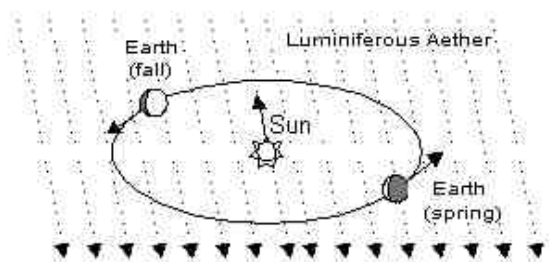


Figure 3.1: sistem-absolut-eter

Cit de serioasa este aceasta problema? Destul de serioasa. Sa ne imaginam ca un observator in acest "sistem absolut" (pe care il vom considera in figuri ca cel al Soarelui) face observatii asupra acelorasi fenomene electromagnetice ca cel pamintean. Pentru observatorul pamintean o sarcina statica pe Pamint se descrie doar cu ajutorul cimpului ϕ . Observatorul din "sistemul absolut" ar privi la o sarcina in miscare, si ar avea nevoie de ambele cimpuri ϕ si $\vec{A}$ pentru descrierea ei (vezi ...). Daca o alta sarcina ar fi pusa in miscare de catre sarcina deja prezenta, cei doi observatori vor folosi ecuatii diferite pentru a descrie mis-

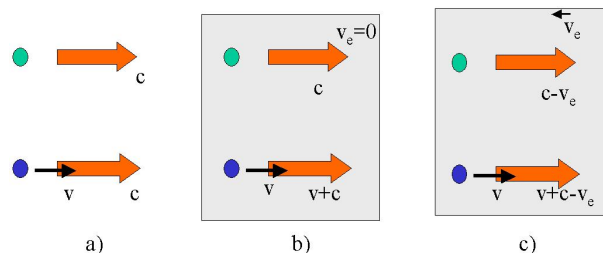


Figure 3.2: sarcina-miscare

Cimpul vectorial electromagnetic dat de aceasta sarcina este

o superpozitie a "informatiei" ϕ si $\vec{A}$ generate de sarcina, dupa cum am vazut in capitolul precedent. Aceasta informatie circula in principiu, conform ecuatiilor lui Maxwell, cu viteza luminii c (vezi stinga Fig.3.2). Lucrul uimitor este ca acest lucru se intimpla pentru oricare viteza a sarcinii.

Lucrul acesta pare ca contrazice insasi argumentul hotaritor folosit in acceptarea faptului ca Pamintul se misca. Astfel, sa ne reamintim ca vechii greci argumentau ca Pamintul nu se misca, pentru ca altfel o piatra lasata liber nu ar cadea vertical in jos, ci deviata catre vest, deoarece ar ramine in urma Pamintului cind aceasta se misca. Galilei insa a argumentat ca piatra cind este lasata libera capata si un impuls in directia de rotatie a Pamintului si, avind atunci aceeasi viteza ca Pamintul, va cadea tot vertical in jos.

Acest tip de argument este folosit atunci discutam despre doua sisteme de referinta ce se misca unul fata de altul. Daotira lui, viteza unui obiect vazuta dintr-un sistem de referinta este egala cu suma vectoriala a vitezei din cel de-al doilea sistem si si diferenta dintre vitezele sistemelor.

Din stinga Fig.3.2 se vede acum clar ca informatia "aruncata" de sarcina nu va indeplini aceasta proprietate. Daca ecuatiile lui Maxwell ar fi valabile in cele doua sisteme de referinta (pamintul si Soarele), ambii observatori vor vedea ca ea se deplaseaza cu aceeasi viteza, desi observatorii se deplaseaza unul fata de altul! Acelasi tip de argument a fost intezarit si de Einstein cind acesta (foarte tinar fiind), uitindu-se in oglinda, si-a pus problema, ce se intimpla daca ele si oglinda s-a deplasa cu viteza luminii (verfica). In acest caz, el ar vedea o unda electromagnetica stationara, ceea ce nu este permis de ecuatiile lui Maxwell.

Toate aceste tipuri de argumente conduc la concluzia *temporara* ca intr-adevar ecuatiile lui Maxwell nu pot fi aceleasi in cele doua sisteme de referinta. O abordare "clasica" care ar anula contradictia intre sistemele de referinta prezentate in sectiunea precedenta. Astfel, ecuatiile lui Maxwell ar fi valabile in sistemul "absolut". In sistemul Pamintului insa, mici corectii ar trebui facute la aceste ecuatii, care sa tina cont de miscare Pamintului. Doua variatii ale unor astfel de presupuneri sunt prezentate aici.

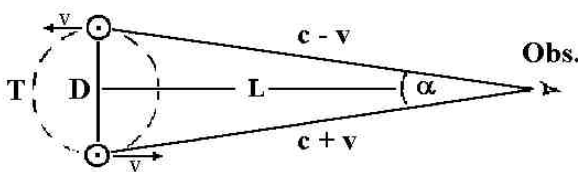


Figure 3.3: desitter

3.1.1 Electromagnetismul, o teorie asemanatoare aruncarii bilelor?

O prima abordare clasica a fost sustinuta de Ritz, care a avut dezbateri puternice cu Einstein pe aceasta tema, pina la moartea sa prematura (la 31 de ani). Astfel, Ritz a presupus, intr-o forma clasica, ca viteza informatiei electromagnetice este determinata si de viteza sarcinii (emission theory). Precum in mecanica lui Galilei, ea ar fi viteza luminii c plus viteza sarcinii (centrul Fig.3.2). Pentru ϕ , de exemplu, ecuatiile electromagnetice ar trebui modificate sub forma:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}_2, t - r_1 2/c)}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dV_2 \quad (3.1)$$

Simplist vorbind, electromagnetismul ar fi asemanator unei teorii pur mecanice de aruncare a bilelor, in care viteza bilelor este datorata. Electromagnetismul ar fi atunci o teorie care satisface principiul de relativitate al lui Galilei si elimina toate contradictiile cind observatiile se fac din doua sisteme de referinta. Dar este *experimental* asa?

Pentru a verifica experimental propunerea lui Ritz, astronomul de Sitter a propus observatii aspra unui grup de stele binare. Motivul este urmatorul. Pentru a observa efectul, avem nevoie de surse de lumina care sa se deplaseze rapid, cum ar fi stelele, si de distante mari pe care lumina sa le parcurga, pentru ca diferentele acumulate sa fie mari. Cele mai multe stele se misca insa aproape in linie dreapta in Galaxie, ca Soarele. Exista insa si asa-numitele grupuri binare de stele, un grup de doua stele ce se invirt unul in jurul altuia, cu viteze ce pot fi de ordinul 10Km/s.

Principiul lui de Sitter este prezentat in Fig.3.3. La momentul A, una dintre stele binare (pune-o si pe a doua pe figura, sa nu fie confuzie) emite lumina, ce va circula cu viteza $c-v$ catre Pamint, si va ajunge la Pamint la timpul $t_1 = L/(c-v)$. Dupa o jumatate de perioada de revolutie $T/2$, steaua se afla in punctul B si trimite din nou lumina spre Pamint. In principiu, aceasta ar ajunge la Pamint mai tirziu, pentru ca e trimisa mai tirziu cu $T/2$. Cu toate acestea, ea va circula mai repede decit prima lumina trimisa, cu viteza $c+v$, pentru ca steaua e indreptata spre Pamint, ajungind la momentul $t_2 = T/2 + L/(c_v)$. Ca atare, este posibil ca *ambele* "flasuri" sa ajunga in acelasi timp la Pamint! In acest caz, daca am face o fotografie a stelei, vom vedea de fapt doua stele, in pozitiile A si B! Pentru ca cei doi timpi sa fie egali $t_1 = t_2$, ar trebui sa avem:

$$\frac{L}{c-v} = \frac{T}{2} + \frac{L}{c+v} \quad (3.2)$$

Rezolvind ecuatia de mai sus, aflam ca aceste stele ar trebui sa se afle la o distanta de

$$L = T \frac{c^2 - v^2}{4v} \simeq T \frac{c^2}{4v} \quad (3.3)$$

Pentru valori obisnuite ale lui T , de ordinul anilor, obtinem distante de ordinul miilor de ani lumina, deci in interiorul Galaxiei noastre. Deoarece sistemele binare sunt des intilnite, ne-am astepta ca efectul de "fanotma" descris mai sus sa fie des intilnit. Cu toate acestea, el nu a fost niciodata observat, cu toate ca a fost cautat special.

O alta observatie astronomica de acelasi tip vine sa infirme supozitia dependentei vitezei luminii de viteza sursei. Astfel, in explozia supernovei Crab (care se afla la o distanta de 6000 de ani lumina), care a avut loc in anul..., materia a fost imprastiata in Cosmos cu o distributie de viteze de pina la 10.000 Km/s. Daca viteza lumii imprastiata de aceste bucati ar devine de viteza bucatilor atunci, considerind timpul de eruptie de aproximativ in 1 an, lumina ar sosi pe Pamint intr-un interval de 200 de ani (arata cum se calculeaza). Cu toate acestea, explozia a fost observata prin telescop numai pe durata unui an, aratind astfel ca viteza luminii nu depinde de viteza sursei. Chiar si pentru supernove care explodeaza la miliarde de ani lumina de Pamint, lumina soseste numai pentru intervale scurte, de durata chiar a citeva zile, infirmind astfel complet teoria lui Ritz.

O posibila explicatie oferita de sustinatorii teoriei lui Ritz, este ca lumina, interactionind cu praful interstelar, ar putea sa-si piarda viteza initiala, precum o bila isi modifica viteza dupa ciocniri succesive. Cu toate acestea, nici masuratori in domeniul razei X [?], unde interactia cu praful interstelar se

poate considera inexistentă, nu au condus la observarea efectului de "fantomă", și ca atare, presupunerea lui Ritz *nu* este verificat experimental.

3.1.2 Electromagnetismul, o teorie mecanică a undelor? - Eter neantrenat

Ce alte soluții de ieși din impasul celor două sisteme de referință mai există? Privind puțin în istoria electromagnetismului, observăm că, atunci când teoria electromagnetismului s-a elaborat, undele mecanice erau destul de bine studiate. Atunci a fost ușor de acceptat, chiar de însuși Maxwell când acesta și-a construit teoria, că cimpul electromagnetic se propaga printr-un mediu anume (numit *eter*), precum undele sonore în aer sau apă. O astfel de abordare, care considera că undele electromagnetice sunt ca și undele mecanice, are avantajul că electromagnetismul devine din nou o teorie "pur mecanică". Am văzut că teoria lui Ritz era mecanică, numai că acum informația nu mai e purtată de niste "bile aruncate" ca la Ritz, ci de o undă mecanică. Avantajul este din nou că electromagnetismul, fiind "mecanic", ar anula contradicția dintre cei doi observatori.

Căci, precum în mecanica fluidelor, dacă Pamintul s-ar deplasa în eter cu viteza v_P , viteza unei fațe de sistem absolut al eterului ar fi c (eterul fiind static și neantrenat în mișcare). Totuși acum, spre deosebire de presupunerea inițială din electromagnetism, în sistemul de referință al observatorului Pamintean viteza luminii ar fi din nou $c - v_P$ (vezi dreapta Fig.3.2). Între cele două viteze există din nou o diferență de v_P , identică cu diferența vitezelor dintre observatori, așa cum e de dorit. Din nou, există acest eter, și este viteza luminii în sistemul Pamintului într-adevar, *experimental*, $c - v_P$ (ori o altă valoare decât c , depinzând de care este "în realitate" sistemul fix al eterului)?

Un experiment ar putea fi efectuat pentru a măsura dacă într-adevar viteza luminii pe Pamint diferă de valoarea cosmologică c , și este aproximativ egală cu $c + v_P$. Într-un cit valoare cosmologică este greu de aflat precis, Michelson și Morley au abordat problema puțin diferit în 1881. Astfel, ei au construit sistemul prezentat în Fig.3.4. Ideea acestui instrument, numit interferometru, este simplă. Astfel, lumina venită de la un detector, este împărțită de oglinda O în două. Fiecare din cele două raze obținute se reflectă înapoi, una trecând prin oglinda O cealaltă este reflectată, în așa fel încât ele se pot recombina apoi în drumul lor spre detector.

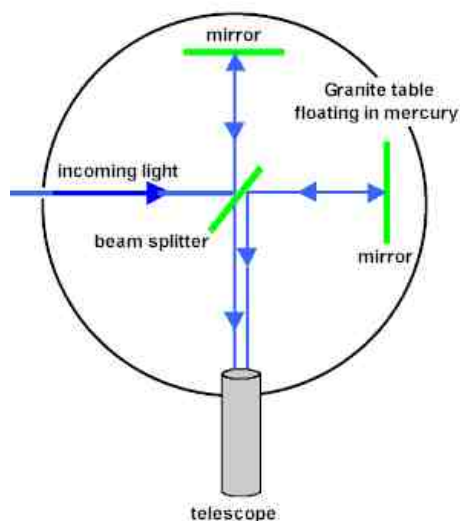


Figure 3.4: Experimentul Michelson-Morley

Dacă viteza luminii ar fi peste tot c , cele două raze ajung în același timp la detector. Cu toate acestea, datorită mișcării Pamintului în eter, vitezele razelor nu sunt identice. În consecință, cele două raze *nu* ar trebui să ajungă în același timp la detector.

Astfel, dacă considerăm că Pamintul se mișcă referitor la eter ca în figura, vitezele pe bratul OB va fi $c \pm v$, depinzând de sens. Timpul necesar luminii pentru a parcurge distanța OB dus-întors este atunci

$$t_{OB} = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1-(u/c)^2} \simeq \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \quad (3.4)$$

La prima vedere ar apărea că viteza luminii pe bratul OA ar fi exact c , pentru că lumina se deplasează perpendicular pe direcția de curgere a eterului. Dar ea este de asemenea antrenată în direcția de curgere, precum un înotător care traversează un râu. Conform figurii 3.4, o valoare mai potrivită ar fi $\sqrt{c^2 - v^2}$. (PROBLEME MARI: nu sunt de acord cu aceste calcule. de verificat originalul Michelson-Morley). pentru a parcurge bratul OA , lumina are atunci nevoie de timpul:

$$t_{OA} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \simeq \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) \quad (3.5)$$

Diferența de timp între cele două raze este atunci:

$$\Delta t = t_{OA} - t_{OB} = \frac{dv^2}{c^3} \quad (3.6)$$

Dacă considerăm aparatul lui Michelson-Morley care avea $d=11\text{m}$, și utilizăm viteza orbitală a Pamintului $v=30\text{Km/s}$, obținem un timp de $\Delta t = 3 \cdot 10^{-16}\text{s}$, adică un timp extrem de scurt, ce nu putea fi măsurat direct de către Michelson și Morley. Cu toate acestea, putem observa că valoarea Δt este, din fericire, comparabilă cu perioada de oscilație a luminii, care e de ordinul a 10^{-15}s . Acest lucru a fost folosit de Michelson și Morley, care au construit instrumentul ca un interferometru.

AICI trebuie atunci explicat repede (2-3 paragrafe) ce e un interferometru. Nu știu dacă reușesc, mai ales că la electromagnetism nu fac lumina!

Interferența celor două raze (ce trebuie polarizate în aceeași direcție!) produce o imagine pe detector. (citește originalul!). Dacă una dintre oglinzi este puțin rotită, aceasta constă în franje interferențiale verticale, ca în figura. Aceste franje se produc ca o combinație a disalinierii, și a timpului de sosire diferit între cele două raze. datorită acestui fapt, este imposibil să se spună cit din acest efect e datorat decalajului de timp Δt și cit misalinierii. Pentru a evita această problemă, Michelson și Morley au făcut două măsurători, prima pentru configurația din Fig.3.4, și a doua cu instrumentul rotit rigid la 90° , nemodificând însă misalinierii oglinzilor!

Datorită rotației, cele două raze își vor schimba ordinea de sosire în al doilea experiment, având însă același decalaj Δt . Ca atare, ne așteptăm ca franjurile să se deplaseze când rotim instrumentul, iar aceasta deplasare să fie dată numai de decalajul total $2\Delta t$. Acest decalaj în timp se exprimă printr-un decalaj spațial între raze dat de $c \cdot 2\Delta t$. Împărțind la lungimea de undă a luminii $\lambda \simeq 600\text{nm}$, obținem cu câte franjuri se va "deplasa" imaginea:

$$\Delta N = \frac{c \cdot 2\Delta t}{\lambda} \simeq 0.4 \quad (3.7)$$

Cu alte cuvinte, o deplasare perfect observabilă, care este practic de mărimea franjurilor. Cu toate acestea Michelson și Morley n-au observat nici o deplasare a franjurilor, deși rezoluția lor a fost de $\Delta n = 0.01$! Măsurători extensive au urmat

Să presupunem că distanțele OA și OB sunt precis la fel.

apoi in anii care au venit (vezi Cristi de exemplu [?], si articolele care il citeaza), toate confirmind faptul ca viteza luminii este aceeaasi in toate directiile in care raza interferometrului a fost trimisa!.

Desi pare ca experimentul Michelson-Morley invalideaza imediat presupunerea ca electromagnetismul e ca o unda mecanica, nu este chiar atat de evident. Astfel, noi am presupus ca eterul era static. Dar, am putea presupune ca eterul este antrenat in miscare sa de catre Pamint, in asa fel incit el are aproape de suprafata Pamintului aceeaasi viteza ca Pamintul! Atunci ne putem astepta ca observatorul paminten, pentru ca se afla local in intr-un lichid eteric static, sa masoare intr-adevar aceeaasi viteza a luminii indiferent de pozitie.

3.1.3 Electromagnetismul, o teorie mecanica a undelor? - Eter antrenat

Cu toate acestea, faptul ca eterul ar putea fi "antrenat" in miscare sta invalidat de o alta observatie experimentală si anume *aberratia* stelelor (vezi Fig. 3.5). Astfel dupa cum reprezentat in Fig. 3.5b, toate stelele de pe cer prezinta, de-a lungul intregului an, o miscare circulara de un diametru de aproximativ 41 arcsec. Aceasta "rotatie" a tuturor stelelor nu are insa de-a face nimic cu *paralaxa stelara*, prezentata in primul capitol, care se datora observarii stelelor din diferite orbite ale Pamintului, si care era deci puternic dependenta de distanta Pamint-stea. Este bine sa avem in minte ca efectul de aberratie se obtine chiar si pentru stele foarte departate, aproape la infinit.

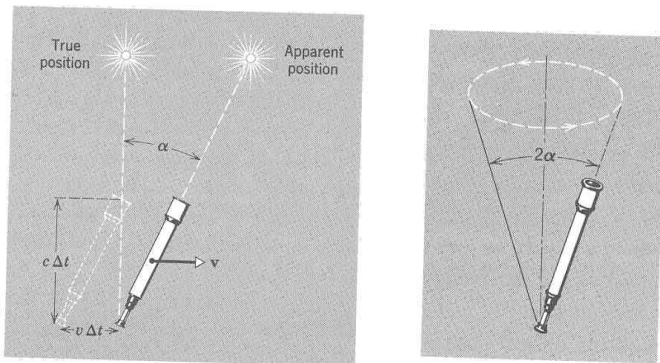


Figure 3.5: Aberatie

Explicatia cea mai naturala a *aberratiei* stelelor este prezentata in Fig. 3.5a. Astfel, datorita faptului ca Pamintul se misca, luneta de observatie trebuie inclinata in directia miscarii, in asa fel incit lumina sa patrunda "drept" in tub, si sa nu se loveasca de pereti. Valoarea acestei inclinari se calculeaza din Fig. 3.5a ca $\tan \alpha = (v \Delta t) / (c \Delta t) = v/c$. Inlocuind viteza Pamintului $v = 30 \text{ km/s}$ obtinem $\alpha = 20.5 \text{ arcsec}$. Datorita miscarii circulare a Pamintului, luneta trebuie inclinata si ea circular, obtinind o aberratie aparenta circulara, cu un diametru de $2\alpha = 41 \text{ arcsec}$, in acord excelent cu valoarea experimentală. Interesant ca, printr-un argument invers, stiind α , putem calcula viteza luminii c , "masurind" astfel viteza luminii pe lungimea foarte mica a lunetei, de ordinul a metrilor!

Explicatia de mai sus elimina aproape complet supozitia ca eterul este antrenat de Pamint. In acest caz, fenomenul de mai sus n-ar trebui observat caci, daca lumina ar fi ghidata de eterul antrenat in miscarea Pamintului, ea ar merge direct in jos pe luneta (nu ar mai fi nevoie sa o inclinam pentru ca sa loveasca peretii). Situatiia ar mai putea fi "salvata" de o eventuala comportare deosebita a luminii la interfata eter in

miscare - eter antrenat de Pamint, insa este putin probabil ca ea ar putea conduce la o explicatie mai simpla si mai eleganta decit cea de mai sus (altii nu zic nimic de asta....).

Am vazut in aceasta sectiune cum citeva propuneri au incercat sa faca din electromagnetism o teorie "mecanica" (o teorie a bilor ca la Ritz, sau a undelor mecanice deplasandu-se in eter). Toate au fost invalidate *experimental*. Nu am putut construi o teorie care sa ne spuna in ce sistem de referinta sunt valabile de fapt ecuatiile lui Maxwell, si nici daca ele sunt exacte sau doar o aproximatie. In final pare ca ambii observatori din Fig. vad lumina deplasandu-se cu aceeaasi viteza, desi ei se deplaseaza unul fata de altul.

3.1.4 Problema masuratorilor

Teoria relativitatii a lui Einstein este o solutie care rezolva paradoxul de mai sus. Ea *nu* s-a construit logic ca unica posibilitate in urma experimentelor prezentate mai sus. Mai degrabă, ea a fost propusa de Einstein ca o *solutie consistenta* care sa elimine contradictiile discutate mai inainte. Deoarece solutia propusa a fost drastica, si greu de acceptat intr-o prima instanta, experimentele de mai sus au "ajutat" la acceptarea mai rapida a ei.

Recapitulind sectiunea precedenta, am vazut cum informatia electromagnetica se deplaseaza in sistemul de referinta al Pamintului cu viteza c in orice directie, si cum nu depinde nici de viteza sursei. Experimental, aceste doua lucruri au fost dovedite. Cum sistemul de referinta al Pamintului nu trebuie sa fie ceva special in Univers, putem presupune ca acelasi lucru se intimpla si in sistemul de referinta al Soarelui. Mai general, Einstein a presupus ca *viteza de transmitere a informatiei electromagnetice c este constanta in toate sistemele de referinta inertiiale*, si nu depinde nici de directie, nici de viteza sursei.

Dar aceasta este tocmai afirmatia la care am fi vrut sa renuntam, pentru ca conduce in mod evident la paradoxul celor doi observatori (vezi Fig.) care vad lumina deplasandu-se cu aceeaasi viteza, desi ei se deplaseaza unul fata de altul! Nimic mai fals, a zis Einstein. Sa reconsideram problematica masuratorilor de timp si distante, si vom vedea ca nu e nici o contradictie!

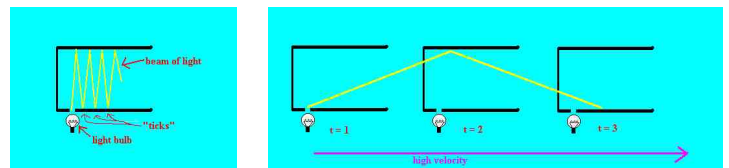


Figure 3.6: Clock

Pentru aceasta, sa vedem ce se poate intimpla cu masurarea timpului de catre un observator care este in miscare. Desigur ca ne-am astepta ca sa nu fie nici o problema, si timpul masurat de el sa fie același ca cel masurat de noi. Dar sa nu acceptăm aceasta ipoteza imediat, ci sa ne uităm mai atent la procedeul de masurare al timpului. In fond, o fi timpul ceva absolut, cum presupune Newton, dar mai important este cum il simțim noi, cum isi face el simțita prezenta in lume, cum se manifesta prin intermediul ceasurilor. Caci ultim, ceea ce vedem si experimentăm noi este bataia ceasului, sau perioada respiratiei, deci intotdeauna un efect al timpului asupra materiei. Astfel privind lucrurile, chiar daca poate timpul "absolut si nevazut" pe care-l simt cei doi observatori este același, ne putem intreba, pe buna dreptate, daca si ceasurile din buzunarele celor doi observatori vor arata același lucru?

Pentru a fi mai expliciti, prezentăm in Fig. 3.6 un astfel de ceas. Functionarea lui este data de ecuatiile lui Maxwell, pe

care le presupunem corecte in sistemul de referinta al observatorului stelar B (vezi...). Sa presupunem ca acest ceas este la inceput in buzunarul lui B, care mai are un alt ceas de acelasi tip in celalalt buzunar. Cele doua ceasuri functioneaza in felul urmator: lumina trimisa de un bec este reflectata inainte si inapoi de peretii cavitatii. Un mic dispozitiv orienteaza (nu am gasit asa ceva pe nicaieri!, se poate inlocui cu toate directiile) lumina in asa fel incit ea cade inapoi in punctul alaturat sursei. De fiecare data de cite ori o reflectie are loc, numarul de pe ecran care contorizeaza aceste reflectii se schimba. Perioada de oscilatie este data de $T_0 = d/c$. In plus, cind numarul indicat ajunge la 100, ceasul va exploda. La inceput cele doua ceasuri sunt sincronizate la momentul 0, si li se da drumul exact in momentul cind observatorul A trece prin dreptul observatorului B. Observatorul in miscare A primeste atunci unul din cele doua ceasuri bomba. Intrebarea este, vor exploda ele in acelasi moment?

Odata ce ceasul lui A este pus in miscare, el nu functioneaza imediat corect. Intr-adevar, deoarece lumina emisa de sursa nu depinde de directia de miscare a sursei, ea va iesi perpendiculara pe perete. Daorita miscarii inasa, ea ramine "in urma", si la intoarcere nu va mai ajunge in punctul alaturat. De aceea sistemul se va autoajusta conform figurii. Acum lumina paraseste sursa la un unghi α ales in asa fel incit, la intoarcere, ea cade in punctul alaturat. Din figura Fig. 3.6 vedem ca valoarea acestui unghi este $\tan \alpha = d/(vT)$.

Din sistemul de referinta a lui B, raza de lumina circula cu viteza c , chiar daca este oblica, caci aceasta este ce ne spun ecuatiile lui Maxwell, pe care le-am presupus adevarate in sistemul lui B. Ca atare, observatorul B vede ca timpul de "bataie", perioada lui, este data de

$$T = \frac{\sqrt{d^2 + (v \cdot T)^2}}{c} \quad (3.8)$$

Rezolvind ecuatiile de mai sus, obtinem $d = T\sqrt{c^2 - v^2}$, si utilizind relatia pentru ceasul static $d = cT_0$, avem

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.9)$$

Cu alte cuvinte, observatorul B vede cum ceasul construit de noi si-a modificat perioada cind a fost pus in miscare. Deoarece $v < c$, el bate acum mai incet! Ca atare, el vede cum cifrele de pe ecranul ceasului cu bomba in miscare se schimba mai rar, si ca ecranul arata 100 si explodeaza mult dupa ce ecranul ceasului lui a trecut de 100. Desigur ca prima lui reactie este ca ceasul construit nu a fost bun. Ce ceas am construit noi care isi schimba indicatia cind este in miscare? Dar situatia nu este asa simpla. Orice ceas care ar functiona cu ajutorul luminii, ar prezenta aceeasi proprietate, daca viteza luminii, vazuta din sistemul de referinta a lui B, are proprietatea ca e constanta si nu depinde de directie sau viteza sursei.

Pnetru a face situatia si mai grava, sa consideram si masurarea distantelor. In mod normal aceasta se face cu ajutorul unei rigle rigide. Cu toate acestea, ne putem intreba pe buna dreptate, dupa cum si Lorentz a facut-o, cit de "rigida" este o rigla. In fond ea e facuta din atomi, dupa cum am vazut in capitolul precedent, iar relatia dintre acestia e in mare parte electromagnetica. In Fig.3.7 am construim o rigla cu ajutorul luminii si al ceasului.

Astfel, cind aceasta rigla sta (vezi 3.7a), un ceas masoara timpul in care lumina reflectata de capatul indepartat se intoarce. Capatul indepartat se ajusteaza in asa fel incit timpul dus-intors al luminii sa fie $t = L_0/c \simeq 2/3 \cdot 10^{-8}s$, si in acest fel rigla va avea cam $L_0 = 1m$. Acum sa punem rigla in miscare,

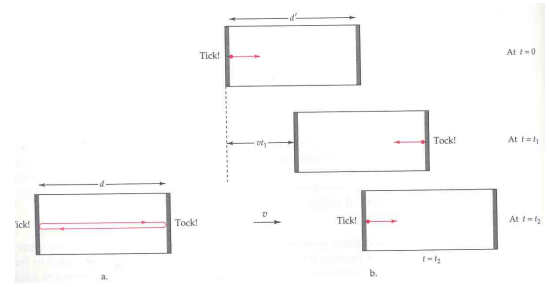


Figure 3.7: Rigla

pastrind inasa o copie pentru referinta. Precum in experimentul cu ceasul, nu este acum de mirare ca rigla se va ajusta in asa fel incit ceasul sa indice tot $t = 2/3 \cdot 10^{-8}s$. Sa calculam aceasta reajustare. Din figura 3.7b avem timpii de sus Δt_1 si intors Δt_2 ai luminii dati de relatiile:

$$v\Delta t_1 + L_0 = c\Delta t_1 \quad (3.10)$$

$$L_0 - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \quad (3.11)$$

Timpul total este:

$$\Delta T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L_0}{1 - v^2/c^2} \quad (3.12)$$

Timpul acesta (care "potriveste" rigla) este dat inasa de un ceas in miscare, care este si el "dereglat" pe deasupra. Timpul "real", masurat de observatorul B trebuie atunci corectat cu 3.9, obtinind:

$$\Delta T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.13)$$

Din aceasta (e facut neclar, in graba, reconsidera aici) obtinem lungimea ceasului reajustat, asa cum o vede observatorul B:

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3.14)$$

Daca observatorul A ar folosi astfel de ceasuri si rigle, nu este atunci de mirare ca el ar masura aceeasi viteza a luminii, caci timpii s-ar dilata si distantele contracta **Aici dau exemplu de masura identica a vitezei luminii!**

3.2 Presupunerile lui Einstein

Exemplele din sectiunea precedenta, chiar daca sunt numai o solutie partiala a problemei celor doi observatori, ne dau increderea ca o solutie generala poate exista. Aceasta a fost gasita de Einstein care a demonstrat, in urma ipotezelor lui, ca formula 3.9 de dilatare a timpului, si formula 3.9 de contractie a distantei, sunt valabile *pentru orice ceas, si pentru orice rigla!* Aceste ipoteze sunt:

1. *Exista un set infinit de sisteme de referinta care se misca rectiliniu si uniform unul fata de celalalt, si in care legile fizicii au aceeasi forma*
2. *Viteza luminii in toate aceste sisteme de referinta este constanta si independenta de viteza sursei care o creeaza*

Prima ipoteza a fost formulata initial inca de Galilei. Ea ne spune practic ca, facind tot felul de experiente intr-un tren in miscare perfect silentioasa, nu ne putem da seama daca trenul merge sau sta. Dar principiul a fost enuntat de Galilei pentru sistemele mecanice, si este usor de inteles daca privim aruncarea un corp in tren. Astfel, viteza lui este suma vitezei imprimate de noi, si viteza corpului nostru ca un tot care se misca rigid cu trenul.

Einstein insa ridica principiul mai sus, si spune ca este valabil pentru orice tip de masuratoare, incluzind electromagnetismul, dindu-i astfel un caracter mai "mistic". Dar nu atat de "mistic" pe cit sa nu-l putem "pipai". Sa ne uitam la lumea noastra tridimensionala: toate cele trei directii sunt practic echivalente. Ecuatiile lui Newton nu depind de directie, si astfel luam "de-a gata" afirmatia ca toate directiile sunt echivalente.

Einstein subliniaza ca sistemele de referinta inertiiale sunt de asemea echivalente. Numai ca aceasta experienta cotidiana ne lipseste. Putem experimenta mecanic intr-un tren sau vapor, dar nu inca in masini ce merg cu viteza luminii, sa "simtim" si cum arata efectele electromagnetismului in aceste sisteme inertiiale. De aici si dificultatea constanta in intelegerea teoriei relativitatii. Dar Einstein ne asigura ca si in ele ecuatiile lui Maxwell au aceeasi forma ca pe Pamint, si anume forma discutata in capitolul precedent. Iar atunci poate si faptul ca viteza luminii in vid este aceeaasi pentru toate sistemele nu mai e surprinzatoare.

3.2.1 Relativitatea timpului si spatiului

Exemplele 3.9 si 3.14 ne-au exemplificat problemele experimenatle care apar atunci cind trecem de la un sistem de referinta inertial la altul, dar ne-a si sugerat calea de rezolvare a acestora: *trebuie sa renuntam la a accepta ca timpul si spatiul sunt masurate la fel in doua sisteme inertiiale*. Ideea aceasta este revolutionara, si merita mai multe atentie.

Astfel, noua ni se pare ca exista un timpul absolut, care curge la fel in tot spatiul, si se aseamana cu caderea unei perdele pe podea: toata marginea de jos cade in acelasi timp. Cu alte cuvinte, ar exista o relatie intrinseca, predeterminata, intre toate punctele din spatiu: timpul curge prin ele la acelasi moment. Si acelasi timp absolut ar "curge" si daca ne-am afla in tren, si intr-o nava spatiala.

Dar este asa oare? Nu am putea spune ca nu exista o "perdea de timp" peste tot spatiul, ci mai degraba fiecare punct din spatiu isi duce propriul timp, dupa cum si noi oamenii ne ducem propriul nostru timp cu noi? Sau poate chiar mai mult de atat. Oricum nu putem "vedea" eventualul timp asociat unui punct din spatiu, daca nu-l masuram cu ceva material. Punctul insusi nu-l putem defini intr-un spatiu absolut fara materie, pentru ca nu avem la ce sa-l raportam. De cite ori nu avem misconceptia ca punctul din cartea pe care tocmai o citim este absolut, uitind ca in secunda cit am facut aceasta reflectie punctul s-a deplasat prin spatiu cu 30Km datorita miscarii Pamintului! Toate aceste tipuri de argumente nu fac decat sa "topeasca" notiunile de timp si spatiu absolute, goale, fara materie, in care materia ar fi doar "adaugata". Poate ca asa ceva exista, dar, din moment ce nimic nu este in ele, nimic nu poate fi observat, si deci nici definit matematic.

Einstein a pus atunci problema altfel. Sa nu discutam de spatii si timpi absoluti in absenta materiei, ci doar de materia insasi, caci ea e singura observabila pentru noi! Sa discutam despre ceasuri, despre rigle, caci pe ele le putem observa. Notiunile de timp si spatiu pe care vrem sa le folosim sa nu le mai raportam la spatii si timpi absolute, ci la *evenimente* materiale, pe care le putem vedea! Astfel de evenimente ar fi caderea unei pietre, nasterea unui copil, sau bizitul unei muste. Mai transant, unor astfel de eveniment le putem atasa niste numere

matematice, pentru a le identifica, si eventual identifica relatiiile dintre ele, dar acestea sunt mai degraba niste *numere care identifica evenimentul!*

Putem zice astfel ca evenimentul "musca bizzie" are numarul 2743, iar evenimentul "copilul plinge" are numarul 276. O astfel de organizare a evenimentelor desigur ca nu ne prea e de folos, pentru ca nu ne da relatiiile dintre ele. Sa incercam atunci sa atasam evenimentelor numere intr-o clasica maniera, folosind doua "instrumente": lumina si o rigla. Cu ajutorul riglei putem construi un sistem de referinta *Oxyz* intr-o maniera clasica, asezind rigle identice cu cea aleasa unele linga altele. Fiecarui eveniment ii atasam atunci trei numere, corespunzatoare "pozitiei".

"Timpul" evenimentului nu-l vom atribui insa in mod clasic, ca ceva absolut, asumat ca prezent in tot spatiul. Vom identifica mai intii toate evenimentele simultane, dupa urmatoarea definitie (vezi Fig.): doua evenimente sunt simultane daca, lansind doua raze de lumina catre centru din punctele in care acestea se produc, ele ating centrul in acelasi moment (caci acest lucru se poate verifica practic). Tuturor evenimentelor simultane le vom atribui acelaasi timp, dat de un ceas asezat in centrul *O* al axelor de coordonate.

Desi constructia sistemul de axe *Oxyz* prezentata mai sus pare evidenta, am putea spune chiar clasica, puterea ei se ascunde in folosirea luminii. Astfel, am fi putut arunca si bile pentru a defini simultaneitatea, numai ca atunci rezultatul "aruncarii" ar fi depins de viteza corpului nostru (vezi Fig.), si am construit un sistem mecanic! Faptul ca simultaneitatea a doua evenimente nu depinde acum de cum "aruncam lumina" (pentru ca viteza luminii este asumata constanta), ne da incredere ca sistemul de referinta astfel construit, desi seamana cu cel clasic, este "mai de incredere". Cu toate acestea, este bine ca sa-l privim ca o "ordonare a evenimentelor", decit mi degraba ca ceva absolut.

Odata construit acest sistem inertial pentru un observator *A* aflat in *O*, putem construi in acelasi fel un alt sistem inertial pentru un alt observator *B* aflat in *O'*, si care se delaseaza cu viteza constanta fata de *O*. Din nou folosim lumina (pentru ca viteza ei este constanta), pentru a defini simultaneitatea.

In fig. vedem o consecinta a acestei alegeri: doua evenimente simultane in *Oxyz* nu vor mai fi simultane in *o'x'y'z'*! Explica. Aceasta proprietate este una dintre acele proprietati ale materiei care ne sfideaza intelegerea clasica. Caci, ca si dilatarea timpului, sau contractia lungimilor, nu este ceva ce putem experimenta zilnic. Cu toate acestea, faptul ca doua evenimente sunt simultane intr-un sistem inertial, dar nu in altul, nu trebuie sa ne sperie. Caci, dupa cum am mentionat mai sus, timpul (ca si spatiul) este in primul rind o maniera de a numerota si ordona evenimentele, singurele care au pentru noi o prezenta "reala". Conform acestor idei, nu este bine sa ne gindim ca acum este ora 16.00, ci ca acum "vad" evenimentul "ceasul arata-ora-16.00". Astfel, aceasta numerotare diferita in doua sisteme inertiiale este mai usor de acceptat, si in ultima instanta ne putem obisnui cu ea, parindu-se normal.

3.2.2 Transformarile Lorentz

In sectiunea precedenta am descris cum putem construi, cu ajutorul luminii, doua sisteme de referinta pornind doua puncte *A* si *B* care se deplaseaza unul fata de celalalt cu viteza *v*. Un eveniment oarecare va avea atunci doua "notatii" in cele doua sisteme de referinta. In sistemul *Oxyz* al lui *A*, el va fi dat de (x,y,z,t) , ceea ce se poate citi clasic ca pozitia lui este (x,y,z) , iar "timpul" la care are loc este *t*. In celalalt sistem inertial *O'x'y'z'* pozitia lui (determinata cu riglele in miscare) este (x',y',z') , iar timpul la care are loc este *t'*.

In acest moment al discutiei, valorile (x',y',z',t') par complet independente de (x,y,z,t) , si determinate doar pe baza experi-

entei cu rigla, ceasul si lumina, dupa cum a fost discutat mai sus. Insa, pe buna dreptate, ne putem intreba: "Stiind coordonatele evenimentului (x,y,z,t) in sistemul inertial al lui A, si viteza v a lui B fata de A, nu putem afla direct (x',y',z',t') , fara a face masuratori?" Raspunsul este pozitiv, si consta in transformarile lui Lorentz.

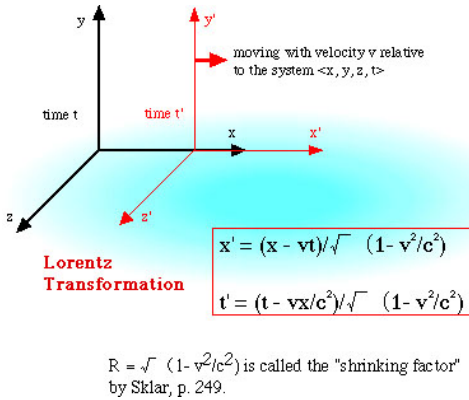


Figure 3.8: Transformarea Lorentz

Metoda originala a lui Einstein de deducere a acestor transformari exploateaza din plin afirmatia a doua a principiilor sale 3. Aici vom prezenta pe scurt o alta metoda, care porneste numai de la prima afirmatie a 3, si care este prezentata pe larg in Ref.???. Astfel, sa incercam sa cautam transformari lineare intre cele doua sisteme de referinta de tipul:

$$x' = k(x - vt) \quad (3.15)$$

$$t' = \mu(t - \frac{v}{a}x) \quad (3.16)$$

unde k, a , si μ sunt constante ce trebuie determinate. De data aceasta insa, nu vom face apel la principiul constantei vitezei luminii in vid, ci la primul principiu 3. Conform acestuia, evenimentele trebuie sa fie percepute sub aceeasi forma in sistemele $Oxyz$ si $O'x'y'z'$. Aceasta inseamna ca si observatorul B din sistemul de referinta $O'x'y'z'$, poate scrie relatii de tipul de mai sus, si acestea trebuie sa contina aceleasi constante k, a , si μ , din moment ce nu putem discrimina intre cele doua sisteme!

$$x = k(x' + vt') \quad (3.17)$$

$$t = \mu(t' + \frac{v}{a}x') \quad (3.18)$$

In relatiile de mai sus n-am schimbat decit semnul vitezei, pastrand insa aceleasi constante k, a , si μ . Eliminind t din relatiile 3.15, avem

$$x = \frac{x'}{k(1 - v^2/a)} + \frac{vt'}{\mu(1 - v^2/a)} \quad (3.19)$$

Aceasta relatie trebuie sa fie identica cu prima relatie din 3.17 pentru orice x si t . Obtinem deci

$$k = \frac{1}{k(1 - v^2/a)} \quad (3.20)$$

$$k = \frac{1}{\mu(1 - v^2/a)} \quad (3.21)$$

si deci

$$k = \mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/a}} \quad (3.22)$$

Transformarile 3.15 devin atunci

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/\eta}} \quad (3.23)$$

$$t' = \frac{t - vx/\eta}{\sqrt{1 - v^2/\eta}} \quad (3.24)$$

Din relatia de mai sus deducem ca, daca doua sisteme inertiiale sunt echivalente, transformarea de la unul la altul trebuie sa fie ori galileana ($\eta = \infty$), ori Lorentziana ($\eta = \text{constant}$).

3.2.3 Intervalul dintre doua evenimente

In relatiile de mai sus vedem ca lumina nu joaca inca nici un rol. Pentru a identifica rolul ei, vom arata mai jos ca, in cazul transformarii Lorentziene $\eta = \text{constant}$, un semnal de viteza η circula cu aceeaasi viteza η in ambele sisteme de referinta.

Astfel, sa consideram ca un semnal de viteza $\sqrt{\eta}$ (masurat de observatorul A) este generat la momentul initial, cind coordonatele celor doua sisteme se suprapun (evenimentul este $(0,0,0,0)$ in ambele sisteme de referinta). La un moment ulterior t , acest semnal ajunge in pozitia (x,y,z) conform observatorului A. Observatorul B in miscare, vede acest eveniment in pozitia (x',y',z') , si avind loc la momentul t' . Intre acestea exista relatia de transformare Lorentz 3.23.

Viteza semnalului este data de $\sqrt{\eta} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/t$. Atunci trebuie sa avem $x^2 + y^2 + z^2 - \eta t^2 = 0$. Daca semnalul se transmite tot cu viteza η in sistemul $O'x'y'z'$, atunci ar trebui sa avem $x'^2 + y'^2 + z'^2 - \eta t'^2 = 0$. Sa verificam aceasta relatie pentru cazul cind semnalul se deplaseaza de-a lungul axei lui x (pozitia y si z ale semnalului sunt mereu nule). Avem, utilizind direct transformarile lui Lorentz 3.23,

$$x'^2 - \eta t'^2 = \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/\eta} - \eta \frac{(t - vx/\eta)^2}{1 - v^2/\eta} = x^2 - \eta t^2 \quad (3.25)$$

Vedem in exemplul ales ca, daca semnalul se deplaseaza cu viteza $\sqrt{\eta}$ in sistemul $Oxyz$ (adica $x^2 - \eta t^2 = 0$), atunci el se deplaseaza cu aceeaasi viteza $\sqrt{\eta}$ si in cel de-al doilea sistem inertial (pentru ca atunci si $x'^2 - \eta t'^2 = 0$, conform relatiei de mai sus). Cum in cazul nostru stim ca viteza informatiei electromagnetice c este aceeaasi in toate sistemele de referinta, nu ne ramine decit sa identificam

$$\sqrt{\eta} = c \quad (3.26)$$

Dar relatia 3.25 spune chiar mai mult decit atat. Astfel, in deducerea ei nu am folosit initial in nici un fel viteza semnalului. Avem deci relatia $x'^2 - \eta t'^2 = x^2 - \eta t^2$ pentru orice eveniment (x,t) ales. Daca am alege doua sisteme inertiiale la care originile nu ar fi corespuns, si doua evenimente oarecare $M=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ si $N=(x_2,y_2,z_2,t_2)$, am putea generaliza relatia de mai sus sub forma (notind $dx = x_2 - x_1$ si corespondentele):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \eta dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - \eta dt'^2 \quad (3.27)$$

Relatia de mai sus este remarcabila. Ea ne spune ca, chiar daca transformarea Lorentz schimba valorile la care noi percepem timpul si spatiul in alt sistem inertial, marimea ds^2 (numita *interval* intre doua evenimente) se mentine constanta. Relatia de mai sus, dar nu este insa complet surprinzator. Sa ne aducem aminte de comparatia cu spatiu tridimensional. Si aici marimea $d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ se mentine constanta indiferent de orientare a sistemului ortogonal alegem. In fond, ea reprezinta lungimea unei bare rigide care nu depinde de orientare. Tot astfel, si intre doua evenimente oarecare M si N exista o constanta (ds) care nu depinde de sistemul inertial ales. Doar ca forma e mai ciudata, contine un minus in fata timpului!

interval spatial, temporal.

3.2.4 Geometria spatiu-timpului

Asemanarea dintre forma intervalului 3.27 si cea a distantei euclidiene $d\vec{r}$ a spatiului obisnuit a fost speculata de Minkovski (profesorul de matematica al lui Einstein din facultate) sub forma *geometriei spatiu-timpului*. Exista in literatura dedicata acestui subiect in principala doua abordari. Prima (initiativa de Minkovski), utilizeaza direct formula 3.27, dar nu va fi discutata aici.

Cea de-a doua abordare defineste o a patra coordonata temporală ca $x_4 = i\sqrt{\eta}t$ (unde i este numarul complex $i = \sqrt{-1}$), in plus fata de cele spatiale $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Atunci intervalul 3.27 este identic cel al geometriei euclidiene in 4 dimensiuni, si se scrie

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (3.28)$$

Cum acest interval se conserva cind trecem de la un sistem inertial la altul, sistemele inertiiale devin acum, in mod necesar, sisteme ortogonale rotite unele fata de celelalte in spatiu-timpul 4 dimensional! (pentru ca rotatia conserva intervalul, precum in spatiu tridimensional euclidian obisnuit). Este usor acum sa reeducem transformarile Lorentz, dilatarea timpului, sau contractia lungimilor pornind numai de la constanta intervalului in acest spatiu 4 dimensional, fara a memora formulele corespunzatoare.

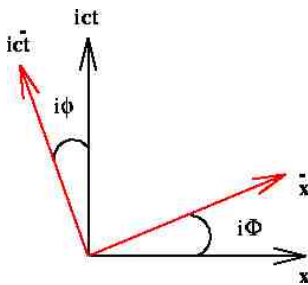


Figure 3.9: Sisteme inertiiale in geometria spatiu-timp (versiunea 2)

Sa consideram de exemplu bara rigida in miscare (vezi Fig.3.9). Sistemul inertial $O'x'y'z'$ se deplaseaza cu viteza v , iar bara este in repaus fata de el. Unghiul de rotatie ϕ dintre cele doua sisteme de referinta se obtine urmarind linia de univers $O - S$ a punctului O' . Avem atunci din triunghiul OSP :

$$\tan(\phi) = x/(it) = iv \quad (3.29)$$

si ϕ va fi deci un numar imaginar!. Dar sa nu ne ingrijoram prea mult. Sa facem calculele asa, si sa verificam la sfirsit ca rezultatul este real.

Acum putem reprezenta evenimentele asociate celor doua capete ale barei ca in Fig. 3.9. Daca sistemul de referinta $O'x'y'z'$ era in repaus fata de sistemul $Oxyz$, atunci bara ar fi avut lungimea L_0 . Cum insa bara se misca, lungimea ei in sistemul $Oxyz$ se obtine masurind capetele ei *la acelasi moment de timp* in acest sistem inertial. Din triunghiul OMN al figurii Fig. 3.9 avem:

$$L = L_0 \cos(\phi) \quad (3.30)$$

Inlocuind 3.29, si folosind o relatie cunoscuta in trigonometrie, avem atunci:

$$L = L_0 \cos(\phi) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + (\tan(\phi))^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.31)$$

adica tocmai relatia 3.14. Vedem in plus ca aceasta abordare pare sa aduca mai multa "intelegere" fenomenului de masura. Astfel, conform Fig. 3.9, masurarea lungimii barei in cele doua sisteme de referinta *nu se face folosind aceleasi evenimente!* Intr-un mod simplist, putem zice ca observatorul A "asteapta" putin mai mult decit observatorul B pentru a masura capatul R, de unde si diferenta de rezultat.

Cu toate ca abordarea de mai sus se dovedeste extrem de practica, trebuie sa fim foarte atenti cind interpretam aceasta reprezentare 4-dimensională. Desi noi desenam axa x_4 ca o linie pe foaia noastra de hirtie, ea nu este o "linie" obisnuita, din moment ce valorile pe axa ei sunt imaginare! Formularea de mai sus este atragatoare, insa poate conduce la reprezentatii gresite. Astfel, *nu* putem spune ca exista un fel de bara rigida in spatiu-timp si ca noi, deplasandu-ne fata de ea, o vedem practic din alt unghi spatio-temporal! Desi interpretarea matematica sugereaza aceasta reprezentare, noi nu putem accepta o bara "reală" cu dimensiuni complexe.

Profesorii de geometrie spun ca o problema de geometrie este pe jumatate rezolvata daca figura este desena. In cazul geometriei spatiu-timpului putem afirma aproape contrariul. Problema este rezolvata fara a desena insa nici o figura. Caci intr-adevar nu putem desena pe caietul nostru figuri in spatiu-timpul dat de metrica 3.27, asa cum desenam figurile geometriei obisnuite.

3.2.5 Observatii

O problema dezbatauta des este in ce masura contractia Lorentz este reala sau nu. Cei care spun ca nu e real argumenteaza ca, daca privim la diagrama spatio-temporală, ea ar parea ca e mai mult o iluzie. Astfel momnetle de masura ale celor doua capete sunt simultane intr-un sistem de referinta, dar nu in celalt. Pare ca si cum am lasa ceva timp pentru ca un capat sa se mai deplaseze putin, obtinind atunci o valoare diferita pentru lungime. Cei care considera Pe de alta parte, si cei care privesc contractia ca reala au dreptate. Caci, daca privim din sistemul de referinta al lui B, dupa ce am facut sincronizarile ceasurilor, pare ca oricum timpul este absolut, care cade acum "ca o perdea". Iar rigla in miscare este o alaturare de atomi, si daca ne uitam la doi atomi vecini in acest sistem "ca o perdea" al lui B, putem spune ca intr-adevar cei doi atomi sunt mai apropiati. Astfel, aceasta viziune clasica, sau dac vreți "ingineriasca" isi face in loc in explicatii, fara a fi inlaturata definitiv. Singurul lucru care il dam deoparte este ca timpul lui B ar fi cel bun, cel "absolut". darmai departe, in sistemul lui B totul este clasic. In rest nu este nimic gresit in "modul lui de gindire".

3.3 Dinamica Relativista

In sectiunea precedenta am vazut cum timpul si spatiul masurat pentru sisteme in miscare (mai precis in alte sisteme inertiiale), difera de ceea ce masuram noi cind acel sistem este static. Pina acum, teoria relativitatii ne-a dat o imagine si un rapsuns clar la comportarea ceasurilor ca instrumente de masura a timpului, sau a riglelor ca unitati de masura a spatiului. Deoarece, prin presupunerile care le face, ea invalideaza automat mecanica lui Galieli pentru viteze mari ale particulelor, ne putem astepta sa modificam diverse presupuneri ale acesteia din urma.

3.3.1 Masa variabila

Privind atent transformarile lui Galilei, vedem ca ele sunt inaplicabile pentru viteze v mai mari ca viteza luminii c , caci termenul de sub radical devine negativ!. Pe de alta parte, ne reamintim si argumentul initial al lui Einstein ca nu putem merge cu viteza luminii, caci atunci undele electromagnetice ar parea statice, ceea ce e interzis de ecuatiile lui Maxwell. Nu este mai bine sa ne uitam eventual cu ce se intimpla cu particulele cind ele sunt accelerate catre viteza luminii? Pentru aceasta, prezentam aici un prim experiment de succes efectuat de Bucherer in 1908. Aici "trisam" putin ordinea cronologica, caci Einstein si Lorentz prezisesera ce o sa masoare Bucherer cu citiva ani inainte, dar o facem de dragul simplitatii si claritatii.

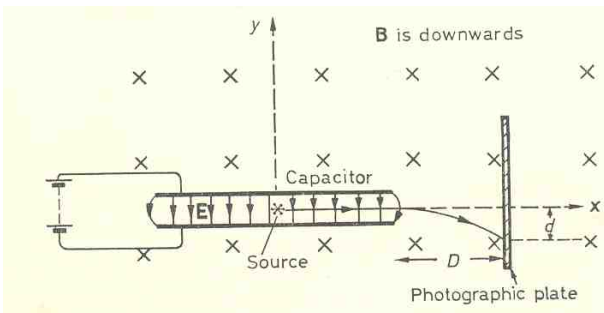


Figure 3.10: Experimentul lui Bucherer

Aparatul lui Bucherer[?] este prezentat in Fig. 3.10a. O sursa S genereaza electroni cu o gama larga de viteze. Acestia intra apoi in condensaorul C, care este foarte larg, avind in sa o mica distanta intre placi $d = \dots$ capabila de a crea un cimp electric $E \simeq \dots$ intre ele. In plus, Bucher a aplicat si un cimp magnetic uniform $B \simeq \dots$, ca in figura. Electronii care intra in acesta combinatie de cimpuri va fi deviatii conform fortei Lorentz. Cei mai multi se vor opri pe placile condensatorului, pentru ca acesta este ingust suficient. Unora in sa, li se va potrivi directia si marimea vitezei in asa fel incit ei vor trece nedeviatii, daca forta electrica este compensata exact de cea magnetica:

$$e\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{E} \quad (3.32)$$

Viteza acestora va fi atunci data de $v = E/B$. Vedem ca aparatul functioneaza in principiu ca un selector de viteze. Nu putem impune o viteza unui electron, dar putem selecta dintre toti electronii doar pe cei avnd viteza $v = E/B$. Acum putem alege rapoarte ale lui E/B mai mari decit c , selectind acesti electroni. Cu toate acestea, desi rapoarte E/B mai mari decit c , au fost impuse de catre Bucher, nici un electron nu a fost observat iesind din condensator in acest caz. Acesta in sa nu este o confirmare a supozitiei lui Einstein caci se poate simplu ca asemenea electroni sa nu fie generati de sursa.

Pnreu a analiza mai in detaliu ce se intimpla, Bucherer a adaugat o placa fotografica inspre capatul cimpului magnetic.

Acum electronii care reuesc sa iasa din detector (avind $v = E/B$), vor fi deviatii circular de cimpul magnetic pe distanta d . Raza ρ a orbitei se calculeaza din forta Lorentz:

$$evB = \frac{mv^2}{\rho} \implies \rho = mveB \quad (3.33)$$

Din triunghiurile asemenea... avem

$$\frac{D}{d} = \frac{2\rho - d}{D} \implies \rho = \frac{D^2 + d^2}{2d} \quad (3.34)$$

Egalind cele doua relatii, avem

$$\frac{e}{m} = \frac{2d}{D^2 + d^2} \frac{E}{B^2} \quad (3.35)$$

Astfel, pentru fiecare E/B ales, vom masura un d , care poate fi dedus din relatia de mai sus, presupunind ca stim e/m . Bucherer in sa a facut invers: a utilizat d masurat la fiecare valoare a lui E/B pentru a determina e/m . In mod normal, ne-am astepta ca aceasta valoare sa fie o constanta universala masurata de Thomson (?) precum am aratat in capitolul precedent. Cu toate acestea, spre surprinderea noastra (dar nu si a lui Einstein sau Lorentz), el gaseste o valoare variabila! Cu alte cuvinte, pentru diferite valori selectate ale vitezei electronilor, fie sarcina electronului, fie masa sa se modifica!

Dependenta sarcinii electronului de viteza a fost inlaturata relativ repede, pe motivul ca aceasta ar conduce la un dezechilibru intre sarcina protonului si electronului (ei au viteze diferite in atom, protonul putin fiind aproape static) care nu se observa in practica. Daca utilizam atunci valoarea sarcinii e constanta, putem afla dependenta masei de viteza, masurind dependenta lui d de E/B , si utilizind formula 3.35. Aceasta dependenta este prezentata in Fig. 3.10b.

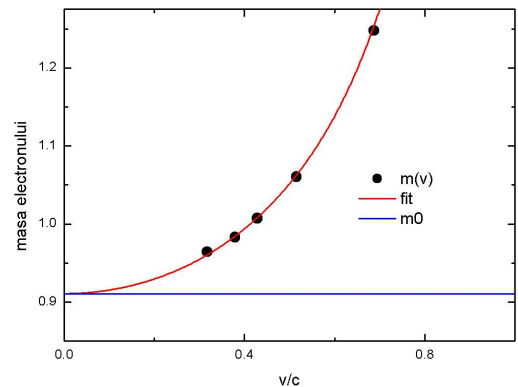


Figure 3.11: Experimentul lui Bucherer: rezultat.

Dupa cum observam, dependenta de masa a vitezei este fitata foarte bine de formula propusa de Lorentz:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (3.36)$$

3.3.2 Viteza maxima a corpurilor

Cu ajutorul relatiei 3.36 putem vedea acum ca un corp nu poate fi accelerata la viteza luminii c . Astfel, pe masura ce viteza corpului creste, si masa va creste, punind o rezistenta din ce in ce mai mare la schimbarea de viteza. La limita, cind viteza tinde la c , masa tinde la infinit, si corpul nu poate fi accelerat deloc. De exemplu, daca consideram ca asupra corpului in miscare rectilinie se actioneaza cu o forta constanta F , putem rescrie ecuatiile lui Newton ca:

$$p(v) = m(v)v \Rightarrow F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} \right) \quad (3.37)$$

Pentru a afla evolutia vitezei, trebuie sa rezolvam ecuatiile de mai sus, si sa aflam $v(t)$. Cum forta F este constanta, putem integra imediat dupa timp, obtinind:

$$Ft + Const = \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} \quad (3.38)$$

Daca alegem viteza initiala $v(0) = 0$ avem $Const = 0$. Viteza $v(t)$ se obtine atunci direct din ecuatiile de mai sus ca:

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + m_0^2 c^2 / F^2 t^2}} \quad (3.39)$$

La limita, cind $t \Rightarrow \infty$, viteza particulei se apropie de viteza luminii, dar nu o atinge niciodata!

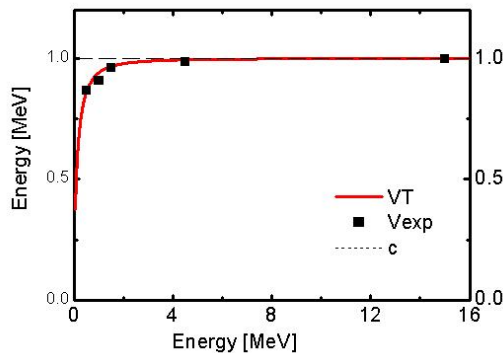


Figure 3.12: Pune si evolutia vitezei corpului calculata in text. Eventual puncte cu masuratorile lui Bertozzi

O alta maniera de a calcula viteza maxima a corpului este sa aflam din ecuatiile 3 energia "pompa" in corp. Astfel, de la momentul 0 (cind presupunem ca corpul se afla la pozitia $x=0$, si asupra lui se incepe exercitarea fortei constante F) pina la momentul t , energia "pompa" este egala cu lucrul mecanic efectuat $L = F * x(t)$. Distanța $x(t)$ parcursa de corp se calculeaza integrand 3, obtinind

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + F^2 t^2 / m_0^2 c^2} - 1 \right) \quad (3.40)$$

Energia "pompa" se poate calcula ca fiind:

$$T = Fx(t) = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + F^2 t^2 / m_0^2 c^2} - 1 \right) = \quad (3.41)$$

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} - 1 \right) \quad (3.42)$$

unde am utilizat formula vitezei. De aici, viteza corpului se poate afla in functie de energia pompata ca:

$$v(T) = c \sqrt{1 - [m_0 c^2 / (T + m_0 c^2)]^2} \quad (3.43)$$

De aici se vede din nou ca, oricita energie T am pompa, viteza corpului v nu va depasi viteza luminii c , pentru ca $v < c$. In Fig.3.11 am reprezentat acest rezultat in inset. In plus, am adaugat rezultatele experimentale obtinute de Bertozzi [?] in masurarea vitezei electronilor care confirma ca oricita energie T am "pompa" in electron (scara orizontala), viteza acestuia nu va depasi valoarea c . In plus valorile experimentale se suprapun peste valoarea calculata cu 3.43.

3.3.3 Echivalenta masa-energie

Ne putem intreba acum, unde se duce energia "pompa", daca nu in viteza lui, dupa cum am invatat in primul capitol. Ei bine, intr-o prima etapa, putem spune ca el se duce in viteza. Caci, cind viteza v este mult mai mica ca c , observam ca 3 se poate aproxima ca $T \simeq mv^2/2$. Cu alte cuvinte, cum era de asteptat, energia cinetica a corpului creste. Problema este insa la viteze mari, cind aceasta nu mai poate creste. Daca ne uitam din nou la formula 3, si inlocuim in partea dreapta masa corpului, remarcam ca energia "pompa" T are o dependenta foarte simpla de masa variabila m :

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} - 1 \right) = mc^2 - m_0 c^2 \quad (3.44)$$

Atunci putem spune, ca si Einstein, ca energia "pompa" se duce in masa corpului! Si tot precum Einstein, putem generaliza "un pic", spunind ca toata energia ce a fost vreodata "pompa" in corp se gaseste in masa acestuia conform relatiei:

$$E = mc^2 \quad (3.45)$$

Astfel, inainte de actiona asupra corpului, el era in repaus, deci avea energia $m_0 c^2$, "pompa" eventual de altcineva. Dupa ce forta F actioneaza un anumit timp, energia "pompa" este diferenta dintre energia corpului la acel moment de timp, adica $E = m c^2$, si energia initiala: $T = m_0 c^2 - m c^2$ (relatia). Relatia de mai sus defineste *echivalenta dintre energie si masa*, si este valabila in general, nu numai pe exemplul prezentat (care are inasa valoarea ca porneste de la un experiment).

Multe se vor fi scris, si multe se vor scrie despre echivalenta dintre masa si energie. Formula de mai sus a avut darul de intari mitul notiunii de energie. Se vorbeste de "energie necreată", "energie vie" sau "energia aurorei corpului uman". Nu stim in ce masura acestea din urma au un simbul de adevar, caci se poate foarte bine sa aiba. Cu toate acestea, in fizica, energia isi pastreaza valoarea de a fi un simplu numar care se conserva intr-un sistem luat in totalitate. In parti ale sistemului (ca cel prezentat mai sus), el se transfera de la o parte la alta. Exista si alte numere care se conserva, ca momentul, sarcina electrica, etc. Aspectul "mistic" al energiei ramine inasa atita timp cind nu cunoastem decit partial comportarea anumitor sisteme, precum am facut noi mai sus discutind numai un singur exemplu. Vedem ca ea se conserva si nu intelegem de ce. Cind inasa privim la sistem in totalitatea lui, intelegem ecuatiile si vedem de ce numarul atasat energiei se conserva.

Sumarizind aceasta sectiune, am vazut cum experimentul lui Becherer ne arata practic ca masa unui corp creste cu viteza

lui, conform 3.36. In plus, daca acceptam ecuatiile lui Newton in forma modificata 3.37, vedem ca dependentia masei de viteza explica in mod natural viteza maxima c spre care tind corpurile cind sunt accelerate. Se elimina astfel in mod automat si problema sistemelor de referinta care se deplaseaza cu o viteza mai mare ca viteza luminii: ele nu exista practic, pentru ca nimeni nu poate atinge acea viteza! Oricit de energie am "pompa" intr-un corp, aceasta nu creste viteza mai mult decit c , si este inmagazinata in masa corpului, conform 3.45.

3.4 Vectorii spatiu-timpului

Am mentionat in sectiunea precedenta ca Einstein si predecesorii lui "ghicisera" variatia masei unei particule cu viteza, inainte ca experimentul lui Becherer s-o confirme. Sa vedem cum. Am vazut in sectiunile precedente cum, trecind de la un sistem inertial la altul, intervalul ds se mentine constant. Acest lucru ne-a permis identificarea sistemelor inertiiale ca sisteme ortogonale rotite unul fata de altul in spatiul determinat de vectorii $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$. Principiul de echivalenta 3 se poate exprima acum, intr-o forma simplista, ca: *spatiu-timpul generat de evenimentele* $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$ *este "izotrop"*, in aceeasi masura in care si spatiul euclidian tri-dimensional este izotrop.

Sa explicam putin afirmatia de mai sus. Principiul de echivalenta 3 ne spune ca ecuatiile de miscare in diverse sisteme inertiiale arata la fel, deci ca, cu alte cuvinte, lumea ni se va parea ca se comporta la fel, indiferent in care sistem inertial ne aflam. Pe de alta parte, in reprezentarea spatiu-timpului sub forma unei geometrii generate de vectorii $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$, sistemele inertiiale sunt doar sisteme 4-dimensionale rotite unul fata de altul (cu un unghi imaginar cum am vazut, inasa ignoram acest lucru). Aceleasi doua lucruri se pot spune inasa si despre sistemele de referinta ortogonale ale spatiului euclidian 3-dimensional obisnuit. Astfel, si aceste sisteme ortogonale sunt rotite unele fata de altele. Si in toate aceste sisteme ortogonale, ecuatiile fizice se scriu la fel, si lumea ne apare ca se comporta la fel, indiferent cum trasam axele prin spatiu. Sau mai simplist vorbind, nici o directie nu e preferentiala. In acelasi fel deci, nici o viteza nu este preferentiala in spatiu-timpul 4-dimensional.

Puterea argumentelor de mai sus se observa daca facem o analiza simpla a principiilor lui Newton pentru spatiul euclidian. Astfel, izotropia spatiului apare imediat in forma scrierii vitezei ca $v = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$. Aici cele trei directii (x, y, z) apar sub aceeasi forma, insemnand ca nici o directie nu e preferentiala. Iar aceasta echivalenta se pastreaza si in definitia acceleratiei $a = (d^2x/d^2t, d^2y/d^2t, d^2z/d^2t)$. In ecuatiile lui Maxwell de exemplu, divergenta are deasemenea o forma in care se vede ca nici o directie nu este preferentiala: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Cu alte cuvinte, putem recunoaste izotropia spatiului euclidian si echivalenta sistemelor ortogonale, prin aceea ca cele trei directii x, y, z apar in ecuatiile *exact* in aceeasi forma, si deci nici una dintre directii nu este preferentiala. In acelasi mod, putem recunoaste echivalenta sistemelor inertiiale in spatiu-timpul 4-dimensional (si deci "izotropia" sa) prin aceea ca cele patru componente ale sistemului $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ apar intr-o *forma identica* in ecuatiile

Cum spatiu-timpul in acare traim, descris de $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$, este "izotrop", putem spune ca orice sistem de ecuatii care descrie un fenomen fizic *trebuie* sa aiba cele 4 marimi $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ aparind intr-o forma identica. Daca intr-un sistem de ecuatii ce descriu un fenomen fizic cele 4 marimi $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ apar intr-o forma identica, stim ca acele acuatii au sansa de a descrie un fenomen real. Daca nu apar sub forma identica, atunci ele sunt gresite! Prin acest argument, o multime de

ecuatii se pot rejecta, sau "imbunatati".

amintit: echivalent cu folosirea vectorilor, sau se spune ca ecuatiile sunt invariante la transformarea Lorentz.

3.4.1 Vectorul impuls-energie

Sa luam de exemplu $v = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ viteza unui corp. Desigur ca aceasta nu este o marime adecvata pentru descrierea fenomenelor in spatiu-timp: timpul "imaginar" $x_4 = ict$ apare in mod diferit decit pozitiiile $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. O putem "imbunatati" pornind de la definitia intervalului 3.27 intre doua evenimente.

Astfel, in sistemul euclidian, vectorul de pozitie $\vec{r} = (x, y, z)$ al unui punct M are aceeasi marime $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ indiferent de sistemul ortogonal ales (discutind aici numai despre sistemele ortogonale rotite). In acelasi fel, putem considera vectorul de "pozitie" al unui eveniment oarecare A in sistemul 4-dimensional al spatiu-timpului

$$\vec{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (3.46)$$

un *vector 4-dimensional*, pentru ca intervalul sau $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ nu depinde de sistemul inertial ales. In plus, in definitia lui $\vec{\mathbf{r}}$ cele patru componente $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ apar la fel, asa cum ne-am dorit. Precum in sistemul euclidian, si diferenta dintre vecotrii de "pozitie" a doua evenimente A si B va forma un vector:

$$d\vec{\mathbf{r}} = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) \quad (3.47)$$

Modulul sau este intervalul ds dintre cele doua evenimente, si nu va depinde de sistemul inertial ales (care sa ne amintim, este echivalent cu un sistem ortogonal rotit in spatiul euclidian). Pentru a "imbunatati" vectorul de viteza, avem nevoie sa impartim vectorul $d\vec{\mathbf{r}}$ la timp. Dar nu o putem face impartind simplu la timpul t , pentru ca atunci din nou coordonata $x_4 = ict$ ar fi preferentiala.

Sa presupunem inasa ca alegem doua evenimente *temporale* A si B. Acesta inseamna ca se poate gasi un ceas care, deplasandu-se cu o anumita viteza constanta v intr-unul dintre sistemele de referinta inertiiale O, x, y, z , va "asista" la ambele evenimente A si B. Dupa cum am discutat intr-una din sectiunile precedente, intervalul ds dintre cele doua evenimente ne da timpul intrinsec masurat de acest ceas: $ds = icd\tau$. Vedem ca acest timp intrinsec nu depinde de sistemul inertial ales, asa cum era de asteptat, pentru ca el este o matime fizica vizibila pe cadranul ceasului. Daca impartim 4-vectorul $d\vec{\mathbf{r}}$ la aceasta marime invarianta, obtinem atunci tot un alt 4-vector, ce are dimensiunea unei 4-viteze:

$$\vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right) \quad (3.48)$$

Dupa cum am mentionat, sa consideram un sistem inertial oarecare O, x, y, z . In acesta, ceasul care participa la ambele evenimente A si B merge cu viteza v . Atunci, timpul masurat in acest sistem inertial intre evenimentele A si B este dat conform 3.9 de $dt = d\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Inlocuind aceasta in formula de mai sus, precum si coordonatele $x_1..x_4$ gasim urmatoarea forma a 4-vectorului viteza:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, ic \right) \quad (3.49)$$

unde dx, dy, dz sunt diferentele de pozitie intre A si B, masurate din sistemul O, x, y, z . Recunoastem inasa in raporturile de mai sus viteza ceasului $\mathbf{v}$ masurata in O, x, y, z . Ajungem

atunci la urmatoare formula simplificata a 4-vectorului care descrie corect miscarea spatiului in spatiu-timpul 4-dimensional:

$$\overleftarrow{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\mathbf{v}, ic) \quad (3.50)$$

Daca consideram ca ceasul are si o marime "intrinseca" m_0 atribuita masei sale, atunci putem defini si un impuls 4-dimensional ca:

$$\overleftarrow{\mathbf{p}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\mathbf{v}, ic) \quad (3.51)$$

Expresia de mai sus, oricit ar parea de "ciudata", este mai indicata pentru a descrie comportarea ceasului, pentru ca ea provine din expresia 3.48 in care $x_1, \dots, x_4$ apar in acelasi mod, fara vreo preferinta pentru vreun x_i . Astfel, putem fi siguri ca 3.52 este un 4-vector (doar ca e vazut din $Oxyz$), si deci ca, de exemplu, "modulul" lui va fi acelasi in orice sistem de referinta inertial. Precum Einstein, putem atunci defini expresia 3.52 ca fiind impulsul ceasului in miscare, fiind siguri ca ea este o marime mai "potrivita" decit impulsul $m_0\mathbf{v}$ definit de Newton. Dar se vede ca expresia 3.52 contine, in partea sa spatiala, impulsul ceasului asa cum era formulat de Newton, daca consideram ca masa corpului este $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, adica tocmai expresia 3.36! Avem deci atunci

$$\overleftarrow{\mathbf{p}} = (m\mathbf{v}, imc) = (m\mathbf{v}, \frac{i}{c}E) \quad (3.52)$$

unde in partea a doua recunoastem energia ceasului $E = mc^2$, ca definita de 3.45. De aceea se spune ca relatia de mai sus defineste vectorul 4-dimensional impuls-energie al ceasului.

3.4.2 Reformularea ecuatiei lui Newton

In formula 3.33 de descriere a experimentului lui Becherer am utilizat ecuatia de miscare a lui Newton ?? in care am utilizat doar amsa variabila. Pentru un corp in miscare, putem deci scrie:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}[m(v)\mathbf{v}] = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] \quad (3.53)$$

In ecuatia de mai sus timpul este o marime preferentiala. In plus, ea nu poate fi facuta Lorentz invarianta atita timp cit se refera la corp in totalitatea lui. Motivul este ca volumul corpului se modifica in diverse sisteme de referinta, datorita contractiei Lorentz. De aceea, ecuatia de mai sus trebuie redefinita pentru densitatea de masa pe unitatea de volum.

Nu as mai face-o ca oricum n-o foloseste nimeni. In plus, apare la Lorentz.

3.4.3 Reformularea ecuatiilor lui Maxwell

In capitolul precedent am rescris ecuatiile lui Maxwell (vezi ??) utilizind cimpul vectorial $tvector{A}$ si cel scalar ϕ :

$$\nabla^2\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (3.54)$$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.55)$$

Cu ajutorul lor se poate calcula cimpul electromagnetic generat de fluidul electric, daca se cunoaste distributia acestuia

$\rho(\vec{r}, t)$. Densitatea de curent electric $\vec{j}(\vec{r}, t)$ se poate calcula, si ea satisface legea de conservare:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla\vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.56)$$

Se observa usor ca relatiile de mai sus pot fi usor simplificate daca utilizam dimensiunile spatiu-timpului $x_1, \dots, x_4$. Astfel, sa definim un 4-curent $\overleftarrow{\mathbf{J}}(\vec{r}, t)$ in fiecare eveniment $(\vec{r}, t)$ al spatiu-timpului. Pentru simplificare, o sa renuntam sa tot punem $(\vec{r}, t)$ in paranteze, insa subintelegem aceasta.

$$\overleftarrow{\mathbf{J}} = (\mathbf{j}, ic\rho) = \rho(\mathbf{v}, ic) = \rho(v_x, v_y, v_z, ic) = \quad (3.57)$$

$$= \frac{e}{dxdydz} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, ic \frac{dt}{dt} \right) = \quad (3.58)$$

$$= ic \frac{de}{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4} (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) \quad (3.59)$$

In relatia de mai sus am notat prin $\mathbf{v}$ viteza asociata elementului de volum infinitezimal de sarcina $dxdydz$. Daca consideram ca sarcina de din acest volum este o marime invarianta (supozitie care am facut-o si la experimentul lui Bucherer) atunci si marimea de sus este Lorentz invarianta, pentru ca in ea cele 4 coordonate ale spatiu-timpului apar in acelasi mod. Mai mult, vedem ca aceasta are dimensiunea unui 4-vector "orientat" in aceeasi directie ca 4-vectorul viteza:

$$\overleftarrow{\mathbf{J}} = \rho \frac{d\tau}{dt} \overleftarrow{\mathbf{v}} = \rho \sqrt{1-v^2/c^2} \overleftarrow{\mathbf{v}} \quad (3.60)$$

Se poate verifica repede ca legea de conservare a sarcinii 3.56 se scrie si ea sub forma 4-dimensionala ca

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \overleftarrow{\mathbf{J}}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.61)$$

Putem in continuare defini si operatorul $\square^2$ avind termenii $x_1, \dots, x_4$ sub aceeasi forma

$$\square^2 = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_4^2}$$

Am folosit un dreptunghi $\square$ fata de operatorul triunghi ∇ tocami sa subliniem ca actioneaza intr-un spatiu 4-dimensional. In plus, patrutul sau semnifica faptul ca el contine derivate de ordinul 2. Daca definim si marimea

$$\overleftarrow{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, ic\phi) \quad (3.63)$$

atunci se vede ca putem reduce ecuatiile lui Maxwell 3.54 la forma simpla:

$$\square \overleftarrow{\mathbf{A}} = -\mu_0 \overleftarrow{\mathbf{J}} \quad (3.64)$$

Dupa forma in care le-am scris vedem ca ecuatiile lui Maxwell sunt invariante Lorentz, pentru ca termenii $x_1, \dots, x_4$ apar in aceeasi forma in ele. Acest lucru este remarcabil, caci atunci ele nu ar mai trebui "imbunatatite", precum ecuatia lui Newton.

S-ar parea ca despre marimea $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ nu putem spune nimic. Intr-adevar, ea este cea care rezulta din ecuatia 3.64. Cu alte cuvinte, ea se calculeaza dindu-se o distributie de sarcini $\overleftrightarrow{\mathbf{J}}$ anume. Dar nu este mai putin adevarat ca forma ecuatiei 3.64 *implica* ca ea trebuie sa fie un 4-vector dat, *intr-o forma formală*, de raportul vectorului $\overleftrightarrow{\mathbf{J}}$ cu operatorul invariant $\square$. Faptul ca ea este un 4-vector se vede deja reamintindu-ne de "Lorentz gauge" prezentata in ??

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} \quad (3.65)$$

Astfel, ea se rescrie atunci ca:

$$\square \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = 0 \quad (3.66)$$

unde

$$\square = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2}{\partial x_2}, \frac{\partial x_3}{\partial x_3}, \frac{\partial x_4}{\partial x_4} \right) \quad (3.67)$$

Concluzia celor discutate mai sus este urmatoarea. Putem rezolva ecuatiile lui Maxwell (simplificate in forma 3.64) intr-un sistem inertial, si afla cimpul $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$. Expandind ecuatiile, acestea ne vor conduce in fapt la vectorul potential (*tvector* A, ϕ). Ne putem alege apoi si un alt sistem inertial, in care sa rezolvam *aceleasi* ecuatii 3.64 si afla vectorii (*tvector* A, ϕ) in acesta.

Deoarece $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ este un 4-vector, putem insa folosi si relatiile de tip Lorentz de transformare a unui vector sau tensor de la un sistem inertial la altul. Valorile cimpului electromagnetic $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ "masurate" in diverse sisteme inertiiale vor fi astfel diferite, dar acesta nu este decit o caracteristica intrinseca a spatiu-timpului dat de metrica 3.27 in care traim.

Folosind aceasta forma 4-dimensională a ecuatiilor lui Maxwell, putem rescrie chiar si cimpurile magnetice (*tvector* $E, \mathbf{B}$). Astfel, ele au fost definite in capitoul precedent ca:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \quad (3.68)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\nabla \phi(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} \quad (3.69)$$

Putem defini un *tensor* F_{ij} ca:

$$F_{i,k} = \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_i}{\partial x_k} \quad (3.70)$$

Merimea de mai sus este Lorentz invarianta, pentru ca din nou toate coordonatele intra sub aceeasi forma. Prin comparatie cu 3.68 cimpurile electromagnetice se identifica atunci usor ca componentele acestui *tensor* F_{ij} :

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix}$$

Ecuatiile lui Maxwell se pot scrie atunci si sub forma:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \overleftrightarrow{\mathbf{J}}_i \quad (3.71)$$

$$\sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.72)$$

Daca acum putem vedea cum ecutiile lui Maxwell au aceleasi forme in toate sistemele inertiiale (pentru ca coordonatele spatio-temporale x_i intra in acelasi mod), ne putem intreba pe buna dreptate daca acestea determina aceleasi traiectorii de miscare ale particulelor indiferent de sistemul inertial in care se fac calculele traiectoriei lor! Pentru aceasta trebuie sa vedem si daca forta cu care cimpul electromagnetic actioneaza asupra "fluidului" electric se poate scrie intr-o forma invarianta.

In sectiunea precedenta am mentionat ca, pentru a crea o forma relativistic invarianta a ecuatiei lui Newton, trebuie sa consideram nu forta asupra unei particule, ci densitatea de forta ce actioneaza asupra unui volum de materie. Sa consideram aceasta densitate de forta Lorentz data de ...

$$\vec{\mathbf{f}} = \rho \vec{\mathbf{E}} + \rho \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \rho \vec{\mathbf{E}} + \mathbf{j} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (3.73)$$

Folsind relatiile ?? se poate verifica ca ea provine din vectorul 4-dimensional:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_\mu = \sum_\nu F_{\mu\nu} \overleftrightarrow{\mathbf{j}}_\nu \quad (3.74)$$

Aceasta forma este Lorentz invarianta, nepreferentiind nici una dintre coordonate. Componentele spatiale si temporale se scriu atunci explicit sub forma:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}} = \left(e \frac{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{e i}{c} \frac{\mathbf{vE}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (3.75)$$

Componenta spatiala este forta efectuata, iar cea temporala da lucrul mecanic efectuat, precum era de asteptat. In final, ecuatia de miscare sub forma relativista se scrie exact ca la Newton:

$$m_0 \frac{d\overleftrightarrow{\mathbf{v}}}{d\tau} = \overleftrightarrow{\mathbf{f}} \quad (3.76)$$

3.5 Recapitulare

Teoria relativitatii restrinse, spre deosebire de mecanica ori electromagnetism, nu numai ca explica si prezice comportarea unor fenomene naturale, dar ne si pune la incercare "bunul simt" cu care noi le percepem. Poate ca cel mai potrivit exemplu este conceptul de timp. Obisnuiti cu curgerea continua si naturala pe care o simtim pe propriul nostru "eu", am acceptat usor prezenta unui timp absolut, newtonian, care curge "in acelasi moment" prin toti oamenii si toate punctele din spatiu.

Cu toate acestea, cel putin la nivel material, Einstein a dovedit ca este mult mai util sa acceptam notiunea de eveniment, timpul fiind mai degraba o succesiune continua de masurare a acestor evenimente. El isi pierde atunci caracterul de prezenta universală. Cumva, trebuie sa ne privim si pe noi ca pe o succesiune a evenimentelor noastre, fara legatura cu se intimpla in alte locuri. Putem privi atunci relativitatea timpului ca pe o masura diferita a succesiunii diverselor evenimente. Un exemplu convingator este al ceasului pe care l-am construit in sectiunea ??, si care masoara timpul diferit atunci cind este in miscare sau cind sta.

Am vazut ca "explicatia" comportarii ceasului este pe dea intregul corecta, datorita faptului ca putem folosi ecuatiile lui Maxwell in orice sistem de referinta. Astfel, daca ne limitam numai la un sistem oarecare de referinta, sistemul electromagnetic poate fi explicat in termeni clasici, incluzind pe cei de timp si spatiu. Cu toate acestea, intelegerea ne este "chalanged" prin

afirmatia ca lumea ne apare descrisa la fel din orice sistem inertial am privi. Si cum nu ar fi asa, cind nu avem posibilitatea sa mergem cu viteze apropiate de viteza luminii, sa avem atunci experienta perceperii lumii?

De aceea am spus ca teoria relativitatii restrinse este ca o problema de geometrie rezolvata fara a desena figura. Caci, fara a merge cu masini care au viteze apropiate de cele ale luminii, am putet deduce, din acest principiu al relativitatii formule extrem de utile: transformarea Lorentz, care ne da direct sub ce forma percepe un alt observator in miscare timpul si spatiul sau echivalenta energie-masa care ne da felul in care un corp "inmagazineaza" energia "pompata" in el.

In plus, conservarea intervalului ds intre doua evenimente ne-a permis constructia unui spatiu-timp patru dimensional, cu o axa imaginara. Datorita acestui lucru, nu i-am dat o semnificatie fizica adinca, insa l-am utilizat din plin in deducerea formulelor matematice necesare. Astfel, am asemanat sistemele inertiiale in acest spatiu-timp cu sistemele ortogonale rotite din spatiul euclidian 3-dimensional. Cum sistemele ortogonale reflecta izotropia spatiului euclidian, asa putem considera ca si spatiu-timpul 4-dimensional este "izotrop", reformulind astfel principiul relativitatii lui Einstein intr-o forma foarte simplificata.

Aceasta abordare ne-a permis insa sa deducem poate cea mai importanta predictie a teoriei relativitatii restrinse: fiecare ecuatie fizica care explica lumea trebuie sa aiba o forma invarianta, intelegind prin asta ca coordonatele $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ trebuie sa apara sub aceeasi forma in ecuatii daca sunt inlocuite. Daca ecuatiile lui Maxwell sunt deja invariante, ecuatia lui Newton a trebuit putin "imbunatatita".

Criteriul acesta il vom folosi insa din plin la orice teorie am urma sa construim, cum ar fi mecanica cuantica, sau electrodinamica cuantica. Inlocuind coordonatele x_1, x_2, x_3, x_4 vedem daca ele apar in acelasi mod. Daca nu apar, atunci trebuie sa "imbunatatim" teoria. Cu alte cuvinte, trebuie sa facem ecuatiile fizice Lorentz invariante.

3.6 Exercitii

3.7 Idei

vezi ca se poate masura in ptincipiu dilatarea cu un laptop (f-1GHz) de la Bucuresti la New-York. Problema e numai: e ceasul laptopului asa de stabvil (trebuie sa vada cam 30 de cicli) . Cred ca nu, si ca eroarea inerenta casului "Bate" ce s-ar putem observa. Dar in principiu masuratoarea se poate face sinciorinizind doua laptopui. check web

la relativitate speciala arata cum egg-chicken problem: cum ceasul e instrumesnt de masura, si se descrie de relativitate insasi: probleme!

dar cu ceasuri reale? Vezi Mejdi

in forma relativista, ecuatia fortei este unitara, nu e separatie intre magnetic si electric.

bara rigida are particule care emit cu viteza luminii intre ele: contractia usor de inteles.

dar si ceasul e facut la fel-> dilatatia usor de inteles: cind merge cu viteza luminii, ceasu sta, pentru ca inf nu ajunge!

viteza luminii = panta pe care cade sania

Contents

4	Teoria Relativitatii Generale	101
4.1	Gravitatia pina la Einstein	101
4.1.1	Teoria newtoniana a gravitatiei: formularea Poisson	101
4.1.2	Teoria scalara a gravitatiei	101
4.2	Gravitatia, o teorie mai profunda decit toate celelalte?	102
4.2.1	Principiul echivalentei	102
4.2.2	Consecinte ale principiului echivalentei	102
4.2.3	Spatiu-timpul 4-dimensional curb	103
4.2.4	Geodezica	104
4.3	Metrica originala	105
4.3.1	Ecuatia lui Einstein	105
4.3.2	Tensorul energie impuls al unui cimp oarecare	106
4.3.3	Formularea lui Hilbert	107
4.3.4	Tensorul energie-impuls al prafului stelar	108
4.4	Aproximarea ecuatiei lui Einstein	109
4.4.1	Potentialele gravitationale retardate	109
4.4.2	Ecuatia aproximativa de miscare a unui corp de proba	111
4.4.3	Dilatarea timpului si contractia gravitacionala a lungimilor	112
4.5	Solutia <i>exacta</i> Schwarzschild pentru simetria sferica	112
4.6	Verificari experimentale	114
4.6.1	Periheliul lui Mercur	114
4.6.2	Curbarea razelor de lumina	116
4.6.3	Lentile gravitationale	117
4.6.4	Experientele radar de intirziere a luminii - doua poze	118
4.6.5	Deplasarea spre rosu	118
4.7	Preziceri experimentale	119
4.7.1	Gauri negre	119
4.7.2	Undele gravitationale	121
4.8	Cosmologie. Expansiunea universului	121
4.8.1	Metrica unui spatiu-timp omogen si izotrop	121
4.8.2	Ecuatia lui Friedmann	123
4.8.3	Modele posibile de Univers	124
4.9	Exercitii	124
4.10	Idei	125

Chapter 4

Teoria Relativitatii Generale

In capitolul precedent am aratat cum ecuatiile electromagnetismului isi capata o forma naturala in teoria relativitatii restrinse, si cum principiul al III-lea al lui Newton trebuie generalizat. Un lucru este insa evident, nu ne-am atins de teoria "mare" a lui Newton. Astfel, nu am discutat despre forta de atractie dintre corpuri, care a ramas instantanee, desi relativitatea restrinsa ne spune ca nici o informatie nu se poate transmite instantaneu. O vom face acum, pornind de la teoria clasica a lui Newton, intr-o reformulare datorata lui Poisson.

4.1 Gravitatea pina la Einstein

4.1.1 Teoria newtoniana a gravitatiei: formularea Poisson

Poisson a rescris teoria gravitatiei lui Newton intr-o forma care o face teorie de cimp, si care este aproape identica cu teoria electrostatica (daca am presupune ca sarcinile au acelasi semn si se atrag). Astfel ca si in electrostatica, putem presupune ca un corp punctual de masa m_0 , aflat in originea sistemului de coordonate, genereaza in punctul $\mathbf{r}$ un cimp gravitational dat de:

$$\phi(\mathbf{r}) = G \frac{m_0}{|\mathbf{r}|} \quad (4.1)$$

Cimpul astfel ϕ este astfel generat *instantaneu* in tot spatiul, indiferent daca corpul m sta sau se misca. Forta cu care el actioneaza asupra unui corp M aflat in pozitia $\mathbf{r}$ este data de legea atractiei universale a lui Newton, si poate fi rescrisa (folosind formula de mai sus) ca:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = G \frac{mm_0}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r} = Gmm_0 \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) = -m \nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

Se presupune atunci ca toate masele $dm = \rho(\mathbf{r})dV$ din toate volumele infinitezimale $dV = d\mathbf{r}_0^3$ din Univers contribuie intr-un mod liniar la formarea potentialului gravitational. In punctul $\mathbf{r}$, acesta va fi dat de suma potentialelor de tip 4.1

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G \frac{\rho(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.3)$$

Precum in electrostatica, putem aplica operatorul laplacean in stanga si dreapta relatiei, obtinind:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \int G \rho(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0^3 \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = \int G \rho(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.4)$$

unde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ este functia lui Dirac. Ca atare, relatia de "generare" a cimpului gravitational de catre un cimp de mase $\rho(\mathbf{r})$ devine:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = G \rho(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

ceea ce este echivalent cu a spune ca in fiecare punct $\mathbf{r}$ din univers trebuie sa avem indeplinita relatia de mai sus.

4.1.2 Teoria scalara a gravitatiei

Dupa cum am mentionat, relatia 4.5 (sau 4.1) este identica cu cea generata de potentialul electrostatic, si are dezavantajul ca "informatia" ϕ generata de un corp m_0 se transmite instantaneu in tot spatiul. Daca vrem ca sa construim o teorie a gravitatiei in care aceasta "informatie" ϕ sa nu depaseasca viteza luminii, cea mai naturala incercare este sa presupunem ca aceasta se deplaseaza cu viteza luminii, intr-un mod *identic* cu potentialul scalar retardat al cimpului electromagnetic ???. Astfel, conform ??, ecuatia ei ar fi data de:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = G \frac{m_0}{|\mathbf{r}(t - r/c)|} \quad (4.7)$$

adica potentialul ϕ a fost emis la un timp anterior $t - r/c$, circulind deci pina la punctul $\mathbf{r}$ cu viteza c . Cum am vazut in ??, relatia de mai sus se scrie in forma diferentiala ca:

$$\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = G \rho(\mathbf{r}, t) \quad (4.9)$$

Cum viteza luminii c este mare, se poate presupune ca al doilea termen este neglijabil, si ca efectele lui intr-un experiment sunt mici, si de aceea nu a fost observat pina acum.

Presupunerea de mai sus, desi adevarata intr-o prima aproximatie, s-a dovedit insa a nu fi completa! Cu alte cuvinte, formula 4.8 *nu reprezinta forma completa a teoriei gravitatiei*, desi teoria gravitatiei se reduce intr-o prima aproximatie la 4.8.

Acest lucru a fost accentuat in mod special de Einstein care, nemulțumit ca teoria relativitatii speciale se restringe la cazurile sistemelor inertiiale, si sesizind lagatura dintre acestea si cimpul gravitational (sistemele inertiiale trebuie cautate la departare de cimpuri gravitationale), a presupus ca influenta cimpului gravitational este mai profunda. Epopeea cautarii sale a durat citiva ani, pina in 1915 cind formulele principale care o descriu au fost gasite. Sa incercam si nou si noi sa urmarim in parte aceasta curgere a ideilor, pornind de la acele observatii care l-au facut pe Einstein sa creada ca gravitatie joaca un rol mai profund in natura decit o simpla transmitere de informatie conform 4.8.

4.2 Gravitatia, o teorie mai profunda decat toate celelalte?

4.2.1 Principiul echivalentei

Poate parea ciudat, dar motivul pentru care Einstein s-a incapatat sa creada ca gravitatie joaca un rol special se regaseste in gindirea si experimentele lui Newton. Astfel, Newton a realizat ca teoria sa are un aspect deosebit pe care noi, cu buna stiinta, l-am ignorat in capitolul despre mecanica.

Astfel, sa ne reamintim cele doua forte ale lui Newton care determina caderea libera a unui corp:

$$F = m \frac{GM}{r^2} = mg \quad F = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (4.10)$$

Prima este forta cu care un corp de masa M atrage un corp de masa m . Masa m se numeste aici *masa gravitationala* a corpului. A doua relatie ne spune cum se misca corpul de masa m cind asupra lui se exercita o forta oarecare, si ea defineste *masa inertiala* m . La prima vedere, pare ca aceasta diferentiere intre doua mase ale unui corp, gravitationala si inertiala, este superflua si inutila, caci definitia lor este legata intrinsec de notiunea de forta, si cum o definim pe aceasta (puteam alege $F'=F/2$, obtinind alte mase $m'=m/2$). Putem insa elimina forta, si rescrie relatia de mai sus ca

$$\frac{GM}{r^2} = g = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (4.11)$$

Ea ne spune ca miscarea corpului m este *independenta* de valoarea masei sale. Cu alte cuvinte, in conditii ideale, doua corpuri *diferite* lasate liber vor cadea in aceeasi maniera pe Pamint, din nou, un lucru pe care il stim de la experientele lui Galilei. Putem atunci exprima asa-numitul principiu al echivalentei sub forma: *miscarea unui corp punctual intr-un cimp gravitational este independenta de masa si compozitia sa*.

Si totusi, si-a zis Einstein, de ce corpurile nu cad diferit in cimpul gravitational, *daca ele tot sunt diferite*? Trebuie sa fie un motiv mai profund decat coincidenta egalitatii maselor gravitationale si inertiale, asa cum a fost formulata de Newton. Pentru aceasta, el a imaginat faimosul experiment al liftului (vezi Fig. 4.1).

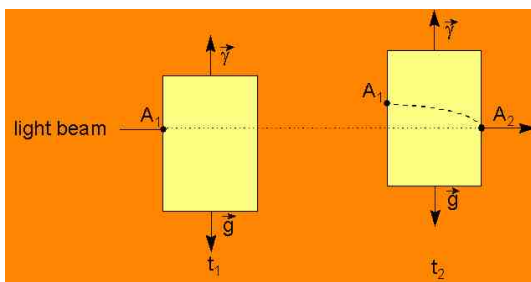


Figure 4.1: Liftul lui Einstein

In lift, o persoana face experimente cu corpuri, neputindu-se uita pe eventualul geam al liftului. O alta persoana, pusa pe sotii, pune liftul fie in spatiul imponderabil, fie il lasa sa cada liber in cimpul gravitational al Pamintului (eventual oprindu-l inainte de a se ciocni fatal de suprafata sa). Dupa cum intuitiv ne asteptam, deoarece toate obiectele din liftul in cadere cad sincronizate in acelasi timp, observatorul din lift nu va remarca nici o diferenta intre cele doua situatii.

Einstein, sub influenta teoriei relativitatii speciale, a presupus chiar mai mult: daca observatorul din liftul in cadere isi va

trasa coordonate de spatiu si timp, spatiu-timpul observat de el va fi Minkovskian! Cu alte cuvinte, stind pe loc fata de lift, sau deplasandu-se cu viteze constante fata de acesta, *el va verifica in intregime legile relativitatii speciale*. Aceasta desi observatorul se afla in cadere intr-un cimp gravitational, si nu in spatiul imponderabil precum am presupus cind am construit teoria relativitatii speciale.

Presupunerea lui Einstein este astfel cruciala, si ea maresta in primul rind situatiile in care relativitatea restrinsa poate fi aplicata, cel putin cu cazul liftului in cadere libera in cimp gravitational. In conjunctie cu discutia noastra matematica introductiva despre suprafetile curbe, vedem imediat unde "bate" Einstein. Putem astfel aduce la un loc cele doua porpozitii critice:

1. In orice sistem gravitational putem alege un lift in cadere libera in interiorul caruia legile relativitatii restrinsa sunt satisfacute. Aceasta inseamna ca putem gasi un set de *sisteme de referinta* (ce se deplaseaza cu viteza constanta unul fata de celalalt), pentru care intervalul $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ dintre oricare doua evenimente este mereu acelasi.
2. Pe portiuni mici ale suprafetelor curbe discutate de noi, puteam alege in orice punct *sisteme locale de coordonate* in care metrica este euclidiană $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$, si care sunt "rotite" unul fata de celalalt.

Concluzia lui Einstein apare acum clar: putem presupune ca *toate evenimentele din spatiu-timp se aseaza pe un spatiu 4-dimensional curb*. Local, pe portiuni mici, putem alege o metrica Minkovskiana, in asa fel incit intervalul dintre doua evenimente este constant, si dat de $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. Sistemele de coordonate locale care vor satisface relatia de mai sus vor fi cel al liftului in cadere libera, si cele care au viteza constanta fata de acesta. In spatiu-timpul curb, acestea vor parea "rotite" unul fata de celalalt, precum am vazut in relativitatea restrinsa.

Vom discuta principala consecinta a presupunerilor de mai sus, si anume geodezica, intr-o sectiune urmatoare. Acum insa vom reaminti pe scurt citeva dintre speculatiile ce se pot face pe marginea principiului echivalentei.

4.2.2 Consecinte ale principiului echivalentei

Dupa cum observatorul din lift nu poate face distinctie intre liftul in cadere si in imponderabilitate, tot astfel el nu poate face distinctie intre un lift static intr-un cimp gravitational g si unul accelerat cu o acceleratie identica g . Insa o raza de lumina care strabate liftul in cea de-a doua situatie va aparea curbata observatorului din lift (vezi Fig. 4.1). Este musai atunci ca ea sa apara curbata si primului observator, de unde presupunerea lui Einstein ca razele de lumina ce strabat cimpuri gravitationale sunt curbate.

Aceasta presupunere si-a gasit confirmarea in celebrele experimente de masura a pozitiei unei stele din spatele Soarelui, in timpul eclipsei de Soare din 1919. Imediat dupa razboi, vestea ca doua expeditii britanice au verificat teoria unui german i-au adus o fama si o publicitate uriasa lui Einstein, de care putin fizicieni au avut parte in timpul vietii lor.

Primul instinct ar fi sa face o estimare a acestui efect, utilizind experienta cu liftul, si sa o comparam cu rezultatele experimentale. Am fi insa dezamagiti, pentru ca am obtine un rezultat care este numai jumatate din valoarea masurata. Motivul este ca am folosi cimpul gravitational al lui Newton, care este putin mai mic decat cel real, dedus tot de Einstein. Dupa ce vom elabora complet teoria relativitatii generalizate, vom

putea calcula cimpul gravitational real, si gasi valoarea deviatiei razei de lumina care este verificata de experiment.

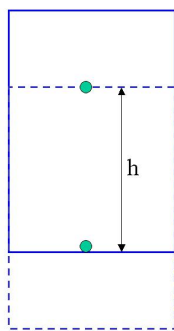


Figure 4.2: legenda

Cea de-a doua speculatie se refera la deplasarea spre rosu a razelor de lumina emisa de stele, si timpul propriu. Einstein a dedus-o in felul urmator. Sa presupunem ca lasam liftul sa cada liber. Exact cind ii dam drumul (viteza liftului este nulla), o sursa emite de pe podea lumina cu frecventa ν (vezi Fig.4.1). Vazuta din afara liftului, aceasta isi pastreaza frecventa ν , si atinge tavanul (care are inaltime h si s-a deplasat cu dh) dupa un moment $t = (h - dh)/c = dr/c$. Atunci viteza tavanului este:

$$v = gt = g \frac{dr}{c} \quad (4.12)$$

Aici putem privi pe dr ca pe diferenta de inaltime a celor doua evenimente: lumina emisa si lumina absorbita. Un observator de pe tavan care observa aceasta lumina ce se absoarbe, este automat in miscare rigida cu liftul, si deci la momentul absorbtiei el are viteza v . Ca atare, conform efectului Doppler aplicat pe invers, el va observa frecventa luminii deplasata spre valori mai mici cu o valoare data de

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = g \frac{dr}{c^2} \quad (4.13)$$

Daca ne reintoarcem la observatorul care nu stie unde se afla, si care foarte bine se poate afla intr-un cimp gravitational, acesta va observa ca lumina emisa de o sursa afla la o inaltime cu dr mai mica decat el va fi deplasata spre rosu cu valoarea 4.13.

Aceasta este cunoscuta depalsare spre rosu a surselor de lumina in cimp gravitational, si ea poate fi verificata in principiu foarte usor, tinind cont ca intrinsec toti atomii identici emit cu aceeasi frecventa. Am putea verifica de exemplu frecventa luminii emisa de atomii de hidrogen din Soare, si compara-o cu cea emisa de cei de pe Pamint. Acest lucru se dovedeste insa in practica mult mai dificil, pentru ca atomii din Soare nu au conditii identice cu cei de pe Pamint, si astfel frecventa poate fi deplasata spre rosu si din alte motive. Vom discuta insa toate aceste experimentale ale teoriei relativitatii generalizate intr-o sectiune urmatoare. Ne rezuman a aminti aici ca, cu o suficient de mica eroare experimentală, relatia 4.13 a fost verificata.

Sa observam acum ca deplasarea spre rosu a luminii emisa de o sursa dintr-un punct aflat la o inaltime mai mica (cimp gravitational mai puternic) poate fi interpretata si in termeni de dilatare a timpului. Astfel, putem presupune ca sursa de la inaltime mai mica (pe care o vom lua $H=0$ pentru convenienta), emitind cu o frecventa mai mica, transmite efectiv semnalele la intervale mai lungi de timp, pentru ca timpul in locul de emisie este dilatat. Putem deduce atunci dilatarea timpului din relatia 4.13, folosind faptul ca perioada este inversul frecventei

$T_0 = 1/\nu$: (rescrie)

$$T(dr) = \frac{1}{\nu - \Delta\nu} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{1 - \Delta\nu/\nu} \simeq \frac{1}{\nu} (1 + \Delta\nu/\nu) \quad (4.14)$$

si deci

$$T(H) = T(0) \left(1 - g \frac{H}{c^2} \right) \quad (4.15)$$

In incheiere, sa mentionam ca efectul de curbare a razei de lumina, si cel al deplasarii spre rosu, pot fi deduse si pe cale clasica, *precis cu acelasi rezultat* (daca ne limitam la efectele locale). Pentru aceasta, nu trebuie decat sa presupunem ca lumina este compusa din particule (numite fotoni) care au o masa $m = \hbar\nu/c^2$, energie $E = \hbar\nu$, si impuls $p = \hbar\nu/c$, toate date de formulele cuantice. Atunci curbarea locala a razei de lumina se explica prin atractia gravitationala newtoniana, iar deplasarea spre rosu prin pierderea de energie atunci cind lumina "urca" in potentialul gravitational. Rezultatul este remarcabil, si nu poate "ascunde" decat o relatie inca mai profunda intre gravitatie si mecanica cuantica, aspect ce va fi discutat in capitolele urmatoare.

Radu, chestia este intr-adevar remarcabila. Poate poti zice de ce e asa. Atentie insa la curbarea luminii, local am dreptate, dar nu si daca folosesc cimpul lui newton pentru a calcula toata deviatia perfect clasic (cu Newton). Atunci iese pe jumătate, cum am zis. Dar iese pe jumătate pentru ca cimpul nu e bun. Coincidenta (intre newton+cuantic si Einstein) ramine deci si la deviatia luminii. Ce zici? Ori am gresit eu, ca se poate si asta.

4.2.3 Spatiu-timpul 4-dimensional curb

Sa revenim acum la principala consecinta a principiului echivalentei: structura evenimentelor in spatiu-timp. Mai precis, sa explicitam mai detaliat ce inseamna ca acestea se pot aseza pe un spatiu 4-dimensional curb. Vom porni de la analogia cu suprafetele curbe bi-dimensionale discutate in sectiunea de matematica, sumarizind ce am aflat.

Astfel, am vazut cum, pentru a descrie complet o suprafata curba, este suficient a se alege un sistem oarecare de coordonate $x = (x^1, \dots, x^n)$ (numite covariante), *impreuna cu metrica* $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$. Subliniem ca aceste functii $g_{ij}(x)$ trebuie cunoscute in toate punctele x . Odata stiind sistemul de coordonate x si metrica atasata lui g , putem afla distantele intre oricare puncte, distanta cea mai scurta, sau curbura spatiului. Cea mai importanta este distanta intre doua puncte foarte apropiate (cel mai bine e daca le consideram infinitezimal apropiate), data de relatia ??:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx^i dx^k \quad (4.16)$$

Aici dx^i sunt diferentele dintre coordonatele celor doua puncte, iar g_{ik} se calculeaza intr-o vecinatate a lor, el nevariind semnificativ de la un punct la altul (in limita infinitezimala este identic in cele doua puncte). Relatia de mai sus o putem generaliza la orice spatiu curb, *chiar daca el nu este integrat intr-un spatiu mai mare euclidian*, asa cum am discutat.

Daca vrem sa alegem un alt sistem oarecare de coordonate x' , atunci suntem obligati sa-i calculam noua metrica atasata g' din cea veche, pentru a obtine aceeasi descriere a suprafetei curbe (aceleasi distante, aceasi ruta cea mai scurta, etc...). Motivul

este clar: daca am alege si alt x' si alt g' , atunci conform 4.16 am obtine sigur cu totul alte valori ale distantelor dintre puncte. Metrica g' atasata noului sistem de coordonate se calculeaza din cea originala, *in fiecare punct* al spatiului curb, cu:

$$g'_{ij} = \sum_{k,s} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} g_{ij} \quad (4.17)$$

Deci noile coordonate x' trebuie privite ca definite de niste functii de cele vechi $x'^i = f^i(x)$, derivate apoi, si inlocuite in relatia de mai sus, pentru a afla noile g'_{ij} in fiecare punct al spatiului. Aceste valori ale lui g'_{ij} ne vor asigura ca masuram aceleasi distante intre puncte, folosind metrica 4.16.

Faptul ca si spatiu-timpului i se poate atasa o metrica, l-am discutat in teoria relativitatii generalizate. Am vazut cum evenimentelor li se pot atasa coordonatele minkovskiene (adica euclidiene generalizate) $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$. Desigur ca cea mai surprinzatoare este coordonata temporală x_4 , care a fost inasa aleasa special imaginara pentru a pastra o metrica ?? de tip euclidian:

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \quad (4.18)$$

In acest spatiu minkovskian, sistemele "ortogonale" ("rotite" unele fata de celelalte) sunt de fapt sistemele inertiiale. Acestea au proprietatea remarcabila ca intervalul fizic ds dintre doua evenimente este acelasi in toate, si dat de forma "euclidiană" 4.18. Subliniem aici ca este vorba despre un rezultat fizic, al unor masuratori ce pot fi efectuate cu orice ceas in miscare. Putem prezice atunci precis comportarea *reală* a timpilor aratati de ceasuri, si a distantelor aratate de rigle, in functie de vitezele si directiile in care se misca. Chiar daca aceasta comportare difera semnificativ de cele acceptate de Newton (timpul se dilata, riglele se contracta, etc.) este remarcabil ca ea poate fi prezisa prin relatia simpla 4.18.

Revenind la principiul echivalentei, el prezice deasemenea comportarea ceasurilor si riglelor, numai ca acum in conditii generale, mult mai complexe. Aceasta prezicere se poate face daca cunoastem coordonatele evenimentelor $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ct$, impreuna cu o metrica originala $g_{ij}(x^1, \dots, x^4)$ atasata lor. Cum arata aceasta metrica originala este o alta problema, pe care o vom dicuta mai tirziu. Dar, *daca presupunem ca am gasit metrica originala $g_{ij}(x)$ in orice punct, atunci cu certitudine putem afla indicatia ceasurilor si riglelor, exact ca in teoria relativitatii, cu ajutorul relatiei 4.16.*

Astfel, timpul indicat de un ceas intre doua evenimente "pe ceas" (adica coordonatele spatiale ale celor doua evenimente sunt coordonatele ceasului) este $dt = dx^4/c = ds/c =$, unde ds este intervalul dintre evenimente. La fel, distante dintre doua puncte, masurata cu rigla in acelasi moment de timp (dat de sistemul de coordonate ales) este $dL = ds$, unde ds este intervalul dintre cele doua puncte.

Daca alegem un alt sistem de coordonate x' , atunci trebuie sa calculam noua metrica g' pornind de la metrica originala, folosind relatia 4.17, exact ca pentru spatiile curbe. Obtinem atunci sigur aceleasi comportari ale obiectelor fizice (rigle, ceasuri, lumina, etc.), daca utilizam relatia 4.16. Avantajul este inasa ca acum putem alege *orice sistem de coordonate* pentru a descrie evenimentele, nu numai cele inertiiale ca in cadrul relativitatii restrinse. Conditia este desigur sa-i calculam metrigră g'_{ij} atasata, pornind de la cea originala.

In plus, putem observa ca am renuntat la a folosi o dimensiune imaginara temporală. Avem astfel $x^4 = ct$. Motivul este de ordin mai degraba tehnic. Din moment ce oricum folosim o metrica g atasata unui, sistem de coordonate, in relativitatea restrinsa putem scrie simplu $g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1, g_{44} = -1$, restul componentelor fiind zero. Rolul deosebit jucat de timp nu este inasa eliminat, caci acum avem g_{44} nega-

tiv. Aceeasi valoare negativa se poate obtine si in spatiile 4-dimensionale curbe, rezultind in intervale pozitive si negative, spre deosebire de suprafetele geometrice curbe unde intervalul este numai pozitiv.

4.2.4 Geodezica

Atentie: foloseste *corp de test*, care nu actioneaza asupra altor corpuri, si nu corp punctual! Explica de ce aparare timpul rpopriu al ceasului. Ptr. ca $ds = c d\tau$.

Am mentionat in sectiunea precedenta ca un sistem de coordonate si metrica atasat lui *determina complet* indicatia riglelor si ceasurilor, precum in teoria relativitatii speciale. Nu am spus inasa nimic despre comportarea corpurilor, in special despre miscarea efectuata de acestea.

Aceasta miscare se generalizeaza inasa direct prin comparatie cu geometria suprafetelor curbe. Principala observatie este cea a principiului echivalentei reformulat de noi sub forma: *miscarea unui corp punctual nu depinde de masa si compozitia sa*. Acest rezultat se obtine *natural* din presupunerea ca traiectoriile corpurilor (ce sunt linii in spatiu-timpul 4-dimensional curb) sunt determinate numai de geometria spatiu-timpului si nu de masa lor.

Cum in spatiul minkovskian (unde nu avem forte gravitationale) miscarea este o linie dreapta intre doua evenimente, si aceasta linie dreapta este un extrem intre toate traiectoriile, presupunerea lui Einstein este ca miscarea in spatiu-timpul lui 4-dimensional curb are loc dupa linia geodezicei ??, pentru ca si ea este un extrem intre celelalte traiectorii:

$$\frac{d^2 x^l}{d\tau^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \quad (4.19)$$

In formularea geometrica ?? foloseam un timp t absolut care "curgea" peste suprafata curba, si cu ajutorul caruia calculam miscarea unei masini cu viteza constanta. Geodezica ?? ne dadea atunci exact traiectoria urmata de masina in asa fel incit distanta parcursa de ea sa fie minima intre punctul de pornire si cel de oprire.

In formularea relativitatii generalizate, relatia 4.19 ne da miscarea unui corp oarecare intr-un *timp propriu* τ al corpului. Astfel, cunoscind pozitia initiala $x(\tau = 0)$ si viteza initiala $\frac{dx}{d\tau}(\tau = 0)$ a corpului, putem calcula cu ajutorul 4.19 pozititiile in spatiu-timp la orice "moment propriu" τ ulterior: $x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau), t(\tau) = x_4(\tau)/c$. Cu alte cuvinte, putem "puncta" precis traiectoria 4-dimensională, stiind si pozititiile spatiale si timpul t cind acestea sunt atinse (in sistemul de coordonate ales, desigur) folosind, daca vrem, o metoda numerica identica cu cea prezentata in sectiunea ??.

Semnificatia timpului propriu τ este simpla: daca corpul nostru este un ceas, τ este chiar timpul indicat pe cadranul ceasului! Astfel, sa dam drumul la ceas la momentul $\tau = 0$. La un moment ulterior, cind ceasul indica un timp oarecare τ , putem afla pozititiile sale spatiale $x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)$ si timpul $t(\tau)$ in sistemul referinta x ales, cu ajutorul 4.19. Frumos, nu?

Mai profund inasa, abordarea de mai sus elimina complet notiunea de forta si cimp gravitacional cu cea de spatiu-timp curb. Formularea corecta, pe care o s-o prezentam de acum incolo, este urmatoarea. Toate fenomenele fizice genereaza, intr-un fel pe care inca trebuie sa-l deducem, metrica $g_{ij}(x)$ originala. Aceasta la rindul lor determina miscarea corpurilor. Cu alte cuvinte, nu fenomenele fizice pun direct in miscare corpurile, prin intermediul unor forte, ci ele numai genereaza metrica $g_{ij}(x)$ originala. In teoria relativitatii generale, miscarea corpurilor este un rezultat numai si numai al metricii. Fortele nu mai

exista, nici macar cele de atractie. Este practic o trecere mai complexa de la formulele 4.10 la forma 4.11.

Pentru a intelege si mai bine ecuatia geodezice 4.19, sa vedem in ce masura ea se reduce la cunoscutele ecuatii de miscare 4.11 ale lui Newton. Pentru aceasta, sa consideram cazul ceasului in miscare, cind forte gravitationale care-l antreneaza sunt suficient de mici pentru a nu-l antrena cu viteze apropiate de viteza luminii, si cind cimpurile gravitationale sunt aproape statice. Viteza ceasului masurata in sistemul de coordonate va fi atunci mult mai mica decit viteza luminii:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \ll c; \quad dx^0 = c \cdot dt \gg dx^i; \quad \left| \frac{dx^0}{ds} \right| \gg \left| \frac{dx^i}{ds} \right| \quad (4.20)$$

In plus, deoarece putem alege orice sistem de referinta, vom alege unul "aproape" clasic (pentru ca conditiile date nu sunt extreme, el exista). In acesta, timpul indicat de ceas τ este aproape identic cu timpul t masurat in sistemul de referinta, iar coordonatele spatiale sunt "aproape" carteziene. Atunci $ds = c d\tau \approx c dt$, si avem, conform relatiei precedente

$$\left| \frac{dx^0}{d\tau} \right| \gg \left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \quad (4.21)$$

In ecuatia de miscare 4.19 a ceasului avem 16 termeni de tip produs care trebuie sumati. Datorita relatiei precedente, unul dintre acestia in domina pe ceilalti, si ca atare, putem rescrie 4.19 simplificat:

$$\frac{d^2 x^l}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^l \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \quad (4.22)$$

Inlocuind $dx^0 = c d\tau$, si $d\tau \approx dt$, si alegind numai cele trei ecuatii spatiale, avem

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i \quad (4.23)$$

Aceasta este practic ecuatia de miscare 4.11 a lui Newton, daca facem identificarea

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{g^i}{c} \quad (4.24)$$

unde g^i este componenta spatiala a cimpului local g . Utilizind potentialul lui Poisson 4.2, putem scrie si

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (4.25)$$

geodezice spatiale, temporale, nule (geodezica luminii).

4.3 Metrica originala

Am vazut in sectiunea precedenta cum spatiu-timpul are o structura geometrica, si cu ajutorul ei putem calcula distante, timpi indicati de ceasuri, sau miscarea unei mase de proba (care nu influenteaza alte corpuri). Pentru a utiliza aceasta structura, avem nevoie de un sistem oarecare de coordonate x , si o metrica "originala" $g_{ij}(x)$ atasata acestuia. Aici ne vom ocupa de determinarea acestei metrici.

Pentru aceasta, sa ne imaginam ca inlocuim unul din corpurile masive din preajma corpului de proba. Daca inainte corpul de proba avea o traiectorie, acum el sigur va avea alta traiectorie. Cum insa traiectoria e data de 4.19 (si deci de

metrica g_{ij} a spatiu-timpului), nu ne ramine dedit de presupus ca, inlocuind un corp masiv, am modificat metrica g_{ij} a spatiu-timpului in care se misca corpul de proba. Generalizarea este imediata: *corpurile inconjuratoare genereaza metrica g_{ij} a spatiu-timpului!*

Consecinta supozitiei de mai sus creeaza o noua abordare a miscarii corpurilor. Astfel, inainte eram obisnuiti sa gindim in timp, intelegind prin aceasta ca corpurile se atrageau, apoi miscau, apoi atrageau din nou, apoi din nou miscau, s.a.m.d. Acum insa acest lucru nu mai e posibil, pentru ca timpul este o coordonata a lui x aleasa la bunavointa noastra, si pe deasupra nu are semnificatie absoluta, cum am vazut in teoria relativitatii restrinse.

Mai degraba, trebuie sa privim toata miscarea tuturor corpurilor ca un tot. Metrica spatiu-timpului g_{ij} si pozitia corpurilor in coordonatele x exista astfel incit:

1. *Ansamblul corpurilor in toate momentele de timp genereaza metrica g_{ij} a spatiu-timpului*
2. *Metrica g_{ij} a spatiu-timpului este in asa fel incit miscarea corpurilor poate fi descrisa utilizind ecuatii de miscare 4.19*

Prin "utilizarea" ecuatiiilor de miscare intelegem desigur o aplicare corecta a relatiilor 4.19, care tine cont de volumul corpului. Daca corpul este punctual, atunci ecuatiiile 4.19 pot fi aplicate direct, daca este voluminos, atunci ele trebuie aplicate pentru fiecare parte infinitezimala a lui. Astfel rezolvarea unui sistem de corpuri devine o situatie complexa, in care *doua* sisteme de ecuatii trebuie satisfacuate in toate evenimentele x ale spatiu-timpului.

4.3.1 Ecuatia lui Einstein

Modul in care materia inconjuratoare genereaza metrica g_{ij} a spatiu-timpului a fost o problema ca l-a preocupat pe Einstein citiva ani pina cind in gasit solutia corecta, in 1915. Sub o prima prima impresie s-ar parea ca a utiliza masele corpurilor pentru generarea metricii este suficient. In fond masele lor determina forte de atractie, si deci miscarea corpului de proba, si deci si metrica.

Cu toate acestea, Einstein a fost pe deplin constient de echivalenta intre masa si energie, pe care am discutat-o si noi in cadrul relativitatii restrinse. Daca ele sunt echivalente, atunci am putea folosi la fel de bine energia pentru a determina tensorul g_{ij} . Generalizarea nu este triviala. Sa ne gindim la cimpul electromagnetic. Cum am vazut in capitolul 2, el poate avea energie stocata in tot spatiul, acolo unde poate nici un corp nu exista. In plus, el nu este descris *complet* de energia stocata in punctele sale, precum un corp newtonian este descris complet de masele diverselor sale parti.

Caci, si-a zis Einstein, *miscarea corpurilor este un atribut exclusiv numai al metricii g_{ij}* . Ca atare, metrica g_{ij} trebuie sa fie determinata de *toate* caracteristicile cimpului electromagnetic, caci toate acestea (nu numai densitatea de energie) determina miscarea (si in acelasi fel pentru toate celelalte cimpuri).

Sunt practic doua functii des utilizate care determina *complet* un cimp fizic: tensorul energie-impuls si densitatea de lagrangean. Ele se pot deduce una din alta, cu mentiunea ca exista anumite grade de libertate in alegerea lor. Ecuatia corespunzatoare tensorului energie-impuls a fost gasita de Einstein, iar cea corespunzatoare lagrangeanului de densitate a fost desoperita de Hilbert cu citeva zile inainte ca Einstein sa si-o prezinte pe a lui! Noi o vom prezenta pe cea din urma in sectiunea urmatoare.

Odata decis sa construiasca o ecuatie a metricii in jurul tensorului energie-impuls, Einstein s-a gindit ce poate sa puna in partea stinga a ecuatiei:

$$G_{ij}(x_1, \dots, x_4) = T_{ij}(x_1, \dots, x_4) \quad (4.26)$$

Partea din stinga, si-a zis Einstein, trebuie sa contina *numai* elemente de metrica, adica functii de g_{ij} . Relatiile pe care termenul G_{ij} trebuie sa le indeplineasca, au fost deduse de Einstein ca fiind:

1. nu trebuie sa contina derivate ale lui g_{ij} de un ordin mai mare decit 2, si sa fie liniara in ele.
2. divergenta lui trebuie sa fie nula
3. sa fie un *tensor*.

Conditia 1 sunt presupuneri ale lui Einstein, deduse pe baza aproximatiilor ecuatiei lui Poisson 4.5. Astfel, din relatiile 4.25 si ?? vedem ca metrica g_{ij} are acelasi ordin ca si potentialul lui Poisson ϕ . Din relatia 4.5, unde acesta din urma apare de doua ori derivata pentru a obtine densitatea de masa (componenta temporală a tensorului de energie impuls), rezulta ca si componenta differentială de ordin doi a metricii trebuie folosita pentru a obtine tensorul energie-impuls.

Conditia 2 ne spune ca divergenta partii din stinga ecuatiei 4.30 trebuie sa fie nula, pentru ca stim (??) ca divergenta tensorului energie-impuls este nula. Desigur ca aceasta divergenta trebuie exprimata in coordonatele curbe ale sistemului, dar vom discuta acest lucru mai tirziu.

Desi conditia 3 nu pare evidenta, ea se refera la *covarianta generala* a legilor fizicii. Este un aspect foarte important in viziunea lui Einstein, care ne spune ca *legile fizicii sunt aceleasi, indiferent de ce sistem arbitrar de coordonate alegem*. Cu alte cuvinte, nu numai sisteme de referinta intertiale, ca in teoria relativitatii restrinse, ci orice sistem de referinta! De aceea si noua teorie se numeste teoria relativitatii *generalizate*.

Penbtru a vedea cum o ecuatie tensoriala (in care toti termenii sunt tensori) ne asigura covarianta generala, sa ne reamintim ecuatiile de transformare a tensorilor ???. Astfel, sa presupunem ca un observator utilizeaza un sistem de coordonate x si foloseste o ecuatie tensoriala de tipul 4.30. Intr-un alt sistem de coordonate x' un alt observator incearca sa faca acelasi lucru. Privind insa relatiile de transformare ??, vedem ca putem inmultii termenii relatiilor 4.30, si-i aduna, in asa fel incit sa obtinem:

$$\sum_{k,s} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} G_{ij} = \sum_{k,s} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s} T_{ij} \quad (4.27)$$

Avem atunci conform 4.17

$$G'_{ij}(x_1, \dots, x_4) = T'_{ij}(x_1, \dots, x_4) \quad (4.28)$$

care este un fel matematic de a spune ca, analitic, si cel deal doilea observator va scrie acelasi timp de formula pentru descrierea miscarii. (aici explica mai bine ce vrei sa spui.)

In final, dupa citiva ani de cautari asidue, Einstein a gasit tensorul care indeplineste toate relatiile de mai sus, si care este dat de tensorul lui Ricci ??:

$$G_{ij}(x_1, \dots, x_4) = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (4.29)$$

Se poate arata matematic (??) ca de fapt G_{ij} este singurul tensor (simetric?) care indeplineste conditiile de mai sus. Ca atare, vom scrie din nou ecuatiea lui Einstein ca

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = T_{ij} \quad (4.30)$$

In sectiunea urmatoare vom discuta semnificatia mai precisa a tensorului energie-impuls pentru un cimp. Cu toate acestea, lectura urmatoarelor doua sectiuni nu este obligatorie pentru intelegerea aplicatiilor teoriei relativitatii generalizate. Motivul este ca efectele cimpurilor fizice (electromagnetic, electrolab, etc.) asupra curburii spatiu-timpului sunt foarte mici, si ele nu au fost detectate experimental pina in prezent. Ca atare, intr-o sectiune ulterioara ne vom limita la o aproximatie foarte simpla a materiei (numita "praf stelar"), pentru care citeva rezultate experimentale au putut fi verificate.

4.3.2 Tensorul energie impuls al unui cimp oarecare

Am vazut in sectiunea precedenta cum tensorul energie-impuls a fost introdus in ecuatiea lui Einstein. Acest tensor trebuie determinat in parte pentru fiecare tip de materie sau energie care poate fi prezenta in spatiu: cimpuri de mase, cimpuri electromagnetice, cimpuri nucleare, etc, toate considerate insa in aproximatia clasica (fara mecanica cuantica). Pentru simplitate, vom deduce in aceasta sectiunea forma tensorului energie-impuls in spatiu-timpul minkovskian (revenind deci la coordonatele $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$), urmind sa-l generalizam direct pentru un spatiu-timp curb.

Pentru toate cimpurile, tensorul energie-impuls se poate calcula pornind de la ecuatiile fiecarui cimp. Astfel, putem calcula densitatea de energie, densitatile de impuls, sau transferul acestora. O astfel de abordare poate fi lunga si greoaie. Exista insa si o alta abordare de calcul a acestui tensor (si nu numai), bazata pe formalismul lui Lagrange. Ea are avantajul ca este universală, si poate fi folosita ca un fel de "reteta" pentru orice cimp clasic. O vom prezenta in sectiunea care urmeaza.

Conform abordarii formalismului Lagrangean, pentru a cunoaste complet comportarea unui cimp anume, nu este nevoie sa ni se dea un set mare de ecuatii, numite ecuatiile cimpului, ci numai o singura functie

$$\Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}) \quad (4.31)$$

Aici $\phi_i = \phi_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$, cu $(i = \overline{1, m})$, sunt m functii in tot spatiu-timpul $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$, care definesc cimpul. Cu alte cuvinte, daca cunoastem in fiecare punct al spatiu-timpului toate cele m valori $\phi_i = \phi_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$, atunci spunem ca cunoastem complet cimpul.

De exemplu, cimpul electromagnetic in vid este presupus cunoscut cind cunoastem cimpul vectorial $(A_x, A_y, A_z, ic\phi)$ in fiecare punct al spatiului. In acest caz putem identifica $\phi_1 = A_x$, $\phi_2 = A_y$, $\phi_3 = A_z$, $\phi_4 = ic\phi$. Functia Λ pentru cimpul electromagnetic ar putea fi scrisa ca:

$$\Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}) = -\frac{F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu}}{4\mu_0 c} = \frac{-1}{4\mu_0 c} \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \right)^2 \quad (4.32)$$

Frumusetea acestei abordari este ca pornind numai de la o singura functie $\Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k})$, putem afla si ecuatiile cimpului, si tensorul energie-impuls. Astfel, pentru cimpurile cunoscute (ca electromagnetismul) nu trebuie decit sa reconstruim $\Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k})$.

In plus, alegind ce functii $\Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k})$ vrem noi (in limitele numai a unor restrictii de simetrie), putem construi cimpuri fictive, sau combina tipuri diferite de cimpuri, carora sa le calculam ecuatiile cimpului si tensorul energie-impuls. O adevarata mina de aur pentru cei cu prea multa imaginatie!

"Reteta" dupa care ecuatiile cimpului si tensorul impuls-energie trebuie calculate este urmatoarea. Sa consideram un spatiu-timp de volum Ω inchis, ca in Gif???. Pe *marginea* acestui "volum" Ω alegem niste valori fixe ale functiilor *fixe* $\phi_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ si ale derivatelor lor $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$. Atunci cimpul studiat se va "aseza" automat in interiorul "volumului" Ω in asa fel incit sa minimizeze sau maximizeze integrala:

$$S = \int_{\Omega} \Lambda(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}) d\Omega \quad \delta S = 0 \quad (4.34)$$

Cu alte cuvinte pastrand aceleasi valori $\phi_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ si $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$ pe marginea "volumului" 4-dimensional Ω , dar alegind ce valori vrem noi in interiorul volumului (pastrand insa conditiile de continuitate), cimpul "real" va fi acela care are fie cea mai mica integrala S 4.33, fie cea mai mare!

Sa vedem cum putem afla acum ecuatiile unui cimp si tensorul energie-impuls daca ni se da functia Λ notata in 4.36. Pentru aceasta, consideram o abordare asemanatoare ecuatiilor lui Langrange ???. Alegem *doua* configuratii apropiate in care "umplem" volumul Ω , pastrand aceleasi valori $\phi_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ si $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$ pe marginea lui. Diferenta δS a integralei S intre cele doua configuratii este data de:

$$\delta S = \int_{\Omega} \delta \Lambda d\Omega \quad (4.35)$$

Valoarea lui Λ intr-un singur punct al spatiu-timpului se calculeaza prin intermediul coordonatelor generalizate ale cimpului ϕ_i .

$$\Lambda(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Lambda(\phi_i, \phi_{,i}) \quad (4.36)$$

unde am notat $\phi_{,i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$ pentru simflicare. Diferenta $\delta \Lambda$ de valoare a functiei Λ intre cele doua configuratii trebuie calculata *in acelasi punct* (x^1, x^2, x^3, x^4) . Folosind formulele diferentiale, ea poate fi exprimata ca:

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi_{,i} \quad (4.37)$$

Aici $\delta \phi(x)$ si $\delta \phi_{,i}(x)$ reprezinta diferenta intre cele doua configuratii calculata in acelasi punct x . Pneru cel de-al doilea termen din relatia de mai sus putem scrie:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi_{,i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi \right) - \delta \phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \right) \quad (4.38)$$

Relatia de mai sus, chiar daca pare directa, trebuie "citita" cu atentie. Astfel, am facut o distinctie clara intre δ , ce reprezinta variatia de la o configuratie la alta, si ∂x_i , ori $_{,i}$ care reprezinta variatia de la eveniment x la altul. De aceea am putut schimba derivatele intre ele mai sus, si scrie $\delta \phi_{,i} = \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_i}$. Desigur ca aceste "artificii" ar deveni foarte calde daca am explicita relatiile de mai sus intr-o forma numerica, si in felul acesta "vedea" ce vrem sa spunem cu fiecare termen al ecuatiei de mai sus. Inlocuind in 4.35, avem:

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi \right) - \delta \phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \right) \right] d\Omega \quad (4.39)$$

Parte de mijloc a integralei se recrie cu ajutorul teoremei lui Gauss ?? astfel:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi \right) \right] d\Omega = \int_{S\Omega} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \delta \phi \right) dS \quad (4.40)$$

unde dS este elementul de pe frontiera $S\Omega$ a volumului Ω . Integrala de mai sus trebuie efectuata insa numai pe marginea formtierrei $S\Omega$. Acolo insa, cele doua configuratii ale cimpului ϕ_i au fost alese astfel incit sa aiba *aceleasi valori*, ceea ce inseamna ca $\delta \phi = 0$ in integrala de mai sus, si deci toata integrala se anuleaza! In consecinta 4.39 devine

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \right) \right] \delta \phi d\Omega \quad (4.41)$$

Asa cum ne reamintim, pe noi insa ne intrereaseaza sa gasim acea configuratie $\phi(x)$ "reala" a cimpului, care are proprietatea ca integrala S este fie minima fie maxima dintre toate cite pot fi imaginate cu aceleasi conditii de frontiera. Matematic, acest lucru se poate reformula in modul urmator: daca am gasit acea configuratie reala, si consideram orice alta configuratie putin diferita, atunci diferenta δS a integralelor celor doua configuratii trebuie sa fie zero. Este desigur o proprietate a derivatei. Atunci cind o functie este fie minima fie maxima (deci un extrem), atunci valoarea acelei functii in doua puncte apropiate este aproape aceeasi, adica $\delta f = 0$. Tot astfel, in exemplul nostru, daca alegem o configuratie reala a cimpului (care da un extrem al integralei S) si *oricare*alta configuratie foarte apropiata, atunci cele doua valori S vor fi aproape identice, si deci:

$$\delta S = 0 \quad (4.42)$$

Cum acest lucru trebuie sa se intimple pentru orice $\delta \phi$ vedem din relatia 4.41 ca nu este posibil decit daca

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{,i}} \right) = 0 \quad (4.44)$$

in orice eveniment al spatiu-timpului. Ecuatiile de mai sus sunt denumite *ecuatiile cimpului*, pentru ca ele trebuie indeplinite de cimpul real in orice eveniment. Pentru exemplul cimpului electromagnetic discutat mai sus, ele devin:

Din ecuatiile cimpului, tensorul energie-impuls se deduce

4.3.3 Formularea lui Hilbert

Hilbert a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai ultimelor doua secole, cu contributii importante nu numai in matematica, dar si in fizica. A trait in aceeaasi epoca cu Einstein, pe cind acesta din urma inca cauta ecuatiile de generare a metricii spatiu-timpului. Atras de problema, invitindu-l chiar pe Einstein la Gottingen sa conferenteze citeva seminarii pe marginea problemei, Hilbert a ales o alta abordare a acesteia.

In viziunea lui Hilbert, un matematician, solutia trebuia sa fie una geoemtrica, axiomatica si generala. Desi el a prezentat aceasta solutie cu citeva zile inainte ca Einstein sa si-o prezinte pe a sa, Hilbert n-a pretins niciodata vreo prioritate, pentru ca, dupa cum el insusi a recunoscut [?], el si-a construit solutia pe fundamentele deja formulate de Einstein. Cu toate acestea, o anumita competitie a existat, amintind aici celebra afirmatie a matematicianului Hilbert ([?], verifica): "Fizica este prea grea pentru a fi lasata pe mina fizicienilor".

In esenta, solutia lui Hilbert se bazeaza pe principiul variational discutat in sectiunea precedenta. Acesta este generalizat sub forma: *si cimpul si metrica spatiului* au o asemenea forma incit sa minimizeze integrala S . Cu alte cuvinte, vom construi un lagrangean in spatiu-timpul curb, in care vom lasa nu numai cimpul sa fi ales, dar si metrica. Cind variatia integralei S este

zero, atunci metrica si cimpul gasit reprezinta solutiile reale. Pentru a fi mai expliciti, sa scriem acest lagrangien:

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x [\Lambda_{grav} + \Lambda_{cimp}] \quad (4.45)$$

Factorul $\sqrt{|g|}$ a fot introdus pentru a pastra elementul de integrare invariant la o alta alegere a coordonatelor: $\sqrt{|g|} d^4x = \sqrt{|g'|} d^4x'$. Hilbert a ales densitatea de lagrangien ca fiind tensorul lui Ricci R_{ij} contractet (?):

$$\Lambda_{grav} = \frac{1}{8\pi G} R \quad (4.46)$$

Impunind conditia variationala $\delta S = 0$, vom obtine ([?]] ecuatiile cimpului date de:

$$\frac{1}{8\pi G} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) = \frac{\delta \Lambda_{cimp}}{\delta g^{ij}} - \frac{1}{2} g_{ij} \Lambda_{cimp} \quad (4.47)$$

Tensorul energie-impuls al cimpului trebuie indentificat atunci cu

$$T^{ij} = \frac{\delta \Lambda_{cimp}}{\delta g_{ij}} - \frac{1}{2} g^{ij} \Lambda_{cimp} \quad (4.48)$$

Aceasta formulare are avantajul ca, spre deosebire de spatiu-timpul Minkovski, *tensorul obtinut este automat simetric*. Desigur insa ca relatia de mai sus este folosita invers, pentru a recunoaste functia Λ_{cimp} . Astfel, in cazul cimpului electromagnetic ea este data de:

Se poate verifica direct ca forma de mai sus conduce la forma generala ?? a tensorului energie-impuls pentru cimpul electromagnetic.

Formulara lui Hilbert are si avantajul ca deduce practic toate ecuatiile de miscare in spatiu-timpul curb pornind de la o singura formula analitica a cimpului Λ , care practic identifica cimpul. In acest fel, o unificare a tuturor cimpurilor ar fi posibila, daca toate acestea la un loc ar fi determinate de un singur Λ . Acest vis, construit la inceput de Hilbert (vezi [?]), a fost continuat apoi de Einstein. Acesta insa, desi si-a petrecut restul carierei stiintifice in cautarea marii teorii unificatoare a tuturor cimpurilor, nu a gasit-o.

O parte din acest esec se datoreaza imposibilitatii lui Einstein de a incorpora mecanica, alta datorita faptului ca noi cimpuri au fost descoperite intre timp (cimpul electrolab, nuclear, etc.), toate insa fiind la baza cimpuri cuantice. Nu este insa mai putin adevarat ca formularea variationala astfel prezentata a cimpurilor, se va dovedi extrem de folosita si utila in cimpurile cuantice.

Pot intra aici si cele 5 dimensiuni Kalutza-Klein? Unificare cimp elth + gravitational. Introducere in [?]].

4.3.4 Tensorul energie-impuls al prafului stelar

Sa consideram aici cea mai simpla forma a materiei, si anume materia incoerenta care nu interactioneaza, numita si *praf stelar*. Am vazut in ?? cum T_{xy} poate fi interpretat ca rata de transfer a impulsului P_x in directia y , pe unitatea de suprafata si timp.

Din Fig.4.3 putem vedea ca impulsul total in directia x se scrie ca $dP_x = dV \cdot p_x = dV \cdot \rho v_x$, unde dV este volumul de materie care tranverseaza suprafata A in unitatea de timp:

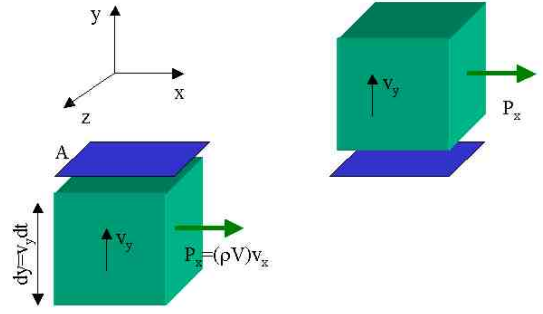


Figure 4.3: Transferul de impuls

$dV = dA \cdot dy = dA \cdot v_y dt$. Putem incerca sa scriem atunci forma tensorului energie impuls al prafului stelar ca (vezi Fig.):

$$T_{xy} = \frac{dP_x}{dA dt} = \frac{dA \cdot v_y dt \cdot \rho v_x}{dA dt} = \rho v_x v_y \quad (4.49)$$

Putem acum incerca sa scriem relatia de mai sus sub forma relativista. Tensorul cel mai natural care poate fi format ca in relatia de mai sus este atunci:

$$T^{ij} = \rho_0 u_i u_j \quad (4.50)$$

Aici ρ_0 este densitatea de masa in repaus, iar vectorul 4-dimensional al vitezei in spatiul Minkovskian este:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{\gamma^{-1} dt} = \gamma \frac{dx^i}{dt} \quad (4.51)$$

Utilizind forma de mai sus, putem scrie explicit componentele temporale si spatiale ale tensorului ca

$$T^{ij} = \rho \begin{vmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z & v_x c \\ v_x v_y & v_y^2 & v_y v_z & v_y c \\ v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 & v_z c \\ v_x c & v_y c & v_z c & c^2 \end{vmatrix}$$

Aici am utilizat $\rho c^2 = \gamma^2 \rho_0 c^2$ ca fiind densitatea relativistica de energie $T^{44} = \rho c^2$.

Cum era de asteptat, divergenta tensorului impuls-energie este nula. Componenta temporală a divergentei se scrie:

$$\partial_j T^{4j} = 0; \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.52)$$

si inseamna de fapt ecuatia de conservare a masei:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.53)$$

Se poate arata ca celelalte trei ecuatii relatiei ?? se reduc la:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = 0 \quad (4.54)$$

si reprezinta de fapt ecuatiile Navier-Stokes de miscare a unui fluid fara presiune si forte externe.

4.4 Aproximarea ecuatiei lui Einstein

Sa ne reamintim principalele 3 legi discutate in sectiunile precedente, care guverneaza relativitatea generala. Astfel, materia care exista in spatiu-timp determina (prin tensorul sau T_{ij}) o curbura a spatiului-timpului data de:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -kT_{ij} \quad (4.55)$$

La rindul sau, curbura spatiului determina miscarea corpurilor punctuale ca

$$\frac{d^2x^l}{d\tau^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \quad (4.56)$$

In plus, comportarile ceasurilor si ale riglelor intre doua evenimente pot fi obtinute cu ajutorul metricii:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \quad (4.57)$$

In principiu, primele doua ecuatii de mai sus trebuie satisfacute *simultan* de catre materia prezenta. Materia genereaza o metrica spatio-temporala conform 4.55, dar se misca in acea metrica conform 4.57. Daca vrem, putem privi si relatiile de mai sus *temporal*, in asensul ca la un moment se genereaza metrica, in urmatorul corpurile se misca, apoi se genereaza o noua metrica, etc. (NU SUNT SIGUR. AM SENZATIA CA IMI FUGE PAMINTUL DE SUB PICIOARE, SI CA NU E TOTUSI CORECT. VERIFICA!).

In aceasta sectiune ne vom ocupa cu rezolvarea aproximativa a ecuatiilor de mai sus. Astfel ne propunem ca, stiind comportarea aproximativa a materiei de densitate $\rho(x, t)$ (data de tensorul T_{ij}), sa calculam metrica "originala" g_{ij} pentru un sistem anume de coordonate generata de materie. Materia o vom considera clasica, chiar statica la un moment dat. Cu ajutorul relatiilor de transformare 4.27 putem apoi calcula metrica in orice sistem de coordonate, obtinind deci automat comportarea riglelor, ceasurilor, si a corpurilor de proba in spatiu-timpul cu metrica generata de materia $\rho(x, t)$.

De aceea, in ecuatiea 4.55 se va presupune cunoscuta forma aproximativa a T_{ij} din care se va calcula metrica g_{ij} pentru un sistem de coordonate. Apoi se va utiliza 4.57 pentru a se calcula comportarea ceasurilor si riglelor in spatiul dat de metrica calculata, si relatia 4.56 pentru comportarea corpurilor de proba si a luminii.

Deoarece vom considera perturbatii mici de la metrica $\mu_{\mu\nu}$ minkovskiana a teoriei relativitatii restrinse, vom scrie:

$$g_{\mu\nu} = \mu_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (4.58)$$

In relatia de mai sus, valorile γ sunt mici, asa ca putem aproxima $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$.

4.4.1 Potentialele gravitationale retardate

Sa incercam sa rescriem ecuatiea 4.55 inmultind-o cu tensorul contravariant g^{ij} si insumind dupa indicii care apar de doua ori (conventia lui Einstein):

$$g^{ij}R_{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ij}R = g^{ij}T_{ij} \quad (4.59)$$

Deoarece am vazut ca tensorii covarianti g^{ij} si contravarianti g_{ij} sunt elementele unor matrici inverse G si G^{-1} , putem scrie:

$$g^{ij}g_{ij} = (G^{-1}G)_{ii} = (I)_{ii} = 4 \quad (4.60)$$

Inlocuind in relatia precedenta, avem:

$$R - 2R = -kg^{ij}T_{ij} \quad (4.61)$$

sau

$$R = kT \quad \text{unde} \quad T = g^{ij}T_{ij} \quad (4.62)$$

Inlocuind expresia de mai sus in 4.55, obtinem o forma echivalenta a ecuatiei lui Einstein data de:

$$R_{ij} = -kT_{ij}^* \quad (4.63)$$

unde

$$T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T \quad (4.64)$$

Vom aproxima acum pe rind cele doua parti ale acuatiei 4.63. Incepem cu tensorul energie impuls pentru praful stelar, care se scrie conform 4. Vom considera insa viteze ale materiei mult mai mici ca viteza luminii, $v \ll c$. Ca atare, vom aproxima 4, renuntind la termenii patratici in viteza:

$$T^{ij} = \rho \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & v_x c \\ 0 & 0 & 0 & v_y c \\ 0 & 0 & 0 & v_z c \\ v_x c & v_y c & v_z c & c^2 \end{vmatrix}$$

Invariantul T se poate aproxima conform 4.62 atunci ca:

$$T = g^{ij}T_{ij} \simeq \mu^{ij}T_{ij} = \rho c^2 \quad (4.65)$$

conducind conform 4.64 la

$$T_{ij}^* \simeq T_{ij} + \frac{1}{2}\mu_{ij}\rho c^2 \quad (4.66)$$

Folosind in relatia de mai sus si aproximatia

$$T_{ij} = g_{i\mu}g_{j\nu}T^{\mu\nu} \simeq \mu_{i\mu}\mu_{j\nu}T^{\mu\nu} \simeq T^{ij} \quad (4.67)$$

si inlocuind si tensorul 4, obtinem in final forma aproximativa:

$$T_{ij}^* = \rho \begin{vmatrix} c^2/2 & 0 & 0 & v_x c \\ 0 & c^2/2 & 0 & v_y c \\ 0 & 0 & c^2/2 & v_z c \\ v_x c & v_y c & v_z c & -c^2 \end{vmatrix}$$

Forma aproximativa a partii din stinga relatiei 4.63 se poate obtine pornind de la definitia ?? Γ_{ij}^k , in care inlocuim 4.58 si pastram numai termenii de ordin 1 in functiile γ_{ij} :

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{\mu^{ml}}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (4.68)$$

Asa cum era de asteptat, pentru ca γ_{ij} este mic, Γ_{ij}^k este de asemenea mic (la limita, in spatiul Minkovski, el va fi nul). Ca

atare, in relatia de definitia ?? a tensorului de curbura, putem deasemena renunta la termenii patratici in Γ , obtinind:

$$R_{ij} \simeq -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\mu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Gamma_{i\mu}^\mu}{\partial x_j} \quad (4.69)$$

Inlocuim acum 4.68 in relatia de mai sus, obtinind:
Folosind notatia

$$\xi_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{\nu\nu} \mu_{ij} \quad (4.70)$$

relatia precedenta se rescrie ca:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \xi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi_{j\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) \quad (4.71)$$

Pina acum am ales un sistem aleator de coordonate x , numai cu conditia 4.58 ca metrica g_{ij} atasata lui sa nu difere prea mult de metrica minkovskiana μ_{ij} (caci sa nu uitam, fiecarui sistem de coordonate ales ii trebuie atasata o metrica care se calculeaza in principiu dintr-una originala). Din multitudinea de alegeri a sistemelor de coordonate ramase, vom alege numei un set particular, si anume cele ale caror metrica $g_{ij} = \mu_{ij} + \gamma_{ij}$ satisface in orice punct al metricii:

$$\frac{\partial \xi_{j\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (4.72)$$

Relatia de mai sus ridica desigur intrebarea: oare este posibil sa gasim intr-adevar sisteme de coordonate in care relatia de mai sus sa fie satisfacuta? Raspunsul este afirmativ. In referinta [?] o discutie mai detaliata si o dovada este prezentata. Aici insa vom mentiona numai ca, in termeni tehnici, de cite ori facem o schimbare de coordonate in asa fel incit sa alegem o alta metrica se numeste ca facem o "gauge transformation". Alegerea metrici particulare de mai sus (si deci a noului sistem de coordonate x' in care ea ia forma dorita) se numeste Einstein, de Donder, Hilbert, sau Fock "gauge" (chiar toate numele?). In [?] se poate arata ca ea se gaseste daca noile coordonate x' se calculeaza din cele vechi cu: AICI MAI BINE RECALCULEZ EU PE INVERS. SUNT DOAR 3-4 FORMULE.

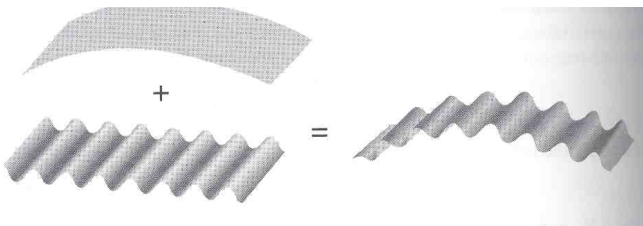


Fig. 8.5. A gravitational wave can be regarded as a small perturbation propagating on

Figure 4.4: Unde gravitationale intr-o aproximatie mica

$$\square(x'_a(x)) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{\nu\nu} \mu_{ij} \right) \quad (4.73)$$

In sistemul de coordonate particular in care relatia 4.72 este satisfacuta, putem deci scrie 4.71 sub forma:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \quad (4.74)$$

Combinand acum relatia precedenta cu 4.63, si explicitind termenii derivatelor in coordonate $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ct)$,

vedem ca am aflat in sfirsit metrica generata de materia de densitate $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial t^2} = 2k T_{ij}^* \quad (4.75)$$

unde tensorul T_{ij}^* este dat de 4. Ecuatia de mai sus este inasa exact ecuatia potentialelor retardate ???. Prin analogie cu potentialele retardate discutate in electromagnetism, sa ne spuna ca intr-un punct al spatiului (x, y, z) informatia γ_{ij} este generata de T_{ij} si apoi "emisa" in spatiu sub forma de unde cu viteza luminii c . Putem scria atunci conform ?? solutia ca fiind:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, t) = -\frac{k}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{T_{ij}^*(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' \quad (4.76)$$

unde am notat $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Sa discutam relatia de mai sus.

In primul rind, vedem ca in absenta materiei ($\rho = 0$), conform 4, $T_{ij}^* = 0$, si deci din relatia de mai sus $\gamma_{ij} = 0$. Metrica obtinuta este atunci pur minkovskiana $g_{ij} = \mu_{ij}$, si ca atare ne aflam in acest caz *deja* intr-un sistem de referinta inertial. Cu alte cuvinte, faptul ca am ales un anume set de sisteme de referinta, si anume cele care indeplinesc 4.72, se dovedeste mai mult decit norocos. Aceste sisteme de referinta, in absenta materiei, sunt cele inertiiale pentru care metrica atasata este chiar metrica Minkovski. Este important acest lucru caci, desi spatiul in care nu exista materie este de asteptat sa verifice teoria relativitatii restrinse, daca sistemul nostru de referinta ar fi fost unul ciudat, desigur ca si metrica atasata lui nu ar fi avut o forma asa simpla ca $g_{ij} = \mu_{ij}$.

Discutia de mai sus ne ajuta atunci sa intelegem mai bine ce se intimpla atunci cind materia de densitate $\rho(x, t)$ este prezenta. In acest caz, *sistemul de coordonate ales va fi aproximativ cel pe care-l creдем noi minkovskian*. Intr-o foarte buna aproximatie, ne putem imagina ca suntem in sistemul solar si spune unui prieten: "Ia masoara ma, coordonatele si timpii evenimentelor intr-un sistem de referinta in repaus fata de Soare". Asta vine inapoi si spune: "Le-am masurat, si in erorile mele experimentale, spatiul e euclidian, verifica teorema lui Pitagora, si spatiul curge uniform, ca la Newton". "No, bine, zicem noi, da-mi valorile de pozitie si timp al fiecarui eveniment, si eu o sa acord fiecarui eveniment un set de numere γ_{ij} ". Noi luam setul de coordonate pe care ni-l da (asa "amarit" cum e), si calculam in fiecare eveniment din spatiu si timp functiile γ_{ij} cu ajutorul relatiei 4.76. Cind i le dam inapoi ii spunem: "Ai grija de ele, ca cu ajutorul lor o sa vezi ca anumite lucruri nu sunt exact cum te astepti tu. Daca iti mai cureti putin rigla aia de rugina, mai pui niste ulei la ceasul ala de la bunicatu, si masori un pic mai bine, o sa vezi ca obtii in evenimentele alea desemnate prin coordonatele vechi, niste valori ale timpilor si spatiului exact prezise de mine".

Important in discutia de mai sus este ca noi folosim un sistem de coordonate "vechi", pe care l-am presupus minkovskian intr-o prima aproximatie. In acest sistem facem corectiile. Vedem atunci ca o anumita parte a relatiei 4.76 se reduce la ecuatia 4.8 presupuna in introducere pentru potentialele Poisson retardate. Astfel, utilizind aproximatia 4.68, avem

$$\Gamma_{00}^i = \frac{\mu^{mi}}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{0m}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_{m0}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (4.77)$$

Prin comparatie directa cu 4.25 avem REFA CALCULUL, NU SE POTRIVESTE.

$$\gamma_{00} = \phi \quad (4.78)$$

si ecuatia 4.75 devine pentru componenta γ_{00} :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 2k\rho c^2 \quad (4.79)$$

adica exact ecuatia 4.8 presupusa pentru potentialul Poisson retardat. Desigur insa ca luind in calcul si celelalte componente ale metricii γ_{ij} , ca si structura spatiu-timpului, mai mult poate fi spus.

4.4.2 Ecuatia aproximativa de miscare a unui corp de proba

Privind ecuatia potentialelor gravitationale retardate 4.76 si tensorul energie-impuls 4 care o generezeaza, putem vedea ca toate componentele tensorului se "transmit" cu viteza luminii. Acestea la rindul lor modifica metrica locala γ_{ij} si deci miscarea unui corp de proba. De aceea este de asteptat ca nu numai densitatea de masa T_{00}/c^2 , dar si impulsurile prafului stelar (adica componentele T_{i0}) sa determine miscarea corpului de proba. Sa vedem in ce maniera.

Pentru aceasta observam ca numai componentele diferite de zero ale tensorului 4 influenteaza componentele respective γ_{ij} ale metricii. Restul de componente γ_{ij} sunt nule. Mai specific, vom nota aceste "influyente" intr-un eveniment oarecare al spatiu timpului in care se poate afla corpul de proba cu PIERDUT FACTOR 2:

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{k}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' = \frac{\gamma_{44}}{2} \quad (4.80)$$

$$p_m^i(\mathbf{r}, t) = -\frac{k}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\rho v_i(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' = \gamma_{4i} \quad (4.81)$$

unde am notat din nou $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Atunci $\rho_m(\mathbf{r}, t)$ poate fi interpretat ca influenta datorata densitatilor de masa, si el conduce la potentialul Poisson retardat 4.8, iar $p_m^i(\mathbf{r}, t)$ ca influenta *miscarii* densitatilor de masa, si el nu are echivalent clasic. Celelalte componente ale metricii sunt, conform 4 si 4.76, relatiiile $\gamma_{ii} = -\gamma_{44}$, $i = \overline{1, 3}$ si $\gamma_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, $i, j = \overline{1, 3}$. Metrica spatiu timpului devine atunci (vezi cu facoturl de 2):

$$ds^2 = (1 - \gamma_{44})(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \quad (4.82)$$

$$+ (1 + \gamma_{4i})(dx + dy + dz)dt + (1 + \gamma_{44})dt^2 \quad (4.83)$$

Ecuatia aproximativa de miscare a unui corp de proba se poate scrie pornind de la 4.56. Aici insa vrem sa exprimam ecuatia de miscare in sistemul de referinta "aproape" minkovskian (x) care are coordonata temporala t . Bazindu-ne pe invarianta intervalului ds , care este acelasi in sistemul de referinta al corpului (unde $ds = cd\tau$), si in cel "aproape" minkovskian, putem calcula relatia aproximativa

$$\frac{1}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}} \simeq \frac{c}{\sqrt{(1 + \gamma_{44})dx^4 dx^4}} \simeq (1 - \frac{\gamma_{44}}{2})dt \quad (4.84)$$

Inlocuind in 4.56 vom avea:

$$(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}) \frac{d}{dt} \left[(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}) \frac{dx^i}{dt} \right] = -\Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} (1 - \frac{\gamma_{44}}{2})^2 \quad (4.85)$$

Observam ca o paranteza se simplifica. In relatia ramasa, sa incercam sa simplificam termenii $\Gamma_{\mu\nu}^i$, unde nu ne intereseaza decit valorile pentru care i este spatial $i = \overline{1, 3}$. SCHIMBA NOTATIA. IJ SPATIALE $\mu \nu$ SPATIALE SI TEMPORALE.

Deoarece am vazut ca $\gamma_{ij} = 0$ pentru $i, j = \overline{1, 3}$, si utilizind relatia aproximativa 4.68, avem:

$$\Gamma_{jk}^i = 0 \quad \text{pentru } i, j, k = \overline{1, 3} \quad (4.86)$$

$$\Gamma_{\mu 4}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{4i}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x^i} \right) \quad \text{pentru } i = \overline{1, 3} \quad (4.87)$$

Ca atare, ecuatia de miscare precedenta se rescrie PIERDUT CONTRAVARIANTA, pierdut semne, pierdut termeni...

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}) \frac{dx^i}{dt} \right] = \left(\frac{\partial \gamma_{4i}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^\mu}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{44}}{x^i} + \frac{\partial \gamma_{4i}}{\partial x^4} \quad (4.88)$$

Inlocuind notatiile 4.80, si scriind sub forma vectoriala, obtinem:

$$\frac{d}{dt} [(1 + \rho_m)\mathbf{v}] = \nabla \rho_m + \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{p}) \times \mathbf{v} \quad (4.89)$$

Ecuatia de mai sus exprima, intr-o forma matematica, principalele consecinte deduse de teoria relativitatii generalizate asupra miscarii corpurilor:

1. miscarea corpului de proba nu este influentata instantaneu de catre celelalte corpuri masive. Ecuatiile 4.80 ne spun ca informatia gravitatonala se transmite cu viteza luminii. Acestea anticipeaza deci prezenta undelor gravitationale, despre care vom vorbi mai tirziu
2. masa inerta a corpului de proba este proportionala cu $1 + \rho_m$, deci creste in apropierea corpurilor masive. Desi acest lucru aminteste de variatia masei unui corp cu viteza lui din teoria relativitatii restrinse, el nu se refera la aceasta. In schimb, el ne arata ca inertia corpului este influentata de prezenta corpurilor masive, o idee sustinuta de Mach chiar inainte de dezvoltarea relativitatii generalizate.
3. Mediile ponderabile *accelerate* exercita asupra corpului de proba o forta aditionala in sensul acceleratiei lor (termenul al doilea din 4.89). Este un efect directional care in principiu ar putea fi folosit la detectarea undelor gravitationale.
4. Linga (sau numai in interiorul?) un corp rotitor (vezi Fig.??), un punct material care se misca perpendicular pe axa de rotatie, este deviat in sensul rotatiei corpurilor. Este din nou un efect care se poate manifesta experimental, si care va fi discutat in conjunctie cu miscarea satelitilor (?).

In toate aceste efecte recunoastem de fapt influenta directa a formei tensorului T_{ij} data de 4.

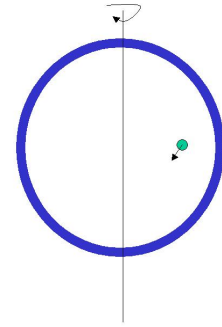


Figure 4.5: Coriolis relativist

Observam ca partea dreapta a ecuatiei 4.89 seamana cu forta Lorentz ?? a cimpurilor electromagnetice vectoriale ($\phi, \mathbf{A}$), daca

facem identificarea "oarba" $\rho_m = \phi$ si $\mathbf{A} = \mathbf{p}_m$, si introducem sarcina e :

$$\frac{d}{dt} [(1 + \rho_m)\mathbf{v}] \sim \nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \quad (4.90)$$

Acest lucru nu este inca acum deloc surprinzator daca realizam ca, in teoria relativitatii generalizate, miscarea este o consecinta *numai* a metricii γ_{ij} (asa cum am discutat in ??), iar aceasta este data de cimpul electromagnetic prin formula 4.63. Ca atare, putem utiliza direct aceleasi formule de aproximare 4.76 in care doar tensorul T_{ij} este altul, si anume ??.

Astfel, sa consideram un fluid oarecare de sarcini electrice in miscare, determinat de densitatea electrica de sarcina $\rho_e \mathbf{r}, t$. Desi acesta genereaza si un cimp electromagnetic, tensorul energie impuls al intregului ansamblu poate fi redus intr-o prima aproximatie, conform ?? numai la acela dat de sarcinile in miscare (NU AM VERIFICAT):

$$T_e^{ij} = \rho_e \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & v_x c \\ 0 & 0 & 0 & v_y c \\ 0 & 0 & 0 & v_z c \\ v_x c & v_y c & v_z c & c^2 \end{vmatrix}$$

care este practic identic cu tensorul 4.64 exceptin semnificatia densitatii ρ , si constantele (care le-am uitat...). Ca atare, forma de mai sus rezulta intr-o forma identica a tensorului electromagnetic T_{ij}^{*e} ca cea gravitationala 4, si intr-o forma identica a functiilor ρ_m^e si $\mathbf{p}_m^e$ ca cele gravitationale 4.80. Dar functiile ρ_m^e si $\mathbf{p}_m^e$ sunt acum identice si cu formulele de definite a potentialelor electromagnetice retardate $(\phi, \mathbf{A})$ adte de ?? !. Ca atare, identificarea "oarba" $\rho_m^e = \phi$ si $\mathbf{A} = \mathbf{p}_m^e$ presupusa mai devreme este corecta, si deci si interpretarea fortei Lorentz pe care am banuit-o!

In mod simplist, putem spune ca "informatia" despre densitatea de masa $\rho^m(\mathbf{r}, t)$ si viteza ei se transmite *simultan* cu cea despre sarcina corpului $\rho^e(\mathbf{r}, t)$, ambele actionind in mod identic (pina la o constanta) in a determina metrica locala γ_{ij} a diverselor puncte din spatiu, prin formula 4.80, in care putem folosi simplu $\rho = \rho^m + k\rho^e$.

Vedem astfel ca structura cimpului electromagnetic este *intrinsec identica*, in aceasta aproximatie, cu cea a cimpului gravitational. Sa ne amintim si ca in sectiunea ?? am cautat "un singur" lagrangean care descrie si cimpul gravitational si cel electromagnetic. Vedem astfel ca ambitia lui Einstein (si a altor fizicieni) de a gasi "o singur formula" pentru toate cimpurile este in parte justificata.

4.4.3 Dilatarea timpului si contractia gravitationala a lungimilor

Relatiilor de aproximare 4.80 pentru deviatia γ_{ij} de la metrica spatiu-timpului minkovskian aqu consecinte nu numai pentru miscarea corpurilor de proba, precum am prezentat in sectiunea precedenta, dar si pentru miscarea luminii, si comportarea ceasurilor si riglelor. +

Pentru a putea particulariza insa miscarea in apropierea stelelor (si a Soarelui in particular), o sa scriem metrica dedusa in sectiunea precedenta in apropierea unui corp masiv perfect sferic. Corpul are masa M distribuita uniform si raza R (vezi Fig.), si este aflat in repaus fata de metrica "aproximativ" minkovskiana x discutata mai inainte, in originea acestui sistem.

Ca atare putem renunta la a utiliza potentiale retardate in 4.80, pentru ca timpul la care "informatia" ajunge nu mai joaca

nici un rol. Atunci putem scrie

$$\gamma_{44} = -\frac{k}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV' = -2\frac{M}{r} \quad (4.91)$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este distanta de la origine la punctul de masura (x, y, z, t) in care calculam metrica. Se vede ca in relatia de mai sus am folosit distributia sferica simetrica a masei stelare si relatia lui Gauss care apare si in electrostatica ??.

Datorita faptului ca steaua este considerata in repaus, efectele rotatiei asupra metricii, ce ar aparea prin termenii γ_{i4} in relatia 4.80 sunt nule: $\gamma_{i4} = 0$.

Inlocuind toate aceste rezultate in 4.82 obtinem metrica locala:

$$ds^2 = \left(1 + k\frac{M}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - k\frac{M}{r}\right) c^2 dt^2 \quad (4.92)$$

Comportarea ceasurilor si riglelor se afla usor din metrica daca consideram interpretarea data in sectiunea ?? pentru masuratorile de timp si spatiu. Astfel:

1. timpul in apropierea unei stele masive se dilata conform:

$$dt = \frac{dt}{\sqrt{1 - kM/r}} \quad (4.93)$$

2. Lungimile se contracta conform

$$dL = \frac{dL_0}{\sqrt{1 + kM/r}} \quad (4.94)$$

Primul efect a fost deja mentionat in legatura cu timpul propriu al corpului in miscare. El ne spune ca un ceas "merge mai incet" in apropierea Soarelui decit in departarea lui, si are ca consecinta directa deplasare Doppler a surselor de lumina de pe suprafata Soarelui. Astfel, pentru ca sursele acestea simt un ritm mai lent de curgere a timpului, ele emit mai rar, si ca atare frecventa luminii venita de la Soare este deplasata spre rosu, conform relatiei de mai sus, care insa exact relatia 4.13 discuta la principiul echivalentei.

Daca contractia lungimilor este greu de pus in evidenta prin masuratori indirecte, ea este in mod sigur evidentiata de curbarea razelor de lumina in jurul Soarelui, care calatorind pe distanta cea mai scura, alege alte traiectorii decit ceea ce numim noi o linie dreapta in sistemul "vechi" minkovskian.

La suprafata Soarelui, pentru ambele efecte avem un factor de corectie $\rho_m = kM/R_S \simeq \dots \simeq 10^{-6}$ (verifica) care este accesibil experientei. Daca in cazul curburii luminii acesta poate fi verificat, in cazul surselor emise de pe suprafata Soarelui apare problema conditiilor necunoscute in care se afla aceste surse, care introduce erori mult mai mari. Vom aborda acest aspect insa in sectiunea urmatoare.

4.5 Solutia *exacta* Schwarzschild pentru simetria sferica

La numai citeva luni dupa publicarea lucrarilor lui Einstein despre relativitatea generala, Schwarzschild a gasit solutia exacta pentru cazul unei simetrii sferice (o stea in repaus in conditii ideale). Aceasta solutie se dovedeste utila in calcularea avansului periheliului lui Marte si al curburii luminii, desi nu e neaparat necesara (Einstein a folosit aproximatii). In plus conduce la metrica gaurilor negre statice.

Sa consideram o singura stea de masa M si raza R aflata in centrul sistemului de coordonate. In absenta ei, metrica ar fi fost minkovskiana. Pentru descrierea acesteia, vom alege coordonate sferice, asa cum au fost prezentate in ??:

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi \quad (4.95)$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad (4.96)$$

$$z = \rho \cos \theta \quad (4.97)$$

In prezenta stelei spatiu-timpul se curbeaza si noi trebuie sa descriem aceasta noua structura, prin alegerea unui sistem de coordonate "originar", si a metricii sale "originare" atasate lui. O prima problema "filozofica" apare cu definirea unui anumit sistem de coordonate. Intr-adevar, daca spatiu-timpul din jurul stelei ar fi fost umplut cu evenimente (sa zicem pietre in spatiu, ciocniri ale acestora, astronauti, etc), ar fi fost mai usor sa atribuim evenimentelor specifice anumite numere (sistemul de coordonate). Asa, daca spatiul este gol, cui eveniment atribui eu un anume set de numere (numite coordonate)?

Aceasta problema nu a aparut in cadrul aproximatiei ecuatiei lui Einstein, pentru ca aceasta aproximatie putea fi gindita intr-un spatiu-timp "aproximativ" minkovskian. Evenimentele in spatiu-timpul "gol" minkovskian puteau fi gindite ca extensie din punctul de masura cu ajutorul riglelor si ceasurilor (utilizind lumina pentru sincronizare). Totusi, in acelasi fel, o sa intelegem si sistemul de referinta al spatiu-timpului curb ales, prin extensia celui minkovskian, care trebuie sa aiba loc la distanta mare de stea. Vom rediscuta insa acest aspect odata ce vom gasi un sistem de coordonate si metrica atasata lui.

Practic, consideram deci ca fiecarui eveniment din spatiu-timp i se ataseaza 4 numere (t, ρ, θ, ϕ) . Suntem in cautarea acelei metrici care indeplineste urmatoarele doua conditii: fie la mare departare de stea ($\rho \gg R$, $M \neq 0$), fie in tot spatiul in cazul in care masa stelei este nula $M = 0$, metrica spatiu-timpului este data de:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.98)$$

In apropierea stelei, metrica este mai complexa, data de 4.57, unde consideram $x_0 = ct$, $x_1 = \rho$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \phi$. Deoarece suntem in cautarea unei metrici statice (deci nu solutia unei stele in colaps, etc.), putem presupune ca toti coeficientii $g_{\mu\nu}$ sunt independenti de timp. Datorita simetriei sferice, ei vor fi deasemenea numai functii numai de "raza" ρ . Tot din considerente de simetrie, se poate arata ca metrica poate fi "separata" si atunci, in apropierea stelei, ea va avea forma:

$$ds^2 = F(\rho)dt^2 - G(\rho)d\rho^2 - H(\rho) [\rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (4.99)$$

Pentru simplificarea ecuatiilor, vom introduce o "noua" variabila pentru distanta: $r = \rho H(\rho)^{1/2}$, si ca atare suntem in cautarea unei metrici de forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.100)$$

Tot ce ramine de terminat sunt functiile $A(r)$ si $B(r)$, si apoi discutat ce reprezinta sistemul de coordonate (t, r, θ, ϕ) ales si metrica atasata lui. Pentru aceasta, observam ca in afara stelei avem precis $T_{ij} = 0$ si, conform ??, $T = 0$. Inlocuind in ecuatie 4.63 obtinem relatia care trebuie indeplinita de tensorul Ricci de curbura in afara stelei:

$$R_{ij} = 0 \quad (4.101)$$

Trebuie acum sa calculam termenii lui $R_{\mu\nu}$, pornind de la 4.100. Pentru inceput facem urmatoarea notatie:

$$A(r) = e^{\lambda(r)}; \quad B(r) = e^{\nu(r)} \quad (4.102)$$

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \phi \end{vmatrix}$$

Pentru explicitare, rescriem tensorul g_{ij} :

Observam apoi ca datorita formei diagonale a matricii g_{ij} , componentele covariante diferite de zero sunt numai cele diagonale, date de $g^{ii} = 1/g_{ii}$. Putem inlocui atunci in ecuatie ?? de definitie a Γ_{ij}^k . Daca notam derivatele la r prin ', adica de exemplu $\lambda'(r) = d\lambda/dr$, obtinem:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2} \quad (4.103)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{\nu' e^{\nu-\lambda}}{2}; \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}; \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}; \Gamma_{33}^1 = -e^{-\lambda} r^2 \sin^2 \theta \quad (4.104)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (4.105)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta; \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (4.106)$$

Cunoscind deci simbolurile Christoffel (la care mai adaugam relatiile cunoscute $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$), putem calcula tensorii Ricci de curbura R_{ij} conform ??. Efectuind calculele, observam ca singurii termeni diferiti de zero vor fi cei diagonali. Acestia sunt:

$$R_{00} = e(\nu - \lambda) \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} \right] \quad (4.107)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r} \quad (4.108)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r(\nu' - \lambda')}{2} \right] - 1 \quad (4.109)$$

$$R_{33} = e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{r(\nu' - \lambda')}{2} \right] - \sin^2 \theta \quad (4.110)$$

Conform 4.101, toate aceste componente trebuie sa fie nule. Ca atare, adunind primele doua ecuatii (in care la prima luam doar paranteza) obtinem $\nu' = -\lambda'$, si deci $\nu + \lambda = \text{constanta}$. Deoarece insa ν si λ trebuie sa tinda la zero cind $r \rightarrow \infty$ (metrica devine minkovskiana), avem $\text{constanta} = 0$, si deci $\lambda(r) = -\nu(r)$. Inlocuind in 4.102 avem deci:

$$B(r) = 1/A(r) \quad (4.111)$$

Cea de-a treia ecuatie ne da atunci prin inlocuirea $\lambda = -\nu$:

$$e^\nu [1 + r\nu'] - 1 = 0 \quad (4.112)$$

Putem rescrie aceasta ecuatie, daca inlocuim la loc $A(r)$ din 4.102:

$$A(r) + rA'(r) = 1 \quad (4.113)$$

care are solutia:

$$A(r) = 1 - \frac{\text{const}}{r} \quad (4.114)$$

Cosntanta se determina prin comparatia cu aproximatia newtoniana. Din ?? avem $g_{rr} \sim 1 - 2GM/r$. Aproximatia de mai sus ar trebuie obtinuta in ordinul intii ($1/r$) al ecuatiei precedente. Noi vedem insa ca, datorita sistemului de coordonate ales, are loc chiar o relatie de identitate in acest caz: $\text{const} = 2GM$.

Avem deci:

$$A(r) = 1 - 2 \frac{GM}{r} = \frac{1}{B(r)} \quad (4.115)$$

Ca atare, inlocuind in 4.100, in sistemul de coordonate ales, *metrica Schwarzschild* pentru o stea sferica de masa M in repaus ia forma *exacta*:

$$ds^2 = \left(1 - 2G\frac{M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2G\frac{M}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.116)$$

Sa incercam acum sa "explicitam" relatia de mai sus, pentru o mai buna intelegere ei, si a sistemului de coordonate in care ea are loc. Vedem in primul rind ca ea satisface cele doua conditii discutate la inceput: tinde la metrica minkovskiana cind $r \rightarrow \infty$ sau $M \rightarrow 0$ (cu observatia ca metrica dedusa este valabila numai *in afara stelei*, unde putem scrie 4.101!). Pentru un moment constant t si in planul ecuatorial al stelei $\theta = 0$, suprafata 2-dimensională pe care un corp de proba se poate afla este descrisa de metrica:

$$dL^2 = \frac{dr^2}{1 - 2G\frac{M}{r}} + r^2 d\phi^2 \quad (4.117)$$

Pentru usurinta intelegerii, putem considera ca metrica de mai descrie o suprafata bi-dimensională "integrata" intr-una 3-dimensională imaginara, ca in Fig.4.6. Aici, suprafata curba a fost "desenata" conform metricii bi-dimensionale de mai sus, cu ajutorul unei a treia dimensiuni imaginare w . Suprafata S se genereaza atunci prin rotatia parabolei $w(r)$ data de (Flamm, 1916)

$$w(r) = \sqrt{8GM(r - 2GM)} \quad (4.118)$$

Astfel, in spatiul real noi am face masuratorile de distante cu rigla la un moment constant t *numai* in planul ecuatorial la stelei. Aceste masuratori ar fi inasa perfect identice cu unele de pe suprafata S din Fig.4.6 integrate intr-un alt spatiu tridimensional. Pratic, putem incerca sa ne imaginam ca suprafata noastra ecuatoriala s-a curbat intr-un spatiu euclidian de o alta dimensiune la care noi nu avem acces.

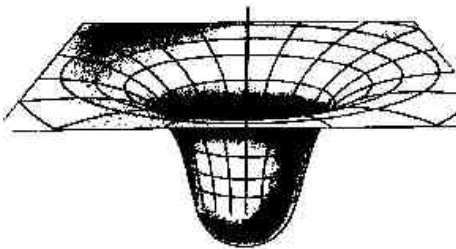


Figure 4.6: Schwarzschild

Vedem acum ca Fig.4.6 identifica foarte clar si sistemul de coordonate r, ϕ al planului ecuatorial, practic prin extensie fata de cel minkovskian. De exemplu, schimarea de coordonate $r = \rho H(\rho)^{1/2}$ nu se traduce decit printr-o schimare a retelei de linii din Fig.4.6, care determina atunci numai noul sistem de coordonate, dar *structura suprafetei ramine la fel!* (explicita - timpul - spatiul - ce reprezinta sistemul ales ca e problema si al altii!).

In plus, Fig.4.6 ne sugereaza deja curbarea razelor de lumina, care se deplaseaza pe geodezice, in asa fel incat distanta sa fie cea mai scurta. Cu toate acestea, trebuie sa fim atenti cind calculam ceva in timp (si nu la aceasi moment de timp t), precum deplasarea unei raze de lumina, pentru ca si timpul contribuie printr-un coeficient la metrica, si acest coeficient trebuie luata

in calcul corespunzator. Cu alte cuvinte, nu numai spatiul este curb ca in Fig.4.6, dar si spatiu timp.

4.6 Verificari experimentale

Problema verificarii experimentale a teoriei relativitatii generalizate am lasat-o mai spre sfirsitul capitolului, din mai multe motive. In primul rind, avem nevoie de formulele matematice dobindite in ultimele sectiuni. In al doilea rind, vrem sa fie urmata imediat de predictiile experimentale, pentru a vedea cum comunitatea stiintifica este inca in cautarea argumentelor covirsitoare in favoarea teoriei. Motivul esential care sta la baza unor dubii este ansamblul relativ restrins de experimente care verifica teoria.

Daca impartim predictiile teoriei in doua, si anume cele referitoare la geodezicele luminii (preziceri optice) si cele referitoare la miscare corpurilor de proba (preziceri mecanice), vom vedea ca in special a doua parte sufera sever de confirmatii experimentale. Astfel, pina in prezent nu putem numi decit miscarea periheliului lui Mercur si pulsarul PSR 1913+16 pentru o confirmare indirecta a mecanicii lui Einstein. In plus, o parte din prezicerile gravitatiei (gaurile negre, unde gravitationale) asteapta inca sa fie confirmate, tinind "in priza" inca mii de cercetatori.

Cu toate acestea, trebuie sa spunem inca de la inceput ca, cu toate problemele inerente, nu exista deasemenea nici un experiment care sa contrazice teoria relativitatii generalizate, care in acest moment este considerata de majoritatea cercetatorilor corecta.

Pina in 1960, timp de 60 de ani, doar trei teste, considerate "clasice" ale teoriei relativitatii generalizate au existat. Ele inasa au fost suficient de "spectaculoase" pentru a convinge majoritatea fizicienilor. Acestea au fost: curbura razelor de lumina in jurul Soarelui, deplasarea Periheliului lui Mercur si deplasarea spre rosu a surselor de lumina. Sa le discutam pe rind.

4.6.1 Periheliul lui Mercur

Pentru Einstein, aceasta verificare a fost cea care l-a convins pe deplin de justetea argumentelor sale. Nu sunt deci de mirare rindurile pe care acesta i le-a scris prietenului sau Besso [?] imediat dupa descoperirea formei 4.55 in 1915:

"*Cele mai ambitioase visuri sunt realizate. Covarianta generala. Periheliul lui Mercur, sublim de precis.*"

Dar sa incepem cu inceputul. Privind ecuatia 4.89 aproximativa de miscare a unui corp in sistemul nostru de referinta "aproximativ" minkovskian, vedem ca aceasta difera de cea a lui Newton. Ea ne spune ca in apropierea Soarelui, masa inertiala a unui corp de proba creste fata de valoarea presupusa de Newton, si ca atare traiectoria este deviata fata de cea eliptica. Acest lucru pe care il putem presupune si privind forma curba a spatiului 4.6. (spune de ce aproximatia 4.89 nu e de ajuns).

Vom calcula deviatia unei planete in cimpul gravitacional al Soarelui ignorind dimensiunile planetei. Planeta o vom considera astfel un corp de proba ce se misca in metrica Schwarzschild generata de o stea fixa. Pentru a folosi ecuatia geodezice 4.19 pentru miscarea planetei, va trebui sa calculam inainte simbolurile Cristofell ???. Jumatate din munca este deja facuta, caci in metrica Schwarzschild am vazut ca ele au forma 4.103. Functiile $\nu(r)$ si $\lambda(r)$ au fost deduse, si se pot obtine din 4.102 si 4.115 ca:

$$\lambda(r) = -\nu(r) = \ln \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) \quad (4.119)$$

Datorita simetriei sferice, putem considera ca miscarea planetei are loc in planul ecuatorial ($\theta = \pi/2$). Nu vom folosi deci ecuatia de miscare 4.19 corespunzatoare coordonatei θ . Vom renunta si la ecuatia de miscare corespunzatoare coordonatei r , pe care o vom inlocui cu ecuatia metricei 4.116. Pentru celelalte doua coordonate t, ϕ , daca inlocuim simbolurile Cristofell ?? in geodezica 4.19, ecuatiile de miscare devin:

$$\ddot{t} - 2\frac{\lambda'}{r}\dot{t}\dot{r} = 0; \quad \ddot{\phi} - 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0; \quad (4.120)$$

unde punctul de deasupra functiei $\dot{t} = dt/d\tau$ reprezinta derivata in raport cu timpul propriu τ .

In plus, la aceste ecuatii vom adauga ecuatia 4.116 daca privim corpul de proba ca un ceas al carui cadran indica timpul τ . Atunci, conform discutiei noastre despre metrica, este musai ca cadranul ceasului sa indice un timp τ , in asa fel incit diferenta dintre doua momente de masura al lui τ este data in sistemul de coordonate ales dupa relatia 4.116:

$$d\tau^2 = e^\lambda dt^2 - e^{-\lambda} dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (4.121)$$

In relatia de mai sus am inlocuit deja $\theta = \pi/2$ pentru miscarea ecuatoriala, si aceasta ecuatie o vom folosi in locul geodezice corespunzatoare coordonatei r . Prin impartire la $d\tau^2$ ea se scrie:

$$1 = e^\lambda \dot{t}^2 - e^{-\lambda} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \quad (4.122)$$

Asa cum am discutat, ecuatiile 4.120 si 4.139 se privesc sub forma urmatoare: corpul de proba (planeta) poate fi considerat un ceas pe cadranul caruia citim timpul τ . Rezolvind cele trei ecuatii de mai sus, putem afla functiile $t(\tau)$, $r(\tau)$, $\phi(\tau)$, care ne dau practic pozitia (r, ϕ) si timpul t in sistemul de coordonate ales la care cadranul ceasului indica timpul τ .

Rezolvam mai intii ecuatiile 4.120 prin integrare. In prima dintre ecuatiile 4.120, observind ca am notat prin ' derivarea in raport cu coordonata r , $\lambda' = d\lambda/dr$, putem scrie

$$\lambda' \cdot r = \frac{d\lambda}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau} = \dot{\lambda} \quad (4.123)$$

si ca atare ecuatiile 4.120 se scriu succesiv:

$$\ddot{t} - \dot{t}\dot{\lambda} = 0; \quad \ddot{\phi} - 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0; \quad (4.124)$$

Se poate verifica direct prin derivare ca ele pot fi puse sub forma (am pierdut un minus pe drum!):

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{t}e^\lambda) = 0 \quad \frac{d}{d\tau}(\dot{\phi}r^2) = 0 \quad (4.125)$$

Deoarece derivatele functiilor din paranteza sunt zero, functiile din paranteza se vor mentine constante pe parcursul miscarii. Ele sunt asa numitele constante ale miscarii:

$$\dot{t}e^\lambda = k \quad \dot{\phi}r^2 = h \quad (4.126)$$

Observam ca a doua constanta de miscare h se poate asocia momentului orbital al planetei. Obtinem deci din relatii de mai sus $\dot{t}$ si $\dot{\phi}$, pe care le inlocuim in 4.139 pentru a obtine ecuatia de :

$$e^{-\lambda}k^2 - e^{-\lambda}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} = 1 \quad (4.127)$$

Ecuatia de mai sus ne da evolutia lui $r = r(\tau)$ in timpul propriu τ . Cu toate acestea noi suntem interesati de ecuatia traiectoriei $r = r(\phi)$, adica la orice ϕ sa putem "afla" pozitia corpului stiind

coordinata lui $r = r(\phi)$ pentru acel ϕ (nu ne intereseaza cind are loc acest lucru). De aceea facem substitutia

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{h}{r^2} \quad (4.128)$$

si ecuatia 4.127 devine:

$$k^2 - \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{h}{r^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (4.129)$$

Daca folosim coordonata

$$u = \frac{1}{r} \quad (4.130)$$

vedem ca ecuatia de mai sus se rescrie

$$k^2 - h^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = (1 + h^2 u^2) (1 - 2mu) = \quad (4.131)$$

$$= 1 - 2mu + h^2 u^2 - 2mh^2 u^3 \quad (4.132)$$

Practic, stiind constantele de miscare k si h , precum si masa stelei m , ecuatia de mai sus ne da traiectoria de miscare $u = u(\phi)$. Putem insa incerca s-o simplificam si mai mult, daca derivam in raport cu coordonata ϕ :

$$-2h^2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} = (-2m + 2hu - 6mh^2 u^2) \frac{du}{d\phi} \quad (4.133)$$

Dupa simplificare avem:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (4.134)$$

Ecuatia de mai sus este practic varianta relativista a ecuatiei Binet ???. Vedem ca termenul $3mu^2 h$ din dreapta s-ar neglija, ecuatia de mai sus se reduce la ecuatia Binet, si deci miscarea planetei ar fi perfect o elipsa. Termenul relativistic $3mu^2 h$ care produce deviatia de la elipsa este insa foarte mic, practic, in cazul miscarii planetei Mercur, de 10^7 ori mai mic decit termenul m/u^2 de dinaintea sa. Ne asteptam deci ca corectia la miscarea eliptica sa fie mica.

Prin derivare directa, se poate arata ca o solutie aproximativa a ecuatiei 4.134 este:

$$u \approx \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cdot \cos \left(\theta - \frac{3m^2}{h^2} \theta \right) \right] \quad (4.135)$$

Se observa imediat ca solutia aproximativa de mai sus se reduce la solutia "clasica" ??? renuntind la termenul relativist $3m^2/h^2 \simeq 10^{-7}$. Prin definitie, periheliul unei planete are loc cind planeta este cel mai aproape de stea, si deci cind u este maximum. Din relatia de mai sus vedem ca aceasta are loc pentru un unghi ϕ pentru care cosinusul este 1, deci:

$$\cos \left(\theta_0 - \frac{3m^2}{h^2} \theta_0 \right) = 1; \theta_0 = \frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} \simeq 2\pi \left(1 + \frac{3m^2}{h^2} \right) \quad (4.136)$$

In mod normal, daca nu ma fi avut corectia relativista, $\phi_0 = 2\pi$, ceea ce inseamna ca la fiecare revolutie dupa perioada de rotatie T , periheliul planetei revine in aceeasi pozitie 2π . Datorita corectiei relativiste, pozitia periheliului dupa o revolutie este mereu alta. Avansul este de $\Delta\phi$ la fiecare revolutie, unde

$$\Delta\phi = 6\pi \frac{m^2}{h^2} \quad (4.137)$$

Practic, relatia de mai sus ne da avansul relativistic al periheliului unei planete in timpul unei singure revolutii, daca inlocuim masa Soarelui m si momentul orbital h al planetei. In cazul planetei Mercur avem $h =$, si deci $\Delta\phi =$. Luind in calcul perioada de revolutie a lui Mercur $T =$ ani, vedem ca avansul *acumalat* al periheliului este

$$\frac{100}{T} \Delta\phi = 43.03''. \quad (4.138)$$

In virtutea discutiilor despre marimile astronomice din primul capitol, marimea de mai sus este foarte mica. Este practic unghiul subintins de un ... (virf de ac?, exemplu) daca il tinem in mina intinsa indreptata spre cer. Cu toate acestea, masuratorii intinse pe durate mari de timp au permis masurarea periheliului lui Mercur cu o rezolutie chiar mai mica decit valoarea de mai sus. S-a putut astfel observa ca avansul periheliului este de $565''$ de arc pe secol.

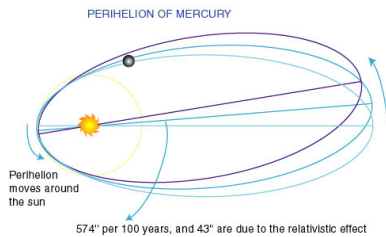


Figure 4.7: Periheliul lui MArte

In cea mai mare parte, avansul observat experimental se datoreaza interactiei dintre planetele sistemului Solar. De fapt, luind in calcul aceste interactii in teoria mecanica, se obtine un avans de $527''$ de arc pe secol, care este deja o valoare foarte apropiata de cea experimentală. Pentru celelalte planete, corespundenta este chiar mai buna.

Toate aceste corespundente destul de rezonabile intre avansul periheliului prezis de teoria lui Newton si cel observat experimental l-au condus pe astronomul Le Verrier sa aiba o incredere foarte mare in teoria Newtoniana. Cu ajutorul teoriei Newtoniene el prezisese deja o noua planeta (numita Neptun), tocmai pe baza deviatiiilor de la elipsa datorate interactiei intre planete. Succesul descoperirii mai tirziu a planetei Neptun i-a crescut increderea in mecanica Newtoniana.

Precum Le Verrier a introdus o noua planeta pentru descrierea deviatiiilor miscarii plantelor, tot asa a incercat sa explice si discordanta dintre experiment si teorie pentru periheliul planetei Mercur (care este numai de aproximativ $40''$ de arc!) prin introducerea unei noi planete, numita Vulcan. Nu este de mirare dezamagirea astronomilor cind aceasta nu a fost gasita, si nic bucuria lui Einstein cind a vazut ca aceasta discordanta de aproximativ $40''$ de arc pe secol se explica cantitativ cu corectia lui relativistica 4.138.

In tabelul ?? prezentam si alte comparatii intre discrepantele dintre valorile prezise de teoria Newtoniana si experiment, impreuna cu valorile prezise de teoria relativitatii generalizate.

4.6.2 Curbarea razelor de lumina

Dupa cum am mentionat, curbarea razelor de lumina in vecinatatea stelelor masive este prezisa si de teoria relativitatii generalizate, si de cea newtoniana daca consideram ca fotonul are masa, energie si impuls date de formulele cuantice. Cu toate acestea, teoria newtoniana prezice o valoare exact de doua ori mai mica decit cea reala, pentru ca nu ia in calcul curbura spatiului. (vezi ca in articolul initial Einstein obtine tot jumătate. de ce?, unde gresise?)

Metoda utilizata de Einstein in estimarea curburii razei de lumina utilizeaza faptul ca, datorita curburii spatiului, se poate considera intr-o prima aproximatie ca lumina are o viteza variabila, in functie de locul unde se afla. Apoi se poate utiliza teoria mediilor optice, unde viteza luminii este de asemenea variabila, in functie de indexul de refractie al materialului $n = n(\mathbf{r})$, care variaza in functie de pozitie. Curbura luminii se calculeaza atunci practic ca la lentile.

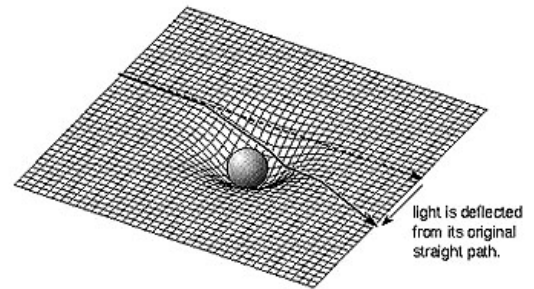


Figure 4.8: pastreaza retea desenata, adauga unghiurile

Cu toate acestea, noi ne vom folosi de rezultatele aflate inainte, urmarind in paralel demonstratia precedenta. Astfel, ecuatiile geodezice ale luminii ?? sunt identice cu cele ale unui corp de proba ?? daca facem substitutia $\tau \rightarrow \lambda$. Numai ecuatiile metricii se schimba, pentru ca in cazul luminii avem $ds = 0$.

In sectiunea precedenta am scris ecuatiile metricii sub forma 4.121. Acum inlocuim $d\tau = ds = 0$ pentru a obtine metrica in cazul luminii. Interesant este ca aceasta inlocuire se poate interpreta ca timpul propriu al luminii ramine constant, dupa cum cadranul un ceas care merge cu o viteza apropiata de viteza luminii "ingheata", si arata mereu acelasi timp. In relatia urmatoare 4.139 se schimba atunci doar 1 cu 0:

$$0 = e^{\lambda} \dot{t}^2 - e^{-\lambda} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \quad (4.139)$$

Revenind la ecuatiile geodezice, acestea au fost scrise pentru planul ecuatorial sub forma 4.126 si ?. Inlocuim deci in aceste relatii τ cu λ (practic derivarea apare acum in raport cu λ si nu cu τ), si apoi in relatia de mai sus obtinem:

$$k^2 - \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{h}{r^2} \right)^2 = \left(0 + \frac{h^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (4.140)$$

adica o relatie asemanatoare 4.131. Folosind deasemenea coordonata $u = 1/r$ pentru relatia de mai sus, ea devine, dupa derivarea in raport cu ϕ , intr-o maniera asemanatoare ecuatiilor 4.131-4.134,

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 \quad (4.141)$$

Forma de mai sus, care da traiectoria razei de lumina, este practic limita $h \rightarrow \infty$ a ecuatiei relativiste Babinet 4.134! Acest lucru nu este insa de mirare, daca observam ca h reprezinta momentul orbital ... Ba este de mirare!!! CARE E EXPLICATIA? In absenta stelei ($M = 0$), ecuatiea de mai sus se reduce la

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (4.142)$$

care are ca solutie

$$u(\phi) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cos \phi \quad (4.143)$$

Solutia de mai sus reprezinta de fapt o dreapta (vezi Fig.??) care trece pe langa stea la distanta minima R . Astfel, vedem in figura Fig.?? ca, din triunghiul ABC , avem $R = r \cos \phi$.

Pentru a vedea cit de mare este corectia relativista, sa presupunem ca avem o raza care trece chiar pe langa suprafata Soarelui ($R = R_S \approx 7 \cdot 10^8 m$). Atunci, luind in calcul si masa Soarelui, avem (nu e verificat!):

$$u = \frac{1}{r} \approx 7 \cdot 10^{-8} m^{-1} \quad 3mu^2 \approx 7 \cdot 10^{-18} m^{-1} \quad (4.144)$$

si deci corectia relativista este foarte mica. Pornind de la solutia 4.149, putem verifica ca urmatoarea solutie este o solutie aproximativa a ecuatiei 4.142:

$$u(\phi) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cos \phi + \frac{m}{R^2} (2 - \cos^2 \phi) \quad (4.145)$$

Sa consideram o asemenea solutie, pentru care raza de lumina trece simetric pe langa Soare fata de axa $\phi = \pi/2$ precum in Fig.???. La limita $r \rightarrow \infty$ spatiul este din nou euclidian, si putem considera ca raza de lumina vine sub unghiul $\pi/2 - \Delta\phi/2$. Inlocuind deci aceste doua valori $r = \infty$ si $\phi = (\pi/2 - \Delta\phi/2)$ in relatia 4.149 obtinem:

$$\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{1}{R} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right) + \frac{m}{R^2} \left[2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right)\right] \quad (4.146)$$

Deoarece presupunem ca deviatia este mica, $\Delta\phi \approx 0$, facem urmatoarele aproximatii:

$$2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right) \approx 2 - \cos^2 \pi/2 \approx 2 \quad (4.147)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right) = -\sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx -\frac{\Delta\phi}{2} \quad (4.148)$$

si deci ecuatiea conduce la:

$$0 = \frac{\Delta\phi}{2} + \frac{2m}{R^2} \quad (4.149)$$

de unde deviatia *totala* a razei de lumina este:

$$\Delta\phi = \frac{4m}{R^2} \quad (4.150)$$

Daca consideram ca raza trece chiar pe langa suprafata Soarelui, si inlocuim valorile pentru Soare utilizate mai sus, avem

$$\Delta\phi = \frac{4m}{R_S^2} = 1.75'' \quad (4.151)$$

Primul experiment pentru a masura acest efect a fost efectuat in 1919 de catre doua expeditii britanice trimise la polul

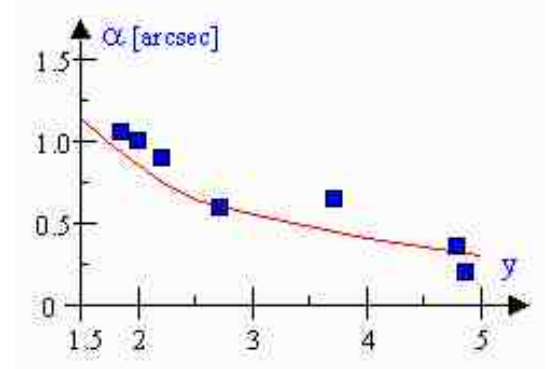


Figure 4.9: de pe web, verifica <http://webuser.fh-furtwangen.de/webers/Image203.gif>

sud pentru observarea eclipsei de Soare. In principiu, tehnica folosita este simpla, si consta in a efectua doua fotografii: una cu steaua in timpul eclipsei de Soare, si alta cu ea in timpul nopatii. Pozitia stelei *fata de stelele sale vecine* este putin diferita in timpul eclipsei de Soare, datorita curbaturii luminii, dar ea a confirmat valoarea de data de teoria relativitatii.

Cu toate acestea, masuratoarea s-a dovedit dificila (cu erori de aproximativ 30%), nu in ultimul rind datorita atmosferei Soarelui (vezi Fig.?? - pui poze Eddington). Desi experienta a fost efectuata din nou mai tirziu, erori mai mici nu au fost obtinute. De aceea experimentele ulterioare au fost efectuate in doemniul radio (deci nu lumina vizibila) cu unde radio emise de quasari. Eroarile au fost micorate, insa nu inca spectaculos.

4.6.3 Lentile gravitationale

Stelele masive care curbeaza razele luminii pot fi privite si ca niste lentile uriase. Aceasta simpla idee, desi sugerata de la aparitia teoriei relativitatii de catre O.Lodge [?], a luat insa aproape 60 de ani pentru a fi verificata experimental.

In Fig. prezentam principiul unui asemenea masuratori, impreuna cu o fotografie a unei stele ce apare multiplicata datorita acestui efect.

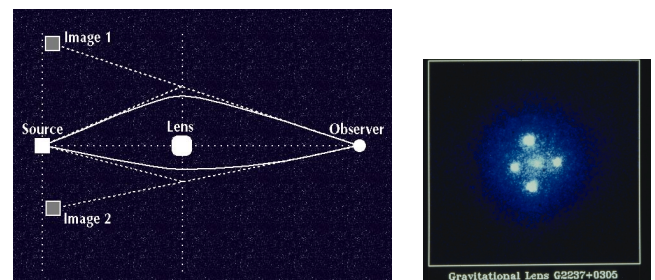


Figure 4.10: Effect + poza

Observam astfel ca "lentilele gravitationale" sunt niste lentile aproape complet acromatice. Astfel, lumina ce vine de la infinit intr-un "manunchi" paralel nu este adunata intr-un punct ca in cazul lentilei. Cu alte cuvinte, o lentile gravitacionala nu are un punct focal. In general, lentilele gravitationale produc imagini multiple ale surselor de lumina. Ele pot fi folosite nu numai pentru a studia sursa de lumina, dar si pentru a studia corpul prin apropierea caruia raza lumina este curbata.

(Cauta exemplu ca talkul unde am vazut ca sunt folosite sa se gaseasca planetele masive).

4.6.4 Experientele radar de intirziere a luminii - doua poze

Acest test a inceput deja ssa fie considerat ca facind parte din "testele clasice" de verificare a teoriei relativitatii, desi el a fost propus relativ tirziu, in 1964, de catre Shapiro. Principiul lui, prezentat in Fig.?? cosnta in a trimite un semnal radar catre un alt obiect de cealalta parte a Soarelui. Acest obiect poate fi o planeta, sau un satelit artificial.

Semnalul este insa trimis tangential pe lina Soare, in asa fel incit efectele teoriei relativitatii sa fie cit mai proeminente. Deoarece semnalul, ca si lumina, traverseaza o regiune curba de spatiu-timp, la intoarcere el va fi intirziat fata de situatia cind Soarele nu ar fi fost in apropiere. Aceste intirziiiri sunt de ordinul a sute de μs , si pot fi masurate experimental.

Aici nu vom face insa o analiza detaliata a acestui experiment, proppundindu-l mai degraba partial ca un exercitiu. Astfel, ecuatia de miscare a luminii este data tot de geodezica 4.139, unde derivarea apare in raport cu parametrul λ . Eliminind insa $d\lambda^2$, ea se rescrie

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (4.152)$$

Din aceasta ecuatie ne intereseaza de fapt $t = t(r)$ pentru a masura timpul de intirziere. Intr-o prima aproximatie putem considera atunci ca lumina parcurge o linie dreapta data de ecuatie 4.149, pe care o rescriem conform notatiilor din Fig.?? (vezi triunghiul...):

$$r \sin \phi = D \quad (4.153)$$

Prin diferentiere avem ca:

$$\phi = \arcsin\left(\frac{D}{r}\right) \rightarrow d\phi^2 = \frac{D^2}{r^2 - D^2} \frac{dr^2}{r^2} \quad (4.154)$$

Inlocuind in relatia 4.152 avem:

$$dt^2 = dr^2 \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{D^2}{r^2 - D^2} \right] \quad (4.155)$$

care ne da practic, prin integrare (sa fac de exemplu cu MAtematica?), intirzierea luminii fata de situatia clasica ($m = 0$) cind lumina se deplaseaza pe linia considerata dreapta Pamint-obiect.

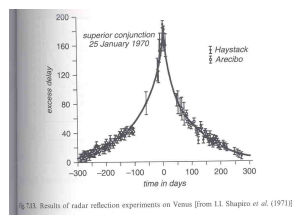
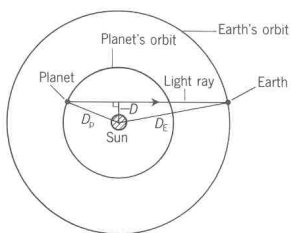


Figure 4.11: "Radarul". Exercitiu: Sa fiteze curba?

In Fig.?? prezentam rezultatele lui Shapiro [?] precum si fitul cu o formula care se deduce din 4.155 prin integrare.

Pentru ca reflectia radarului de pe alte planete produce probleme la interpretare datorita suprafetei planetei, experimente au fost efectuate in care semnalul radar a fost reflectat de sondele spatiale Mariner VI si Mariner VII. Si in acest caz rezultatele au confirmat prezicerile teoriei relativitatii generalizate, cu erori mai mici de 5%.

4.6.5 Deplasarea spre rosu

Am vazut in sectiunea ?? cum timpul se dilata in cimpuri gravitationale masive. Aceasta are ca prima consecinta modificarea frecventei emise de atomi identici. Mai precis, atomii situati in cimpuri puternice, deoarece "simt" un timp care curge mai incet, vor emite cu o frecventa mai mica. Relatia este data de 4.13:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = g \frac{dr}{c^2} \quad (4.156)$$

Desigur ca exista discutia "filozofica" in ce masura cei doi atomi sunt identici, daca ei sunt situati in cimpuri diferite. In acest sens, este remarcabil ca se poate da si o explicatie clasica fenomenului luind in calcul forma cuantica a energiei, asa cum am discutat in ???. Probabil ca luind in calcul forma internă a atomului, am vedea ca ei se arata diferit in cimpuri gravitationale diferite, si deci am fi in stare sa dam o explicatie "clasica". Discutia ar fi atunci asemanatoare cu cea din capitolul precedent referitoare la timpul masurat de un ceas in miscare, unde am putut da deasemenea o explicatie "clasica".

Cu toate acestea, putem evita aceste discutii "filozofice" daca definim ca doi atomi sunt identici atunci cind ei sunt formati de acelasi numar de electroni, protoni si neutroni, si se afla in aceeasi stare energetica (care se defineste insa cuantic). Atunci, din punctul de vedere al unui observator exterior, structura internă a atomului este neimportanta. Important este ca el emite la frecventa diferite cind se afla in cimpuri gravitationale diferite.

In principiu, este usor de masurat deplasarea spre rosu a radiatiei emise de la Soare, dar dificil de interpretat. Motivul este ca o parte a acestei deplasari se datoreaza conditiilor extreme de la suprafata Soarelui (temperaturi foarte inalte, presiuni mari, etc.). De aceea primul experiment considerat de succes este unul efectuat pe Pamint!

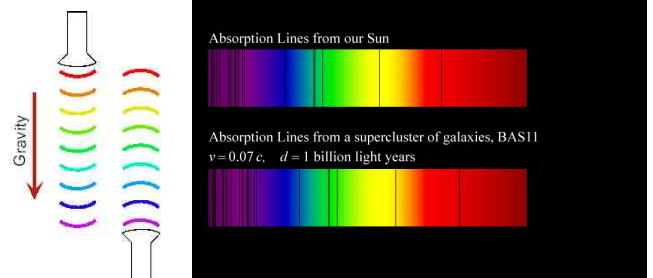


Figure 4.12: primul il schimba, al doilea http://128.187.205.54/stokesh/redshift.jpg

Astfel, Pound si Rebka au asezat o sursa emitatoare si un detector la inaltime diferite pe Pamint. Diferenta dintre inaltime Δh este practic extrem de mica. Prima sursa emite raze gamma cu o frecventa de ... Datorita deplasarii spre rosu,

detectorul "vede" radiatii gamma venind cu frecventa de ... Si sursa si detectorul folosesc o metoda speciala (numita Mossbauer) pentru a emite si detecta radiatii, care le fac sa emita si sa "vada" numai radiatii care sunt intr-o banda $\Delta\nu =$ fata de radiatia de frecventa $\nu =$. Cum diferenta dintre radiatia emisa si cea care ajunge la dector este de Δ , radiatia care ajunge la detector nu poate fi "vazuta".

Cu toate acestea, printr-o tehnica ingenioasa, Pound si Rebka au pus in miscare emitatorul cu o anumita viteza, pentru a crea un efect Doppler, si a compensa practic efectul gravitational. Valoarea vitezei de miscare da de fapt diferenta intre cele frecvente, si a confirmat predictiile lui Einstein intr-o proportie de 1

mai tirziu, alte tipuri de experimete mai directe au fost efectuate. S-a masurat de exemplu frecventa emisa de sonda spatial Voyager I cind aceasta se afla in cimpul de gravitatie al lui Saturn (1980) si s-a comparat valoarea ei cu frecventa emisa din spatiul interstelar. Rezultate chiar mai precise s-au obtinut trimittind un ceas atomic ("hydrogen maser clock" - vezi ce e) in spatiu cosmic cu ajutorul unei rachete Scout (1976).

4.7 Preziceri experimentale

4.7.1 Gauri negre

Prin spectacularele sale comportari, gaurile negre au devenit cunoscute si in afara comunitatii stiintifice. Cum se stie ca lumina nu poate parasi asemenea obiecte ceresti, ele sunt folosite in bancuri (printr-o asemanare partiala cu mai vechiul "sac fara fund"), pentru a sugera ceva ce oricum nu mai primesti inapoi. Se spune astfel despre buget ca e o gaura neagra, sau...

Primul care a presupus exista unor astfel de obiecte ceresti a fost Reverendul J.Michell (unde am mai intilnit numele asta?, verifica web). El a speculat in 1784 pe baza vitezei pe care un obiect de masa m trebuie sa o aiba pentru a parasi definitiv in spatiul cosmic suprafata unui corp ceresc de masa M . Astfel, daca aruncam obiectul (aflat la inaltimea r) vertical in sus cu viteza v astfel incit energia sa cinetica sa depaseasca energia potentiala

$$\frac{mv^2}{2} \geq G \frac{Mm}{r} \quad (4.157)$$

atunci obiectul isi va incetini miscarea ("transferind" energia sa cinetica in cea potentiala). El insa nu-si va pierde toata energia sa cinetica, si deci va continua sa se indeparteze de obiectul ceresc. Viteza pentru care un corp poate parasi suprafata unui corp ceresc este data din relatia de mai sus de

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (4.158)$$

Se vede ca cu cit un corp este mai masiv, sau are o raza mai mica, cu atit viteza minima de mai sus creste. In particular, ea devine chiar viteza luminii c daca raza corpului ceresc este:

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.159)$$

In consecinta, a zis Reverendul J.Michell, pentru stele care o raza mai mica decit r_0 nici chiar lumina nu poate parasi suprafata lor!

Azi, argumentul de mai sus pare ca nu trebuie aplicat luminii, pentru ca lumina nu este un obiect, ci fie o unda, fie "informatie" care se deplaseaza pe geodezica ???. Cu toate acestea,

sa nu ignoram comportarea corpusculara a luminii care reiese din mecanica cunatica. Am vazut deja in ?? ca, considerind lumina formata din corpusculi cuantici numiti fotoni, putem reproduce rezultatele de baza ale principiului echivalentei aplicat luminii: deplasarea spre rosu, curbarea luminii pe o zona restrinsa, etc. Nu este deci de mirare ca raza critica 4.159 se regaseste in formulele relativiste, unde efectul prezis de Reverendul J.Michell este de asemenea confirmat!

Astfel, in sectiunile precedente am folosit metrica Schwarzschild 4.116, care este o solutie exacta pentru spatiu-timpul determinat de o stea masiva. Folosind definitia Reverendului J.Michell 4.159 pentru raza critica r_0 (numita si raza Schwarzschild), metrica Schwarzschild devine:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.160)$$

Ea trebuie folosita in afara stelei de raza R . In mod obisnuit, $R \gg r_0$ (in cazul Soarelui $r_0 = 2Km$). Cu toate acestea, pentru ca metrica Schwarzschild este exacta, ea poate fi folosita si in cazul Reverendului J.Michell, cind raza stelei R este mai mica decit r_0 , dar numai pentru $R < r < r_0$ si $r > r_0$ (adica in afara stelei de raza R). Astfel de obiecte ceresti, pentru care $R < r_0$, se numesc *gauri negre* ("negre", pentru ca lumina nu iese din ele).

Inainte de a arata ca si incalz relativist lumina nu iese din gaurile negre, ne putem intreba daca asemenea gauri negre exista cu adevarat. In fond, daca am face un calcul al densitatii minime am obtine 10^{20} kg/m^3 , o densitate care ar depasi densitatea materiei chiar daca am "sparge" atomii, si ii aduce nucleu linga nucleu. Cu toate acestea, Chandrasekhar a aratat in 1931 ca orice stea de masa mai mare decit $1.4M_S$ (unde M_S este masa Soarelui), odata ce isi consuma "arderea" interna, va colapsa datorita atractiei gravitationale sub o raza mai mica decit r_0 , si deci va deveni o gaura neagra.

Vom incerca acum sa deducem, folosind teoria relativitatii gravitationale, principalele efecte ale unei gauri negre statice. Pentru ca nu putem utiliza metrica Schwarzschild 4.160 decit in afara gaurii negre, vom presupune in primul rind ca $R \ll r_0$, asa incit R nici nu va mai apare in calcule.

In al doilea rind observam ca metrica 4.160 este singulara in punctul $r = r_0$. Acesta singularitate este inasa de origine matematica, datorita alegerii particulare a coordinatei de timp. Se poate arata [?] ca aceasta alegere face dificil studiul evenimentelor pentru care $r < r_0$ (practic, pentru ca in acest caz lumina nu paraseste gaura neagra, si un observator extern nu observa nici un semnal).

De aceea, vom folosi o noua coordinata de timp, determinata de transformarea Eddington (1924)-Finkelstein(1958) (putina semnificatie?):

$$\tilde{t} = t + \frac{r_0}{c} \ln \left| \frac{r}{r_0} - 1 \right| \quad (4.161)$$

Atunci

$$d\tilde{t} = dt - \frac{dr}{c(1 - r/r_0)} \quad (4.162)$$

Pentru simplificarea calculelor, ne vom concentra numai pe deplasarea obiectelor si a luminii pe directie radiala ($d\phi = 0$, $d\theta = 0$). Inlocuind, metrica Schwarzschild 4.160 devine:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{2cr_0}{r} dr d\tilde{t} - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) dr^2 \quad (4.163)$$

Comportarea luminii pe directie radiala este atunci data de relatia de mai sus pentru $ds = 0$. Practic, inlocuind $ds = 0$ putem obtine pozitia $r = r(\tilde{t})$ ca functie de timp. Se verifica direct ca cele doua solutii ale ecuatiei de mai sus sunt:

$$dr = -cd\tilde{t} \quad dr = cd\tilde{t} \frac{1 - r_0/r}{1 + r_0/r} \quad (4.164)$$

In cazul cind gaura neagra nu este prezenta ($r_0 = 0$, si $\tilde{t} = t$), ecuatiile de mai sus descriu deplasarea luminii in cele doua directii radiale posibile: inspre centru si de la centru, cu viteza luminii c . Cind gaura neagra este prezenta, viteza luminii se schimba pentru directia dinspre centru ei. Pentru puncte $r < r_0$, aceasta devine chiar negativa, semnificand ca in ambele cazuri lumina calatoreste catre centrul gaurii negre! Cu alte cuvinte, pentru puncte situate sub raza r_0 , lumina nu se indreapta catre exteriorul gaurii negre, si de ci nu o poate parasi, exact asa cum a presupus Reverendul J. Michell.

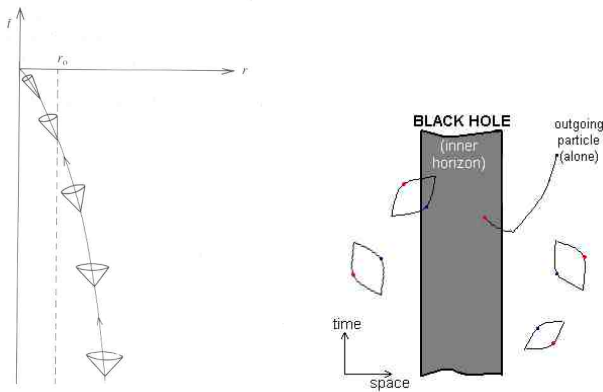


Figure 4.13: a) Con lumina. b) Viziune "artistica" (deci nu masurata) a unei gauri negre

Acest efect este prezentat si in Fig. ?? unde conurile de lumina $d\tilde{t}/dr$ pentru diferite pozitii radiale sunt prezentate. Din teoria relativitatii restrinse stim ca interiorul lor reprezinta practic liniile de univers pe care le pot avea particulele. Din Fig. ?? putem vedea ca, pentru $r = r_0$ conul de lumina este tangential, si ca practic lumina este "statica". Pentru $r < r_0$ conurile de lumina sunt indreptate catre centrul gaurii negre, si deci si lumina, si particulele pot calatori *numai* catre centru.

Suprafata data de $r = r_0$ se numeste orizontul gaurii negre, si practic orice corp care cade dincolo de acest orizont este definitiv pierdut. Gaura neagra poate atrage astfel materia dintr-o stea invecinata, creand un frumos "disk de acretie" ca in Fig. ??.

Daca lumina nu poate parasi o gaura neagra, ar parea ca ea nu poate fi detectata. Cu toate acestea, si o gaura neagra radiaza, printr-un efect denumit "efectul Hawking". In Fig. ?? prezentam acest efect, mentionind insa ca el are loc datorita unor proprietati quantice ale vidului, pe care le vom discuta intr-un capitol ulterior.

Astfel, vidul in sens cuantic nu este chiar "gol", el permitind crearea unor perechi *virtuale* de particule, care se anihileaza la un moment imediat ulterior (sa notam ca in Fig. ?? axa verticala este tot timpul). In mod normal, aceste fluctuatii quantice ale vidului dau efecte mici asupra materiei, cum ar fi deplasarea Lamb a spectrului atomic ??.

(ATENȚIE la urmatorul argument. Poate fi gresit!) Se poate intimpla insa ca o astfel de pereche sa aiba loc chiar la granita orizontului gaurii negre, ca in Fig. ?? . In cazul acesta, fotonul care intra in zona de sub orizont nu mai poate iesi si, daca si cel de-al doilea foton are energie suficienta sa paraseasca

apropierea gaurii negre (cazul b in figura), cei doi nu se mai pot intilni ca sa se recombine. In consecinta, acesti devin fotoni *reali*, iar cel din afara gaurii negre poate fi apoi observat.

Efectul prezis de Hawking consuma energia gaurii negre pe care o transforma in energie luminoasa. Hawking a aratat ca astfel gaura neagra emite radiatii precum un corp negru ("black body"). Temperatura acestuia se poate estima daca consideram relatia de incertitudine pentru pozitia fotonului. Astfel, fotonul generat se va afla undeva in preajma golului negru de raza r_0 . Aceasta conduce la o incertitudine in impuls

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{r_0} \quad (4.165)$$

Pe de alta parte, putem considera ca acest impuls este generat de un corp negru cu temperatura

$$\Delta p \sim \frac{kT}{c} \quad (4.166)$$

Utilizand valoarea lui r_0 in relatiile de mai sus obtinem o valoare estimativa a temperaturii de

$$T = \frac{\hbar c^3}{2kGM} \quad (4.167)$$

Luind in calcul forma circulara a simetriei, si utilizand caclule precie, Hawking a gasit urmatoarea forma pentru temperatura gaurii negre daca se considera ca acesta radiaza sub forma unui corp negru ("black body"):

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} \quad (4.168)$$

Daca gaura neagra nu primeste materie din alta parte, masa ei va scadea prin aceasta emisie intr-o rata din ce in ce mai mare, pentru ca si probabilitatea efectului Hawking creste cind scade masa gaurii negre. In cazul unei gauri negre de masa Soarelui avem $T_S = 6 \cdot 10^{-8} K$ si, stiind energia emisa *numai* sub acesta forma pe unitatea de timp (care este data de temperatura T) putem calcula timpul de viata al gaurii negre. In cazul considerat aceasta este de ordinul a 10^{66} de ani, si depaseste astfel virsta Universului.

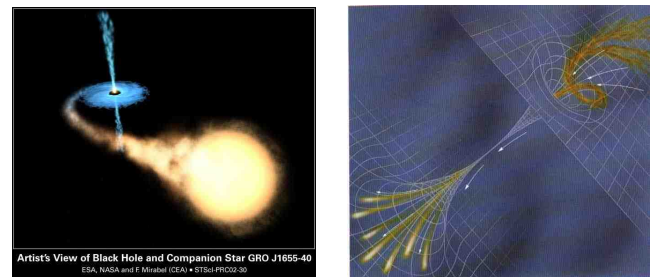


Figure 4.14: Viziune "artistica" (deci nu masurata) a unei gauri negre

Pe de alta parte, gauri negre care s-au format la inceputul Universului (acum mai mult de 10 miliarde de ani) se poate sa se fi "evapoart" in parte pina acum, si in prezent sa aiba dimensiuni "minuscule" (mase de ordinul a miliarde de tone, si raze de ordinul a $10^{15} m$, adica aproximativ raza unui proton).

Detecția gaurilor negre se poate face si daca in prezenta acestora exista stele masive carora gaura neagra le "fura" din materie. In acest caz se presupune ca jetul de materie care este atras de gaura neagra formeaza o spirala, si la capatul acesteia vitezele si acceleratiile particulelor sunt asa de mari, incit ele

(ionizate?) emit radiatii X cu putin inainte de a patrunde in Gaura neagra. O imagine artistica a unui astfel de eveniment este prezentata in Fig.??.

In final metionam ca metrica Schwarzschild 4.160 permite descrierea nu numai a gaurilor negre prin substitutia 4.161, dar si a unei *gauri albe*, printr-o substitutie asemanatoare. Semnificatia fizica a unei astfel de solutii este "wormhole" prezentat in figura ??, in care materia ce intra pe o parte iese pe alta. Un "wormhole" ar functiona astfel ca un scurtcircuit intre doua puncte ale Universului.

Gaura neagra in centrul galaxiei noastre?

4.7.2 Undele gravitationale

In sectiunea ??, referitoare la formele aproximative ale ecuatiilor lui Einstein, am vazut cum, intr-o prima aproximatie, putem considera ca "informatia" gravitacionala γ_{ij} se transmite cu viteza luminii, si ca ea se adauga ca o perturbatie la metrica g_{ij} . Acelasi efect l-am observat si in cazul electromagnetismului. In plus inasa, in cazul electromagnetismului, am vazut cum Hertz a putut si masura aceasta "informatie", sub forma undelor electromagnetice. Se naste desigur intrebarea daca acelasi lucru nu poate fi masurat si in cazul gravitatiei.

Nu orice "informatie" gravitacionala γ_{ij} care se transmite in saptiu poate fi considerata unda gravitacionala. Prin definitie, consideram unde gravitationale numai acele tipuri de perturbatii γ_{ij} cu ajutorul carora se poate transmite energie. Motivul este simplu: daca nu transmite energie, perturbatia γ_{ij} nu poate fi detectata de catre un detector (care absoarbe energie pentru a putea indica un semnal).

Prin comparatie cu dipolul electric oscilant, care radiaza energie, am putea presupune ca o stea sferica a carei raza oscileaza poate transmite energie. Cu toate acestea se poate arata [?] ca, datorita formei particulare a metricii Schwarzschild 4.116, aceasta nu radiaza energie chiar daca oscileaza. Mai precis, metrica Schwarzschild isi pastreaza aceeasi forma in afara sferei chiar daca raza stelei oscileaza (verifica).

In cazul in care steaua este asimetrica, iar raza ei oscileaza, atunci se poate arata ca ea emite radiatie gravitacionala, dar nu de tip dipolar, ci quadrupolar (practic este mai greu de detectat). Astfel de emisii s-ar putea observa atunci [?] in exploziile supernovelor de tip II, care au loc la arproximativ 30 de ani in galaxia noastra. Desigur inasa ca cantitatea de energie emisa prin undele gravitationale ar fi proportionala cu asimetria, si deci nu poate fi prevazuta.

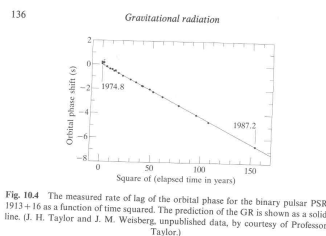
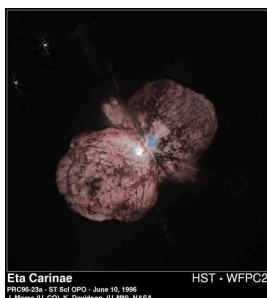


Figure 4.15: Exemplu de supernova. Pulsarul PSR 1913+16

O metoda indirecta de a prezice undele gravitationale se datoreaza lui Russell Hulse and Joseph Taylor, pentru care acestia au primit premiul Nobel in 1993. In principal, acestia au efectuat observatii asupra pulsarului PSR 1913+16. Acesta

formeaza impreuna cu o stea pereche un sistem binar, si se roteeste in jurul centrului comun cu o perioada de aproximativ

Hulse si Taylor au observat ca miscarea lor de rotatie este incetinita in timp, si ca astfel miscarea orbitala are o intirziere de faza (? explica) de cateva secunde in citiva zeci de ani. Pentru corpurile ceresti aceste "intirzieri" sunt neasteptate, pentru ca ele se misca in spatiul vid, si numai interactiunea cu alte corpuri ceresti le poate incetini miscarea.

In cazul PSR 1913+16 inasa, Hulse si Taylor au ajuns la concluzia ca ceea ce le incetinesc miscarea este emisia de unde gravitationale, datorita formei foarte asimetrice pe care sistemul celor doua obiecte ceresti le formeaza! In Fig.?? prezentam rezultatele masuratorilor, precum si previziunea relativitatii generalizate (pentru cititorii interesati, ea etse calculata pe larg in [?]).

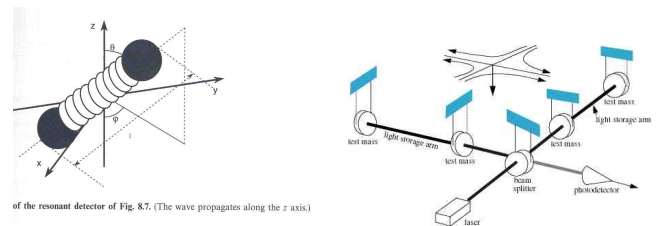


Figure 4.16: Exemplu de detector gravitacional

Demonstratia PSR 1913+16 apare in [?] , dar este laborioasa. S-o introduc macar in parte?

4.8 Cosmologie. Expansiunea universului

Originea si evolutia Universului este o problema care nu avea cum sa nu preocupe oamenii inca de la primele priviri pe care acestea le-au acordat stelelor. Teoria relativitatii generalizate este inasa prima teorie in cadrul careia cateva intrebări isi pot primi raspunsul, chiar daca modelul folosit este extrem de simplificat.

In modelul simplificat pe care il cautam consideram ca spatiul este la orice moment izotrop, si se comporta la fel in fiecare parte a sa. Plasind ceasuri in toate punctele sale (statice?), putem defini un timp un "timp cosmic" ca fiind indicatia ceasurilor de pe ecran. Practic, coordonata t a evenimentelor este timpul indicat pe cadran, iar spatiul la un moment t trebuie sa fie izotrop. Cum ar putea arata inasa un spatiu 3-dimensional izotrop altfel decit euclidian?

4.8.1 Metrica unui spatiu-timp omogen si izotrop

Faptul ca un spatiu poate fi izotrop fara a fi euclidian este exemplificat de o sfera 2-dimensionala in spatiu 3-dimensional euclidian obisnuit (vezi Fig.??). Prin analogie, putem spune ca una dintre posibilitatile unui spatiu omogen si izotrop 3-dimensional este o hiperfera, adica o sfera 3-dimensionala intr-un spatiu 4-dimensional.

Tot prin analogie cu sfera obisnuita, putem gasi si metrica unei hypersfere.

Hyperfera

Fig. hypersfera cu $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

In spatiul euclidian 4-dimensional, hyper sfera este determinata de ecuatie:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (4.169)$$

Relatia de mai sus este verificata imediat daca alegem pe suprafat hypersferei coordonatele (ϕ, θ, χ) astfel incit:

$$x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \quad (4.170)$$

$$y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \quad (4.171)$$

$$z = R \sin \chi \cos \theta \quad (4.172)$$

$$w = R \cos \chi \quad (4.173)$$

In loc de coordonatele (ϕ, θ, χ) pentru a identifica punctele de pe suprafata hypersferei, putem folosi coordonatele (r, ϕ, θ) , unde

$$r = R \sin \chi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.174)$$

Coordonata r nu trebuie interpretata in asa ca distanta de la origine la punctul P, calculata pe suprafat sferei, dupa nici cum coordonatele (x, y, z) nu reprezinta dimensiuni pe suprafata hypersferei. Totusi, in spatiul 4-dimensional, r se poate interpreta ca distanta de la originea sistemul (x, y, z, w) la proiectia punctului P pe spatiul 3 dimensional (x, y, z) .

Distanta infinitesimala dintre doua puncte *de pe suprafata hypersferei* este:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (4.175)$$

si ea se poate calcula in coordonatele (ϕ, θ, χ) . Daca in sa folosim in loc de χ coordonata r , putem arata, folosind relatiile 4.170 si 4.174 ca relatia de mai sus se transforma in:

$$dl^2 = \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2(\phi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.176)$$

Sfera

Fig sfera cu $r^2 = x^2 + y^2$

In spatiul euclidian 3-dimensional, sfera este determinata de ecuatie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (4.177)$$

Relatia de mai sus este verificata imediat daca alegem pe suprafat sferei coordonatele (ϕ, θ) astfel incit:

$$x = R \sin \theta \cos \phi \quad (4.178)$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \quad (4.179)$$

$$z = R \cos \theta \quad (4.180)$$

$$(4.181)$$

In loc de coordonatele (ϕ, θ) pentru a identifica punctele de pe suprafata hypersferei, putem folosi coordonatele (r, ϕ) , unde

$$r = R \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.182)$$

Coordonata r este distanta de la originea sistemul (x, y, z) la proiectia punctului P pe spatiul 2 dimensional (x, y) .

Distanta infinitesimala dintre doua puncte *de pe suprafata sferei* este:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.183)$$

si ea se poate calcula in coordonatele (ϕ, θ) :

$$dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.184)$$

Daca in sa folosim in loc de θ coordonata r , putem arata folosind 4.182 ca

$$dl^2 = \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 \phi^2 \quad (4.185)$$

O modalitate mai laborioasa de a verifica ca relatia 4.176 este o hypersfera consta in a calcula curbura spatiului, precum in ??, utilizind contractia tensorului Ricci. Am obtine atunci o valoare constanta $R_c = -6/R^2$ in toate punctele de pe hypersfera. Aceasta analiza ne-ar ajuta insa sa identificam un alt spatiu izotrop si omogen care este curb. Astfel, matematic numai, daca am utiliza o raza imaginara a hypersferei iR , am obtine prin calculele ?? un spatiu de curbura deasemena constanta, si anume $R_c = 6/R^2$. Este interesant ca acesta nu se mai poate "cufunda" intr-un spatiu 4-dimensional euclidian, ci intr-un spatiu 4-dimensional minkovskian [?]! (E intr-adevar interesant, pot trage consecinte de aici? speculatii?) Cum in relatia 4.176apara numai patratul R^2 , acesta va fi un numar real. Putem atunci scrie metrica a celor doua spatii curbe izotrope si omogene pe care le-am gasit sub forma:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2/R^2} + r^2(\phi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.186)$$

Aici R ia numai valori reale pozitive, iar k poate fi 1 sau -1 , determinind dupa cum am mentionat un spatiu de curbura $-6/R^2$ sau $6/R^2$. De fapt, daca primim metrica de mai sus, vedem ca valoarea $k = 0$ conduce la spatiul euclidian.

In discutiile precedente am vazut ca datorita izotropiei si omogenitatii, se poote alege un sistem de coordonate a timpului care sa intre separat in metrica. In plus, permitem spatiu-timpului astfel construit sa evolueze in timp, ceea ce inseamna ca raza hypersferei de exemplu, poate varia $R = R(t)$:

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2/R(t)^2} + r^2(\phi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.187)$$

Daca facem schimbarea de coordonate $\sigma = r/R$, putem scrie forma generala a metricii unui spatiu timp curb, omogen si izotrop, care evolueaza in timp:

$$ds^2 = dt^2 + R(t)^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2(\phi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.188)$$

unde $k = -1, 0, 1$ determina cele trei tipuri de universuri. Forma de mai sus se numeste metrica lui Robertson si Walker.

4.8.2 Ecuatia lui Friedmann

Metrica 4.188 ne spune cum un univers omogen si izotrop poate exista, dar nu si cum evolueaza. Pentru a calcula evolutia lui, adica functia $R[t]$, avem nevoie de ecuatiile lui Einstein 4.63, care trebuie indeplinite in orice moment. (DAR ecuatiile geodezice? Sie ele trebuie indeplinite... Vezi ce se intimpla! Sunt satisfacute automat! vezi pag.148 Kenyon. Mentioneaza).

Pentru aceasta, consideram ca universul nostru este umplut uniform cu praf stela de densitate ρ , si atunci tensorul energie-impuls este, intr-o prima aproximatie, dat de 4. Daca consideram ca viteza prafului stelar este mult mai mica decit viteza luminii, putem atunci scrie numai componenta tensorului care e diferita de zero:

$$T_{00} = \rho c^2 \quad (4.189)$$

Acum trebuie sa calculam tensorii Ricci de curbura din metrica 4.188. Printr-un calcul direct, se poate arata ca singurele componente diferite de zero ale lui sunt:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R} \quad R_{11} = \frac{F}{1 - k\sigma^2} \quad (4.190)$$

$$R_{22} = F\sigma^2 \quad R_{33} = F\sigma^2 \sin^2 \theta \quad (4.191)$$

unde

$$F = 2k + \frac{1}{c^2} R\ddot{R} + \frac{2}{c^2} \dot{R}^2 \quad (4.192)$$

Calculind si curbura spatiu-timpului data de contractia tensorului Ricci, avem:

$$R_c = -6 \left(\frac{k}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2 c^2} \right) \quad (4.193)$$

Cu ajutorul formulei ?? obtinem tensorii lui Einstein care sunt diferiti de zero:

$$G_{00} = \frac{3\dot{R}}{R^2 c^2} + \frac{3k}{R^2}; \quad G_{11} = \frac{k + 2R\ddot{R}/c^2 + \dot{R}^2/c^2}{1 - k\sigma^2} \quad (4.194)$$

$$G_{22} = ; \quad G_{33} = \quad (4.195)$$

Avind acum si tensorii Einstein, si tensorul energie-impuls 4.189, putem calcula conditiile 4.55 pe care universul astfel creat trebuie sa le indeplineasca. Observind ca practic doua dintre cele patru ecuatii se pot deduce din celelalte doua, le scriem doar pe primele doua:

$$\frac{3\dot{R}}{R^2} + \frac{3kc^2}{R^2} = 8\pi G\rho \quad (4.196)$$

$$k + 2R\frac{\ddot{R}}{c^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2} = 0 \quad (4.197)$$

Ecuatiile de mai sus trebuie sa le indeplineasca Universul astfel construit in orice moment t , si ele se numesc ecuatiile lui Friedmann.

O prima informatie se poate obtine daca se inmulteste prima ecuatie cu R^3 si se deriveaza in raport cu timpul. Se obtine atunci:

$$3\dot{R}c^2 \left(k + 2R\frac{\ddot{R}}{c^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2} \right) = \frac{d}{dt} (8\pi G\rho R^3) \quad (4.198)$$

Cum conform 4.196 partea din stinga a ecuatiei de mai sus este nula, obtinem ca si partea din dreapta este nula. Aceasta se rescrie ca:

$$\frac{d}{dt} (\rho \cdot 2\pi^2 R^3) = 0 \quad (4.199)$$

Pentru cazul $k = 1$ termenul din paranteza semnifica masa intregii materii de pe suprafata hypersferei (care este $V = 2\pi^2 R^3$), deci practic masa intregii materii din spatiul 3-dimensional curb. Relatia de mai sus semnifica in fapt conservarea masei, si ne da evolutia densitatii de masa $\rho = \rho(t)$

Ecuatia care ne da evolutia $R = R(t)$ se obtine inmultind prima ecuatie 4.196 cu 3, si extragind-o apoi pe cea de-a doua. Obtinem atunci:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G\rho R \quad (4.200)$$

Cum densitatea ρ variaza in timp in asa fel ecuatie 4.199 sa fie satisfacuta, scriem

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \quad (4.201)$$

unde ρ_0 si R_0^3 sunt valori corespunzatoare timpului nostru prezent. Inlocuind relatia de mai sus in 4.200, si derivind dupa timp, obtinem dupa citeva manipulari ecuatie:

$$\dot{R}^2 = c^2 \left(\frac{R_c}{R} - k \right) \quad (4.202)$$

unde

$$R_c = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^2} \quad (4.203)$$

Vedem ca, daca stim valorile R_0 , R_c si k la momentul prezent putem obtine din ecuatie de mai sus evolutia univ. In practica insa, aflarea acestor valori se dovedeste dificila.

4.8.3 Modele posibile de Univers

O consecinta imediata a ecuatiilor lui Friedmann este ca Universul poate fi dinamic. Un fapt nu prea surprinzator astazi, dar surprinzator la inceput de secol. Este si motivul pentru care Einstein a considerat la inceput de secol un model static, pe care l-a putut construi introducind o presiune in ecuatie tensorului energie-impuls. Cu toate acestea, acest termen nu s-a dovedit apoi popular, pentru ca s-a observat ulterior, prin faimoasele masuratori astronomice ale lui Hubble, ca *universul este expansiune*, deci dinamic. De aceea si noi am renuntat in a-l prezenta aici.

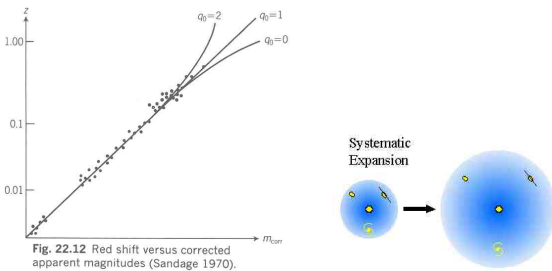


Figure 4.17: Constanta lui Hubble + balonul. q reprezinta o acceleratie. limiteaza si el niste valori.

Hubble a aratat nu numai ca universul este in expansiune, dar a si calculat rata acestei expansiuni. Aceast rata se defineste ca:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (4.204)$$

Pentru momentul actual (considerat $t = 0$), o putem calcula printr-o comparatie cu suprafata unui balon in expansiune (vezi Fig.??). Daca noi ne-am afla pe suprafata acestui balon, am vedea ca toate celelalte puncte se indeparteaza de noi cu viteza constanta, indiferent unde ne aflam. Vedem din Fig.?? ca putem scrie distanta dintre doua puncte ca $OA = R\alpha$. Cum

unghiul α se pastreaza constant, iar R creste, putem scrie $\dot{OA} = \dot{R}\alpha$, si deci

$$H = \frac{\dot{OA}}{OA} = \frac{v}{r} \quad (4.205)$$

unde v este viteza unei stele fata de noi, iar r este distanta pina la acea stea. Vitezele stelelor se estimeaza din efectul Doppler relativist (din teoria relativitatii restrinse!) pe care il da un corp in miscare, iar distanta pina la stea fie din cantitatea de lumina primita de la stea, fie cu alte metode.

La inceput Hubble a propus o valoare de 10 mai mica decit valoarea acceptata in prezent de aproximativ $H \approx 50-100 \text{ Km/s/M}$ lucru care a dus in confuzie comunitatea stiintifica de atunci, pentru ca modelul Fiedmann ar fi fost in contradictie cu timpul de viata ai stelelor (citeaza Einstein). Din fericire, noua valoare elimina aceasta problema, cel putin pentru moment.

Folosind valoare Hubble pentru momentul prezent $H = H(0)$, vedem ca putem scrie din prima ecuatie 4.196:

$$R_0^2 = \frac{1}{H^2} \frac{kc^2}{\rho_0/\rho_c - 1} \quad (4.206)$$

unde

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx (0.5 - 2) \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3 \quad (4.207)$$

Ecuatie 4.206 ne spune un lucru important: daca la momentul prezent $\rho_0 > \rho_c$, atunci $k > 0$ si deci musai $k = 1$. Daca $\rho_0 < \rho_c$ atunci $k = -1$, iar daca $\rho_0 = \rho_c$ atunci $k = 0$. Vedem deci ca marimea ρ_0 determina practic tipul de univers in care traim.

Cu toate acestea, valorile propuse de astronomi pentru ρ_0 se dovedesc a fi in apropierea lui ρ_c ! Spre exemplu ... presupune ca $\rho_0 = 0.1 - 1\rho_c$. (sa fac si eu o estimare, ca sa vada studentul ca nu e greu?) Modelul de univers in care traim nu este atunci clar.

Daca nu stim ρ_0 , putem insa cel putin utiliza ecuatie 4.206 pentru a afla R_0 ca functie de ρ_0 . Atunci putem rezolva ecuatie 4.203 pentru citeva valori selectate ale lui ρ_0 . Prezentam in Fig.?? astfel de rezultate, metionind ca, in functie de valoarea lui ρ_0/ρ_c a fost aleasa valoarea corespunzatoare pentru k .

Putem vedea astfel din Fig.?? cele doua tipuri de modele (exceptind cel euclidian) pe care Universul nostru le poate avea. Ambele solutii prezinta faptul remarcabil ca Universul evolueaza de la un moment initial (numit Big-Bang) cind raza acestuia era nula. In functie de valoarea lui ρ_0 el evolueaza diferit: pentru $\rho_0 > \rho_c$ colapseaza si pentru $\rho_0 < \rho_c$ se maresc la infinit.

Desigur ca acest moment originar al Universului a captat imaginatia oamenilor. Din Fig.?? vedem ca el a avut loc aproximativ citeva zeci de miliarde de ani pentru densitati de materie nu prea mari decit ρ_c . Aceast virsta a Universului corespunde foarte bine cu virsta presupusa a stelelor si planetelor care este tot de ordinul a miliarde de ani, si care a fost determinata prin alte metode.

Pe de alta parte vedem din ecuatie 4.206 ca, exceptind cazul cind $\rho_c < \rho_0 < 2\rho_c$, valoarea maxima luata de raza Universului este c/H , adica aproximativ 15 miliarde de ani lumina. Aceasta valoare este de asemenea de ordinul de marime a celor mai indepartate obiecte ceresti ce pot fi observate.

Sa pun si radiatia de microunde aici?

4.9 Exerciitii

4.10 Idei

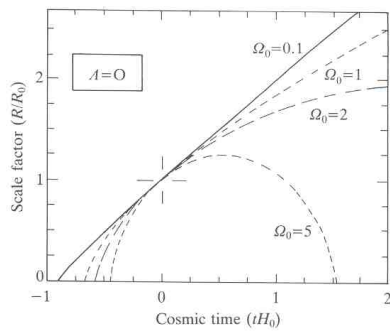


Fig. 11.6 The variation of the scale factor R/R_0 versus cosmic time tH_0 for various choices of the current density of matter ($\Lambda = 0$). A flat universe has $k = 0$ and correspondingly $\Omega_0 = 1$. A Universe with $k \leq 0$, i.e. $\Omega \leq 1.0$, will expand forever. (Adapted from Felten and Isaacman 1986; courtesy Professor Isaacman and the *Physical Review*, published by the American Physical Society.)

Figure 4.18: Posibilele evolutii ale Universului

Cel puțin o figura pe pagina!

pune dipolul care leviteaza. pune cum energia electrostatica a dipolului se transforma in masa.

ce fel de distributie sa aiba neutrinii in asa fel incit masa toala sa sa fie nula? daca speculatiile la masa electromagnetica sunt valabile, atunci neutrinel trebuie sa aiba masa! vezi articol krauss PRL.

arata poze de la masuratoarea originala a curburi razelor de lumina, sa se vada cit de neconcludente erau de fapt rezultatele (vezi reportaj Discovery!)

Interesant: red shift: pot da si aici explicatii clasice, cu atomul care-si modifica structura interna, etc. ca la TRR. Si atunci? Ce explic?

Problema: ecuatiile geodezice ?? se pot aplica si la lumina deci si la corp. Numai faptul ca schimb τ cu λ cica face diferenta. (uriasa, caci un corp cade, si lumina numai putin). Cit e de uriasa diferenta, *nu cumva lumina e o limita a unui corp care merge cu viteza foarte apropiata de viteza luminii?* Desi la metrica diferenta e mare, pentru ca apare 0 in loc de 1. Hm...

chestia care ma innebuneste: dupa un calcul extrem de complicat, pagini, tensori, etc., ajungi la un rezultat care se explica extrem de simplu. Vezi Friedmann, ecuatiile Heisenberg. Nu in-seamna atunci ca n-ai inteles nimic?, ca puteai explica ecuatiile generale pornind de la simplu...

sa pui si incercarea lui Gauss de masura curbura spatiului.

Foloseste si Mathematica la rezolvarea unor ecuatii!

In general, varietatea n-dimensionala R_n nu este euclidian, chiar daca este integrata intr-un sistem m-dimensional euclidian. In exemplul din dreapta, aceasta inseamna ca suprafata sferei nu poate fi facuta plana sub nici o forma. Ce este cu cilindrul, este euclidian sau nu?

tensorul da caracteristici ale suprafetei independente de sistemul ales. vectorul orineteaza spre un punct, tensorul da curbura, elipticitatea, etc.

cimpul lagrange trebuie sa fie real!

echivalenta inertiei si la energie!

formularea Hilbert - Amintire

foloseste urmatoarea noaaitie: daca termenii se aduna folosesti si semne grecesti. Daca nu se aduna, latine. Va fi mai simplu de citi.!

- se spune ca la fel ca la periheliul lui mercur o galaxie care se inviorteste ramine in ruma (sau inainte). corectia in sa nu s-a vazut, si s-a presupus ca exista o gaura neagra in centrul galaxiei, dar nici asta nu s-a observat. Hooft a remarcat atunci

in groningen ca ar trebui sa-l punem sub semnul intrbarii pe Einstein

echoivalenta se aplica si la enegie. explica cum verifici la tensori sus jos jos = jos

discuta la matematica diferenta dintre d si ∂ .

iese relatia masa-energie din TRG? ar trebui...

to imi pare ca e o redundantanta. ecuatiile cimpului descriu cum exista metrica tot de-o data, deci su cum s-au miscat deja corpurolie. De ce mai atunci nevoie de ecuatiile geodezice pentru miscare corpurilor? Aceasta problema o intilnesc si la deducerea periheliului lui mercur. Pot fie din schwarzschild, unde foloseste numai metrica (inverno) + ceas, sau din sectiunea miscare corpului de proba, unde am metrica+geodezica! Nu e adevrata. Inverno foloseste si el metrica + geodezica sa vada care e linia d eunivers cea mai scurta. Deci **din sectiunea miscarea corpului de proba trebuiesc iasa periheliul lui Mercur**, si inteles logic!

Kalutza-Klein 5 dimensiuni? unificare elth+grav.

radiatia de microunde 2.7K ca se potriveste cu cuantica.

stele neutronice, supernove, etc.

introdu o sectiune despre constanta cosmologica. Einstein a zis apoi ca e zero (ai o istorie frumoasa: "cea mai mare greseala a vietii mele" a zis el). In schimb azi se crede ca ea exista, pentru ca se pare ca Universul accelreaza un pic! Problema este ca teoria stringurilor prezice o valoare care este de 10^{120} (nu mai stiu exact) mai mare decit limita maxima din experiment! Numai daca este "ajustata" perfect (cred de supersimetrie, dar nu sunt sigur) cu altceva, atunci este scazuta. Cred ca ideea se referea la masa stringului care ar fi masa Planck. Supersimetria ar face ca masa particulelor sa fie mult mai mica ca masa stringului. In plus, constanta cosmologica are de-a face si cu gaurile negre. Verifica ultimele rezultate pe acest subiect in revistele de stiinta.

ai pus o sectiune cu radiatia de microunde?

Michell: ideea ca lumina e prinsa pe o planeta si nu poate scapa (gaura neagra). megre argumentul lui pentru ca viteza de iesire nu depinde de masa obiectului! tot ceea ce presupunem este ca obiectul e atras gravitational. A avut mare noroc cu lumina, caci Maxwell nu ar fi zis asta!

gaura neagra hawking: cum adica fluctuatiile vidului scot 2 particule, una care cade in gaura alta in afara ei? Pai erau virtuale, deci nu indeplineau relatia masa-energie. Ori cum devin reale? Li autoajusteaza masa ori energia sa devina reale/?

temperatura gaurii negre este de o miliardime de K, deci nu poate fi observata in backgroundul de 2.7K.

EPR merge cu decoerenta cred. hawking zice ca introduce indeterminism cind cele doua particele se separa la marginea gaurii negre. nu stun de acord. este indeterminism pentru noi, nu pentru universul integ!

GPS (pentru satelit) are incorporata teoria relativitatii generalizate! Eroarea ar fi de citva metri in fiecare zi! (pentru ca timpul depinde de altitudine...)

materia ascunsa (dark matter) este 70

dark energy e si ea vreo 20dar tot asa, nu e sigur. e legat de Λ lui Einstein.

Contents

5	Mecanica cuantica	129
5.1	Cuanta	129
5.1.1	Radiatia corpului negru	129
5.1.2	Efectul fotoelectric	131
5.1.3	Spectrele atomului de Hidrogen	131
5.1.4	Modelul atomic al lui Bohr	132
5.2	Functia de unda a unui singur electron	133
5.2.1	Dualitatea unda-particula	133
5.2.2	Ecuatia lui Schrodinger	135
5.2.3	Mecanica clasica ca o aproximare	136
5.2.4	Colapsul functiei de unda	137
5.2.5	Impulsul electronului	138
5.2.6	Incertitudinea pozitie-impuls	139
5.2.7	Solutii invariante in timp	140
5.2.8	Oscilatorul armonic	140
5.2.9	Atomul de hidrogen	141
5.2.10	Ordonarea atomilor	142
5.3	Postulatele mecanicii cuantice	144
5.3.1	Starea cuantica	146
5.3.2	Principiul masuratorii	148
5.3.3	Evolutia starii cuantice	149
5.4	Sisteme multi-particula. Particule identice	150
5.5	Mecanica cuantica relativista pentru un electron	151
5.5.1	Ecuatia lui Dirac	151
5.5.2	Spinul electronului	153
5.5.3	Antiparticule	155
5.6	Cuantificarea luminii. Fotonii	156
5.6.1	Oscilatiile transversale	156
5.6.2	Moduri de vibratie in cavitatea rezonanta (quantization cavity)	157
5.6.3	Cuantificare modurilor de vibratie	158
5.6.4	Fotonii	159
5.6.5	Putine aspecte experimentale despre lumina	160
5.7	Aspecte mai recente ale mecanicii cuantice	161
5.7.1	Recapitulare privind masuratoarea	161
5.7.2	Decoerenta	162
5.7.3	Constiinta si mecanica cuantica. Exemplu de decoerenta	164
5.7.4	Calculatoare cuantice	167
5.7.5	Citeva vorbe despre variabilele ascunse	169
5.7.6	EPR paradox	170
5.7.7	Bell non-locality: variabile ascunse si localitate	172
5.7.8	Teleportarea cuantica	173
5.8	Exercitii	175
5.9	Idei	175

Chapter 5

Mecanica cuantica

5.1 Cuanta

Calea istorica pe care se dezvoltă ideile fizice este un rezultat în mare parte aleatoriu, dat de dat de inteligența și profunzimea anumitor cercetători. Desigur că, la sfârșit, aceleași legi fizice se vor descoperi, indiferent cine și ce descoperă. Cu toate acestea, este un anume farmec în a urmări această istorie a apariției ideilor, ... De aceea, vom urmări și noi pe cit se poate, reducând aproape la minim, apariția cuantei în lumea clasică a fizicii.

5.1.1 Radiatia corpului negru

Faptul că lumina ce vine de la Soare este compusă din mai multe culori a fost demonstrat cu succes de către Newton prin experimentele sale cu prisma (vezi Fig.5.1). Plasând o prisma în drumul unei singure raze de lumina, fiecare culoare componentă va urma alt drum și, dacă proiectăm toate culorile astfel separate pe un ecran, obținem spectrul acelei raze de lumina.

În 1859 Gustav Kirchhoff era preocupat de prezenta unor anumite linii întinse în spectrul luminii de la Soare, lucru pe care îl vom discuta și noi, însă într-o secțiune ulterioară. În încercarea sa de a înțelege aceste linii întinse, Kirchhoff a considerat absorbția și emisia de lumina a corpurilor încălzite în general. Faptul că Soarele fierbinte, sau focul, emite lumina, ne este cunoscut și nouă. În plus, putem observa că orice obiect încălzit se înroșește și deci emite lumina. Pare să existe astfel o relație intrinsecă între temperatura unui corp și cantitatea de lumina emisă. Aceasta relație a căutat-o Kirchhoff.

Într-o primă instanță, ar parea imposibil să găsim o cit de mică înțelegere asupra emisie luminoasă a unui corp încălzit dacă nu avem cunoștința despre mecanismul intrinsec care duce la această emisie. De aceea Kirchhoff a considerat o cavitate închisă (vezi Fig.5.1) făcută dintr-un material oarecare, care are numai o gaură mică pe unde putem măsura lumina care iese (ce este considerată neglijabilă). Încălzim cu totul această cavitate, pînă cînd toți peretii au o temperatură uniformă în interior. Datorită temperaturii ridicate, ei încep să emită lumina în interior. Lumina este emisă și absorbită de pereti în continuu, și noi așteptăm pînă cînd sistemul ajunge echilibru. La echilibru, cîta lumina este emisă de pereti, atîta este și absorbită.

Pentru a cuantifica discuția de mai sus, să presupunem că intensitatea luminii care are lungimea de undă între λ și $\lambda + d\lambda$ prezenta în cavitate la echilibru este $K(\lambda, T)d\lambda$. Aceasta se definește ca fiind cantitatea de *energie* care străbate unitatea de arie în unitatea de timp. Cu alte cuvinte, putem spune că

toată energia luminoasă care *cade* pe o suprafață dA în timpul dt este:

$$I_l = dA \cdot dt \cdot \int K(\lambda, T)d\lambda \quad (5.1)$$

Pentru a nu crea confuzie, insistăm asupra faptului că mărimea de mai sus, deși se referă la lumina, reprezintă o energie, și deci are unitatea de măsură Joule în S.I. Faptul că lumina transportă energie a fost discutat în secțiunea ??.

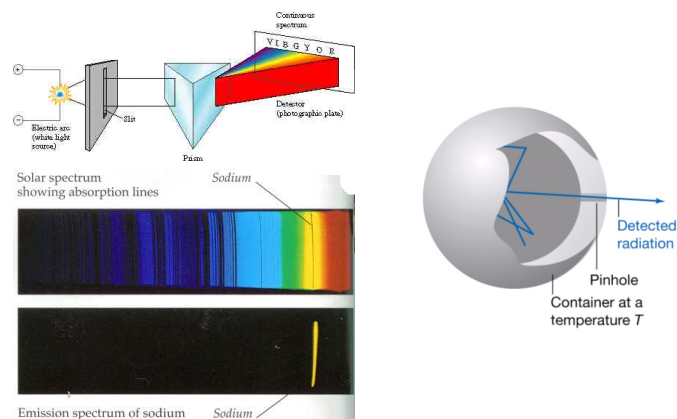


Figure 5.1: Corpul negru

Nu toată energie de mai sus este absorbită în mod normal de suprafață, o parte este și reflectată. Fiecare culoare este absorbită conform unei funcții $a(\lambda, T)$, care este o funcție de proprietățile materialului. Un caz special este *corpul negru*, înțelegând prin aceasta că corpul absoarbe toată radiația incidentă pe el $a(\lambda, T) = 1$, și nu reflectă nimic (precum corpurile negre nu reflectă lumina incidentă pe ele, și deci absorb toată radiația incidentă). Energia absorbită de o suprafață internă dA a corpului în timpul dt este

$$I_a = dA \cdot dt \cdot \int a(\lambda, T)K(\lambda, T)d\lambda \quad (5.2)$$

Datorită faptului că corpul este încălzit, printr-un mecanism necunoscut, suprafața internă emite și ea constant lumina, a cărei energie poate fi cuantificată prin $e(\lambda, T)d\lambda$. Astfel, energia emisă de suprafața dA în timpul dt este:

$$I_e = dA \cdot dt \cdot \int e(\lambda, T)d\lambda \quad (5.3)$$

În cazul corpului negru, la echilibru, trebuie să avem $I_a = I_e$. Dacă presupunem acum că fiecare culoare (deci λ) se comportă *independent*, avem atunci că intensitatea luminii din interiorul corpului negru la echilibru este dată de:

$$K(\lambda, T) = \frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} \quad (5.4)$$

Rezultatul nu pare extraordinar, pentru ca pentru a calcula radiatia emisa in conditiile de mai sus (foarte particulare) avem inca nevoie sa cunoastem emisivitatea $e(\lambda, T)$ si absorbtia $a(\lambda, T)$, care sunt functii de material! Cu toate acestea, print-un argument foarte ingenios, Kirchhoff a aratat ca $e(\lambda, T)/a(\lambda, T)$ pentru toate corpurile este o functie unica si universala! Sa urmarim acest argument.

Astfel, sa presupunem ca aducem in contact doua corpuri oarecare, aflate la aceeasi temperatura. Contactul in realizam prin doua gauri largite, precum in Fig.???. Daca cele doua corpuri au rapoarte $e(\lambda, T)/a(\lambda, T)$ diferite, atunci si intensitatea radiatiei din interiorul lor este diferita. Ca atare, desi radiatia $K(\lambda, T)$ va circula prin gaurile de contact in cele doua directii, intr-o anumita directie va curge mai multa energie de in directia opusa. Rezultatul imediat este ca un corp din cele doua se va incalzi (cel cu raport emisivitate-absorbtie mai mica) si celalalt raci. Dar aceasta contrazice principiile termodinamicii, care spun ca doua corpuri aflate la aceeasi temperatura nu-si pot transmite energie unul altuia in asa fel incit temperatura unuia dintre corpuri sa creasca in urma contactului si a altuia sa scada! Ca atare, toate corpurile trebuie sa aiba aceleasi rapoarte $e(\lambda, T)/a(\lambda, T)$, in asa fel incit radiatia interna din ele are aceeasi intensitate $K(\lambda, T)$!

Argumentul lui Kirchhoff scoate in evidenta o metoda destul de genrala de investigare, si anume utilizarea unor legi fizice *presupuse* generale, in cazul nostru cele ale termodinamicii. Insistam aici pe utilizarea cuvintului "*presupuse*", si nu "*sigur*". Astfel, putem considera ca o lege fizica este *sigur* valabila atunci cind cunoastem in detaliu mecanismele care duc la ea. Putem astfel spune ca *sigur* ca o sirma nu se rupe usor pentru ca exista forte de atractie intre partii componente. La vremea lui Kirchhoff insa nu se cunostea mecanismul intrinsec care conduce la emisia de lumina a unui corp incalzit. Ca atare Kirchhoff a *presupus* ca mecanismul este pe deplin termodinamic (asa cum termodinamica era studiata pe timpul lui), si deci legile termodinamicii trebuie sa se aplice. Din fericire, desi emisia unui corp incalzit este determinata de legi cuantice necunoscute de Kirchhoff, acesta a avut "noroc", pentru ca legile termodinamicii se aplica si la fenomenele cuantice! Pentru alte fenomene insa legile termodinamicii poate ca nu se mai aplica.

Functia 5.4 ne da nu numai intensitatea energiei din interiorul cavitatii, ci un lucru mult mai important si universal: raportul dintre emisivitatea si absorbtia oricarui corp. Desi raportul acesta este universal, functia 5.4 este cunoscuta ca emisia corpului negru, pentru ca intr-adevar se reduce la emisivitate cind absorbtia este $a(\lambda, T) = 1$.

Conform discutiei de mai sus, raportul 5.4 poate fi masurata direct daca se face o gaura mica in interiorul oricarui corp incalzit la echilibru si se masoara intensitatea luminii care iese prin gaura. O astfel de masuratoare a fost efectuata prima oara de Otto Lummer si Pringsheim in 1900. In Fig.5.2 prezentam insa rezultatele obtinute de Schwarzer si Korper in ..., precum si echipamentul folosit. Din Fig.5.2 vedem ca acesta este aproape de a fi un corp inchis incalzit uniform precum cel prezentat in Fig.5.1. Un fir electric incalzeste interiorul. Peretii dubli sunt ceramici (?) pentru a uniformiza temperatura in interior. Intensitatea *masurata* $K(\lambda, T)$ a luminii (deci energie din intervalul λ si $\lambda + d\lambda$ ce iese prin gaura impartita la unitatea de arie si unitatea de timp) este prezentata in Fig.5.2 pentru diverse temperaturi. Faptul ca aceleasi curbe se obtin si pentru alte corpuri este verificat practic indirect prin comparatia cu masuratori precedente efectuate de alti cercetatori.

Daca am putea deduce formele functiei universale $K(\lambda, T)$ prezentate in Fig.5.2, desigur ca am intelege mai profund si

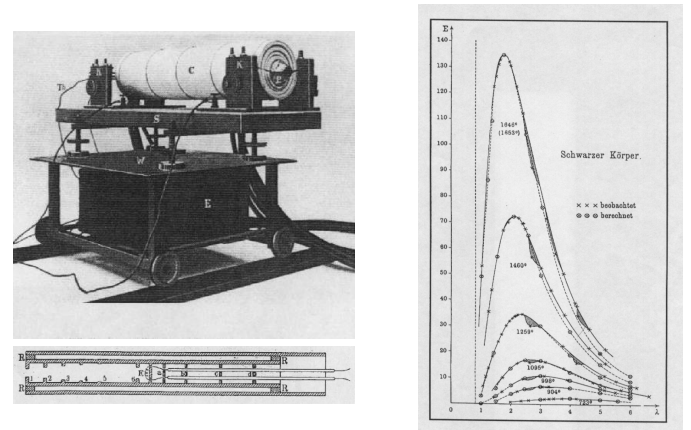


Figure 5.2: Masuratori originale + fit schwarzer-korper; tradu textul german: <http://www-semic.physik.hu-berlin.de/PhysikIV.W02/images/hohlraumstrahlung.htm>; vezi ce e cu dipurile: arata ca sunt intr-adevar "pe bune"

mecanismele de emisie si absorbtie ale luminii. Acest lucru a fost incercat, in parte cu success, de fizicienii Boltzmann si Wien, care au folosit termodinamica clasica, asa cum era gindita de Kirchhoff insusi. Cu toate acestea, nici unul dintre ei nu a reusit sa gaseasca o explicatie satisfacatoare pentru intreaga curba prezentata in Fig.5.2.

Acest lucru a fost realizat prima oara de Max Plank, prin ani de incercari succesive. Istoria scucesului acestuia este oarecum invaluita in mister, caci el a prezentat o singura formula care fiteaza *toate* datele din Fig.5.2, fara insa o deductie riguroasa atasata ei! Formula matematica este:

$$K(\lambda, T) = \frac{b}{\lambda^5} \frac{1}{e^{a/\lambda T} - 1} \quad (5.5)$$

Din fitarea curbelor din Fig.5.2, obtinem valorile constantelor a si b : $a =$ si $b =$. Pentru a intelege insa cum de raportul emisivitate/absorbtie 5.4 al oricarui corp poate avea forma de mai sus, Plank a trebuit sa mai caute aproape o decada (berkeley zice 2 saptamini! pag 27.) pentru a afla raspunsul! Si nu este de mirare, caci el ascunde cheia noii teorii, si anume *cuanta de energie*. Pentru inceput, Plank a observat, prin comparatie cu modelele precedente, ca desi constantele a si b par aleatoare intre ele exista relatia $a/b = 8\pi k$, unde k este constanta lui Boltzmann. Definind

$$h = a/8\pi c = \quad (5.6)$$

putem scrie atunci relatia de mai sus ca

$$K(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k T} - 1} \quad (5.7)$$

Plank aplicat apoi legile termodinamicii clasice considerind ca suprafata corpului care emite este o colectie de oscilatori cu o singura modificare fata de cei clasici: energia acestora ia *numai valori discrete*, in pasi de $\Delta E = h\nu$. Presupunerea aceasta iese complet din cadrul fizicii clasice, unde un oscilator poate avea orice energie. Cu toate acestea, folosind presupunerea de mai sus, Plank a dedus exact formula 5.7.

Cantitatea de energie care poate fi cedata sau primita de un oscilator cu frecventa ν este deci un numar intreg de o valoare fundamentala, numita *cuanta de energie*:

$$\Delta E = h\nu \quad (5.8)$$

Constanta h , a carei valoare a fost astfel calculata pentru prima oara de Plack cu ajutorul 5.6 se numeste *constanta lui Plank*. Ea aduce cu sine nasterea *mechanicii cuantice*.

O deductie a relatiei 5.7 o vom face si noi (?-sau nu?) intr-un capitol viitor. Aici ne vom margini sa mentionam numai doua aspecte. Primul este ca unitatea de masura a lui h este cea a actiunii. Valoarea lui h este astfel infinitesimal de mica fata de valorile mecanice obisnuite ale actiunii, si este deci remarcabil cum ea rezulta din niste masuratori macroscopice. In al doilea rind, anticipind, sa metionam ca oscilatorii presupusi de Plack, responsabili de emisia de lumina, nu sunt dati de structura interna a atomilor asa cum poate ne-am fi asteptat. In schimb, ei sunt dati de oscilatiile atomilor (priviti ca intregi) in jurul pozitiiilor lor de echilibru! Cu alte cuvinte, nu structura interna a atomilor (pe care n-o cunoastem in detaliu) a relevat forma cuantica a energiei, ci mai degraba miscarea lor de oscilatie care ne-am fi asteptat sa fie pe deplin clasica!

5.1.2 Efectul fotoelectric

O confirmare aproape imediata (dupa 5 ani) a justetei alegerii constantei lui Plank a venit odata cu explicarea efectului fotoelectric, pentru care Einstein a si primit premiul Nobel. Astazi pare curios ca premiul Nobel a fost acordat lui Einstein nu pentru contributia sa covirsitoare in cele doua teorii ale relativitatii, ci pentru o contributie in mecanica cuantica!

Einstein a fost constient de observatiile experimentale efectuate de catre P.Lenard si altii la trecerea dintre secole. Mai precis, acestia au studiat comportarea energiei cinetice a electronilor emisa de o suprafata metalica cind aceasta este luminata (vezi Fig.??). Faptul ca se elimina electroni intr-o astfel de situatie nu este surprinzator. Clasic, ne putem imagina cum lumina incidenta creeaza un cimp electric oscilatoriu $E(t)$. Acesta pune in miscare electronii prin intermediul fortei Lorentz $F = eE(t)$. In cea mai mare parte electronii vor ramine in metal dar, daca forta $F(t)$ este suficient de mare, o parte ei pot fi "smulsi" din cristal. Ne asteptam deci ca din ce in ce mai multi electroni sa fie eliberati din metal la amplitudini din ce in ce mai mari. In plus, si energia cinetica a electronilor emisi ar trebui sa creasca cind crestem amplitudinea cimpului incident, pentru ca electronii sunt "smulsi" din material din ce in ce mai violent.

Cu toate acestea, experimentatorii au observat un lucru foarte ciudat: *energia cinetica maxima a electronilor emisi nu depinde de amplitudinea radiatiei incidente!* Ea depinde inasa de frecventa luminii incidente intr-un mod simplu, si anume linear. In plus, sub o anumita frecventa a luminii, electronii nu mai sunt "smulsi" din metal indiferent ce amplitudine incidenta a luminii am alege!

Einstein a "vazut" imediat explicatia in presupunerea lui Plank, pe care inasa a generalizat-o mai intii. Atfel, a zis el, sa presupunem ca nu numai oscilatorii de pe peretii corpului negru au energia in bucatele de cuanta fundamentala $\Delta E = h\nu$, dar si lumina pe care o genereaza. Cu alte cuvinte, *sa presupunem ca lumina isi cedeaza si primește energia de asemenea numai in pasi de $\Delta E = h\nu$* , unde de data aceasta ν este frecventa luminii. Generalizarea la lumina nu a fost inclusa in modelul lui Plank, si ea este deci presupunerea lui Einstein. Cu aceasta, a

zis Einstein, putem explica efectele experimentale de mai sus in felul urmatoar.

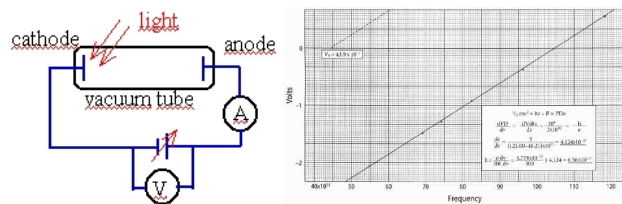


Figure 5.3: Masuratori originale, din PRB 7, 335 (1916)

Electronii pot primi de la lumina numai un singura cuanta de energie "luminoasa" $h\nu$, nu mai multe, pe care o pot "folosi". *Energia cinetica a electronilor "smulsi" deci nu poate depasi atunci aceasta valoare, indiferent de amplitudinea cimpului.* Mai mult, ea va fi mai mica, pentru ca electronii trebuie sa cedeze la smulgere o parte din energia primita pentru a iesi din material. Daca notam aceasta energie cu W , putem scrie:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + W \quad (5.9)$$

unde $E_c = mv^2/2$ este energia cinetica a electronilor emisi. In plus relatia de mai sus ne da imediat dependentia liniara cu frecventa energiei electronilor emisi: $E_c = h\nu - W$. De fapt, efectuind un astfel de experiment, constanta h se poate verifica direct cu ecuatia de mai, si compara cu valoarea propusa de Plank.

Primul experiment care a verificat cu succes presupunerea lui Einstein a fost cel efectuat de Milikan in 1916. In Fig.?? prezentam principiul acesteia si rezultatele obtinute. Astfel, lumina incidenta cade pe un catod si emite electronii. Electronii cu energia cea mai mare vor iesi din metal, si vor merge la colector, creind un curent electric care poate fi masurat. Daca inasa aplicam un potential electric V invers pe pe colector, putem incetini aceasta miscare. In fapt, ea se opreste cind electronii abia ajuns sa atinga colectorul, si deci energia cinteza a lor este egalata de energia potentiala pe care trebuie sa o invinga: $E_c = eV$. Milikan a masurat pentru fiecare frecventa a luminii incidente tensiunea electrica care trebuie aplicata pentru a opri curentul electric generat. Dependentia acestei tensiuni de frecventa trebuie sa fie deci:

$$V = \frac{E_c}{e} = \frac{h\nu - W}{e} = \left(\frac{h}{e}\right)\nu - \frac{W}{e} \quad (5.10)$$

Daca presupunem ca energia de "smulgere" W nu depinde de caracteristicile luminii, ceea ce este cazul, vedem ca dependentia obtinuta trebuie sa fie liniara. In plus, din aceste masuratori putem verifica si raportul h/e . Este inutil de adaugat ca masuratorile lui Milikan, (prezentate in Fig.??) au confirmat intr-un mod spectaculos nu numai relatia liniara de mai sus, dar si valoarea raportului h/e .

Practic, dintr-o masuratoare de cu totul alta natura de cele ale corpului negru, se obtine aceeasi valoare a constantei lui Plank! Acestea confirma nu numai valoarea lui h , dar si faptul ca si energia luminii este cuantificata, nu numai energia oscilatiei atomilor ca la corpul negru. Nu ne mai ramine decit sa vedem ce se intimpla cu atomii inasi.

5.1.3 Spectrele atomului de Hidrogen

Spectroscopia (masurarea spectrului luminii) s-a dovedit cruciala in inceputurile mecanicii cuantice nu numai prin masurarea spectrului corpului negru, dar si prin cel al gazelor. Am mentionat in inceput studiul lui Kirchhoff asupra spectrului luminii venit de la Soare (vezi Fig.??). Acesta prezinta linii negre in dreptul anumitor frecvente, pe care Kirchhoff le-a interpretat corect ca lumina absorbita la suprafata Soarelui, si care astfel nu mai ajunge la noi (de aceea liniile apar negre). Frecventa acestor linii identifica atomii substantelor care absorb lumina. Kirchhoff a putut verifica acest lucru direct trecind lumina de la Soare printr-o flama de Sodiu, si vazind ca liniile devin si mai intunecate. Atomi de Sodiu trebuie sa existe deci si pe suprafata Soarelui, a concluzionat corect Kirchhoff.

Aceasta metoda spectroscopica de studiu al gazelor era cunoscuta de mai inainte, incepind cu studiile lui Joseph von Fraunhofer de la inceputul secolului XIX. Este desigur cit se poate surprizator ca atomii absorb numai anumite frecvente de lumina, si ca acestea identifica precis tipul de atomi. In practica insa este extrem de util. De aceea inca de la inceput s-a urmarit crearea unor tabele cu frecventele luminii absorbite de diversi atomi.

Surpriza a devenit si mai mare cind a fost studiata emisia luminii de diverse gaze. In acest caz, gazul incalzit (de exemplu) emite lumina de asemenea numai cu anumite frecvente discrete. Unele din acestea sunt identice cu frecventele din spectrul de absorbtie, dar exista si altele care apar in plus (vezi Fig.5.4).

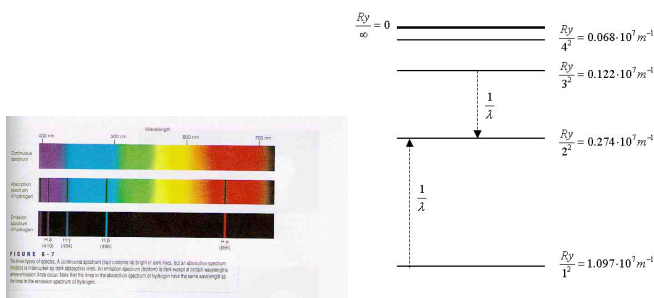


Figure 5.4: Spectrul hydrogen

Surprinzator insa, in cazul hidrogenului, *toate aceste frecvente au putut fi fitate de o singura formula*, (numita Rydberg-Ritz):

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.11)$$

unde $n < m$ sunt numere naturale, iar constanta lui Rydberg are valoarea $Ry = 1.09737 \cdot 10^7 m^{-1}$. Dintre cei care au contribuit la descoperirea formulei de mai sus mentionam aici numai pe Johann Balmer, un profesor de liceu din Elvetia, cu un doctorat insa in matematica. Desi ramas la catedra, el a urmarit dezvoltarile din stiinta, prezicind formula de mai sus pentru $n = 2$.

In final, la sugestia lui Ritz, putem construi o diagrama foarte simpla (vezi Fig.5.4) pentru a vizualiza spectrele de absorbtie. Astfel, putem presupune ca in interiorul atomului exista niste nivele date de Ry/n^2 , iar absorbita sau emisia luminii are loc numai pentru acele lungimi de unda pentru care diferenta dintre nivele este tocmai $1/\lambda$.

5.1.4 Modelul atomic al lui Bohr

In sectiunile precedente am adunat trei elemente fundamentale pentru intelegerea structurii atomilor:

1. Energiile oscilatiilor armonice de la suprafata oricarui corp incalzit nu pot lua orice valoare, ci numai anumite valori discrete. In cazul particular al acestor oscilatii, energiile discrete se construiesc in pasi de $\Delta E = h\nu$, unde ν este frecventa oscilatiei (radiatia corpului negru).
2. Lumina cedeaza fiecarui electron numai un singur pachet de energie $h\nu$, unde ν este frecventa luminii (efectul fotoelectric).
3. Inversul lungimii de unda emise sau absorbite de atomi se poate calcula cu 5.11, ca diferenta intre doua nivele.

Cum din cel de-al doilea rezultat vedem ca pachetul de energie al luminii $h\nu$ joaca un rol important, il putem calcula pentru lumina emisa si absorbita de atomul de hidrogen cu ajutorul relatiei 5.11:

$$h\nu = h \cdot c \cdot Ry \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.12)$$

Din primul rezultat putem presupune ca si starile de energie ale atomului sunt discrete. Acest rezultat se potriveste de minune cu relatia de mai sus, pentru ca atunci putem interpreta nivele din Fig.5.4 (multiplicate cu hc) ca nivele de energie ale atomului de hidrogen! Diferenta de energie dintre doua nivele este, conform relatiei de mai sus, exact energia cuantei de lumina absorbita sau emisa! Remarcabil, nu? Energiile discrete ale atomului de hidrogen trebuie sa fie atunci:

$$E_n = \frac{h \cdot c \cdot Ry}{n^2} \quad (5.13)$$

Dar cum ar putea fi produse ele? Pentru acesta trebuie sa ne intoarcem la sectiunea ??, unde structura interna "clasica" a atomului de hidrogen a fost prezentata. In esenta, ea consta dintr-un electron incarcat negativ, si un nucleu incarcat pozitiv de dimensiuni mai mici de $10^{-15}m$. Electronul se roteste in jurul protonului la o distanta mult mai mare, de aproximativ $10^{-10}m$, precum o planeta in sistemul solar.

Modelul precedent satisface o parte din rezultatele experimentale, si noi nu am insistat pe problemele lui. Una dintre acestea, des denumita, este "caderea" electronului pe nucleu. Intr-adevar, spre deosebire de planete, electronul este incarcat cu sarcina electrica. Ori sarcinile electrice in miscari accelerate emit energie electromagnetica (vezi ??), numita radiatie de sincrotron. Electronul in rotatie este si el intr-o miscare accelerata, chiar daca centripeta, intelegind prin aceasta ca viteza lui in modul este constanta, dar directia vitezei se schimba continuu. Ca atare si el ar trebui sa emita radiatie electromagnetica. Un calcul estimativ arata ca electronul isi va pierde astfel energia sa cinetica in $10^{-10}s$, si deci va "cadea" imediat pe nucleu, precum ar cadea planetele direct pe Soare daca ar fi oprite din miscarea lor.

In plus, modelul acesta clasic ar putea explica greu discretizarea nivelelor de energie ale atomilor, precum a fost dedusa mai de vreme, dar aceasta este o problema de principiu pentru orice model clasic. Intr-adevar, intr-un sistem clasic variabilele de miscare iau orice valori intr-un mod continuu, si numai un sistem complex, plin de rezonante, ar putea poate explica intr-o prima aproximatie prezenta unor nivele discrete.

Cu toate acestea, modelul atomic clasic al lui Rutherford, nu trebuie ignorat, ci trebuie combinat cu rezultatele de mai sus pentru a obtine un alt model mai potrivit, precum a facut Bohr. Acesta si-a pus problema sub forma aproximativa: "ce principiu de constructie al atomului de hidrogen pot gasi, care sa conduca la forma 5.13 a energiilor discrete din atom"? O intrebare la care am putea raspunde si noi acum, incercind sa

"descifram" relatia 5.13. O sa prezentam insa in schimb direct rezultatul pe care Bohr l-a gasit: *Electronul nu se misca pe orice orbita circulara, ci numai pentru acele orbite circulare pentru care momentul sau cinetic este dat de:*

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad (5.14)$$

unde n este un numar natural. Este usor acum sa verificam ca aceste orbite au exact energia 5.13. Astfel, egalitatea fortei de atractie centripete si a celei electrostatice (vezi ??) avem:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (5.15)$$

de unde, utilizind si 5.14, avem:

$$v_n = \frac{1}{m v_n r} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{n} \frac{2\pi e^2}{4\pi\epsilon_0 h} = \alpha \frac{c}{n} \quad (5.16)$$

unde $\alpha = e^2/2\epsilon_0 hc = 1/137$ este o constanta adimensionala care se numeste *constanta structurii fine*. Vedem astfel ca viteza electronului este aproape de 100 de ori mai mica decit viteza luminii (ce probleme am fi avut daca era mai mare!).

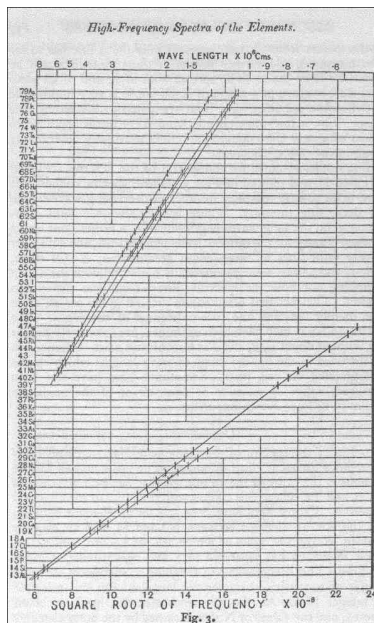


Figure 5.5: Moseley

Raza orbitei se calculeaza din 5.14 si relatia precedenta ca:

$$r_n = \frac{nh}{2\pi m v_n} = n^2 \frac{h}{2\pi m c \alpha} \quad (5.17)$$

Pentru $n = 1$ obtinem o raza de rotatie $r_1 = a_0 \approx 0.51 \cdot 10^{-10} m$, denumita raza lui Bohr, si care este intr-adevar de ordinul de marime al distantei dintre electron si atom, precum am mentionat la inceputul sectiunii! Acum putem estima si energia electronului pe aceste orbite discrete ca fiind suma dintre energia potentiala si cea cinetica:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{m\alpha^2 c^2}{2} \quad (5.18)$$

Aceste nivele de energie sunt identice cu cele presupuse in formula 5.13. In plus putem verifica imediat ca ambii termeni au aceeasi valoare a constantei de proportionalitate, daca calculam din relatia de mai sus constanta Rydberg

$$Ry = \frac{m\alpha^2 c^2}{2h} = 1.09737 \cdot 10^7 m^{-1} \quad (5.19)$$

si o comparam cu valoarea aflata experimental din spectre, si prezentata in sectiuneas precedenta: ele sunt identice! Practic, modelul lui Bohr prezice *complet* spectrele de emisie si absorbtie ale atomului de hidrogen. In plus ne da si marimea corecta a distantei dintre electron si nucleu.

MOSELEY GRAFIC

Desigur insa ca preferarea numai a anumitor orbite de catre electron fata de cele posibile este un lucru neobisnuit. In plus, trebuie sa postulam si ca atunci cind electronul se afla pe orbita el nu radiaza, cum am mentionat. In ciuda acestor supozitii, trebuie sa ne aflam pe calea cea buna, caci nu este de ici de colo ca un model asa simplu sa prezica complet spectrele atomului de hidrogen!

5.2 Functia de unda a unui singur electron

5.2.1 Dualitatea unda-particula

Propunerii lui Einstein a fost ca lumina este emisa si absorbita in cuante foarte mici de energie $h\nu$. O consecinta mai putin evidenta esta ca am putea privi atunci lumina compusa din particule a caror energie este $h\nu$, numite *fotoni*. Lor le-am putea atribui o viteza constanta c , si chiar o masa si impuls. Astfel, folosind $E = mc^2 = h\nu$ calculam masa fotonilor ca $m = h\nu/c^2$ si impulsul ca $p = mc = h\nu/c$.

O teorie corpusculara a luminii a fost propusa si de Newton, insa eliminata de succesele opticii si electromagnetismului. Propunerea precedenta va avea desigur aceleasi probleme, pe care insa le vom rezolva mai tirziu, odata cu constructia principiilor mecanicii cuantice. Pentru moment, ca si in exemplele precedente, ne marginim a mentiona ca o asemenea presupunere nu este asa extravaganta pe cit pare. In fond, fotonii ar fi foarte mici. Pentru culoarea rosie de exemplu ($\lambda = \dots$) ei ar avea o masa de $m = \dots$ si o energie de $E = \dots$, si deci ar fi greu de detectat.

Curios insa, un detector care ar putea "vedea" fotonii individual este chiar ochiul uman! Atsfel un receptor molecular de pe retina este capabil sa detecteze un singur foton, si sa trimita semnalul de confirmare la creier. Semnalul insa nu este lasat sa ajunga la creier de anumite filtre, decit daca aproximativ 10 fotoni diferiti sunt detectati in mai putin de 100ms [?]! Creierul si-a creat astfel propria cenzura a informatiei, probabil pentru a elimina "puricii" pe care le-am vedea odata cu venirea fiecarui foton. Fotoni individuali au fost insa detectati, asa cum vedem din Figura ?? (pune), prin micorarea la minim a intensitatii luminii care formeaza o imagine de difractie.

Observind ca o unda luminoasa este formata din particule numite fotoni, Louis de Broglie a presupus, pentru frumusetea reciprocitatii, ca si electronii care sunt particule sunt descrisi de niste unde. Si acesta este o propunere indrazneata dar, la cite am suportat pina acum, o vom analiza si pe aceasta!

Lungimea de unda pe care un electron ar avea in miscare s-ar calcula, la sugestia lui de Broglie (si pentru a pastra frumusetea fizicii), asemanator fotonilor. Astfel, fotonii au lungimea de

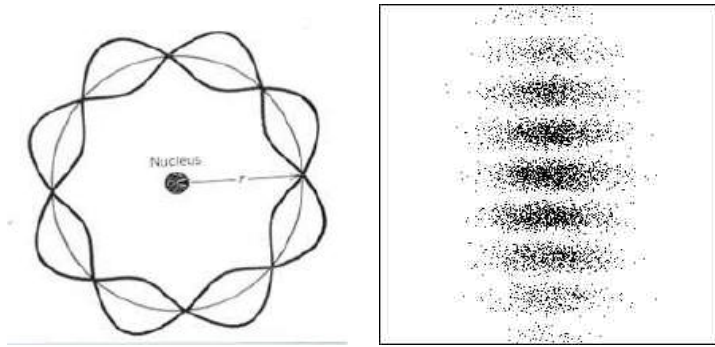


Figure 5.6: De Broglie + difractia in care se vad fotonii individuali

unda $\lambda = c/\nu = h/p$ conform dicutiilor precedente. Atunci si unda atasat acestor *electroni* ar trebui sa aiba lungimea de unda:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.20)$$

Daca viteza este zero, lungimea de unda tinde la infinit! Pentru electronii din modelul lui Bohr, utilizind relatia 5.16, ea ar avea insa valoarea:

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{h}{mv_n} = n \frac{h}{mca} \quad (5.21)$$

Utilizind insa 5.17 pentru r_n , vedem ca putem scrie relatia de mai sus ca:

$$2\pi r_n = n\lambda_n \quad (5.22)$$

Relatia de mai sus ne spune ca lungimea de unda a electronului este cuprinsa de un numar intreg de ori in perimetrul cercului. Ea este astfel aproape identica cu sistemul unei coarde rezonante, unde lungimea de unda a vibratiei este cuprinsa de un numar intreg de ori in distanta dintre capetele fixe. Practic, de Broglie ne ofera o justificare fizica a alegerii particulare a orbitelor lui Bohr: se "autoalege" acele orbite ale electronului pentru care unda atasata electronului este rezonanta in orbita.

In virtutea explicatiei modelului lui Bohr, propunerea in-drazenata ca electronul are o unda atasata prinde radacini. Experimentul cel mai potrivit pentru a o verifica in mod direct, este unul de difractie. In Figura 5.7 prezentam un astfel de experiment si rezultatul sau.

Dupa cum putem observa, electronii sunt trimisi prin doua orificii, aflate la o distanta comparabila cu lungimea de unda (in acest caz $d = \dots$) spre un ecran fotografic. Daca electronii ar fi numai particule ne-am astepta ca ei sa se adune *numai* in doua locuri, corespunzatoare celor doua orificii. Daca ei sunt unde, atunci pot interfera precum lumina (vezi sectiunea ??) si forma o figura de difractie. Perioada figurii de difractie ar trebui sa fie data, conform relatiei ??, de $i = Ld/\lambda$.

Rezultatul experimental prezentat in Figura 5.8, confirma ce-al de-al doilea caz. Perioada figurii de difractie este si ea $i = Ld/\lambda$, dupa cum ne-am asteptat. In plus, pe figura putem vedea si detectia electronilor individuali, precum la fotoni. Aceasta

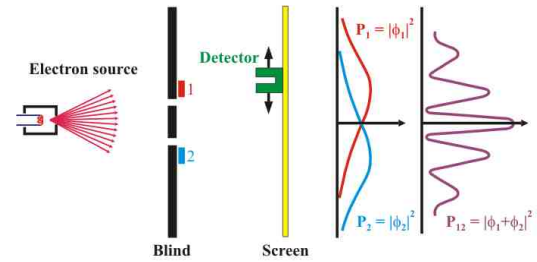


Figure 5.7: Difractia electronilor. Set-up

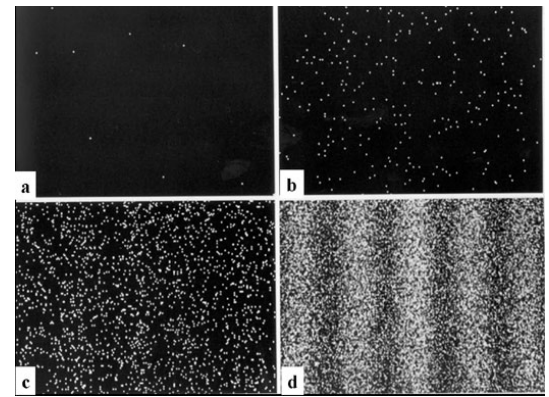


Figure 5.8: Difractia electronilor -data, din <http://www.hqrd.hitachi.co.jp/em/doubleslit-f2.cfm>. Spune cum se "construieste"

insemna ca *electronii isi pastreaza caracterul de particula, dar se comporta in plus si ca o unda!*

O unda este descrisa in primul rind de o functie $\psi(\mathbf{r}, t)$ care ia niste valori *in tot spatiul*. Aceste valori pot fi numere reale, complexe, sau chiar vectori (precum este cimpul electromagnetic $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$). Alegerea lui de Broglie (el? verifica) s-a oprit insa asupra unei functii complexe.

Figura 5.8 ne sugereaza deja o interpretare acestei functii. In aceasta poza vedem ca electronii se vad la inceput individual, deci ei sunt detectati individual de ecran. Pe masura insa ce asteptam mai mult, ei au o *probabilitate* mai mare de a cadea in acele portiuni de linii "albe" din Fig.5.8. Ori aceste portiuni se calculeaza intr-adevar cu ajutorul teoriei difractiei, considerind ca unda atasata electronului are tocmai lungimea de unda 5.20. In cazul teoriei undelor clasice, intensitatea acestor linii este $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, unde $\psi(\mathbf{r}, t)$ este functia de unda dintr-un punct anumit de pe ecran. In cazul luminii (vezi Fig.5.6), intensitatea acestor "linii" este data de $E(\mathbf{r}, t)^2$.

O presupunere simpla este atunci ca electronii au o *probabilitate* de a fi detectati pe ecran care este proportionala cu aceasta intensitate, de aceea ei tind sa fie detectati mai mult in aceste locuri. Pentru a fi mai precisi, putem spune ca probabilitatea ca un electron sa fie detectat in volumul $d^3\mathbf{r}$ din jurul pozitiei $\mathbf{r}$ este:

$$dp = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (5.23)$$

Supozitia de mai sus ne rezolva in buna masura a doua parte a intrebării pusa la inceputul sectiunii: trebuie sa calculam unda $\psi(\mathbf{r}, t)$ atasata electronului in tot spatiul, si apoi utilizam ecuatia de mai sus pentru a vedea unde-l putem "vedea"! In

plus, daca discutam despre un singur foton, trebuie sa-l gasim in tot spatiul pe undeva, asa ca o alegere corespunzatoare a functiei sale de unda trebuie sa indeplineasca:

$$\int_{\text{tot spatiul}} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = 1 \quad (5.24)$$

Ecuatia unei unui singur electron trebuie deci sa indeplineasca relatia de mai sus in orice moment!

Sa consideram atunci o posibila forma a unei electronului in miscare libera, si anume o unda plana (vezi Fig.??). Sa incercam sa construim deci unda plana de Broglie asociata unui electron care se deplaseaza in directia x cu impulsul p si energia E , intr-o regiune in care nu se afla nici un fel de cimpuri. Asa cum am vazut in sectiunea ??, o forma generala a unei plane complexe este:

$$\psi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (5.25)$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ si $\omega = 2\pi/T$. Ea reprezinta practic o unda complexa de amplitudine A constanta, dar a carei faza variaza in timp cu perioada T si in spatiu cu perioada λ .

Unda de mai sus nu poate fi o unda pentru un singur electron in toata directia x , de la $-\infty$ la $+\infty$, caci atunci amplitudinea A ar trebui sa fie zero, conform 5.23. Ne putem imagina insa axa x ca perimetrul orbitei lui Bohr, si atunci lungimea ei este finita. Tinind cont si ca pe acest perimetru potentialul electric V este constant, formula de mai sus poate fi modificata pentru a reprezenta intr-o oarecare aproximatie unda rezonanta din Fig.5.6. Tot astfel, pentru experimentele de difractie, unde distanta pina la ecran este finita, putem incerca sa folosim relatia de mai sus. Iar matematic, putem descompune deasemenea diferite forme de unda in unde plane.

Valorile lui λ si T trebuie sa le luam in functie de proprietatile electronului. Pentru λ alegerea naturala este $\lambda = h/p$, adica propunerea lui de Broglie 5.20. Ce valoare sa alegem insa pentru T ? Pentru lumina el este $T = 1/\nu$, unde frecventa fotonului este legata de energia sa cu relatia $E = h\nu$. Pentru a pastra frumusetea dualismului, prin comparatie cu lumina, am putea atunci alege $T = 1/\nu = h/E$, ceea ce conduce la $\omega = 2\pi E/h$. Aceasta se rescrie ca:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{unde} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (5.26)$$

Alegerea de mai sus pare ca are o semnificatie fizica foarte profunda. Ea ne spune ca functia de unda atasata electronului liber (si deci nu electronul insusi, care are dimensiuni mult mai mici!) este descrisa de o vibratie a carei frecventa temporala este data direct de energia electronului impartita la $\hbar$. O legatura surprinzatoare daca privim electronul numai ca o particula, dar nu si daca acceptam caracterul ondulatoriu al unei sale atasate. Prin inlocuirea relatiilor precedente, forma unei plane de Broglie a unui electron devine:

$$\psi(x, t) = A \exp \left[i \frac{px - Et}{\hbar} \right] \quad (5.27)$$

Relatia de mai sus reprezinta unde de Broglie pentru miscarea electronului *liber*. Energia electronului liber este data in cazul clasic de:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (5.28)$$

Intr-o prima instanta, ne-am astepta sa recunoastem viteza electronului v in viteza de faza a unei $v_f = \lambda/T$. O scurta

inspectie a relatiilor de mai sus ne releva ca cele doua viteze sunt diferite. Acest lucru nu este surprinzator, si este cunoscut in teoria mecanica a undelor (vezi ??) in cazul *pachetelor de unde*

$$\psi(x, t) = A \exp[i(k(\omega)x - \omega t)] \quad (5.29)$$

unde se arata ca o viteza mai adecvata este *viteza de grup*, definita ca

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk(\omega)}{d\omega} \quad (5.30)$$

Viteza de grup v_g descrie corect viteza de transmitere a energiei, si deci a semnalului. Prin comparatie cu 5.28, vedem ca de fapt interpretarea unei electronului ca un *pachet de unde* este mai potrivita, pentru si in cazul nostru impulsul $p = p(E)$ depinde de energia E . Putem calcula atunci viteza de grup ca:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dp(E)}{dE} = \frac{d}{dE} (\sqrt{2mE}) = \frac{2m}{p} = \frac{1}{v} \quad (5.31)$$

Si deci viteza electronului este intr-adevar egala cu viteza de grup a pachetului de unde.

Aici nu e clar de ce ar fi nevoie de un pachet de unde, cind electronul liber poate fi descris de o singura unda plana. Elaboreaza.

5.2.2 Ecuatia lui Schrodinger

De Broglie a dat argumente convingatoare asupra comportarii microscopice a electronilor. Ar parea insa ca mai este un drum lung pina cind, punind cap la cap "bucatele" din sectiunile precedente, am putea construi o teorie consistenta a comportarii microscopice a electronilor si undelor, care sa explice si "golurile" pe care le-am lasat in urma, si miscarea electronilor in cimpuri aleatorii.

Nu suntem insa asa de departate, si asta datorita lui Schrodinger care, in 1926, a gasit o ecuatie generala a undelor ce descrie complet miscarea unui singur electron intr-o foarte buna aproximatie. O sa incercam si noi aici sa "ghicim" aceasta ecuatie, ceea ce va face probabil sa spuneti: "nu este asa de greu, din moment ce rezultatul se stie deja"! Perfect adevarat!

Ceea ce cautam noi este ecuatia unei atasate unui electron ce se misca intr-un potential aleator $V(x)$. Am fi tentati intr-o prima faza sa inlocuim pur si simplu energia totala a electronului

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (5.32)$$

in forma de unda 5.27, sau eventual impulsul. Cu toate acestea, aceasta incercare *nu ar fi de succes*, pentru ca amplitudinea A a electronului ar ramine aceeaasi, si deci si probabilitatea $p(x) \sim A^2$ de a fi gasit in oricare punct x ar fi constanta. Ori noi stim ca in cazul clasic, daca energia E a electronului nu depaseste potentialul $V(x)$ intr-o locatie, electronul nu va ajunge in acea locatie, pentru ca nu are suficienta energie.

Daca insa am considera *potentialul constant in tot spatiul* $V(x) = V$, electronul ar putea inca fi descris de o unda plana. Motivul este ca, in fizica clasica, miscarea unui corp de energie E in potentialul constant V este *identica* cu miscarea altui corp de energie $E - V$ intr-o zona lipsita de potential. Astfel, ambele corpuri vor avea un impuls dat de:

$$\frac{p^2}{2m} = E - V \quad (5.33)$$

De aceea, miscarea electronului intr-o zona de potential constant V este inca descrisa de unda plana 5.27:

$$\psi(x, t) = A \exp \left[i \frac{\sqrt{2m(E - V)}x - Et}{\hbar} \right] \quad (5.34)$$

Se vede ca in relatia de mai am preferat sa renuntam la p si sa pastram E . Motivul este ca energia totala electronului E este o marime ce se mentine constanta pentru orice traiectorie in miscarea clasica, si deci o marime mai "fundamentala" decit impulsul p care se modifica.

Relatia precedenta este inca o solutie banuita, si nu o ecuatie pentru miscarea electronului. Ecuatia pe care o cautam trebuie sa fie satisfacuta de solutia de mai sus si, pe deasupra, nu trebuie sa contina energia E in ea (pentru ca E identifica deja solutia). De aceea, putem incerca sa scapam de E diferentiind o data in raport cu timpul x , si de doua ori in raport cu distanta x (pentru ca E apare sub radical):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2} \psi \quad (5.36)$$

$$(5.37)$$

Inlocuind termenul din dreapta primei ecuatie in cea de-a doua ecuatie, obtinem:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \quad (5.38)$$

Pentru cazul cind potentialul V nu este constant, ci variaza in spatiu $V = V(x)$, am putea generaliza ecuatia de mai sus sub forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad (5.39)$$

care se numeste ecuatia lui Schrodinger pentru miscarea unui electron intr-un cimp de potential oarecare $V(x)$, si care se vedea deduce intr-adevar corecta.

Cum am mentionat inainte, discutia de mai sus nu reprezinta in nici un caz o deducere riguroasa a ecuatiei lui Schrodinger. Nici nu stim daca o asemenea "deducere" poate fi obtinuta. Dar ea reprezinta foarte bine un mod de "ghicire" a unor relatii mai profunde ale materiei, mod folosit foarte des de oamenii de stiinta. Astfel, ei construiesc niste ecuatii care sunt valabile numai pe niste cazuri particulare, si pe care le *propun* apoi generale. Experimentele sau deductiile ulterioare le dau dreptate sau le infirma ipotezele. Aceasta fel de "ghicire" este acceptat destul de des in lumea stiintifica, si de multe ori indreptatit. Astfel, in special ecuatiile ce descriu comportarea materiei intr-un nivel si mai profund, necunoscut, nu au cum sa fie "deduse" riguros din cunostintele anterioare.

Nu orice solutie a ecuatiei lui Schrodinger 5.39 satisface automat ecuatia de probabilitate 5.24. Cu toate acestea, daca discutam despre miscarea unui singur electron, noi suntem interesati numai de acele solutii care satisfac ecuatia de probabilitate 5.24 in orice moment de timp, pentru ca stim sigur ca electronul se afla "pe undeva".

Ce este insa foarte important, este ca daca la momentul initial functia de unda $\psi(x, t_0)$ satisface 5.24 (adica este normalizata), atunci evolutia ei conform ecuatiei lui Schrodinger 5.39 ne asigura ca aceeasi relatie de probabilitate 5.24 este satisfacuta la orice moment ulterior! Cu alte cuvinte, nu trebuie sa ne

ingrijoreze normalizarea la momentele ulterioare, ea va fi satisfacuta automat. Pentru a verifica acest lucru, sa calculam derivata functiei prezente in 5.24:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2 dx \quad (5.40)$$

Intr-o prima faza, putem scrie:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\psi \psi^*) = \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.41)$$

Acum *presupunem* ca potentialul $V(x)$ este real. Aceasta presupunere este in acord cu toate modele clasice, cel putin electromagnetism sau gravitatie. Folosind ecuatia lui Schrodinger si conjugata ei, se poate verifica ca relatia de mai sus se rescrie ca:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \quad (5.42)$$

Inlocuind in partea din dreapta ecuatiei 5.43, putem scrie succesiv:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dx = \quad (5.43)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (5.44)$$

Ultima valoare este insa nula daca presupunem ca functia de unda $\psi(x, t)$ si variatia ei tinde la 0 catre infinit. Ambele conditii sunt insa viabile din punct de vedere practic (discutie?). In consecinta, deoarece derivata integralei 5.43 este nula, integrala inasi isi va pastra valoarea initiala, si de aceea daca functia de unda satisface ecuatia de probabilitate 5.24 la momentul initial, o va satisface la orice moment ulterior.

Sa sumarizam cele citeva lucruri importante ce le-am am obtinut pina acum:

1. Miscarea unui electron intr-un potential aleatoriu $V(\mathbf{r})$ este data de functia de unda $\psi(\mathbf{r}, t)$ care satisface in orice moment ecuatia lui Schrodinger 5.39
2. Probabilitatea ca un electron sa fie gasit intr-o pozitie $\mathbf{r}$ este data de 5.23, si deci este proportionala cu amplitudinea functiei de unda $p \sim |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$
3. Daca functia de unda este normalizata la momentul initial conform 5.24, atunci ecuatia lui Schrodinger 5.39 ne asigura ca ea ramane normalizata la orice moment ulterior.

Practic, relatiile de mai sus ne dau comportarea completa a unui electron in miscare in cimpul de potential real $V(x)$.

5.2.3 Mecanica clasica ca o aproximare

Mai degraba, sa vorbim despre un *impuls mediu* $\langle p \rangle(t)$ care se modifica in timp. In comportarea clasica (pe care trebuie sa o vedem cind efectele cuantice se neglijeaza!), impulsul mediu il putem determina din variatia pozitiei medii $\langle x \rangle(t)$:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle \quad (5.45)$$

Pe de alta parte pozitia medie a electronului se calculeaza insumind pozitiiile cu probabilitatile respective de localizare. In termeni matematici, avem:

$$\langle x \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx \quad (5.46)$$

Sa derivam atunci relatia de mai sus:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int \psi^* x \psi dx = \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} x \psi + \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx \quad (5.47)$$

Prin inlocuirea relatiei lui Schrodinger 5.39 si conjugata ei, obtinem:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= -\frac{i\hbar}{2m} \int \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} x \psi - \psi^* x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx = -\frac{i\hbar}{2m} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} x \psi - \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \psi \right) dx - \frac{i\hbar}{m} \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (5.48)$$

Intrucit in prima integrala apare un singur termen derivat dupa x , putem aplica regula ??, si deci valoarea integralei este data de diferenta termenului din paranteze la $-\infty$ si ∞ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx = F(\infty, t) - F(-\infty, t) \quad (5.50)$$

$$F(x, t) = \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} x \psi - \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \psi \right) \quad (5.51)$$

Putem insa consideram din nou ca termenul $F(x, t)$ se anuleaza la infinit $F(\infty, t) = F(-\infty, t) = 0$, pe baza unei discutii matematice referitoare la comportarea functiei de unda la distante mari, desi nu vom prezenta aici aceasta analiza. Ca atare si integrala continind acest termen dispare, si raminem cu solutia impulsului mediu:

$$\langle p \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) dx \quad (5.52)$$

Forma de mai sus nu ne da deci toate rezultatele pe care un experimentalist le-ar putea obtine pentru impulsul electronului, ci numai valoarea acestuia *medie* pe care acesta o va observa. In cazul electronului liber descris de unda de Broglie 5.27, se poate verifica direct cu ajutorul relatiei de mai sus ca impulsul mediu $\langle p \rangle = p$ este identic cu impulsul *exact* p al particulei.

ARAT CA:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = - \langle \frac{dV}{dx} \rangle \quad (5.53)$$

Sa presupunem acum ca energia potentiala nu variaza foarte puternic, si ca electronul este localizat intr-o regiune nu prea mare (EXPLICA, FIGURA). Atunci putem presupune o variatie liniara a potentialului in acea regiune: $V(x) \simeq a + bx$. Ca atare, $dV/dx = b$ in aceasta regiune si:

$$\langle \frac{dV}{dx} \rangle \simeq \int \psi^*(x) b \psi(x) dx = b = \frac{dV}{dx}|_{\langle x \rangle} \quad (5.54)$$

si deci

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = - \frac{dV}{dx}|_{\langle x \rangle} \quad (5.55)$$

si deci miscarea are loc conform ecuatiei clasice ??.

5.2.4 Colapsul functiei de unda

RESCRIE. E DIN DOUA BUCATI AICI

Astfel, avem putine motive sa credem ca functia de unda Schrodinger evolueaza numai conform ecuatiei 5.39. De ce? Pentru ca atunci ne-am astepta ca intreg universul sa fie plin de functii de unda ale electronilor, si electronii sa fie "cind ici, cind colea", in functie de cum ar fi probabilitatea functiei ψ . Practic, daca ne-am imagina ca lumea ar fi luminata de un stroboscop (pentru a vedea unde se afla electronii la momente regulate de timp), am vedea la un moment televizorul pe masa din sufragerie, in altul pe masa din bucatarie, iar in altul chiar pe o planeta indepartata pe cananul de fotbal al unui meci intergalactic! Ca sa numai vorbesc ca il putem vedea pentru moment si bucati...

Aceasta extensie macroscopica este cea care i-a ingrijorat pe experimentalisti, si preocupat pe teoreticieni. Lumea noastra pare ca este stabila si continua, nu determinata de probabilitati. Putem vedea aici o "rupere" intre functionarea sistemelor microscopice si cele macroscopice.

La astfel de probleme, prima solutie care s-a dat a fost urmatoarea: daca gasim electronul la timpul t_1 intr-o pozitie anume $\mathbf{r}_1$, atunci functia lui de unda trebuie sa se modifice in urma acelei masuratori, si ea devina:

$$\psi(\mathbf{r}, t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (5.56)$$

Ea ne spune ca evolutia ulterioara a functiei de unda dupa momentul t_1 , trebuie sa aiba loc pornind de la forma de mai sus la momentul t_1 . Cum si de ce se intimpla, nu stim, au zis fizicienii, dar aceasta solutie rezolva in mod sigur problema universului nostru macroscopic stabil. Astfel, la fiecare "flash" al stroboscopului noi "masuram" lumea, si functia de unda se schimba, pornind de la o valoare care ne descrie ce am vazut. Daca "flashul" urmator nu este la un moment de timp prea indepartat, atunci functia de unda nu are cind sa evolueze prea mult conform ecuatiei lui Schrodinger 5.39, si deci o sa vedem cam acelasi lucru. Din fericire, televizorul va ramine in sufragerie.

Vedem ca acum masuratoarea joaca un rol extrem de important in evolutia functiei de unda. Fenomenul descris de ecuatia 5.56 se numeste proiectia vectorului de unda, si va fi descris pe larg in sectiunea ???. Vom vedea atunci ca desi el satisface pe deplin experimentatorii (pentru ca le prezice rezultatele) interpretarea a ceea ce se intimpla de fapt lasa loc la multe discutii.

A DOUA BUCATA

In final, toate aceste succese ale ecuatiei lui Schrodinger i-au convins definitiv pe fizicieni de valabilitatea acesteia. In principiu, sistemul construit de Schrodinger pare complet. Cu ajutorul ecuatiei lui Schrodinger 5.39 putem calcula functiile de unda stationare, si evolutia unei functii de unda oarecare. In plus, daca un experimentator ne cere probabilitatea de a masura anumite caracteristici ale unei particule o singura data, noi putem construi functii adecvate, si calcula aceste probabilitati din functia de unda, precum am aratat in sectiunea ?? in cazul impulsului.

Daca ecuatia lui Schrodinger este buna numai intr-o anumita aproximatie, nu este nici o problema, o putem generaliza, sau modifica. La nevoie, putem introduce termeni noi, fara insa sa modificam principiile fundamentale de constructie ale acestui sistem. De aceea, concluzionind, daca vrem sa prezicem rezultatele *unei singure masuratori* ulterioare, pornind de la functia de unda initiala, principiile precedente sunt suficiente.

Cum am mentionat in sectiunea ??, problemele apar cind discutam despre *masuratori succesive*. Astfel, daca am masura electronul de mai multe ori succesiv, dar am lasa functia de unda nemodificata, ne asteptam sa gasim electronul la un moment intr-un loc, la un alt moment intr-un cu totul alt loc, si tot asa, "cind ici, cind colea". Lumea macroscopica ne-ar apare atunci ca un stroboscop in care la fiecare flash vom

avea o cu totul alta imagine. Cum am discutat in sectiunea ?? trebuie ca ceva sa se intimple cu functia de unda in timpul masuratorii, pentru a o readuce la o forma data de ultima masuratoare.

Problema filozofica a acestor masuratori succesive i-a preocupat adinc pe fondatorii mecanii cuantice. Desi multe solutii au fost propuse, in final una larg acceptata a ajuns sa fie predata pe bancile scolii. Aceasta a ramas insa dificila, si greu de "digerat", dar despre ea vom vorbi in sectiunile urmatoare.

5.2.5 Impulsul electronului

Interpretarea probabilistica a functiei de unda ridica in principiu doua intrebari fundamentale. Prima este: "Ce se intimpla de fapt cu electronul prpriu-zis atunci cind nu-l masor?". Desigur ca functia lui de unda evolueaza coonform cu ecuatia lui Scrodinger, 5.39, dar ce face *electronul insusi*? Remarcam insa ca intrebarea ramine la nivel filozofic pentru ca, indiferent ce face el, la orice moment ulterior eu ii pot calcula probabilitatea de aparitie in orice punct din spatiu. Ca atare, orice ar face intre timp, rezultatul final este acelasi, si deci poate la fel de bine sa nu ma intereseze ce face.

Cu toate acestea, daca insistam in aceasta intrebare, am putea propune doua raspunsuri. Primul este ca electronul se misca intotdeauna intr-un mod clasic, dar in plus fata de potentialele macroscopice presupuse de noi (electrostatic, etc.), exista si un *potential microscopic* variabil, care il face sa circule foarte repede si aleatoriu intre diferitele puncte din spatiu. Ca atare, el se misca in mod continuu in multe puncte din spatiu si eu, daca masor intr-un punct anume, am probabilitatea sa-l gasesc sa nu. Aceasta probabilitate ar fi data atunci de functia de unda. Daca insa il gasesc intr-un loc, inseamna ca el a fost si inainte acolo, si eu doar am dat de el. Solutia de mai sus a fost sustinuta in special de Bohm in anii '50, incurajat in mod special de Einstein (?) si are avantajul ca ea ramine *complet* in cadrul fizicii clasice. Ecuatia care ar descrie aceasta miscare va fi prezentata in sectiunea urmatoare.

Cea de-a doua solutie la intrebarea de mai sus ar fi ca electronul nu trebuie conceput ca o bila intre momentul initial si cel ulterior al masuratorii. In afara de faptul ca el exista intre cele doua momente, electronul nu ar avea nici o proprietate (forma, dimensiune, etc.), exceptind desigur functia lui de unda care evolueaza. Cind vrem sa vedem daca ele este un loc, ne "uitam" acolo. Daca nu e, bine mersi. Daca este, atunci el cade practic "ca din cer" in acea pozitie. In aceasta interpretare electronul nu se afla acolo inainte, si de fapt nici nu putem discuta despre "el" inainte de a ne uita.

Intr-o analiza mai profunda si mai completa a mecanicii cuantice, pe care o vom efectua in sectiunea ??, vom vedea surprizator ca cea de-a doua interpretare se apropie mai mult de adevar. Aici insa, in limitele constructiei ecuatiei lui Scrodinger din sectiunea precedenta, mentionam ca ambele interpretari pot fi valabile si ca, mai mult, *nici una dintre ele nu ne intereseaza*. Ceea ce ne intereseaza pentru o descriere completa (?) a fenomenelor este doar posibilul rezultat al masuratorii pozitiei.

A doua intrabare fundamentala se deduce direct din prima. Daca vrem sa masuram unde este electronul, functia de unda ne da direct aceasta probabilitate. Dar daca ne intereseaza altceva, impulsul, sau energia de exemplu? Intr-o prima instanta, acest lucru nu ar parea sa ne deranjeze. In fond, cind detectam electronul, noi de fapt obtinem o "urma" pe hirtia fotografica, ori pe detectorul de Siliciu, iar coordonatele spatiale ale acelei "urme" ne spun de fapt ca noi am masurat pozitia electronului.

Fizicienii experimentalisti au insa obiceiul sa masoare nu numai electronii insasi, ci si alte particule ale caror marimi pot fi corelate direct cu impulsul electronului (sau cu energia). Cu-luarea luminii emisa de un atom este un astfel de exemplu. Frecventa luminii ne da energia pe care o pierde electronul in miscarea sa. Stim atunci *sigur* cita energie a pierdut electronul (asumind conservarea de energie), fara sa fi detectat pe o placa fotografica electronul insusi. In acest fel putem afla si energia ulterioara a electronului daca stim energia initiala. Vedem astfel ca o probabilitate numai pentru pozitie nu satisface cerintele fizicienilor experimentatori. Ei ar vrea o probabilitate pentru *orice* marime atasata electronului, pentru a o utiliza indirect in experimentele lor.

EXEMPLU MASURA IMPULS

Am putea incerca sa calculam o probabilitate pentru impuls privind la fizica clasica, unde viteza se poate determina prin masurarea a doua pozitii succesive. Ne-am putea gindi sa vedem unde electronul nu numai la pozitia finala, dar si la una precedenta. Vedem insa ca "cadem" atunci intr-o problema foarte dificila, si anume cea a "masuratorii", discutata in sectiunea precedenta.

In plus, pe ne noi ne intereseaza numai rezultatele *unei singure masuratori*, desi aceasta nu este pozitia electronului, ci impulsul, sau energia, sau o alta caracteristica a lui, determinata practic indirect. Sa ne intorcem deci la interpretarea probabilistica, si sa renuntam a afla impulsul prin doua masuratori succesive.

SCOS TEXT. FA-I LEGATURA

Conform teoriei matematice a transformatelor Fourier, *orice* functie de unda $\psi(x, t)$ poate fi scrisa ca (zi ca e ca sa se pastreze unitatile de masura) suma de unde plane:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, t) e^{ipx/\hbar} dp \quad (5.57)$$

Ascrie ca se vede de mai sus ca functia de unda e o suma ponderata de unde plane, ficare unda plana descriind un electron de impuls p. Ponderea este A. E logic deci ca la sfirsit ponderea A sa fie interpretata ca probabilitate.

Pentru $A(p, t)$ vom avea atunci relatia:

$$A(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-ipx/\hbar} dx \quad (5.58)$$

Practic, stiind $\psi(x, t)$ putem afla $A(p, t)$ si stiind $A(p, t)$ putem afla $\psi(x, t)$. Ambele functii descriu deci miscarea electronului. Sa inlocuim acum $\psi(x, t)$ in relatia pentru impulsul mediu. Mai inti avem:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} A(p, t) \frac{-ip}{\hbar} e^{-ipx/\hbar} dp \quad (5.59)$$

si deci

$$\begin{aligned} -i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \int A^*(p', t) e^{ip'x/\hbar} dp' \int A(p, t) \frac{-ip}{\hbar} e^{-ipx/\hbar} dp = (5.60) \\ &= \int \int A^*(p', t) \frac{-ip}{\hbar} A(p, t) e^{-i(p-p')x/\hbar} dp' d\mathfrak{p}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Inlocuind in 5.52 si schimbind cu atentie ordinea integralaler, obtinem:

$$\langle p \rangle = \int \int A^*(p', t) \frac{-ip}{\hbar} A(p, t) \left[\int e^{-i(p-p')x/\hbar} dx \right] dp' d\mathfrak{p} \quad (5.62)$$

Cum din relatia ?? stim ca

$$\int e^{-i(p-p')x/\hbar} dx = \delta(p - p') \quad (5.63)$$

inlocuim in relatia precedenta si, eliminand una din integrale cu ajutorul functiei $\delta(p - p')$, avem in final (PIERDUT TERMINI):

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p |A(p, t)|^2 dp' \quad (5.64)$$

Relatia de mai sus ii multumeste desigur pe experimentalisti. Prin asemanare cu ??, ea *sugereaza* ca probabilitatea de a detecta impulsul p al particulei este proportionala cu $|A(p, t)|^2$. Practic, daca stim functia de unda, putem calcula transformata ei Fourier $A(p, t)$ cu ajutorul 5.58, si deci sti apoi probabilitatea de detectie a oricarui impuls p .

In plus, in cazul unei plane 5.27, aceasta probabilitate este infinita precis pentru impulsul p al unei plane, ceea ce inseamna ca unda plana descrie intr-un mod *ideal* o *particula care are sigur impulsul p* . Incidental, vedem ca nu putem spune nimic despre pozitia ei, pentru ca amplitudinea este constanta peste tot.

O sa incorporam sugestia precedenta intr-o formulare mai completa a teoriei cuantice. Pentru moment, este important sa realizam ca, daca adoptam sugestia precedenta in cadrul teoriei lui Schrodinger, aceasta este in stare sa *prezica probabilitatile si pentru ale caracteristici ale electronului* in fara de pozitie.

In afara de impuls, o alta proprietate importanta este energia particulei. In particular suntem interesati pentru sectiunea ce va urma de energia medie a electronului. Plecand de forma clasica 5.32, vedem ca aceasta se scrie:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + V(x) \quad (5.65)$$

Este important aici sa facem diferenta intre valoarea medie a patratului unei valori $\langle p^2 \rangle$ si patratul mediei valorii $\langle p \rangle^2$, care sunt in cele mai multe cazuri diferite!. Exemplul care ilustreaza cel mai bine aceasta caracteristica este un oscilator $z(t)$ aflat in origine. Astfel, pozitia lui medie este $\langle z \rangle = 0$, dar media patratului pozitiei $\langle z^2 \rangle$ este o valoare diferita de zero, din moment ce toate patratele pozitiei posibile sunt fie zero fie mai mari ca zero!

Stiind acum ca probabilitatea ca electronul sa aiba impulsul p este data de $|A(p, t)|^2$, asa ca putem calcula media patratelor impulsurilor posibile ca:

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |A(p, t)|^2 dp' \quad (5.66)$$

Printr-un calcul aproape identic cu cel precedent (si pe care nu-l mai facem aici) se poate arata ca forma de mai sus, inlocuita in 5.65, conduce la:

$$\langle E \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) dx \quad (5.67)$$

Daca stim functia de unda $\psi(x, t)$, putem deci da experimentatorilor si valoarea medie a energiei pe care o vor masura!

5.2.6 Incertitudinea pozitie-impuls

Dupa cum am observat, functia de unda de Broglie 5.27 descrie un electron al carui impuls este in mod sigur p . Amplitudinea lui este insa constanta in tot spatiul, si de aceea, daca am incerca sa punem conditia de normalizare ?? am obtine $A = 0$, ceea ce inseamna ca un astfel de electron *nu exista practic* in realitate. Cu toate acestea, fara a insista asupra amplitudinii, putem interpreta functia 5.27 ca un electron care se poate afla oriunde in spatiu. Cu alte cuvinte, stim precis impulsul, dar avem o incertitudine infinita in pozitie.

Situatia perfect opusa este cind stim precis pozitia electronului. Atunci functia electronului este data de:

$$\psi(x) = C\delta(x - x_0) \quad (5.68)$$

Nici functia de mai sus nu exista practic in realitate, pentru ca ea este singulara pentru $x = x_0$. Cu toate acestea, asa cum am discutat in sectiunea ??, putem considera ca ea este o functia finita, cu alte cuvinte descrie electronul intr-o aproximatie cit de buna vrem noi. In acest caz insa, putem scrie

$$A(p) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} C\delta(x - x_0) e^{-ipx/\hbar} dx = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx_0/\hbar} \quad (5.69)$$

Cum $|A(p)|^2 = C/\sqrt{2\pi\hbar}$ este o constanta ce nu depinde de p , avem acum situatia ca impulsul poate lua orice valoare p .

Avem deci doua situatii: fie stim impulsul precis dar avem o incertitudine infinita in pozitie, fie viceversa.

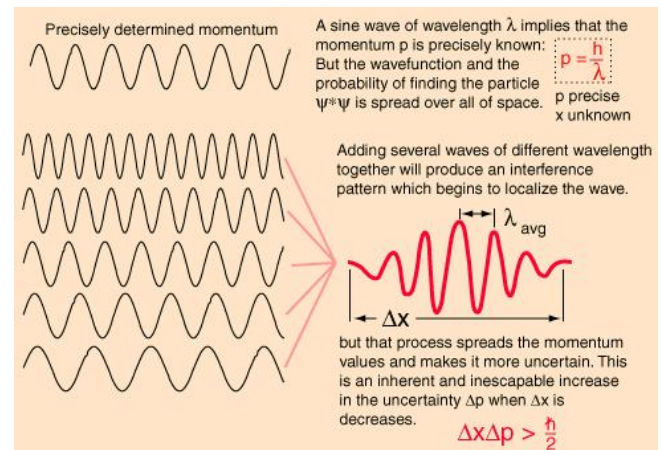


Figure 5.9: Heisenberg

Cum, in cazul general, functia $\psi(x, t)$ nu este nici unda de Broglie 5.27, nici functia delta 5.68, inseamna ca de fapt ea nu va descrie nici o particula cu impuls exact, nici una cu pozitie exact. Inexactitatile, ori deviatii de la o valoare medie se pot calcula insa cu ajutorul matematicii statistice:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (5.70)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad (5.71)$$

SEMNIFICATIE.

Se poate arata ca in cazul general, indiferent ce functie de unda $\psi(x, t)$ am alege, si utilizand relatiile ?? si ??, avem:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.72)$$

Relatia de de mai sus poarta numele de *relatia de incertitudine a lui Heisenberg*. Vom deduce si noi aceasta relatie in sectiunea

??, si o vom verifica pentru cazul oscilatorului armonic in sectiunea ??.

Sunt multe "experimente mentale" care se pot face pentru a verifica relatia de mai sus in cazuri particulare. Pentru inceput insa este important sa privim relatia de mai sus in sens strict matematic. Ea ne spune astfel ca intr-o functie de unda exista o corelatie inerenta intre incertitudinea pozitiei si cea a impulsului. Daca o anume functie oarecare de unda $\psi(x)$ de permite cunoasterea pozitiei cu o incertitudine de $\Delta x = 1A$ de exemplu, atunci putem spune sigur ca incertitudinea in impuls este mai mare de $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x = \dots$

Interpretarea acestor relatii trebuie sa tina in seama cont de modul in care facem masuratorile. Astfel, *daca* am masura simultan impulsul si pozitia, am obtine valori cu incertitudinile de mai sus. Dar in realitate *nu putem masura simultan impulsul si pozitia*, pentru ca atunci care ar fi functia de unda dupa masuratoare ?? ori ??? Desi exista cazuri cind masuratori simultane sunt permise, aces lucru nu este posibil in cazul impulsului si pozitiei in cadrul teoriei cuantice. Masuratorile *successive* sunt insa permise, dar in astfel de caz functia de unda sufera un *colaps* intre cele doua masuratori, asa cum am discutat in ??. De aceea este bine sa privim principiul de incertitudine al lui Heisenberg intr-o prima instanta numai ca o relatie intre incertitudinile de a masura impulsul sau cea de a masura pozitia la un moment dat.

5.2.7 Solutii invariante in timp

Arata *cumva* (cum?) aici ca electronii au precis energia $E = p^2/2m + V(x)$!

S-ar parea ca relatiile propuse in sectiunea precedenta nu pot inca explica cuantificarea orbitelor, ori a nivelelor de energie. Intr-adevar, ecuatia lui Schrodinger are inca o variatie continua, si este greu de vazut cum aceasta ar conduce la niste solutii discrete. De aceea s-ar parea ca avem nevoie de inca un postulat pentru a gasi solutiile *discrete* de energie prezente in modelul lui Bohr, dar *nu* acesta este cazul.

Realitatea este ca ecuatia lui Schrodinger 5.39, pentru un potential dat, va fi indeplinita pentru nenumarate functii de unda. In plus, putem verifica direct ca ea este liniara si, daca gasim doua functii de unda $\psi_1(x, t)$ si $\psi_2(x, t)$ care o indeplinesc, atunci stim sigur si ca orice combinatie liniara a acestora $\psi(x, t) = a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t)$ o va indeplini.

In sectiunea ?? vom incerca sa ordonam aceste functii de unda, dupa diversele proprietati pe care le au. Vom vedea insa ca ele sunt practic de doua tipuri: *stationare* si *non-stationare*. Cele stationare sunt acelea pentru care *probabilitatea* $|\psi(x, t)|^2$ de a detecta un electron intr-o anumita pozitie spatiala nu se schimba in timp. Pentru functiile de unda stationare avem deci $|\psi(x, t)|^2 = C(x)$, desi faza functiei de unda $\psi(x, t)$ poate varia in timp, dar in acelasi fel pentru toate punctele sale! Ele se numesc stationare pentru ca atunci sansa de gasi electronul intr-un anume loc este mereu aceeaasi.

Aceste unde stationare au un caracter foarte apropiat de cel al coardei rezonante mecanice (vezi Fig.??), prinsa fix de capete. Aici amplitudinea vibratiei coardei este constanta in timp, iar faza variaza periodic. Cu toate acestea, faza variaza in aceleasi fel in toate portiunile corzii, inlegind prin aceasta ca coarda trece prin pozitia de echilibru cu toate punctele sale *in acelasi moment de timp*. Acest din urma lucru se exprima matematic prin faptul ca faza coardei nu depinde de pozitie.

In interpretarea lui de Broglie a solutiei lui Bohr, am vazut insa ca aceasta presupune practic alegerea acelor orbite pentru care unda atasat electronului este *rezonanta* (vezi Fig.5.6. Putem atunci banui ca *solutiile stationare* (asimilate solutiilor

rezonante ale coardei) sunt cele care determina cuantificarea nivelelor de energie ale atomului de hidrogen.

Putem atunci cauta solutiile acestora stationare pornind de la observatia precedenta ca amplitudinea lor este constanta in timp, si faza variaza in timp in acelasi fel pentru toate punctele, prin analogia cu coarda vibranta:

$$\psi(x, t) = u(x) \exp\left(-\frac{ia}{\hbar}t\right) \quad (5.73)$$

unde $u(x)$ este acum o functie *reala* de coordonate, iar a este o constanta. Inlocuind in ecuatia lui Schrodinger 5.39 obtinem:

$$i\hbar u(x) \frac{-ia}{\hbar} e^{-iat/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} e^{-iat/\hbar} + V(x)u(x)e^{-iat/\hbar} \quad (5.74)$$

Simplificind, si schimbind ordinea termenilor, obtinem ecuatia:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + V(x)u(x) = au(x) \quad (5.75)$$

Calculind acum energie media in aceasta stare stationara $\psi(x, t)$ cu ajutorul 5.67, si folosind ecuatia de mai sus, observam ca se obtine in mod direct $\langle E \rangle = a$.

AICI spun FIE care e probabilitatea de gasire a lui E in cazul general (enertuanl mai devreme), FIE argumentez ca E este singura energie posibil de a fi masurata.

Ca atare, functia de unda *stationara* de energie E este data de:

$$\psi(x, t) = u(x) \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right) \quad (5.76)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + V(x)u(x) = Eu(x) \quad (5.77)$$

Frumusetea realtiilor de mai sus este ca nu pentru orice energii E putem gasi solutii $u(x)$ ale ecuatiei de mai sus. In cele mai multe cazuri (care?) energiile E pentru care o solutie poate fi gasita, fac parte dintr-o colectie *discreta* de numere, precum se intimpla si la rezonantele mecanice.

5.2.8 Oscilatorul armonic

In cazul oscilatorului armonic, potentialul este (vezi ??):

$$V(x) = \frac{Kx^2}{2} \quad \text{unde} \quad K = m\omega^2 \quad (5.78)$$

Functiile de unda stationare pentru un electron care se afla in acest potential pot fi calculate cu 5.79:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{Kx^2}{2} u(x) = Eu(x) \quad (5.79)$$

Daca introducem constantele $a = \sqrt{\hbar/M\omega}$, $\lambda = 2E/\hbar\omega$ si variabila $\xi = x/a$, ecuatia precedenta se scrie sub forma:

$$u'' + \lambda u - \xi^2 u = 0 \quad (5.80)$$

Daca facem substitutia

$$u(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2} \quad (5.81)$$

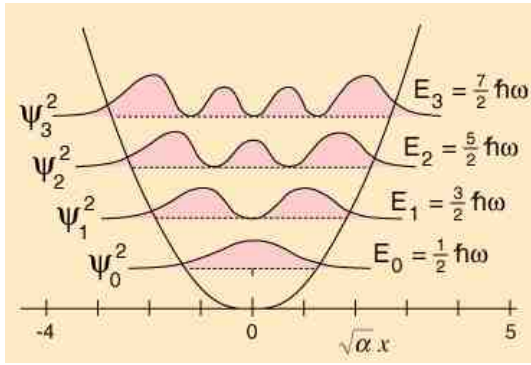


Figure 5.10: Oscilatorul armonic

obtinem ecuatia:

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0 \quad (5.82)$$

Se verifica direct prin inlocuire ca urmatoarele doua posibilitati sunt solutii ale ecuatiei de mai sus:

$$H(\xi) = 1 \quad \text{pentru} \quad \lambda = 1 \quad (5.83)$$

$$H(\xi) = \xi \quad \text{pentru} \quad \lambda = 3 \quad (5.84)$$

In cazul general, se poate arata ca ecuatia 5.82 are solutii *numai* pentru valori particulare ale lui λ , si anume $\lambda = 2n + 1$, unde n este un numar natural $n = 1, 2, \dots$. Inlocuind in definitia lui λ , aceasta inseamna ca ecuatia unei stationare poate fi indeplinita numai daca:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (5.85)$$

Solutia generala este data de:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (5.86)$$

Functiile de unda se poate direct calcula inlocuind in ???. In figura 5.10 prezentam primele nivele de energie, impreuna cu functiile de unda corespunzatoare.

DISCUTIE

EXPLICA la sfirsit ce sunt oscilatorii lui Plank.

5.2.9 Atomul de hidrogen

Sa incercam acum sa gasim solutiile stationare ale ecuatiei lui Schrodinger scrisa sub forma 5.79 in cazul atomului de hidrogen. Ne intereseaza in primul rind daca obtinem corect nivelele de energie ale diferitelor stari, si daca eventual putem prezice si altceva in plus.

Consideram atunci nucleul in centrul sistemului de coordonate, si ca potentialul $V(\mathbf{r}) = V(r)$ depinde numai de distanta pina la electron. Pentru aceasta, scriem ecuatia lui Schrodinger stationara 5.79

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(\mathbf{r}) + V(r)u(\mathbf{r}) = Eu(\mathbf{r}) \quad (5.87)$$

in coordonate sferice in care nucleul este situat in centru (vezi sectiunea ?? epntru rememorarea coordonatlelor sferice).

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] u(\mathbf{r}) + V(r)u(\mathbf{r}) = Eu(\mathbf{r}) \quad (5.88)$$

Desi sunt multe solutii, putem incerca sa le gasim pe acelea care satisfac:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \phi) \quad (5.90)$$

Inlocuind solutia de mai sus in ecuatia precedenta, si separind termenii dupa $R(r)$ si $Y(\theta, \phi)$ obtinem:

$$\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) = \quad (5.91)$$

$$= \frac{2mr^2}{\hbar^2} R(E - V) + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = \lambda \quad (5.92)$$

Dupa cum vedem, termenii $R(r)$ si $Y(\theta, \phi)$ se separa in termeni dependenti de (θ, ϕ) de o parte a ecuatiei, si in termeni dependenti de r de cealalta parte a ecuatiei. Cum, la un r dat, putem alege toate combinatiile (θ, ϕ) , si invers, obtinem o infinitate de egalitati. Inseamna deci ca ambii termeni sunt de fapt egali cu o constanta, desemnata cu λ mai sus. Constanta λ este deci o caracteristica a solutiei $u(\mathbf{r})$.

Pentru $Y(\theta, \phi)$ obtinem deci ecuatia:

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) = \lambda Y \quad (5.93)$$

Sa incercam sa folosim din nou metoda separarii variabilelor, scriind:

$$Y(\theta, \phi) = F(\theta)\Phi(\phi) \quad (5.94)$$

Inlocuind in relatia precedenta obtinem atunci:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda - \frac{1}{F} \left(\frac{dF}{d\theta^2} + \cot \phi \frac{dF}{d\theta} \right) = -m^2 \quad (5.95)$$

Din nou, datorita separarii variabilelor, am folosit o constanta, denumita de data aceasta $-m^2$. Rezolvind ecuatia care contine numai $\Phi(\phi)$, obtinem:

$$\Phi(\phi) = C \exp(im\phi) \quad (5.96)$$

Aceasta variatie reprezinta matematic rezonanta unei de Broglie prezentata in Figura 5.6, unde lungimea de unda se cuprindea de un numar intreg de ori in perimetru. In relatia de mai sus, perimetrul este descris de unghiul ϕ , si pentru a "inchide" corect acest perimetru, trebuie sa avem $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$. Relatia aceasta se obtine si daca punem conditia ca nu avem discontinuitati in functia $\Phi(\phi)$ trecind de la unghiul maxim 2π catre unghiul urmator, care devine de fapt 0.

Avem atunci

$$C e^{im\phi} = C e^{im\phi + im2\pi} \rightarrow e^{i2m\pi} = 1 \quad (5.97)$$

si deci m nu poate lua decat valori naturale, pentru a indeplini relatia de mai sus! Vedem astfel ca discretizarea isi face loc in ecuatiile noastre, asa cum era de asteptat pentru niste solutii rezonante.

Facind substitutia $\xi = \cos \theta$ in ecuatia ramasa 5.95 pentru $F(\theta)$, obtinem:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dF}{d\xi} \right] - \frac{m^2}{1 - \xi^2} F + \lambda F = 0 \quad (5.98)$$

Printr-o complicata analiza matematica, pe care n-o prezentam aici, dar care poate fi gasita de exemplu in ??, se poate arata ca ecuatia de mai sus are solutii acceptabile numai daca urmatoarele conditii sunt indeplinite:

$$\lambda = l(l+1) \quad (5.99)$$

$$l = 0, 1, 2, 3... \quad (5.100)$$

$$m = -l, ..., 1, 0, 1, ..., l \quad (5.101)$$

Aceste solutii vor fi date de asa numitele polinoame Legendre asociate. Pentru fiecare l si m avem:

$$P_l^m(\xi) = \frac{(1-\xi^2)^{m/2}}{2^l \cdot l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l \quad (5.102)$$

Pentru a inlocui in ecuatia 5.93, avem inca nevoie sa alegem constanta C care apare in 5.96. Aceasta se alege in asa fel incit sa fie satisfacuta relatia de normalizare:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1 \quad (5.103)$$

Motivul este ca astfel functia $Y(\theta, \phi)$ este normalizata, si putem interpreta $|Y(\theta, \phi)|^2$ ca fiind probabilitatea ca electronul sa se afle in jurul unghiurilor θ and ϕ . Dupa ce se calculeaza astfel C , si se inlocuieste in 5.93 impreuna cu 5.96 si 5.102 se obtin in final asa-numitele *armonice sferice*:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (5.104)$$

Pentru citeva valori ale lui m si n , prezentam aceste solutii in Figura 5.11. Precizam ca in Figura 5.11 modulul functiei $Y(\theta, \phi)$ se citeste ca distanta de la origine la suprafata, pentru unghiurile θ si ϕ alese.

Se observa ca armonicele sferice prezentate mai devreme sunt solutii ale ecuatiei lui Schrodinger indiferent de potentialul $V(r)$ ales. Inlocuind $\lambda = l(l+1)$ in relatia a doua din 5.93 avem:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{dR(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r) \quad (5.105)$$

Ecuatia de mai sus poate fi interpretata ca ecuatia lui Schrodinger intr-un *potential efectiv* modificat pentru fiecare valoare a lui l (vezi Fig.??).

In cazul potentialului Coulombian in care se misca electronul in atomul de hidrogen

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.106)$$

se arata ca ecuatia precedenta 5.105 are solutii pentru orice $E > 0$. Aceasta este practic interpretarea electronului liber, care poate avea orice energie pozitiva. In schimb, pentru $E < 0$, se arata ca ecuatia 5.105 are solutii numai pentru anumite valori ale energiei E . Aceste solutii sunt "ordonate" din nou de un numar n care trebuie sa fie natural natural,

$$n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sqrt{-\frac{m}{2E}} \quad (5.107)$$

si ele se gasesc numai daca $(l+1) \leq n$. Solutiile sunt atunci:

$$R_{nl}(r) = C \cdot r^{l+1} e^{-r/na_0} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{a_0} \right) \quad (5.108)$$

Aici a_0 este raza Bohr ??, iar functiile asociate Laguerre sunt date de:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) = \quad (5.109)$$

$$= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m \quad (5.110)$$

In urma normalizarii se obtine constanta C ca:

$$C = - \left[\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{1/2} \left(\frac{2}{na_0} \right)^{l+3/2} \quad (5.111)$$

In final, sa sumarizam solutiile stationare ale ecuatiei lui Schrodinger pe care le-am *mentionat* in aceasta sectiune pentru atomul de hidrogen. Astfel, ele se gasesc daca energia electronului E este mai mica decit zero. Atunci ele se pot ordona dupa trei numere cuantice:

$$n = 1, 2, 3... \quad (5.112)$$

$$l = 0, 1, 2, ..., n \quad (5.113)$$

$$m = -l, ..., -1, 0, 1, ..., l \quad (5.114)$$

Pnetru fiecare combinatie posibila se gaseste o singura functie de unda normalizata, data de:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{R_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.115)$$

Functiile $Y_{lm}(\theta, \phi)$ si $R_{nl}(r)$ sunt date de 5.104 si 5.108. Energia solutiei precedente se obtine atunci din 5.107 ca:

$$E = -\frac{1}{n^2} \frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \quad (5.116)$$

5.2.10 Ordonarea atomilor

introdu Efectul Zeeman

Din electromagnetism ...

$$\mu = I\mathbf{A} \quad (5.117)$$

Apoi

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{emvr}{2m} = \frac{e}{2m} L \quad (5.118)$$

Anticipam, si folosim Bohr. Momentul cinetic este cuantificat in modelul lui Bohr

Introdu principiul lui Pauli sa iasa ordinea atomilor.

Ce ne facem daca avem mai multi electroni? Desi ei interactioneaza (Coulomb cel putin!), sa presupunem ca sunt independenti.

Atunci fiecare electron vede acelasi potential $V(x)$. In cazul atomului, acesta este dat de nucleu. Aceleasi functii de unda stationare, aceleasi nivele de energie!

Electronii nu se pot aseza toti pe acelasi nivel pentru ca atunci nu iese ceva (CE?, spectroscopie, ornica elementelor, etc.).

De aceea Pauli presupune ca doi electroni nu pot ocupa aceeasi stare stationara, cu aceleasi numere cunaticice (incluzind spinul!). Scrie principiul.

Dar aceasta este valabil numai coinsiderind electronii ca nu interactioneaza de loc, ceea ce stim ca nu perfect adevarat in practica. Dar este adevarat intr-o foarte buna aproximatie.

Introdu Stern gerlach pentru spin ca

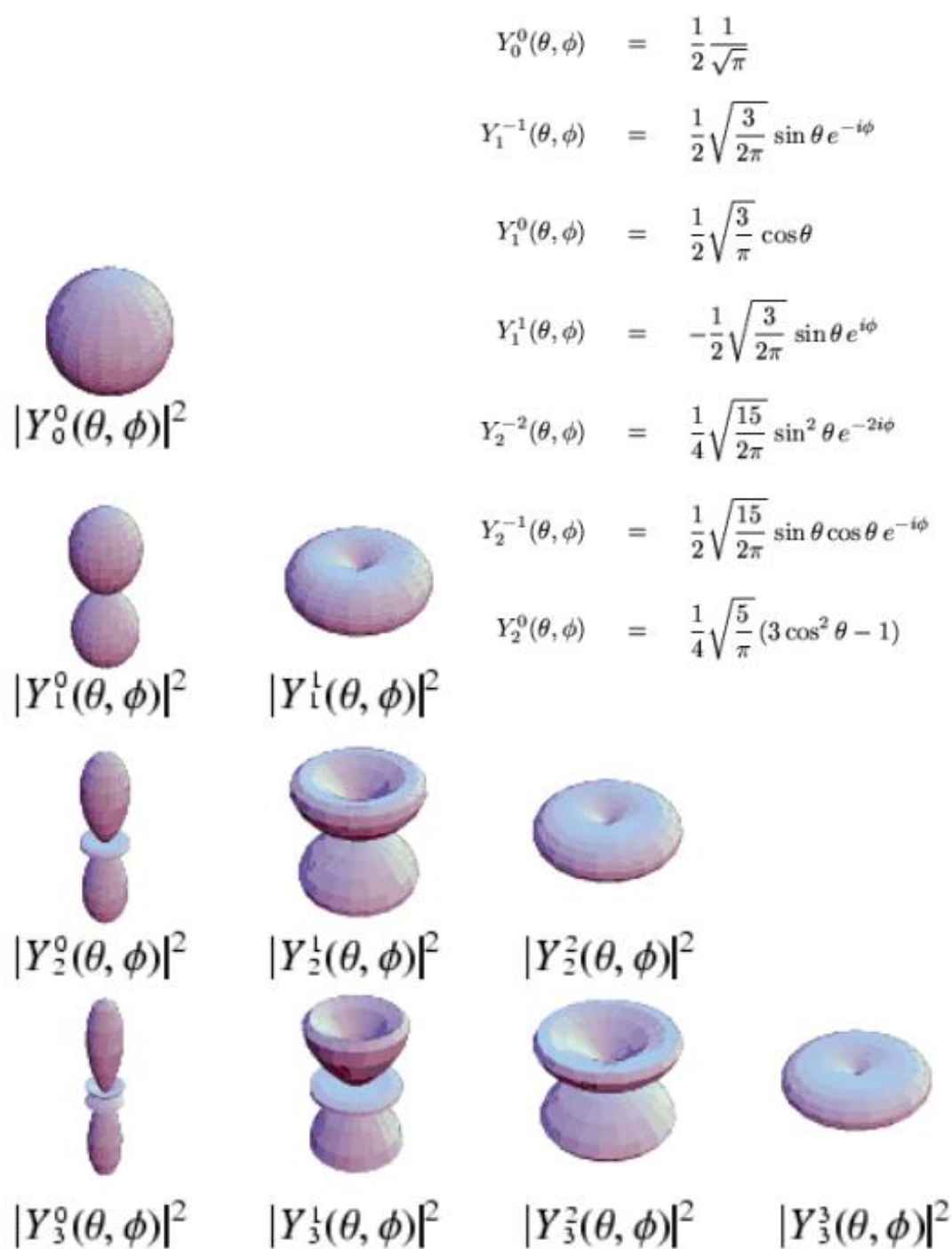


Figure 5.11: "Spherical harmonics". Distanța de la origine la un punct de pe suprafața reprezintă amplitudinea funcției $Y(\theta, \phi)$ pentru unghiurile θ și ϕ alese

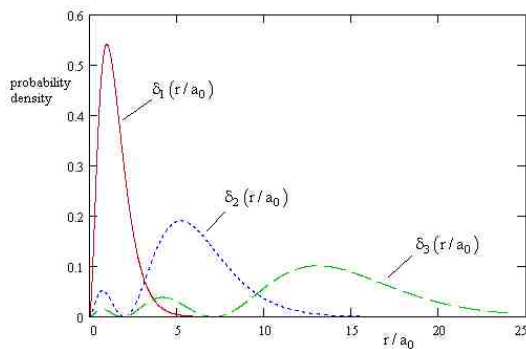


Figure 5.12: Radial solutions, for different n and l

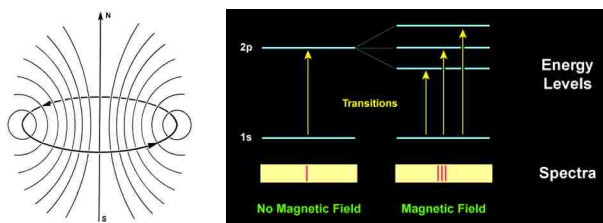


Figure 5.13: Zeeman effect. Pune poza originala alaturata.

Spune ca se *masoara* un moment magnetic aditional in directia cimpului:

$$\mu_{S_z} = -g \frac{e}{2m} \quad (5.119)$$

Se introduce ca ceva cuantic care ia doar doua valori precise. Definim S ca sa avem m_s cu $1/2$ si $-1/2$, pentru ca valoarea absoluta este ascunsa in g . Vedem mai tirziu de ce. Nu insisti acum pe functii de unda duble. Le faci direct la Dirac. Atunci energia devine:

$$U_m = gB \frac{e}{2m} S_z \quad (5.120)$$

si deci

$$E_{nlmm_s} = E_n - \frac{eB\hbar}{2m_e} (m + g m_s) \quad (5.121)$$

Poza nivele de energie "splitate", verificare valoare absoluta pe poza spectroscopica.

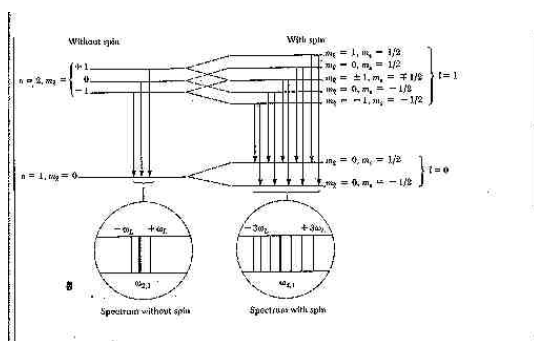


Figure 5.14: Pune si poza spectroscopica originala

Magnetonul Bohr-Procopiu:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \cdot 10^{-24} J/T \quad (5.122)$$

CAUTA SI SCRIE DE PROCOPIU

Energia este:

$$U = -\mu \mathbf{B} \quad (5.123)$$

Folosind Boghr, poutem scrie (aminteste ca e exact, cumva...)

$$E_{nlm} = E_n - \frac{eB\hbar}{2m_e} m \quad (5.124)$$

Vazute in experiment. Ordin de marime. Valorile absolute sunt in perfect acord cu experimentul.

Introdu spinul ca un grad aditional de libertate pentru care ai nevoie sa ordonezi atomii.

Ceea ce este foarte important in sectiunea precedenta este sistematizarea solutiilor stationare ale ecuatiei lui Schrodinger 5.39 generale, in cazul atomului de hidrogen.

Este remarcabil astfel ca, in final, energia acestor stari stationare este data printr-o formula 5.116, identica cu cea dedusa de Bohr 5.18, dupa cum se poate vedea direct. Este poate surprinzator cum, dupa calcule atit de laborioase, se ajunge la celasi rezultat dedus de Bohr pe o cale mult mai rapida. Ne vom lamuri insa ca asa trebuia sa fie, dupa ce vom dicuta de momentul cinetic in sectiunea ?? (SA NU UITI SA EXPLICI DE CE IESE TOT CA LA BOHR).

Ordonarea functiilor de unda stationare are insa o consecinta poate mult mai importanta: cu ajutorul ei, putem explica ordonarea elementelor atomice in tabelul lui Mendeleev intr-un mod foarte simplu. Pentru aceasta, mai avem insa nevoie de un principiu, care spune ca doi electroni nu pot ocupa aceeasi stare stationara. Acesta se numeste principiul de excluziune al lui Pauli, si descrie functiile de unda atunci cind avem mai multi electroni. In plus, trebuie sa introducem si o noua notiune, si anume spinul electronului.

PUNE TABELUL MENDELLEEV, SI SPUNE CUM SE ARANJEAZA ATOMII

Exista insa si o alta confirmare indirecta a solutiilor precedente (si deci indirect a ecuatiei lui Schrodinger). Aceasta provine de la *intensitatea* liniilor de absorbtie si emisie ale atomilor, nu numai de la frecventa lor! Astfel, stiind functiile unda, si definind corect probabilitatile de absorbtie sau emisie ale luminii, se poate calcula probabilitatea fiecarei tranzitii din Figura ?? . Aceasta se asimileaza intensitatii luminii, si se verifica in practica ca intr-adevar masuratorile confirma previziunile teoretice daca luam in calcul functiile de unda 5.115.

5.3 Postulatele mecanicii cuantice

Sa sumarizam putin sectiunea precedenta, pusa sub semnul ecuatiei lui Schrodinger pentru miscarea unui singur electron. Am vazut astfel ca electronul poate fi descris de o singura functie de unda $\psi(\mathbf{r}, t)$, a carei variatie temporala este descrisa de ecuatiei lui Schrodinger 5.39, pornind de la niste valori initiale date. Stiind $\psi(\mathbf{r}, t)$, putem calcula probabilitatea de a gasi un electron in pozitia $\mathbf{r}$, care este proportionala cu $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Daca niste experimentatori sunt interesati de *alte* caracteristici ale electronului (cum ar fi impulsul), putem construi niste functii cu ajutorul carora sa gasim aceste probabilitati (vezi sectiunea ?? in cazul impulsului).

Cum am discutat, sistemul de sus este complet si suficient pentru descrierea si precizarea unei singure masuratori. Pentru

No portion of this work may be reproduced in any form or by any means without express prior written permission from Sargent-Walch Scientific Company.

Figure 5.15: Pune numai Z, A si cum se completeaza shelurile 1s2s, etc

descrierea a mai multor masuratori *successive*, am introdus faptul ca *functia de unda se modifica deasemenea in urma masuratorii*. In plus, am discutat despre principiul de incertitudine al lui Heisenberg in cazul pozitiei si impulsului, am introdus spinul electronului si efectele de miscare in cimp magnetic. In final am vazut cum toate aceste notiuni isi gasesc o puternica confirmare experimentală odata cu ordonarea atomilor in tabelul periodic al elementelor.

In consecinta s-ar parea ca formularea mecanicii cuantice este completa si ca tot ce ne-a ramas de facut este sa introducem interactia dintre electroni. Atunci Universul nostru n-ar fi decit o consecinta macroscopica a aplicarii acestor legi pentru fiecare electron si nucleu. Cu alte cuvinte, daca avem un obiect compus din electroni trebuie sa aplicam regulile de mai sus pentru fiecare electron (eventual sa adaugam si interactia dintre ei).

Ce se intimpla insa daca avem o particula noua? Desigur ca atunci trebuie sa ne straduim sa-i "ghicim" si ei comportarea cuantica, si ecuatia Schrodinger atasata ei. Acest lucru nu ne va fi insa greu, caci "parintii" nostri fizicieni s-au straduit sa ne lasa o *metoda* pentru aceasta. Ei au spus in felul urmator: "dati-ne orice sistem clasic, si eu va spun cum trebuie sa-l cuantificati". Despre aceasta metoda va fi vorba in sectiunile urmatoare.

"Metoda" de mai sus are avantajul ca poate fi aplicata la particule noi (protoni, neutroni, etc.). Dar ea pare in schimb ca poate duce la contradictii, daca consideram ca procedura cuantifica *orice* sistem clasic. Astfel, putem considera vibratia atomului in materie (discutata in sectiunea ??) ca fiind clasica. Apoi cuantificam acest sistem conform "metodelor" de cuantificare, si atunci aflam comportarea cuantica (nivele de energie, probabilitati). Mai *natural* insa era sa vedem din ce e facut fiecare atom, si apoi sa aplicam ecuatia lui Schrodinger pentru toate componentele prezente (electroni, protoni, etc.). Cu alte cuvinte, in loc sa *construim* solutia de la elementele componente in sus, noi o vom *ghici* direct uitindu-ne la un sistem in totalitatea lui (atomul il consideram indivizibil).

Situatia "ciudata" de mai sus se poate explica prin linearitatea ecuatiei lui Schrodinger, si printr-o analiza cuantica completa a componentelor unui obiect (ca atomul) cind acesta din urma se considera "indivizibil". Pentru acei dintre cititori care au afinitati "filozofice", situatia nu trebuie sa fie ingrijoratoare: universul in totalitate se poate explica prin *constructie* pornind de la componentele sale. Ceea ce vom prezenta in continuare poate fi privit fie ca o *metoda de "ghicire" a comportarii cuantice a unor componente noi* (particule de exemplu), fie ca o *metoda mai usoara de a gasi comportarea cuantica a unor sisteme compuse* (atomul considerat indivizibil). Aceasta din urma comportare se poate construi *deci* si pornind de la ecuatiile elementelor componente (electroni, protoni, etc.), cu acelasi rezultat.

Daca ajungem deci la acelasi rezultat, si este mai usor sa folosim "metoda" de cuantificare a sistemului clasic, asa cum va fi prezentata in continuare, de ce sa nu procedam asa? Inainte de a porni la drum, si a prezenta metoda generala de cuantificare a oricarui sistem clasic, sa amintim cititorului ca pentru o deplina intelegere a sectiunilor urmatoare, ne vom folosi de mecanica analitica, prezentata in sectiunea ??, si de cea a spatiului Hilbert prezentata in ??.

Sa recapitulam putin discutia din ?? referitoare la un sistem clasic oarecare. Dupa cum am vazut, el fi descris si cu ajutorul mecanii analitice, folosind coordonatele $q_i(t)$ si coordonatele conjugate p_i . La un moment dat, sistemul clasic se considera atunci *pe deplin determinat* daca stim toate aceste valori (q_i, p_i) . Stiind deci aceste valori la momentul initial, putem calcula evolutia lui temporala cu ajutorul hamiltonianului $H(q_i, p_i)$ si ecuatiilor ??:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.125)$$

Se vede ca pentru a simplifica discutia am considerat ca *hamiltonianul sistemului nu are o dependenta temporala explicita*, desi si acest caz ar putea fi inclus. In final, comportarea sistemului se poate desemna atunci printr-o linie intr-un spatiu de coordonate (q_i, p_i) , denumit spatiul fazelor (vezi ??).

Sa incercam sa prezentam *metoda generala de cuantificare* a unui astfel de sistem clasic, considerind ca el putea avea in plus si niste grade intrinseci de libertate care nu se vad cuantic. Astfel, in cazul electronilor, acestea ar fi spinii lor.

Pentru exemplificare, vom alege trei situatii:

1. **A)** In prima situatie (notata cu **A**) consideram un singur electron fara spin in caz unidimensional, aflat intre doi pereti situati la pozitiiile 0 si L . Acest caz a fost studiat in sectiunea ?? . Aici electronul are coordonatele generalizate $q_1 = x$ (cu $0 \leq x \leq L$) si $p_1 = m\dot{x}$.
2. **B)** In a doua situatie (notata cu **B**) consideram un singur electron *fara spin* in caz unidimensional, aflat de la $-\infty$ la ∞ sub influenta unui potential $V(x)$. Acest caz a fost dezvoltat pe larg in sectiunile precedente. Vom incerca deci sa recunoastem notiunile dezvoltate pina acum, si vom incerca sa le generalizam. Aici electronul are coordonatele generalizate $q_1 = x$ (cu $-\infty < x < \infty$) si $p_1 = m\dot{x}$.
3. **C)** In a treia situatie (notata cu **C**) consideram un singur electron *cu spin* in caz unidimensional, aflat de la $-\infty$ la ∞ sub influenta unui potential $V(x)$. Acest caz este de fapt o prelungire a celui precedent, in care electronul are aditional si un grad de libertate intrinsec, spinul S . Acest spin poate lua numai doua valori $S = +1/2$ si $S = -1/2$. Astfel, electronul are coordonatele generalizate $q_1 = x$ (cu $-\infty < x < \infty$) si $p_1 = m\dot{x}$, la care trebuie sa mai adaugam, in cazul cuantic, "coordinata" S , care ia insa numai doua valori.
4. **D)** In a patra situatie (notata cu **D**) alegem doi electroni care se deplaseaza numai de-a lungul axei x . Coordonatele generalizate clasice ale acestui sistem sunt $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $p_1 = m\dot{x}_1$ si $p_2 = m\dot{x}_2$, unde indicii din partea dreapta a relatiilor se refera la cei doi electroni. Trecind la situatia cuantica, vom presupune si ca fiecare electron are un grad de libertate intrinsec (spinul), care poate lua insa numai doua valori $+1/2$ si $-1/2$, pentru fiecare electron. Avem deci si "coordonatele" S_1 si S_2 , fiecare din ele putind lua cite doua valori.
5. **E)** Ultima situatie (notata cu **E**) este cazul general descris de coordonatele generalizate (q_i, p_i) . Aici consideram ca, trecind la situatia cuantica, sistemul nu are *nici un alt grad de libertate* in plus.

5.3.1 Starea cuantica

In cazul clasic, la un moment dat, pozitia sistemului este descrisa de un singur *vector de pozitie*. Pentru cazurile in care nu exista grade de libertate aditionale (adica A,B si E), vectorii de pozitie se recunosc direct:

$$A) \quad \mathbf{q} = \{x\} \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.126)$$

$$B) \quad \mathbf{q} = \{x\} \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (5.127)$$

$$E) \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots\} \quad (5.128)$$

$$(5.129)$$

Daca exista grade aditionale de libertate, le putem *adauga* si pe acestea la vectorul de pozitie. In cazul electronului cu spin (vezi ??), putem spune ca electronul se afla in pozitia x_1 si are spinul $1/2$, sau in alta pozitie x_2 cu un spin $-1/2$. Gradul aditional de libertate poate fi momentan inteles ca o marime

aditionala clasica ce ia anumite valori discrete. Avem atunci pentru cazurile ramase:

$$C) \quad \mathbf{q} = \{S, x\} \quad S = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\infty \leq x \leq +\infty \quad (5.130)$$

$$D) \quad \mathbf{q} = \{S_1, S_2, x_1, x_2\} \quad S_1, S_2 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\infty \leq x_1, x_2 \leq +\infty \quad (5.131)$$

$$(5.132)$$

Amintim observatia ca vectorii de pozitie de mai sus *nu* descriu complet starea unui sistem, contrar aparențelor. Motivul este ca, in definitia noastra, *starea unui sistem* la un moment dat este acea colectie de informatii care ne spune si precis cum evolueaza sistemul la momentele ulterioare. Cunoscund deci starea sistemului la un moment dat, cunoastem evolutia lui la orice moent de timp. Ori este evident ca numai pozitia sistemului nu este de ajuns, si ca vem nevoie si de impulsul sau in acel moment de timp. De aceea, in cazul clasic, starea completa a sistemului este data de vectorii de pozitie si cei de impuls: q_i, p_i .

In cazul cuantic, suntem de asemenea in cautarea unei stari a sistemului cuantic, care ne sa dea *si* evolutia sa ulterioara. Conform primului primului postulat:

1. *Starea sistemului cuantic este descrisa de un vector normalizat $|\nu\rangle$ dintr-un spatiu Hilbert. Vectorii ce difera doar printr-un factor $e^{i\phi}$ descriu aceeasi stare fizica a sistemului.*

Sa ne amintim ca spatiul Hilbert este o colectie de vectori liniari. Exista insa nenumarate spatii Hilbert. Alegerea corecta a unui spatiu Hilbert pentru o anumita situatie, ar trebui sa se faca abia *dupa studierea tuturor postulatelor mecanicii cuantice*, pentru a realiza un sistem complet si fara contradictii.

Sa facem acum conexiunea cu cazul clasic, prezentind o metoda particulara de constructie a spatiului Hilbert, care este suficienta in cele mai multe cazuri. Astfel, am vazut in cazul unei ecuatiei Schrodinger pentru o particula de pozitie x , ca starea cuantica a acestui sistem era descrisa de o functie de unda $\psi(x)$. Cu alte cuvinte, vectorul de pozitie clasic a devenit o functei de pozitie in cazul cuantic. Prin generalizare, putem scrie atunci functiile de unda:

$$A) \quad |\nu\rangle = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.133)$$

$$B) \quad |\nu\rangle = \psi(x) \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (5.134)$$

$$C) \quad |\nu\rangle = \psi(S, x) \quad S = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\infty \leq x \leq +\infty \quad (5.135)$$

$$D) \quad |\nu\rangle = \psi(S_1, S_2, x_1, x_2) \quad (5.136)$$

$$E) \quad |\nu\rangle = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (5.137)$$

$$(5.138)$$

Funcțiile de unda sunt deci *funcții de pozitii*. In plus ele sunt alese ca functii complexe, tot prin generalizarea sistemului lui Schrodinger pentru un singur electron. Spatiul Hilbert H aferent poate fi ales atunci ca fiind spatiul generat de functiile de unda ψ de mai sus. Cu alte cuvinte, *spatiul Hilbert poate fi ales ca spatiul functiilor complexe de pozitie*.

Practic, functia $\psi(s_1, \mathbf{r}_1, s_2, \mathbf{r}_2)$ este o functie a carei *valoare complexa* se poate calcula pentru *orice valori* $(s_1, \mathbf{r}_1, s_2, \mathbf{r}_2)$ am alege. Functia *in totalitatea ei* reprezinta o singura stare cuantica. Pentru exemplificare, o posibilitate de functie de unda nenormalizata este atunci: $|\nu\rangle = s_1 s_2^2 \sin(\mathbf{r}_1/r_2) + j\mathbf{r}_2/r_1$. O alta functie, de exemplu $|\nu\rangle = (s_1^2 - s_2^2)(\mathbf{r}_1/r_2) + j\mathbf{r}_2/r_1$, va reprezenta o cu totul alta stare cuantica.

Mentionam ca se pot construi si alte spatii Hilbert care sa indeplineasca postulatele mecanicii cuantice. Spre exemplu,

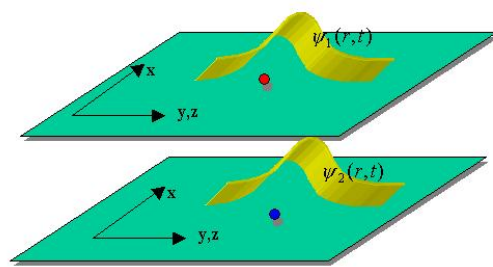


Figure 5.16: Vizualizarea functiei de unda pentru un electron cu spin 1/2. In situatia "clasica" electronul se afla fie in pozitia desemnata cu bila rosie, fie in cea cu bila albastra

in cazul unui singur electron cu spin, o alegere frecventa este spatiul construit de matricile:

$$C) \quad |\nu\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (5.139)$$

Dupa cum putem vedea usor, acest spatiu este insa echivalent cu cel ales de noi in 5.133, pentru ca putem scrie imediat:

$$C) \quad \psi(\frac{1}{2}, x) = \psi_1(x); \quad \psi(-\frac{1}{2}, x) = \psi_2(x) \quad (5.140)$$

Normalizarea functiei de unda se exprima in termeni vectoriali ca $\langle\nu|\nu\rangle = 1$, si ea este o generalizare a relatiei ?? pentru probabilitatea de gasire a unui electron. In cazul general insa, vorbim de probabilitatea de gasire a sistemului cuantic intr-una din pozitiiile sale date de relatiile 5.126 si 5.130. Probabilitatea de a gasi un electron intre pozitia x si $x + dx$, avind spinul 1/2 este de exemplu

$$C) \quad dp_{1/2} = |\psi(\frac{1}{2}, x)|^2 dx \quad (5.141)$$

Daca gradele de libertate aditionale sunt discrete, cum este cazul spinului, atunci acestea trebuie adunate. Relatiile de normalizare pentru cazurile alese sunt atunci

$$A) \langle\nu|\nu\rangle = \int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (5.142)$$

$$B) \langle\nu|\nu\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (5.143)$$

$$C) \langle\nu|\nu\rangle = \sum_{S=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(S, x)|^2 dx = 1 \quad (5.144)$$

$$D) \quad \sum_{s_1, s_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(S_1, S_2, x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = 1 \quad (5.145)$$

$$E) \langle\nu|\nu\rangle = \int \int |\psi(q_1, q_2, \dots, q_n)|^2 dq_1 dq_2 \dots dq_n = 1 \quad (5.146)$$

Faptul ca functiile de unda care difera doar prin $e^{i\phi}$ descriu aceeasi stare fizica, este mai mult o consecinta decit un postulat (sa o mai pun la postulat?). Astfel, deoarece ecuatiile care vor descrie evolutia functie de unda sunt liniare ...

5.3.2 Principiul masurătorii

În sistemul clasic, măsuratoarea nu pune nici o problemă teoretică, pentru ne putem gândi întotdeauna că putem construi un aparat de măsură care să nu influențeze măsuratoarea. În cazul cuantic, după cum s-a observat chiar de la început, pentru că sistemul este "la limita sensibilității", ne așteptăm ca întotdeauna măsuratoarea să influențeze rezultatul. Ca atare, măsuratoarea devine un proces neclar, în care nu știm exact ce se întâmplă. Pentru a elimina această problemă, "părinții" fizicii cuantice, au construit un sistem abstract, în care *masurătoarea este descrisă de un singur operator al spațiului Hilbert*. În practică, descrierea a fost acceptată pentru simplitatea ei, deși, desigur, elimină descrierea precisă a măsurătorii. Pentru moment, acceptăm și noi această manieră. Principiul acesta se definește atunci ca.

Fiecare observabilă corespunde la un operator linear și hermitic O . Rezultatele măsurătorii pot fi numai valorile proprii ale operatorului O . După măsurătoare, starea cuantică devine vector propriu al operatorului O corespunzător valorii proprii măsurate (colapsul funcției de undă).

Cu alte cuvinte, *ignorând* procesul de măsură, ne interesează două aspecte ale rezultatului unei măsurători: *ce valori măsurăm, și care este funcția de undă a sistemului în urma măsurătorii*. Ambele aspecte ne dau completitudinea interacției măsurator-sistem cuantic. Astfel, știm și rezultatul măsurătorii, și putem prezice apoi și evoluția sistemului cuantic. Aceste rezultate le obținem folosind operatorul O atașat procesului de măsură.

Desigur că această manieră de a afla rezultatele măsurătorii este neasatisfăcătoare. În loc să înțelegem ce se întâmplă, "mat-uram" neștiința noastră în spatele operatorului O . Pe moment este important de menționat că, deși pare ciudată, maniera de a prezice rezultatele măsurătorii cu ajutorul operatorului O este de un succes practic uimitor, și până acum nu dat greș! Vom discuta însă mai pe larg aceste probleme în secțiunea ??, nu înainte de a menționa că încă ne lipsește o înțelegere deplină a acestui succes.

Să revenim la operatorul hermitic O . După cum am discutat în secțiunea ??, acesta are un set de *vectori proprii ortogonali* normalizați, și care formează o *bază completă* pentru spațiul Hilbert. După cum am văzut în ??, vectori proprii *numarabili* sau *nenumarabili* (se poate combina?). În primul caz ei dau un set de valori proprii discrete, în cel de-al doilea caz ei dau un set de valori proprii continue:

$$\text{baza discretă: } O|o_i\rangle = o_i|o_i\rangle \quad (5.147)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } O|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (5.148)$$

Desigur că și cazul în care vectorii proprii sunt o combinație de intervale continue și valori discrete este posibil, însă noi ometem acest lucru în discuția următoare.

În plus, vectorii proprii ai operatorului O formează o bază completă a spațiului Hilbert ales. Înțelegem prin aceasta că fiecare vector din spațiul Hilbert poate fi exprimat ca o combinație liniară de vectorii bazei. În primul caz, un vector oarecare se scrie ca o sumă de vectorii bazei $|o_i\rangle$, iar în cel de-al doilea ca o integrală de vectorii bazei $|\alpha\rangle$:

$$\text{baza discretă: } |\nu\rangle = \sum_i a_i|o_i\rangle \quad (5.149)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } |\nu\rangle = \int a(\alpha)|\alpha\rangle d\alpha \quad (5.150)$$

De ce am ales însă un operator O pentru a descrie rezultatele unei măsurători? Cheia răspunsului la această întrebare este

data *valoarea medie* a operatorului (pentru reamintire, vezi secțiunea ??). Într-o anumită stare cuantică $|\nu\rangle$, această valoare medie este dată de $\langle O|\nu\rangle$. Se verifică direct din relațiile de mai sus că aceasta se scrie ca

$$\text{baza discretă: } \langle \nu|O|\nu\rangle = \sum_i o_i|a_i|^2 \quad (5.151)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } \langle \nu|O|\nu\rangle = \int \alpha|a(\alpha)|^2 d\alpha \quad (5.152)$$

Vedem atunci cum se justifică interpretarea operatorului O dată în definiția ??. Astfel, în cazul discret, valorile proprii ale operatorului sunt o_i . Marimile $|a_i|^2$ sunt ponderile vectorilor proprii $|o_i\rangle$ într-un vector general $|\nu\rangle$ dat de 5.149. Relația de mai sus ne spune atunci că valoarea medie a observabilei O în starea $|\nu\rangle$ este de fapt media valorilor o_i ponderate cu valorile $|a_i|^2$.

Această valoare medie trebuie interpretată însă ca valoarea medie pe care am obține-o dacă am face diferite măsurători. *La o singură măsurătoare, noi obținem însă o singură valoare*. Aceasta este, conform postulatului ??, fie una din valorile proprii o_i în cazul discret, fie un număr α în cazul continuu. Probabilitatea de a diferite valori proprii ca rezultate ale măsurătorii se obține interpretând relația "ponderilor" 5.153. Astfel, dacă privim relația ca pe o sumă de valori proprii o_i ponderate, așa cum am discutat mai sus, atunci putem diferitele probabilități pe care 5.153 cu care o anumită valoare proprie poate rezulta în urma măsurătorii:

$$\text{baza discretă: } p(o_i) = |a_i|^2 = |\langle o_i|\nu\rangle|^2 \quad (5.153)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } dp(\alpha) = |a(\alpha)|^2 d\alpha \quad (5.154)$$

După cum am menționat însă, în urma măsurătorii noi obținem o singură valoare proprie, cu probabilitatea de a o obține dată de relația de mai sus. Să presupunem că facem deci o măsurătoare și obținem valorile:

$$\text{baza discretă: } \text{rezultat } o_k \quad (5.155)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } \text{rezultat } \beta \quad (5.156)$$

După cum am menționat în secțiunea ??, o problemă acută în teoria cuantică este ce se întâmplă cu starea cuantică după măsurătoare. Este clar că această stare este modificată în urma măsurătorii, datorită "sensibilității" ridicate a sistemului cuantic. Practic, o singură cantă de energie poate modifica această stare. În plus, așa cum am discutat în secțiunea ??, vrem ca această măsurătoare să modifice funcția de undă $|\nu\rangle$ în așa fel încât la o măsurătoare imediat ulterioară rezultatul măsurătorii să fie același. În acest fel am elimina efectul de "stroboscop cuantic", și lumea ne-ar apărea într-o manieră într-o manieră continuă.

Vedem atunci că maniera cea mai naturală de modificare a funcției de undă în urma măsurătorii este cea dată de postulatul ??, și anume că funcția de undă trebuie să devină vectorul propriu corespunzător valorii proprii măsurate. În cazul ales de mai sus, funcțiile de undă trebuie să devină:

$$\text{baza discretă: } |\nu'\rangle = |o_k\rangle \quad (5.157)$$

$$\text{baza nenumarabilă: } |\nu'\rangle = |\beta\rangle \quad (5.158)$$

Observăm acum că *dacă efectuăm o măsurătoare ulterioară, vom obține cu certitudine aceleași valori ca și înainte!* Astfel, în cazul discret, descoperind noul vector $|\nu'\rangle$ în vectorii bazei, obținem conform 5.155:

$$p'(o_k) = 1; \quad p'(o_i) = 0 \text{ pentru } i \neq k \quad (5.159)$$

În plus, deoarece vectorii proprii o_i sunt normalizați, și noul vector va fi normalizat direct.

O problema speciala se obtine cind valorile proprii sunt *degenerate*. Acesta este cazul cind doua sau mai multe valori proprii au aceleasi valoare. Cu toate ca acestea au aceeasi valoare, vectorii proprii sunt diferiti, chiar ortogonali. Daca una din acestea se obtine in cazul masuratorii, cum stim noi care din aceste valori proprii este? Sau mai exact, care este vectorul de unda $|\nu\rangle$ rezultat in urma masuratorii? Raspunsurile la aceste intrebari se dau printr-o insepctie atenta a relatiilor de mai sus.

Astfel, in primul rind, trebuiesc luate in considerare *toate* valorile proprii care au aceeasi valoare, si vectorii lor proprii. Sa presupunem pentru simplificare ca suntem in cazul in care masuram o valoare o care corespunde la precis doua valori proprii egale $o_m = o_n = o$. Probabilitatea de a obtine aceasta valoare, si vectorul de unda modificat in urma masuratorii sunt atunci:

$$p(o) = |a_m|^2 + |a_n|^2 \quad (5.160)$$

$$|\nu'\rangle = \frac{1}{\sqrt{a_m^2 + a_n^2}} [a_m|o_m\rangle + a_n|o_n\rangle] \quad (5.161)$$

unde coeficientul din fata parantezei este introdus pentru normalizare. Practic, noul vector de unda $|\nu'\rangle$ poate fi inteles ca proiectia vectorului $|\nu\rangle$ pe subspatiul descris de vectorii $|o_m\rangle$ si $|o_n\rangle$.

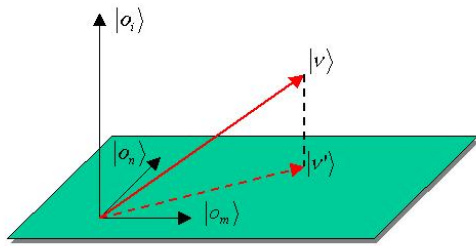


Figure 5.17: "Colapsul" functiei de unda pentru doua valori proprii identice

Daca vrem sa masuram ceva anume, cum alegem insa operatorul de care avem nevoie?. Mai precis, revenind la cazurile noastre particulare discutate in sectiunea precedeta, cum alegem operatorii corespunzatori operatiilor de masura ale pozitiei, sau spinului, sau impulsului, etc.? Cheia pentru a raspunde la aceasta intrebare este data tot de *valoarea medie* a operatorului pe o stare data. Astfel, in cazul unidimensional fara de grade aditionale de libertate, putem scrie actiunea unui operator ca fiind:

$$B) \quad O|\nu\rangle = O[\psi(x)] = g(x) \quad (5.162)$$

Practic, operatorul este aici o functionala care transforma o functie (ca $\psi(x)$) intr-o alta functie (ca $g(x)$). Valoarea medie a operatorului O se poate scrie ca:

$$B) \quad \langle\nu|O|\nu\rangle = \langle\nu|(O|\nu\rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)O[\psi(x)]dx \quad (5.163)$$

Prin comparati directa cu relatiile ?? si ?? care dau valorile medii pentru pozitie si impuls, vedem ca putem identifica operatorii acestia ca:

$$B) \text{ pozitie: } O[\psi(x)] = x\psi(x) \text{ sau simplu } \hat{x} = x \quad (5.164)$$

$$B) \text{ impuls: } O[\psi(x)] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \text{ sau simplu } \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.165)$$

$$(5.166)$$

Se verifica direct ca intre acesti operatori exista relatia de comutare (vezi ?? pentru definitia comutatorului):

$$B) \quad [\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (5.167)$$

$$E) \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{ik} \quad (5.168)$$

In cea de-a doua parte am generalizat relatia pentru cazul coordonatelor generalizate. Pentru cazul C), in care doar spinul este introdus, aceeasi operatori de pozitie si impuls sunt valabili.

Pentru cazul mai multor particule, am fi tentati sa utilizam un operator pentru fiecare particula. Cu toate acestea, asa cum vom vedea in sectiunea ??, acest lucru este permis numai daca particulele constituenete sunt de tip diferit. Altfel, daca ele sunt de acelasi tip (precum cazul D la noi), nu putem sti pe care dintre particule am detectat-o. Atunci trebuie mai degraba sa vorbim de un operator pentru detectarea oricarui dintre particule. Operatorii de pozitie si impuls devin atunci:

ADAUGA OPERATORII

Ceilalti operatori corespunzatori unei masuratori clasice *se construiesc* prin asemanare cu formula lor. Astfel, in principiu, ei pot fi exprimati ca niste functii de pozitie si impuls. De exemplu, energie unui electron in cazul B) este data de $E = p^2/2m + V(x)$, conform ??. Operatorii se obtin atunci inlocuind cu atentie pozitia x si impulsul p cu operatorii $\hat{x}$ si $\hat{p}$, in asa fel incit operatorul final sa fie hermitic. In cazul operatorului $\hat{E}$ care descrie masuratoarea de energie avem:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (5.169)$$

Pentru functii mai complexe de pozitie si impuls, poate fi desigur o problema dificila constructia operatorului in asa fel incit acesta sa fie hermitic. Este momentul cinetic un astfel de exemplu? Verifica... Descrie frumos acum cum e cu nivele de energie.

In final mentionam operatorul corespunzator masurarii spinului intrinsec $\hat{S}$. Daca scriem vectorul de unda sub forma 5.139, atunci operatorul $\hat{S}$ se scrie:

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\hbar\sigma \quad (5.170)$$

unde matricile σ sunt date de :

AICI pune de la inceput sub forma vectoriala, pune matricile, si spune de ce au forma pe care o au.

5.3.3 Evolutia starii cuantice

In cazul clasic al coordonatelor generalizate, evolutia starii este determinata de functia denumita Hamiltonian, cu ajutorul relatiilor 5.125. In cazul cuantic acesta devine un operator:

2. Evolutia starii cuantice este determinata de un operator $\hat{H}$ liniar si hermitic, denumit hamiltonian. El se obtine din forma clasica a Hamiltonianului. Starea cuantica evolueaza atunci conform ecuatiei:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\nu(t)\rangle = \hat{H} |\nu(t)\rangle \quad (5.171)$$

Prin notatia $|\nu(t)\rangle$ intelegem faptul ca vectorul $|\nu\rangle$ variaza in timp. Relatia de mai sus este o generalizare a ecuatiei lui Schrodinger pentru un electron 5.39. Astfel, recunoscind operatorul corespunzator masurarii energiei 5.169, se vede ca putem rescrie ecuatiea lui Schrodinger 5.39 sub forma data in postulatul de mai sus 5.171, daca facem identificarea $\hat{E} \leftrightarrow \hat{H}$.

Acest lucru este permis in cele mai multe cazuri in mecanica analitica, unde functia Hamiltonian ?? care descrie traiectoria sistemului se reduce de fapt la energia sistemului. De aceea, in cele mai multe cazuri, operatorul $\hat{H}$ se construiește pornind de la functia Hamilton a sistemului clasic. In aceasta se inlocuiesc pozitile (q) si impulsurile (p), cu operatorii asociati ($\hat{q}$, $\hat{p}$), dar in asa fel incit $\hat{H}$ sa ramina un operator *hermitic* si *linear*. Astfel, in cazurile in care nu avem grade de libertate aditionale, putem scrie:

$$A, B) \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (5.172)$$

$$\hat{H} = E) \quad (5.173)$$

In cazul in care un grad de libertate aditional este introdus, ca spinul, trebuie sa gasim contributia acestuia in energie. Astfel, in cazul spinului, vedem din ?? ca:

5.4 Sisteme multi-particula. Particule identice

Sa presupunem ca avem N particule diferite, de mase $m_1, m_2, \dots, m_N$, si ca ele nu au grade interne aditionale de libertate (ca spin). Clasic, intr-un anumit moment, ele se pot afla in punctele $x_1, x_2, \dots, x_N$, unde am considerat o situatie unidimensionala pentru a simplifica formele. Conform principiului starii cuantice, starea sistemului este data de un vector de stare dintr-un spatiu Hilbert, care poate fi construit ca colectia functiilor complexe de tipul:

$$|\nu\rangle = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.174)$$

Desigur ca, alegind functiile de unda de mai sus, creem situatii complexe. Astfel, ar trebui sa ne imaginam ca intreg Universul, facut din nenumarate particule, este descris de o *sigura* functie de unda multiparticula ca cea mai de sus. Ce ne facem atunci cu informatia dintre particule, care circula cu o viteza nu mai mare decit viteza luminii? Vom discuta mai pe indelete aceste aspecte in sectiunea ??, unde rezultatul va fi nu putin surprinzator: alegerea de mai sus este confirmata in parte experimental! Acum insa, ne vom concentra pe descrierea matematica a unor astfel de sisteme.

Probabilitatea de a gasi prima particula in x_1 , pe a doua in x_2 si asa mai departe este data de:

$$dp = |\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (5.175)$$

Pentru a construi hamiltonianul, va trebui sa pornim de la forma clasica a acestuia. Aceasta se obtine in cadrul formal al mecanicii analitice, utilizind un potential de interactie generalizat $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$, care este de fapt energia potentiala a intregului sistem. Ea se obtine *sumind energia potentiala pentru fiecare particula*, si tinind cont ca in felul acesta ... (factorul 2!).

Pentru exemplificare, in cazul cind intre particule nu exista decit interactii duale electromagnetice (fiecare particula

are sarcina electrica q_i), si in plus toate particulele se miscaca intr-un cimp potential $U(x)$ extern, avem:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i U(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{(x_i - x_j)^2} \quad (5.176)$$

Hamiltonianul clasic este atunci energia totala a sistemului (suma celei cinetice si a celei potentiale), si deci se poate scrie ca:

$$H = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + V(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (5.177)$$

Nu vom insista acum pe diversele forme ale hamiltonianului clasic, care sunt date de fapt de tipurile de interactie intre particule. Vom utiliza in schimb postulatul a treilea (?) al mecanicii cuantice pentru a scrie in final operatorul Hamiltonian care actioneaza asupra vectorului de unda 5.174:

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + V(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (5.178)$$

Dupa cum se vede, situatia sistemelor multi-particula se obtine direct prin utilizarea mecanicii analitice, si nu pare sa puna nici o problema. Cu toate acestea, in exemplele de mai sus am considerat particule diferite. In cazul in care ele sunt identice avem nu numai ca $m_1 = m_2 = \dots, m_N$, dar si o comportare complet noua.

Particule identice

O situatie deosebita are loc cind avem de-a face cu particule identice. Motivul este urmatorul. In cazul clasic, cind avem particule identice, acestea sunt *discernabile*. Astfel, putem urmari evolutia unei particule anume si spune: "Aha, asta era prima particula". Iar faptul ca le putem urmari separat in-seamna ca le putem discerne.

A discerna insa particule identice in mecanica cuantica nu mai este atat de usor, daca nu imposibil. Sa ne imaginam situatia unui singur electron: functia de unda evolueaza, iar eu pot sa-l gasesc intr-o anumita pozitie cu a anumita probabilitate. Daca il gasesc acolo, functia lui de unda "colapseaza", si eu stiu sigur ca in momentul imediat ulterior va fi acolo. Dar unde a fost inainte? Desigur, nu pot spune nimic. Daca am acum doi electroni, acelasi lucru se intimpla: functia de unda totala $\psi(x_1, x_2)$ evolueaza, si eu am anumite sanse sa gasesc cei doi electroni in anumite pozitii. Dar pot eu spune unde au fost ei intre timp, inainte de masuratoare? Nici gind! Mai rau, electronii isi pot schimba pozitile intre ei, fara ca eu sa banuiesc! Concluzia este una singura: cind detectez cei doi electroni, nu mai pot spune care sunt. Ei au devenit *indiscernabili*.

In consecinta, cum eu nu pot spune care particula este intr-o pozitie x_1 si care in cealalta x_2 , pot la fel de bine spune ca *probabilitatea* de a gasi prima particula in x_1 si a doua particula in x_2 este aceeaasi cu cea de a gasi a doua particula in x_1 si prima in x_2 . Matematic, acest lucru se scrie ca:

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2 \quad (5.179)$$

Alegerea de mai sus exprima deja o *restringere* a spatiului Hilbert al functiilor 5.174 in cazul particulelor indiscernabile. In cazul general, nu toate functiile de unda 5.174 reprezinta deci posibile stari cuantice.

Situatia din mecanica cuantica se dovedeste chiar mai complexa decit exemplul de mai sus. Astfel, exemplul ales ne spune ca functiile de unda difera pina la o constanta complexa atunci cind schimbam coordonatele intre ele. Pauli a aratat insa ca aceasta constanta nu poate lua decit doua valori -1 si $+1$, depinzind de ce tipuri de particule sunt cele doua, *fermioni* sau *bosoni*:

$$\text{fermioni: } \psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1) \quad (5.180)$$

$$\text{bosoni: } \psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1) \quad (5.181)$$

In cazul general, pricipiul lui Pauli se exprima sub forma: *la schimbarea a doua coordonate, functia de unda este simetrica in bosonilor si antisimetrica in cazul fermionilor*. Observam ca cazul general se refera la orice coordonate care pot fi schimbate, incluzind spinii! Pentru doi electroni cu spin, avem deci $\psi(s_1, x_1, s_2, x_2) = -\psi(s_2, x_1, s_1, x_2)$ unde se observa ca am schimbat *numai* coordonatele pentru spin.

Vom discuta consecintele acestui principiu, si vom prezenta o scurta demonstratie a lui in sectiunea urmatoare. Acum vom prezenta cum principiu de mai sus explica *principiul de excluziune*, mentionat in sectiunea ?? pentru fermionii care nu interactioneaza intre ei. Astfel, datorita lipsei interactiunii, a doua parte a potentialului 5.176 dispare. In cazul a doua particule fara spin avem:

$$V(x_1, x_2) = U(x_1) + U(x_2) \quad (5.182)$$

si ecuatia lui Schrodinger pentru undele stationare se reduce la:

$$\left[\frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + U(x_1) + U(x_2) \right] \psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2) \quad (5.183)$$

Pentru ca particulele nu interactioneaza intre ele, am putea rezolva mai inti ecuatia stationara pentru unei singure particule:

$$-i\hbar \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + U(x) = E_n u_n(x) \quad (5.184)$$

si verifica a ca vectorul de unda

$$\psi(x_1, x_2) = u_m(x_1)u_n(x_2) \quad (5.185)$$

este o solutie a ecuatiei 5.183 pentru $E = E_m + E_n$. Spunem ca in acest caz particule ocupa nivelele de nergie E_m si E_n .

Daca consideram ca cele doua apticule sunt fermioni, vedem ca solutia aleasa 5.186 nu este simetrica. dar aceasta nu este o problema majora, caci putem "simetriza solutia", si verifica direct ca solutia

$$\psi(x_1, x_2) = u_m(x_1)u_n(x_2) - u_n(x_1)u_m(x_2) \quad (5.186)$$

satisface 5.183 si este si antisimetrica. Cu toate acestea, solutia d emai sus are o problema: ea devine nula in cazul in care celel doua particule ocupa aceleasi nivele $m = n$! Cu alte cuvinte, cele doua particule nu mai pot ocupa ambele nivelul $m = n$. (Degenerare?)

In general se arata ca, pentru ca functia de unda a fermionilor sa fie antisimetrica, *fermionii care nu interactioneaza nu pot ocupa nivele de energie corespunzatoare acelorasi numere cuantice*.

Fermioni si bosoni

lamuresc de ce numai doua.

arat ca din teoria relativitatii iese ca particulele cu spin n sunt bosoni si cele cu spin $(2n+1)/2$ sunt fermioni

5.5 Mecanica cuantica relativista pentru un electron

Considerentele de pina acum referitoare la mecanica cuantica nu au luat in calcul teoria relativitatii a lui Einstein. In cazul toeriei relativitatii resctrinse (vezi sectiunea ??) aceasta ne spune ca, daca alegem coordonatele $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ spatiu-timpul 4-dimensional este "izotrop". Aceasta insemana ca, facind substitutiile de mai sus in orice ecuatie fizica, marimile (x_1, x_2, x_3, x_4) trebuie sa apara in acelasi fel in ea. Practic, nici una din coordonatele (x_1, x_2, x_3, x_4) nu joaca un rol preferential.

5.5.1 Ecuatia lui Dirac

Ecuatia lui Scrodinger 5.39 nu este inasa relativistic invarianta. Chiar facind substitutia $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$, timpul joaca un rol preferential: el apare derivat doar o data, in timp ce pozitia apare derivata doar de doua ori.

Acest lucru nu este inasa suprinzator, daca observam ca impulsul apare sub forma patratica in operatorul energie 5.169, dind derivata de doua ori dupa pozitie. Observam inasa ca aceasta forma patratica dispare daca scriem forma relativista ?? a energiei pentru o *particula libera*:

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (5.187)$$

Impulsul apare aici ca patrat sub radical, deci am putea spune "aproape liniar". Am putea fi tentati sa inlocuim in relatia de mai sus impulsul p cu operatorul corespunzator, si apoi sa folosim postulatul al treilea ?? al mecanicii cuantice. Cu toate acestea, procedind in aceste fel am obtine o ecuatie ?? a evolutiei temporale care nu mai este lineara in vectorul de unda.

Privind inasa relatia clasica de mai sus, vedem ca putem cere operatorului $\hat{H}$ *numai* sa indeplineasca relatia:

$$\hat{H}^2 = c^2 \hat{p}^2 + m_0^2 c^4 \quad (5.188)$$

Ar exista atunci sansa ca el sa fie si linear in opratorul impuls, si sa indeplineasca relatia de mai sus! Linearitatea in impuls ne-ar da atunci o derivata de ordinul intii in pozitie, pentru ca si derivata la timp din ecuatia 5.39 este de ordinul intii. O prima conditie a relativitatii, si anume ca marimile $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ sa joace un rol identic, ar fi atunci satisfactua. Sa incercam deci o forma lineara in impuls a operatorului $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \sum_{i=\{x,y,z\}} c \hat{\alpha}_i \hat{p}_i + m_0 c^2 \hat{\beta} \quad (5.189)$$

In relatia de mai sus am introdus viteza luminii c si energia de repaus $m_0 c^2$ pentru a obtine $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ *adimensionale*. In plus, am ales notatia de operatori pentru $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$, anticipind ca ei sunt de fapt operatori actionind asupra vectorului de unda.

Cu toate acestea, pentru a pastra liniaritatea, ei nu trebuie sa fie nici operatori de impuls nici de pozitie, si deci ei pot fi numai operatori datorati unor *grade intrinseci aditionale de libertate*. In consecinta, acestia vor si comuta cu operatorii de impuls:

$$[\hat{\alpha}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (5.190)$$

Relatiile pe care trebuie sa le indeplineasca α si β se obtin atunci impunind ca patrutul operatorului $\hat{H}$ sa indeplineasca relatia 5.188. Folsind relatiile de comutare precedente, se poate verifica direct ca operatorul $\hat{H}^2$ se scrie ca:

$$\frac{\hat{H}^2}{c^2} = \beta^2 m_0^2 c^2 + \sum_i \hat{\alpha}_i^2 \hat{p}_i^2 + \sum_i (\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i) \hat{p}_i + \quad (5.191)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_j) \hat{p}_j \hat{p}_k \quad (5.192)$$

Prin comparatie directa cu ecuatie 5.188 vedem ca urmatoarele relatii trebuie sa fie indeplinite:

$$\hat{\beta}^2 = 1 \quad (5.193)$$

$$\hat{\alpha}_i^2 = 1 \quad (5.194)$$

$$\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0 \quad (5.195)$$

$$\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_j = 0 \quad (5.196)$$

$$(5.197)$$

Mai ramine de stabilit forma operatorilor $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$, si desigur spatiul Hilbert pe care acestia actioneaza (cu alte cuvinte ce fel de grade aditionale de libertate reprezinta ei).

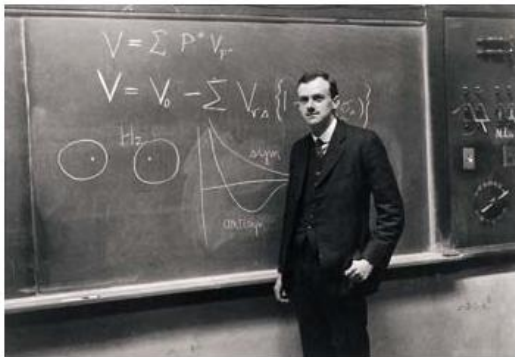


Figure 5.18: Dirac in persoana. Ghici ce e pe tabla? De pe <http://www.chm.bris.ac.uk/emr/Images/pamd.gif>

Pentru inceput, este clar ca operatorii $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ nu sunt niste simple numere, pentru ca atunci ei ar fi egali cu 1 din primele doua relatii de mai sus, si n-ar mai indeplini urmatoarele doua relatii. Pe de alta parte, relatii de genul celor de mai sus sunt des intilnite in operatii cu matrici. Astfel, se poate verifica direct ca *matricile lui Pauli*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.198)$$

indeplinesc relatia:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad (5.199)$$

care este identica cu ultima relatie din 5.193. Cu toate acestea, ele nu indeplinesc relatiile ramase.

P.M. Dirac, in ..., a reusit sa construiasca un set de matrici $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ care indeplinesc *toate* relatiile 5.193. Acestea matrici sunt insa de ordin 4, si au urmatoarea forma:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (5.200)$$

In relatiile de mai sus, pentru simplitatea formei, am scris 0 in loc de matricea nula de ordin doi 0_2 si 1 in loc de matricea unitate de ordin doi I_2 . Pentru claritate, cele 4 matrici $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ se scriu atunci:

$$\hat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.201)$$

$$\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.202)$$

Daca am gasit matricile $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ care sa indeplineasca toate relatiile 5.193, ne putem intreba care este vectorul de unda al electronului. Alegerea cea mai evidenta este desigur o forma matriceala asemanatoare celei ?? introduse pentru electronul cu spin:

$$|\nu\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, x) \\ \psi_2(x, y, x) \\ \psi_3(x, y, x) \\ \psi_4(x, y, x) \end{pmatrix} \quad (5.203)$$

Practic, spatiul Hilbert al vectorului de unda este multimea tuturor matricilor de mai sus, normalizate, in care $\psi_i(x, y, x)$ sunt functii complexe de coordonatele pozitiei. Am putea spune ca electronul are in acest caz 4 grade de libertate intrinseci aditionale. Clasic, el s-ar putea afla in starea 1 si pozitia (x, y, x) , sau in starea 3 si pozitia (x', y', x') .

Operatorii $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$ actioneaza atunci ca niste multiplicatori de matrici. Ei actioneaza astfel asupra elementelor matricii, mixind intre ele componentele $\psi_i(x, y, x)$, fara insa sa actioneze direct asupra pozitiei. Relatia 5.190 asumata se dovedeste atunci corecta.

Putem incerca acum sa scriem atunci acuatia relativistica a lui Dirac pentru miscarea electronului liber. Pentru aceasta, nu trebuie decit sa inlocuim operatorii 5.201 obtinuti in relatia 5.189, si sa aflam operatorul $\hat{H}$. Daca utilizam notatiile cunoscute (pentru energie ? sa nu creez confuzie..)

$$\hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{p}_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (5.204)$$

ecuatiea lui Dirac se scrie atunci explicit ca:

Sa spun ca operatorii de mai sus arata la fel daca utilizez $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$. Sau sa o pun sub o forma relativista.

Daca ridicam la patrat ecuatiea evolutiei temporale a vectorului de unda ??, vedem ca putem scrie:

$$(i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\nu\rangle = \hat{H}^2 |\nu\rangle \quad (5.206)$$

Datorita formelor speciale 5.201 ale operatorilor $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$, relatia 5.188 dintre operatori este acum indeplinita. Ca atare putem

$$\begin{pmatrix} \hat{E} - mc^2 & 0 & -c\hat{p}_z & -c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \\ 0 & \hat{E} - mc^2 & c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & c\hat{p}_z \\ -c\hat{p}_z & -c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) & \hat{E} + mc^2 & 0 \\ -c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & c\hat{p}_z & 0 & \hat{E} + mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.205)$$

inlocui in relatia precedenta forma patratica a operatorului $\hat{H}$ cu cel dat de 5.188. Avem atunci:

$$(i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = [c^2(-i\hbar)^2 \nabla^2 + m_0 c^4] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (5.207)$$

ceea ce se reduce la o ecuatie identica pentru fiecare componenta ψ_i :

$$\nabla^2 \psi_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \square \psi_i = \frac{m_0 c^2}{\hbar^2} \psi_i \quad (5.208)$$

Ecuatia de mai sus se numeste ecuatie Klein-Gordon, si ea exprima foarte bine forma relativista. Astfel, aici coordonatele $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ apar sub aceeasi forma, si sunt nediscriminate, daca ne reamintim definitia ?? a operatorului $\square$. Cu toate ca am fi poate tentati sa interpretam ecuatie d mai sus in termenii potentialelor retardate, asa cum am vazut la electromagnetism si relativitate, acest lucru nu mai e posibil, pentru ca functia insasi apare si in partea din dreapta ecuatiei.

Pentru aceasta, vom proceda ca in sectiunea ??, inlucuiind operatorii impulsurilor particulei libere $\hat{p}_i$ cu *operatorii impulsurilor generalizate*:

$$\hat{p}_i \rightarrow (\hat{p}_i - eA_i) \quad (5.209)$$

unde $i = x, y, z$. In plus trebuie sa adaugam la electron energia acumulata in cimpul electrostatic $\Delta E = e\phi$. Ecuatie lui Dirac 5.189 se rescrie atunci:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\sum_{i=\{x,y,z\}} c\hat{\alpha}_i (\hat{p}_i - eA_i(\mathbf{r}, t)) + m_0 c^2 \hat{\beta} + e\phi(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t)$$

Pentru simplificarea formelor ecuatiilor, ometem de acum incolo sa scriem explicit dependenta de timp si pozitie $(\mathbf{r}, t)$. Incidential observam ca aceeasi ecuatie se obtine mai elegant daca utilizam forma relativistic invarianta ?? a ecuatiei lui Dirac, si folosim impulsul 4-dimensional $(\hat{p}_\gamma - eA_\gamma)$ unde $\gamma = 1, 2, 3, 4$ si $A_\gamma = \{A_x, A_y, A_z, i\phi\}$, asa cum suntem obisnuiti in teoria relativitatii. Practic, in ecuatie precedenta, termenul cu $e\phi$ este mutat in cealalta parte a ecuatiei.

In continuare facem urmatoarea schimbare de variabila:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right] \quad (5.211)$$

Aici practic $\varphi(\mathbf{r}, t)$ si $\chi(\mathbf{r}, t)$ sunt introduse pentru a lua avantaj de forma matricilor $\hat{\alpha}$ si $\hat{\beta}$, si deci ele sunt matrici de ordinul 2, date de:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (5.212)$$

Exponentiala $\exp[-im_0 c^2 t / \hbar]$ a fost introdusa 5.211 pentru a "elimina" energia de repaus a electronului. Astfel, deoarece energia relativistica de repaus a electronului este $E_0 = m_0 c^2$, ne putem astepta ca functia de unda a electronului sa aiba o variatie majora cu frecventa $E_0 / \hbar = m_0 c^2 / \hbar$ conform discutiei din sectiunea ?? . Putem "elimina" aceasta variatie daca facem substitutia precedenta si calculam practic deviatiiile φ si χ de la aceasta variatie.

Avem atunci: Dezvoltind matricile de mai sus, si scriind pe componente, obtinem sistemul:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=\{x,y,z\}} c\hat{\sigma}_i (\hat{p}_i - eA_i) \chi + (e\phi) \varphi \quad (5.214)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum_{i=\{x,y,z\}} c\hat{\sigma}_i (\hat{p}_i - eA_i) \varphi + (e\phi - 2m_0 c^2) \chi \quad (5.215)$$

Sa renunt la suma si sa pun notatia lui Einstein? Sa privim atent ecuatie a doua. Astfel, pentru ca energia in cimp electrostatic este mult mai mica decat energia de repaus a electronului, putem scrie $e\phi \ll 2m_0 c^2$. Aceasta inseamna ca termenul $e\phi$ poate fi ingnorat in prima aproximatie.

La fel se poate arata ca si termenul din partea din stanga poate fi neglijat. Astfel ne asteptam ca $i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sa fie de ordinul $E\chi$, din postulatul al treilea al mecanicii cuantice ??.

5.5.2 Spinul electronului

In sectiunea ?? am introdus spinul electronului ca un grad aditional de libertate, cu ajutorul caruia am vazut ca se explica corect ordinea atomilor in tabelul periodic al elementelor. Clasic vorbind, este ca si cum electronul ar putea lua doua ... diferite. In experimentul lui el se manifesta ca un *moment magnetic aditional* care se releva in prezenta cimpului magnetic. Cu toate acestea, caracterul cu totul neclasic al acestui moment magnetic s-a vazut din faptul ca orientarea sa ia in experiment mereu doua valori discrete, niciodata o valoare intermediara. De aceea am vazut ca este mai bine sa privim spinul electronului nu ca un moment magnetic ca in electromagnetism, ci ca un grad aditional de libertate in care electronul poate fi $(1/2$ sau $-1/2)$, si care se manifesta in plus si magnetic.

In aceasta sectiunea vom lamuri mai bine aceste aspecte, *deducind* spinul si proprietatile sale. Caci marele succes al ecuatiei lui Dirac a constat nu atat in compatibilitatea cu teoria relativitatii restrinse, cit in *deducerea* teoretica a spinului, cu ecuatie completa care il descrie, ca rezultat al acestei compatibilitati. Sa incercam deci sa deducem si noi ecuatie pentru spin, pornind de la ecuatie lui Dirac.

Pentru a pune in evidenta spinul, trebuie insa sa incercam sa scriem ecuatie lui Dirac nu pentru un electron liber, ci pentru unul aflat sub influenta cimpului electromagnetic. Aceasta pentru ca el apare experimental numai in cimp magnetic, altfel in experiment nu putem face distinctia intre electroni aflati in diferite stari ale spinului.

$$i\hbar \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \sum_{i=\{x,y,z\}} c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{p}_i - eA_i)\varphi \\ (\hat{p}_i - eA_i)\chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5.213)$$

Pe de alta parte, energia de mai sus E a fost "corectata" de energia de repaus $m_0 c^2$ prin substitutia 5.211, si ca atare este mult mai mica decit ea daca consideram miscari nerelativiste. (Cumva asumtia de mai sus selecteaza si electronii si nu pozitronii. Cum? De ce?). Avem deci:

$$|i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}| \approx |E||\chi| \ll m_0 c^2 |\chi| \quad (5.216)$$

Daca utilizam si aceasta aproximatie, a doua ecuatie din 5.214 devine

$$0 = \sum_{i=\{x,y,z\}} c \hat{\sigma}_i (\hat{p}_i - eA_i) \varphi + (-2m_0 c^2) \chi \quad (5.217)$$

si deci

$$\chi = \frac{1}{2m_0 c} \sum_i \sigma_i (\hat{p}_i - eA_i) \varphi \quad (5.218)$$

Cum marimea $|\hat{p}\varphi| \approx |p||\varphi|$, unde p este impulsul electronului in miscare, vedem ca deoarece $p \ll m_0 c$ pentru miscari nerelativiste, relatia de mai sus ne da $|\chi| \ll |\varphi|$. Pastrand insa valoarea lui χ obtinuta mai inainte, si inlocuind-o in prima ecuatie 5.214, avem:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i,j=\{x,y,z\}} c \hat{\sigma}_i (\hat{p}_i - eA_i) (\hat{p}_j - eA_j) \chi + (e\phi) \varphi \quad (5.219)$$

Putem simplifica ecuatiea de mai sus, daca folosim urmatoarea relatie:

$$\sum_{i,j=\{x,y,z\}} c \hat{\sigma}_i (\hat{p}_i - eA_i) (\hat{p}_j - eA_j) = \quad (5.220)$$

$$= \sum_{i,j=\{x,y,z\}} c (\hat{p}_i - eA_i) (\hat{p}_j - eA_j) - e\hbar \sum_{i=\{x,y,z\}} \hat{\sigma}_i B_i \quad (5.221)$$

unde B_i sunt componentele cimpului magnetic. Relatia de mai sus se deduce printr-un calcul in care se detalieaza operatorii σ_i cu formele lor ?? si se utilizeaza relatia ?? epntru cimpul vectorial A_i . Inlocuim relatia de mai sus in ecuatiea 5.219 obtinem:

sau sa pun vectorii?
Avem atunci:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m_0} (\hat{p} - e\hat{A})^2 + e\phi - \frac{e}{m_0} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \vec{B} \right] \varphi \quad (5.222)$$

Vedem ca ecuatiea de mai sus se rescrie:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m_0} (\hat{p} - e\hat{A})^2 + e\phi - \frac{e}{m_0} \vec{S} \vec{B} \right] \varphi \quad (5.223)$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (5.224)$$

Am scris ecuatiea sub forma de mai sus pentru a scoate in evidenta *operatorul de spin* $\vec{S}$. In fapt noi am *dedus* acest operator, care este dat mai sus. Faptul ca operatorul $\vec{S}$ reprezinta intr-adevar spinul electronului poate fi verificat din urmatoarele argumente.

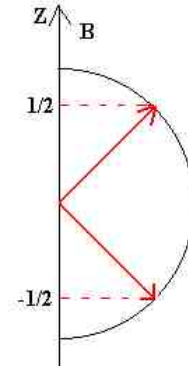


Figure 5.19: Actiunea operatorului de spin. Alta poza, vezi ce vrei sa arati aici

In primul rind, in situatia nerelativista am aratat ca $|\chi| \ll |\varphi|$. Ca atare, vectorul de unda al electronului este descris aproximativ de

$$\psi(\mathbf{r}, t) e^{im_0 c^2 t/\hbar} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{r}, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.225)$$

si deci el are efectiv doua componente. Ca atare, in acest caz electronul are un grad aditional de libertate, care insa poate lua doar doua valori (vezi discutia din sectiunea referitoare la postulatul starii cuantice ??).

Aceste doua valori se regasesc si in valorile proprii ale operatorului spin. Astfel, considerind ca exista o masuratoare care sa fie descrisa de operatorul S_z (vezi postulatul 2 al mecanii cuantice), aceasta masuratoare ar da doar doua valori, pentru ca operatorul S_z are doar doua valori proprii. Acestea se obtin din ecuatiile acestor doua valori si vectori proprii:

$$S_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.226)$$

$$S_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.227)$$

Practic, relatiile de mai sus ne spun ca singurele valori proprii ale lui S_z sunt $\hbar/2$ si $-\hbar/2$. Se observa apoi ca vectorii proprii sunt intr-adevar vectori ortogonali ce formeaza o baza:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \varphi_1(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_2(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.228)$$

Masuratoarea atasata operatorului S_z (sau invers) este atunci masurarea intr-un cimp magnetic B_z . Practic, in acest cimp magnetic, conform ecuatiei 5.223 electronul se comporta ca si cum ar avea un moment magnetic clasic dat de cele doua valori proprii ale lui S_z :

$$\mu_z = \pm \frac{e}{m_0} \frac{\hbar}{2} = \pm \mu_B \quad (5.229)$$

care nu este decit magnetonul Bohr-Procopiu dat de relatia ??!

De unde provine? Initial s-a presupus ca electronul se roteste in jurul axei sale.

Lucrarea retrasa, viteza periferica mai mare ca viteza luminii! calculeaza si tu!

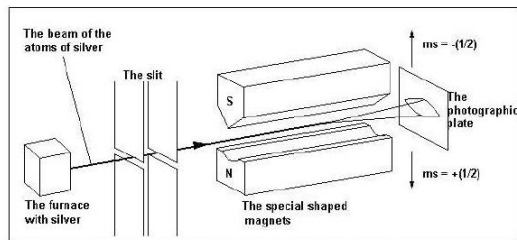


Figure 5.20: stern-gerlach-spin, pune rezultat original

In final nu putem decit sa admiram cum ecuatia lui Dirac (pe care am dedus-o incercind sa facem ecuatia lui Shrodinger relativistic invarianta) prezice spinul electronului, inclusiv valoarea lui experimental observata in experiment.

Desigur insa ca ea aduce cu sine alte lucruri cu care trebuie sa ne obisnuim, si anume ca electronul este descris nu de o singura functie de unda complexa, ci de patru functii de unda complexe, care din fericire se reduc la doua pentru cazul nerelativist (vezi ecuatia 5.225).

o infinitate de electroni ocupa intr-adevar banda de energie negativa, noi nu observam acest lucru in experimente (pentru ca noi masuram mereu electroni de energie pozitiva). Ei ar forma atunci un fel de "background" aproape invizibil. Ceea ce am putea insa observa este *disparitia* unui electron din aceasta banda, ca cel deplasat in banda pozitiva prin absorbtia fotonului. Aceasta disparitie ar lasa in urma un "gol".

Dirac a studiat miscarea *golului*, si a reusit sa exprime ca o miscarea ca o particula de *energie pozitiva* si avind *sarcina electrica pozitiva*. (este masa lui egala cu masa electronului? Sau nu necesar?) Apoi, a zis, noi nu putem "vedea" infinitatea de electroni din banda de energie negativa, ci numai lipsa de electroni din aceasta banda, adica *golurile*. Atunci, pentru noi, golurile ar fi niste particule oarecare, care au deci energie pozitiva si sarcina electrica tot pozitiva.

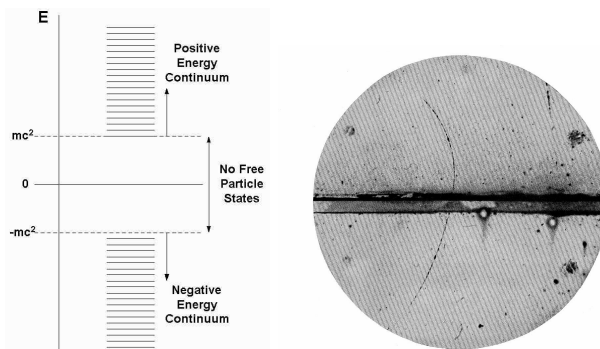


Figure 5.21: Antiparticule + Carl D. Anderson, Physical Review vol. 43, p. 491 (1933)

5.5.3 Antiparticule

Obtin mai intii nivelele de energie din ecuatia lui Dirac pentru electronul liber, si eventual si baza.

Nivelele de energii astfel obtinute sunt reprezentate in figura 5.21. Ceea socheaza in primul rind este faptul ca ele se intind la infinit catre valorile negative. Acest lucru nu o fost obtinut de exemplu in cazul nivelelor de energie ale unui atom unde, desi acestea puteau avea valori negative, o anumita valoare minima exista.

Dificultatea se observa atunci daca luam in calcul completarea nivelelor de energie cu electroni, pe baza principiilor care le-am folosit la atom: nivele de energie se completeaza de la energia minima in sus, pentru fiecare stare cuantica cite un electron. Ori acest lucru *nu* este posibil in diagrama 5.21: intru-cit nivele de energie se intind catre $-\infty$, unde punem primul electron, dar al doilea, etc...?

Singura solutie pe care Dirac a intezarit-o a fost *sa admitem* ca exista deja o infinitate de electroni care completeaza nivelurile negative. Solutia pare desigur greu de acceptat, si vom vedea in capitolul de electrodinamica cuantica ca ea *nu* este in realitate corecta. In realitate, lumea *nu* este umpluta cu o infinitate de electroni de energie negativa.

Cu toate acestea, solutia ad-hoc a lui Dirac descrie corect citeva efecte ce vor aparea clare in electrodinamica cuantica. Astfel, *sa presupunem pentru moment* ca nivelele de energie sunt completate pina la jumătate cu o infinitate de electroni de energie negativa. Atunci, prin absorbtia unui foton (vezi 5.21) un electron s-ar putea deplasa pe un nivel de energie pozitiva, intocmai cum am descris absorbtia de fotoni la atom. Dupa cum se vede din figura, energia fotonului trebuie sa fie mai mare decit $E_{min} = 2m_0c^2$, sau frecventa lui sa fie mai mare decit $E_{min}/h = 2m_0c^2/h = \dots$ ceea ce inseamna ca fotonul trebuie sa fie in banda radiatiilor γ (verifica).

O absorbtie ca cea precedenta nu are nimic deosebit, inasa pina cind incercam sa o interpretam. Astfel, a zis Dirac, daca

Precum absorbtia unui foton creeaza un *gol* si un electron, tot asa si "golul", daca intilneste un electron, se poate anihila cu aceasta, creeind un photon. Acest din urma proces nu este practic decit dezexcitarea unui electron de pe nivelele pozitive, care revine in locul ocupat de "gol" pe nivele negative, creeind un foton. In interpretarea "golului" ca particula inasa, noua ni se va parea ca un lucru extraordinar se intimpla: o particula de sarcina pozitiva se *anihileaza* cu electronul negativ, generind lumina! Practic, relatia de legatura dintre energie si masa al lui Einstein se manifesta pe deplin: masele a doua particule (ambele avind deci mase si energii pozitive) se transforma cu totul in energie luminoasa. Nici ca se putea mai spectaculos! Ca atare, noua particula a fost denumita "*antiparticula*", pentru ca ea se anihileaza celelalte particule, generind lumina.

Este bine sa atragem atentia asupra denumirii, caci ea pare sa sugereze ca o antiparticula are totul "anti-", ori acest lucru nu este adevarat. *O antiparticula ne apare noua ca o particula obisnuita*, avind masa si energie pozitiva, cu sarcini electrice si atractie gravitationala normala, etc. Ceea ce o face "anti-" este numai proprietatea surprinzatoare de a se anihila cu particula sa si genera lumina.

Care este inasa antiparticula electronului? Dupa cum am discutat, ea trebuie sa aiba energie pozitiva si sarcina pozitiva. Prima propunere a fost ca aceasta sa fie protonul, inasa Oppenheimer a aratat in 1930 ca nu aceasta este cazul, pentru ca electronul si protonul din atom s-ar anihila imediat, generind lumina. Primul care sa observe o particula de aceeaasi masa ca electronul dar de sarcina electrica pozitiva a fost C. Anderson in 1930. Acesta a utilizat o "camera cu ceata" inventata de C.T.R Wilson la sfirsitul secolului trecut (?).

"Camera cu ceata" inventata de Wilson consta dintr-un compartiment in care aerul este *suprasaturat* cu vapori de apa (descrie mai mult). O particula ce intra cu viteza mare in compartiment ionizeaza atomii pe care-i intilneste in cale, cedindu-le o parte mica din energia sa cinetica. Atomii ionizati devin inasa

centre de condens pentru aerul suprasaturat din jurul lor, si ca atare pe regiuni mici in jurul lor aerul condenseaza. Atunci, practic, particula in miscare lasa o urma de aer condensat care reflecta exact traiectoria sa. Procesul este asemanator (identic?) cu cel prin care un avion cu reactie lasa pe care o "linie" in urma sa. Desigur ca in cazul camerei Wilson este surprinzator cit de precisa poate fi, caci ea poate masura intr-adevar urma lasata de particule individuale (electroni, protoni, etc.).

In fig.5.21 reproducem o masuratoare originala a lui C. Anderson. Putem astfel vedea urma unei particule intr-o "camera cu ceata". Aceasta este curbata, pentru ca camera cu ceata a fost plasata intr-un cimp magnetic puternic, pentru a masura raportul dintre sarcina electrica si masa (precum in experimentul lui ... prezentat in sectiunea ??). Cu toate acestea, semnul sarcinii electrice nu poate fi determinat atita timp cit nu stim in ce directie a circulat particula pe urma sa.

Tinind cont de orientarea camerei cu ceata si a cimpului magnetic, particula din figura 5.21 prezinta fie o sarcina pozitiva care vine din spatiul cosmic, fie una negativa care vine din Pamint. Pentru a discrimina dintre aceste posibilitati, Anderson a montat o placa de plumb in mijlocul camerei pentru a incetini particulele. Particula va avea o viteza mai mare (si deci o raza de curbură mai mare) inainte a trece prin placa, si o viteza mai mica (si deci si o raza de curbură mai mica) dupa ce trece prin placa. Din figura 5.21 putem vedea atunci ca raza de curbură de jos este mai mica decit cea de sus, si deci electronul circula de sus in jos (TREBUIA SA FIE INVERS!)

Ca atare, a concluzionat Anderson, particula vine din spatiul cosmic si are deci sarcina pozitiva!. Avind in rest aceleasi proprietati ca electronul, el a denumit aceasta particula un "electron pozitiv", mai tirziu denumit *pozitron*. In acest fel *antiparticulele* si-au facut aparitia in experientele fizicienilor, desi un spatiu umplut cu o infinitate de electroni (cum a presupus Dirac) nu exista in realitate. Interpretarea sa se apropie insa de urmatoarea teorie cuantica pe care o vom studia (si anume *electrodinamica cuantica*), in care prezenta pozitronilor si electronilor impreuna in Univers este naturala.

5.6 Cuantificarea luminii. Fotonii

Am vazut in sectiunea ?? ca lumina este o unda electromagneticica. Ea are aceeasi viteza c in vid ca undele electromagnetice. Am insistat in capitolul de relativitate pe faptul ca marimea c (care joaca un rol crucial), trebuie privita mai degraba ca viteza oricarei unde electromagnetice in vid, decit in particular ca viteza luminii. Cu alte cuvinte, teoria electromagnetica este cea care ne "releveaza" aspectul relativist. Lumina este doar o manifestare particulara a electromagnetismului. Abordarea precedenta este desigur pedagogica si, in limitele fizicii clasice, justificate. Cu toate acestea, luind in calcul mecanica cuantica, stuatia poate fi si inversata.

Astfel, cimpul electromagnetic nu poate ramine clasic, ci trebuie cuantificat, ca orice alta marime clasica pe care o vom intilni de acum incolo! Sau, mai bine zis, el este cuantificat deja de natura, noi trebuie sa descoperim aceasta cuantificare. Pasii initiali au fost deja facuti. Astfel, am vazut in sectiunile ?? cum lumina este absorbita si emisa in pachete ("cuante") de unda de energie $h\nu$, numite *fotoni*. Pe acesti fotoni ii putem considera (asa cum vom vedea) nu numai caramida de baza a luminii, dar si caramida de baza a cimpului electromagnetic in general! Si atunci putem spune ca, daca ei se manifesta relativistic, atunci e natural ca si cimpul electromagnetic sa se comporte relativistic.

Dar sa ne impartam putin de aceste discutii mai degraba "filozofice" (in sensul foarte larg si comun al cuvintului), si sa trecem direct la identificarea experimentala a acestor *fotoni*. In Fig.?? prezentam o figura de difractie obtinuta cind intensitatea luminii este redusa cit se poate de mult. Est practic acelasi tip de masuratoare ca cel din Fig.?? (care era pentru electroni).

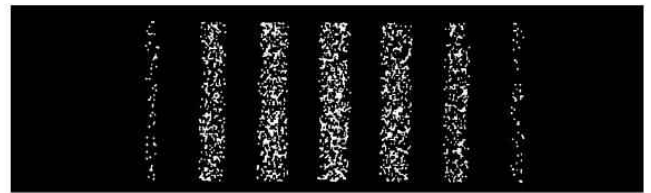


Figure 5.22: O poza de difractie in care intensitatea luminii a fost redusa la minim. Punctele sunt excitatii locale determinate de fotoni individuali. Luata din fisier. Cauta sursa originala.

Cind intensitatea luminii este redusa la minim, vedem ca pelicula fotografica (sau mai modern, camera digitala), inregistreaza anumite puncte luminoase. Fiecare punct luminos este de fapt un foton inregistrat individual! Rezultatul poate parea surprinzator caci Einstein, atunci cind a introdus fotonul ca o cuanta de lumina, a trebuit sa recurga la complicatele analize ale lui Plank, discutate in sectiunea ?. Ori noi acum vedem in Fig.?? fiecare foton individual direct. Cu toate acestea, imagini ca cele obtinute mai sus, in care detectorii sa fie sensibili la un singur foton, au fost obtinute doar il ultimele zeci de ani, si deci nu erau valabile pe timpul lui Einstein.

Este surprinzator insa ca ochiul uman, prin constructia lui, este sensibil la absorbtia unui singur foton [?]! Aceasta este normal, pentru ca fiecare molecula ... (cum se numesc?) din ochi absoarbe eficient un foton si transmite semnalul catre creier. Cu toate acestea, noi nu vedem imagini de genul celor din Fig.5.22, continind fotoni individuali, pentru ca exista un fel de filtru catre creier. Acesta lasa sa treaca informatia catre creier numai daca cel putin 9 fotoni sunt receptati intr-un interval de 100 milisecunde. Cu alte cuvinte, ochiul zice da, iar filtrul ba, si noi nu vedem astfel fotonii individuali. Una dintre explicatiile adoptate de biologi este ca in acest mod, ochiul uman a eliminat "zgomotul cuantic" in urma evolutiei.

Din fericire, detectoarele moderne au ajuns sa detecteze relativ usor fotonii individuali si astfel, cel putin in lumea experimentală, se observa o usoara deplasare de interes de la mecanica cuantica a electronilor, la cea a fotonilor. Explicatia este acum usor de vazut. Caracterul de particula al electronilor este unor de observat, pe cind caracterul lor de unda se obtine mai dificil, pentru ca lungimea de unda este mica ($\lambda \approx$). Pe de alta parte, caracterul de unda al fotonilor, care este de fapt unda luminoasa, este de secole linga noi, si extrem de accesibil (uneori difractia se observa cu ochiul liber). Cum acum putem masura si caracterul corpuscular (fotonii) cu ajutorul noilor detectori, nu ne ramane decit sa dam drumul la experimente! In sectiunile rezervate evolutiilor recente din mecanica cuantica (??), vom vedea ca fotonii sunt folositi din plin.

In subsectiunile urmatoare vom incerca sa dam o imagine mai riguroasa asupra fotonilor, pornind de la la metoda generala de cuantificare a unui sistem clasic. Rezultatul va fi nu numai o aplicatie a acestei metode, dar si o exemplificare unei dintre metodele de cuantifiere a unui cimp clasic, numita metoda vibratiilor normale.

5.6.1 Oscilatiile transversale

Am vazut in capitolul de electromagnetism ?? cum, in alegerea (?) Lorentz, cimpul electromagnetic este descris de ecuatiile ??:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_i^2} = j_\nu; \quad \sum_{i=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.230)$$

unde $x_i = (x, y, z, ict)$, $A_\nu = (A_x, A_y, A_z, ic\phi)$ si $j_\nu = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$. In total vedem ca sunt 5 ecuatii, si desigur ca le-am rescris sub forma de mai sus pentru a scoate in evidenta inca o data simplitatea si simetria lor. In plus ne readucem aminte ca primele 4 ecuatii descriu transmiterea unei "informatii" A_ν cu viteza luminii, iar ultima ecuatie este etalonarea Lorentz. Pentru ca discutam despre cimpul electromagnetic in vid, putem scrie in plus $j_\nu = 0$. Vom incerca sa gasim cateva solutii particulare

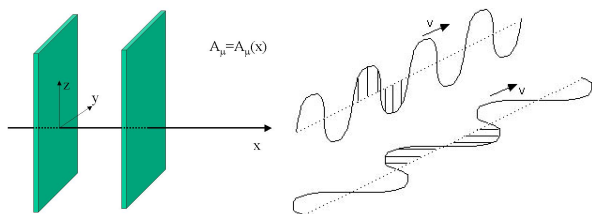


Figure 5.23: a) O unda plana in general. b) Solutia sinusoidala: doar doua polarizatii posibile.

ale ecuatiilor de mai sus, si anume undele plane. Dupa cum se vede in Fig.5.23, pentru o unda plana, valorile cimpului electromagnetic A_ν sunt constante intr-un plan perpendicular pe directia de proagare (in cazul ales x). Avem deci $A_\nu = A_\nu(x)$, si derivatele partiale in raport cu y si z dispar in ecuatiile precedente, epntru ca cimpul este constant in acele directii. Putem rescrie atunci cele cinci ecuatii:

$$\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial t^2} = 0; \quad (5.231)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.232)$$

Se verifica direct ca *doua* dintre solutiile particulare sunt vibratiile transversale sinusoidale date de:

$$A_y(x, y, z, t) = |A| \cos(kx - \omega t + \chi); \quad A_x = A_z = \phi = 0; \quad (5.233)$$

$$A_z(x, y, z, t) = |A| \cos(kx - \omega t + \chi); \quad A_y = A_x = \phi = 0; \quad (5.234)$$

unde $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$ (λ este lungimea de unda, $T = \lambda/c$ este perioada) iar $|A|$ si χ sunt amplitudinea si faza undei. Solutiile de mai sus se numesc *transversale*, pentru ca cimpul A_y sau A_z variaza transversal in directia de miscare (vezi Fig.5.23), si pentru ca in ele *numai* A_y sau *numai* A_z apar (celelate componente fiind in fiecare caz nule).

Folosind relatia $e^{ia} = \sin a + i \cos a$ pentru numerele complexe, si notind $A_{\mathbf{k},p} = |A|e^{i\chi}$ se obisnuieste ca solutiile de mai sus sa se rescrie in general ca:

$$A_{\mathbf{k},p}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k},p} \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + A_{\mathbf{k},p}^* \exp(+i\omega_k t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (5.235)$$

Observam ca suma de mai sus este un numar real, fiind o suma de doua numere complexe conjugate. Un anume tip $(\mathbf{k}, p)$ de oscilatie transversala este definita astfel de catre un vector de unda $\mathbf{k}$ si una din cele doua *polarizatii* p transversale posibile (in cazul de mai sus y sau z). Directia undei este directia lui $\mathbf{k}$, lungimea de unda este $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$, frecventa este $f = \lambda/c = \omega_k/2\pi$ este iar cele doua directii de polarizare sunt perpendiculare pe vectorul de unda $\mathbf{k}$, si perpendiculare una pe

cealalta. O oscilatie transversala particulara $A_{\mathbf{k},p}(\mathbf{r}, t)$ este determinata de amplitudinea sa $|A|$ si faza χ . Aceste doua numere au fost "compactate" in numarul complex $A_{\mathbf{k},p} = |A|e^{i\chi}$, care reprezinta amplitudinea complexa a oscilatiei de tipul $(\mathbf{k}, p)$.

Folosind relatiile 5.233, putem calcula cum arata cimpul electric $\mathbf{E}$ si cimpul magnetic $\mathbf{B}$ al unei astfel de oscilatii transversale. Astfel de exemplu, pentru lumina polarizata de-a lungul y in exemplul ales in Fig.5.23, folosind ecuatiile lui Maxwell ??, avem:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial A_y}{\partial t} \mathbf{j} = \omega |A| \sin(kx - \omega t + \chi) \mathbf{j} \quad (5.236)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{k} = -k |A| \sin(kx - \omega t + \chi) \mathbf{k} \quad (5.237)$$

Acestea sunt tot niste oscilatii sinusoidale, precum vedem si in Fig.5.23, in care cimpurile electric si magnetic sunt perpendiculare unul pe celalat. In sectiunea ?? dedicata dipolului oscilatoriu, am observat cum un tip apropiat de aceste solutii (unde sferice) apar la distante mult mari de sursa decit lungimea de unda.

spune mai mult de lumina experimentala.

5.6.2 Moduri de vibratie in cavitatea rezonanta (quantization cavity)

Revenind acum catre inceputul precedentei sectiuni, ne putem intreba ce se intimpla cu alte solutii decit cele transversale. Sa revenim deci la cazul particular discutat pentru Fig.5.23, si descris de ecuatiile 5.231. Vedem din aceste ecuatii ca solutii de unda plane in care *numai* $A_x \neq 0$ (solutii *longitudinale*) sau *numai* $\phi \neq 0$ (solutii *temporale*) sa apara, nu putem gasi! Astfel, daca incercam sa gasim unde plane pentru care $A_x \neq 0$, dar $A_y = A_z = \phi = 0$, vedem ca ultima ecuatie impune $\partial A_x / \partial x = 0$, si deci A_x nu mai poate varia de-a lungul lui x cum cere ecuatiei undei. La fel se intimpla si cu solutiile unice pentru ϕ .

Interesant e insa ca de acestea oricum *nu avem nevoie*, caci putem construi *orice* cimp electromagnetic in vid numai din undele transversale prezentate mai sus, pentru ca in acest caz cimpul electromagnetic este un cimp asa-numit *transversal* (pentru discutii matematice detaliate, vezi [? ? ?]). Faptul acesta ne permite sa ignoram in cazul clasic oscilatiile longitudinale si cele temporale, din moment ce nu avem nevoie neaparat de ele, si sa spunem ca, clasic, undele plane electromagnetice in vid sunt polarizate *numai* transversal.

Pentru moment, sa consideram si noi aici un cimp vectorial *transversal* oarecare $\mathbf{V}$ (de patrat integrabil zice Messiah), aflat inchis intr-o cavitate cubica de latime L , si care satisface conditii periodice de margine. (aici vezi daca este numita cavitate rezonanta, sau sau quantization cavity, ceea ce cred ca e). Explica ce e.

Cimpul vectorial se poate atunci descompune in orice moment [? ?] ca :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},p} [V_{\mathbf{k},p}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + V_{\mathbf{k},p}^*(t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})] \quad (5.238)$$

Aici $\mathbf{e}_{\mathbf{k},p}$ descriu cei doi vectori unitate care dau directia polarizatiei. Ei sunt deci perpendiculari pe directia vectorului de unda $\mathbf{k}$, si perpendiculari intre ei, formind practic un sistem de axe (in cazul exemplificat in sectiunea precedenta ei erau $\mathbf{x}$ si $\mathbf{y}$). Se vede insa ca avem mereu libertatea de a alege directia unuia dintre cei doi, ceea ce in termeni matematici se numeste "alegerea sistemului de baze". Vectorul de unda $\mathbf{k}$ ia numai valori discrete (datorita conditiilor de margine), date de:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, k_z = \frac{2\pi n_z}{L}; \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z} \quad (5.239)$$

Un vector de unda $\mathbf{k}$ impreuna cu o polarizatie p ne da un mod de vibratie. Coeficientul *complex* $V_{\mathbf{k},p}(t)$ corespunzator acestui mod de vibratie ne spune care este contributia acestuia in cimpul total $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ la un moment dat t . Putem spune atunci ca evolutia in timp a acestui coeficient, data de $V_{\mathbf{k},p}(t)$, ne da maniera in care modul $\{\mathbf{k}, p\}$ *vibreaza*.

Modalitatea de vibratie a modurilor este desigur specifica fiecarui tip de cimp, si se deduce din ecuatiile cimpului. In cazul cimpului electromagnetic $\mathbf{A}$ aceasta se obtine inlocuind in ecuatiile ??, si tinind cont de proprietatile specifice ale modurilor $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ in incinta noastra cu conditii de margine periodice. Vom obtine atunci acestea variaza sinusoidal:

$$A_{\mathbf{k},p}(t) = A_{\mathbf{k},p} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) \quad (5.240)$$

Rezultatul este un pic surprinzator, caci ne-am astepta intr-o prima instanta ca amplitudinea unui mod sa creasca foarte mult la un moment dat daca, de exemplu, la acel moment am aduce o sursa de radiatie (cu o frecventa corespunzatoare) in apropierea regiunii cubice L . Sa nu uitam insa ca, impunind conditii periodice in regiunea cubica, noi de fapt ne-am limitat la cimpurile electromagnetice *rezonante*. Iar pentru acestea este de asteptat ca componentele sa varieze sinusoidal.

In plus, aceste cimpuri rezonante mai au o proprietate specifica, si anume ca energia totala in interiorul incintei este constanta. Aceasta se poate verifica calculind energia totala dintr-un volum V a cimpului electromagnetic, folosind formula ?. Nu vom efectua acest calcul aici (eventual exercitiu cu indicatii), ci prezentam direct rezultatul final:

$$W = \sum_{\mathbf{k},p} W_{\mathbf{k},p} \quad ; \quad W_{\mathbf{k},p} = 2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2 |A_{\mathbf{k},p}|^2 \quad (5.241)$$

Cu alte cuvinte, energia totala a cimpului electromagnetic este nu numai constanta, dar si o suma a "energiei" fiecarui mod de oscilatie. Acest rezultat nu este imediat evident, caci formula energiei totale a cimpului electromagnetic nu este liniara in componentele ei. El se datoreaza cazului particular al cavitatii rezonante.

5.6.3 Cuantificare modurilor de vibratie

Pentru a cuantifica cimpul electromagnetic, putem urmari linia standard a metodei generale de cuantificare a unui sistem clasic descris in sectiunile ?. Astfel, ar trebui sa construim din "pozitiile" clasice pe care le poate avea un cimp electromagnetic, o functie uriasa de unda care sa le cuprinda pe toate!

"Pozitia" unui cimp electromagnetic, este de fapt o situatie clasica anumita. Ea poate fi desemnata in general de toate valorile cimpului $(\mathbf{A}, \phi)$ luate in fiecare punct din spatiu $\mathbf{r}$. Stim valorile in fiecare punct, stim cimpul. O alta "pozitie" a cimpului este data de un alt set de valori in fiecare punct din spatiu. Sa notam atunci o "pozitie" anumita prin cele patru *functii* $\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \phi(\mathbf{r})\} \in F$. Stim aceste patru functii in fiecare punct din spatiu, stim "pozitia" clasica a acestui cimp. F este multimea tuturor acestor functii.

Acum, in mecanica cuantica, conform metodei din ??, forma cuantica a cimpului electromagnetic este o *superpozitie* de aceste "pozitii" clasice. Deci trebuie sa le luam toate functiile $\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \phi(\mathbf{r})\}$ care bila trece prin origine ne da faza oscilatiei.

Acum sa facem o comparatie cu cuantificarea unei particule. Astfel, pozitia particulei x a devenit dupa cuantificare un operator $\hat{x}$ care actioneaza asupra functiei de unda. In cazul nostru, "pozitia" $\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \phi(\mathbf{r})\}$ va deveni si ea un superoperator care actioneaza asupra superfunctiei Ψ si ne da o alta superfunctie Ψ' .

Privind dupa componente, putem spune ca in fiecare punct din spatiu $\mathbf{r}$ avem cite patru operatori $\{\hat{A}_x(\mathbf{r}), \hat{A}_y(\mathbf{r}), \hat{A}_z(\mathbf{r}), \hat{\phi}(\mathbf{r})\}$ actionind in F .

Desi situatia este mai complicata, cu atentie se pot reconstrui toate aspectele cunoscute ale mecanicii cunatice. De exemplu, valoarea medie masurata experimental a cimpului A_x in punctul $\mathbf{r}$ va fi $\langle \Psi | \hat{A}_x(\mathbf{r}) | \Psi \rangle$. Modul de cuantificare schitat mai sus se numeste cuantificare canonica a cimpului. Din fericire pentru noi exista si o alta modalitate, bazata pe cuantificarea modurilor de vibratie, care in final conduce la aceleasi rezultate.

Inainte de a prezenta aceasta modalitate, sa recapitulam putin principalele rezultate ale ultimei sectiuni, obtinute in cazul clasic aflat intr-o incinta rezonanta (sau cuantificata, vezi numele). Astfel, un cimp vectorial oarecare se poate descompune intr-o colectie de "moduri" transversale $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ (vezi ??). Contributia acestuia la cimpul total este data de coeficientul *complex* $V_{\mathbf{k},p}(t)$ 5.251. Variatia acestuia in timp ne da modul in care cimpul oscileaza.

Cind descompunem insa un cimp electromagnetic in aceste oscilatii, vom obtine ca contributia acestui mod variaza sinusoidal. Amplitudinea $|\mathbf{A}|$ si faza χ oscilatiei sinusoidale se regasesc in asa numita amplitudine complexa $A_{\mathbf{k},p}$ a modului de oscilatie $(\mathbf{k}, p)$, care devine astfel un numar complex. In plus, am mentionat ca energia cimpului electromagnetic total dintr-un volum V se scrie atunci in mod remarcabil ca o suma a "energiei" data de fiecare oscilator, conform ??

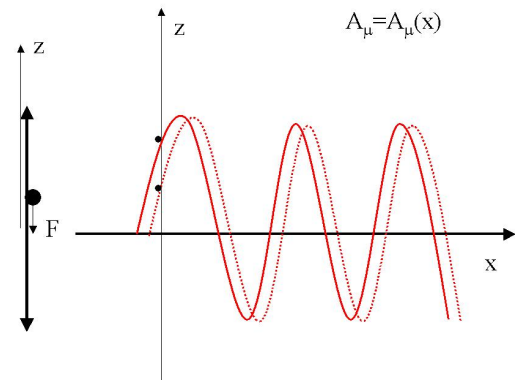


Figure 5.24: Unda plana comparata cu oscilatorul armonic

Sa revenim acum la exemplul din sectiunea ??, si sa consideram acum ca in cavitatea noastra "rezonanta" se afla un singur mod de oscilatie A_z , dat de relatiile ?? sau ??. Dupa cum este prezentat schematic in Fig.5.24, putem obtine amplitudinea $|\mathbf{A}|$ si faza χ a oscilatiei sinusoidale a acestuia, daca am masura cimpul in origine. Am avea atunci $A_z(0, 0, 0, t) = |A| \cos(\omega t + \chi)$, relatie care de fapt se regaseste in ??. Daca ne-am alege o unitate de masura corespunzatoare lui $\mathbf{A}$ in directia z , este ca si cum in capatul vectorului A_z (care l-am desemnat in figura printr-un punct ingrosat) ar exista o bila care oscileaza sinusoidal (armonic) in jurul originii. Amplitudinea acestei miscari este amplitudinea cimpului, iar momentul in care bila trece prin origine ne da faza oscilatiei.

In sectiunea ?? am discutat insa miscarea cuantificata a unei bile oscilatorii. Am vazut acolo cum oscilatorul este descris de o functie de unda, iar pozitia, energia, sau faza lui sunt operatori a caror actiune mediata pe functia de unda ne da valoarea clasica medie masurata in experiment. Nu este deci de mirare ca acelasi lucru se va intimpla si in cazul modului sinusoidal de vibratie din Fig.5.24. Pentru aceasta, sa facem insa identificarile de rigoare.

Astfel, pozitia bilei din origine (fie aceasta q) reprezinta cim-

pul $A_z(0,0,0,t) = |A|\cos(\omega t + \chi)$ la un moment dat, iar amplitudinea miscarii $|A|$ trebuie corelata cu *energia totala* a bilei. Energia unui mod de vibratie a fost insa calculata in 5.241, unde am vazut ca ea are intr-adevar forma asteptata pentru un oscilator sinusoidal. Prin comparatie cu 5.241 putem identifica "masa" bilei. Avem:

$$A_z(t) \leftrightarrow q(t) \quad (5.242)$$

$$2\epsilon_0 V \omega^2 |A|^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 q_{max}^2 \quad (5.243)$$

si deci

$$m = 4\epsilon_0 V \quad (5.244)$$

Starea cuantica a bilei este data de o functie de unda $\phi(q)$, care reprezinta de fapt o superpozitie cuantica particulara a tuturor starilor q posibile. In aceeasi maniera, starea cuantica a modului de vibratie electromagnetic A_z este o superpozitie a tuturor starilor clasice posibile. Cum aceasta este mai dificil de exprimat explicit, vom folosi notatii asemanatoare oscilatorului armonic, si vom construi spatiul Hilbert al acestor superpozitii pornind de la starile stationare.

Din sectiunea ?? stim functiile de unda stationare (pentru care energia este constanta) in cazul oscilatorului armonic. Ele au fost notate simbolic cu $|n\rangle$, iar energia lor este:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (5.245)$$

Utilizind comparatia 5.242, putem spune atunci ca si unda electromagnetica oscilanta are anumite functii de unda stationare, pe care le vom nota tot cu $|n\rangle$. Daca incercam sa masuram energia modului de vibratie pentru acetse stari stationare, vom obtine mereu valoarea E_n . Pentru ele putem spune ca amplitudinea $|A|$ este constanta:

$$2\epsilon_0 V \omega^2 |A|^2 = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (5.246)$$

Precum la oscilatorului armonic, si in cazul modului electromagnetic, *orice* stare cuantica se exprima ca suma liniara a starilor stationare:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (5.247)$$

Pe noi ne intereseaza in mod special amplitudinea clasica $|A|$ si faza χ , desemnate prin amplitudinea complexa $A_{\mathbf{k},p} = |A|e^{i\chi}$. In cazul cuantic, acestea nu se pot inasa masura in acelasi timp, asa dupa cum am discutat in sectiunea ??, si deci nu putem atasa un operator hermitic (o observabila) acestei marimi clasice complexe. Cu toate acestea, acestei marimi i se poate atasa un operator nehermitic, denumit operatorul de anihilare. Aceasta se vede usor daca scriem forma clasica a energiei cimpului electromagnetic 5.241 ca:

$$W_{\mathbf{k},p} = \epsilon_0 V \omega_k^2 (A_{\mathbf{k},p}^* A_{\mathbf{k},p} + A_{\mathbf{k},p} A_{\mathbf{k},p}^*) \quad (5.248)$$

si o comparam cu forma operatorului de energie ?? a oscilatorului armonic:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) \quad (5.249)$$

Vedem ca putem face identificarea:

$$A_{\mathbf{k},p} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a} \quad (5.250)$$

Practic, putem atunci construi o teorie cuantica a cimpului electromagnetic, utilizind substitutia de mai sus in ecuatiile ??, pentru fiecare mod. Vom denota atunci starea stationara n a modului $(\mathbf{k}, p)$ cu $|n_{\mathbf{k},p}\rangle$, iar operatorul de anihilare 5.250 corespunzator acestui mod cu $\hat{a}_{\mathbf{k},p}$. De exemplu, cimpul vectorial in punctul $\mathbf{r}$ devine atunci:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},p} \hat{A}_{\mathbf{k},p}(\mathbf{r}, t) \quad (5.251)$$

$$\hat{A}_{\mathbf{k},p}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} (\hat{a}_{\mathbf{k},p} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k},p}^\dagger e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (5.252)$$

Relatia de mai sus ne spune ceea ce am banuit in discutia de la inceputul acestei sectiuni: "pozitia" cimpului electromagnetic, data de cimpul $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ a devenit un operator $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ in fiecare punct din spatiu. Pe de alte parte, desi nu am reusit sa scriem o forma explicita simpla a "superfunctiei" de unda a cimpului electromagnetic, am identificat o baza, prin colectia modurilor stationare de vibratie. Cum aceste moduri de vibratie sunt independente, sa nu uitam ca trebuie sa scriem un element al bazei ca un produs ... (de fapt o alaturare a functiilor posibile pentru fiecare mod). Astfel, daca toate modurile sunt in situatii stationare, functia de unda este:

$$\prod_{\mathbf{k},p} |n_{\mathbf{k},p}\rangle = |n_{\mathbf{k}_1,p_1}\rangle |n_{\mathbf{k}_1,p_2}\rangle |n_{\mathbf{k}_2,p_1}\rangle \dots \quad (5.253)$$

in care $n_{\mathbf{k},p} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, este numarul modului de stationar de vibratie. In cazul general, "superfunctia" de unda este o superpozitie cuantica a tuturor starilor de mai sus, si deci ar trebuie sa scriem:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n_{\mathbf{k},p}\}} c_{\{n_{\mathbf{k},p}\}} \prod_{\mathbf{k},p} |n_{\mathbf{k},p}\rangle \quad (5.254)$$

Noi inasa aici nu ne vom "ambala" in descrie situatii prea complexe, ci ne vom referi la prezenta simultana a cel mult doua moduri de oscilatie.

5.6.4 Fotonii

In aceasta sectiune vom incerca sa extragem principalele caracteristici deduse in sectiunea precedenta. Poate cea mai importanta este cuantificarea unui singur mod de vibratie. Astfel, functiile de unda stationare $|n_{\mathbf{k},p}\rangle$ ale modului $\{\mathbf{k}, p\}$ au proprietatea speciala ca energia lor variaza in pasi de $\Delta E = \hbar \omega$ de la o stare n la starea urmatoare $n+1$ (vezi 5.245). Este ca si cum, pentru a trece in starea de energie mai inalta, cimpul electromagnetic achizitioneaza "ceva", de energie $\hbar \omega$. Aceste "ceva" poate fi privit ca "pachetul de unde" luminoase care este absorbit sau cedat in efectul fotoelectric discutat in sectiunea ???. In mod usual, acest "pachet de unde" se numeste *foton*.

Este desigur o denumire poate nu prea potrivita daca ne gindim ca starile de energie $|n_{\mathbf{k},p}\rangle$ sunt complet diferite, si deci nu exista un "ceva" universal ce se aduna clar pentru a crea urmatoarea functie de unda. Cu toate acestea, notiunea de *foton* este practica. Daca spune ca modul are doi fotoni, inseamna ca el este in starea stationara $|2\rangle$, iar daca spunem ca inca trei fotoni au fost absorbiti, atunci el trece in starea stationara $|5\rangle$.

Daca privim atunci modul de oscilatie ca o stare, putem spune ca aceasta poate avea oricit de multi fotoni. Aceasta in comparatie cu starile cuantice electronice, unde doi electroni sau mai multi nu putea ocupa aceeasi stare. Aceasta comparatie este cea care defineste electronii ca *fermioni* iar fotonii ca

bosoni. Cind discutam despre statistica bosonilor sau fermionilor, trebuie sa luam in calcul aceasta maniera de ocupare a starilor. Ne vom aduce aminte insa ca "starea" fotonului este practic *integ* modul de vibratie, si de aceea in aceasta "stare" putem avea oriciti fotoni.

Privind inapoi la figura difractiei luminii 5.22, ne putem intreba daca putem identifica punctele albe cu fotonii. In acest caz raspunsul este pozitiv, si se bazeaza pe urmatorul argument. Acolo unde apare un punct alb, un "pachet de unde" avind energii $\hbar\omega$ a fost absorbit *local* de catre detector, conform discutiei despre efectul fotoelectric. Ori noi am definit acest "pachet de unda", de energie minima $\hbar\omega$, ca fiind tocmai fotonul, care a fost deci absorbit *individual* in detector *la o anumita locatie*!

Putem continua in aceasta maniera, amintind ca semnalul (electric sau fotografic) dat de detector la o anumita locatie este dat de intensitatea luminii I (vezi 5.22). Acesta este insa proportionala cu densitatea de energie a cimpului electromagnetic de la suprafata detectorului, care la rindul ei este proportionala cu numarul n de fotoni (conform 5.246). Semnalul de la detector este deci proportional cu numarul de fotoni. Ori putem spune ca probabilitatea de a detecta un foton cu detectorul acesta este proportionala cu cimpul electric A sau E (intre ele exista doar o constanta, conform ??).

Vedem atunci cum intr-adevar figura de difractie a luminii 5.22 se compara cu figura de difractie a electronilor ?? In ambele exista o functie de unda care ne da o probabilitate de gasire a unei particule (electron sau foton), care odata detectata este *corpuseculara* (in sensul ca este detectata la o locatie). Aceasta functie de unda este insa in cazul fotonilor chiar cimpul electromagnetic $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ clasic!

Cittiorul poate va fi mirat ca am numit fotonul un corpuscul ca si electronul, pentru ca el s-ar astepta ca fotonul sa fie "intins" in toate incinta, si numai absorbit intr-o locatie. Nu este insa mai putin adevarat ca acelasi argument il putem folosi si pentru electron. Electronul este "intins" peste tot unde exista functia lui de unda, si numai absorbit la o locatie. In fond, poate spune cineva ca electronul e o sfera, sau are forma unei banane? Ii poate da niste margini precise? Desigur ca nu! "Marginile" electronului si fotonului sunt date la ora actuala de sistemele de detectie. Atita timp cit nu putem detecta bucatelile din aceste particule separat (pentru a le gasi forma), putem la fel de bine spune ca ambele sunt corpusculare!

Asa cum am mentionat la inceput, detectoarele moderne sunt capabile de a detecta energii de ordinul de marime al energiei unui foton (deci de a detecta un foton). Mecanica cuantica experimentală contemporana primeste astfel un ajutor dintr-o directie neasteptata, pentru ca cimpul electromagnetic este "linga noi", si nu necesita instrumente deosebite pentru a-l putea obtine (difractia clasică a luminii de exemplu se obtine usor).

Nu este mai putin adevarat ca abordarea aceasta trebuie privita mereu cu atentie, pentru ca in general trebuie sa stim ce fel de cimp electromagnetic avem (nu numai cel "rezonant" cuantificat de noi), sau care sunt mai precis functiile de unda. Astfel, un cimp electromagnetic cu alte conditii de margine se cuantifica diferit, si desi putem obtine si in acest caz coordonate normale pe care sa le cuantificam, obtinind fotoni, acestia vor fi definti desigur de alte functii de unda.

In final, revenim putin la oscilatiile longitudinale si "temporale" ale cimpului electromagnetic, pe care le-am eliminat. Este interesant de remarcat ca, incercind sa cuantificam riguros si relativist cimpul electromagnetic (printr-o teorie dezvoltata de Gupta si Bleuler [?]), acestea supravietuiesc si se cuantifica prin fotoni longitudinali si "temporali". In aceasta teorie, conditia Lorentz ?? se inlocuieste cu o alta conditie de tip Lorentz dar, pentru spatiul in care functia de unda poate sa evolueze. Rezultatul este ca, desi fotonii longitudinali si transversali exista, ei se vor anihila in medie in spatiul ales, si deci nu pot

observati in limita clasică! (desi as zice ca se pot acum vedea daca masuram cit mai apropiat de oscilatia de vid, vezi formulele originale unde numai media pare).

5.6.5 Putine aspecte experimentale despre lumina

bag-o la sectiunea precedenta?

Paradoxal, poate ca intelegere mai facila a aspectelor teoretice cuantice ale luminii o putem realiza discutind putin despre aspectele sale experimentale. Astfel, pentru cele mai multe experimente, vom avea nevoie in primul rind de doua stari cuantice diferite. Acestea le putem realiza simplu experimental cu ajutorul unui laser si al unui polarizor (vezi Fig.1).



Figure 5.25: laser schema + poza, Cimpul electric masurat intr-o stare coerenta ([?][?]). Pune poza originala

Laserul este o inventie tehnica minunata a ultimului secol, care are avantajul major de a fi, in multe cazuri, foarte ieftin (cele din interiorul CD-urilor sau DVD-urilor costa mai putin de un \$). Principiul lui de functionare este schitat in figura 5.25. Astfel, atomii din interiorul lui au doua nivele principale, ei fiind in situatia naturala pe nivelul de jos. In prima faza, o parte din atomi sunt excitati pe nivelul superior print-un mecanism numit "pompa optic". In diodele cu laser folosite in discurile optice acest mecanism consta prin trecere unui curent electric prin dioda. Atomii aflati in starea excitata se vor dezexcita (vor reveni in starea de jos) dupa un anumit timp, prin emiterea cite unui foton.

Fotonii emisi vor circula in cristal in toate directiile, dar cei care se indreapta spre oglinzile din marginea laserului vor rezista mai mult in interior, datorita reflectiilor succesive. Este posibil ca un astfel de foton sa intilneasca in drumul sau un atom intr-o stare excitata. Atunci acesta va provoca dezexcitarea acestui atom, printr-un fenomen numit *emisie simulata*. Practic, atomul se va dezexcita creiind un al doilea foton in faza si cu aceleasi caracteristici cu cele ale primului foton. Prin acest fenomen repetat, se creeaza o avalansa de fotoni, care au toti aceeasi faza si aceeasi frecventa. In final, o parte din acestia parasesc laserul prin oglinzile care transmit putin chiar mai de putin de 0.1%), creiind un fascicul de lumina asa-numita *coerenta*.

Este interesant de mentionat aici ca cel de-al treilea laser in lume a fost realizat pe platforma din Magurele in anul 1962, de catre un grup condus de Prof. Agarbiceanu (fiul cunoscutului scriitor). Practic acesta a putut utiliza corect prospectele cunoscute dupa venirea sa din Franta in doua domenii esentiale pentru functionarea laserului. Primul este dat de asa-numitele oglinzi Fabri-Perot, care sunt de fapt cele doua oglinzi ale laserului, ce trebuie aranjate paralel (cun un unghi mai mic de ...). Aceasta ne asigura ca fotonii circula intre cele doua oglinzi dus-intors (daca oglinzile nu ar fi paralele, fotonii ar iesi la un moment dat din laser). Al doilea nu mai stiu. Contacteaza Mustea sa-ti dea detalii.

Conform discutiei de mai sus, putem spune ca toti fotonii care ies din laser au aceeasi faza. In realitate, pentru a fi precisi, trebuie sa mentionam ca, conform discutiilor noastre din sectiunea ??, ei nu ar putea fi niciodata in faza, pentru ca aceasta este nedeterminata! Intr-adevar, noi am definti fotonul ca fiind starea cuantica a cimpului electromagnetic in care en-

ergia sa (amplitudinea oscilației) este precis determinată. Ori în acest caz datorită principiului de incertitudine, faza cimpului electromagnetic va fi complet nedeterminată. În realitate, cimpul electromagnetic al unei stări coerente date de laser are o minimă incertitudine (vezi 5.25 pentru intensități foarte mici) și în faza și în amplitudine (deci în numărul de fotoni). Cum apare în experiment? Neglijez?

Putem privi atunci fasciculul de laser la ieșire ca un cimp clasic electromagnetic. Cimpurile electrice E și magnetice B vor oscila în fiecare punct din spațiu conform relațiilor clasice ??, încare neglijăm incertitudinea cuantică discutată mai sus. Practic, cimpul electromagnetic dat de acest laser este tot atât de clasic ca și cimpul electromagnetic din cuptorul cu microunde, sau circuitele electrice să zicem. Trecând de exemplu la fasciculul printr-un polarizor orientat la unghiul $\phi = 0^\circ$, starea clasică a fasciculului este descisă de relația ?? pentru cimpul polarizat orizontal $E_h(t) = E \sin kx - \omega t$. În acest caz cuanta este fotonul polarizat orizontal, află în starea cuantică notată cu $|h\rangle$. Dacă $\phi = 90^\circ$, starea clasică este cimpul electromagnetic polarizat vertical $E_v(t) = E \sin kx - \omega t$. Cuanta de energie a acestui cimp este fotonul polarizat vertical $|v\rangle$. Când polarizorul este la un unghi aleatoriu ϕ , starea clasică a fasciculului laser este dată de

$$E() = E_x \cos \phi + E_y \sin \phi \quad (5.255)$$

Cuanta acestui cimp este o stare cuantică care poate fi exprimată ca o superpoziție a celor două stări orizontale și verticale ca

$$|\phi\rangle = \cos \phi |h\rangle + \sin \phi |v\rangle \quad (5.256)$$

Practic, printr-un laser și polarizor, am construit un sistem experimental în care starea cuantică a fotonului este o superpoziție cuantică a numai două stări $|h\rangle$ și $|v\rangle$ ce formează o bază. Probabilitățile și fazele acestor stări sunt date de cimpul electromagnetic clasic, și deci pot fi construite cu sisteme optice uzuale! Un exemplu ce ne va fi de folos este beamsplitterul din Fig. 5.36.



Figure 5.26: PBS + Elitzur-Vaidman

Acesta este practic făcut din două prisme alăturate, în așa fel încât o parte din lumină să fie transmisă și alta reflectată. Între cele două prisme (pe diagonală cubului deci), s-a adăugat un "coating" special, care face ca lumina să interfereze pozitiv și negativ, în funcție de direcție și polarizare. Rezultatul net este că fiecare direcție va prefera o singură polarizare, pe care o stim din construcția prismei. Sistemul este prin construcție un sistem perfect clasic, în care calculul pentru "coating" se face ținând cont numai de legile lui Maxwell pentru cimpul electromagnetic.

Comportarea cuantică se vede însă imediat dacă considerăm un fascicul polarizat la 45° incident pe el. În acest caz, comportarea clasică ne spune că obținem două fascicule de lumină în ambele direcții, una polarizată orizontal, cealaltă vertical, cu amplitudini egale. Din punct de vedere cuantic, am putea spune că cele două cimpuri electrice ne dau probabilitățile de găsire a unui foton într-unul din cele două stări $|h\rangle$ sau $|v\rangle$. Astfel starea cuantică a întregului sistem este dată de 5.256, și deci

probabilitățile de găsire a unui foton într-una din cele două stări sunt egale.

Poate că exemplificarea cea mai potrivită a acestei comportări clasice-cuantice este dată de interferometrul Mach-Zender din Fig. 5.36. Din punct de vedere clasic, acesta nu pune nici o problemă. Astfel, cei doi beamsplitters (astia nu sunt polarizer beamsplitters!) sunt aranjați în așa fel încât lumina care ar ajunge pe D_2 interferează destructiv, și cea pe D_1 constructiv. Astfel, detectorul D_1 nu va vedea prima lumină. Cu toate acestea, din punct de vedere clasic, pare paradoxal. Astfel, fotonul care trece prin primul beam-splitter are șanse egale să alege una din cele două direcții, și tot așa la cel de-al doilea beamsplitter, și deci ar părea că poate ajunge la ambii detectori!. Cu toate acestea, și aici este esența, trebuie să ne gândim mereu că cimpul electromagnetic ne dă probabilitatea de a găsi un foton. Deci mai întâi trebuie să calculăm tot cimpul electromagnetic, și apoi să calculăm probabilitățile de a localiza fotonii. Ori dacă facem așa, atunci vedem că probabilitatea de a găsi fotonul în detectorul D_2 este nulă.

Zii două cuvinte de bomba lui Vaidman, ca e așa frumos!

În final, ne putem întreba totuși de ce trebuie să folosim un laser și nu un bec în cele mai multe experimente? Oare nu ne da și becul un cimp electromagnetic "normal"? Oricât ar părea de surprinzător, răspunsul este negativ! Cu un bec nu putem construi un cimp electromagnetic clasic în sensul definit de noi în capitoul ???. Astfel, de exemplu, în jurul unui bec nu putem măsura un cimp electromagnetic E care să oscileze cu o fază cit de cit bine definită și cu frecvența luminii. Lumina dată de bec se numește incoerentă (pentru că între fotoni nu există o relație de fază), și cea mai bună descriere este o colecție statistică de fotoni.

Pare atunci surprinzător că experiențele de interferență făcute la început cu surse incoerente (cele mai multe cu lumina de la Soare) au reușit. Fără a intra în detalii (pentru cei interesați, vezi [?]), menționăm numai ideea de bază. Astfel, în aceste experimente s-a folosit lumina provenind de la aceeași sursă, care era apoi despartită și recombina înainte de a atinge un singur detector. În acest fel, toți fotonii de la sursă, deși aveau faze inițiale aleatorii între ei, dădeau același rezultat pe detector, pentru că diferența de fază acumulată erau aceleași pentru toți. Dacă însă construim experimente în care diferența de fază între doi fotoni diferiți să fie importantă (ca în cele de "entanglement"), atunci trebuie să folosim laseri, pentru că aici toți fotonii emergenți au aceeași fază (în limita principiului de incertitudine).

stare pură - fotonii ajung în același timp
nu se vede că fotonul merge cu viteza luminii.

5.7 Aspecte mai recente ale mecanicii cuantice

5.7.1 Recapitulare privind măsurătoarea

În această secțiune o să revenim asupra subiectului acestui subiect, deja descris în secțiunea ???. Motivele sunt două: pe de o parte o să ne amintim principala "problemă" pe care pare să o aibă mecanica cuantică, și pe de altă, ne vom pregăti pentru următoarele secțiuni, care în principal o abordează.

Asa cum am văzut pînă acum, evoluția sistemelor în mecanica cuantică are loc conform unei ecuații de tip Schrödinger ??, în mare măsură ca o teorie de cimp. Astfel de exemplu, în cazul unui electron, avem o funcție de undă care evoluează în tot spațiul, iar în cazul fotonilor, am văzut în secțiunea ?? că această funcție este chiar cea dată de cimpul electromagnetic.

Evolutia acestor functii rezulta in fenomene de interferenta, ca cele prezentate in figurile de difractie ?? si 5.22.

"Problema" mecanicii cuantice apare cind privim aceste figuri de difractie indeaproape, si vedem *punctele* care formeaza figura de difractie. Fiecare din aceste puncte reprezinta o absorbtie individuala a unei particule (electron sau foton), si are loc cu o probabilitate data de functia de unda. "Explicatia" adoptata a acestui fenomen a fost ca functia de unda reprezinta doar *probabilitatea de localizare* a particulei in una sau alta din pozitii.

Cu toate acestea, si alte tipuri de masuratori pot fi efectuate, nu numai de pozitie (in care "vedem" punctul in care particula e absorbita). Putem incerca astfel sa masuram indirect *impulsul particulei*. Precum la pozitie, si aici putem obtine diferite rezultate, ale caror probabilitati sunt date de aceeasi functie de unda. In plus, putem face masuratori in lant, si aici vedem doua necesitati. In primul rind, dupa prima masuratoare avem inca nevoie de o functie de unda care sa descrie particula, pentru a putea calcula probabilitatile pentru cea de-a doua masuratoare. In al doilea rind, prima masuratoare trebuie sa schimbe in cazul general functia de unda. Astfel, daca facem a doua masuratoare identica, apare logic ca trebuie sa obtine *mereu* acelasi rezultat ca la prima masuratoare, dupa cum se intimpla in lumea macroscopica clasica, si dupa cum am discutat mentionind efectul "stroboscopic". Aceasta nu este posibil decit daca functia de unda dupa prima masuratoare devine o functie de unda speciala, in care practic rezultatul celei de-a doua masuratori este mereu acelasi.

Aspectele amintite mai sus le-am "rezolvat" intr-o maniera dezvoltat de von Neumann la inceputul secolului (?). Astfel, am atasat fiecarei masuratori o *observabila*, care este un operator hermitic. Actionind in spatiul functiilor de unda, valorile lui proprii ne dau posibilele rezultate ale masuratorilor. Probabilitatile acestor valori le determinam descompunind functia de unda in vectorii proprii ai operatorilor, iar functia de unda dupa masuratoare se deduce prin asa-numitul "principiu al proiectiei" (vezi sectiunea ??). In cazul cind valorile proprii ale operatorului sunt nedegenerate ($a_i \neq a_j$), reamintim procedura:

1. functia de unda inainte de masuratoare: $|\psi\rangle$
2. masuratoarea este descris de operatorul $\hat{A}$ care satisface relatiile: $\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$
3. descompunem functia de unda ca: $|\psi\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$
4. probabilitatea de a "masura" valoarea a_n este $|c_n|^2$
5. In cazul cind a_n este masurat, dupa masuratoare functia de unda devine $|\psi_n\rangle$

Procedura de mai sus este completa, si verificata in *toate* experientele de mecanica cuantica efectuate pina acum. Acesta este si rezultatul major pentru care a fost adoptata. Caci desi, pe de o parte, vedem clar ca procedura de mai sus ascunde mecanismul masuratorii "sub pres", nu ne intereseaza cum arata aparatul de masura, cit de mare e, etc., tot ce vrem sa stim este operatorul $\hat{A}$ care i se ataseaza. Ori daca, folosind acest operator, explic toate rezultatele obtinute pina acum, la ce m-as ingrijora cum e construit aparatul de masura? Este si motivul pentru care si noi rugam fiecare student, sau cititor, sa nu se ingrijoreze folosind aceasta metoda "dubioasa": daca o va folosi vreodata, sa fie aproape sigur ca va functiona. Deci, sa o foloseasca.

Pe de alta parte, ne intereseaza totusi si de ce functioneaza, care ii sunt limitele si, eventual, ce aplicatii interesante am putea obtine din aceasta procedura. Urmatoarele sectiuni vor aborda in special aceste aspecte ale mecanicii cuantice.

5.7.2 Decoerenta

Pina acum am discutat despre masuratoare ca un pas imediat urmator prezentei unei stari cuantice. Cu alte cuvinte, mai intii "aranjam" un sistem exista intr-o stare cuantica $|\phi\rangle$, iar apoi il masuram, schimbindu-i brusc functia de unda conform principiului de proiectie. Ne putem intreba insa daca putem vorbi de aceeasi procedura in realitate, caci situatia de mai sus este mai potrivita conditiilor de laborator. Astfel, daca "preparam" o bila intr-o stare cuantica de superpozitie in Galaxia Andromeda, si o trimitem pe Pamint sa-l masuram, nu este de mirare ca ea isi poate schimba starea intre timp. Aceasta datorita de exemplu interactiei cu fotonii proveniti de la nenumarate stele.

Interactia cu lucrurile din jur (numita interactia cu "environment"), este insa prezenta si pe Pamint. Astfel, daca un obiect macroscopic reuseste sa fie "plasat" intr-o stare cuantica (de superpozitie), pina cind il masuram noi el trebuie sa supravietuiasca in aceasta stare interactiei cu lumina de la Soare, cu moleculele de aer care il bombardeaza (si a caror viteza este data de *temperatura* aerului), sau chiar cu cimpul gravitational sau magnetic al Pamintului (efecte la care nici nu ne mai gindim). De ce ar fi insa toate aceste interactii importante? Pentru ca, in cele mai multe cazuri, marimea acestor interactii nu este neglijabila, deoarece sistemul cuantic este intrinsec sensibil la variatii mici de energie. Teoria *decoerentei* (pe care o vom schita aici) incearca sa afirme chiar mai mult: *tocmai datorita acestor interactii continue, corpurile macroscopice nu sunt superpozitii cuantice, ci sunt localizate!*

Desi afirmatia de mai pare evidenta, ea nu este, caci ne-am putea astepta ca datorita interactiei unui sistem cuantic (bila venind din Andromeda de exemplu) cu un altul (fotonul), sa obtinem tot o stare cuantica de *superpozitie*. In plus, de ce rezultatul interactiei ar fi tocmai bila "localizata" in spatiu? De ce nu unda de Broglie asociata bilei? In fond, desi corpurile macroscopice prefera stari localizate, cele microscopice se pare ca prefera (chiar dupa interactia cu "environment") stari cuantice stationare. Astfel, un gaz aflat chiar la o temperatura ridicata (asa incit atomii sa se ciocneasca bine intre ei si cu peretii), emite sau absoarbe lumina la frecvente bine stabilite, sugerind ca atomii se afla, individual, fie in stările "ground state", fie in stari excitate conform distributiilor statistice, si emite sau absoarbe lumina intre aceste stari.

Pentru a intelege mecanismul pe care teoria decoerentei il propune in explicarea localizarii corpurilor macroscopice prin interactia cu "environment", trebuie sa ne intoarcem putin la teoria de baza a mecanicii cuantice, si sa o completam cu un element nou, numit "*starea mixta*". Problema este relativ simpla. Pina acum am discutat despre stari cuantice precise, ca si cum am sti precis in ce stare cuantica se afla un sistem. In realitatea inconjuratoare avem insa probleme chiar cu obiectele microscopice de a le afla pozitia (de cite ori nu cautam cheile pierdute...). De aceea, numai functia de unda nu este instrumentul cel mai potrivit de a descrie cunoasterea noastra despre un sistem cuantic. Desigur, *sistemul cuantic se afla intr-o stare anume*, dar am vrea cumva sa cuantificam si necunoasterea noastra asupra eventualelor stari cuantice in care el s-ar putea afla.

Cea mai directa metoda este de a atribui niste probabilitati eventualelor stari acuantice. Fie deci:

1. - setul de functii de unda $|\phi_k\rangle$
2. - p_k probabilitatea ca sistemul sa se afle de fapt in starea $|\phi_k\rangle$

Din nou, aceasta probabilitate este datorita necunoastintei noastre, este ca si probabilitatea de a gasi cheia in sertar, sau pe masa, etc. Cheia se afla undeva, numai eu nu stiu unde. Spunem in acest caz ca sistemul se afla intr-o *stare mixta*, spre deosebire de cazul in care stiam sigur in ce stare cuantica cuantica se afla sistemul, numita *stare pura*.

In teoria cuantica se poate arata ca cel mai bun instrument de a descrie astfel de situatii este asa-numitul *operator statistic* $\hat{R}$, construit sub forma:

$$\hat{R} = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (5.257)$$

unde adugam conditia $\sum_k p_k = 1$, ceea ce inseamna ca stim sigur ca sistemul se afla intr-unul dintre starile cuantice. Intrebare: daca stiu R , pot afla inapoi starile si probabilitatile? Cred ca nu.

Cum operatorul statistic $\hat{R}$ este liniar in componentele sale, iar functiile de unda $\langle\phi_k|$ se considera deja normate ($\langle\phi_k|\phi_k\rangle = 1$) se arata (vezi exercitiu) ca el indeplineste urmatoarele doua relatii:

$$i\hbar \frac{d\hat{R}}{dt} = [\hat{H}, \hat{R}] \quad (5.258)$$

$$\text{stare mixta: } Sp\hat{R}^2 < 1 \quad (5.259)$$

$$\text{stare pura: } Sp\hat{R}^2 = 1 \quad (5.260)$$

Aici $Sp\hat{R}^2$ este "trace-ul" matricii $\hat{R}^2$ exprimat intr-o baza oarecare (depinde de baza? nu stiu). Prima relatie ne da evolutia operatorului statistic in timp. A doua relatie poate face discriminarea dintre starea mixta si starea pura.

Sa vedem in ce context este operatorul statistic relevant pentru problema localizarii. Astfel sa presupunem ca o bila macroscopica intr-o *stare cuantica pura*, si anume o superpozitie particulara intre doua locatii x_1 si x_2 :

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2} (|x_1\rangle + |x_2\rangle) \quad (5.261)$$

Sa incercam sa exprimam operatorul statistic in baza data de functiile de unda vectorii proprii ai pozitiei $\{|x_i\rangle\}$ (la limita continua aceasta devine $|x_i\rangle = \delta(x_j - x_1)$). In calcul matriceal al operatorilor, $\hat{R}$ va deveni o matrice in aceasta baza. Un element al acestei matrici se calculeaza ca:

$$R_{ij} = \langle x_i | \hat{R} | x_j \rangle = \langle x_i | \phi \rangle \langle \phi | x_j \rangle = \langle \phi | x_i \rangle^* \langle \phi | x_j \rangle \quad (5.262)$$

Datorita alegerii particulare a lui ϕ avem insa

$$\langle \phi | x_i \rangle = \frac{1}{2} [\delta_{x_i, x_1} + \delta_{x_i, x_2}] \quad (5.263)$$

si inlocuind in formula precedenta obtinem

$$R_{ij} = \frac{1}{4} [\delta_{x_i, x_1} + \delta_{x_i, x_2}] [\delta_{x_j, x_1} + \delta_{x_j, x_2}] \quad (5.264)$$

Intr-o forma expandata acesta ar arata asa:

$$\hat{R} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.265)$$

unde valorile diferite de zero apar numai in drepul pozitiiilor alese x_1 si x_2 . In Fig.5.27 stanga prezentam sugestiv aceasta matrice in limita continua.

Cum ar arata acum matricea statistica a operatorului R pentru aceeasi bila cind privim dupa un moment mare de timp? In mod normal, ne-am astepta sa gasim bila *localizata*, dar cu o

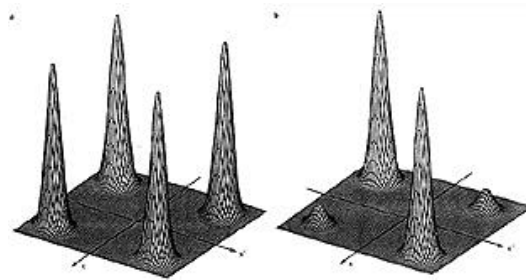


Figure 5.27: Matricea operatorului statistic $\hat{R}$ epntru superpozitia cuantica ?? inainte de interactia cu mediul inconjurator (stinga) si dupa (dreapta)

incertitudine mare in pozitia exacta (ignoram posibilul impuls). Starile localizate in care n-am astepta ca ea sa fie, sunt date de o colectie de N pozitii $|x_k\rangle$ in jurul celor doua pozitii x_1 si x_2 . Despre probabilitatile p_k de a le gasi am putea presupune la fel de bine ca sunt egale: $p_k = 1/N$. Am avea atunci:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \left(\sum_k |x_k\rangle\langle x_k| \right) \quad (5.266)$$

Folosind $\langle x_i | x_k \rangle = \delta_{x_i, x_k}$ si 5.262, matricea lui $\hat{R}$ devine atunci *diagonala*:

$$R_{ij} = \frac{1}{N} \delta_{x_i, x_j} \left(\sum_k \delta_{x_k, x_j} \right) \quad (5.267)$$

Intr-o forma expandata acesta ar arata asa:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.268)$$

unde acum pozitiiile diferite de zero corespund pozitiiilor x_k pe care ne-asteptam sa le gasim.

Se vede usor ca esenta *localizarii* particulelor sta in aceasta forma diagonala a operatorului statistic in baza pozitiiilor, consecinta directa a relatiilor 5.267. Este important aici de mentionat ca oricarui operator statistic $\hat{R}$ i se poate alege o baza ortonomata de vectori si valori proprii in care acesta sa fie diagonal. Este insa diagonalizarea in baza pozitiiilor care exprima cel mai bine localizarea corpurilor macroscopice. Ea ne spune: functia de unda a corpului este sigur *numai* una din valorile $|x_k\rangle$ (corpul este localizat), numai ca eu nu stiu precis care.

Teoria decoerentei *afirma* ca operatorul statistic poate evolua in mod fizic de la forma initiala R_1 la forma finala R_2 , in urma interactiei cu mediul inconjurator. Daca este asa, si daca mediul inconjurator modifica intr-adevar *orice* operatorul statistic de la o forma pura R_1 la cea mixta si diagonala in baza pozitiei R_2 , atunci vedem ca problema localizarii este rezolvata!. Intr-adevar, daca starea finala in urma interactiei cu mediul este un operator diagonal in baza pozitiei, atunci putem spune ca corpul este *sigur* (verifica!) in una din starile cuantice x_k (deci este localizat), numai ca noi nu stim precis care.

Vedem si o consecinta mai putin evidenta, dar nu mai putin importanta: *la nivel macroscopic, lumea ramine cuantica*. Cu alte cuvinte, mecanica cuantica este prezenta la orice nivel, numai localizarea corpurilor macroscopice (care este de fapt alegerea unor functii de unda speciale, cele ale pozitiei) ne impiedica sa "vedem" aceasta.

In Fig.5.27 prezentam un calcul efectuat de Zurek in 1991 ([?]). Acesta a considerat cazul unei particule in superpozitia cantica 5.261, aflata intr-o "baie termica" de temperatura T . Luind in calcul interactia cu acest mediu inconjurator, el a calculat evolutia operatorului statistic. Rezultatul final este intr-adevar cel discutat de noi: dupa un timp τ_D , matricea operatorului statistic devine *aproximativ* diagonala in baza pozitiei (vezi dreapta Fig.5.27). Dar este ceva mai mult de atit. Astfel, noi ne-am fi asteptat ca localizarea sa aiba loc "unde" intre cele doua pozitii x_1 si x_2 , ori din figura Fig.5.27 devine clar ca particula se localizeaza *numai* in x_1 sau x_2 . Cu alte cuvinte, dupa interactia cu mediul, particula este *sigur* fie in starea cantica $|x_1\rangle$, fie in starea cantica $|x_2\rangle$ (cu probabilitati egale), dar in nici o eventuala alta pozitie, fie ea de mijloc!

La o privire mai atenta, acest rezultat se potriveste de minune cu principiul proiectiei. Astfel, conform acestui principiu, daca am incerca sa "masuram" pozitia sistemului in starea initiala 5.261, am obtine numai x_1 sau x_2 cu valori egale. Pe de alta parte, este natural sa presupunem ca, *inainte de fi masurat*, corpul apuca sa interactioneze cu mediul inconjurator. Atunci, intr-un timp foarte scurt τ_D , operatorul statistic devine R_2 (cel din dreapta figurii 5.261). La un moment ulterior, oricit de perfect ar fi aparatul de masura, el nu poate "masura" decit cele doua pozitii x_1 si x_2 cu *probabilitati egale*, pentru ca operatorul statistic a fost modificat. Vedem deci ca procesul de masura de mai sus explica perfect rezultatele principiului de proiectie, ambele dind aceleasi rezultate x_1 si x_2 , si aceleasi probabilitati de masura.

Desigur ca in acest caz timpul τ_D , numit *timp de decoerenta*, trebuie sa fie foarte scurt. Zurek a dedus urmatoarea forma aproximativa:

$$\tau_D = \tau_R \frac{\hbar^2}{2mk_B T(x_2 - x_1)^2} \quad (5.269)$$

unde k_B este constanta Boltzmann, m este masa corpului, iar τ_R este asa-numitul timp de relaxare, datorat viscozitatii mediului in care se afla particula. Acesta reprezinta practic timpul in care miscarea clasica a corpului este reduca la zero datorita interactiei (precum o bila in apa isi incetineste miscarea datorita viscozitatii). Sa luam o bila de masa $m = 1g$ pe care sa o plasam in starea coerenta 5.261 cu $x_1 - x_2 = 1cm$ (ca sa vedem cu ochiul liber superpozitia), la temperatura camerei $T = 300K$. Atunci obtinem din relatia mai sus $\tau_D/\tau_R = 10^{-40}$! Timpul de relaxare τ_R este mai greu de estimat, dar chiar daca presupunem ca el este cit virsta Universului $\tau_R = 10^{17}s$, tot obtinem o valoare foarte mica pentru $\tau_D = 10^{-23}s$. Nu este deci de mirare ca corpurile macroscopice par localizate!

Pentru toate cele mai multe experiente facute pina la aparitia teoriei decoerentei, timpul de masura $\tau_D = 10^{-23}s$ a fost mic, si de aceea nici o abatere de la principiul proiectiei nu a fost observata. Cu toate aceste valori foarte mici ale timpului de decoerenta, putem construi totusi sisteme in care acesta sa fie masurabil. Rezultatul ar fi remarcabil, pentru ca nu numai am verifica rezultatele teoriei, dar am si "sparge" principiul proiectiei, masurind alte rezultate intermediare (atentie!...). Aceste sisteme, ajustate la limita microscopica se macroscopica in asa fel incit τ_D sa fie masurabil, se numesc *sisteme mezoscopice*. O astfel de masuratoare o prezentam in continuare.

baza preferentiala,

probabilitatea de masura.

am putea spune ca necunoasterea se transfera de la "baie termica" la sistem. se vede mai bine la spin.

radiatia de background actioneaza.

o baza este mereu preferentiala. la microscopic baza este energia. schimba datele problemei (in alte baze inca coerenta?), dar noi masuram mereu in acea baza preferentiala, ca asa ne place.

explica de ce localizarea la corpurile si energia la microscopic obs. von newmann primul

5.7.3 Constiinta si mecanica cantica. Exemplu de decoerenta

Alaturarea celor doua notiuni din titlul de mai sus este probabil pe placul multor cititori "neconformisti". Caci cartile de fizica evita in cea mai mare parte sa discute vreo relatie intre ele, si aceasta pe buna dreptate. Astfel, cunoastem prea putine despre latura fizica a constiintei. Cu toate acestea, mecanica cantica isi are elementele ei spectaculare (multe dintre ele, ca principiul proiectiei, sunt inca spectaculare pentru ca nu sunt intelese), care o diferentiaza net de mecanica clasica. Ori o lume guvernata numai de legi clasice este exact ce nu vrem sa avem, pentru ca nu am avea alta sansa decit sa fim niste masini!

Exista astfel in cei mai multi dintre noi dorinta de a fi altceva decit o colectie de bile, fie si ele frumos ordonate. Vrem cumva sa ne diferentiem profund de dulapul de linga noi, si in mecanica clasica nu avem cum. Aici traiectoria bilor este data de conditiile initiale, ceea ce inseamna ca si evolutia noastra, si evolutia dulapului este un rezultat al legilor mecanicii. Oricit de frumos ar fi ordonati atomii din noi, am ramine profund nu mai mult niste masini mecanice programate sa faca anumite lucruri.

Si ceea ce este si mai descurajator, cele mai multe explicatii ale comportarii noastre par sa fie mecanice. Un psiholog ne va explica o anumita reactie a noastra printr-o anumita "dorinta ascunsa", de care se pare ca avem din plin ca sa justifice toate deciziile noastre de-a lungul vietii. Memoria imaginilor este un alt exemplu al reusitei unui model mecanic in creierul nostru (asa numitele retele neuronale). Exista deja programe de computer care simuleaza retelele de conexiuni dintre neuroni. Aici mai multe imagini sunt stocate in matricea interactiilor dintre neuroni. Cind vedem o anumita persoana reseaua de neuroni converge natural la imaginea stocata a persoanei, si spunem atunci ca o recunoastem. Si retelele neuronale functioneaza atit de bine incit am facut deja programe software pe care le folosim de exemplu la recunoasterea literelor si cuvintelor dintr-un text pe care il fotografiem, sau orice alte obiecte care le vrem.

Si atunci, daca comportarea noastra nu are inca nevoie pentru a fi "explicata" decit de modele clasice, de ce am apela la mecanica cantica, mai ales cind inca nu stim vreo legatura? Raspunsul este simplu, dupa cum am mentionat: chiar daca in cea mai mare parte actionam ca niste masini clasice, vrem cumva ca, fundamental, sa fim altceva. Caci suntem altceva, nu? Adica, vrem sa spunem, muncim toata viata, crestem copii, ne dedicam unei cariere, si toate acestea pentru nimic? Trebuie sa fim altceva, vom arata ca suntem altceva.

Uite, de exemplu, mecanica cantica. Avem aici in ultima instanta o functie de unda care se intinde in tot Universul, si care cuprinde toate particulele si corelatiele dintre ele. O "masuratoare" a unei parti din ea determina o schimbare a ei instantaneu in tot Universul, si deci influenteaza o alta parte la distante foarte mari. Am putea astfel explica telepatia. Apoi, putem construi un mecanism prin care sufletul nostru (un fel de ceata ce apartine altei lumi paralele) isi face prezente deciziile in lumea aceasta a materiei, prin principiul proiectiei. Astfel de exemplu, semnalul electric transmis catre una din miini sa se ridice este clasic. Sa presupunem insa ca decizia sa ridicam mina stinga sau dreapta vine in urma unei masuratori efectuate in creier asupra unei celule speciale, care ia doar doua valori. Conform principiului proiectiei, probabilitatea de a obtine una din cele doua valori este cunoscuta, dar rezultatul este intrinsec aleatoriu (ingnoram desigur mecanismele de decoerenta discutate in capitolele urmatoare). Atunci putem presupune ca

"ceata" data de suflet poate influenta rezultatul, si in acest fel "alegem" care mina sa se ridice.

Speculatii ca cele dezvoltate de noi mai sus (si care cel mai probabil sunt false) vor exista atita timp cit exista neclaritati in mecanica cuantica, si chiar si dupa aceea probabil ca vom incerca sa cautam in alta parte. Caci, pe de alta parte, daca suntem intr-adevar "altceva", atunci trebuie sa existe un mecanism prin care acest "altceva" sa se manifeste in lumea moarta a materiei (de cea de care ne ocupam noi in fizica). Si acest mecanism nu are decit sa se manifeste printr-o abatere de la legile cunoscute, fie ele clasice sau cuantice.

Este poate surprinzator ca, desi astazi putem afla comportarea cantica a unor particule mult mai mici ca moleculele din creier, nu putem testa direct experimental comportarea cantica a acestora din urma. Raspunsul la acest paradox nu se afla numai in fragilitatea creierului, dar si in complexitatea lui, in numarul mare de neuroni pe care ii contine. Cu alte cuvinte, chiar daca am afla comportarea cantica a unui neuron prin simulari pe computer sau prin masuratori, comportarea cantica a miliardelor de neuroni luati impreuna este inca imposibil de aflat. Aceste sisteme sunt denumite *sisteme complexe*, iar situatia este in parte similara cu cea din fizica corpurilor solide, unde putem afla comportarea atomilor individuali, dar ne este foarte greu de prezis comportarea unui set larg de atomi.

Un lucru pare insa ca este acceptat de toti cercetatorii: stiinta nu este localizata intr-un punct specific din creier, ci pare distribuita. Pentru eventualele sisteme cuantice din creier, aceasta inseamna ca ne asteptam sa gasim eventual o *comportare cantica colectiva*. Dintre mecanismele propuse, poate ca cel mai cunoscut este cel propus de Penrose si Hamroff in [?].

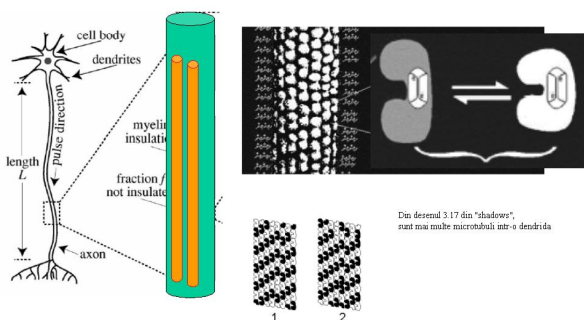


Figure 5.28: Tubulin + superpozitii cuantice

Acesta a considerat microtuburile ce stau la baza constructiei dendritelor (vezi Fig.5.28). Daca acestea ar putea realiza stari cuantice colective, atunci acestea s-ar putea eventual extinde intre neuroni, caci dendritele sunt cele care conecteaza neuronii.

La baza unei astfel de stari colective sta molecula constituenta a microtubului, numita tubulin. Din studiile precedente se stie ca ea poate lua clasic doua pozitii preferentiale. Penrose insa propune ca molecula de tubulin este poate chiar intr-o superpozitie cantica a celor doua stari! Mai mult, pentru a crea o stare cantica colectiva, un mare numar de molecule de melanina ar fi intr-o stare cantica colectiva, asa cum este schitat in Fig.5.28. Atunci creierul uman ar functiona in mod asemanator unui urias *computer cuantic* (vezi sectiunea ??), in care stările cuantice colective isi pastreaza coerenta.

Un argument esential folosit de Penrose este ca forma tubulara a microtuburilor ajuta la formarea stărilor cuantice colective. Ori acest lucru este verificat experimental in fizica stării solide. Aici au fost descoperite așa-numitele "carbon nanotubes", tot structuri tubulare, care prezintă într-adevăr stări cuantice colective ale mai multor atomi pe lungimi mari ale tubului.

Diferenta esentiala intre microtuburi si "carbon nanotubes" este ca primele au constituinti formati din molecule de tubulin, vezi Fig.5.28), iar cele de-al din atomi simpli de Carbon. Ori este într-adevăr mult mai ușor de obținut stări coerente ale atomilor, decit ale unor întregi molecule.

Problema esentiala a unui astfel de sistem este daca starea cantica colectiva ar putea rezista decoerentei datorate mediului adiacent. Caci in fizica stării solide interactia cu mediul inconjurator poate fi redușă in experimente, de multe ori prin reducerea temperaturii la cîteva grade K. Ori, un mediu "cald, ud si zgometos", ca cel din creierul uman este desigur nefavorabil acestor procese cuantice colective.

Unul dintre oponentii naturii cuantice a creierului, M.Tegmark, a încercat sa calculeze care ar fi timpul de decoerenta al unei astfel de stări cuantice colective. Caci, pentru a avea semnificatie pentru procesele constiente din creierul nostru, acest timp ar trebui sa fie mai lung de cîteva fractiuni de secunda (sa zicem 0.1s), pentru ca acesta este timpul in care se pare ca se manifesta contiinta noastra. Este insa de remarcat ca un asemenea ordin de marime este ușor de explicat într-o terie mecanicista caci, efectele mecanice ale diferitelor procese (intinderea unei miini, deschiderea ploapei, etc), sunt in ordinul secundei. Cu alte cuvinte, o constiinta care ar percepe fiecare nanosecunda s-ar plictisi ingrozitor, pentru ca ar vedea mereu aproape aceleasi imagini! In continuare vom incerca sa reproducem si noi partial calculul de decoerenta folosit de Tegmark in [?]. Intrucit acesta necesita poate un grad mai ridicat de dificultate, cititorul neinteresat de acesta poate sari direct la rezultatul prezentat in 5.286.



Figure 5.29: decoerenta-ioni

Astfel, una dintre posibilele mecanisme de decoerenta analizate este interactia dintre ioni. Sa consideram deci doua sarcini aflate la mare distanta una de cealalta, de-a lungul unei axe (vezi Fig.5.29). Prima este in pozitia x^0 si ce de-a doua in pozitia y^0 . Aici x si y reprezinta deci coordonate pe aceeasi linie, nu pe linii perpendiculare. Sa mai consideram ca functiile de unda ale celor doi electroni sunt initial doua gaussiene in jurul pozitiiilor x^0 si y^0 , ambele avind largimea $b, c \ll |x_1^0 - x_2^0|$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x - x^0}{2b^2} \right] \quad (5.270)$$

$$\phi(y) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{y - y^0}{2c^2} \right] \quad (5.271)$$

Funcția de unda a sistemului celor doua particule este deci la inceput $\psi(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$. Aceste doua sarcini vor interactiona intre ele prin energia electrica potentiala:

$$V(x - y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{x - y} = \frac{a}{x - y} \quad (5.272)$$

Daca nici o interactie nu ar fi existat, conform ecuatiei lui Schrodinger ??, cele doua gaussiene s-ar fi largit mai mult in timp (b si c ar fi crescut), dar nu s-a fi intimplat nimic mai mult. Cind insa interactia ?? exista, functia de unda totala inceteaza de a mai fi un produs simplu a celor doua gaussiene ca in situatia initiala. Noi nu o vom calcula insa direct, ci mai degraba vom primi matricea statistica a intregului sistem.

In situatia initiala avem $\psi(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$. Matricea statistica este atunci, conform ??:

$$\rho_0(x, y, x', y') = \varphi(x)\phi(y)\varphi^*(x')\phi^*(y') \quad (5.273)$$

Ea evolueaza conform relatiei ??, ceea ce conduce la (sa arat cum iese asta):

$$\rho(x, y, x', y', t) = \rho_0(x, y, x', y') \exp[-i\hbar t V(x - y) + i\hbar V(x' - y')] \quad (5.274)$$

Privind sistemul in totalitate, ea este matricea statistica asociata unei stari pure, si asa si evolueaza in timp. Din punctul de vedere al particulei 1 in schimb, o putem privi ca pe matricea statistica a unui *sistem mixt*. Aceasta se obtine, conform discutiei din sectiunea ?? ca:

$$\rho_\varphi(x, x', t) = \int dy \int dy' \rho_0(x, y, x', y', t) \varphi(y)\varphi^*(y') \quad (5.275)$$

$$\varphi(x)\varphi^*(x') \int dy \int dy' \phi(y)\phi^*(y') \exp[-i\hbar t V(x - y) + i\hbar V(x' - y')] \quad (5.276)$$

Cumva se face aproximatia urmatoare

$$\int dy' \phi(y')\phi^*(y') \exp[-i\hbar t V(x - y) + i\hbar V(x' - y')] = \quad (5.277)$$

$$= \phi(y)\phi^*(y) \exp[-i\hbar t V(x - y) + i\hbar V(x' - y)] \quad (5.278)$$

si deci

$$\rho_\varphi(x, x', t) = \quad (5.279)$$

$$\rho_\varphi(x, x', 0) \int dy |\phi(y)|^2 \exp[-i\hbar t V(x - y) + i\hbar V(x' - y)] \quad (5.280)$$

Din relatia de mai sus vedem ca elementele diagonale ale matricii statistice ramin constante in timp $\rho_\varphi(x, x, t) = \rho_\varphi(x, x, 0)$. Dar matricea statistica nu este diagonala in baza utilizata a pozitiei, ceea ce inseamna ca cele doua particule isi pastreaza inca caracterul de corelatie. Cu toate acestea, daca privim la elementele nedigonale, vedem ca acestea se obtin din sumarea termenilor de posibila pozitie a celei de-a doua particule $|\phi(y)|^2$, inmultite cu un numar complex e^{Bta} . Fiecare din acesti coeficienti este 1 la momentul intital $t = 0$. La un moment ulterior insa actiunea lor poate fi vazuta mai degraba ca o interferenta aleatoare asupra termenilor $|\phi(y)|^2$. Astfel, fiecare termen $|\phi(y)|^2$ din integrala precedenta va trebuie inmultit cu faza e^{Bta} , si apoi adunat. Numai in cazul special in care toti termenii vor fi 1 ca la momentul intital, ne vom astepta ca suma sa dea $\int |\phi(y)|^2 dy = 1$. Aceasta se poate intimpla dupa un timp foarte lung (vezi discutie din sectiunea precedenta), insa pentru un timp intermediar termenii $|\phi(y)|^2$ vor avea coeficienti care vor fi intre -1 si 1, si atunci cind se vor aduna rezultatul va fi foarte apropiat de zero.

Vedem atunci ca dupa un timp foarte scurt matricea statistica corespunzatoare numai particulei 1 devine diagonala in baza pozitiei, asa cum ne asteptat din discutia din sectiunea precedenta. Ne intereseaza acum cit de repede are loc acest proces de decoerenta. Pentru a afla ordinul de marime al acestui timp, sa ne reamintim ca functia de unda a celei de-a doua particule este de latime aproximativa b . Am putea spune, simplificind foarte mult, ca particula se afla fie in pozitia $y_0 - b/2$, fie in pozitia $y_0 + b/2$. Procesul de decoerenta incepe sa fie efectiv cind fazele asociate acestor doua pozitii in integrala 5.279 vor avea o diferenta de π . Atunci cei doi termeni $|\phi(y_0 - b/2)|^2$ si $|\phi(y_0 + b/2)|^2$ trebuie practic scazuti, contribuind efectiv la disparitia termenului diagonal. Notind cu τ timpul de decoerenta, avem atunci:

$$\pi = [\hbar\tau V(x - y_0 + b/2) + \hbar\tau V(x' - y_0 + b/2)] - \quad (5.281)$$

$$- [-\hbar\tau V(x - y_0 - b/2) + \hbar\tau V(x' - y_0 - b/2)] \quad (5.282)$$

Potentialul electrostatic este dat de ??, si poate fi aproximat ca

$$V(x - y_0 \pm b/2) = \frac{a}{x - y_0 \pm b/2} \simeq \frac{a}{x - y_0} \mp \left(\frac{b}{2}\right) \frac{a}{(x - y_0)^2} \quad (5.283)$$

Inlocuind in relatia precedenta avem:

$$\frac{\pi}{\hbar\tau} \simeq 2 \left(\frac{b}{2}\right) \left[\frac{a}{(x - y_0)^2} - \frac{a}{(x' - y_0)^2} \right] \quad (5.284)$$

Pentru estimarea timpului de decoerenta τ putem acum alege deasemenea doua pozitii particulare dar semnificative pentru particula 1, si anume $x = x_0 - l/2$ si $x' = x_0 + l/2$. Aici l este largimea functiei de unda corespunzatoare primei particule 1. Inlocuind termenii de ordin superior din relatia de mai sus, avem atunci:

$$\frac{\pi}{\hbar\tau} \simeq 2 \left(\frac{b}{2}\right) \frac{2al}{(x_0 - y_0)^3} \quad (5.285)$$

ceea ce conduce la:

$$\tau \simeq \frac{\pi}{2a\hbar lb} (x_0 - y_0)^3 \quad (5.286)$$

Sa incercam sa aplicam acum rezultatul obtinut mai sus la moleculele de tubulin din Fig.5.28. Aceasta poate lua doua stari clasice prezentate in Fig.5.28, corespunzind la doua valori ale momentului electric de dipol al moleculei de-a lungul axei tubului. Putem considera molecula de tubulin particula 1 din calculul precedent. Luam atunci particula 2 un ion oarecare din imediata vecinata microtubului, dar in afara lui, de exemplu ion de Na (cu o masa de $m_{Na} \sim \dots$).

Distanta intre tubulin si un ion din vecinatate este $x_0 - y_0$ si este minim grosimea moleculei de tubulin $D = x_0 - y_0 = 26nm$. Cum l reprezinta in formula 5.286 distanta medie pe care vrem sa pastram coerenta particulei 1, putem atunci scrie $l = D = 26nm$. Distanta b pe care ionul invecinat isi poate metine coerenta se poate estima pornind de la valoarea minima data de principiul de incertitudine. Amem astfel

$$\Delta x = b = \frac{\hbar}{2\Delta p} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{mkT}} \sim \dots \quad (5.287)$$

unde m este masa ionului iar T este temperatura mediului (aproximativ 300K).

Daca pentru ionul adiacent 2 putem folosi sarcina sa $q = e = \dots$, am putea fi tentati sa facem acelasi lucru cu molecula de tubulin. Cu toate acestea, Tegmark este de parere ca trebuie sa folosim o sarcina mult mai mare, pentru ca avem de-a face cu o stare colectiva formata din mai multe molecule de tubulin. In urma unor simulatii pe calculator, el propune valoarea $q_1 \sim 10^3 e$. Inlocuind toate aceste valori numerice in relatia 5.286, obtinem $\tau = 10^{-13}s$, care este o valoare foarte mica. In consecinta, Tegmark sustine ca o stare cuantica colectiva a moleculelor de tubulin nu poate avea pe o durata de secunde, atit cit am avea nevoie pentru procesele de constiinta, si deci propunerea lui Penrose si Hameroff nu se justifica.

Cu toate acestea, asa cum se intimpla des in disputele cercetatorilor, Hameroff a replicat intr-un articol ulterior ?? ca analiza lui Tegmark, prezentata mai sus, nu este cea mai potrivita. Astfel, interactiile intre molecula de tubulin si mediul incojurator ar trebuie sa fie descrise in termeni de moment electric de dipol. Aceasta ar elimina in primul rind valoarea mare a

sarcinii totale $q_1 \sim 10^3 e$. Apoi se poate folosi potentialul electrostatic de interacție dintre un dipol (molecula de tubulin) și un ion, precum și efectul de "screening" al apei ($\epsilon \simeq 10$). În final, printr-un calcul asemanator celui prezentat în această secțiune, Tegmark obține o valoare mult mai mare, și anume $\tau = 10^{-4} s$.

Este desigur imposibil pentru noi a decide acum care din aceste două posibilități este falsă sau adevărată. Cercetarea în această direcție este acum în plin avânt, și este posibil ca într-un viitor apropiat să avem rezultate mai clare. Nu este însă mai puțin adevărat că, după cum am văzut, procesele de decoerență joacă un rol important în distrugerea eventualelor stări cuantice colective din creier. Noi am prezentat aici doar o modalitate, deși alte mecanisme pot fi găsite.

5.7.4 Calculatoare cuantice

Presupunem ca cititorii noștri sunt familiarizați cu caracteristicile principale ale unui calculator clasic. Cel mai important este că datele sunt stocate sub forma unor siruri binare 11001011010... în *memorie*, de unde sunt extrase și procesate cu ajutorul *operațiilor logice*. O singură dată binară a poate lua deci valoarea 1 sau 0, de unde numele ei de *bit*. Fiecărei operații logice îi se atasează o tabelă. Astfel, de exemplu, pentru operațiile *OR* și *XOR* avem:

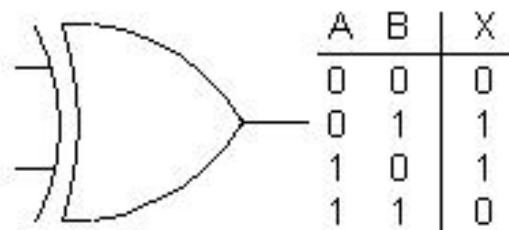


Figure 5.30: pune aici două XOR și tabelul

Dacă ne gândim la un bit, calculatorul cuantic apare ca o prelungire naturală a celui clasic. Astfel, bitul clasic ia *numai* valorile 0 și 1. Putem "cuantifica" acest sistem, și să presupunem că bitul calculatorului cuantic ia o valoare care este o superpoziție a celor două!. Astfel, dacă notăm stările fizice ale bitului clasic $|0\rangle$ și $|1\rangle$, atunci bitul cuantic (numit *qubit*) poate lua nu numai valorile $|0\rangle$ și $|1\rangle$ dar și orice stare cuantică care este superpoziție cuantică a acestora:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle; \text{ unde } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (5.288)$$

Atunci un calculator cuantic ar citi din memorie nu o singură valoare 0 sau 1, ci toată starea cuantică 5.295!

Situația devine mai clară dacă considerăm situațiile practice în care putem construi un qubit. În mod clasic, una dintre modalitățile de stocare a bitului este tranzistorul... Dacă tranzistorul are sarcină electrică în el, atunci presupunem că am stocat 1, dacă nu are sarcină, atunci am stocat 0. Este însă greu de realizat superpoziții cuantice a celor două stări fizice (sarcină prezenta sau nu). De aceea, un qubit trebuie să fie un sistem mai simplu, care poate fi o superpoziție cuantică.

O alegere naturală este spinul electronului, care poate fi plasat ușor într-o superpoziție cuantică a stărilor "sus" și "jos" (vezi secțiunea ??). Acest tip de qubit se folosește des în prezentele "mici" computere cuantice create în laborator. Cu toate acestea, noi ne vom folosi de cunoștințele dobândite în secțiunea ??, și vom folosi *fotonii*.

Aceștia, dacă sunt polarizați polarizați orizontal (alegerea bazei o facem noi) se află în starea $|H\rangle = |0\rangle$, iar dacă sunt polarizați vertical sunt în starea cuantică $|V\rangle = |1\rangle$. Când sunt polarizați la un unghi α , starea lor cuantică este (vezi secțiunea ??):

$$|\psi\rangle = (\sin \alpha)|0\rangle + (\cos \alpha)|1\rangle \quad (5.289)$$

Desigur că stocarea acestor qubiti este mai dificilă decât cea a spinilor electronici, pentru că fotonii se deplasează cu viteza luminii! Cu toate acestea, ne putem gândi la soluții în care, de exemplu, pe ei îi folosim numai pentru operații cuantice, și nu pentru stocare.

Să presupunem acum că avem mai mulți biti clasici (să zicem doi) care formează împreună un registru. În situația clasică, acest registru poate memora o cifră de la 1 la 1 (00,01,10,11). Ce se întâmplă în situația cuantică? În acest caz presupunem că registrul este într-o *stare cuantică pură* a celor doi qubiti! Cu alte cuvinte, starea cuantică a registrului se poate scrie ca:

$$|\psi\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle \quad (5.290)$$

unde funcția de undă se presupune că este normalizată. În cele ce urmează nu mai luăm în calcul normalizarea, pentru a face facilă citirea formulelor. Supoziția stării pure este esențială. Dacă am fi acceptat o stare cuantică mixtă (vezi ??) am fi introdus incertitudine în operațiile logice pe care urmează să le facem. Pe de altă parte, pentru a crea o stare cuantică pură cu qubiti alesi, trebuie să-i "alinăm" cu atenție. De exemplu, nu orice doi fotoni polarizați formează un qubit. *Numai aceea care sosesc în același timp la detector pot fi considerați în stare pură, și deci formează un qubit* (vezi discuția din ??)! Altfel, dacă sosesc în timpi diferiți la detectori, pot fi recunoscuți după timpurile de sosire (ceea ce e un fel de-a spune că starea cuantică este mixtă, vezi aici citeste că nu sunt sigur.)

Cum însă ar lucra operațiile logice care erau simple tabele în cazul clasic? Desigur că acestea depind de modelul fizic specific pe care l-am alege. Este însă natural să alegem ca *operațiile cuantice să acționeze asupra întregii stări cuantice a unui registru*. În plus, vom presupune că acești sunt *operatori unitari*, care ne asigură o proprietate principală a mecanicii cuantice, și anume *liniaritatea*. De exemplu, orice operator cuantic care acționează asupra registrului 5.295 va avea proprietatea:

$$U|\psi\rangle = U[\alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle] \quad (5.291)$$

$$= \alpha_1(U|00\rangle) + \alpha_2(U|01\rangle) + \alpha_3(U|10\rangle) + \alpha_4(U|11\rangle) \quad (5.292)$$

Avantajul major al acestei proprietăți este că, dacă stim cum acționează operatorul asupra elementelor bazei (deci dacă stim $U|00\rangle$, $U|01\rangle$, etc.), atunci stim cum acționează el asupra oricărei stări cuantice a registrului! În felul acesta putem extinde în mod natural operațiile logice din cazul clasic privind elementele bazei. Astfel, pentru operatorul XOR (vezi tabelul) vom avea:

$$U|00\rangle = |0\rangle \quad U|01\rangle = |1\rangle \quad (5.293)$$

$$U|10\rangle = |1\rangle \quad U|11\rangle = |0\rangle \quad (5.294)$$

și folosind liniaritatea 5.291, putem afla acțiunea operatorului U asupra oricărei stări cuantice a qubitului:

$$U|\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle + \alpha_3|1\rangle + \alpha_4|0\rangle \quad (5.295)$$

Dacă privim însă la situația fizică, în cazul nostru fotonii, vedem că la intrare avem doi fotoni, și folosim pentru ieșire numai unul. Aceasta poate crea confuzii, și de aceea este de preferat ca starea de după aplicarea operatorului logic să fie tot o stare cuantică a întregului registru. Din punct de vedere practic, avantajul este că putem privi atunci întreaga acțiune a operației logice ca o evoluție a funcției de undă a registrului 5.295.

Cea mai simpla situatie este sa presupunem ca operatorul logic modifica functia de unda a celui de-al doilea foton, lasandu-l pe primul nemodificat. Primul se numeste atunci qubit de *control*, iar al doilea qubit "*target*". In acest caz am rescrie operatiile 5.296 ca:

$$U|00\rangle = |00\rangle \quad U|01\rangle = |01\rangle \quad (5.296)$$

$$U|10\rangle = |11\rangle \quad U|11\rangle = |10\rangle \quad (5.297)$$

unde am pastrat valoarea initiala a primului foton. Acest operator, care practic modifica functia de unda a registrului 5.295 in alta, se scrie ca o matrice, si are notatia: Notatia din stanga,

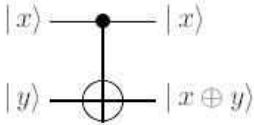
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


Figure 5.31: pune aici doua XOR si tabelul

destul de utilizata pentru calculatoarele cuantice, ne arata in ce fel se transforma elementele bazei $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Dupa ce astea sunt cunoste, trebuie insa calculata mereu matricea de transformare a oricarei stari cuantice, si doar aceasta folosita! O consecinta surprinzatoare este ca shema de mai sus nu lasa mereu primul foton (fotonul de control) nemodificat, asa cum am presupus!. Astfel daca el este in starea $|0\rangle + |1\rangle$, iar al doilea (fotonul target) in starea $|0\rangle$, starea finala este, conform matricii de mai sus, $|00\rangle + |11\rangle$, adica o stare "entangled"!

memoria mai mare e doar aparenta... si la clasic merge.

sa spui aici de operatii de faza sau de beamsplitter? Nu, ca nu e nevoie.

Cum ar arata insa un circuit logic cuantic in realitate? Desigur ca forma sa depinde de implementarea aleasa, spinii ionilor, fotoni, etc. Pentru ca noi in sectiunile de mai sus ne-am concentrat pe fotoni pentru a exemplifica diferitele aspecte experimentale noi, vom prezenta in continuare un circuit logic realizat experimental cu ajutorul fotonilor, care urmareste indeaproape rezuoltatele experimentale obtinute de ... si grupul sau [?]. Acestia au considerat circuitul logic din Fig.5.33

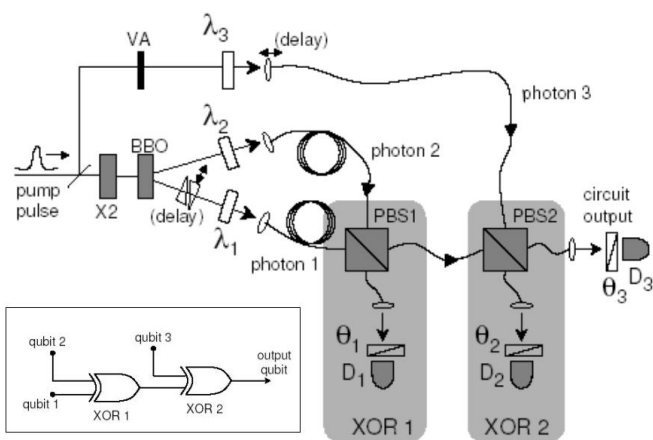


Figure 5.32: lumina "pulse". spuna ca cei 3 fotoni ai aceeasi frecventa.

Practic, cele doua casute ingrosate din Fig.5.33, formate din cite un beamsplitter, un polarizator, si un detector, formeaza

cele doua elemente XOR1 si XOR2. Elementele anterioare celor 3 fibre optice (prin care fotonii intra in beamsplitteri) sunt adaugate pentru a alege polarizatia fotonilor (care reprezinta starile logice initiale), si, foarte important, pentru a-i face indiscernabili. Acest ultim aspect ne asigura, conform discutiei din ??, ca starea cuantica totala a celor 3 fotoni este una pura. Experimental, indiscernabilitatea fotnilor se realizeaza folosind fotoni de la aceeasi sursa (avind aceeasi frecventa, vezi Fig.5.33), si care ajung in acelasi timp la detectori (folosind doua circuite aditionale de "delay").

Rotind cei trei polarizori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ interpusi in calea celor 3 "beamuri", putem alege starile logice cunatice initiale, care vor fi de tipul ???. Sa urmarim acum ce se intimpla in prima poarta XOR1. Aici, starea cuantica totala (pura, pentru ca cei 3 fotoni ajung in acelasi timp la detectori!) va fi data de :

$$|\psi\rangle_{12} = (\cos \lambda_1 |0\rangle + \sin \lambda_1 |1\rangle)(\cos \lambda_2 |0\rangle + \sin \lambda_2 |1\rangle) \quad (5.298)$$

$$= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle \quad (5.299)$$

unde starile $|0\rangle$ si $|1\rangle$ se refera la polarizatiile orizontale si verticale ale celor doi fotoni, iar $\alpha = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2$, $\beta = \cos \lambda_1 \sin \lambda_2$, $\gamma = \sin \lambda_1 \cos \lambda_2$ si $\delta = \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$

Beamsplitterii sunt orientati la 45° , in asa fel incit ei transmit fotoni in starea cuantica $|+\rangle$ si reflecta fotoni in starea $|-\rangle$, unde

$$|+\rangle = |0\rangle + |1\rangle \quad \text{si} \quad |-\rangle = |0\rangle - |1\rangle \quad (5.300)$$

De aceea trebuie sa rescriem starea precedenta in bazele de mai sus. Dupa un calcul aferent, obtinem:

$$|\psi\rangle_{12} = \text{calculeaza} \quad (5.301)$$

Cum polarizotul θ_1 este orientat la ..., vedem ca atunci cind detectorul D_1 detecteaza un foton, starea sistemului se proiecteaza, si devine

$$|\psi\rangle'_{12} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle + \gamma |1\rangle + \delta |0\rangle \quad (5.302)$$

unde nu luam in calcul de eaceasta data decit polarizarea fotonului emergent.

Este usor de verificat ca, in cazul in care starile initiale sunt "clasice" 00, 01, 10, 11, acesta reprezinta operatorul CNOT. Astfel de exemplu, fie starea "clasica" intiala 01 este data de orientarea polarizorilor $\lambda_1 = 0$ si $\lambda_2 = 90^\circ$. Inolcuind, obtinem coeficientii $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ si deci starea finala a fotonului emergent este, conform relatiei precedente $|\psi\rangle'_{12} = |1\rangle$, adica in conformitate cu tabelul ???. In plus insa, operatorul logic de mai sus este cuantic, caci starile initiale pot fi superpozitii de tipul ???. El este unitar, iar matricea lui de actiune se obtine imediat stiind starea intitala ?? si cea finala ?? ca fiind:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.303)$$

adica jumatate din matricea ?? dorita. Cealalta jumatate nu este evident obtinuta, caci fotonul "control" a fost distrus prin masuratoare. Practic, aceasta inseamna ca noi nu am realizat un intreg circuit XOR asa cum ne-am dorit, ci numai unul *selectiv*, in care operatia logica nu o efectuam continuu, ci numai in anumite cazuri, in care detectorul D_1 primeste un foton. De aceea, aceasta implementare practica sse numeste "destruc-tiv C-NOT". Cu toate acestea, in cazul in care detectorul D_1 "ticaie", putem spune ca solutia practica reprezinta o imple-mentare a operatorului XNOT.

Vedem in Fig.5.33, ca cel de-al doilea element XOR2 este identic cu primul, si deci efectueaza aceeasi operatie atunci cind detectorul D_2 primeste un foton. Putem spune ca, atunci cind

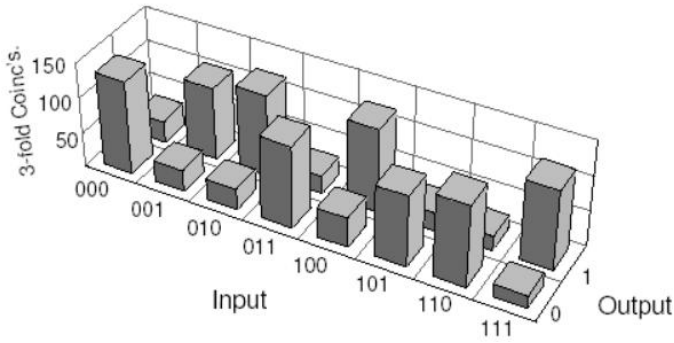


Figure 5.33: verifica, ca mi se pare ca nu se potrivesc!

ambii detectori D_1 si D_2 detecteaza doi fotoni in aceasi timp, are loc operatia logica data de circuitul din insetul Fig.??.

Mi-a neclar. Cin fotonii ajung in calasi timp la detector, sau cin provin din aceasi puls? vezi cum mai bine.

In implementarea practica, s-a masurat polarizatia celui de-al treilea foton atunci cind toti cei 3 detectori au detectat simultan cite un foton. In acest caz ne asteptam in primul rind ca, in cazul "clasic", starea fotonului final sa fie data de cele ale fotonilor initiali 000, 001, etc, confrom matricii ???. Rezultatul experimental prezenta in ?? confirma acest lucru, in limita unei erori de aproximativ 20%.

In plus inasa, vrem sa verificam si *comportarea cuantica* a acestui circuit. Aceasta trebuie sa aiba loc conform matricii 5.34. Datele prezentate in Fig. stinga au fost realizate cind starea fotonului 1 a fost $|15^\circ\rangle = 0.97|0\rangle + 0.26|1\rangle$, iar cele ale fotonilor 2 si 3 au fost $|0\rangle$ si $|1\rangle$. Starea coerenta de la iesirea circuitului este asteptata sa fie $|75^\circ\rangle = 0.26|0\rangle + 0.97|1\rangle$, si acest lucru se verifica in Fig.??, unde polarizarea fotonului emergent a fost masurata ca functie a orientarea polarizorului θ_3 . O alta situatie verificata este prezentata in graficul din dreapta.

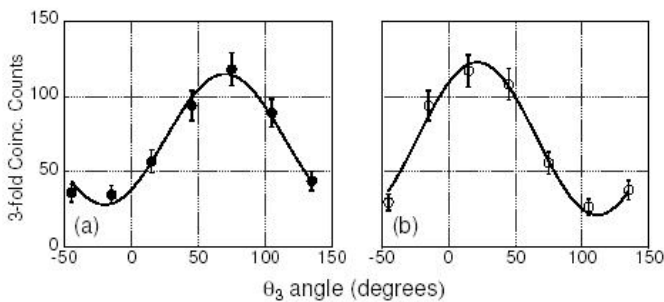


Figure 5.34: Explica stinga dreapta aici.

Bine, bine, ne veti intreba, sa presupunem ca putem face registri de qubiti, fie cu spini, fie cu fotoni, si sa presupunem ca putem face si operatii logice cu functiile unda atasate acestor registri, dar la ce ne folosesc toate astea? La ce ar fi mai bun un calculator cuantic decit cel clasic?

Intr-o prima instanta, am putea spune ca stocarea datelor sub forma functiei de unda cuantica ne poate ajuta sa stocam trilioane de date foarte usor. Astfel, in fiecare registru de 1 bit, in loc de una din doua valro, am stoca una dintr-o infinitate (alegind coeficientul α). Cu toate acestea, din punct de vedere practic, acesta este numai un avantaj aparent. Si in cazul clasic am putea face acest lucru. Am putea stoica in-trun tranzistor de memorie nu numai "sarcina pezena" sau "sarcina lipsa", dar

si orice valoare a sarcinii. Motivul practic poentru care nu am facut inasa acest lucru sunt erorile experimentale. Daca stocam 30 de electroni, cum putem spune cu precizie ca aacestia sunt 30 si nu 31? Acelasi lucru se poate inimpla si la stocarea cuantica.

Un avantaj clar este inasa in cazul opratiilor de procesare paralela. Astfel, pentru ca operatorii atasati operatiilor logice (ca XOR-ul cuantic) sunt liniari, atunci putem implementa foarte natural *procesare paralela*. Astfel, daca cineva ne cere rezultatul unui proces pentru registrul initial $|00\rangle$ iar altcineva pentru registrul initial in starea $|11\rangle$, noi punem registrul initial in superpozitia $|00\rangle + |11\rangle$ si aflam imediat ...

In plus, putem folosi efectele speciale ale mecanicii cuantice, ca de exemplu principiul proiectiei, pentru a realiza sisteme criptografice. Fara a intra in detalii, mentionam ca acestea folosesc ... Alte exemple folosite sunt cel al algoritmilor de cautare sau de sortare (detalii).

Dar desigur ca tot principiul proiectiei este o problema majora. Datorita lui nu putem sticomplet starea cuantica finala dupa operatia logica. Desi functia de unda este bine stabilita, noi proiectam vectorul de unda in urma masuratorii, nestiind pozitia initiala din care acesta provine (explica). In situatia exemplificata mai sus, am vazut ca operatorul XOR implementat era selectiv, facut sa slucreze numai cind toti cei trei detectori detecatu in acelasi timp un foton provenind de la acelasi "beam" initial. Cu toate acestea, se pot construi scheme logice rezultatul final sa functioneze in cuida acestei probleme. Un exemplu clasic este lagoritmul Deutsch pentru testarea falsitatii unei monede. Acesta este prezentat in exercitiul ??, si metionam doar aici ca a fost implementat cu succes cu ajutorul spinilor electronilor (NMR)

5.7.5 Citeva vorbe despre variabilele ascunse

Problema principiului proiectiei iese cel mai bine in evidenta din masuratorile de difractie. Astfel, de ce ar fi corpusculul (electron, sau foton, altceva), descris de o functie de unda ce se intinde in tot spatiul ca un fel de "ceata", pentru ca apoi el sa fie detectat numai la anumite locatii? Raspunsul cel mai natural a parut la un moment dat ca este dat de catre Bohm, prin intermediul variabilelor ascunse.

Asfel, a zis Bohm, electronul se deplaseaza foarte repede peste tot acol unde este "ceata", si atunci e normal ca eu sa-l gasesc cind intr-o pozitie, cind in alta. Daca el s-ar misca extrem de repede de la o pozitie la alta, eu nu as avea timp sa-i urmaresc pozitia, ci practic numai sa-i gasesc probabilitatea de a-l gasi intr-o locatie specifica. Aceasta probabilitate, a zis Bohm, este data de functia de unda. Mecanica cuantica devine astfel o teorie clasica. Si, pentru ca sa arate ca acest lucru este posibil, Bohm a reusit sa si descrie efectul de mai sus!.

Asfel, el a considerat intii ecuatiei lui Schrodinger pentru o singura particula:

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V(x)\phi \quad (5.304)$$

Daca descompunem functia de unda in amplitudinea reala si faza

$$\phi(x) = R(x) \exp \left[\frac{iS(x)}{\hbar} \right] \quad (5.305)$$

si notind cu $P(x) = R^2(x) = |\phi(x)|^2$ si $v(x) = \nabla S(x)/m$, se arata direct (exercitiu) ca componentele reale si imaginare ale ecuatiei lui Schrodinger conduc la:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{v}) = 0 \quad (5.306)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (5.307)$$

Prima ecuatie se interpreteaza ca ecuatia de conservare in timp a densitatii de probabilitate. In acest caz $\mathbf{v}(x)$ da "curgerea" densitatii de probabilitate. A doua ecuatie este echivalenta cu discutie...

definitie unda pilot

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla \left[V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] \quad (5.308)$$

care este de fapt ecuatia lui Newton de miscare a particulei.

In cazul $\hbar = 0$, interpretarea rezultatelor de mai sus este imediata. Astfel, p...

In primul rind, recunoastem in discutia de mai sus limita clasica ($\hbar = 0$) a mecanicii cuantice. In al doilea rind, atunci cind privim ecuatia ?? pentru $\hbar \neq 0$, vedem ca inca putem considera cazul clasic, daca adaugam la potentialul clasic $V(x)$ potentialul "cuantic" $U(x)$:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (5.309)$$

Practic, daca presupunem ca particule "simte" si potentialul $U(x)$, putem reconstitui rezultatele mecanicii cuantice! Astfel, ea ar putea ramine o particula corpusculara perfect clasica, care insa s-ar deplasa foarte repede in toata regiunea spatiului, si care ar avea o probabilitate de detectare intr-un anumit loc data de $P(x) = R^2(x) = |\phi(x)|^2$, adica exact valoarea cuantica. REzultatele figurilor de difractie ?? si ?? ar fi atunci clare: vedem absorbtile individuale ca puncte, pentru ca intr-adevar particula este acolo in momentul cind o detectam! Dar este oare asa?

La prima vedere, principala problema pare sa fie potentialul $U(x)$ care este dat de particula (mai bine zis data de probabilitatea de a gasi particula $R(x)$), si care si actioneaza asupra ei. Un fel de self-potential care pina acum a fost exclus pentru electron de exemplu. Dar conceptual, nu exista nimic care sa-l excluda.

La o privire mai atenta, citeva probleme tehnice se pot gasi. Astfel, pentru a evolua conform ecuatiei lui Schrodinger, valorile initiale ale vitezei trebuie sa fie date deja de $v(x) = \nabla S(x)/m$. Odata aceasta relatie indeplinita, ea va fi indeplinita la orice moment ulterior. In plus, pot aparea probleme cu teoria relativitatii, caci particula se deplaseaza pe distante foarte mari (peste tot acolo unde se intinde functia de unda) cu viteze foarte mari (pentru ca noi sa nu observam decit pozitiile medii). Este deci posibil ca aceasta viteza sa intreaca viteza luminii, in special daca cimpul cuantic care creeaza potentialul $U(x)$ este asemanator celui electromagnetic (unde viteza "informatiei" este cea a luminii), pentru ca in acest caz electronul trebuie sa ajunga inainte intr-un punct pentru a "simti" potentialul ce vine din urma.

Cu toate acestea, lovitura de moarte a teoriei lui Bohm a fost data nu de aspectele de mai sus, ci de aparitia spinului electronului. Practic, teoria nici n-a avut timp sa evolueze, daotrita succesului mecanicii relativiste exprimata sub forma "abstracta" a lui von Newmann. Caci, introducind spinul ca o rotatie reala a electronului, am obtine viteze de margine care depasesc viteza luminii (vezi discutia din ??). Iar luarea in cacul metodei von Newmann cu funtii de unda matriceale, , explica prezenta natural spinului in cadrul mecanicii relativiste (vezi discutia din sectiunea ??). Ca sa nu mai vorbim de succesele ulterioare ale electrodinamicii cuantice, verificate experimental.

Ideea de unda pilot (sau de variabile ascunse) a ramas astfel o amintire a unui vis frumos, ceva care "ar fi putut sa fie". O incercare de a demonstra ca in cazul general acest lucru nu este posibil a fost initiata de Bell, cu celebrele sale inegalitati. In

sectiunea urmatoare vom face o introducere in acest subiect, impreuna cu un rezultat experimental.

5.7.6 EPR paradox

O notiune care se foloseste des pe linga cea de "*variabila ascunsa*" este cea de "*localitate*". Aceasta din urma inseamna pur si simplu ca evenimentele intr-o anumita locatie sunt influentate *direct* doar de evenimentele din locatiile invecinate, si nu de altele foarte indepartate. Intr-o teorie locala, evenimentele indepartate se transmit din aproape in aproape (precum o unda), asa ca in final au o influenta si ele, dar aceasta are deci loc finalmente prin intermediul vecinilor. Teoria relativitatii pune chiar o limita de viteza acestui transfer, si anume viteza luminii.

Desigur ca teoria cuantica ar putea sa fie locala, fara a prezenta "variabile ascunse". Invers inasa, daca teoria cuantica ar avea variabile ascunse, ne-am astepta sa fie si locala, pentru a fi pe deplin clasica. Atunci influenta variabilelor ascunse s-ar transmite din vecini in vecini, si teoria mecanicii cuantice cu variabile ascunse ar fi locala, si perfect clasica.

Pe de alta parte, localitatea isi are propriile ei probleme in mecanica cuantica, indiferent daca variabile ascunse exista sau nu. De aceasta ne dam seama daca privim partea din stinga a Fig.5.27 si ne aducem aminte de discutia despre decoerenta. In cazul exemplificat in Fig.5.27, matricea operatorului statistic se diagonalizeaza prin intermediul interactiei cu mediul inconjurator. De data aceasta, sa presupunem ca alegem o astfel de functie de unda, in care distanta $x_1 - x_2$ dintre cele doua functii de unda este foarte mare, sa zicem de mii de ani lumina. In acest caz, un mecanism de decoerenta care sa diagonalizeze aproape instantaneu matricea statistica nu mai este posibil, pentru ca orice interactie ar avea nevoie de o viteza finita sa se transmita, care este oricum mai mica decit viteza luminii. Cu toate acestea, teoria cuantica spune ca principiul proiectiei are totusi loc, si chiar instantaneu! Cu alte cuvinte, daca eu masor pozitia si gasesc electronul in x_1 , functia de unda devine imediat nula in jurul lui x_2 (acolo unde inainte era un pic gaussian), desi distanta dintre punctele x_1 si x_2 este de mii de ani lumina! Einstein a numit acest efect "spooky action", pentru ca un mecanism fizic care sa-l explice (ca decoerenta) este de negasit, datorita vitezei maxime finite de transmisie a informatiei.

Pentru ca argumentul de mai sus este mai greoi in cazul unei singure particule, Einstein, Podolski si Rosen l-au reformulat (de unde si numele EPR al paradoxului) pentru cazul a doua particule care se deplaseaza in directii diferite, si a caror functie de unda este "entangled". Vom exemplifica si noi cazul fotonilor.

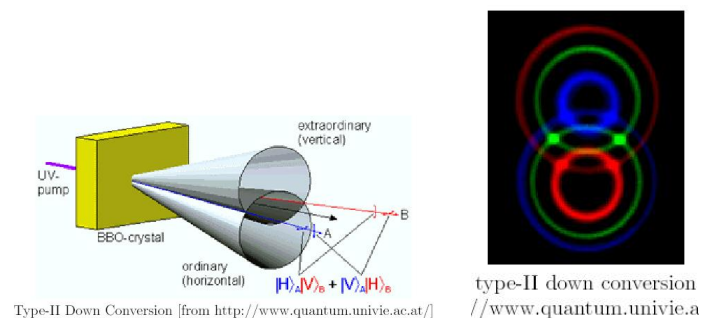


Figure 5.35: Parametric down-conversion

In Fig.5.35 prezentam o metoda de a obtine doi fotoni "entangled", numita tehnic type-II parametric down conversion. Aici, lumina ultravioleta de la un laser intra intr-un cristal nelinier

(vezi stnga Fig.5.35). O parte din fotoni vor strabate nestingeriti cristalul, sau vor fi absorbiti definitiv. O alta parte, minoritara insa, este absorbita de cristal care apoi, cu energia cistigata, emite alti doi fotoni. Acestia parasesc cristalul in directii diferite, datorita birefringentei (verifica!) cristalului (diferite proprietati optice in diferite directii), sub forma unor conuri de lumina (vezi Fig.5.35 dreapta). In plus, tot birefringenta este cea care determina o polarizare specifica fiecarui con (in cazul prezentat, cel de sus este polarizat vertical, iar cel de jos polarizat orizontal). Forma conica este data de principiul de conservare ale impulsului (verifica), iar culoarea conurilor (cel rosu de jos corespunde celui albastru de sus), este data de principiul de conservare al energiei.

Un caz particular este cind cei doi fotoni emisi au exact aceeasi energie (conurile verzi in Fig.5.35), deci jumatate din energia fotonului incident. Daca stim ca conul de sus este polarizat vertical, iar cel de jos orizontal, care este polarizarea razelor de lumina care ies chiar la intersectia celor doua conuri? Este orizontala, sau verticala?

Sa notm cele doua pozitii cu A si B. In fiecare pozitie, putem avea doua polarizatii, deci avem in toat *patru* stari posibile pentru cei doi fotoni. Daca fotonul din A e polarizat orizontal, iar cel din B este polarizat vertical, am putea spune ca sistemul este in starea $|\psi_1\rangle = |1, 0, 1, 0\rangle$, unde ordinea starilor a foste aleasa *AH, AV, BH, BV* (atentie, stari in locatii diferite. am voie?). Pe de alta parte, poate ca este invers, si ca fotonul din B este orientat vertical, si cel din A orizontal, si deci starea este $|\psi_2\rangle = |0, 1, 0, 1\rangle$. Cum nu stim care din cele doua cazuri este adevarata, (si cum am aflat acum despre *starile mixte*), ar parea natural sa presupunem ca sistemul cuantic este descris de operatorul statistic:

$$R = \frac{1}{2}|1, 0, 1, 0\rangle\langle 1, 0, 1, 0| + \frac{1}{2}|1, 0, 1, 0\rangle\langle 1, 0, 1, 0| \quad (5.310)$$

Cu toate acestea, o analiza exacta a situatiei (vezi ??) arata ca sistemul *nu* este intr-o stare mixta ca cea de mai sus, ci intr-o *stare pura*. Cu alte cuvinte, el este descris de o *singura functie de unda*, care este insa:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0, 1, 0\rangle + |1, 0, 1, 0\rangle) \quad (5.311)$$

Remarcam diferenta esentiala fata de posibila stare mixta. Daca incercam sa masuram in ce stare este fotonul din A (polarizat orizontal sau vertical), functia de unda *totala* $|\psi\rangle$ va "colapsa" *instantaneu* dupa masuratoare in cele doua posibile stari $|\psi_1\rangle$ sau $|\psi_2\rangle$. Daca starea ar fi fost mixta, noi numai am fi "vazut" in care din cele doua stari ar fi fost sistemul.

Paradoxul EPR duce la extrem acest efect, lasind cele doua raze care ies din cristal prin punctele A si B sa mearga mii de ani lumina. Chiar si in acest caz, daca masuram functia de unda 5.311 intr-o locatie indepartata, atunci ea este *obligata* conform mecanicii cuantice sa colapseze instantaneu si in cealalta locatie aflata la mii de ani lumina. Presupunem ca nimic nu se intimpla cu cele doua raze pe parcurs. Desigur ca acest colaps instantaneu vine in opozitie cu mecanismele locale de decoerenta, ca cel prin interactia cu mediul, discutat in sectiunea ???. In cazul decoerentei am gasit un mecanism fizic care sa explice proiectia vectorului de unda, dar aici nu mai putem, pentru ca cele doua locatii sunt prea indepartate una de alta.

Sa incercam sa construim un experiment mental care lasa sa se intrebvada si mai bine problema. Pentru aceasta, sa masuram polarizatia fotonului in fiecare cele doua locatii cu ajutorul unui "polarizer beamsplitter" (vezi Fig.5.36).

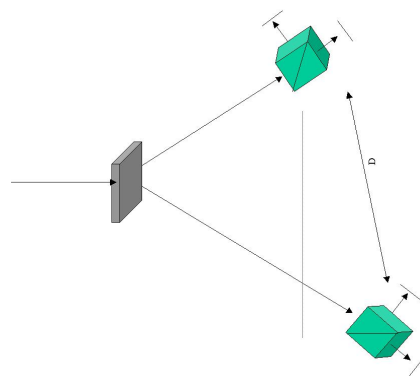


Figure 5.36: PBS + schema

...

Este interesant de remarcat aici comparatia cu situatiile descrise in sectiunea ???. Daca avem un singur foton incident, putem considera cimpul electromagnetic $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ca fiind functia de unda care ne da probabilitatea de a gasi electronul, conform discutei din sectiunea ???. La trecerea prin cub, aceasta functie ramine coerenta, pentru ca in optica cele doua raze pot fi facute sa interfere din nou. Practic, cimpul electromagnetic va fi prezent pe cei doi detectori. La o masuratoare, fotonul este totusi vazut doar pe unul din cei doi detectori. Deci, daca are loc un proces de decoerenta (care schimba brusc cimpul electromagnetic in asa fel incit sa fie prezent numai pe un detector), acesta nu are loc la trecerea prin cub, ci intr-un stadiu mult mai final. In final insa, cu sau fara decoerenta, ne asteptam ca fotonul sa "aleaga" local in care detector merge, influentat de diverse fenomene (ca mediul inconjurator), dar sigur *neinfluentat* de ce se intimpla la ani lumina departare.

...

Avem acum ingredientele de a testa paradoxul EPR. Astfel, trimitem cele doua raze de lumina create in Fig.5.35 la ani de lumina departare (vezi dreapta Fig.5.36). Apoi atasam 2 "polarizer beamsplitter" la capetele razelor (care se afla tot la ani lumina departare), fiecare impreuna cu doi detectori. Unul dintre cuburile aste asezat mai departe de-a lungul razelor decit celalalt, in asa fel incit lumina sa ajunga la el cu o intirziere apreciabila fata de primul. Apoi rugam doi operatori, aflati in cele doua locatii indepartate, sa inregistreze polarizarea fiecarui foton sosit.

Cum operatorul A masoara primul, mecanica cuantica ne spune ca dupa fiecare masuratoare a lui, functia de unda colapseaza. In cazul nostru (functia 5.311) aceasta inseamna ca daca fotonul este observat de A in pozitia orizontala, atunci fotonul ramas care se indreapta catre B este musai in pozitie verticala, si invers. Ceea ce inseamna ca B trebuie sa masoare mereu exact opusul a ce masoara A!. Pe de alta parte, daca exista decoerenta locala, atunci ne-am astepta ca rezultatul obtinut de B sa fie indiferent de cel obtinut de A caci, pina sa ajunga informatia de la A la B, operatorul B a si masurat. In acest caz, A si B ar avea rezultate aleatoare unul fata de celalalt. Vedem ca un astfel de experiment ar rezolva "problema" EPR: am verifica experimental daca teoria cuantica este o teorie locala sau nu.

La o privire mai atenta a acestui experiment, vedem ca mai exista totusi posibilitatea ca teoria cuantica sa fie locala, si cu toate acestea A si B sa obtina mereu rezultate complementare, daca acceptam "variabilele ascunse". Astfel, fotonii ar pleca fie verticali, fie orizontali (si deci in fapt am avea o stare clasica mixta, ca cea data de relatia 5.310). In acest caz A si B ar masura rezultate complementare, fara ca functia de unda sa "colapseze" (pentru ca deja fotonul are polarizatia orizon-

tala sau verticala). Cu toate acestea, acest efect îl îndepărtăm foarte ușor rotind identic cei doi "polarizer beamsplitter", în așa fel încât *funcția de undă să fie nevoită să colapseze* (aici trebuie să arată funcția de undă rezultată este tot entangled. este așa?). Cum este puțin probabil ca fotonii aruncați în spațiu să aibă *direcția de polarizare* exact pe cea care am ales-o noi rotind cuburile, funcțiile de undă vor colapsa în A și B, și dacă colapsează complementar, atunci sigur teoria nu este locală.

Din păcate, la momentul scrierii acestei cărți, un astfel de experiment nu este posibil. Deși am văzut în secțiunea ?? ca lumina laser se poate trimite în spațiu către sateliți pentru a măsura efecte astronomice, intensitatea în cele două raie A și B din Fig.5.35 este încă foarte mică, de ordinul a doar citorva mii (verifica) de fotoni pe secundă. Cea mai mare parte a fotonilor (10^x pe secundă) trec prin cristalul neliniar fără să creeze cei doi fotoni corelați atât de necesar.

De asemenea, deși detectorii actuali pot "vedea" fotoni individuali, aceasta nu are loc cu o eficiență ridicată (însemnând că numai aproximativ 5% din fotonii individuali care sosesc dau puncte albe ca cele din Fig.5.22). În plus, vrem să stim și timpul precis în care sosesc fotonii, sau cel puțin ca doi fotoni detectați în locațiile A și B provin de la cristal, și nu de undeva aiurea. Aceasta din urmă problema se rezolvă tehnic cu așa numitele detectoare de coincidență, care compară într-un timp foarte scurt semnalul la cele două locații (să mai dau detalii tehnice? cred că nu).

Cu toate acestea, lumea științifică nu s-a dat batută, și a inventat o metodă mai indirectă de a verifica experimental în parte afirmațiile de mai sus, așa după cum vom vedea în secțiunea următoare.

5.7.7 Bell non-locality: variabile ascunse și localitate

Pina în prezent nu s-a găsit o modalitate practică de a verifica experimental dacă mecanica cuantică este o teorie locală sau nu. Cu toate acestea, s-a găsit o modalitate de a verifica dacă ea are "variabile ascunse" (presupunând implicit că dacă are variabile ascunse atunci este complet clasică, și deci locală). Modalitatea aleasă a fost sugerată de Bell, și urmează îndeaproape ideile din ecuația precedentă.

Astfel, felul în care funcția de undă 5.310 colapsează la cele două locații (independent în cazul teoriei locale, complementar în principiul proiectiei) influențează probabilitățile a găsi fotonii pentru diferite *direcții de polarizare* în care rotim cele două "polarizer beamsplitter". De aceea este de așteptat că măsurând intensitățile de lumină în diferite direcții de polarizare (rotind cuburile) să obținem diferite rezultate pentru cele două teorii. Este important aici să rotim axele de rotație ale cuburilor.

Ce ne spune teoria clasică cu variabile ascunse? Fie $\{\lambda_n\}$ un sir de valori care denotă multiplele "stări ascunse" ale sistemului la generare, și fie probabilitatea p_n pentru ca sistemul să afle la plecarea în starea ascunsă λ_n . Pentru fiecare stare ascunsă, cei doi fotoni emergenți au stări de polarizare *precise*. Într-o situație simplificată, am putea spune că dacă $\lambda_n = 34^\circ$, atunci primul foton este polarizat la 34° iar cel de-al doilea la 124° , și tot așa.

Odată cei doi fotoni emisi în starea λ_n , există probabilități precise ca fiecare foton să fie detectat pe unul din cei doi detectori pe care el poate ajunge, în funcție de siguranța de orientare a polarizorilor a și b . Fie atunci $P_1(a, \lambda_n)$ probabilitatea de a găsi primul foton pe detectorul 1, atunci când polarizorul coreșpunzător este rotit în poziția a iar fasciculul "clasic" emergent este în starea λ_n . Probabilitatea ca el să fie găsit pe detectorul 2 este atunci sigur $P_2(a, \lambda_n) = 1 - P_1(a, \lambda_n)$, pentru că el va fi detectat sigur pe unul din cei doi detectori. Aceste probabilități le putem înțelege printr-un mecanism *local*. Fotonul vine

la polarizor, și în funcție de orientarea și structura internă a polarizorului (defecte, temperatură, etc.), el alege unul din cei doi detectori, cu o anumită probabilitate.

Luând în calcul cei doi fotoni, sunt patru combinații de rezultate rezultate posibile: $\{13\}$, $\{14\}$, $\{23\}$, $\{24\}$. De exemplu, probabilitatea de a găsi primul foton pe detectorul 1 și pe cel de-al doilea pe detectorul 4 este

$$P_{14}(a, b, \lambda_n) = P_1(a, \lambda_n)P_4(b, \lambda_n) \quad (5.312)$$

Vedem în relația de mai sus esența presupunerii de interacție "locală". Astfel, putem scrie probabilitatea totală ca un produs de probabilități independente, dacă presupunem că nu există nici un fel de influență între cele două evenimente de măsură (ele sunt independente unul față de celălalt).

Dacă nu știm în ce situație inițială λ_n se afla sistemul, probabilitatea experimentală de a găsi un foton pe detectorul 1 și celălalt pe detectorul 4 este atunci

$$P_{14}(a, b) = \sum_{\lambda_n} p_n P_1(a, \lambda_n) P_4(b, \lambda_n) \quad (5.313)$$

Calculăm acum următoarea funcție de corelație:

$$E(a, b) = P_{13}(a, b) - P_{14}(a, b) - P_{23}(a, b) + P_{24}(a, b) \quad (5.314)$$

Folosind relațiile precedente, aceasta se scrie, după descompunerea în factori, ca

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \sum_n p_n [P_1(a, \lambda_n) - P_2(a, \lambda_n)][P_3(b, \lambda_n) - P_4(b, \lambda_n)] \\ &= \sum_n p_n \bar{A}(a, \lambda_n) \bar{B}(b, \lambda_n) \end{aligned} \quad (5.315)$$

unde

$$\bar{A}(a, \lambda_n) = P_1(a, \lambda_n) - P_2(a, \lambda_n) = 2P_1(a, \lambda_n) - 1 \quad (5.317)$$

$$\bar{B}(b, \lambda_n) = P_3(b, \lambda_n) - P_4(b, \lambda_n) = 2P_3(b, \lambda_n) - 1 \quad (5.318)$$

Deoarece $0 < P_1 < 1$ și $0 < P_3 < 1$ avem $|\bar{A}| < 1$ și $|\bar{B}| < 1$.

Pentru două unghiuri posibile ale primului polarizor, a și a' , calculăm acum diferența

$$E(a, b) \pm E(a', b) = \sum_n p_n \bar{B}(b, \lambda_n) [\bar{A}(a, \lambda_n) \pm \bar{A}(a', \lambda_n)] \quad (5.319)$$

și observăm că, deoarece $|\bar{B}| < 1$, putem scrie:

$$|E(a, b) \pm E(a', b)| \leq \sum_n p_n [\bar{A}(a, \lambda_n) \pm \bar{A}(a', \lambda_n)] \quad (5.320)$$

Alegând acum combinația:

$$S(a, b, a', b') = |E(a, b) - E(a', b)| + |E(a, b') + E(a', b)| \quad (5.321)$$

avem atunci

$$S \leq \sum_n p_n [|\bar{A}(a, \lambda_n) - \bar{A}(a', \lambda_n)| + |\bar{A}(a, \lambda_n) + \bar{A}(a', \lambda_n)|] \quad (5.322)$$

Vedem că în paranteze apar practic numai două numere diferite $x = \bar{A}(a, \lambda_n)$ și $x' = \bar{A}(a', \lambda_n)$. Deoarece acestea au proprietatea că $|x| < 1$ și $|x'| < 1$ așa cum arătat înainte, se arată imediat că următoarea inegalitate este îndeplinită:

$$|x - x'| + |x + x'| < 2 \quad (5.323)$$

Încludând în relația precedentă, și ținând cont că $\sum_n p_n = 1$, obținem

$$S = |E(a, b) - E(a', b)| + |E(a, b') + E(a', b')| \leq 2 \quad (5.324)$$

Aceasta inegalitate este cunoscuta sub numele de inegalitatea CHSH, dupa numele celor care au propus-o (??). Daca mecanica cuantica are variabile ascunse clasice (si este deci atunci locala), atunci relatia de mai sus trebuie indeplinita pentru orice valori a, a', b si b' ale celor doi polarizori. Putem vedea deja in ce masura mecanica cuantica contrazice aceasta inegalitate prin urmatorul calcul.

Astfel, in mecanica cuantica, functia de unda a sistemului format de cei doi fotoni este data de relatia 5.311. Daca primul polarizor este orientat in pozitia a , si cel de-al doilea in pozitia b , atunci se poate arata (sa arat cum) ca probabilitatea de a detecta un foton pe detectorii 1 si 3 este $P_{13}(a, b) = \sin^2(a - b)$. Utilizind relatia de definitie ??, vedem ca mecanica cuantica prezice:

$$E(a, b) = \sin^2(a - b) - \sin^2(a - b - \pi/2) - \sin^2(a + \pi/2 - b) + \sin^2(a + \pi/2 - b + \pi/2) = -\cos[2(a - b)] \quad (5.325)$$

Daca alegem unghiurile $a = 0, a' = 22.5^\circ, b = 45^\circ, b' = 67.5^\circ$, si folosim formula precedenta in relatia de definitie 5.321, obtinem $S = S(0, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ) = 2\sqrt{2} = 2.82 > 2$. Cu alte cuvinte, mecanica cuantica prezice o violare a inegalitatii 5.324. Aceasta ne da o posibilitate practica de a verifica experimental teoria mecanicii cuantice. Astfel, daca masuram experimental S pentru valorile unghiurilor de polarizare alese mai sus, vedem daca S este mai mic decit 2, sau daca ia valoarea 2.82 prezisa de mecanica cuantica, si care contrazice astfel supozitiile unei teorii clasice cu variabile ascunse.

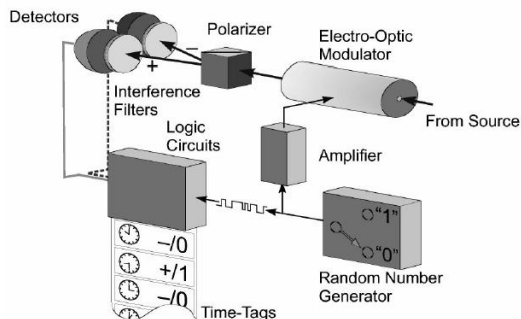


Figure 5.37: PRL 81 5039 numai detectorul

Acest tip de experimente au fost efectuate la inceputul anilor 80 intr-un grup de fizica experimentală condus de Aspect [?]. Toate aceste experimente, ca si altele ulterioare, tind sa dea dreptate mecanicii cuantice fara variabile ascunse. Noi am ales sa prezentam aici un experiment facut in anul 1998 in grupul condus de A. Zeilinger [?], pentru ca acesta are citeva elemente aditionale interesante. Schema aparatului de masura folosit este prezentata in Fig.5.37.

Primul element important in acest set-up este distanta mare intre cei doi polarizori, unde fotonii sunt detectati. Astfel, "Alice" si "Bob" au fost plasati la o distanta de 400 de-a lungul campului universitar de la Universitatea din Innsbruck, si catre ei cele doua fascicule de lumina au fost dirijate cu ajutorul fibrelor optice. Pulsurile de lumina au fost alese cu o durata mai mica de 100ns (verifica), sincronizarea circuitelor de detectie facandu-se cu aceeasi precizie. Deoarece oricarui smant luminos intre cele doua locatii (aflate la 400m) ii trebuie 1300ns

sa ajunga, putem spune ca masuratoarea unui foton n-o poate influenta in nici un caz pe cel de-al doilea.

Al doilea element important este eliminarea rotatiei uniforme a polarizorului pentru detectiei, si inlocuirea acestuia cu un generator de pozitii aleatoare. Acest element vrea sa elimine acea observatie conform careia rotatia uniforma inseamna de fapt cunoasterea pozitiei polarizorului la un moment viitor. In acest fel o masuratoare intr-o locatie ar fi putut inca "influenta" o masuratoare din alta locatie, chiar daca la un moment ulterior.

Rezultatul experimental pentru exemplul de mai sus este de $S_{exp}(0, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ) = 2.73 \pm 0.02$. El depaseste clar valoarea maxima 2 admisa de teoria cu variabile ascunse, si este foarte apropiata de valoarea prezisa de mecanica cuantica $S = 2.83$.

Cu toate ca toate rezultatele experimentale, ca cel prezentat mai sus, par sa infirme teoriile locale cu variabile ascunse, dezbaterile in jurul acestor subiecte nu este inca inchisa. In primul rind, inegalitatile de tip Bell au in componenta lor valabile ascunse. Ori, noi am vrea sa testam in primul rind numai caracterul local al mecanicii cuantice, printr-un experiment de tipul celui discutat la sfirsitul sectiunii precedente. Cu alte cuvinte, nu ne deranjeaza ca mecanica cuantica nu are variabile ascunse, atita timp cit este o teorie locala. Ori noi inca nu am verificat numai localitatea mecanicii cuantice.

ATENTIE AICI! verifica ca experimentele astea nu elimina si localitatea fara a avea variabile ascunse.

In al doilea rind, daca acceptam posibilitatea ca mecanica sa fie o teorie nelocala, trebuie sa admitem atunci o functie de unda universala, care colapseaza instantaneu in tot Universul la fiecare masuratoare. Ori aceasta nu se potriveste deloc cu mecanismul atat de elegant al decoerentei prezentat in sectiunea ??, pentru ca aici am putut explica de ce principiul de proiectie conduce la rezultatele cunoscute. Cu alte cuvinte, daca admitem proiectia instantanee a functiei de unda in tot Universul, ne-am intoarce la acel aspect "mistic" al mecanicii cuantice de care am scapat prin decoerenta.

Reamintim insa aici ca experimentele Bell efectuate pina acum nu au testat caracterul local al mecanicii cuantice, ci ele au respins numai ipoteza variabilelor ascunse. De aceea, aceasta dezbateri ramane inca deschisa, atat teoreticienilor, cit si experimentalistilor.

5.7.8 Teleportarea cuantica

Cu totii am fost fascinati in copilarie de acele imagini in care un om este facut sa dispara la o locatie, reaparind la o alta locatie indepartata. Aceasta este ce am numi in mod obisnuit teleportare, si ne-ar fi asa de utila in viata zilnica... In acest caz insa ar trebui sa teleportam atomii din care suntem facuti, si eventualul "suflet". Cum despre a doua parte foarte putin putem spune acum, sa vedem ce putem face cu prima.

Intr-o prima instanta, ar parea usor de "teleportat" materia de la un loc la celalalt. Astfel, am putea scana obiectul initial, afla pozitiile atomilor sai, si apoi reconstrui acest obiect la o locatie indepartata. Mecanismul ar parea insa mai mult de clonare, caci nimic nu ne obliga sa adistrugem obiectul initial. Pe de alta parte, el nu e valabil decit pentru sistemele clasice. Caci pentru sistemele cuantice, scanarea inseamna masurare, si dupa fiecare masurare starea sistemului initial se modifica. De aici si asa-numita teorema de "no-cloning" din mecanica cuantica: nu putem crea o clona un sistem, pentru ca el *trebuie* sa se modifice in urma masuratorii (verifica). In plus, chiar daca scanam un sistem cuantic, vedem ca nu putem afla precis starea sa cuantica initiala. Aceasta rezulta clar din principiul proiectiei: in urma masuratorii noi stim doar vectorul proiectat,

si exista o infinitate de stari de unde el ar fi putut fi proiectat pe starea masurata.

Vedem astfel ca pentru sistemele cuantice (si atomii sunt in ultima instanta elemente cuantice) teleportarea pare imposibila: niciodata n-o sa putem afla exact starea cuantica a sistemului initial prin scanare. Cu toate acestea, speranta nu e pierduta pe deplin daca realizam urmatorul lucru: putem transfera complet starea unui sistem cuantic la un alt sistem cuantic fara a incerca sa masuram starea initiala (deci fara scanare). Acest proces il numim *teleportare cuantica*. In urma acestui transfer starea initiala a sistemului va fi distrusa (teorema de "no-cloning").

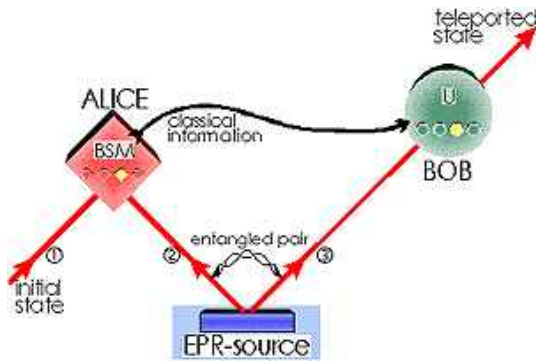


Figure 5.38: principle-teleportation

O modalitate de a realiza acest proces este prezentat in Fig.5.38. Aici presupunem ca ca particula incidenta este un foton care se gaseste intr-o superpozitie cuantica de starea polarizata orizontala si cea polarizata vertical:

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1 \quad (5.327)$$

Ne reamintim astfel avantajele sistemelor cuantice cu fotoni: starea cuantica de mai sus este de fapt un foton polarizat la 45° , care se obtine usor trecind lumina printr-un polarizor orientat in aceasta directie! Starea 5.328 vrem sa o "teleportam" unui foton 3, aflat intr-o alta locatie. Pentru acesta il producem insa impreuna cu un foton 2, in starea "entangled":

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2|V\rangle_3 - |V\rangle_2|H\rangle_3) \quad (5.328)$$

O asemenea stare se poate obtine din "parametric down conversion", asa cum discutat in sectiunea ??, si ea ne spune practic ca daca fotonul 2 "are" o polarizatie anume (H sau V), anume fotonul 3 are polarizatia conjugata (V sau H). Important insa, aceasta se intampla si pentru alte directii de polarizare, asa cum am discutat in sectiune precedenta. Sa vedem acum cum am putea teleporta fotonul 1. Astfel, am putea "conjuga" starea fotonului 1 cu fotonul 2. Cum fotonul 2 este deja "conjugat" cu fotonul 3, rezulta ca fotonul 3 va avea starea fotonului 1!

Sa incercam sa urmarim acum acest posibil proces mai in detaliu. Astfel starea cuantica a celor 3 fotoni luati impreuna se poate descompune ca in orice moment (pentru ca stările alese nu evolueaza in timp!) ca (atentie, defazajul de timp cînjung fotonii nu imi apare in aceasta stare!, vezi ce e! merge pentru ca starea nu evolueaza in timp!) : care se scrie ca:

$$2|\psi\rangle = 2|\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23} = |\Psi^-\rangle_{12} (-\alpha|H\rangle_3 - \beta|V\rangle_3) \quad (5.329)$$

$$+ |\Psi^+\rangle_{12} (-\alpha|H\rangle_3 + \beta|V\rangle_3) \quad (5.330)$$

$$+ |\Phi^-\rangle_{12} (+\alpha|H\rangle_3 + \beta|V\rangle_3) \quad (5.331)$$

$$+ |\Phi^+\rangle_{12} (+\alpha|H\rangle_3 - \beta|V\rangle_3) \quad (5.332)$$

unde stările $|\Psi^-\rangle_{12}$, $|\Psi^+\rangle_{12}$, $|\Phi^-\rangle_{12}$, $|\Phi^+\rangle_{12}$ sunt asa numitele stări Bell:

$$|\Psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2) \quad (5.333)$$

$$|\Psi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 + |V\rangle_1|H\rangle_2) \quad (5.334)$$

$$|\Phi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 - |V\rangle_1|V\rangle_2) \quad (5.335)$$

$$|\Phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 + |V\rangle_1|V\rangle_2) \quad (5.336)$$

$$(5.337)$$

Aceste 4 stări ale sistemului format numai de fotonul 1 si fotonul 2 are proprietatea importanta ca formeaza o baza de stări ortonormate. Astfel, se verifica direct sa stările sunt ortonormate si ca o superpozitie aleatoare (numai astea pot fi?):

$$|\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 = (\alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1)(\gamma|H\rangle_2 + \rho|V\rangle_2) \quad (5.338)$$

se descompune in stările Bell ?? (in principiu penmtru ca avem patru coeficienti si 4 stări ale bazei). Pentru ca aceasta baza este ortonormata, ii putem atasa o masuratoare (numita masuratoare bell). Rezultatul acestei va fi una din stările Bell $|\Psi^-\rangle_{12}$, $|\Psi^+\rangle_{12}$, $|\Phi^-\rangle_{12}$, $|\Phi^+\rangle_{12}$. Dar ce este mai important pentru noi, daca efectuam o astfel de masuratoare pe starea celor 3 fotoni ??, atunci, in urma principiului de proiectie, starea sistemului de 3 fotoni va fi una din componentele relatiei ?? . Ori vedem ca in aceasta fotonul 3 are o stare cuantica bine definita, si anume $\pm\alpha|H\rangle_3 \pm\beta|V\rangle_3$, cu aceiasi coeficienti ca starea initiala 5.328! Cum semnul fiecarui coeficient il putem determina vazind care stare Bell a rezultat in urma masuratorii (atentie, eu masor mereu valoarea proprie, deci cum stii starea?), putem reconstitui starea originala 5.328 aplicind o transformare corespunzatoare fotonului 3 care sa ii schimbe semnul in consecinta.

Vedem astfel ca, pentru a transfera starea cuantica 5.328 de la fotonul 1 la fotonul 3 avem nevoie de rezultatul masuratorii Bell (care ia 4 valori posibile), pe care sa-l transmitem fotonului 3 pentru a-l transforma in consecinta. Acest proces este indicat in Fig.5.38a prin cele 4 becuri. In acest fel realizam ca "teleportarea" fotonului 1 in fotonul 3 nu se poate face instantaneu, caci avem nevoie sa transmitem informatia clasica a rezultatului masuratorii Bell la fotonul 3, pentru ca sa-i aplicam acestuia ultima transformare.

In Fig.5.39 prezentam schema experimentului efectuat de Dirk Bouwmeester si colaboratorii sai in ... pentru verificarea partiala a acestui procedeu. In aceasta schema gasim principalele componente ale ideii prezentate in Fig.5.38.

Astfel, lumina emisa de un laser ultraviolet genereaza in cristalul nonlinear doi fotoni "entangled" 2 si 3. Apoi ea este reflectata inapoi in cristal de catre oglinda ... pentru a produce inca doi fotoni entangled 1 si 4. Fotonul 1 este trecut printr-un polarizor, dupa care functia de unda a lui devine 5.328. Aceasta stare cuantica vrem sa o teleportam fotonului 3. Conform discutiei de mai sus, trebuie sa efectuam o masuratoare Bell asupra intregului sistem, in asa fel incit functia de unda a sistemului deat numai de fotonii 1 si 2 sa se proiecteze in una din stările ?? . Aceasta masuratoare este realizata trimittind fotonii 1 si 2 in acelasi timp (si in acelasi loc) pe o oglinda semireflectoare O.

Daca fotonii 1 si 2 ajung in acelasi timp pe oglinda, si daca ei impreuna au una din cele patru stări posibile, se arata (vezi pentru detalii ??, da citeste si tu, ca sa-ti fie clar) ca numai starea $|\Psi^-\rangle_{12}$ produce doua "clicuri" simultane, unul pe fiecare detector. In toate celelalte trei cazuri, ambii fotoni ajung simultan numai pe un detector. Este de remarcat aici, ca fotonii 1 ai

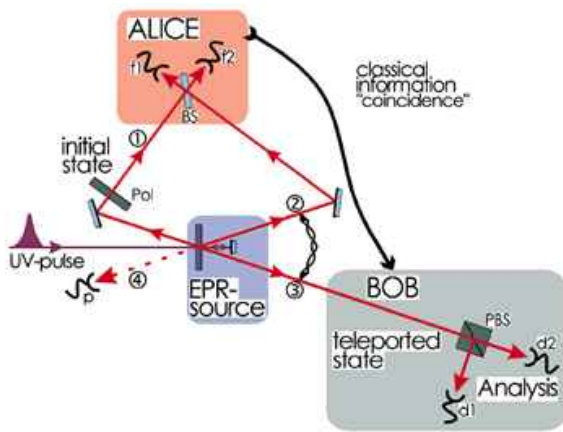


Figure 5.39: principle-teleportation

2 trebuie sa ajunga in acelasi timp pe oglinda, caci altfel fiecare se reflecta independent pe oglinda, si probabilitatea de a obtine clicuri pe fotoni fieriti devine 50%, si nu 25% (unul din patru cazuri) ca in cazul unei alinieri bune.

Cu alte cuvinte, este important de a prepara sistemul total in starea $|\psi\rangle$ si nu intr-o stare mixta (aici citeste de ce timpul de masura schimba starile, de ce este nevoie de filtrul acela de 2nm). Una dintre conditii este ca fotonii 1 si 2 ajung in acelasi timp pe oglinda. Deoarece in experimentul folosit s-a folosit un laser cu pulsuri (de aproximativ 200fs), traiectul unuia din razele 1 si 2 care merg spre oglinda semireflectoare a trebuit sa fie lungit sau scurtat in asa fel incit pulsurile 1 si 2 sa ajunga simultan. In plus s-au asezat filtre de 2nm in fata detectoarelor, pentru a crea pulsuri lungi de 500fs, care vor fi astfel coerente in timpul cind interactioneaza pe oglinda semireflectoare. (nu inteleg exact cum e cu filtrul. citeste).

Se vede astfel ca configuratia aleasa nu "masoara" decit starea $|\Psi^-\rangle_{12}$, (aceasta este singura care produce clicuri simultan pe cei doi detectori diferiti), pentru ca nu poate diferentia intre cele 3 stari ?? ramase. Cum in acest caz rezultatul masuratorii este $|\Psi^-\rangle_{12}$, din relatia ?? vedem ca starea fotonului 3 este $|\Psi\rangle_3 = (-\alpha|H\rangle_3 - \beta|V\rangle_3) = -|\Psi\rangle_1$, adica in acest caz starea fotonului 1 a fost teleportata. Nu ne ramane decit sa verificam ca in acest caz polarizatia fotonului 3 este intr-adevar $|\Psi\rangle_3 = -|\Psi\rangle_1$.

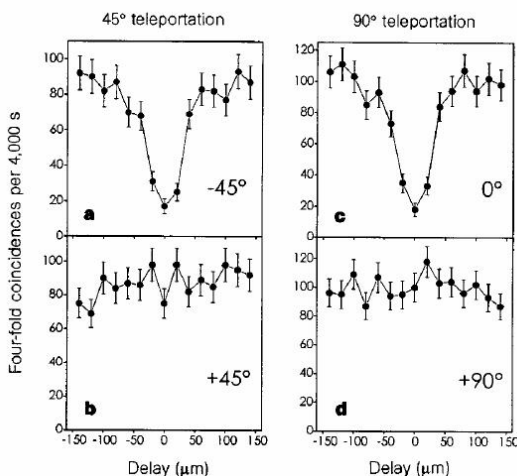


Figure 5.40: rezultat-teleportare

starea 45° (rotind polarizorul la 45° obtinem $\alpha = \beta = 1$ in ??). Conform celor discutate mai sus, cind avem doua clicuri simultane pe cei doi detectori f1 si f2, trebuie sa avem si un click pe detectorul d1, pentru ca el este orientat in asa fel polarizatia luminii ce vine pe el este identica cu polarizarea lui P, iar fotonul 3 ce vine pe detector are polarizarea P. In plus, detectorul d2 nu trebuie sa "vada" deloc acest foton, pentru ca polaritatea luminii ce vine pe el este sigur orientata perpendicular pe P.

Aceasta rezultat a fost intr-adevar obtinut in mijlocul Fig.5.40 din stanga, si anume pentru $\delta = 0\mu m$, cind alinierea tuturor razelor este perfecta. Aici sunt prezentate rezultatele detectiei pentru detectorii d1 (orientat la -45°) si d2 (orientat la $+45^\circ$) in momentul cind in acelasi moment f1 si f2 primeau separat cite un foton. Pentru ca rezultatul sa fie si mai clar, sistemul a fost dezaliniat intentionat prin deplasarea oglinzii O1 (alte valori ale lui δ). In acest caz se vede ca probabilitatile de detectie sunt egale (teleportarea nu mai are loc), ceea ce rezulta in urma lipsei de coerenta, si a unui calcul rapid al posibilelor probabilitati (sa-l zic pe scurt?). In Fig.5.40 din dreapta se vede ca un rezultat pozitiv se obtine si in cazul teleportarii starii de 90° ($\alpha = 0$) (de ceeste important).

Vedem ca acest experiment demonstreaza numai teleportarea in cazul particular cind masuratoarea Bell are numai unul din cele patru rezultate posibile $|\Psi^-\rangle_{12}$. Cu toate acestea, cercetarea in aceasta directie este actuala, si suntem siguri ca atunci cind dumneavoastra cititi aceste rinduri un progres mai mare a fost deja realizat (?????).

5.8 Exercitii

1. Calculul cimpului electromagnetic ramas nefacut.
2. Decoerenta (Zurek)

Fie un sistem care are doar doua stari de spin posibile. Acesta interactioneaza cu mediu plin de N spini, prin intermediul Hamiltonianului

$$H = \quad (5.339)$$

3. Algoritmul Deutsch

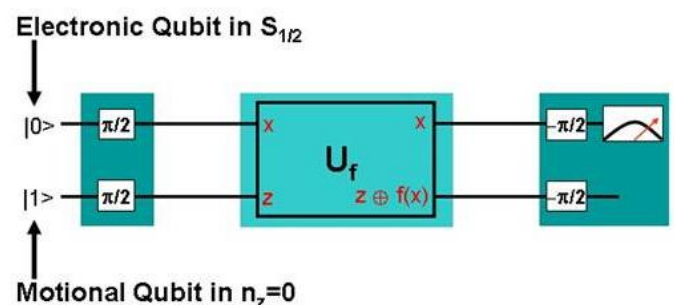


Figure 5.41: refa poza din carte

5.9 Idei

din : R.Penrose Shadows of the mind
cartea e: [?] referinte: EPR: [?] [?]
Elitzur-Vaidman bomb-testing: [?] [?] [?] [?]
Many-world interpretation: [?] [?]
Qunatum Computation: [?] exemple la:[?]
projection of the wave wvector:[?] [?]

In experiment, fotonul 1 este ales intr-o prima instanta in

priectie cu constiinta: [?] [?] [?]

QM cu Squid [?] [?]

QM and the brain: synaptic and QM [?] [?]

Ochiul raspunde la un foton: Baylor 1979 lipseste, [?] [?] and Emperor's new mind, pag.400

Capitolul cu priectia vectorului de unda datorata "localizarii" trebuie specificat (p.340). Deasemnea si "timpul de proiectie" explicat.

cauta masuratorile originale ale prietenului lui Planck (1900) pentru corpul negru

explica apoi care erau oscilatorii lui Planck, si cum Bohr iese din Heisenberg.

de ce se foloseste radiatia corpului negru la soaree? ca are si absorbtie care ne s sigur 1. trickul?

de ce atomii emit numai lumina polarizata linear? caci e ceea ce vine de la soare, cred.

la radiatie foloseste E si nu I

chestia cu fotonul detectat de ochi pune-o la efectul fotoelectric

mentioneaza la corpul negru ca raprtul general e/a se foloseste la laseri.

la proiectie, discutia cu slitul.

Astfel, suntem pusi in situatia de a raspunde la doua intrebari esentiale: "Bine, bine, daca electronul este descris de o unda, *care este ecuatia acestei unde in cazul general?*" si "In ce masura se reduce modelul de unda al electronului, la electronul-particula atat de obisnuit (si masurat!) in teoria clasica?". In plus, am putea pune acesi tip de intrebari si pentru foton. Dar sa ne ocupam mai intii de electron.

vibratia fazei undei electronului nu a masura-to nimeni pina acum, cred! si asta pentru ca exista mereu un termen de fond al energiei cred.

fa-i 3D la schrodinger

discuta in text ori de electron, ori de particula.

electronul nu sta pe solutiile stationare, ci si poate sari. masuratori de entanglement aratate. spune.

daca incerci sa "confine" electronii intr-o regiune mica, impulsul creste. daca peretii nu sunt buni, ei scapa. vezi efectul Hawking

pune la schrodinger si pachete de unda in vid. arata un pachet gauss, si cum iese relatia de incertitudine

pune la schrodinger "particle in a box"

pune caciula a operatori peste tot, inclusiv O.

sa mai introduc mecanica analitica? e chair nevoie asa mare?

hamiltonianul electronului in cimp electromagnetic. scrie-l La Dirac apare un i la functiide unda si unul la timpul minkovski *ict*. Sunt identice? Ce se intimpla?

vezi unde pui si unde nu pui caciulile

Cind n-ai poze de pus pe o pagina, pune poze cu fizicieni! Tel: Nici o pagina fara poza!

Sa bag rezolvarea atomului cu ecuatia lui Dirac? Iese tot, interactiuna spin orbita, etc. Iese si $E_{n,l} = E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega_L$ si e bine la Lamb, ca la electrodinamica cuantica se arata ca sunt diferite. Dar e mult, complicat, si poate gasesc altceva in schimb. Nu cred totusi ca e o idee buna sa pun.

Foloseste poze originale, articole originale (PRB, PRL, etc)

pericolul este de a face din carte un curs!

Pune poze frumoase cu atomii masurati cu STM or AFM ! Vezi tu la ce capitol. Mai bine unde ai nevoie de poze, unde ai calcule multe!

sa pun si Bomb Testing la modern, sau nu?

sa pun si celebrul microscop al lui Heisenberg, dar sa fac diferentierea clara intre exemple (ca acesta) si doctrina (care scoate incertitudinea din operatori).

vezi articol dicke 81. aici e frumos ca *lipsa* unui electron dintr-un anume loc ii schimba functia de unda. frumos paradox.

ce mai e de pus:

subsectionPrincipiul de indeterminare cuantica

subsectionVariabile ascunse?

subsectionAproximatia clasica - mecanica cuantica -> mecanica clasica hamiltoniana

subsectionPath integral - abordarea Feynman

sta EPR "Ascunsa" in indiscernabilitate? sau mai bine zis in path integral?

pune poza originala stern-gerlach-rezultat.jpg inclusa aici!

metoda numerica (ca si matematica) nu e prea potrivita pentru mecanica cuantica!

decoerenta: elimina principiul coerentei, si atunci lumea merge numai cuantic. Dar atunci nu mai eloc de interventie divina, de cotrol ascouns pentru evolutie, de suflet care poate decide intre 1 si 2! Este din nou complet determinista! groaznic...

cimpul maxwell clasic este functia de unda cuantica a fotonului! (desi de la soare nu o avem!)

Contents

6	Electrodinamica cuantica	179
6.1	Ecuațiile electrodinamicii cuantice	179
6.1.1	Electronul și fotonul	179
6.1.2	Reamintire. Cimpul fonic	179
6.1.3	Cimpul scalar fără interacție	179
6.1.4	A doua cuantificare a electronului. Cimpul lui Dirac.	179
6.1.5	Lagrangianul în electrodinamica cuantica	181
6.1.6	Observații pe marginea Lagrangeanului electrodinamicii cuantice	182
6.2	Diagrame Feynman pentru o particulă în cimp potențial	183
6.2.1	Path Integrals	183
6.2.2	Amplitudinea de tranziție în lipsa interacției. Particule <i>reale</i> și <i>virtuale</i>	185
6.2.3	Amplitudinea de tranziție în prezența interacției. Interacții <i>virtuale</i>	186
6.3	Diagramele Feynman pentru cimpul scalar	187
6.3.1	Cimpul scalar în lipsa interacției	187
6.3.2	Cimpul scalar în prezența interacției	187
6.3.3	Diagramele Feynman pentru cimpul scalar	187
6.4	Diagramele Feynman în electrodinamica cuantica	187
6.4.1	Cimpul electromagnetic în lipsa interacției	187
6.4.2	Cimpul Dirac în lipsa interacției	187
6.4.3	Interacția între cimpul Dirac și electromagnetic	188
6.4.4	Diagramele Feynman pentru electrodinamica cuantica	189
6.5	Câteva observații intermediare	189
6.5.1	Anihilarea electron-pozitron	189
6.5.2	Pozitron v.s electron	190
6.5.3	Conexiunea spin-statistică	190
6.6	O mini-prezentare a metodei funcționale în cazul cimpului scalar	190
6.6.1	O singură particulă în cimp potențial	190
6.6.2	Cimpul scalar liber	191
6.6.3	Cimpul scalar cu interacție	192
6.7	Renormalizarea	194
6.7.1	Exemplu de teorie efectivă: Lichidul Fermi	194
6.7.2	Lagrangianul renormalizat pentru cimpul scalar	196
6.7.3	Lagrangianul renormalizat QED	199
6.8	Verificări experimentale ale electrodinamicii cuantice	201
6.8.1	Deplasarea Lamb	201
6.8.2	Momentul anormal al electronului	202
6.9	Exerciții	203
6.10	Idei	203

Chapter 6

Electrodinamica cuantica

Quantum field theory arose out of our need to describe the ephemeral nature of life

A. Zee

In capitolul precedent am construit mecanica cuantica in jurul a doua elemente: electronul si cimpul electromagnetic. In ambele cazuri am facut-o in asa partial. Am cuantificat electronul in prezenta unui cimp *clasic* electromagnetic (vezi sectiunea ref) si, mai rau, am cuantificat cimpul electromagnetic in *absenta* oricarui electron (vezi sectiunea ??). Aceasta situatie este desigur neplacuta, pentru ca in fizica clasica electromagnetismul descrie si miscarea electronilor, si evolutia cimpului electromagnetic luat *impreuna* (??). De fapt, acea parte a electromagnetismului clasic care se ocupa in particular de miscarea electronului luat impreuna cu cimpul electromagnetic se numeste *electrodinamica*.

Ceea ce ne propunem in acest capitol este *cuantificarea sistemului de electroni si cimp electromagnetic luat impreuna*. In prelungirea denumirii clasice, vom da acestei teorii denumirea de *electrodinamica cuantica*. Trebuie sa fie clar de la inceput ca *nu* vom construi o teorie noua. Mai degraba vom definitiva un proces de cuantificare al sistemului electron-cimp electromagnetic pe care l-am inceput in capitolul precedent. De aceea nu vom folosi principii noi, ci ne vom rezuma la principiile mecanicii cuantice formulate in sectiunea ???. Cu toate acestea, pentru a face posibila rezolvarea problemei, vom face apel la o formulare matematica datorata lui Feynmann.

Sa incepem deci prin a pune cap la cap "bucatile" pe care le-am rezolvat in capitolul, si sa construim ecuatiile de baza ale electrodinamicii.

6.1 Ecuatiile electrodinamicii cuantice

6.1.1 Electronul si fotonul

Sa ne readucem aminte acum principalele ingrediente de care avem nevoie, incepind cu electronul. Miscarea acestuia nerelativista (si fara a lua spinul in considerare) intr-un cimp electromagnetic clasic este data de ecuatia ??. Practic, electronul este descris de o functie de unda $\psi(x^\mu)$ care se intinde in tot spatiul, si a carei amplitudine $|\psi(x^\mu)|^2$ ne da probabilitatea acestuia de a fi gasit in pozitia $\mathbf{r}$.

Din pacate, ecuatia ?? gasita nu este compatibila cu teoria relativitatii, ceea ce in termeni tehnici se exprima prin faptul ca ecuatia ?? nu este relativist invarianta. Ca atare, ea nu este decit o aproximatie. Ecuatia corecta, relativist invarianta, a fost dedusa in ??. Acum electronul este descris de o functie de unda $\psi_\mu(x^\mu)$ cu patru componente (practic de patru functii de unda). Desi ecuatia obtinuta este acum corecta are doua dezavantaje: nu contine interactia cu cimpul electromagnetic, si nu este valabila decit pentru un electron.

In cazul unui sistem cu mai multi electroni, acesta este descris de o functie de unda mult mai complexa, care ia in calcul toate posibilitatile in care combinatia de electroni poate fi gasita. Astfel, un sistem de 2 electroni ar trebui descris de functia de unda $\psi(\mu_1, x_1^\mu, \mu_2, x_2^\mu)$, unde $\mu_{1,2} = \overline{1,4}$. In plus, functia de unda de mai sus trebuie sa fie *antisimetrica*, conform discutiei din ??. Datorita complexitatii unor astfel de sisteme, am renuntat in a da exemple extensive.

Fotonul, pe de alta parte, a rezultat in urma cuantificarii cimpului electromagnetic. Am vazut ca, daca discutam de un singur foton, il putem descrie cu ajutorul cimpului vectorial clasic $\mathbf{A}_\mu(x^\mu)$. Practic, aceasta informatie clasica ne da probabilitatea de a gasi fotonul la locatia $\mathbf{r}$, in acelasi fel ca si la electron. Daca avem in sa mai multi fotoni, cimpul electromagnetic clasic nu mai este suficient. In anumite cazuri, ca cele discutate in sectiunile ?? pentru doi fotoni "entangled", putem gasi inca solutii adecvate. In cazul general in sa, trebuie sa folosim relatiile ??. Aici in sa cimpul $\mathbf{A}_\mu(x^\mu)$ devine un *cimp de operatori*. Practic, mai multi fotoni sunt descrisi in fiecare punct din spatiu de un set de operatori $\hat{\mathbf{A}}_\mu(x^\mu)$. Si, nota bene, aceasta fara in sa luam in considerare electronii.

6.1.2 Reamintire. Cimpul fonic

in spatele fiecarui cimp sta o particula! a ici fotonul.

6.1.3 Cimpul scalar fara interactie

in spatele fiecarui cimp sta o particula!

6.1.4 A doua cuantificare a electronului. Cimpul lui Dirac.

Comparind cuantificarea electronilor si a fotonilor, vedem ca atunci cind e vorba de o singura particula, ele sunt identice. Astfel, functiile de unda $\psi_i(x^\mu)$ si $A_\mu(x^\mu)$ descriu fiecare electronului si fotonul, iar modulul acestora descriu probabilitatea de gasi particula respectiva in pozitia $\mathbf{r}$.

Cind e in sa vorba de mai multe particule, situatia pare diferita. Atfel am descris mai multi electroni prin functia de unda complex $\psi(\mu_1, x_1^\mu, \mu_2, x_2^\mu, \dots)$, si mai multi fotoni prin cimpul de operatori $\hat{\mathbf{A}}_\mu(x^\mu)$. Frumusetea problemei este in sa ca ambele modalitati sunt echivalente! Astfel, in cazul a doi fotoni corelati am folosit deja o singura functie de unda ??, si nu am lucrat cu cimpul de operatori. Viceversa, putem la fel de bine descrie o colectie de mai multi electroni printr-un cimp de operatori.

Pentru ca daca vrem sa cuantificam sistemul de electroni si cimp electromagnetic impreuna, este nevoie sa ne hotarim care din cele doua o alegem, si noi vom alege aici calea cu cimp de operatori. Cum cimpul electromagnetic in absenta electronilor a fost cuantificat in aceasta maniera, ne vom concentra pe un sistem de electroni. Vrem in sa sa renuntam la prezenta unui cimp electromagnetic, si acest lucru nu este posibil daca avem in sa mai multi electroni, pentru simplul motiv ca fiecare electron pro-

duce un cimp electromagnetic. De aceea vom alege o situatie extrema, si anume aceea in care *electronii nu creeaza cimpuri electromagnetice, si deci nu interactioneaza intre ei*. Un astfel de cimp se numeste *cimpul Dirac*.

Sa rescriem atunci aici ecuatia lui Dirac pentru un singur electron ?? (pornim direct de la cazul relativist):

$$(\beta\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (6.1)$$

Putem privi aceasta ecuatia ca pe ecuatia unui *cimp clasic*, intr-o masura asemanatoare cu cea pentru cimpul electromagnetic ???. Cimpul $\psi_\mu(x^\mu)$ ne da atunci probabilitatea $|\psi_\mu(x^\mu)|^2$ de a gasi un electron in pozitia $\mathbf{r}$ si cu "polarizarea" μ (cele 4 polarizatii fiind electron spin-up, electron spin-down, pozitron spin-up, pozitron spin-down).

In acelasi fel ca si la cimpul clasic electromagnetic, ii putem atasa acetui cimp un *Lagrangean* L_e , dat in acest caz de

$$L_e = \bar{\psi}(\beta\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m)\psi \quad (6.2)$$

Se verifica direct ca ecuatiile 6.1 rezulta din forma de sus a Lagrangeanului, cu ajutorul relatiilor ??, pe care le reproducem aici:

$$\frac{\partial L_e}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L_e}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) \quad (6.3)$$

Avantajul folosirii Lagrangeanului este dublu. Pe de o parte reducem setul de ecuatii 6.1 la o singura forma 6.18, iar pe de alta parta putem atribui semnificatia fizica usuala ?? a unui Lagrangean: solutia finala a cimpului $\psi_\mu(x^\mu)$ cu conditii de frontiera date este un extrem al integralei:

$$\delta \int L_e(x_\mu) dx_\mu = 0 \quad (6.4)$$

Pina acum insa n-am facut decit sa reinterpretam sub o alta forma ecuatia lui Dirac pentru un electron. Ori noi vrem sa stim ce se intimpla in cazul cuantic al mai multor electroni care nu interactioneaza, asa numitul cimp Dirac. Vom rezolva aceasta problema tot prin asemanare cu cimpul electromagnetic, *cuantificind* practic cimpul clasic $\psi_\mu(x^\mu)$ construit mai sus.

Astfel, la cimpul electromagnetic am folosit metoda modurilor de vibratie transversale. Fiecare mod de vibratie avea o frecventa precisa ω si un din cele doua polarizatii posibile $p = 1, 2$. Cuantificarea clasica a unui singur mod de vibratie a fost identica cu cea a unui oscilator armonic. Practic, cimpul electromagnetic dat de *un singur mod de vibratie* de frecventa ω s-a putut afla intr-o multitudine de stari cuantice, care pot fi reconstruite intr-o baza a energiei modului de vibratie. Astfel, starea $|n\rangle$ avea energia $E_n = 1/2 + n\hbar\omega$. Spuneam in acest caz ca in aceasta stare se afla precis n fotoni de frecventa ω si polarizare p . O stare oarecare a modului de vibratie se scria ca o superpozitie cuantica a tuturor acestor stari de energii precise: $\sum_n c_n |n\rangle$. Starea generala a cimpului electromagnetic era data de o asociere ?? a tuturor acestor stari de vibratie.

Putem incerca sa procedam in acelasi fel si in cazul cimpului lui Dirac, si sa-l cuantificam prin modurile sale de vibratie. In acest caz, cel mai bine este sa alegem undele plane ?? ca fiind "modurile de vibratie". Am vazut astfel in sectiunea ?? ca un electron intr-una din cele patru "polarizatii" μ (electron spin up/down, pozitron spin up/down) si avind momentul k este descris de ecuatiile ?? $u^{(\alpha)}(k)$ ($\alpha = 1, 2$, u pentru starea de "electron") sau $v^{(\alpha)}(k)$ ($\alpha = 1, 2$, v pentru starea de "pozitron"). Pentru noi este important aici ca se poate arata ca *orice solutie* $\psi_\mu(x^\mu)$ a ecuatiei 6.1 poate fi scrisa ca o suma a solutiilor particulare $u^{(\alpha)}(k)$ si $v^{(\alpha)}(k)$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^*(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right] \quad (6.5)$$

Aici $b_\alpha(k)$ si $d_\alpha^*(k)$ (niste numere complexe) reprezinta coeficientii sub care cele patru solutii particulare intra in solutia generala.

Ceea ce am fi tentati sa facem in continuare, urmarind exemplul de la cimpul electromagnetic, este sa luam fiecare "mod de vibratie" $u^{(\alpha)}(k)$ sau $v^{(\alpha)}(k)$, sa vedem cum evolueaza clasic in timp, si sa-l cuantificam. Daca ne uitam la forma lor ??, vedem ca aceasta este deasemenea sinusoidala, si deci am obtine din nou un oscilator armonic, ale carui energii al lua diferite valori E_n in urma cuantificarii, si deci diferite stari ar fi posibile. Tot prin analogie cu fotonul, am spune ca o asemenea stare $|n\rangle$ contine n electroni de enrgie totala E_n :

$$E_n = \dots \quad (6.6)$$

In final deci *fiecare "mod de vibratie"* ar putea avea un numar oarecare de electroni, precum se intimpla la fotoni. Cu toate acestea, desi teoretic o asemenea situatie pare perfect posibila, practic, in cazul electronului, aceasta ar fi fals!

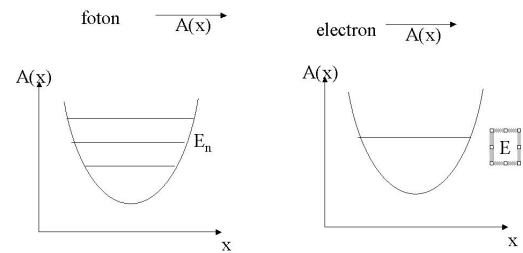


Figure 6.1: mod-vibratie-el-foton

Motivul sta in principiul lui Pauli. Astfel, sa ne imaginam ca fiecare solutie $u^{(\alpha)}(k)$ ar reprezenta un nivel orbital atomic (in realitate nu este desigur asa, dar nu e mai putin adevarat ca putem descompune orice solutie si in functiile de unda orbitale ??). In aceste caz, daca avem mai multi electroni, numai un singur electron cel mult poate sta intr-un nivel orbital. Aceasta este motivul pentru care am reusit sa reconstituim atit de bine tabelul elementelor al lui Mendellev. Aceasta inseamna insa *maxim un singur electron* intr-un "mod de vibratie" $u^{(\alpha)}(k)$ sau $v^{(\alpha)}(k)$! Cum acest lucru este verificat in practica, trebuie sa facem atunci clar distinctia intre electroni (care devin in acest caz *fermioni*) si fotoni (care sunt *bosoni*). In urma cuantificarii, ultimii pot fi permisi intr-un numar oricît de mare intr-un mod de vibratie, pe cînd primii nu pot fi decit maxim unul pe mod de vibratie.

Dupa cum am mentionat mai sus, starea cuantica completa a cimpului electromagnetic a putut fi scrisa ca o asociere a starilor fiecarui mod de vibratie (??):

$$|\psi\rangle_{em} = \prod_{\omega,p} |\psi(\omega,p)\rangle \quad (6.7)$$

unde fiecare stare a modului de oscilatie poate fi scrisa ca

$$|\psi(\omega,p)\rangle_{em} = \sum_n c_n |n\rangle \quad (6.8)$$

unde $|n\rangle$ am desemnat starea modului (ω,p) de energia fixa E_n .

In acelasi fel putem construi acum starea cuantica a sistemului de mai multi electroni ai cimpului Dirac. Astfel, un mod de vibratie este dat de momentul $\mathbf{k}$ si una din cele patru "polarizatii" $\mu = \overline{1,4}$ (explicatie). Avem atunci starea generala sata de o formula asemanatoare:

$$|\psi\rangle_e = \prod_{\mathbf{k},\mu} |\psi(\mathbf{k},\mu)\rangle \quad (6.9)$$

unde starea $|\psi(\mathbf{k}, \mu)\rangle$ > unui singur mod de vibrație este de aceasta data mult mai simplă, fiind o superpoziție cuantică a doar două stări (particula prezintă în mod de vibrație, particula absentă):

$$|\psi(\mathbf{k}, \mu)\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (6.10)$$

Am văzut apoi cum, în cazul cimpului electromagnetic, cimpul clasic s-a transformat într-un cimp de operatori: prin redefinirea coeficienților $a_p(\omega)$ în relația ?? ca operatori de creștere și anihilare $\hat{a}_p^\dagger(\omega)$ și $\hat{a}_p(\omega)$ asociați modului de vibrație de frecvență ω și polarizare p .

În același fel trebuie să procedăm și în cazul cimpului Dirac, cu mențiunea că de aceasta dată trebuie să folosim operatorii b ai oscilatorului armonic fermionic, care îndeplinesc relațiile de anticomutare ?. Astfel, să privim la ecuația 6.11 de descompunere clasică a cimpului Dirac. Vedem că coeficienții $b_\alpha(\mathbf{k})$ și $d_\alpha^*(\mathbf{k})$ ne dau contribuția modului respectiv în funcția de undă finală, în același fel ca și coeficienții $a_p(\omega)$ în relația ?. De aceea îi vom asimila cu operatorii $\hat{b}_\alpha(\mathbf{k})$ și $\hat{d}_\alpha^\dagger(\mathbf{k})$ precum în cazul cimpului electromagnetic. Funcția de undă 6.11 a unui singur electron devine atunci cimpul de operatori :

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[\hat{b}_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right] \quad (6.11)$$

Alegerea de mai sus a unui singur electron maxim pe mod de vibrație poate părea contraintuitivă, pentru că există o oscilație clasică în modul de vibrație pe care practic o ignorăm (vezi Fig.6.1. Pentru a-i face loc și cantitativ în ecuațiile de cuantificare, să ne readucem aminte de operatorul $\hat{a}$?? asociat modului de vibrație al fotonului (care este practic operatorul oscilatorului armonic, vezi ref). Acesta îndeplinea:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (6.12)$$

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (6.13)$$

Vedem mai sus că operatorul $a^\dagger$ creează succesiv fotoni în modul de vibrație. Pentru a evita acest lucru în cazul electronului, să-i alegem acestuia un operator b care să îndeplinească următoarea relație de *anticomutare*:

$$\{b, b^\dagger\} = 1; \quad \{b, b\} = 0; \quad \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0; \quad (6.14)$$

unde relația de anticomutare între doi operatori este definită ca

$$\{b, c\} = bc + cb \quad (6.15)$$

Relațiile de anticomutare precedente descriu ceea ce se numește un *oscilator fermionic*. Practic, relațiile de mai sus ne asigură că nu putem crea niciodată mai mult de un electron în modul de vibrație. Astfel, avem:

$$b^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad \text{și} \quad b^\dagger |1\rangle = b^\dagger b^\dagger |0\rangle = 0 |0\rangle = 0 \quad (6.16)$$

CONFUZIE AICI. Cine va fi $|0\rangle$, cine 0, și ce este cu oscilatorul asta fermionic?

Procedura b la $\hat{b}$ nu a fost explicată bine aici, și nici la foton. Revin-o.

În acest fel am reușit în să cuantificăm un sistem cu un număr aleator de electroni care nu interacționează. Avem astfel funcția de undă generală ??, ca și cimpul de operatori care acționează asupra lui. Într-un cit practic noi am cuantificat cimpul dat de

ecuația lui Dirac pentru un electron, care mai fusese cuantificat odată, procedura de mai sus se numește *a doua cuantificare*.

În final să reamintim că întreaga construcție de mai sus este valabilă în reprezentarea Heisenberg (n-am zis încă nimic de ea!). Astfel, funcția inițială de undă $|\varphi(0)\rangle$ > a întregului sistem este sub forma 6.9. Ea rămâne constantă în timp până la o măsurătoare, când principiul de proiectare îi va schimba valoarea. Între timp, operatorul de cimp $\psi(\mathbf{r})$ evoluează conform ecuațiilor 6.1, care se mențin valabile. Acestea au soluțiile cunoscute 6.11, și de aceea în cazul cimpului Dirac *stim* complet cimpul de operatori în orice moment.

Cu ajutorul acestui cimp putem afla probabilitățile rezultatelor unor eventual masuratori. Aceasta o putem realiza printr-un pas intermediar, trecind de la reprezentarea Heisenberg la cea a Schrodinger. De exemplu, să spunem că ne interesează care este probabilitatea de a găsi un pozitron cu spin up ($\mu = 3$) în poziția $\mathbf{r}$ la momentul t . Mai întâi calculăm operatorul $\psi(\mathbf{r})$ la momentul t , care este în cazul nostru dat direct de 6.11. Apoi calculăm funcția de undă în reprezentarea Schrodinger ca: $|\varphi(t)\rangle = \psi(x)|\varphi(0)\rangle$. Aceasta o descompunem apoi în baza poziției:

$$|\varphi(t)\rangle = \dots \quad (6.17)$$

și obținem apoi probabilitatea ...

6.1.5 Lagrangeanul în electrodinamica cuantică

Până am studiat două cazuri separate: electroni sau fotoni care nu interacționează între ei. Pentru fiecare am reușit să găsim o funcție de undă generală ?? și ??, și să construim sistemul cu care probabilitățile rezultatelor diverselor măsuratori pot fi găsite. Cheia esențială este că am trecut la reprezentarea Heisenberg, în care funcția de undă nu variază în timp, ci operatorii atașați cimpului $\psi(x)$ și $A(x)$. Ceea ce avem nevoie a cunoaște este numai variația acestor operatori, care împreună cu funcția de undă inițială, determină sistemul.

În cazurile acestea două simplificate, ecuațiile care determină evoluția acestor cimpuri de operatori sunt ?? și ?. Datorită faptului că interacția dintre particule a fost neglijată, soluțiile acestor ecuații au fost deja găsite sub forma ?. Ce se întâmplă încă când avem și electroni, și cimp electromagnetic la un loc? Un efect imediat este că particulele componente vor interacționa. Astfel, electronul va emite cimp electromagnetic care va fi recepționat de un alt electron, și ca atare acesta din urmă poate fi deviat. Cu alte cuvinte, electronii vor interacționa prin intermediul fotonilor.

Dar se poate și viceversa. Astfel, am presupus deja în secțiunea ref că un foton de energie mare poate crea un electron și un pozitron. În același timp un alt foton poate efectua același proces, și în final electronul generat de primul foton să se recombine cu pozitronul generat de la al doilea foton, ca în Fig. 6.2. Acest tip de fenomene au fost deci excluse la cuantificarea cimpului electromagnetic, pentru că electronii nu au fost luați în considerare deloc acolo.

Acum vrem să luăm pe deplin toate aceste fenomene împreună. Dar cum să procedăm? Să pornim de la observația că funcția de undă a întregului sistem este un produs tensorial (?) al celor două funcții de undă totale pentru cele două sisteme ?? și ?. Operatorii $\psi(x)$ și $A(x)$ îi păstrăm, numai că acum ei acționează practic numai pe una din cele două părți ale funcției de undă. În plus ei vor satisface deasemenea relațiile de comutare ?? și cele de anticomutare ?. Ca și în situațiile precedente, ne interesează în special cum evoluează acești operatori în timp.

Cheia soluției este dată de formalismul Lagrangean. Astfel, am văzut că pentru cimpul clasic numai forma Lagrangeanului (o singură formulă) este practic de ajuns pentru a determina

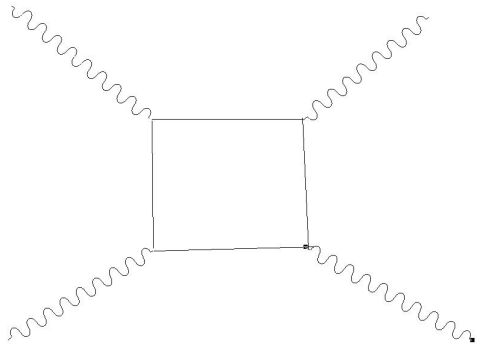


Figure 6.2: interactie-2-fotoni.jpg

ecuațiile cimpului, cu relațiile???. În cazul cimpului clasic electromagnetic care conține sarcini electrice, am reușit chiar să găsim și forma corectă??. Am putea pentru început construi un cimp de operatori pentru fotoni și electroni în care nu există nici un fel de interacțiune nici între electroni, nici între fotoni, nici între fotoni și electroni. Lagrangeanul acestuia va fi atunci în mod natural *suma* celor doi Lagrangeani găsiți ?? și ??:

$$L_0 = L_e + L_f = \bar{\psi}(\beta\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.18)$$

Acum avem nevoie să adăugăm termenul de interacție între cele două cimpuri. Dacă privim în cazul clasic??, vedem că acesta este dat de $L_i = j^\mu A_\mu$. Cum însă curentul j^μ poate fi scris (vezi ??) ca $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, obținem forma:

$$L_i = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \quad (6.19)$$

Adăugând acest termen de interacțiune la Lagrangeanul precedent, obținem forma dorită pentru Lagrangeanul care descrie electrodinamica cuantică:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.20)$$

Din acesta putem calcula ecuațiile de evoluție ale cimpurilor de operatori $\psi(x)$ și $A(x)$, folosind relațiile??. Obținem atunci:

$$\square A^\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = j^\mu \quad (6.21)$$

$$[-i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - ieA_\mu) + m]\psi = 0 \quad (6.22)$$

$$\bar{\psi}[i\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu\psi + ieA_\mu) + m] = 0 \quad (6.23)$$

Ultimele două ecuații duc la conservarea sarcinii:

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 \quad (6.24)$$

În plus, prima este identică cu relația clasică??, iar în cea de-a doua se vede direct influența cimpului electromagnetic ca în relația??.

Am putea concluziona această secțiune, pentru că am aflat că ne-am propus, și anume evoluția cimpurilor de operatori $\psi(x)$ și $A(x)$, și deci am construit "frame"-ul în care electrodinamica

cuantica funcționează. Nu ne rămâne decât să alegem câteva cazuri particulare și să vedem dacă și experimental prezicerile electrodinamicii cuantice se vor confirma. În fond restul nu este decât rezolvarea matematică a ecuațiilor de mai sus. Cu toate acestea, procesul acesta din urmă este destul de dificil, căci, dacă ecuațiile găsite au o formă clară, spațiul Hilbert în care operatorii $\psi(x)$ și $A(x)$ acționează este urias. De aceea, acestei rezolvări matematice o să fim nevoiți să-i dăm un spațiu larg în secțiunile următoare.

În final vrem însă să încheiem această secțiune cu câteva observații importante asupra rezultatelor precedente.

6.1.6 Observații pe marginea Lagrangeanului electrodinamicii cuantice

Metoda folosită în secțiunile precedente se bazează pe cuantificarea unor cimpuri clasice, și de aceea ea definește "*teoria cuantică a cimpurilor*". Aceasta se folosește des în fizica teoretică pentru a descrie și alte interacții între particulele elementare, ca mezoni, protoni, etc. În toate acestea important să stim ce fel de particule avem (fermioni, bozoni), și să obținem Lagrangeanul care descrie comportarea cimpurilor. Noi ne-am rezumat aici la început la cazul particular al electrodinamicii cuantice, pentru că aceasta rămâne o teorie fundamentală verificată foarte precis în experimente.



Figure 6.3: Lumea noastră efemera sub forma unui matras. O lovitură pe matras a creat oscilații pe suprafața ei. Aceste oscilații cuantificate le percepem noi ca particule elementare.

După cum vom discuta și în capitolul următor, teoria cuantică a cimpurilor ne dă o descriere coerentă a interacțiilor dintre particulele elementare. Forma ei ultima astăzi este denumită *modelul standard* al particulelor, și este practic o colecție de Lagrangeani pentru diferite interacții elementare, într-o manieră aproape identică cu cea discutată în capitolul de față pentru electrodinamica cuantică.

Astfel, și celelalte particule elementare sunt descrise de oscilații cuantificate, precum cimpul Dirac (cimp fermionic) sau cimpul electromagnetic (cimp bozonic). Universul întreg poate fi privit atunci ca o colecție de oscilații cuantificate. În Fig.6.3 am încercat să dăm o reprezentare sugestivă a acestui Univers al nostru sub forma unei matrașe, care trebuie asimilat tuturor cimpurilor ce există în Univers. Aici, o bilă aruncată pe ea creează oscilații pe suprafața ei, ce există atâta timp cât nu sunt amortizate. Cuantificând aceste oscilații, obținem nivele de energie, și pachete de undă pe care noi le interpretăm ca particule. Acestea vor circula pe suprafața matrașului, își vor schimba energia între ele, sau se vor distruge în coliziune și crea alte pachete de energie. Privind în acest fel, nu este de mirare că electronul se comportă în același fel ca și fotonul, și că dispare în urma coliziunii cu alte particule, ca pozitronul de exemplu.

Materia isi pierde astfel aureola de ceva rigid, care este pur si simplu. Ca si antimateria, care nu este altceva decit un alt fel de oscilatie cuantificata, ca si materia. Anihilarea materiei cu antimateria in fotoni nu este atunci decit un schimb de tipuri de oscilatii, cum este si transformarea materiei in energie, intilnita la relativitate. Acum intelegem semnificatia motto-ului acestui capitol: lumea este efemera, pentru ca exista atita timp cit aceste oscilatii nu sunt amortizate. Pe de alta parte, nu trebuie sa ne ingrijoram atit de mult. Chiar in lipsa unui impuls primordial, energia de zero a oscilatiilor exista intotdeauna. Este situatia vidului cosmic care nu este pe de-a intregul ...vid.

In alta ordine de idei, forma prezentata mai sus stringe sub umbrela ei toate interactiile cuantice dintre electroni si fotoni, si este desigur remarcabil ca are o forma relativ simpla. Dar tocmai aceasta forma ne va dezvalui aspecte "surpriza" ale acestor interactii, printr-un mecanism care l-am intilnit des pina acum. Astfel, este de ajuns sa amintim cum ecuatiile lui Maxwell ?? care pareau destul de complexe, "ascundeau" in ele forma ?? mult mai eleganta si intuitiva a cimpului vectorial A_μ . De aceea nu va fi de mirare ca vom cistiga mai multa intelegere a fenomenelor numai privind cu atentie forma Lagrangeanului 6.20.

Tinem deasemenea sa mentionam aici ca situatia de aici nu este cu nimic deosebita de cadrul general al mecanicii cuantice discutat in ??, in care se potriveste perfect. Electrodinamica cuantica mosteneste astfel solutiile si problemele generale mecanicii cuantice, in special cele legate de principiul proiectiei. Astfel, functia totala de unda se va intinde de la o margine la alta a Universului, si va fi schimbata in urma masuratorii de pe Pamint *instantaneu* in orice coltisor al Universului. Astfel, desi forma gasita 6.20 este relativist invarianta, ea "contrazice" principiile relativitatii, asa cum a fost discutat in capitolul precedent.

6.2 Diagrame Feynamm pentru o particula in cimp potential

6.2.1 Path Integrals

La inceputurile mecanicii cuantice au fost descoperite independent cele doua formulari ale mecanicii cuantice: cea matriceala si cea cu operatori. De ele descriu matematic diferit aceleasi procese fizice, echivalenta celor doua a fost gasita mai tirziu. Cea de-a treia abordare matematica a mecanicii cuantice a fost descoperita de Feynmann in anul 1948. Metoda utilizeaza intensiv notiunea de actiune S din mecanica clasica. Este interesant de remarcat ca Feynmann s-a intilnit cu notiunea de actiune si a fost fascinat de ea inca de pe bancile scolii, asa cum aminteste el in memorabila "Fizica Moderna". Atunci cind el a putut-o folosi eficient in mecanica cuantica, a sperat ca poate o noua latura ascunsa a lumii cuantice iese la suprafata. Din pacate inasa, aceasta s-a dovedit doar o formulare matematica diferita a mecanicii cuantice. Cu alte cuvinte, principiile mecanicii cuantice rpezentate de noi in ?? ramin valabile, doar ca vom scrie ecuatiile (in special ecuatia lui Schrodinger) altfel. Vom urmari aici linia prezentata in [?].

Sa incepem prin a considera un sistem cuantic simplu: o particula care se misca pe axa x sub actiunea unui potential $V(x)$. Hamiltonianul este deci:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (6.25)$$

Sa presupunem ca la momentul initial t_i functia de unda este $\psi(x, t_i)$. La un moment final t_f , aceasta va $\psi(x, t_f)$. Ne intere-

seaza sa exprimam aceasta din urma functie de unda ca:

$$\psi(x, t_f) = \int dy K(x, t_f, y, t_i) \psi(y, t_i) \quad (6.26)$$

Marimea $K(x, t_f, y, t_i)$ se numeste *propagator*, si ea ar denota amplitudinea de probabilitate a tranzitiei de la punctul y in momentul intital t_i la punctul x in momentul final t_f .

Acest lucru se vede daca consideram ca particula se afla la momentul intial in punctul $y = x_i$, si deci functia de unda este $\psi(y, t_i) = \delta(y - x_i)$. Avem atunci, inlocuind in relatia precedenta, ca functia de unda la momentul final va fi $\psi(x, t_f) = K(x, t_f, x_i, t_i)$. Atunci probabilitatea ca particula sa fie gasita in punctul x_f la momentul final va fi $|\psi(x_f, t_f)|^2 = |K(x_f, t_f, x_i, t_i)|^2$.

Mai important inasa decit probabilitatea de tranzitie este faptul ca propagatorul $K(x_f, t_f, x_i, t_i)$ determina *amplitudinea* acestei posibile tranzitii, asa cum vedem din 6.26. Daca functia de unda initiala este "spread", atunci trebuie sa utilizam amplitudinile de probabilitate ale diverselor posibile pozitii initiale, sa inmultim cu amplitudinea initiala, si sa sumam pentru a obtine rezultatul final, mult in acelasi fel ca la mecanica undelor.

Acum vom incerca sa scriem forma propagatorului in reprezentarea Heisenberg. Pentru aceasta sa ne reamintim ca in reprezentarea Haisenberg functia de unda nu evolueaza (exceptind desigur proiectia ei unurma masuratorii), ci numai operatorii (vezi ??). De exemplu, operatorul de pozitie va evolua in timp ca:

$$|xt\rangle = e^{iHt/\hbar} |x\rangle \quad (6.27)$$

Folosind relatia de completitudine a vectorilor pozitiei ??, functia de unda in reprezentarea Schrodinger ?? se scrie atunci ca :

$$\psi(x, t) = \langle x_f t_f | \psi \rangle = \int \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \langle x_i t_i | \psi \rangle dx_i = (6.28)$$

$$= \int \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \psi(x_i t_i) dx_i \quad (6.29)$$

si, comparind cu 6.26, obtinem relatia formala

$$K(x_f t_f; x_i t_i) = \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \quad (6.30)$$

Dupa cum vedem din relatia 6.26, daca stim propagatorul $K(x, t_f, y, t_i)$ atunci putem calcula functia de unda la orice moment ulterior, folosind direct integrala 6.26. Ne propunem deci sa gasim expresia acestui propagator. Pentru aceasta, alegem N momente succesive de timp, situate la un interval mic τ intre ele, in asa fel incit $t_1 = t_i$, $t_2 = t_1 + \tau, \dots$, $t_f = t_{N+1} = t_1 + N\tau$ (vezi Fig.). Acuma scriem relatia 6.26 pentru fiecare interval de timp τ :

$$\psi(x_{n+1}, t_{n+1}) = \int dx_n K(x_{n+1}, t_{n+1}, x_n, t_n) \psi(x_n, t_n) \quad (6.31)$$

Folosim succesiv descompunerile de mai sus in relatia initiala 6.26, pentru a obtine:

$$\psi(x_{N+1}, t_{N+1}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_N K(x_{N+1}, t_{N+1}, x_N, t_N) \quad (6.32)$$

$$\dots K(x_3, t_3, x_2, t_2) K(x_2, t_2, x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) \quad (6.33)$$

Relatia de mai sus ne spune ca practic amplitudinea de probabilitate totala este o suma a amplitudinilor pe fiecare traieectorie posibila $x_1, x_2, \dots x_n$.

Ne intereseaza acum sa aflam propagatorul $K(x_2, t_2, x_1, t_1)$ pentru un interval mic $\tau = t_2 - t_1$ de timp, caci pe acesta il putem folosi succesiv in relatia de mai sus. Pentru aceasta se

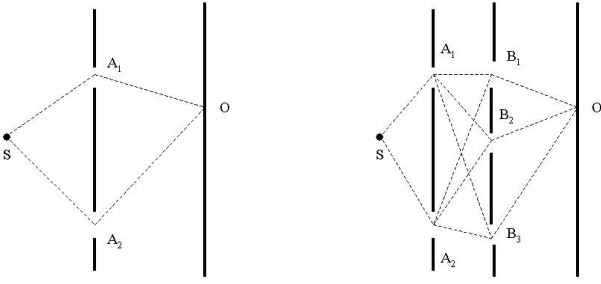


Figure 6.4: difracție-discret

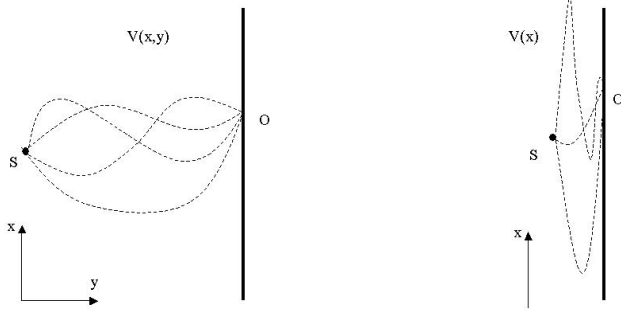


Figure 6.5: difracție-continuu

poate folosi relația 6.30 și 6.27. Avem succesiv, folosind relația de aproximare ??,

$$\langle x_{n+1}t_{n+1}|x_nt_n \rangle = \langle x_{n+1}|e^{-iH\tau/\hbar}|x_n \rangle \simeq (6.34)$$

$$\simeq \langle x_{n+1}|1 - \frac{i}{\hbar}H\tau|x_n \rangle = \delta(x_{n+1} - x_n) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle x_{n+1}|H|x_n \rangle (6.35)$$

Pentru forma funcției δ putem utiliza

$$\delta(x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(x_{n+1} - x_n) \right] (6.36)$$

OBS: În Ryder se face aprox, apoi aprox, pentru ca în final să se ajungă la exact. Nu sună bine!

În exercitiul ?? se arată că utilizarea formei de mai sus, și a relației de definiție a Hamiltonianului 6.25 conduce la forma (verifica limitele de integrare).

$$\langle x_{n+1}t_{n+1}|x_nt_n \rangle = \sqrt{\frac{m}{i\hbar\tau}} \exp \left[\frac{i\tau}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \right)^2 - V(x_n) \right] \right] (6.37)$$

Forma de mai sus este valabilă pentru un interval mic de timp τ sau, cu alte cuvinte, pentru o distanță mică între pozițiile x_{n+1} și x_n . Ea poate fi rescrisă *dacă* am considera că particula are posibilitatea să se deplaseze de la x_{n+1} la x_n *exact* în timpul $\tau = t_{n+1} - t_n$. Atunci putem scrie viteza formală a particulei $\dot{x} = (x_{n+1} - x_n)/(t_{n+1} - t_n) = (x_{n+1} - x_n)/\tau$. În plus, putem recunoaște atunci în relația de mai sus forma ?? a Lagrangeanului:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) (6.38)$$

și rescrie relația de mai sus ca:

$$\langle x_{n+1}t_{n+1}|x_nt_n \rangle = \sqrt{\frac{m}{i\hbar\tau}} \exp \left[\frac{i\tau}{\hbar} L(x_n, \dot{x}_n) \right] (6.39)$$

Considerarea posibilității de deplasare a particulei de la x_n la x_{n+1} ne ajută și să înțelegem mai bine rezultatul 6.37. Astfel, cum am considerat cazul în care potențialul $V(x)$ nu variază prea mult de la x_n la x_{n+1} , putem privi relația ?? pentru funcția de undă de Broglie a unui electron în câmp potențial constant. Vedem astfel că, dacă electronul s-ar deplasa de la x_n la x_{n+1} cu energia constantă $E = m\dot{x}^2/2 + V$ ar capta o diferență de fază dată de:

$$i \frac{\sqrt{2m(E-V)}\Delta x - E\tau}{\hbar} = \frac{i}{\hbar} \left[m \frac{\Delta x^2}{\tau} - m \frac{\Delta x^2}{2\tau^2} \tau - V\tau \right] = (6.40)$$

$$= \frac{i\tau}{\hbar} \left[m \left(\frac{\Delta x}{\tau} \right)^2 - V \right] (6.41)$$

adică exact cea care apare în amplitudinea de probabilitate 6.37. Această asemănare cu mecanica undelor se vede mai clar dacă scriem forma finală a propagatorului de la x_i la x_f . Putem introduce atunci pentru distanțe scurte 6.39 în relația 6.28 pentru a obține (verifica citi termenii sunt!)

$$\langle x_ft_f|x_it_i \rangle = \left(\frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{(n+1)/2} \int dx_1 dx_2 \dots dx_N (6.42)$$

$$\exp \left[\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{n=1}^N L(x_n, \dot{x}_n) \right] (6.43)$$

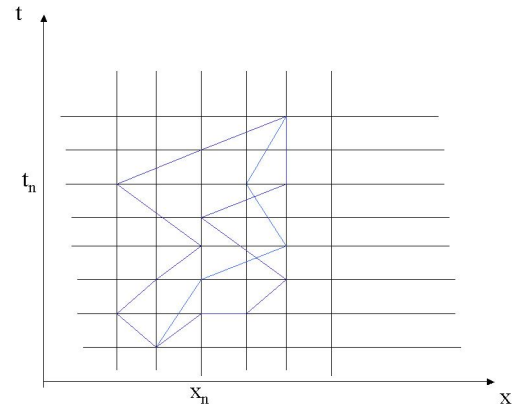


Figure 6.6: path-integral

Relația de mai sus poate fi scrisă simplificat dacă facem următorul raționament. Integrala din interiorul ei este de fapt o sumă după toate posibilitățile $x_1, x_2, \dots, x_n$ în care fiecare x_n trebuie să fie apropiat de vecinul său x_{n+1} . Putem spune atunci că fiecare element al sumei este o *posibilă cale a particulei elementare*. Ea ar circula clasic atunci între de la x_1 , la x_2 apoi la x_3 , și tot așa, de la timpul inițial t_1 la cel final t_f . Elementul care apare atunci în exponențială este o *sumă* pe această cale a Lagrangeanului calculat în fiecare poziție a căii. Cum elementul de timp τ apare în mod constant în fața Lagrangeanului, el se poate transforma imediat în diagonală. Rezultatul precedent se poate scrie deci sub forma:

$$\langle x_ft_f|x_it_i \rangle = N \sum_{c\text{ai}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt \right] (6.44)$$

unde am incorporat în N un factor constant care se poate calcula din normalizare. Relația de mai sus este rezultatul

stradaniei noastre pentru calculul propagatorului, si ea prezinta citeva aspecte interesante. In primul rind, ea este o extensie a discutiei noastre precedente despre faza acumulata de unda de Broglie pe o traiectorie. Astfel, putem privi propagatorul ca o *suma pe toate traiectoriile posibile* a fazei acumulate de particula, daca particula ar fi urmat acea traiectorie. Din punct de vedere clasic vedem ca acest lucru nu este posibil, pentru ca urmind o traiectorie aleatoare, particula nu si-ar mentine energia E constanta. Cu toate acestea, daca am considera ca aceasta traiectorie este *virtuala*, si am permite particulei sa-si "ajusteze" energia in fiecare punct in asa fel incit $E = m\dot{x}^2/2 + V$, atunci elementul de faza obtinut pe traiectorie va fi cel dat de unda de Broglie, asa cum am calculat in 6.40.

Incertitudinea timp-energie permite asta! (discutie)

Aceasta abordare explica in mod natural si comportarea clasica a particulei. Astfel, din mecanica analitica (vezi sectiunea ??), stim ca particula se deplaseaza pe traiectoria in care lagrangeanul are un extrem:

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt = 0 \quad (6.45)$$

Ori aceasta inseamna ca toate caile care sunt foarte apropiate de calea clasica vor avea aproximativ aceasi valoare a actiunii S , si deci vor contribui cu aceasi faza $\exp(iS/\hbar)$ constructiv in suma totala 6.44. Celelalte cai vor avea faze aleatorii si vor interfera distructiv. Atunci, reamintindu-ne ca $| \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle |^2$ ne da probabilitatea de a gasi particula in x_f odata ce ea a fost asezata in x_i , ne explicam de ce observam ca particula urmeaza calea clasica.

Observam astfel ca relatia 6.44 ne permite interpretarea mecanicii cuantice sub o forma noua, apropiata de mecanica undelor, poate mai intuitiva. Ea ar fi o reintoarcere partiala la mecanica clasica, punindu-ne poate mai adinc problema "oului si a gainii" pentru problema aleasa a particulei intr-un potential: ce este mai fundamental, ecuatia clasica de miscare, sau cea a lui Schrodinger? Situatiea poate fi rezolvata partial daca alegem forma Lagrangeanului ca fiind "ecuatia" ce ne da evolutia completa a unui sistem. Cu ajutorul lui putem apoi calcula evolutia cuantica cu ajutorul relatiei 6.44, si afla eventual aproximatia clasica utilizind 6.45. Vedem acum si de ce am ales sa mentionam ca cunoastem complet ecuatiile electrodinamicii cuantice in forma Lagrangeanului 6.20.

In finalul acestei sectiuni mentionam si principala dificultate a ecuatiei 6.44, care se refera la alegerea traiectoriilor care trebuiesc sumate. Astfel, putem alege traiectorii virtuale in care viteza particulei sa depaseasca viteza luminii? Putem alege traiectorii discontinue? Un raspuns general la aceste intrebari nu exista inca, desi, folosind metode matematice adecvate (ca masura Wiener) diferite situatii au fost rezolvate. DISCUTIE

6.2.2 Amplitudinea de tranzitie in lipsa interactiei. Particule reale si virtuale

In relatia 6.44 am obtinut o formula compacta pentru calculul amplitudinii de tranzitie (de la x_1 la x_2). Dezavantajul ei este insa calculul greoi a tuturor cailor posibile in prezenta unui potential $V(x)$ oarecare. Daca acesta nu ar fi prezent, atunci calculul probabilitatii de tranzitie ar fi usurat. Aceasta ne conduce la urmatorul sir de idei. Sa presupunem ca acest potential nu este mare in raport cu energia particulei (adevarat?). Atunci putem considera ca influenta acestui potential este o perturbatie la cazul cind el nu exista, si calcula mai intii amplitudinea de tranzitie in lipsa lui. Apoi introducem acest potential ca perturbatie.

Pot calcula ca mai jos, dar pot calcula si direct, pentru ca stiu solutiile de la mecanica cuantica. sa fac ambele cai, pentru ca calculul direct o sa-l folosesc mai tirziu!

Conform relatiei 6.42, in lipsa potentialului, amplitudinea de probabilitate se scrie ca:

$$K_0 = \left(\frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{(n+1)/2} \int dx_1 dx_2 \dots dx_N \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_n)^2 \right] \quad (6.46)$$

Cu ajutorul integralei ??, fiecare termen in relatia de mai sus se integreaza succesiv. Utilizind apoi $(n+1)\tau = t_f - t_i$, obtinem:

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right] \quad (6.47)$$

Observam ca, datorita omogenitatii spatiului si timpului, am obtinut $K_0(x_f, t_f, x_i, t_i) = K_0(x_f - x_i, t_f - t_i)$, asa cum ne asteptam.

Inainte de a calcula probabilitatea de amplitudine in lipsa potentialului, sa observam ca aceasta a fost definita pentru doua momente *successive* de timp, asa cum este natural. Matematic insa, ar fi util sa folosim o formula care sa fie definita si pentru $t' < t$, pentru a nu ne ingrijora de ordinea timpului. De aceea extinde functia K (care primeste astfel denumirea de *propagator*) in asa fel incit:

$$K(x', t', x, t) = 0 \text{ pentru } t' < t \quad (6.48)$$

Daca definim functia "pas" $\theta(t) = 0, 1$ dupa cum $t < 0$ sau $t > 0$, atunci putem rescrie relatia precedenta sub forma:

$$K_0(x_2 t_2; x_1 t_1) = \theta(t_2 - t_1) \left(\frac{m}{i\hbar(t_2 - t_1)} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(x_2 - x_1)^2}{2\hbar(t_2 - t_1)} \right] \quad (6.49)$$

In afara ca acum nu trebuie sa ne mai ingrijoram de ordinea timpilor, relatia de mai sus mai are citeva avantaje. Astfel, folosind relatia de derivare

$$\frac{\partial}{\partial t'} \theta(t' - t) = \delta(t' - t) \quad (6.50)$$

se verifica direct ca propagatorul K_0 este solutia ecuatiei

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}_0(x', t') \right) K_0(x', t', x, t) = \hbar \delta(x' - x) \delta(t' - t) \quad (6.51)$$

Relatia de mai sus defineste ceea ce in termeni matematici se numeste *functia Green* a operatorului $i\hbar \partial/\partial t' - \hat{H}_0(x', t')$. Proprietatile functiei Green le vom folosi direct intr-una din discutiile urmatoare. Pentru moment este important de amintit ca relatia precedenta nu este restrinsa numai la propagatorul in lipsa potentialului, ci este valabila si pentru cel in prezenta potentialului $V(x)$. Forma relatiei se obtine renuntind la indicii 0 din relatia precedenta.

In al doilea rind, propagatorul 6.49 are o forma relativ usor de memorat si interpretat daca folosim transformata Fourier, care se poate folosi datorita proprietatii de omogenitate a spatiului si timpului mentionata mai sus:

$$K_0(x' - x, t' - t) = \int \frac{dp dE}{(2\pi\hbar)^2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(x' - x) \right] \quad (6.52)$$

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} E(t' - t) \right] K_0(p, E) \quad (6.53)$$

Relatia de mai sus se interpreteaza in forma undelor planare. Astfel, observam ca coeficientul $\exp[i/\hbar p(x' - x)] \exp[i/\hbar E(t' - t)]$ poate fi interpretat ca faza acumulata de o unda de Broglie ??

cu impuls p si energie E de la x la x' . Putem spune atunci ca amplitudinea acumulata de la x la x' este o suma a posibilelor unde planare sub care particula poate merge, *fiecarei posibile unde plane atribuindu-i amplitudinea* $K_0(p, E)$. Aceasta se poate calcula fie direct, fie folosind dezvoltarea

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K_0(x', t', x, t) = \int \frac{dp dE}{(2\pi\hbar)^2} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(x' - x) \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E(t' - t) \right] K_0(p, E) \quad (6.54)$$

Pe de alta parte, functia δ din dreapta ecuatiei ?? se scrie ca:

$$\hbar \delta(x' - x) \delta(t' - t) = \int \frac{dp dE}{(2\pi\hbar)^2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(x' - x) \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E(t' - t) \right] \quad (6.56)$$

Prin comparatia relatiilor de mai sus, facem identificarea:

$$K_0(p, E) = \frac{\hbar}{E - \frac{p^2}{2m}} \quad (6.57)$$

Se vede ca relatia de mai sus nu este definita pentru $E = p^2/2m$, ceea ce pune probleme in calcularea integralei ?. Acest lucru se depaseste matematic (nu intru in detalii aici) introducand marimea $i\epsilon$, si alegind ϵ foarte mic in relatiile finale. De aceea, rescriem rezultatul de mai sus sub forma:

$$K_0(p, E) = \frac{\hbar}{E - \frac{p^2}{2m} + i\epsilon} \quad (6.58)$$

Relatia de mai sus ne da forma compacta a amplitudinii unei planare de energie E si impuls p discutata mai sus. Aceasta amplitudine tinde la infinit in cazul in care relatia dintre E si p ia valoarea asteptata pentru particula clasica $E = p^2/2m$ (in termeni tehnici se spune ca amplitudinea are un pol in planul complex). Aceasta ne conduce la urmatoarea interpretare a fenomenului, *cruciala* pe parcursul acestui capitol.

Astfel, ne putem imagina urmatoarea situatie. Undele plane de energie E si impuls p descriu miscarea unor particule care au energia E si impulsul p . Numim aceste particule *reale* daca exista relatia $E = p^2/2m$ si *virtuale* daca $E \neq p^2/2m$. Atunci probabilitatea ?? de a gasi o particula intr-un anumit punct devine data de suma amplitudinilor de unda ale acestor particule (si virtuale, si reale).

Desigur ca atunci este de inteles ca amplitudinea particulei reale tinde la infinit, pentru ca in urma masurarii avem sa vedem traiectoria acestei particule reale (lineara in cazul lipsei de interactie). Dar corectii mici la aceasta traiectorie, date de suma amplitudinilor particulelor *virtuale*, ne vor da comportarea cuantica, si ca atare exista o probabilitate mica (dar finita!) de a observa particula si in afara traiectoriei clasice (liniare in cazul nostru).

Pe de alta parte, mai putem face o observatie, utila in mod special experimentalistilor dornici de calcula rapide si simple, pentru diferite estimari. Astfel, putem spune ca energia particulei reale $E = p^2/2m$ nu poate fi cunoscuta cu precizie in timpul unei masuratori finite de durata Δt sa zicem. Principiul de incertitudine energie-timp al lui Heisenberg ne spune ca aceasta precizie nu poate fi mai mica de $\Delta E = \hbar/\Delta t$. Ori putem interpreta acest rezultat spunind ca in timpul Δt este posibil ca particule *virtuale* sa exista, a caror energie difera de energia particulei reale. Vom reveni asupra acestui aspect in utilizarea citorva exemple.

Sumarizind putin in acest moment, am vazut ca propagatorul $K_0(x', t', x, t)$ este fie amplitudinea de tranzitie de la x la x' daca $t' > t$, fie zero. Desi am gasit propagatorul in lipsa interactiei (vezi 6.49), vom face mai mult apel la transformata Fourier a acestuia 6. Aceasta ne da amplitudinea unei plane de impuls p si energie E in descompunerea Fourier 6.52.

6.2.3 Amplitudinea de tranzitie in prezenta interactiei. Interactii virtuale

Dupa cum am mentionat, vom incerca sa scriem propagatorul $K(x', t', x, t)$ in prezenta interactiei $V(x)$ intr-o forma aproximativa in jurul lui $K_0(x', t', x, t)$. Pentru aceasta observam ca in relatia 6.44 putem separa potentialul:

$$K(x', t', x, t) = N \sum_{cai} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \frac{mv^2}{2} dt \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} V(x) dt \right] \quad (6.59)$$

Daca $V(x) = 0$, termenul ramas este $K_0(x', t', x, t)$. Deoarece consideram potentialul de interactie mic, sa dezvoltam exponentiala:

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} V(x) dt \right] = 1 + \frac{-i}{\hbar} \int_t^{t'} V(x) dt + \quad (6.60)$$

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \left[\int_t^{t'} V(x) dt \right]^2 + \dots \quad (6.61)$$

Inlocuind aceasta descompunere in rezultatul precedent, obtinem forma propagatorului ca pe seria:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \quad (6.62)$$

Utilizind forma discreta 6.46 a propagatorului K_0 , si scriind integrala dupa $V(x)$ ca o suma discreta prima aproximatie a lui K_1 devine,

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} N^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^n \tau \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=1}^N (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \quad (6.63)$$

$$V(x_i, t_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6.64)$$

unde $N = m/i\hbar\tau$. Cum V depinde de variabila separata x_i , puntem imparti suma in exponent in doua parti: prima de la $j=0$ la $j=i-1$, si a doua de la $j=i$ la $j=n$. ATENTIE. Pasajul acesta si formulele le-am copiat identic din Ryder! De aceea sunt alti indici. Separind integrala dupa x_i , obtinem:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} N^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^n \tau \int dx \quad (6.65)$$

$$\left\{ N^{(n-i+1)/2} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=i}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_{i+1} \dots dx_n \right\} \quad (6.66)$$

$$V(x_i, t_i) \left\{ N^{i/2} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=1}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_1 \dots dx_i \right\} \quad (6.67)$$

Cu toata marimea formulei, recunoastem in paranteze propagatorul in lipsa interactiei. Corectind coeficientii, si retransformind forma discreta in integrala, propagatorul devine:

$$K_1(x_f t_f; x_i t_i) = \frac{-i}{\hbar} \int dt \int dx K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \quad (6.68)$$

Deși integrala ar trebui efectuată doar de la t_i la t_f conform calcului precedent, ea poate fi extinsă formal de la $t = -\infty$ la $t = \infty$ datorită proprietății.

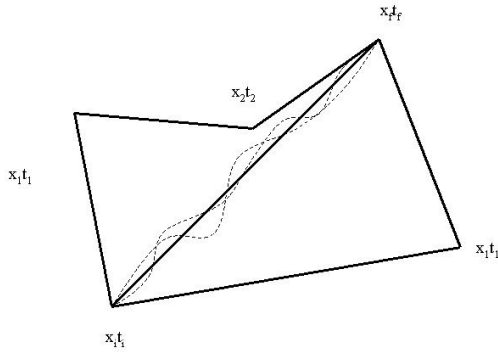


Figure 6.7: Amplitudinea de tranziție în cazul interacției este suma amplitudinilor tuturor proceselor de împrăștiere posibile. Cu linii întrerupte am desenat procesele virtuale care construiesc propagatorul în lipsa interacției, conform 6.44.

Forma obținută are o explicație foarte la îndemână, așa cum este desenat în Fig. 6.7. Astfel, putem termenul $K_0 K_1(x_f t_f; x_i t_i) V(x, t)$ în dezvoltarea de mai sus ca un produs a trei amplitudini de tranziție (care dau probabilitățile de tranziție corespunzătoare): amplitudinea de probabilitate ca particula să meargă de la x_i la x , amplitudinea de probabilitate $V(x, t)$ ca ea să se împrăstie de potențialul $V(x)$ prezent, și amplitudinea de probabilitate $K_1(x t; x_i t_i)$ să meargă apoi la x_f . Acest proces poate avea loc în orice moment t și în orice poziție x , de aceea avem în formula precedentă integrarea după timp și poziție.

Se poate arăta că termenii următori K_2 se pot scrie sub o formă similară. De exemplu:

$$K_2(x_f t_f; x_i t_i) = \frac{-1}{\hbar^2} \int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \quad (6.69)$$

$$K_0(x_f t_f; x_1 t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1 t_1; x_2 t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2 t_2; x_i t_i) \quad (6.70)$$

Remarcăm absența termenului $2!$ prezent în dezvoltarea inițială a potențialului. Interpretarea este identică cu cea prezentând K_1 . În final toate aceste procese posibile trebuie adunate în amplitudinea de tranziție dată de seria ??, fiecare cu amplitudinea ei de tranziție. Remarcăm însă că particulele *virtuale*, adică toate acele care construiau integrala 6.44 nu apar evident aici. Cu toate acestea, ele sunt prezente în calculul amplitudinii tranziției K_0 în lipsa interacției. Ele sunt reprezentate prin linii întrerupte în Fig. 6.7.

Practic, putem interpreta rezultatul de mai sus sub forma următoare. Amplitudinea tranziției de la x_i la x este o sumă ?? a tuturor amplitudinilor particulelor *virtuale* și *reale*. Apoi există o probabilitate de împrăștiere (pentru *fiecare* din aceste prime particule, reale sau virtuale) dată de $V(x, t)$. În final, particula se va deplasa de la x la x_2 din nou sub forma ei reală sau virtuală. Avem deci ca amplitudinea finală de probabilitate este o sumă a tuturor posibilelor diagrame de felul celor desenate în Fig. 6.7, fiecare având amplitudinea ei de probabilitate.

Aici fac Fourier și discut despre împrăștiere.

6.3 Diagramele Feynman pentru cimpul scalar

6.3.1 Cimpul scalar în lipsa interacției

6.3.2 Cimpul scalar în prezența interacției

6.3.3 Diagramele Feynman pentru cimpul scalar

6.4 Diagramele Feynman în electrodinamica cuantică

Sunt în principal două abordări posibile, prima pe linia tradițională, utilizând operatorii de anihilare și creare, și o altă modalitate pe linia "path integrals", așa cum a fost calculat în secțiunea ?? . Noi vom alege aici prima cale, pentru că este directă, având deja operatorii necesari ?? . Celei de-a doua căi îi vom face o scurtă prezentare în secțiunea ?? .

6.4.1 Cimpul electromagnetic în lipsa interacției

În aceeași manieră în care am procedat la cimpul Dirac, putem încerca să aflăm acum amplitudinea de tranziție în cazul cimpului electromagnetic liber cuantificat (deci în care fotonii nu interacționează între ei, și nu se pot transforma în electroni și pozitroni). Aici însă avem două dificultăți suplimentare. Prima este alegerea etalonării (noi am folosit pe parcursul acestei cărți etalonarea Lorentz), și cea de-a doua este absența fotonilor polarizați longitudinal sau temporal. Ambele aspecte au fost discutate în secțiunea ?? . În principiu, am putea folosi direct formulele de dezvoltare ?? pentru a calcula amplitudinea de tranziție precum în cazul cimpului Dirac. Nu o vom face aici datorită acestor probleme, menționând direct rezultatul: (sau să fac un calcul scurt, de fapt cum iese $g_{\mu\nu}$ e problema, ca restul merge cred. vezi)

$$\langle 0 | T[A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (6.71)$$

și deci

$$S_{\mu\nu}(q) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (6.72)$$

Ceea ce remarcăm imediat este absența masei, și prezența termenului $g_{\mu\nu}$. În plus, am putea crede că formula precedentă, fiind o amplitudine de tranziție, am fi putut-o folosi în experiențele din capitolul precedent. Cu toate acestea, este valabilă numai pentru cimpul electromagnetic în vid, fără paravane sau "gratings", și de aceea este de puțin folos în experimentele discutate în capitolul precedent. În Fig. ?? sumărizăm și acest rezultat.

6.4.2 Cimpul Dirac în lipsa interacției

Să considerăm mai întâi cimpul Dirac, și să vedem cum am putea construi amplitudinea de probabilitate a tranziției de la poziția $\mathbf{x}$ în momentul t_i (eveniment desemnat prin $x = \{\mathbf{x}, t_i\}$) la poziția $\mathbf{y}$ în momentul t_f (eveniment desemnat prin $y = \{\mathbf{y}, t_f\}$).

Într-o manieră analoagă cu cea discutată în cazul unei particule, putem considera că "plasăm" un electron în poziția $\mathbf{x}$ în

momentul t_i si calculam fuintia lui de unda la momentul ulterior t_f . Dupa Peskin, pag.63. Nu am zis de polarizare.

Functia de unda a unui electron care se afla *sigur* in punctul $\mathbf{x}$ la momentul t_i poate fi in sa scrisa ca $|in\rangle = \psi_a^+(x)|0\rangle$, unde $\psi(x)$ este acum operatorul de creare a unui electron de "polarizare" a , asa cum am discutat in sectiunea ???. Sa ne reamintim ca in cimpul Dirac lucram in reprezentarea Heisenberg, ceea ce inseamna ca functia de unda $\psi_a^+(x)|0\rangle$ ramine *aceeasi* la momentul ulterior t_f .

Ceea ce se schimba este operatorul corespunzator masurarii pozitiei (y). Acesta devine $\bar{\psi}_b(y)$ pentru masurarea unui electron de polarizare b . La fel de bine, am putea spune ca, daca la momentul ulterior t_f electronul s-ar afla *sigur* in pozitia (y) cu polarizarea b , atunci functia lui de unda ar fi $|fin\rangle = \psi_b^+(y)|0\rangle$. Atunci amplitudinea de probabilitate de a gasi electronul in (y) va fi $\langle fin|in\rangle$, conform principiului de proiectie al mecanicii cuantice. Cum $\langle fin| = \langle 0|\bar{\psi}_b(y)$, amplitudinea de tranzitie se scrie atunci ca:

$$K(x_i, t_i, p_i; x_f, t_f, p_f) = \langle 0|\bar{\psi}_b(y)|\psi_a(x)|0\rangle \quad (6.73)$$

Operatorul $\psi_a(x)$ a fost in sa obtinut in relatia 6.11. De aceea in exemplul cimpului Dirac fara interactie putem calcula imediat propagatorul inlocuind 6.11. Folosind proprietatile operatorilor de creare si anihilare $d_a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle$, si $d_a^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{k}\rangle = 0$, obtinem (vezi pag.56, vezi pasii intermediari)

$$\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s v_a^s(p) \bar{v}_b^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (6.74)$$

$$= -(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (6.75)$$

$$= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (6.76)$$

Ca si in cazul unui singur electron, termenul de la numitor este divergent pentru $p = m$, de aceea se introduce un factor aditional $i\epsilon$ foarte mic. In plus, matematic se poate calcula $\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a^+(x)|0\rangle$ si in cazul cind $t_f < t_i$, obtinindu-se un rezultat care are doar un semn diferit. pentru a lua si acest caz in calcul, se defineste operatorul de ordine temporal sub forma

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) & \text{pentru } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x) & \text{pentru } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (6.77)$$

In final amplitudine de tranzitie se poate scrie ca propagatorul matriceal 4x4:

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = S_F(x-y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (6.78)$$

Forma propagatorului cimpului Dirac liber este atunci similara cu cea a particulei nerelativiste discutate in sectiunea precedenta ??.

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (6.79)$$

Forma de mai sus este desigur o matrice 4x4, iar componentele ei $(S_F(p))_{ab}$ da amplitudinea proceselor de tranzitie de la un electron cu polarizarea a la unul cu polarizarea b . Rezultatul acesta este prezentat schematic in Fig.??.

Prin asemanare cu ??, vedem ca amplitudinea de tranzitie este deasemenea o suma de amplitudini a fiecarei posibile unde

Figure 6.8: propagatori-liber

plane, fiecare unda plana intrind cu "ponderea" $S_F(p)$. Practic, discutam intii despre electroni *reali*, cei pentru care modulul quadriectorului energie-impuls $p = E, \mathbf{p}$ este egal cu masa de repaus a electronului $p = m$. Pentru acestia amplitudinea ia o valoare care tinde la infinit, ceea ce face ca miscarea lor sa dea aparenta clasica. Apoi, asa cum am discutat si in sectiunea ??, avem si efecte datorate electronilor *virtuali*, cei pentru care $p \neq m$, si care au o amplitudine mai mica. Toate aceste amplitudini trebuie adunate pentru a obtine probabilitatea totala de a gasi electronul intr-o pozitie sau alta.

6.4.3 Interactia intre cimpul Dirac si electromagnetic

Desigur ca tot nucleul electrodinamicii cuantice, frumusetea ei, sta in interactia dintre cimpul electronilor si al fotonilor. Aceasta interactie este cea care conduce la respingerea electronilor, sau la anihilarea perechilor de electroni si pozitroni in doua raze de lumina.

Metoda care poate descrie la ora actuala aceasta interactie este numai perturbativa, asa cum a fost discutat in sectiunea ??? pentru electronul in miscare nerelativista. Vom incerca sa discutam si noi aceasta interactie, in sa facind un pas inapoi. Astfel, vom considera *cazul unui singur electron*, descris de teoria lui Dirac, intr-un cimp electromagnetic *clasic*. Situatia va fi analoaga cu cea discutate in sectiunea ??, atita doar ca functia de unda a electronului va avea mai multe componente, ca si cimpul electromagnetic clasic. Am vazut cum in ?? amplitudinea de probabilitate a tranzitiei (propagatorul adica) a fost indetificat *functiei Green* a ecuatiei de miscare. Acum scriu explicit ecuatiile sa se vada ca sunt matrici. Prin analogie cu ?? scriem acum direct ecuatia amplitudinii de tranzitie:

$$(i\nabla' - e\mathcal{A}' - m_0)S_F(x', x; A) = \delta^4(x' - x)\mathbb{I}_4 \quad (6.80)$$

Pentru cazul cnd cimpul electromagnetic nu este prezent ($A=0$), putem verifica imediat ca solutia ?? gasita de noi verifica ecuatiile de mai sus. Cind cimpul electromagnetic este prezent, putem trece termenul cu $\mathcal{A}'$ in dreapta, si rescrie ecuatiile de mai sus sub forma:

$$(i\nabla' - m_0)S_F(x', x; A) = \delta^4(x' - x)\mathbb{I}_4 + e\mathcal{A}'S_F(x', x; A) \quad (6.81)$$

Aceasta ecuatie poate fi inteleasa ca in prezenta unei surse $\rho(x)$:

$$(i\nabla' - m_0)S_F(x', x; A) = \rho(x', x) \quad (6.82)$$

Asa cum am mentionat mai devreme in sa, noi stim solutia ecuatiei

$$(i\nabla' - m_0)S_F(x', x) = \delta^4(x' - x)\mathbb{I}_4 \quad (6.83)$$

care este $S_{F0}(x', x)$. Atunci, folosind practic avantajul functiei Green, putem scrie solutia ecuatiei ?? ca

$$S_F(x', x; A) = \int d^4y S_{F0}(x', y) \rho(y, x) \quad (6.84)$$

Relatia de mai ne spune ca, deoarece operatorul original ?? este liniar, solutia finala se poate descompune ca o suma. Avem deci:

$$S_F(x', x; A) = \int d^4y S_{F0}(x', y) [\delta^4(x' - x) \mathbb{I}_4 + eA(y) S_F(y, x; A)] \quad (6.88)$$

In prima aproximatie, putem utiliza in partea din dreapta propagatorul cimpului liber $S_{F0}(x', y)$, si obtinem o ecuatie analoaga 6.68, data de:

$$S_F(x', x; A) = S_{F0}(x', x) + e \int d^4y S_{F0}(x', y) eA(y) S_{F0}(y, x) \quad (6.89)$$

Sa incercam sa interpretam aceasta amplitudine de tranzitie asa cum am facut in sectiunea ?? (vezi Fig.??). Astfel, amplitudinea de tranzitie de la $x = (\mathbf{x}, t)$ la $x' = (\mathbf{x}', t')$ este o suma de doi termeni. Primul reprezinta amplitudinea de tranzitie in lipsa cimpului, iar al doilea este o suma (integrala) a amplitudinilor de probabilitate ale tuturor *proceselor de imprastiere* de ordinul intii. "Needless to say", procesele de imprastiere de ordin superior, se pot obtine imediat prin utilizarea unor aproximatii succesive in ?? . De exemplu, cea de ordinul doi se obtine utilizind formula precedenta in ?? , si obtinind o solutie asemanatoare ?? .

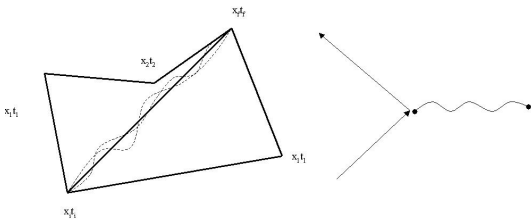


Figure 6.9: Stanga: in spatiu; Dreapta: reprezentarea in impuls

Din relatia 6.87 putem deduce ca amplitudinea unui singur proces de imprastiere este (in termeni matriceali!):

1. amplitudinea ca particula sa ajunga intr-un alt punct y , data de $S_{F0}(y, x)$
2. amplitudinea ca ea sa se imprastie in y , data de $eA(y)$
3. amplitudinea ca particula sa ajunga de la y la x' , data de $S_{F0}(x', y)$

Acest tip de imprastiere se poate scrie si in reprezentarea impulsului (transformind Fourier), porecum am discutat in cazul particulei nerelativiste in sectiunea ?? . Putem scrie atunci, transformind Fourier (explica, calculeaza), amplitudinea ca un electron de impuls p sa aiba o imprastiere in urma caruia el sa capete impulsul p' . Daca $p \neq p'$, ea este (formula e gresita, citeste):

$$S_F(p'; p) = e \int d^4y S_{F0}(p) eA(y) S_{F0}(p') \quad (6.87)$$

6.4.4 Diagramele Feynman pentru electrodinamica cuantica

Diagramele Feynman reprezinta o colectie de reguli dupa care se pot reface amplitudinile de tranzitie ale interactiei cimpului electromagnetic si electronic in orice aproximatie. Ele

sunt exprimate pentru *reprezentarea impulsului*, datorita simplitatii lor in aceasta reprezentare. Trei dintre acestea au fost discutate in sectiunile precedente. Asa cum am mentionat inainte, pentru a le afla, sunt doua "aproach" des folosite: prima metoda ..., si a doua cea functionala, care foloseste intens forma 6.44 datorata lui Feynman.

Nu ne propunem aici sa deducem aici extensiv aceste reguli, pentru ca ar fi prea mult fata de scopul pe care ni l-am propus. Pentru cititorul interesat sa verifice toate detaliile (care de altfel sunt foarte importante) il rugam sa citeasca citeva dintre referintele ?? propuse de noi. Pentru noi este important insa de reamintit contextul in care acestea se afla. Practic suntem inca in situatia initiala, in care am gasit setul de ecuatii 6.21 ce descriu evolutia operatorilor (funtia de unda, fiind in reprezentarea Heisenberg, ramine constanta). Cu ajutorul acestor ecuatii, am mentionat deja 3 reguli de calcul ale unor probabilitati de tranzitie. Restul regulilor se refera in special la atributia semnelor negativ in anumite cazuri si la numararea diferitelor procese. Ele sunt rezultatul luarii in calcul a caracteristicii fermionice a electronilor.

Regulile Feynman (in *reprezentarea impulsului*) sunt:

1. Fiecarei linii electronice i se asociaza un propagator dat de:

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (6.88)$$

2. Fiecarei linii fotonice i se asociaza un propagator dat de:

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (6.89)$$

3. La fiecare *vertex*, inmultim cu amplitudinea:

$$-ie\gamma_\mu \quad (6.90)$$

4. Pentru fiecare "loop" electronica *inchisa*, inmultim cu un factor -1 .
5. Pentru fiecare "loop", integram dupa impulsul care apare:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi^4)} \quad (6.91)$$

6. Diagramele care difera intre ele numai printr-o schimbare a doua linii electronice vor diferi orintr-un factor -1
7. Linii fermionice contin sageti in directia timpului, sau in directie contrara. Cu toate acestea, diagramele ce sunt topologic identice (?) vor fi luate in calcul doar o singura data.
8. Liniile externe electronice care *intra* intr-o diagrama vor capata factorii $u(p, s)$ (daca e linie electronica) sau $\bar{v}(p, s)$, daca e linie pozitronica. Cele care *ies* din diagrama vor capata factorii $\bar{u}(p, s)$ si respectiv $v(p, s)$. Directia liniilor pozitronice este opusa liniilor electronice, in asa fel incit liniile pozitronice "incoming" sa aiba momente ce parasesc diagrama (?)

6.5 Citeva observatii intermediare

6.5.1 Anihilarea electron-pozitron

folosteste formula [?] 6.42:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \quad (6.92)$$

pentru timpul de viata este utila 6.32

6.5.2 Pozitron v.s electron

6.5.3 Conexiunea spin-statistica

6.6 O miniprezentare a metodei functionale in cazul cimpului scalar

6.6.1 O singura particula in cimp potential

Am prezentat in sectiunile precedente teoria efectelor cuantice in electrodinamica bazandu-ne pe pricipiul particulelor avind o fata *reala* si una *virtuala*. Am vazut cum amplitudinea de probabilitate finala este o suma liniara a tuturor amplitudinilor proceselor posibile, incluzind ambele "fete" ale particulei. Aspectul de cimp s-a pierdut poate pe parcurs, desi am in put cu el cind am calculat amplitudinile tranzitie in lipsa interactiei (vezi ??). Aceasta s-a datorat faptului ca am "suntat" in sectiunea ?? o analiza completa interactiei dintre cimpul electromagnetic si cel al lui Dirac. In acea sectiunea ?? am simplificat interactia, considerind numai cazul electronului intr-un cimp electromagnetic *clasic*, asigurind cititorul ca regulile Feynmann ?? intuite astfel sunt valabile si intr-o analiza completa.

Aceasta analiza completa se poate face pe doua cai, una utilizind evolutia in timp ?? a operatorilor ψ si A_μ , si cea de-a doua utilizind metoda "path integral" prezentata in ?? in cazul unei singure particule. Vom face aici o scurta introducere a acestei a doua metode.

Incepem prin a reaminti rezulttul ?? care de na amplitudinea de probabilitate a tranzitiei de la x_i (la momentul $t_i = 0$) la x_f (la momentul t) in prezenta unui potential extern $V(x)$:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_i^f Dx(t) e^{i \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt} \quad (6.93)$$

unde

$$L(x, \dot{x}) = dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \quad (6.94)$$

Dupa cum am discutat in sectiunea ??, prin $\int_i^f Dx(t)$ intelegem o suma pe toate caile posibile de a ajunge de la x_i la x_f (notatia mea, dar trebuie sa spun cumva lucrul asta). Caile alese trebuie deci sa incepleasca conditiile:

$$x(t_i) = x_i \quad x(t_f) = x_f \quad (6.95)$$

In ?? am discutat ambiguitatea unei astfel de integrale pentru constructia unei teorii matematice consistente. Nu este in sa mai putin adevarat ca din punct de vedere practic astfel de probleme nu sunt o problema majora pentru noi, caci pentru ... (este o problema. dar faza oscileaza, speram, aleatoriu, si speram ca valorile departe de traiectoria clasica se vor anula).

Sa presupunem acum ca lasam sistemul in starea "ground state" $|0\rangle$ in lipsa potentialului $V(x)$. Daca nu ar exista aceasta interactie, atunci sistemul ar ramine in aceaasi stare stationara $|0\rangle$. In prezenta interactiei el in sa va evolua catre o alta stare, care la un moment ulterior va fi $e^{-iHt}|0\rangle$. Probabilitatea ca la o masuratoare ulterioara particula sa fie gasita inca in starea initiala $|0\rangle$ este atunci $\langle 0 | e^{-iHt} | 0 \rangle$. In literatura de specialitate (vezi de exemplu [?]) se arata ca aceasta poate fi scrisa ca:

$$Z_0 = \langle 0 | e^{-iHt} | 0 \rangle = \int Dx(t) \exp[i \int_0^t [L(x, \dot{x}) + \frac{1}{2} \epsilon q^2] dt] \quad (6.96)$$

unde integrala trebuie efectuata *pe toate caile posibile* $x(t)$ (lucru ce a fost sugerat in formula precedenta prin lipsa limitelor de integrare), iar ϵ este un nuam real foarte mic. Remarcabil, formula de mai sus este aproape identica cu ??, atita doar ca ea trebuie efectuata pe toate caile, de la orice x_i la orice x_f .

Formula de mai sus este valabila pentru orice forma a lagrangeanului L de miscare a particulei. Sistemul este pus in starea de energie cea mai mica ("ground-state") (in lipsa interactiei? $V=0$), apoi lasat sa evolueze de la sine si in final masuram probabilitatea ca sa-l gasim in aceeaasi stare initiala. Starea initiala se considera in general "ground-state" in absenta interactiei, interactia facind posibila tranzitia catre alte stari (cred).

In tot procesul de mai sus, nu am considerat o interactie directa cu un eventual observator extern. Putem presupune in sa ca acesta exista, si ca la diferite momente de timp observatorul trage sau impinge de particula. Cu toate ca aceasta maniera poate parea ciudata, vom vedea mai tirziu ca ea are relevanta in teoria cuantica a cimpului. Daca presupunem ca particula se afla in apropierea originii ($x=0$), si ca ea reactioneaza aproximativ ca u arc, atunci putem scrie energia "injectata" la momentul t ca $E \simeq F(t)x$ (vezi formula ??). Acest term il adunam la potentialul de interactie, pentru a obtine in final:

$$L[J] = L(x, \dot{x}) + \frac{1}{2} \epsilon q^2 + \hbar J(t)x(t) \quad (6.97)$$

Amplitudinea de probabilitate de a ramine in starea "ground state" este atunci:

$$Z[J] = \int Dx(t) \exp[i \int_{-\infty}^{\infty} [L(x, \dot{x}) + J(t)q(t) + \frac{1}{2} \epsilon q^2] dt] \quad (6.98)$$

$$\simeq \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \quad (6.99)$$

Pentru a completa sirul de formule de care mai avem nevoie inainte de a trece la cimp, sa presupunem ca $x(t)$ este operatorul pozitiei in reprezentarea Heisenberg. Se poate arata atunci (vezi exercitiul ??) ca:

$$\langle x_f t_f | q(t_1) q(t_2) | x_i t_i \rangle \simeq \int Dq q(t_1) q(t_2) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \right] \quad (6.100)$$

si mai departe, prin introducerea termenului ϵ :

$$\langle 0, \infty | q(t_1) q(t_2) | 0, -\infty \rangle \simeq \int Dq q(t_1) q(t_2) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} L + \frac{1}{2} \epsilon q^2\right] \quad (6.101)$$

unde $t_1 > t_2$. Termenul din dreapta al relatiei de mai sus se poate in sa obtine exact si din 6.98 daca derivam formal la $J(t)$ de doua ori (caci termenii cu $x(t)$ vor iesi in fata exponentialei)! Vom scrie:

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} = i^2 \int Dq q(t_1) q(t_2) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} L'(t) dt\right] \quad (6.102)$$

Relatia de mai sus este este practic "turnata", caci intelegerea ei practic sfideaza cunostintele noastre matematice de pina acum. Astfel, avem o derivata in raport cu o functie , si nu in raport cu o coordonata. Daca in sa privim $J(t_1)$ ca putin lua multe valori la acelasi moment t_1 , atunci si $J(t_1)$ poate fi privit ca o coordonata. Derivata in raport cu aceasta va scoate in fata numai valoarea $x(t_1)$, adica valoarea lui x precis la acel moment t_1 . Un astfel tip de derivare este tratata pe larg in cartile dedicate exclusiv teoriei cuatice ale cimpului, si nu este in intentia noastra de a intra in aceste detalii.

Daca avem in sa dificultati in acceptarea acestei relatii formale, putem recurge la seria Taylor asociata lui $Z[J]$. Astfel, putem scrie:

$$Z[J] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dt_1 \dots dt_n G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) J(t_1) \dots J(t_n) \quad (6.103)$$

si extrage din relatia de mai sus termenul dorit

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} = G^{(2)}(t_1, t_2) \quad (6.104)$$

Acum, avind principalele relatii de care avem nevoie, putem trece la discutia unui cimp.

6.6.2 Cimpul scalar liber

Pentru a usura insa exercitiul si-asa dificil, vom considera numai cimpul scalar introdus in ???. Vom incerca acum sa reconstruim comporata sa cuantica, generalizind relatiile precedente.

Mai intii si mai intii sa scriem "generating functional" pentru cimpul scalar, genralizind 6.98:

$$Z[J] = \int D\phi \exp\{i \int d^4x [L(\phi, \dot{\phi}) + J(x)\phi(x) + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2]\} \quad (6.105)$$

$$\simeq \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle \quad (6.106)$$

Sa citim mai intii aceasta relatie. Integrala din exponentiala integreaza pe tot spatiu-timpul imaginabil, de la inceputul Universului si pina la sfirsit, de la un capat al Lumii pina la celalat. Ea se efectueaza pentru o "cale" aleasa a evolutiei cimpului scalar $\phi(x)$. In Figura 6.10 sugestiv situatia.

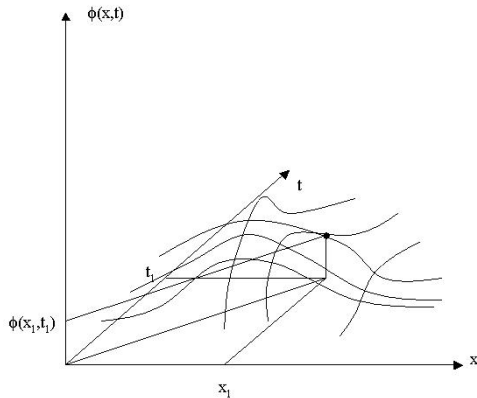


Figure 6.10: O vizualizare cum trebuie facuta integrala. O "sheet" este o singura evolutia a cimpului scalar

Aici am considerat pentru vizualizare situatia unui univers unidimensional (particula se misca numai pe axa x). Cimpul scalar clasic ϕ se exprima la un moment dat t prin functia $\phi(x, t)$: ea ne da un numar real in fiecare punct x . Posibila evolutia a acestui cimp clasic de la inceputul pina la sfirsitul Universului este reprezentata atunci printr-o "sheet" in Fig.6.10. Un asemenea "sheet" reprezinta un "drum" in integrala 6.105. Ei ii asociem deci un numar $e^{iS[J]}$, unde exponentul il calculam conform relatiei (adaptam relatia la dimensiune) ca:

$$S[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt [L(\phi, \dot{\phi}) + J(x, t)\phi(x, t) + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2] \quad (6.107)$$

$S[J]$ este practic un numar ce se calculeaza imediat ce stim "sheet"-ul $\phi(x, t)$ (pentru ca termenii din integrala sunt atunci stiuti). Frumusetea metodei "path integral" este (asa cum am vazut in ??) ca toate "drumurile" imaginabile trebuie luate in

considerare. Cu alte cuvinte, trebuie sa desenam toate "sheeturile" imaginabile (nu numai realizabile clasic, cele care satisfac ecuatia Klein-Gordon, dar si cele irealizabile, care nu o satisfac nici pe departe), sa-i calculam fiecare termenul $S[J]$, si sa adunam toti termenii ca in 6.10:

$$\sum e^{iS[J]} \simeq Z[J] = \int D\phi e^{iS[J]} \quad (6.108)$$

Dificil nu? Si toate acestea pentru o interventie "externa" data $J[x, t]$. Cu toate acestea, un calcul al integralei de mai sus in cazul cimpului liber, pentru care lagrangeanul (densitatea de fapt, pune peste tot simbolul corect L cu intorsature) este (conform ??):

$$L_0(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (6.109)$$

Calculul se poate face fie discretizind spatiul ([?]), fie facind o transformare a cimpului ([?]) (sa-l fac aici ca in Ryder, ca e mai simplu)?. Rezultatul este in final:

$$Z_0[J] = N \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \quad (6.110)$$

unde functia $\Delta_F(x-y)$ este denumit *propagatorul Feynmann*, si este definit de relatia:

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (6.111)$$

Recunoastem in partea din stinga ecuatia Klein-Gordon, la care a fost adaugat termenul imaginar $-i\epsilon$, iar in partea dreapta functia lui Dirac. In termeni matematici, vedem ca *propagatorul Feynmann* $\Delta_F(x-y)$ este solutia ecuatiei Green atasata ecuatiei Klein-Gordon, asa cum am vazut in ???. Ea este o functie care practic poate fi calculata exact, si care conduce la rezultatul cunoscut ??.

Rezultatul 6.110 este remarcabil: el nu mai contine integrarea pe toate "drumurile" imaginabile (toate suprafetele ce se pot desena in Figura 6.10). Este mai degraba o integrala ce se calculeaza direct. Cu toate acestea, intrebarea este, la ce ne foloseste? Cum putem obtine diagramele Feynmann si regulile de utilizare a acestora pornind de la aceasta integrala (in fond scopul acestei sectiuni). Raspunsul este ca trebuie sa urmarim analogia cu situatia unei particule, prezentata la inceputul sectiunii, si sa extragem interpretarile corecte. Sa generalizam deci relatia ?? pentru cimpul scalar liber:

$$\langle 0 | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | 0 \rangle \simeq \int D\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] \quad (6.112)$$

Partea din dreapta a ecuatiei nu mai pune acum mari probleme, caci ea se citește precum relatia ?? discutata mai inainte. Astfel, am intii se aleg doua puncte speciale $x_1 = \{\mathbf{x}_1, t_1\}$ si $x_2 = \{\mathbf{x}_2, t_2\}$. Apoi, pentru fiecare "drum" (fiecare suprafata din figura 6.10) calculam termenul cu exponentiala, si inmultim cu cele doua valori ale cimpului $\phi(x_1)$ si $\phi(x_2)$ in punctele date. Apoi adunam toate rezultatele, si iata rezultatul final! Dar ce este termenul din stinga relatiei precedente?

Stim ca operatorul $\phi_H(x_1)$ aplicat starii ground-state ne da functia de unda a cimpului pentru care o singura particula este

localizata in $\mathbf{x}_1$ la momentul t_1 , iar in restul Universului nu se mai afla nici o particula:

$$\phi_H(x_2)|0\rangle = |0, \dots, 0; t_2\rangle = |\mathbf{x}_2; t_2\rangle \quad (6.113)$$

unde 1 este pus in pozitia $\mathbf{x}_2$. Avem atunci:

$$\langle 0|T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)|0\rangle = \langle \mathbf{x}_1; t_1|\mathbf{x}_2; t_2\rangle \quad (6.114)$$

care este in fapt amplitudinea tranzitiei de probabilitate a unei singure particule de la x_1 (la momentul t_1) la x_2 (intr-un moment ulterior t_2).

Vedem atunci ca integrala de mai sus difera esential de cea de la singura particula, caci acolo aceasta amplitudine de probabilitate se calcula cu ??, care nu contine termenii q_1 si q_2 in fata exponentiale, ca relatia 6.112, ce contine $\phi(x_1)\phi(x_2)$. Motivul este ca cele doua situatii deifera esential prin numarul de particule. Teoria cuantica a cimpului este intrinsec o teorie a mai multor particule (in cazul nostru bozoni), iar functia de unda atasata acestui sistem de particule in fond forma complicata ?? (referinta la ecuatia multiparticula din capitolul precedent). O deducere frumoasa a relatiei 6.112 fara referinta la situatia unei singure particule este data in [?].

Acum recunoastem ca in partea din stinga ecuatiei ?? amplitudinea de tranzitie a bozonului asociat cimpului scalar, ne putem intreba cum calculam partea din dreapta. Pentru aceasta, mai facem o comparatie si o generalizare cu relatia pentru o singura partiula 6.115 (generalizarile pot fi periculoase, dupa cum tocami am vazut, inasa in lipsa unei teorii complete, ele ne dau o intelegere partiala a fenomenului, si citeodata, si cite o formula necesara). Avem deci:

$$\int D\phi\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left[\beta\int d^4xL\right] \simeq \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}|_{J=0} \quad (6.115)$$

In relatia de mai sus apare exact partea din dreapta ecuatiei ?? de care avem nevoie! Dar noi stim cit este $Z_0[J]$ (vezi relatia 6.110) si ca atare putem calcula imediat derivata. Aceasta este in o derivata functionala. In mod informal inasa, putem vedea in relatia ?? ca, daca derivam de doua ori la j ne mai ramine Δ_f . Ori daca privim la dezvoltarea Taylor 6.104 si la 6.110 putem identifica imediat aceasta derivata:

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}|_{J=0} = G^{(2)}(x_1, x_2) = \beta\Delta_F(x-y) \quad (6.116)$$

In final, avem:

$$\langle \mathbf{x}_1; t_1|\mathbf{x}_2; t_2\rangle = G^{(2)}(x_1, x_2) = \beta\Delta_F(x-y) \quad (6.117)$$

Voila! Am reusit sa calculam prin metoda functionalelor prima diagrama Feynmann pentru cimpul scalar (fac desen). Si ea este identica cu rezultatul ?? calculat direct in sectiunea ?? . Ne oprim putin pentru a recunoaste citeva elemente.

$$\xrightarrow{k} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Figure 6.11: diagrama-feynmann-2-scalar.jpg

Propagatorul Feynmann (adica amplitudinea tranzitiei in cimpului liber) este egal cu functia Green asociata ecuatiei de evolutie a cimpului clasic, asa cum vedem in 6.111si in ?? . (Acest lucru trebuie spus la toate cimpurile!). Apoi ...

6.6.3 Cimpul scalar cu interactie

Puterea si frumusetea metodei functionale sta inasa in obtinerea riguroasa a rezultatelor pentru cimpurile in interactie. Vom incerca sa schitam si noi acuma aceasta metoda, pentru cazul particulelor descrise de cimpul scalar. Acestea nu "s-au vazut" unele pe altele in cazul precedent al cimpului liber. Asa cum am discutat si in sectiunea ??, fiecare particula poate fi vazuta ca o cuanta de energie de energie $\hbar\omega$ care umple un mod de oscilatie ω . Particulele nu se "deranjeaza" unele pe celelalte, si acest lucru poate fi vazut direct in cazul clasic, unde solutiile ecuatiei Klein-Gordon sunt liniare, pentru ca inasa ecuatia Klein-Gordon este liniara. Cu alte cuvinte, daca doua functii de unda (descriind cele doua particule) ϕ_1 si ϕ_2 sunt solutii ale ecuatiei Klein-Gordon, atunci si suma lor $\phi_1 + \phi_2$ est o solutie a acestei ecuatii. Astfel, particulele pot evolua impreuna pastrindu-si functiile de unda neschimbate, si deci "nu se vad".

Putem introduce deci interactia intre particulele cimpului scalar distrugind liniaritatea ecuatiei Klein-Gordon. Sa presupunem deci ca Lagrangeanul acestui cimp nu este 6.109 ci: $L = L_0 + L_I$, unde lagrangeanul deinteractie este:

$$L_I(\phi) = -\frac{g}{4!}\phi^4 \quad (6.118)$$

ceea ce conduce la

$$L_I(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) - \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (6.119)$$

Se poate calcula atunci direct cu ajutorul ?? ca ecuatiile de evolutie ale cimpului clasic devin:

$$\square\text{descriu} \quad (6.120)$$

si deci nu mai sunt liniare, asa cum ne asteptam. Aici ne putem pune citeva intrebari. Prima ar fi, de ce ϕ^4 si nu ϕ^3 in lagrangeanul de interactie? Raspunsul este ca ca pentru ϕ^3 teoria isi creeaza probleme insurmontabile datorita nerenormalizarii ei (VERIFICA), asa cum vom discuta in sectiunea ?? . In cazul ales de noi acest lucru poate fi corectat, si de aceea acest caz chiar are aplicatii practice (spun mai devreme in ce interactii e folosita si ca ele nu sutn fundamentale).

spune de g

In al doilea rind, ne putem intreba de ce am ales interactia unui cimp cu el insusi, si nu intre doua cimpuri, asa cum ne asteptam sa fie cazul cimpului electromagnetic si cel al lui Dirac. Desigur ca noi am aels sa prezentam situatia cea mai usoara, inasa chiar in cazul cind avem mai multe cimpuri, putem privi totalitatea acestora ca un cimp mai mare cu mai multe tipuri de variabile (sa zicem cimpul "Diraco-electromagnetic" daca vreti). Interactia intre cimpurile initiale va fi atunci o interactie interna a cimpului mai mare.

In al treilea rind, vrem sa amintim in formulele ?? ?? ... de mai sus apare functia de unda "ground-state" a sistemului cu cu interactie, dar in *absenta interventiei externe* " J " (lucrul asta trebuie sa fie clar de la inceput!, si nu l-am facut clar!). Pe acesta am notat-o cu $|0\rangle$ in cazulcimpului liber. Cind inasa avem interactia L_I ne intereseaza "ground-state" al cimpului descris de lagrangeanul total $L = L_0 + L_I$. Acest ground state (starea de vid) va diferi de starea $|0\rangle$, si o vom nota cu $|\Omega\rangle$. Vremn ca sa subliniem aceasta distinctie, in mod special pentru ca ambele functii de unda $|0\rangle$ si $|\Omega\rangle$ fac parte din acelasi spatiu Hilbert care descrie sistemul de particule asociate cimpului scalar (deoarece numai ecuatia Klein-Gordon a fost modificata, nu si tipul sau de variabile).

Ne intereseaza acum din nou amplitudinea de tranzitie a unei singure particule dintr-un punct in alt punct. Desi pare surprinzator (pentru ca particula pare sa fie singura), rezultatul va fi diferit decit cel pentru cimpul liber! Motivul esential este

ca in procesul ei de tranzitie (atunci cind particula nu este observata), particula poate *genera* din vidul cosmic alte particule virtuale cu care interactioneaza! Procesul ne este cunoscut din sectiunile ???. Amplitudinea de tranzitie este, generalizind din nou 6.104 data de

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle = \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \quad (6.121)$$

Observam ca, deoarece avem starea "ground-state" Ω (chiar de data aceasta pentru intreg cimpul continind interactia), termenul din stinga reprezinta amplitudinea probabilitatii de tranzitie de la x_1 la x_2 , precum am discutat in 6.114

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle = \langle \mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}_2; t_2 \rangle \quad (6.122)$$

Problema apare desigur in forma lui $Z[J]$. Ea se scrie (adauga termenul cu ϵ sa mantioneaza ca nu-l mai pui):

$$Z[J] = \int D\phi \exp \left\{ \int d^4x \left[L_0(\phi, \dot{\phi}) + L_I(\phi) + J\phi \right] \right\} \quad (6.123)$$

Daca pentru cimpul liber aceasta poate fi simplificata (vezi 6.110), acum nu mai este cazul, datorita termenului aditional L_I . Singura cale posibila este dezvoltarea in termeni ai seriei Taylor. La prima vedere acest lucru nu ne ajuta prea mult, caci nu putem decit scoate decit termenul de interactie in afara exponentialei. Cu toate acestea, termenul cunoscut $Z_0[J]$ in 6.110 poate fi separat prin urmatoarea formula magica:

$$Z[J] = \exp \left[\int d^4z L_I \left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] Z_0[J] \quad (6.124)$$

Ea ne spune ca din lagrangeanul deinteractie trebuie sa construim intii un operator, inlocuind fiecare aparitie a lui ϕ in acesta cu $(1/i)(\delta/\delta J(z))$. Operatorul astfel obtinut trebuie apoi integrat in tot Universul, si apoi introdus in exponentiala, pentru a crea aoperaotorul final ce actioneaza asupra lui $Z_0[J]$. Demonstratia completa a acestei formula poate fi gasita in [?]. Pe noi ne intereseaza desigur sa o aplicam in cazul cimpului scalar. Avem deci:

Atentie, [?] nu foloseste constanta de normalizare, care apare in [?]! (vezi 6.82 din ryder).

$$L_I \left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) = -\frac{g}{4!} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \quad (6.125)$$

Apoi folosim faptul ca termenul in exponentiala este mic (ceea ce speram de fapt), pentru a folosi aproximatia $e^x \simeq 1 + x$ in 6.126. Obtinem atunci:

$$Z[J] = \left[1 - \frac{g}{4!} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \right] Z_0[J] \quad (6.126)$$

Nu ne ramine acum decit sa evaluam acest termen folosind expresia cunoscuta a lui $Z_0[J]$ din 6.110. Prima derivata se calculeaza folosind trucul (sa-l spun mai inainte! -> derivate formal- pun delta - integrez dupa z si apoi pune-l la exercitiu!)) ??

$$\left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) Z_0[J] = -Z_0[J] \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \quad (6.127)$$

Vezi de factorul la $Z_0[J]$. Si apoi succesiv (vezi exercitiul) se arata in final ca ca:

$$\left(\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 Z_0[J] = Z_0[J] \left\{ -3\Delta_F^2(0) + 6\beta\Delta_F(0) \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right] + \left[\int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right]^2 \right\} \quad (6.128)$$

Acum, stiind functionala generala (de fapt aproximatia ei) $Z[J]$, putem inlocui in ?? pentru a calcula amplitudinea de tranzitie a unei apticule. Calculul se face tot in maniera ?? (si aici dau exercitiu), iar in final se inlocuieste $J = 0$. Se obtine atunci in prima aproximatie (verifica ca Δ_F e impara, pentru ca am scos un minus.):

$$\tau(x_1, x_2) = \beta \Delta_F(x_1 - x_2) + \quad (6.129)$$

$$\int d^4z \left[\Delta_F(z - x_1) \frac{g}{2} \Delta_F(0) \Delta_F(x_2 - z) \right] \quad (6.130)$$

Formula de mai sus este cea dorita de noi, si care contine ingredientele principale ale diagramelor Feynmann in cazul cimpurilor cu interactie.

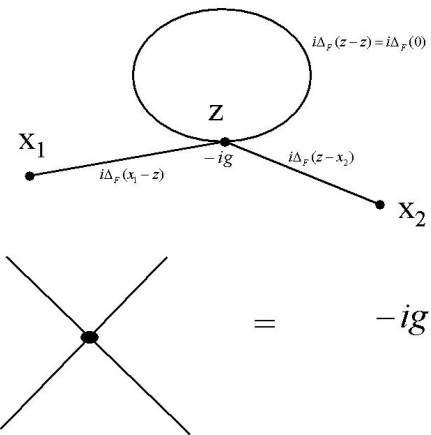


Figure 6.12: diagrama-feynmann-4-scalar.jpg

Daca o privim atent, o putem citi in felul urmatoar (pune i-urile bine!). Primul termen ne da probabilitatea de tranzitie ?? in lipsa interactiei $\beta \Delta_F(x_1 - x_2)$. La acesta se adauga insa un alt termen care este o integrala (o suma) dupa toate evenimentele posibile din Univers. Nu numai ca particula poate merge direct de la x_1 la x_2 (primul termen), dar ea se poate deplasa mai intii la un punct intermediar z (vezi Fig.6.12). Amplitudinea acestei tranzitii initiale este data de propagatorul Feynmann intre cele doua situatii: $\beta \Delta_F(z - x_1)$. In punctul z particula poate crea o alta particula virtuala, care traverseaza spatiu-timpul pentru a se intoarce in acelasi punct si acelasi moment in care a fost creata! Amplitudinea de probabilitate a acestui posibil proces de creare este ig (din formula precedenta). Dar desigur ca si deplasarii particulei virtuale trebuie sa-i atribuim o amplitudine de probabilitate, care nu este decit propagatorul Feynmann intre cele doua pozitii: $\beta \Delta_F(z - z) = \beta \Delta_F(0)$, si care se recunoaste in 6.129. In final este tranzitia de la z la x_2 cu amplitudinea $\beta \Delta_F(x_2 - z)$. In formula 6.129 se vede cum toate aceste amplitudini se inmultesc conform principiului vechi al lui Huygens pentru fiecare z , dupa care se insumeaza dupa toti z posibili.

Observam ca in toate aceste formula am folosit z , care este un *eveniment* $z = \{\mathbf{z}, t\}$. Este desigur remarcabil cum in aceste formule obtine particula care traverseaza inainte si inapoi in timp, care si cum timpul ar avea o structura spatiala! Prioritatea aceasta este intrinseca teoriilor cuantice de cimp (paritate T^2), si ea se regaseste in discutia noastra despre pozitroni, care sunt electroni traversind timpul in sens invers din sectiunea ???.

In finalul acestei introduceri despre metoda functionala, sa reamintim ca cimpul scalar trebuie sa fie un cimp de bozoni, si nu de fermioni (vezi sectiunea ??). In cazul cimpurilor fermionice (ca cel al lui Dirac pentru electroni) metoda functionala se modifica intr-un punct elementar. (spun de integrale Grassmann ...)

6.7 Renormalizarea

In sectiunile precedente am vazut cum se cuantizeaza o teorie a cimpului. Cu ajutorul diagramelor Feynmann, am calculat chiar o sectiune eficace de imprastiere ??, si am verificat-o cu experimentul. Ruzulatatul a fost incurajator, si acum nu ne-ar ramine decit sa incercam sa calculam alte imprastieri sau efecte cuantice, folosind si diagramele de ordin superior, ca cele din Fig.6.129. Ne-am astepta ca, cu cit folosim mai dulte diagrame (deci cu luam in calcul mai multe procese posibile), sa obtinem rezultate din ce in ce mai exacte.

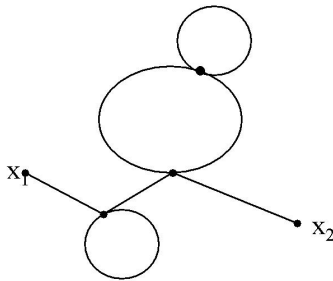


Figure 6.13: diagrama-feynmann-mare-scalar.jpg

Dezastru insa! Inercind sa calculam de exemplu termenul $\beta\Delta_F(0)$ (vezi ca aici e reprezentarea moment) care apare in 6.129 vom vedea ca el este *infini*!. Astfel, am vazut in ?? (verificind direct in ecuatia Klein-Grodon) ca forma propagatorului in reprezentarea momentului este:

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{-\beta q x}}{q^2 - m^2 + \beta\epsilon} \quad (6.131)$$

Atunci

$$\Delta_F(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{1}{q^2 - m^2 + \beta\epsilon} \quad (6.132)$$

si, pentru q foarte mare, putem aproxima $q^2 - m^2 \simeq q^2$, si deci :

$$\Delta_F(0) \longrightarrow \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \sim \int d^2q \rightarrow \infty \quad (6.133)$$

De unde ne asteptam ca sa obtinem un rezultat mic (pentru ca am fofosit teoria perturbatiilor), obtinem un rezultat infinit, dat practic de particulele "foarte" virtuale, adica acelea pentru care "mass shell" q^2 se indeparteaza foarte mult de masa observabila m .

Un asemenea calcul desigur ca nu ne poate decit paraliza in primul moment. O paralizie care a intirziat si recunoasterea teoriei cuantice a cimpului cu citva ani buni. Problema este mare si, sa o recunoastem din primul moment, inseamna ca teoria, asa cum am construit-o pina acum, este *gresita* undeva! In sectiunile urmatoare vedea unde este greseala, si vom renaste teoria din propria cenusa. Practic, solutia noastra va

fi sa construim un *alt lagrangean* pentru fiecare teorie (electromagnetica, scalara, Dirac), in asa fel incit *rezultatele sa fie finite*! In rest, metoda de constructie a teoriei cuantice a cimpului prezentata pina acum o vom pastra intacta.

6.7.1 Exemplu de teorie efectiva: Lichidul Fermi

Pentru a intelege cum de apar infinitati, sa ne intoarcem la dicutia despre vidul cosmic, care numai vid nu e. O prima implicatie a acestuia, repede maturata sub usa, este valoarea infinita a "energiei de zero". Am vazut in relatia ?? cum fiecare mod de oscilatie are, datorita cuantificarii, o energie de zero, si cum suma acestora este infinita. Am mentionat insa ca noi masuram in experiment numai tranzitii intre nivele de energie, si deci valoarea totala a acestei energii a vidului nu va aparea in masuratori, si deci poate fi "pusa deoparte".

Sa privim insa mai atent acest vid cosmic. Dupa cum vedem din diagrama 6.129 de exemplu, o particula nu se deplaseaza "nestingherita" de la un punct la altul. Este probabil ca in decursul acestei deplasari ea sa creeze alte particule cu care sa interactioneze. Mai mult si particulele create pot la rindul lor sa creeze si alte particule, si tot asa mai departe (vezi Fig.??fig:diagrama-feynmann-mare-scalar).

Putem spune ca de fapt particula nu se deplaseaza intr-un vid, ci intr-o mare de particule *virtuale*. Ba chiar mai mult, putem spune de particule *de acelasi tip*, stergind distinctia dintre particule *virtuale* si *reale* folosita pina acum. Caci, sa nu uitam, si particulele virtuale si cele reale sunt descrise de acelasi propagator, doar ca particulele reale au "mass shell" egala cu masa observabila $q^2 = m^2$. Ori trecerea aceasta de la particule virtuale la particule reale e un proces continuu. In fond cu cit "mass shell"-ul particulei este mai apropiat de m^2 cu atit spunem ca particula este mai observabila. Concluzionind, putem spune ca particule nu se deplaseaza in vid, ci intr-o mare de particule create de ea. Aceasta observatie schimba substantial datele problemei, si nu este de mirare ca comportarea particulei initiale se poate schimba *drastic* in urma acestor interactii.

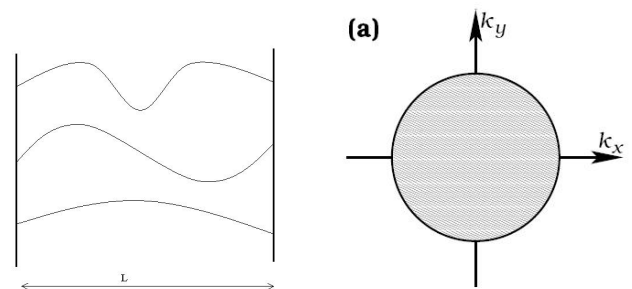


Figure 6.14: Stinga: in spatiu; Dreapta: in k

Un exemplu de astfel de situatie intilnit in practica, este cel al electronilor dintr-un *metal*. Comportarea suprinzatoare a acestora a fost petru mult timp un mister. Ce se intimpla? Intr-un metal se gasesc foarte multi electroni care contribuie la conductia electrica. Practic fiecare atom din metal contribuie cu cite cel putin un electron. Cum distanta dintre atomi este de ordinul a citiva $\text{\AA}$, aceasta va fi si distanta medie dintre electronii de conductie. Ne asteptam atunci ca, in miscarea lor, acesti electroni sa se tot ciocneasca unii de altii, fiind asa de apropiati unii de altii. In practica insa, surprinzator, electronii circula distante imense fara a se simti unii pe altii. Practic, singurele imprastieri pe care ei le simt sunt cu cele ale atomilor de impuritati, care exista mereu in metalele reale, datorita manufacturarii lor imperfecte.

Pentru a intelege o astfel de comporantare, sa mentionam principalele caramizi de baza ale teoriei gazului Fermi, teoria electronilor in metale care nu interactioneaza intre ei. Incepem cu aceasta situatia extrema (electroni care nu interactioneaza) in opozitie cu ce ne-am astepta (electroni care interactioneaza mult pentru ca sunt apropiati) pentru ca este mai aproape de situatia practic.

In cazul in care electronii de conductie nu interactioneaza, nivele de energie pe care acestia se aseaza se deduc usor, precum in sectiunea ?? pentru cimpul electromagnetic. Practic, acesti electroni sunt constrinsi sa existe intr-o bucata de metal, de ordinul a citiva centimetri sa zicem. Daca consideram metalul un cub perfect de latura L , atunci functiile de unda posibile pot fi deduse (vezi exercitiul ??) ca fiind:

$$\phi_{m,n,l}(x,y,z) \sim \sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) \sin\left(l\frac{\pi}{L}z\right) \quad (6.134)$$

Se vede din formula de mai sus ca electronul are valori discrete ale proiectiei momentului de-a lungul celor 3 axe:

$$k_x = m\frac{2\pi}{L}, k_y = n\frac{2\pi}{L}, k_z = l\frac{2\pi}{L}, m, n, l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.135)$$

Practic, starile de energie posibile sunt descrise de numerele cuantice m, n, l , fiecare stare avind energia

$$E_{mnl} = \hbar^2/2m(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (6.136)$$

In stinga Fig.6.14 prezentam sugestiv functiile de unda ale primelor nivele de energie. In dreapta aceleasi figuri incercam sa ordonam aceste nivele de energie dupa valoarea momentului k , printr-un desen sugestiv in spatiul momentului. Nu este de greu de vazut avantajul unei asemenea reprezentari, caci nivele de energie se ordoneaza asa de frumos dupa k (vezi 6.135). Astfel, impartim "spatiul" momentului in cubulete mici de dimensiune $2\pi/L$. Un astfel de cubulet se asociaza atunci unui singur nivel de energie, prin valorile sale m, n, l . Cubuletele din centru vor avea energia cea mai mica, iar cele dinspre margini energia mai mare. Putem umple acum aceste nivele de energie cu electroni in ordinea cresta, incepind de la centru, care are energia cea mai mica conform 6.136. Trebuie sa punem desigur cite doi electroni pe acelasi nivel, cu spini opusi, conform principiului lui Pauli.

Facind acest exercitiu, vom umple o sfera ca in dreapta Fig.6.14. Raza sferei este data de numarul total de electroni. Daca consideram ca atomii sunt asezati la o distanta a unul de celalalt, este usor de calculat ca aceasta raza va fi

$$k_F = \frac{\sqrt[3]{3\pi^2}}{a} \quad (6.137)$$

Suprafata care are aceasta raza in "spatiul" momentului se numeste suprafata Fermi, iar nivele de energie care sunt pe ea se numesc nivele de energie Fermi. Recapitulind, toate nivele de energie din interiorul suprafetei Fermi sunt ocupate cu 2 electroni, iar cele din afara ei sunt goale.

Intrebare: este limita superioara a memoentului data de a ? Adica am si o limita la integrare? (asa credeam...)

Situatia seamana acum cu teoria lui Dirac a spatiului plin de electroni discutat in sectiunea ??, pentru ca in ambele situatii nivele de energie sunt umplute cu electroni pina la un nivel de energie anume. Situatie se aseamana si mai mult daca vedem ce se intimpla cu o excitatie in cazul gazului Fermi (vezi Fig.6.15).

Astfel, o excitatie va "trasfera" un electron din interiorul suprafetei Fermi in afara lui, lasind in urma un "gol", precum am vazut in teoria lui Dirac. Electronul excitat trebuie obligatoriu sa iasa in afara suprafetei Fermi, caci toate nivelele din interiorul acesteia sunt complet ocupate! In mod normal,

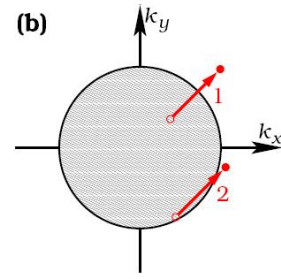


Figure 6.15: fermi-liquid-k. figura e gresita!

la o temperatura T fiecare electron primeste energia aproximativa kT . Deoarece aceasta energie este aproximativ de 100 de ori mai mica energia Fermi, numai electronii apropiati de suprafata Fermi, intr-o banda de o largime mica, vor putea fi excitati, conform discutiei precedente.

Sa presupunem acum ca unul dintre acestia, de moment $\mathbf{p}$, si aflat in banda de energie kT (avind deci $|E_{\mathbf{p}} - E_F| \leq kT$) vrea sa se imprastie de un alt electron din marea Fermi, care are moment $\mathbf{k}$. In urma ciocnirii, cei doi vor avea momentele $\mathbf{p}'$ si $\mathbf{k}'$. Conservarea energiei ne impune ca $E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{k}'}$.

In urma procesului inasa, electronul initial trebuie sa se mute pe un nivel de energie fie din afara sferei Fermi, fie din banda de energie kT , caci toate celelalte nivele de energie din interior sunt ocupate cu electroni. Avem atunci si $E_{\mathbf{p}'} \geq E_F - kT$. In consecinta, putem scrie

$$E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'} = E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}} \leq 2kT \quad (6.138)$$

si deci $E_{\mathbf{k}} \geq E_{\mathbf{k}'} - 2kT$. Pe de alta parte, si electronul secund se va misca pe un nivel de energie fie din afara sferei Fermi, fie din banda de energie kT , deci $E_{\mathbf{k}'} > E_F - kT$. Combinind aceste doua relatii avem:

$$E_{\mathbf{k}} \geq E_F - 3kT \quad (6.139)$$

Cu alte cuvinte, primul electron nu se poate imprastia (datorita principiului lui Pauli) decit de electronii din banda de energie $3kT$ din jurul suprafetei Fermi! Deoarece aceasta este inasa mica, numarul acestora este extrem de redus. Practic, electronul initial in miscare nu "vede" marea masa de electroni in care se misca. Aceasta este esenta teoriei *lichidului Fermi*.

Valori rezonabile pentru metale conduc la "mean free path" ale electronilor de ordinul a centrimetrilor la temperaturi joase (de ordinul a citorva K). Cu alte cuvinte, electronii circula citiva centrimetrii pina sa se "vada" intre ei, desi ei sunt situati "fizic" la distante de citiva Angstromi! Aceasta comportare neobisnuita face posibila intr-o faza ulterioara chiar transformarea metalelor din conductori obisnuiti in *supraconductori* la temperaturi foarte joase, cind nici impuritatile nu se mai vad, iar electronii circula cu adevarat liberi de la un capat la altul al metalului. (sa zic citeva cuvinte?)

Cu toate acestea, la o privire mai adinca, prezenta electronilor "nevazati" din marea Fermi nu lasa neschimbate proprietatile electronilor de transport. Una dintre consecintele cele mai importante este modificarea *masei* sub care acestia se observa. Sa ne amintim ca masa este o masura a inertiei. Impingem cu o forta si masuram cit de repede accelereaza. Daca impingem de exemplu o minge intr-un fluid, ea va accelera mai greu datorita faptului ca trebuie sa dea fluidul la o parte. Cu alte cuvinte, masa mingii masurata in fluid va fi mereu mai mare decit cea masurata in vid. Cam acelasi lucru, desi modificat, se intimpla cu electronii in cristale in general. In miscarea lor ei pot capata acceleratii mai mari sau chiar mai mici decit cele in vid (corespunzatoare aceleiasi forte), datorita interactiilor dintre ei, sau cu atomii din cristal. Corespunzator, masa

masurata in cristale poate fi mai mare sau mai mica. Raportul dintre masa masurata in cristal m si cea in vid m_0 se numeste masa efectiva $m^* = m/m_0$ si poate avea valorile de ordinul unitatilor in metale (verifica).

citeste articolele lui Bob Laughlin !

Sa recapitulam acum citeva din proprietatile lichidului Fermi care sunt relevante teoriilor cuantice ale cimpului:

- excitatiile din masa Fermi formeaza electroni liberi si goluri (precum in teoria lui Dirac pentru pozitroni). Miscarea acestora in metal poate fi descrisa printr-o teorie efectiva (o teorie aproximativa mai simpla).
- In metale, particulele (goluri sau electroni) capata proprietati diferite de cele ale particulelor originale: alta masa, alta sarcina, alt "free mean path". Chiar interactia electromagnetica dintre particule este modificata datorita "screening"-ului. Cu alte cuvinte, daca masuram proprietatile "electronului" in cristal, obtinem valori diferite decat cele initiale.
- Pentru metale se pot folosi cu succes tehnicile Diagramelor Feynmann, pentru ca nu avem probleme cu infinitatile: stim masele si proprietatile particulelor originale (electronii), stim si limitele de integrare, care sunt finite ($q_{min} = 2\pi/L$ si $q_{max} = 2\pi/a$) (VERIFICA).

6.7.2 Lagrangeanul renormalizat pentru cimpul scalar

Sectiunea precedenta, desi nu legata direct de teoria cuantica a cimpului ne-a invatat un lucru important: proprietatile unei particule aflate intr-o mare de alte particule se pot modifica substantial. Aceasta mare de particule (de data aceasta *virtuale*) exista si in teoria cuantica a oricarui cimp, asa cum am mentionat la sfirsitul sectiunii ???: orice particula ce se deplaseaza in "vid" creeaza si distruge o gramada de alte particule "virtuale". Electronul de exemplu in miscarea sa poate crea nenumarati electroni si pozitroni virtuali cu care sa interactioneze continuu. De aceea nu ne asteptam ca proprietatile electronului (masa, sarcina) masurate in aceasta mare de particule virtuale, sa fie identice cu cele "originale".

Dar sa ne oprim un moment, aici aici este cheia intregii povesti a renormalizarii. Valoarea "originala" a masei electronului presupusa de noi a fost $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$. Acum ne asteptam ca in masuratori sa obtinem o alta masa, sa zicem m' , datorita interactiei cu marea de particule virtuale. Ori noi am ales valoarea "originala" $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ tocmai in urma masuratorilor! *Aici am gresit!* Valoarea masurata trebuie sa fie m' . Cu alte cuvinte $m' = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ iar valoarea lui m trebuie sa o deducem ulterior in asa fel incit sa m' sa rezulte cel masurat $m' = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$.

Nu este de mirare atunci ca acelasi lucru trebuie sa-l facem si pentru alte proprietati ale electronului, ca sarcina electrica. Trebuie sa alegem atunci valoarea originala *nestiuta* e in asa fel incit valoarea masurata sa fie $e' = 1.6 \cdot 10^{-19} C$. Si mai observam ca valoarea originala numai putem s-o ghicim, si *nicidecum* masura, aici nu avem cum iesi din lumea in care ne aflam, si care este o mare de particule virtuale!

Dar cum putem identifica din lagrangean care sunt valorile pe care ni le vor oferi masuratorile? Cu alte cuvinte, stiind valoarea "originala" a masei m_B si forma Lagrangeanului, cum putem calcula ce masa vom obtine in urma masuratorii? Problema, desi delicata in sine, are din fericire un raspuns direct daca privim amplitudinea tranzitiei de la un punct la celalalt. Pentru cimpul scalar, aceasta a fost obtinuta sub forma 6.129. Daca folosim in schimb transformata Fourier ??, obtinem rezultatul

(calculeaza, cred ca iese in aproximatie):

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 - m^2 - \frac{1}{2}ig\Delta_F(0) + \beta\epsilon} \quad (6.140)$$

Sa comparam formula de mai sus (care ne da amplitudinea aproximativa de tranzitie in prezenta interactiei), cu relatia ?? (care reprezinta amplitudinea de tranzitie in lipsa interactiei). Practic, putem privi amplitudinea de tranzitie de mai sus (in prezenta interactiei) ca pe cea a unei teorii cuantice a cimpului fara interactie, in care masa particulei ar fi $m'^2 = m^2 + ig\Delta_F(0)/2!$ Cu alte cuvinte *masa experimental masurata* este:

$$m'^2 = m^2 + \frac{1}{2}ig\Delta_F(0) = m^2 + \delta m^2 \quad (6.141)$$

Faptul ca masa masurata este diferita de "bare mass" nu ne mai surprinde acum, in schimb continua sa ne ingrijoreze forma de mai sus, pentru ca $\Delta_F(0) \rightarrow \infty$, asa cum am vazut in 6.133. Putem in schimb incepe sa speculam deja pe marginea formei de mai sus aici, daca vrem ca masa masurata m' sa fie finita, atunci este musai ca m sa fie infinit in asa fel incit sa compenseze valoarea infinita a lui $\Delta_F(0)$. Dar mai departe nu putem merge pina nu avem o forma compacta pentru $\Delta_F(0)$.

In literatura de specialitate exista citeva metode desintilnite pentru normalizarea formei infinite a lui $\Delta_F(0)$. Prima este sa introducem pur si simplu o limita superioara a vectorului de unda q_{max} in integrariile din spatiul momentului. Am vazut ca acest lucru a fost justificat (VERIFICA) in cazul lichidului Fermi, pentru ca atomii se afla la o distanta a unui de ceilalti, obtinind $q_{max} = 2\pi/a$. O asemenea limita exista in schimb in mod natural daca utilizam dimensiunea Planck Λ_P a distantei. Practic aceasta este marimea absoluta a distantei care se poate obtine folosind constantele fundamentale ale naturii:

$$\Lambda_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-35} m \quad (6.142)$$

Valoarea aceasta a distantei este foarte mica, inca innacesibila in experiment. Se crede ca aceasta este distanta la care fenomenul gravitational vor fi unificate cu cele cuantice (vedem ca in formula intra si constanta gravitationala G si cea cuantica $\hbar$). Despre acest aspect vom dicuta mai pe larg in capitolul ??. Valoarea maxima a vectorului de unda este data atunci de $q_{max} = 2\pi/\Lambda_P$.

O alta metoda a fost introdusa de Pauli si Villars, si consta in introducerea in Lagrangean a unui cimp aditional de o masa mare M , in asa fel incit rezultatele masuratorilor sa converga in limita $M \rightarrow \infty$

In aceasta sectiune noi vom mentiona *metoda dimensionala*. Ideea de baza este urmatoarea. Stim ca, indiferent ce valori "originale" finite alegem pentru particula, obtinem un rezultat infinit pentru anumite integrale. Daca in schimb am avea imaginatia (si indrazneala!) sa definim lagrangeanul intr-un spatiu de dimensiune putin diferita de 4 (deci un spatiu care nu are un numar intreg de dimensiuni) am avea surpriza sa constatam ca multe din aceste integrale sunt *finite*! Daca aceasta este situatia, atunci sa calculam aceste integrale intr-un univers de dimensiune oarecare $d = 4 + \epsilon$ unde ϵ este un numar foarte mic. Apoi sa alegem $\epsilon \rightarrow 0$ si aceasta va separa vizibil "infinitatea" din integrale. In termenii matematicii se spune ca aceste integrale vor avea un *pol* pentru $\epsilon = 0$.

Pentru a fi mai expliciti, sa incercam aceasta procedura pentru cazul cimpului scalar (aici e luat direct din [?]). In primul

rind, trebuie sa generalizam lagrangeanul pentru d dimensiuni ale Universului. Pentru inceput consideram d un numar natural. Formal, il putem scrie pe acesta exact ca pe cel original 6.119, inlocuind doar notatia lui g cu g' :

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{g'}{4!} \phi^4 \quad (6.143)$$

Sa privim acum atent unitatile de masura, si in primul rind cu actiunea care trebuie sa nu aiba nici o dimensiune (daca consideram alegera $\hbar = 1$ si $c = 1$ desigur, lucru folosit aici mereu), pentru ca apare in exponentul integralei de drum. Cum

$$S = \int d^d x L \quad (6.144)$$

avem ca unitatea de masura a densitatii de lagrangean este $[L] = L^{-d}$, unde L este unitatea de lungime. Din termenul de energie cinetica (primul) avem ca $[L] = [\phi]^2/L^2$, si deci dimensiunea functiei de unda ϕ trebuie sa fie $[\phi] = \sqrt{[L]} * L = L^{1-d/2}$ (nu iese, verifica). Privind acum la ultimul termen noului Lagrangian 6.143 obtinem unitatea de masura a constatei de cuplaj $[g'] = [L]/[\phi]^4 = [L]^{d-3}$. Cind $d = 4$ avem $g' = g$ si unitatea de masura a lui g este $[g] = L$. Vrem sa folosim acest lucru, redefinind $g' = \mu^{4-d} g$. Unitatea de masura a lui μ se verifica imediat ca este $1/L$ (verifica!) adica o unitate de masa in sistemul $\hbar = 1$ si $c = 1$ folosit. In final, lagrangeanul in d dimensiuni se scrie:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{\mu^{4-d} g}{4!} \phi^4 \quad (6.145)$$

Sa incercam sa calculam direct integrala contributia divergenta a masei δm^2 la masa masurata experimental (vezi formula 6.141) asociata acestui lagrangian, folosind pentru d tot un numar natural. Ea devine atunci (ma incurca ca Reyder nu baga i in formula 9.15!. eu sa-l pun in dreapta ecuatiilor):

$$\delta m^2/i = \frac{\mu^{4-d} g}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi^d)} \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (6.146)$$

Daca d este un numar natural oarecare, se poate arata (SI ARAT!) ca integrala de mai sus poate fi scrisa ca

$$\delta m^2/i = -\frac{ig}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2} \right)^{2-d/2} \int_0^\infty t^{-d/2} e^{-t} dt \quad (6.147)$$

Integrala din dreapta este cunoscuta matematicienilor sub numele de functia Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (6.148)$$

Aceasta functie se poate calcula numeric, si rezultatul ei este prezentat in Figura 6.16.

Obtinem atunci:

$$\delta m^2/i = -\frac{ig}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2} \right)^{2-d/2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \quad (6.149)$$

Observam din Fig.6.16 ca pentru $d = 4$ obtinem o valoare infinita $\Gamma(-1)$. Cu toate acestea, daca ne-am lasa imaginatia sa zburde putin, si sa adoptam o valoare a lui d diferita de un numar natural, functia Gamma $\Gamma(1 - d/2)$ va lua valori finite!

Acum ne putem intreba desigur daca un Univers poate avea o dimensiune care nu e numar natural. Chiar daca in matematica fractalilor se pot construi obiecte de dimensiuni altele decat

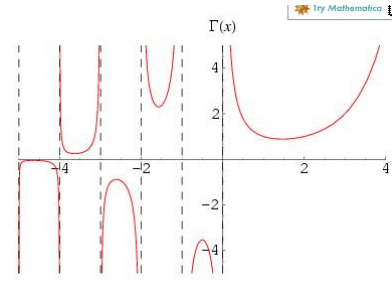


Figure 6.16: functia gamma: <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>

numere naturale, nu am vrea sa facem o asemenea supozitie despre Universul nostru. Si nici *nu trebuie* sa o facem! In fond, ceea ce construim noi este o *unealta matematica* care ne va ajuta la constructia unui Lagrangean finit, din care vom extrage apoi rezultatele finite ale masuratorilor. Semnificatia fizica a calculelor pe care noi le facem intr-un Univers de dimensiune d este redusa substantial daca ne reamintim ca exista si alte metode de a renormaliza teoria cuantica a cimpului (impunerea unei limite maxime in integrala, adaugarea unor particule fictive, etc.), toate conducind la acelasi rezultat.

Dupa cum am mentionat, functia Gamma se poate calcula numai numeric. Cu toate acestea, ea se poate aproxima analitic in apropierea polilor (numerele intregi negative unde tinde la infinit). In jurul lui $z = -1$, ea devine:

$$\Gamma(-1 + \epsilon/2) \simeq -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma \quad (6.150)$$

unde $\gamma = 0.577$ este numarul lui Euler-Mascheroni.

Pe de alte parte, si termenul din partea din stanga formaie 6 se poate aproxima ca:

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2} \right)^{2-d/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2} \right) \quad (6.151)$$

In final obtinem pentru contributia la masa experimentală δm^2 :

$$\frac{\delta m^2}{i} = \frac{g\Delta_F(0)}{2} = \frac{igm^2}{16\pi^2\epsilon} + \frac{igm^2}{32\pi^2} \left[1 - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2} \right) \right] \quad (6.152)$$

Minunea s-a produs! Am reusit sa separem termenul care este responsabil pentru divergenta integralei originale $g\Delta_F(0)$. Sa ne reamintim acum (vezi 6.141) ca patrutul masei masurate experimental m_{exp}^2 este o suma a "bare mass" m^2 si a contributiei δm^2 . Pentru o valoare finita a "bare mass" m , masa experimentală m_{exp} devine infinita, datorita divergentei din contributia δm^2 . Pe de alta parte, asa cum am discutat mai devreme, noi putem alege pentru "bare mass" m ce valoare vrem noi, in asa fel incit masa experimentală sa fie exact cea masurata.

Nu este greu de vazut atunci ca valoarea de care avem nevoie pentru "bare mass" este:

$$m^2 = m_{exp}^2 + \frac{gm_{exp}^2}{16\pi^2\epsilon} + \frac{gm_{exp}^2}{32\pi^2} \left[1 - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m_{exp}^2} \right) \right] \quad (6.153)$$

Ne putem convinge imediat ca aceasta conduce precis la valoarea masei efective m_{exp} . Astfel, trebuie sa calculam masa efectiva adunind la "bare mass" m^2 contributia 6. Neglijind termenii care apar in g^2 , contributia aceasta devine:

$$\delta m^2 = -\frac{gm_{exp}^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{gm_{exp}^2}{32\pi^2} \left[1 - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m_{exp}^2} \right) \right]$$

Avem atunci ca masa efectiva este:

$$m_{eff}^2 = m^2 + \delta m^2 = m_{exp}^2 \quad (6.154)$$

termenii ceilalti anihilindu-se precis! Cu alte cuvinte, masa efectiva, care va rezulta in urma masurarii, va fi chiar m_{exp} . Putem sistematiza rezultatul pentru a construi Lagrangeanul de care avem nevoie. Astfel, pornim de la Lagrangeanul care credeam ca este cel corect:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_{exp}^2 \phi^2) - \frac{\mu^\epsilon g_{exp}}{4!} \phi^4 \quad (6.155)$$

Acestuia ii adaugam termenul:

$$\delta L_1 = -\frac{\delta m^2}{2} \phi^2 \quad (6.156)$$

Se vede acum, privind coeficientul termenului ϕ^2 , ca suma acestora ne va da un Lagrangean descriind o particula de masa "bare" $m^2 = m_{exp}^2 + \delta m^2$ asa cum ne-am dorit.

Integrala $\Delta_F(0)$ (vezi ??) este numai una din integralele care sunt divergente, si care conduc la rescrierea lagrangeanului pentru a obtine o teorie lipsita de divergente. In cadrul cimpului scalar se poate arata (vezi [?]) ca mai exista doua astfel de integrale. Un studiu sistematic al acestora este insa dincolo de scopul nostru (dai la exercitiu cea de-a doua). De aceea numai le amintim aici:

$$\frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} = \frac{ig^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2 \epsilon} + t \quad (6.157)$$

$$desen = \quad (6.159)$$

Cu ajutorul primei integrale se arata apoi ca amplitudinea de probabilitate asociata unui proces de interactie $\Gamma_{(4)}$ devine:

$$\Gamma_{(4)}(p_i) = desen.316ryder = -i\mu^\epsilon \left(g - \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon} \right) + finit \quad (6.160)$$

Fie g_{exp} valoare masurata a coeficientului de interactie (si care apare in lagrangeanul initial ales incorect de noi 6.155), definit ca $\Gamma^{(4)}(0)/(-i\mu^\epsilon)$. In principiu, daca nu ar fi existat termenii datorati "loop"-urilor, am fi obtinut doar g in paranteza din relatia de mai sus, si cele doua valori vor fi fost egale. In prezenta interactiei particulei cu vidul cosmic, valoare masurata (valoare efectiva) va fi:

$$g^* = g - \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon} + finit \quad (6.161)$$

Se vede atunci ca putem alege coeficientul interactie "bare":

$$g = g_{exp} + \frac{3g_{exp}^2}{16\pi^2\epsilon} + finit \quad (6.162)$$

care conduce la o valoare efectiva $g^* = \Gamma^{(4)}(0)/(-i\mu^\epsilon) = g_{exp}$, adica exact cea masurata experimental. In relatia de mai sus am eliminat termenii in g^2 . Cum coeficientul de interactie

g apare in lagrangean ca coeficient al lui ϕ^4 , vedem ca putem introduce modificare de mai sus adaugind la lagrangeanul 6.155 termenul:

$$\delta L_2 = -\frac{g_{exp}\mu^\epsilon}{4!} \frac{3g_{exp}}{16\pi^2\epsilon} \phi^4 = -\frac{g_{exp}\mu^\epsilon}{4!} B\phi^4 \quad (6.163)$$

Un studiu celei de-a treia integrale ([?]) ne va conduce la o redefinire a functiei de unda, care se poate introduce in lagrangean adaugind un termen de forma:

$$\delta L_3 = \frac{A}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \quad (6.164)$$

In final, adaugind cei trei termeni 6.156, 6.163 6.164 la lagrangeanul care credeam noi initial ca este corect 6.155 obtinem valoarea noului Lagrangian care este corectat de divergente:

$$L_{renorm} = L + \frac{A}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 - \frac{B\mu^\epsilon g_{exp}}{4!} \phi^4 \quad (6.165)$$

Acesta se poate rescrie sub o forma asemanatoare celei initiale:

$$L_{renorm} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_B \partial^\mu \phi_B - m_B^2 \phi_B^2) - \frac{\mu^\epsilon g_B}{4!} \phi_B^4 \quad (6.166)$$

daca folosim notatiile:

$$\phi_B = \sqrt{Z_\phi} \phi, \quad Z_\phi = 1 + A, \quad (6.167)$$

$$m_B = Z_m m, \quad Z_m = \sqrt{\frac{m^2 + \delta m^2}{m^2(1+A)}} \quad (6.168)$$

$$g_B = Z_g g, \quad Z_g = \frac{1+B}{(1+A)^2} \quad (6.169)$$

Atentie, forma de mai sus este desigur numai o notatie (explica pericolul ca sa nu ia forma asa cum e, si sa zica de exemplu ca ϕ_B este cimp, caci termina cu ala nerenormalizat!)

Lagrangeanul de mai sus este cel cautat. Mentionam din nou ca el trebuie folosit *numai* pentru situatiile in care folosim diagramele de ordin g , si nu de ordine superioare. Daca vrem sa fim mai precisi, intr-un ordin superior, atunci trebuie sa recalculam acest lagrangian. In ordin g insa, el va conduce la rezultate finite, iar in plus asigura ca valorile efective ale masei si interactiei m^* si g^* sunt chiar cele masurate experimental $m^* = m_{exp}$, $g^* = G_{exp}$. Dar desigur ca el are si citeva particularitati pe care merita sa le reamintim.

In primul, pentru a functiona, el este definit pentru un Univers imaginar care are o dimensiune putin diferita de 4. Cu alte cuvinte, alegem la inceput o valoare a lui ϵ , si cu ajutorul acesteia calculam digramele Feynmann. Ele vor fi astfel corect "corectate" de valorile constatarilor A , B si δm^2 care contin si ele exact aceeasi valoare a lui ϵ . Este de asteptat ca rezultatele nu vor depinde de ϵ cind acesta are valori mici.

In plus, rezultatele par sa depinda de valoarea aleasa a constantei de masa μ , caci si ea apare in formulele de mai sus. Cu toate aceasta nici acesta nu este cazul (DE CE?, CE FACEM CU μ ?)

Recunoastem deasemenea in decursul procesului asemnari cu teoria efectiva a lichidului Fermi, prezenta in sectiunea ???. Spre exemplu, masa masurata a particulei este masa efectiva m , diferita de "bare mass" m_B . Planul pe care ni l-am propus, in a alege m_B in asa fel incit masa experimentală sa iasa chiar m a reusit, atita ca m_B a iesit o valoare proportionala cu

$1/\sqrt{\epsilon}$, si deci divergenta in limita $\epsilon \rightarrow 0$. Acest lucru insa nu ne va deranja, caci, desi am dori poate sa masuram direct m_B , nu vom putea iesi din acest Univers pentru a-l masura.

Nu oprim aici cu exemplificare renormalizarii pentru cazul cimpului scalar.

6.7.3 Lagrangeanul renormalizat QED

Am folosit teoria cimpului scalar in sectiunea precedenta pentru a exemplifica renormalizarea unei teorii cuantice a cimpului. Cu toate ca este simpla, particulele asociate ale acestui cimp nu par sa fie particule fundamentale ale Universului nostru. De aceea ne intoarcem la electrodinamica cuantica. Aspectele matematice ale renormalizarii QED depasesc insa scopul acestei carti, si de aceea ne limitam in a prezenta numai rezultatele si a discuta putin in jurul lor.

Lagrangeanul cu care am pronit, si care am banuit ca este cel corect (fara a fi) a fost dat de 6.20:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.170)$$

Cele trei diagrame care produc divergente in ordinul intii (CE SE INTIMPLA IN ORDIN SUPERIOR?) sunt prezente in Fig.6.17. Un calcul exact (vezi [?]) conduce la urmatoarele lor valori:

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p} + 4m) + \text{finit} \quad (6.171)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2) \left(\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \frac{e^2 k^2}{60\pi^2 m^2} \right) + \text{finit} \quad (6.172)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu - \frac{e^2}{16\pi^2 m}(p_\mu + p'_\mu) + \text{finit} \quad (6.173)$$

unde $g_{\mu\nu}$ este tensorul ?? Minkovski al spatiu timpului (a treia e luata si din [?] pag. 181). Poi incerca sa faci un calcul exact al primelor doua cel putin?

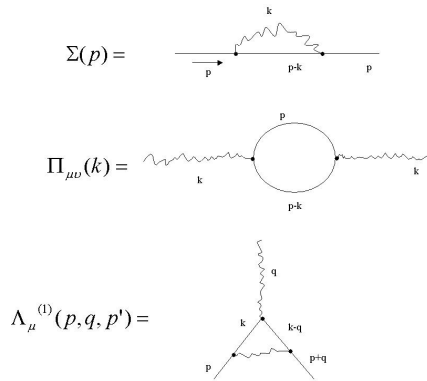


Figure 6.17: legenda

Sa le analizam putin pe rind. Prima este asa-numita "self-energy" a electronului. Cu ajutorul ei putem calcula masa efectiva a electronului, cea care este obtinuta din experiment. Astfel, amplitudinea de tranzitie intre doua puncte va avea, in reprezentarea momentului, forma (explicitaaza putin):

$$S'_F(p)^{-1} = S_F(p)^{-1} - \Sigma(p) = \not{p} - m - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p} + 4m) + t.f. \quad (6.174)$$

$$\not{p} \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} + t.f. \right) - m \left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2\epsilon} + t.f. \right) \quad (6.175)$$

Termenul acesta este diferit de forma $S_F(p)^{-1} = \not{p} - m$ a cimpului Dirac liber. Interactia electronilor cu vidul cosmic face

posibil ca un photon virtual sa fie emis si apoi absorbit, ceea ce modifica implicit masa observata a electronului, care va fi masa efectiva, data din relatia de mai sus de $m^* = m(1 + A)$. Putem insa modifica Lagrangeanul in asa fel incit amplitudinea de tranzitie in reprezentarea moment sa fie chiar $S_F(p)^{-1} = \not{p} - m$, daca adaugam termenul

$$\delta L_1 = -Am\bar{\psi}\psi - iB\bar{\psi}\not{\epsilon}\psi \quad (6.176)$$

unde:

$$A = \frac{e^2}{2\pi^2\epsilon} + t.f. \quad B = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} + t.f. \quad (6.177)$$

Privind formele celor doi lagrangeeni L si δL_1 , vedem ca noul lagrangian $L + \delta L_1$ poate fi privit ca pe cel vechi L in care masa electronului este $m(1 + A)$ iar coeficientul lui $\not{\epsilon}$ este $(1 + B)$. Din prima relatie 6.171 vedem ca acest nou lagrangian va avea atunci un "self-energy":

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} [\not{p}(1 + B) + 4m(1 + A)] + t.f. \quad (6.178)$$

Inlocuind in 6.179, vedem ca amplitudinea de tranzitie in reprezentarea momentului va avea atunci noua forma:

$$S'_F(p)^{-1} = \not{p}(1 + B)(1 - B) - m(1 + A)(1 - A) = \not{p} - m \quad (6.179)$$

unde am neglijat termenii de ordin superior in e (care sunt $A * A$ si $B * B$). (verifica semnele + si - pentru A si B, ca le-am pierdut urma.) Din relatia de mai sus se vede atunci ca masa efectiva a particulei avind noul lagrangian, va fi chiar m .

Al doilea termen divergent al relatiei 6.179 este legat de renormalizarea sarcinii electronului. El descrie un proces in care un foton emite o pereche virtuala (?) electron-positron, care se recombina mai apoi. In termenii lichidului Fermi (sectiunea ??), absorbtia unui foton face ca electronii sa se excite pe starile din afara suprafetei Fermi, creind un electron excitat si un gol. Acestia se pot recombina mai tirziu, adica electronul in miscare poate pica din intimplare in golul creat, emitind un foton.

Intr-o prima faza ne-am astepta ca considerarea acestui proces sa modifice masa fotonului, precum la electron sau la particula scalara. Din fericire acest lucru nu se intimpla (vezi Ryder), si masa fotonului ramina nula. Ceea ce introduce acest proces insa este o modificare a sarcinii electrice efective masurate. Acest lucru se poate vedea daca calculam din nou amplitudinea de tranzitie a unui foton in reprezentarea momentului (pune si figura):

$$D'_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\alpha}(k)\Pi(\alpha\beta)D_{\beta\nu}(k) \quad (6.180)$$

Inlocuind atunci al doilea rezultat din 6.179, si renuntin la a mai scrie termenii finiti, avem:

$$D'_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{g_{\mu\alpha}}{k^2} \frac{e^2}{6\pi^2} \left(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2 \right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{k^2}{10m^2} \right) \frac{g_{\beta\nu}}{k^2} \quad (6.181)$$

Combinind termenii, aceasta devine:

$$D'_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (6.182)$$

Pentru valori mici ale lui k termenul de mai sus se aproximeaza:

$$D'_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \right) \quad (6.183)$$

(dupa Peskin acum) In Figura ?? (pune peskin p.246) prezentam interactia dintre doi electroni prin intermediul schimbului

uni foton virtual. Asa cum calculat mai sus, includerea posibilitatii fotonului virtual de a crea si apoi recombina o pereche electron pozitron conduce la modificarea amplitudinii de tranzitie asociata procesului de schimb de foton virtual intre cei doi electroni. Efectiv insa, intr-o prima aproximatie, putem introduce acest efect considerind ca nu au loc aceste procese de creare ale perechilor electron pozitron, dar sarcina electronului este sarcina efectiva $e^* = e\sqrt{1 - e^2/(6\pi^2\epsilon)}$. Aceasta sarcina ar urma sa fie masurata in experiment, si ar fi infinita desigur. Pentru a obtine o valoare finita (preferabil chiar e) ar trebui sa adugam un alt termen in lagrangean.

Pe de alta parte, acelasi efect il putem corecta considerind ca cimpul electromagnetic efectiv A^* generat de un electron (vezi dreapta Figurii ??) este $A^* = A\sqrt{1 - e^2/(6\pi^2\epsilon)}$. Ambele maniere sunt corecte insa, pentru simplitatea renormalizarii, noi alegem sa renormalizam prin aceasta a doua abordare. Acest se poate face adugind termenul urmator la lagrangean (vezi ca 9.117 ryder mai are un termen ce e legat de o alta forma a lagrangeanului initial) :

$$\delta L_2 = \frac{1}{4} \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.184)$$

Se arata atunci (vezi exercitiul ...) ca lagrangeanul nou $L + \delta L_2$ va avea un cimp efectiv $A^* = A$ (asta daca includ si termenii finiti lasati in urma? de ce ii las pe drum, la scalar nu i-am lasat? atentie). Adaugarea termenului de mai sus la lagrangean nu schimba esential forma amplitudinii de tranzitie in reprezentarea moemntului, ci doar elimina divergenta. Cu alte cuvinte, nici dupa renormalizare amplitudinea de tranzitie nu mai ia forma simpla in lipsa interactie cu electroni $D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}/k^2$. Acest in contractie cu renormalizarea masie electronului unde a fost posibil ca forma efectiva a amplitudinii $S_F(p)$ in prezenta interactiei sa fie identitica cu cea a cimpului liber.

Observatia de mai sus am putea-o reinterpretati si in felul urmator. Cimpul fara interactie are $D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}/k^2$, care conduce la un potential electric $V(r)1/r$. Cimpul efectiv, *chiar dupa renormalizare*, are o forma diferita, in care, la momente mari k alti termeni apar. Aceasta inseamna ca si potentialul electric al cimpului efectiv va fi modificat de la forma $V(r)1/r$, in special la distane mici (corespunzatoare lui k mare). Acest lucru este desigur important, caci el poate produce efecte experimentale. Un astfel de experiment este deplasarea Lamb, de care va fi vorba in sectiunea ??.

In final, cea de-a treia divergenta din relatia 6.179 este similara divergentei interactiei ?? in cazul cimpului scalar. Ne-am astepta ca in urma ei sa fim nevoiti sa modificam din nou sarcina electrica e , care este masura interactiei. Cu toate acestea nu este nevoie, caci natura a conlucrat (? e ciudata cum se potriveste de bine. citeva cuvinte) in asa fel incit aceasta divergenta este practic deja corectata odata cu corectarea primei divergente din 6.179.

Astfel, putem privi coeficientul B din relatia ?? si ca pe o redefinire a cimpului ψ ca $\psi' = \sqrt{1+B}\psi$. Cum facem aceasta inlocuire in termenul corespunzator cimpului lui Dirac, ne-am astepta ca sa o facem si *in cazul interactiei* cu cimpul electromagnetic. Cu alte cuvinte, termenul de interactie ar trebui rescris:

$$L_I = -e\bar{\psi}' A \psi' = -e(1-B)\bar{\psi} A \psi \quad (6.185)$$

El contine insa deja un termen aditional care este (inlocuind B):

$$\delta L_3 = e\bar{\psi}' A \psi' = +e \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \bar{\psi} A \psi \quad (6.186)$$

Acest termen, daca este inclus la lagrangeanul initial ??, va compensa exact a treia divergenta, pentru ca acelasi valoare

$e^2/(8\pi^2\epsilon)$ apare. Cu alte cuvinte, daca am fi efectuat calcul pentru vertexul ?? cu noul lagrangean continind δL_3 , divergenta din vertex ar fi disparut.

Semnificatia acestei "potriveli" este urmatoarea. Se poate intimpla ca o teorie sa aiba prea multe interegale divergente, care sa nu poata fi indepartate redefinind chiar toti parametrii folositi. Atunci teoria nu are sansa de a fi renormalizabila. Din fericire, acesta nu este cazul electrodinamicii cuantice. Aceasta poate fi renormalizata modificind parametrii de masa m , sarcina electrica e , cimp A si cimp ψ . Numai acesti parametri redefiniti (adaugind termeni la lagrangean cum am facut noi) sunt suficienti pentru a elimina *toate* divergentele.

Desigur insa ca relatia de mai sus elimina doar divergenta din 6.179. Ca atare, atunci cind calculam diagrame Feynmann corespunzatoare interactiei dintre electroni si fotoni, termenii finiti, si ei conduc la efecte aditionale in interactie care pot fi verificate experimental. Un astfel de efect este momentul anomal al electronului, despre care va fi vorba in sectiunea ??.

In final, noua forma renormalizata a Lagrangeanului care conduce la rezultate finite se obtine adaugind termenii suplimentari 6.176, 6.184, 6.186 la lagrangeanul initial 6.170. Dupa citeva calcule, putem rescrie aceasta forma finala sub o forma asemnatoare celei initiale:

$$L = i\bar{\psi}_B \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_B + ie A_{B\mu}) \psi_B - m_B \bar{\psi}_B \psi_B - \frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} \quad (6.187)$$

daca notam:

$$\psi_B = \sqrt{Z_2} \psi \quad A_B^\mu = \sqrt{Z_3} A^\mu \quad (6.188)$$

$$m_b = \frac{m + A}{Z_2} \quad e_B = \mu^{\epsilon/2} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} e \quad (6.189)$$

Constantele Z_1, Z_2, Z_3 si A au fost definite in relatiile ??.

Remarcam ca, deoarece $Z_1 = Z_2$, constanta e_B este chiar sarcina electrica "bare" care a fost discutata de noi in relatia ??.

Am obtinut mai sus lagrangeanul decit cimpului electromagnetic renormalizat, lipsit de divergente atita timp cit numai "loop"-urile de ordin intii se folosesc. Dovada ca QED poate fi renormalizata in orice ordin este dincolo de scopul acestei carti, dar ea poate fi gasita in ([? ?]).

In setiunea aceasta am obtinut lagrangeanul renormalizat al QED in "minimal coupling". Aceasta inseamna ca lagrangeanul va produce rezultate finite, inasa masa efectiva m^* si sarcina efectiva e^* vor fi inca diferite de cele masurate experimental (desi finite). Aceasta se datoreaza desigur faptului nu am inclus in calculele noastre (pentru simplitate) termene finite in asa fel incit sa comensam exact m^* si e^* . (AICI am dubii mari. verifica minimal coupling se pare ca ryder nu-i pasa ca $e^* \neq e_{exp}$. su sunt totusi egale?). Cu toate acestea, chiar aceasta corectie nu ar fi putut indeparta efectele aditionale care exista in dependenta diagramelor de valorile momentelor. Cu alte cuvinte diagramele Feynmann sunt functii de valorile momentelor care, chiar corectate cu anumite *constante*, ramin niste functii de valorile momenteleor care trebuiesc luate in calcul pentru calcule mai precise.

6.8 Verificari experimentale ale electrodinamicii cuantice

Teoria cuantica a cimpului a intimpinat dificultati de acceptare de-a lungul timpului, datorita integralelor divergente care apar. Insi Dirac obiecta impotriva unei astfel de metode caci, spunea el, ne asteptam ca termenele de ordin superior in teoria unei perturbatii sa fie din ce in ce mai mici, nicidecum infiniti!

Nici renormalizarea teoriei in sine nu a convins pe toate lumea. Desi teoria acum era lipsita de infinitati, multi fizicieni argumentau (vezi Lee) ca infinitatile au fost ascunse sub pres. Daca o integrala este infinita, atunci ea se poate elimina prin renormalizare, glumeau ei. Desigur ca acest lucru nu este neaparat adevarat, caci nu orice integrala infinita, din orice teorie, poate fi scapata de divergente. Numai citeva dintre posibilele teorii, numai citiva lagrangeeni dau valori finite dupa renormalizare, iar acesta este unul dintre criteriile puternice de selectare a posibilor lagrangeeni.

De aceea teoria cuantica a cimpului nu a fost deplin acceptata decit odata ce primele confirmari experimentale au venit. Am putea spune ca rezultatele experimentale au fost cele care au impus acceptarea teoriei cuantice a cimpului de catre comunitatea stiintifica, in fata dovezii ca numerele date de experiment sunt egale cu cele prezise de lagrangeanul renormalizat. Prezentam si noi aici doua dintre aceste experimente.

6.8.1 Deplasarea Lamb

Unul dintre rezultatele care au supravietuit cel mai bine experimentelor de-a lungul timpului este potentialul Coulomb dat de o sarcina electrica. Aceasta se datorreste proprietatii remarcabile ca el este valabil atat pentru distante cosmice (vezi aplicatiile din undele radio), cit si pentru distante atomice. Este desigur remarcabil, si nu putem fi decit recunoscatori ca mama natura nu ne-a dat o alta formula pentru fiecare trecere la o unitate mai mica. Nu vrem sa ne imaginam ce ar fi fost fizica daca trebuia sa folosim formule diferite pentru distante de un metru sau de un centimetru... Cu toate acestea, fiecare lucru isi are sfirsitul lui, si iata ca a venit si sfirsitul potentialului electric al lui Coulomb.

Vrem sa-l recalculam acum in QED, si pentru aceasta pornim de la formula ?? a potentialelor retardate:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}_2, t - r_1 2/c)}{4\pi\epsilon_0 r_1 2} dV_2 \quad (6.190)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - r_1 2/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_1 2} dV_2 \quad (6.191)$$

Integrala clasica de mai sus este o integrala "retardata" pe tot spatiul. Cu alte cuvinte, "privim" in fiecare punct 2 al spatiului, si ne uitam daca la timpul trecut $t - r_1 2/c$ era o sarcina acolo care ar fi trimis "informatie" (in limbajul folosit in capitolul ??). In limbajul mecanicii cuantice, aceasta "informatie" este de fapt un foton. Generalizarea acestor formule in teoria cuantica a cimpului este relatia ?? dedusa cu ajutorul functiilor Green:

$$A_\mu(x) = \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \quad (6.192)$$

Aici $D_{\mu\nu}(x-y)$ este amplitudinea de tranzitie a unui foton de la y la x . Integrala se face in tot spatiu-timpul, dar ea se reduce efectiv la o integrala "retardata" pe spatiu daca sarcinile nu se gasesc decit in anumite puncte din spatiu.

Propagatorul cimpului electromagnetic liber este dat de ??, si avem atunci (foloseste 196-13 din greiner) :

$$D_{00}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \frac{-4\pi}{q^2} \simeq \frac{1}{4\pi r} \quad (6.193)$$

Pe noi ne intereseaza potentialul electric generat de o sarcina si, daca consideram o sarcina punctuala aflata in centrul sistemului de coordonate $j_0(y) = \delta(y)$ avem atunci:

$$\phi(x) = \int d^4y D_{00}(x-y) \delta(y) = D_{00}(x) \simeq \frac{1}{4\pi r} \quad (6.194)$$

adica potentialul lui Coulomb. Relatia de mai sus fost determinata fara a folosi nici unul din procesele de ordin superior. Desigur insa ca in relatia 6.192 trebuie folosita amplitudinea totala de tranzitie, care include si procese aditionale. Unul dintre acestea este faptul ca fotonul, in drumul lui de la y la x , poate genera o pereche electron-positron care apoi sa se recombine. Includerea acestui proces conduce la o forma modificata a amplitudinii de tranzitie. Ar trebui sa o calculam deci in teoria renormalizata a electrodinamicii cuantice, folosind lagrangeanul 6.187.

Pentru inceput, sa insem cu valoarea nerenormalizata a "polarization bubble" a fotonului, data in 6.171.

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \left(\frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon} + \frac{e^2 k^2}{60\pi^2 m^2} \right) + f(k^2) \quad (6.195)$$

In urma renormalizarii, termenul divergent ϵ va disparea (fiind practic inclus in amplitudinea cimpului sau in valoarea sarcinii "bare"). Daca am recalcula atunci "polarization bubble" in lagrangeanul renormalizat, am obtine atunci:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) \simeq (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \left(\frac{e^2 k^2}{60\pi^2 m^2} \right) \quad (6.196)$$

Relatia de mai sus nu mai contine divergente, si nu este nici dependenta de ϵ . Ea ne permite calcularea noii amplitudini de tranzitie, folosind regulile de adunare a probabilitatilor de tranzitie ale digramelor Feynmann:

$$D'_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} - D_{\mu\alpha} \Pi_{\alpha\beta}(k) D_{\beta\nu} \quad (6.197)$$

Inlocuind valoarea anterioara a lui $\Pi_{\mu\nu}(k)$, si neglijind termenii proportionali cu $k^\alpha k^\beta$ (de ce, explica!), obtinem:

$$D'_{\mu\nu}(k) \simeq \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \left(1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2} \right) \quad (6.198)$$

Practic, am obtinut in ce masura amplitudinea de tranzitie este modificata de procesele de creare electron-positron. Relatia de mai sus este valabila pentru $k \ll m$. Practic, numai energia fotonului virtual este suficient de mare pentru a crea o pereche electron-positron, termenul al doilea din relatia de mai sus devine important. Cu toate acestea, electronul emite fotoni virtuali si cu energii mari, deci si acestia trebuiesc luati in calcul. Atunci, daca inlocuim forma obtinuta mai sus in relatia 6.194, obtinem ca:

$$V(x) = D'_{00}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} D'_{00}(q) \quad (6.199)$$

Folosind relatia lui Dirac:

$$\delta^3(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \quad (6.200)$$

Avem atunci:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \frac{1}{k^2} \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2} = \frac{e^2}{60\pi^2} \delta^3(x) \quad (6.201)$$

obtinem in final:

$$V(x) = -\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{60\pi^2 m^2} \delta^3(\mathbf{x}) \quad (6.202)$$

Potentialul electric difera de cel al lui Coulomb, printr-un termen care este foarte mare in origine. Acesta este potential a fost calculat pentru prima oara de Uehling in 1935, putin timp dupa ce Dirac si-a prezentat teoria sa a pozitronilor. Un calcul mai precis al acestui potential ([?]) conduce la forma:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right) \quad (6.203)$$

Formula de mai sus ne arata mai clar ca diferenta intre potentialul calculat in electrodinamica cuantica si cel al lui Coulomb apare pentru distante mai mici decit lungimea de unda Compton a electronului $r \simeq 1/m$.

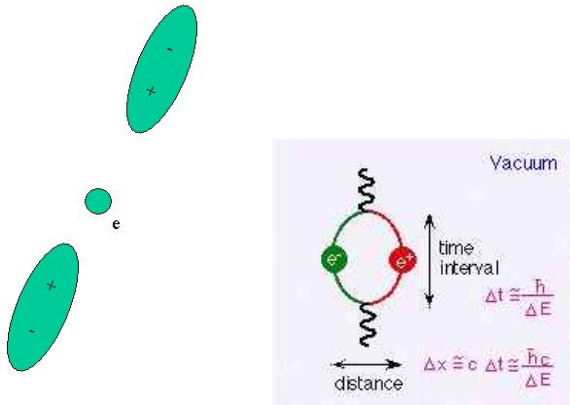


Figure 6.18: Stanga: in spatiu; Dreapta: din principiu de incertitudine

Rezultatele de mai sus se pot interpreta prin prisma efectului de "screening" (vezi Figura 6.18). Astfel, la distance mai mici decit raza Compton $1/m$ vedem doar sarcina "bare" (ea se "vede" in lagrangeanul renormalizat pentru ca practic nu mai avem spatiu sa adaugam "polarizaton" bubble, care ne-ar fi facut sa vedem in mod normal sarcina efectiva). Ca atare, potentialul electric are o valoare foarte mare. La distante mai mari decit $1/m$ fotonul poate crea perechi electron-positron virtuale (de "size" tom $1/m$) care, la rindul lor, creeaza un potential electric. Acesta, adunat la potentialul initial, il va diminua, printr-un efect de screening similar cu cel discutat in ???. Cu toate acestea, daca privim Figura 6.18, vedem ca semnul asociat polarizarii este opus celui din ???. Cu alte cuvinte, sarcinile pozitive (pozitronii virtuali creati) sunt "atrasi" de sarcina efectiva, si nu cele negative. Aceasta aparenta contradictie se explica (vezi [?]) prin ... (descifreaza pagina 269 din greiner. ryder zice in desenul 346 exact opozitul!).

Vedem in final ca practic, in prelungirea discutiei din ??, obtinem un rezultat surprinzator. Astfel, potentialul "original" nu are forma lui Coulomb. Numai ca, datorita creerii de perechi electron-positron in vidul cosmic, potentialul "original" este modificat, conducind la un potential "efectiv" identic cu cel al lui Coulomb. Cu alte cuvinte, potentialul lui Coulomb este un potential efectiv, facut posibil de catre vidul cosmic (vazut ca o "mare" Fermi).

Asa cum am amintit, rezultatul 6 este important, pentru ca el s-a verificat experimental. Astfel, daca nu luam in acclul

efectele teoriei cuantice a cimpului, si am folosi doar potentialul lui Coulomb, am gasi ca starile $2s$ in Hidrogen ar trebuie sa aiba aceeasi energie cu starile $2p$ (vezi sectiunea ?? pentru functiile de unda atomice). Luind in calcul si "polarization bubble", vedem atunci din 6 ca trebuie sa adugam si termenul porportinal cu $\delta(\mathbf{r})$. Ca atare, fiecare nivel va acumula un adaos de energie dat de:

$$\Delta E = \langle \Psi_{nl} | e \Delta V | \Psi_{nl} \rangle = \int dV |\Psi_{nl}|^2 \Delta V(\mathbf{r}) \quad (6.204)$$

Inlocuind rezultatul 6, aceasta devine:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(x)|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\mathbf{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2 \quad (6.205)$$

Functiile de unda ale atomului de hidrogen au fost insa discutate in ??, si ele au forma:

$$\frac{m^3 (Z\alpha)^3}{\pi n^3} \delta_{l0} \quad (6.206)$$

Forma de mai sus ne reaminteste, dupa cum stiam, ca functia de unda pentru orbitalul p se anuleaza in origine $\psi_p(0) = 0$ (vezi si Figura ??), spre deosebire de cea a orbitalului s care este finita in origine $\psi_p(0) \neq 0$. Inlocuind deci in 6.205, avem in final ca diferenta de energie intre cele doua nivele (ambele avind $n = 2$) este:

$$\Delta E = \frac{4\alpha^2}{15m^2} \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{m\alpha^5}{30\pi} = -1.123 * 10^{-7} eV \quad (6.207)$$

Aceasta diferenta a fost masurata exoperimental pentru prima data de catre Lamb si colaboratorii sai. In "set-up"-ul experimental acestia au folosit o incinta cu microunde. Relatia de mai sus ne da atunci o frecventa rezonanta de aproximativ:

$$\nu = \frac{E_s - E_p}{h} = -27.1 MHz \quad (6.208)$$

Valoarea masurata a fost insa de

$$\nu_{exp} = 1057.8 MHz \quad (6.209)$$

Cu alte cuvinte valoarea prezisa de noi are ordinul de marime corespunzator, dar nu explica valoarea experimetala. Valoarea experimentală se poate insa explica daca se ia in calcul nu numai "polarization bubble" (care modifica potentialul Coulomb), dar si "self-energy" al electronului si "vertex corection", lucru pe care noi nu il mai discutam aici.

6.8.2 Momentul anomal al electronului

Sa ne reamintim ca ecuatiile lui Dirac ?? pentru miscare electronului in cimp electro-magnetic era:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m_0} (\hat{p} - e\hat{A})^2 + e\phi - \frac{e}{m_0} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \vec{B} \right] \varphi \quad (6.210)$$

Ea ne spune in primul rind ca contributia spinului la cimpul magnetic este data de:

$$\mu = g \left(\frac{e}{2m} \mathbf{S} \right) \quad (6.211)$$

unde $g = 2$.

In anii de dupa cel de-al doilea razboi mondial experimentele au aratat ca momentul magnetic al electronului difera de cel prezis de Dirac in relatia de mai sus, cu alte cuvinte $g \neq 2$.

Aceasta discrepanta a fost o oportunitate pentru teoreticienii teoriei cuantice a cimpului. "Competitia" (verifica istorie) care s-a creat astfel intre ei a fost cistigata de Schwinger care a reusit sa arate ca electrodinamica cuantica a cimpului prezice valoarea experimentală ("postzice" ar trebui poate sa spunem).

Calculul modern al momentului anomal al electronului se fac in doua etape. O etapa arata din ce diagrame provine acesta, si a doua calculeaza aceste diagrame. Astfel, fie un electron care se deplaseaza intr-un cimp magnetic *clasic*. Procesele de imprastiere care pot avea loc sunt prezentate in diagramele ???. Cele care contribuie la momentul magnetic al electronului sunt primele doua, atunci amplitudinea de probabilitate a procesului de imprastiere se scrie conform regulilor lui Feynmann ca:

$$\beta M = \beta e \left[\bar{u}(p')(\gamma_i + \Lambda_i^{(2)}(p', p))u(p) \right] A_{cl}^i(q) \quad (6.212)$$

unde am folosit notatia $_{cl}$ pentru cimpul clasic. Petru vertexul $\Lambda^{(2)}$ am putea folosi forma renormalizata a lagrangeanului. Cu toate acestea, asa cum am folosit-o noi, in "cuplajul minimal", ea conduce la o valoarea efectiva a sarcinii diferita de cea experimentală, si care trebuie apoi corectata printr-o alegere mai buna a sarcinii "bare". De aceea vom folosi pentru $\Lambda^{(2)}$ forma nenormalizata data de:

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') \simeq \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu - \frac{e^2}{16\pi^2m}(p_\mu + p'_\mu) \quad (6.213)$$

Inlocuind in relatia precedenta, aceasta conduce la:

$$\beta M = \beta e \bar{u}(p') \left[\gamma_i \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \right) - \frac{e^2}{16\pi^2m}(p_\mu + p'_\mu) \right] u(p) A_{cl}^i(q) \quad (6.214)$$

Partea din paranteza dreapta a termenului din dreapta se poate imparti in doua. A doua parte se poate rescrie cu ajutorul identitatii lui Gordon (vezi exercitiul ...) ca:

$$\bar{u}(p') \frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} u(p) = \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu - \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) \quad (6.215)$$

Inlocuind in relatia precedenta, aceasta devine:

$$\beta M = \beta e \bar{u}(p') \left[\gamma_i \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{8\pi^2} \right) + \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) A_{cl}^i(q) \quad (6.216)$$

Rescriind relatia lui Gordon sub forma:

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} + \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) \quad (6.217)$$

si inlocuind din nou in amplitudinea de probabilitate avem:

$$\beta M = \beta e \bar{u}(p') \left[C \frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} + \left(C + \frac{e^2}{8\pi^2} \right) \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) A_{cl}^i(q) \quad (6.218)$$

unde coeficientul C este

$$C = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{8\pi^2} \quad (6.219)$$

Cel de-al doilea termen ai relatiei de mai sus este responsabil pentru momentul magnetic al electronului. Astfel, se observa ca, daca acesta n-ar fi existat, trazițiile ar fi fost posibile numai intre componente de aceiasi spin, cu alte cuvinte,...

La o analiza mai atenta (decit cea pe care o fac eu acum!) a relatiei de mai sus se observa ca primul termen este responsabil pentru sarcina efectiva, si el conduce la sarcina efectiva $e^* = e * C$. Pentru a face ca aceasta sa fie identica cu cea experimentală, trebuie sa alegem sarcina "bare" ca fiind e/C . Acest coeficient de renormalizare C trebuie sa fie in prima

aproximatie (pastrind numai termenii divergenti) coeficientul de renormalizare al sarcinii electrice din relatia 6.188:

$$\frac{1}{C} = \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}} \quad (6.220)$$

ceea ce se verifica imediat (verifica! sper sa iasa...).

Ca atare, putem scrie acum relatia ?? renormalizata, inlocuind e cu e/C . Avem atunci:

$$\beta M = \beta e \bar{u}(p') \left[\frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} + \frac{C + \frac{e^2}{8\pi^2}}{C} \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) A_{cl}^i(q) \quad (6.221)$$

Termenul din dreapta se rescrie ca:

$$\frac{C + \frac{e^2}{8\pi^2}}{C} = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2 C} = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{8\pi^2}} \quad (6.222)$$

Primul termen ne va conduce acum la o sarcina efectiva $e^* = e$, asa cum ne-am dorit. Al doilea termen de va da momentul magnetic datorat spinul electronului.

Am gresit pe drum fie la C fie trebuie extras. In final, amplitudinea de probabilitate se scrie ca:

$$\beta M = \beta e \bar{u}(p') \left[\frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} + \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \right) \frac{\beta\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) A_{cl}^i(q) \quad (6.223)$$

Daca in relatiile precedente nu am foliat in calcul vertexul, am fi obtinut o relatie identica cu cea de mai sus, in care doar termenul $\frac{e^2}{8\pi^2}$ ar fi lipsit. Se observa atunci ca momentul magnetic de spin al electronului este:

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} = \text{calculeaza} \quad (6.224)$$

Relatia de mai sus ne arata ca momentul magnetic datorat spinului se abate de la valoarea 2 data de Dirac. Noua valoare obtinuta difera putin fata de valoarea obtinuta experimental:

$$g_{exp} = \dots \quad (6.225)$$

De fapt, calcule precise teoretice care iau in calcul toate diagramele Feynmann pina in ordinul 3 dau valoarea:

$$g_{th} = \dots \quad (6.226)$$

Sa vede ca teoria prezice intr-o masura aproape uluitoare de precis valoarea experimentală. Exista insa o mica observatie (α se masoara in doua feluri!)...

6.9 Exerciții

6.10 Idei

ma tot bate gindul sa fi renuntat complet la traiectul cu operatori. sa fi facut numai integrale de drum. dar atunci pic la un moment dat peste functionale si integrale Grasmann... pune despre pioni, si ca merg la cimpul scalar.

de ce mergea asa bine la anihilare cu lagrangeanul nenormalizat? de ce merge bine in general pentru energii $E \ll 2m$? Pentru ca atunci nu trebuie sa calculam "polarization bubble" si alte diagrame datorate creeri de antiparticule, si putem folosi lagrangeanul efectiv! Deci lagrangeanul nenormalizat este de fapt lagrangeanul efectiv! De aceea merge.

explica spinul ca marimea matricii impartite la 2 daca este fermion si impartita la 4 daca este boson

fotonul virtual este chiar fotonul care il stim? nu. dar timpul lui de viata este infinit?

Contents

7	Modelul Standard al Particulelor	207
7.1	Particule noi	207
7.1.1	Metode de observatie a noilor particule	207
7.1.2	Particulele vin la viata	209
7.1.3	Sistematizarea particulelor	211
7.2	Cromodinamica cuantica	212
7.2.1	Quarcii si "culorile" lor	212
7.2.2	Cuplajul minimal Yang-Mills in electrodinamica	213
7.2.3	Lagrangianul QCD nerenormalizat	214
7.2.4	Experimente cu quarci	216
7.3	Interactia electro-slaba	219
7.3.1	Teoria lui Fermi	219
7.3.2	Elicitatea neutrinelor	220
7.3.3	Lagrangianul pentru particulele fara masa	222
7.3.4	Ruperea de simetrie	224
7.3.5	"Achizitia" de masa pentru bosonul W	226
7.3.6	Bosonii W si Z in experiment	228
7.3.7	In cautarea bosonului Higgs	229
7.3.8	Masa electronilor. Lagrangianul nerenormalizat pentru teoria electro-slaba	229
7.3.9	Quarcii si interactia slaba	230
7.4	Dincolo de modelul standard	231
7.4.1	Lagrangianul modelului standard	231
7.4.2	Marea Unificare	231
7.4.3	Desert in fizica in anii ce vin?	232
7.5	Exercitii	232
7.6	Idei	232

Chapter 7

Modelul Standard al Particulelor

In capitolul precedent am urmarit in principal constructia electrodinamicii, teoria cuantica a cimpului dedicata electronilor si fotonilor. Desigur insa ca este cunoscut cititorilor ca o multitudine de alte particule exista in natura, decoperite toate in secolul ce tocmai a trecut. Povestea lor este fascinanta in sine, nu numai pentru ca ele sunt calea pe care poate vom intelege legi inca mai profunde ale Universului decit cele date de electrodinamica cuantica. Inainte de a incepe sa "toarcem" putin din aceasta poveste, sa facem insa citeva observatii.

Astfel, dupa cum vom vedea, exista un contrast mare in modul in care noile teorii (cromodinamica cuantica, teoria electrolaba) sunt introduse fortat de experiment, si modul aproape complet teoretic in care teoria electrodinamicii cuantice a fost construita. Am vazut in capitolele precedente ca teoria electrodinamicii cuantice poate fi construita logic pornind de la citeva observatii experimentale ca electromagnetismul si ecuatiile lui Shrodinger pentru un electron. Din electromagnetism obtinem ecuatiile vectorilor de potential ??, iar ecuatiile lui Shrodinger o facem relativistic invarianta in ecuatiile lui Dirac ???. Cum electromagnetismul este in acest stadiu un *cimp* clasic iar miscarea electronului este miscarea unei particule *cuantice*, le putem aduce pe amandoua sub aceeaasi umbrela daca folosim in ambele cazuri *cimpuri cuantice*. O astfel de constructie poate fi facuta aproape pur teoretic.

Mai mult, vom vedea in sectiunea ?? dedicata teoriilor locale de etalonare ca practic electrodinamica cuantica este una din putinele teorii ce se pot construi ad-hoc, si care sa satisfaca cerintele unei teorii aplicabile la experiment: sa fie *relativistic invarianta*, sa fie *renormalizabila*, sa fie *local invarianta la etalonare*, si al carui Lagrangean sa fie cit se poate de *simplic*! Cu alte cuvinte, in mindria noastra infinita, am putea afirma parafranzind pe Einstein (?), ca Dumnezeu nu ar fi avut alta alegere oricum, si am fi putut pleca linistiti la culcare.

Poate tocmai pentru a ne mai domoli o astfel de mindrie, sau poate pentru ca oricum Universul nu putea fi asa simplu (sa nu uitam ca nu am cuantificat deloc gravitatiea), Dumnezeu ne-a trimis o ploaie de particule noi. Pentru multi experimentalisti, aceasta s-a dovedit un adevarat rai, pentru teoreticieni o "challenge". In prima faza multe din aceste particule au reusit sa fie sistematizate in tabele de *particule elementare*. Teoreticienii insa au avut o munca dificila pentru a construi cel putin citeva teorii care sa descrie *macar in parte* proprietatile noilor particule.

Datorita succesului electrodinamicii cuantice, noile teorii au luat deasemenea forma unor cimpuri cuantice. Cum insa numarul particulelor elementare a crescut, tot asa si numarul acestor cimpuri cuantice. In forma prezenta se diferentiaza doua teorii cuantice de cimp principale: *cromodinamica cuantica* (cimpul cuantic asociat quarcilor), si *teoria electrolaba* (cimpuri cuantice descriind interactiile slabe si electromagnetice, si in care este integrata electrodinamica cuantica).

Cu tot succesul intermediar, noile teorii se arata a fi inca complexe, si nimeni nu crede azi ca ele pot fi teorii "ultime". Cu alte cuvinte, acestea sunt teoriile cele mai avansate *verifi-*

cate experimental (partial), pe acestea le avem, si cu ele defilam. Ele sunt insa nu numai complexe, dar si incomplete (nu explica anumite coincidente, ca de exemplu egalitatea sarcinii electronului si protonului). Aceste lucruri fac evidente necesitatea unei teorii mai avansate, care sa descrie *toate particulele elementare* la un loc, si care sa fie de preferinta logica si simpla. O astfel de incercare va fi prezentata in capitolul urmator.

7.1 Particule noi

In aceasta sectiune ne vom ocupa de modul in care unele din noile particule au iesit la iveala, felul in care au fost masurate si vom incerca sa perentam modul in care ele sunt sistematizate. In spatiul rezervat nu putem face desigur o prezentare detaliata, si de aceea vom neglija multe din descoperirile esentiale, cum ar fi radioactivitatea sau neutronii, pe care le vom mentiona numai la timpul potrivit.

7.1.1 Metode de observatie a noilor particule

O prima intilnire cu o metoda de observatie a noilor particule a fost facut in sectiunea ??, unde am vazut cum Carl Anderson a fotografiat pentru prima data pozitronii. Acesta a folosit pentru observatie o *camera cu ceata* ("cloud chamber") Wilson, prezentata in Fig.7.1.

Aceasta consta intr-un cilindru acoperit cu un geam prin care se pot face fotografii (partea din dreapta sus a pozei aparatului lui Wilson). Acest cilindru este umplut cu aer saturat cu vapori de apa, ceea ce nu inseamna altceva decit ca vaporii stau gata sa condenseze pe diversele particule din recipient. Situatia este asemanatoare cu cazul mult mai obisnuit al cetei de dimineata (verifica). Aici vaporii de apa condenseaza pe particulele de praf din atmosfera, formind ceata. Nu este deci de mirare ca, in prezentarea pe care Wilson a facut-o in 1927 odata cu primirea premiului Nobel, acesta mentioneaza ca curiozitatea pentru fenomenul de condensare a picaturilor de apa in "moist air" i-a fost deschisa privind frumoasele fenomene optice care apar cind Soarele lumineaza norii.

Cu toate acestea, instrumentul astfel construit nu este inca foarte sensibil, pentru ca vaporii vor condensa numai pe particule relativ mari, si nu pe unele foarte mici. Pentru a putea condensa si pe particule mici, vaporii trebuie adusi in starea de *suprasaturatie*, si de aceea partea de jos a cilindrului este prevazuta cu un piston. Cind acesta este retras brusc, volumul aerului din cilindru creste brusc, temperatura scade brusc, si vaporii se suprasatureaza. In acel moment aerul va condensa pe particulele mici care se intimpla sa treaca prin cilindru, si o fotografie se poate face print geamul de sticla. Pentru a putea "vedea" sarcina electrica a particulelor care trec, "camera cu ceata" se aseaza de obicei intr-un cimp magnetic, care curbeaza traiectoria lor.

Este intr-un fel suprinzator ca un astfel de sistem este asa de sensibil incit sa observe particule elementare ca electronul sau

diferiti ioni. In Fig.7.1 prezentam si prima masuratoare a altei particule elementare (alta decit electron, proton sau neutron) efectuate de J. C. Street and E. C. Stevenson in 1937 intr-o camera cu ceata si denumita *muon*. Vom reveni mai tirziu la semnificatia istorica a acestei descoperiri.

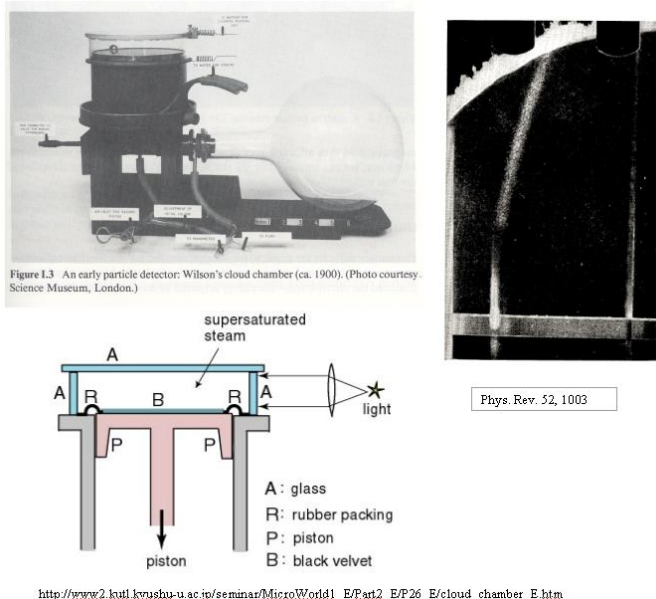


Figure 7.1: Dreapta e prima masuratoare a muonului, luata din articolul original

O tehnica surprinzatoare pentru observatia noilor particule au fost placile fotografice. Emulsiile fotografice pe care acestea le folosesc sunt desigur sensibile la absorbtia de fotoni (caci in acest fel se formeaza poza). In 1937 Blau si Wambacher au observat ca aceste emulsii fotografice sunt sensibile si la trecerea razel cosmice. Prin insistenta lui Powell (premiul Nobel in 1950) si Heitler aceasta tehnica a fost imbunatatita [?], in ciuda faptului ca primele expuneri la razele cosmice au fost efectuate pe virful muntilor si au durat aproape un an!. Este de remarcat ca, pentru a observa traiectoria particulelor din razele cosmice, sau a celor rezultate in urma ciocnirii cu nuclelele emulsiei, planul placii fotografice trebuie sa fie intimplator acelasi cu cel in care particulele se deplaseaza (asa e?). De aceea Placile fotografice au fost construite atunci ca un fel de "sandwich", interaclindu-se intre ele placile de plumb, pentru a se urmari traiectoria particulelor si intr-o directia perpendiculara pe placa fotografica (verifica!, e numai ce banuiesc eu...).

In Fig.7.2 prezentam un desen sugestiv al acestor procese, si reproducem o masuratoare efectuata de Powell si prezentata in discursul sau de primire al premiului Nobel. Si in tara noastra astfel de masuratori au fost facute extensiv dupa razboi de catre ... si colaboratorii sai (cauta istorie).

In anii de dupa 1955 au fost construite acceleratoare moderne, care au devenit astazi practic singurele surse pentru o masurare precisa a noi si noi particule. Daca puterea dumneavoastra de cumparare nu a avansat mult in ultimii ani, se prea poate sa aveti un astfel de accelerator in casa. Ne referim desigur la monitoarele de CRT de televiziune, care pot fi privite ca niste "tunuri" de electroni ce accelereaza electronii pina la 20keV, inainte ca acestia sa atinga ecranul fluorescent (vezi Fig.??). Electronii sunt accelerati in acestia datorita unei tensiuni de 20keV creata de un condensator, si deflectati daorita unor cimpuri magnetice special create (pentru ca ei sa scaneze intreaga suprafata a ecranului de televizor).

Aceleasi principii stau si la baza sincroanelor, unele dintre acceleratoarele moderne de energie care ating energii de ... (vezi

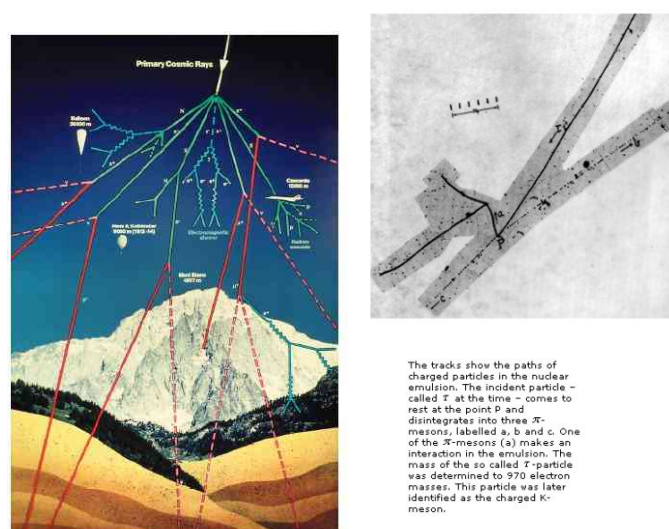
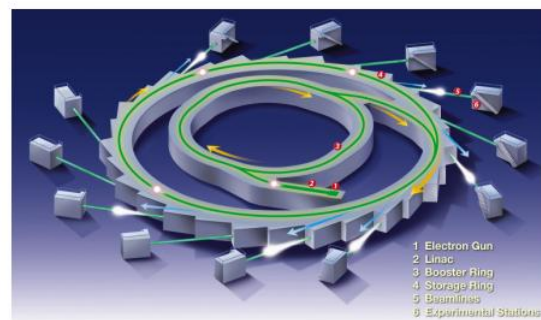


Figure 7.2: <http://www.phys.ksu.edu/~evt/Quarknet/Docs/si> <http://nobelprize.org/physics/laureates/1950/powell-lecture.pdf>



http://web.warracksc.vic.edu.au/~sci/phy/VCAA_Physics/web/about/_images/synch_diagram.jpg



<http://www.atom.kth.se/synres.html>

Figure 7.3: sincrotron.eps

Fig.7.3). Aici diversele particulele sunt accelerate intr-un inel, care nu este altceva decit o succesiune de condensatori uriasi. In momente intermediare, diverse cimpuri magnetice aplicate fac ca traiectoria particulelor sa ramina in incinta dorita, sau eventual sa fie trimise intr-un inel de stocare (vezi stinga Fig.7.3). La momentul dorit doua sau mai multe "beam"-uri de particule sunt trimise unul spre celalalt, creind ciocniri violente in urma carora alte particule pot fi create.

Identificarea particulelor care au loc in reactii se face dupa o analiza riguroasa, care include traiectoria modificata a particulelor datorata cimpului magnetic, si care conduce la aflarea

sarcinii lor. In practica inasa, evenimentele dorite pot fi asa rare, ca citeodata zeci sau chiar sute de mii de fotografii trebuie analizate pentru a obtine un singur eveniment dorit. Desigur ca acest din urma proces a fost imbunatatit substantial odata cu analiza automata a fotografiilor efectuata de computer.

Succesul acceleratoarelor moderne a impulsat guvernele diferitelor tari sa investeasca in constructia altor acceleratoare din ce in ce mai mari, care pot testa interactiune dintre particule la energii mai mari. Cele mai multe dintre aceste acceleratoare folosesc electroni sau pozitroni pentru a "bombarda" diversele tinte. Insa, la viteze din ce in ce mai mari, electronii incep sa emita radiatii sincrotron (vezi sectiunea ??) datorita traiectoriilor lor curbe din interiorul inelului circular. Aceasta emisie este inasa mai mica in cazul protonilor, pentru ca acestia au masa mai mare (vezi relatia ??), si de aceea se previzioneaza ca viitoarele acceleratoare vor functiona probabil cu protoni, sau alte particule de masa mai mare.

Putem mentiona aici ca, la inceput de acest nou mileniu, lumea asteapta darea in folosinta a celui mai mare acceleator din lume, numit "Large Hadron Collider" (LHC, vezi Fig.7.4). Acesta urmeaza sa se dea in folosinta la Geneva, si in el protonii vor putea fi accelerati la energii de $10^{12}eV$ (TeV). Tunelul in care aceste particule vor fi accelerate va avea o lungime de 27Km, intreaga constructie presupune un buget de ... miliarde de dolari, iar ... mii de cercetatori, ingineri si lucratori ii vor asigura functionarea.



<http://www.ihep.ac.cn/kejiyuandi/qianyan/ibm-ern/ern-lhc.jpg>



<http://livefromcern.web.cern.ch/livefromcern/antimatter/history/AM-history02-b.html>

Figure 7.4: LHC

LHC va avea cimpuri magnetice puternice datorate unor magneti cu supraconductori (prezentati in dreapta Fig.7.4). Pentru a realiza starea supraconductoare, acestia vor fi raciti cu Helium

lichid, care va asigura si racirea termica corespunzatoare. De pe acum inasa se asteapta complicatii in interpretarea datelor pentru ca desi protonii pot fi accelerate la viteze mai mari fara sa emita radiatie, ei sunt particule compuse din trei quarci, si ca atare interactia este mai dificil de modelat. In plus, probabilitatea evenimentelor dorite este redusa substantial (aproximativ 1 la 1 miliard) tot datorita structurii interne a protonilor. Astfel, este ca si cum am ciocni doua portocale (protonii in cazul nostru) asteptind sa vedem simburii lor (quarcii) ciocnindu-se.

Totusi inasa, cu ajutorul LHC, cercetatorii spera sa observe in primul rind *particula Higgs*, neobservata pina acum, si care este elementul esential de constructie al teoriei electroslab care va fi prezentata in sectiunea ?. In plus, se spera ca deasemenea "dark matter" isi va face aparitia pentru prima data in laboratoarele noastre. Nu se spera inasa sa se poate testa teoriile foarte avansate (ca teoria stringurilor, ce va prezentata in capitolul urmator), pentru ca acestea au nevoie de energii inca mai mari.

7.1.2 Particulele vin la viata

Am vazut in sectiunea precedenta cum noile particule pot fi fotografiate lasind *urme* in camera cu ceata, sau in complexii detectori ai accelatoarelor moderne. Cu astfel de fotografii ne vom intilni des in capitolul de fata, si de aceea este important de mentionat ca cercetatorii cauta sa identifice precis fiecare particula din caracteristicile urmei: sarcina electrica, masa si timpul de viata al particulei.

Am mentionat deja ca folosirea cimpurilor magnetice curbeaza traiectoria particulei daca aceasta are sarcina. Aceasta ne va da o indicatie despre *sarcina electrica* a particulei, poate singura proprietate a noilor particule care nu prezinta surprize: ea este mereu un multiplu de sarcina elementara e .

O alta caracteristica importanta este *masa de repaus* m_0 . Cum se determina? Afla.

Nu in ultima instanta, *timpul de viata* al particulei este important. Acesta este practic timpul de cind particula este creata si pina cind ea se sparge in mai multe componente, creind o "furculita" in fotografie. El se poate estima daca se stie viteza de deplasare a particulei, caci distanta se masoara direct pe fotografie.

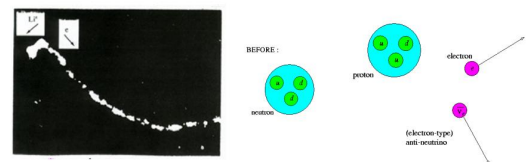


Figure 7.5: stinga: neconservare energie, dreapta: schema simplificata

Prima particula noua (in afara de electron, proton sau neutron) a carui existenta sa fie banuita a fost *antineutrino* $\bar{\nu}^1$. Ce s-a intimplat, in 1930 radioactivitatea era un proces cunoscut si studiat, nu il ultimul rind prin efortul sotilor Curie (verifica). Unul din procesele asociate radioactivitatii era asa numita "beta decay". In acestea un atom isi schimba tipul prin emisia unui electron. De exemplu:



¹Denumirile particulelor au variat in decursul timpului, in functie de cit se stia despre ele. Pentru a evita confuziile, am ales sa identificam particulele cu numele lor folosit in prezent, chiar daca initial acestea vor fi primit alt nume de la descoperitorii lor.

Daca consideram atomul intital in repaus, la o analiza sumara a conservarii energiei si impulsului (vezi exercitiul ??) vom obtine ca energia cinetica a electronului emis trebuie sa fie o *constanta* a reactiei. Cu toate acestea, in experiment s-a observat ca electronul emis are energii ce se intind pe un domeniu foarte larg, mereu insa mai mici decit energia cosntanta pe care o asteptam (vezi 7.5). Dupa un monent de confuzie (in care in-susi Bohr a sugerat ca legea de conservare a energiei poate nu mai este valabila), Pauli a propus ca o noua particula este emisa in reactie, care preia lipsa de energie, si care nu are sarcina electrica (pentru ca sarcina electrica este deja conservata). Ea este astazi identificata cu *antineutrino* (*neutrino* vine de la "micul neutron").

Astazi, se recunoaste ca radioactivitatea beta se datoreaza dezintegrarii (?) unui neutron, prezent in atomul de ${}^{40}_{19}\text{K}$ in exemplul de mai sus, dar absent in atomul de ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ce are insa un proton in plus:



Antineutrino (sau antiparticula sa neutrino) sunt insa foarte greu de detectat direct. Vom vedea in sectiunea ?? ca interactiunea acestora cu materia atomica este asa *slaba* (un neutrino de energie tipica 1MeV are o sectiune eficace de 10^{-43}cm^2). Acest neutrino poate strabate un zid gros de o mie de ani lumina de plumb, fara ca sa absorbit (?) de vreunul din atomii zidului. Stiind aceasta, nu este de mirare, ba chiar este remarcabil, ca prima detectie indirecta a antineutrino s-a facut aproape 20 de ani mai tirziu, si anume in 1956 de catre Frederick Reines si Clyde L. Cowan.

In anii 30' faptul ca protonii stau impreuna in nucleu era un mister. In mod normal, ne-am astepta ca ei sa se respinga datorita fortei electrostatice ce este mare (pentru ca protonii sunt foarte apropiati unul de celalt). In 1935, Hideki Yukawa a propus ca o *alta* forta tine protonii strinsi in nucleu. In opinia lui, doi protoni vor fi atrasi printr-o *forta tare*, mult mai puternica decit cea electromagnetica. In analogie cu electromagnetismul, unde fotonul mediaza interactia, Yukawa a propus ca si interactia tare este mediata de o particula (tot boson), numita astazi *pion* π .

Spre deosebire insa de foton, care nu are masa de repaus, *pionul* π va avea o masa de repaus. Motivul are de-a face cu raza de actiune a fortelor. Am vazut in sectiunea ?? (arata!) ca raza de actiune a fortelor electromagnetice este aproape nelimitata deoarece fotonul are o masa nula. Fortele tari actioneaza insa evident pe distante scurte, pentru ca doi nuclei neutri nu se atrag sau resping intre ei la distante mai mari decit razele lor.

Daca consideram raza de actiune a fortelor nucleare de aproximativ dimensiunea nucleului ($\Delta x = 2\text{fm}$), vom obtine ca un pion virtual (cel care provoaca interactia prin intermediul diagramelor lui Feynmann) va strabe aceasta distanta intr-un timp de $\Delta t = \Delta x/c$, unde am considerat ca viteza pionului este aproximativ viteza luminii. Pentru a exista aceasta perioada de timp, pionul virtual are nevoie de o incertitudine in energia sa data de relatia lui Heisenberg ??:

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar c}{2 \cdot 10^{-15}\text{s}} \simeq 100\text{MeV} \quad (7.3)$$

Aceasta incertitudine in energia particulei virtuale ne da o masa de repaus pentru particula observabila (vezi cum!, intelege mecanismul) de aproximativ $m_\pi \simeq \Delta E/c^2 \simeq 100\text{MeV}$. Observam in relatii de mai sus ca o interactie la distante mari a fotonului $\Delta x \rightarrow \infty$ ne-ar fi condus la o masa de repaus a fotonului observabil de $\Delta E \simeq 0$ asa cum ne asteptam.

In Fig.7.1 am prezentat prima *masuratoare* experimentală a unei alte particule decit cele clasice. Din estimarile lui J. C. Street si E. C. Stevenson a reiesit ca aceasta masa este are o valoare situata intre cea a electronului si protonului, cu o

valoare nu prea indepartata de 100MeV , si de aceea tentativa a fost mare ca ea sa fie identificata cu pionul propus de Yukawa. Astazi stim insa ca aceasta a fost o greseala, si ca particula din Fig.7.1 este o cu totul alta p[articula decit pionul, numita astazi *muon* μ .

Unul dintre rezultatele care au lamurit aceasta confuzie este cel prezentat in Figura 7.6, si obtinut de Powell si colaboratorii sai cu ajutorul emulsiilor fotografice. Aici prima particula ce vine din dreapta jos este intr-adevar un *pion* π (particula lui Yukawa). Aceasta se dezintegreaza in stinga jos intr-un *muon* μ (particula lui J. C. Street and E. C. Stevenson, care merge in sus) si alte particule invizibile. La rindul lui, *muonul* μ se dezintegreaza mai tirziu intr-un electron si alte particule invizibile.

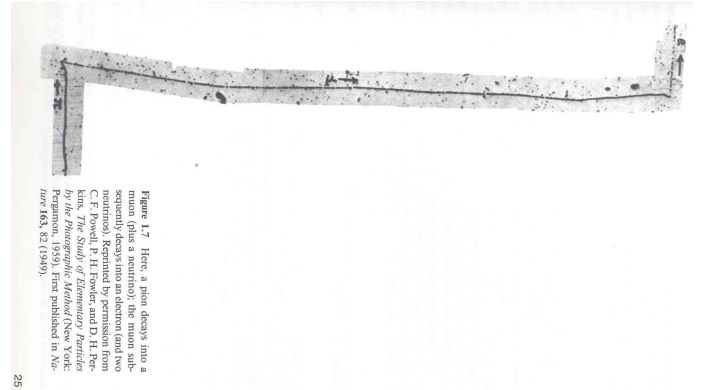


Figure 7.6: poze luate din [?]]

Desigur ca identificarea particulelor de mai sus s-a facut printr-o analiza riguroasa ce n-o prezentam aici. In plus analize ulterioare au identificat particulele lipsa ca fiind *neutrini*, care am mentionat ca nu lasa urme pe placile fotografice, pentru ca interactioneaza foarte slab. Astzi, reactiile de dezintegrare atasate figurii 7.6 se scriu sub forma:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (7.4)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (7.5)$$

In relatiile 7.77 si 7.4 am aflat deja primele noastre reactii de dezintegrare (?) a particulelor elementare. In ele am tinut sa pastram notatia actuala, diferentiind diversele forme de neutrini si pioni sau particulele de antiparticulele lor (fapt ce nu era neaparat clar de la inceput pentru cei ce le-au descoperit). Dintre cele de mai sus, neutrino ramine si astazi o particula elementara, pionul insa nu. Cu toate acestea, cimpul cuantic care descrie rezonabil pionul este cimpul scalar (?), introdus in ??, in care masa particulei scalare este chiar masa pionului $m = m_\pi$.

Pionul care apare in Figura 7.6 este pionul π^- . Antiparticula sa a fost detectata mai tirziu (?) si ea se noteaza cu π^+ , aparind intr-o reactie "oglinnda" celei precedente:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (7.6)$$

$$(7.7)$$

In plus, mentionam ca mai exista si particula π^0 , diferita de cei doi pioni π^- si π^+ .

In 1947, anii de dupa razboi, Rochester si Butler fac publica o alta fotografie, efectuata in camera cu ceata de aceasta data, si prezentata in Fig.7.7. In multitudinea de urme lasate de razele cosmice, ei au identificat "furculita" din partea jos ca fiind procesul de dezintegrare a unei noi particule, numita *kaon*

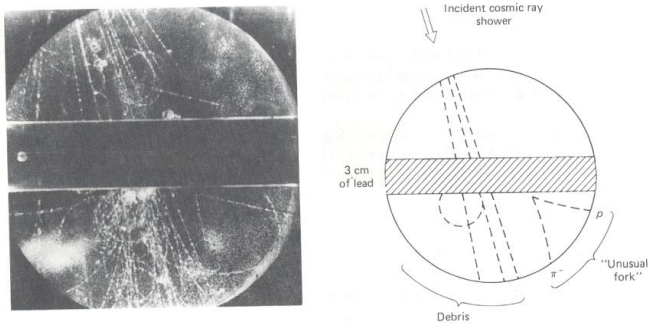
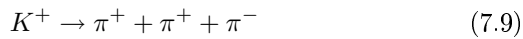


Figure 7.7: poze luate din [?]. cred ca schita e gresita si trebuie sa includa π^+ in loc de p !

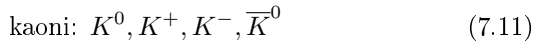
K^0 . Aceasta se produce dupa ce razele cosmice lovesc o placa de plumb plasata la mijloc. Astazi, aceasta reactie se scrie ca:



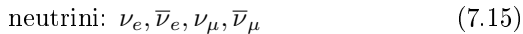
Privind multitudinea de raze din fotografie nu putem sa nu admiram rabdarea si indrazneala cercetatorilor din acele timpuri. Fotografia din Fig.7.2, publicata de Powell in 1949, scoate in evidenta dezintegrarea unui alt tip de kaon, K^+ , care este:



Astazi se stie ca pionii si kaonii fac parte din familia mezonilor. O *prima generatie* de *mezoni* este data de particulele (pune-le pe toate, vezi ce e cu antiparticulele!):



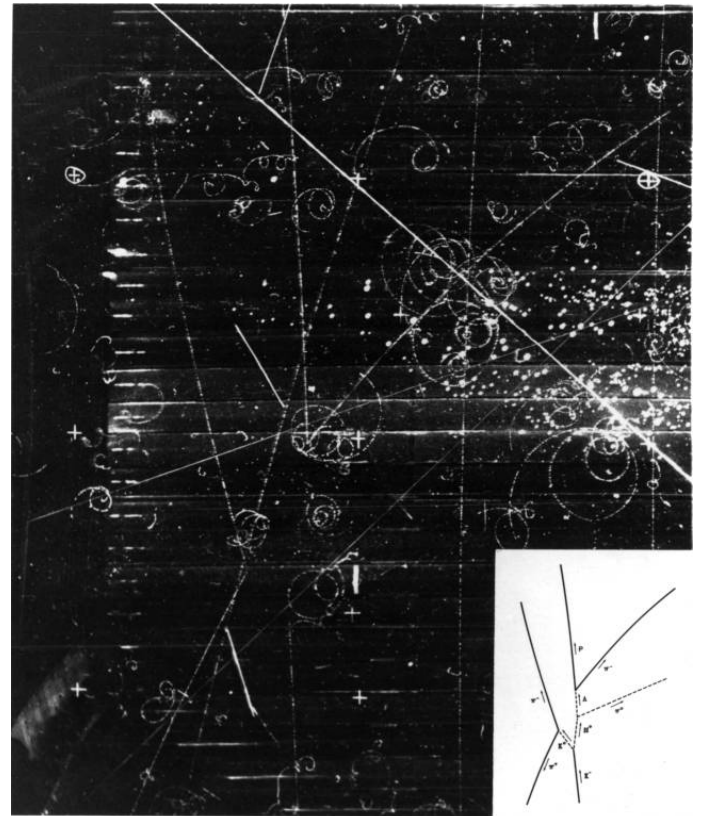
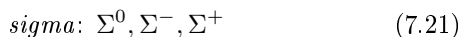
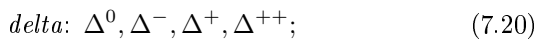
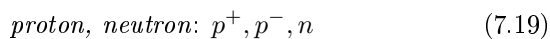
Muonul identificat mai devreme in Fig.7.1, impreuna cu electronul si neutrinii face parte dintr-o alta familie, numita *leptoni*. In primele lor *doua generatii* acestia sunt:



In reactiile prezentate mai devreme pentru kaoni si pionii nu a intervenit protonul sau neutronul. Acestea insa au fost identificate deasemenea, ca de exemplu cel din Fig.7.8, in care au loc urmatoarele reactii (verifica primele doua reactii!):



Tipurile de reactie in care intervin neutronii sau protonii (ca cea de-a treia de mai sus) introduc noi particule dintr-o alta clasa, numite *barioni*. Intr-o *prima generatie* de *barioni*, acestea au fost identificate ca fiind (nu pun inca Ω^-). (pune-le pe toate, vezi ce e cu antiparticulele!, care au si care sunt antiparticulele lor, antineutroni exista p.29):



Production and decay of a neutral cascade hyperon (Ξ zero).

Figure 7.8: <http://www.lbl.gov/image-gallery/image-library.html> : A negative kaon entering from below produces an uncharged kaon and a previously unknown particle that, in turn, decays into two uncharged particles

Explozia de noi particule l-a determinat pe Lamb sa spuna in prezentarea de primire a premiului Nobel din 1955 ca, daca inainte fizicienii erau recompensati cu un premiu Nobel pentru descoperirea unei noi particule elementare, astazi ei ar trebui pedepsiti cu o amenda de 10000\$!

In Fig.7.9 prezentam un tabel cu *mezonii* si *barionii* din prima generatie de particule elementare. El da masa, timpul de viata, si sarcinile particulelor, precum si compozitia acestora, despre care va fi vorba in sectiunea urmatoare.

7.1.3 Sistematizarea particulelor

Am mentionat in sectiunea precedenta cele trei mari familii de particule: *leptonii*, *mezonii* si *barionii*, exemplificand particulele care fac parte din prima generatie pentru fiecare. Nu am insistat cum se identifica si construiesc aceste familii, si nu vom intra nici in aceasta sectiune in detalii. Aici vom prezenta numai principalele linii in care forma interna a *mezonilor* si *barionilor* a iesit la iveala (*leptonii* au ramas pina astazi *particule elementare*).

In toate reactiile de mai sus, energia particulelor initiale trebuie sa fie mai mare decit a celor finale. In plus, sarcina electrica trebuie sa se conserve. Dar practica ne spune ca putem atasa particulelor si alte sarcini, care deasemenea sa se conserve in reactii. O astfel de sarcina, care identifica de fapt familia barionilor, este *sarcina barionica* ² B. Aceasta a fost introdusa initial pentru a explica de ce dezintegrarea protonului in poz-

²desi am fi tentati sa introducem o sarcina mezonica, ea nu exista!

BARYONS (Spin $\frac{1}{2}$)

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	uud udd	+1 0	938.280 939.573	∞ 900	—
Λ	uds	0	1115.6	2.63×10^{-10}	$p\bar{p}, n\pi^0$
Σ^+	uus	+1	1189.4	0.80×10^{-10}	$p\pi^0, n\pi^+$
Σ^0	uds	0	1192.5	6×10^{-20}	$\Lambda\gamma$
Σ^-	dds	-1	1197.3	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$
Ξ^0	uss	0	1314.9	2.90×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	dss	-1	1321.3	1.64×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$
Λ_c^+	udc	+1	2281	2×10^{-13}	not established

BARYONS (Spin $\frac{3}{2}$)

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
Δ	uuu, uud, udd, ddd	+2, +1, 0, -1	1232	0.6×10^{-23}	$N\pi$
Σ^*	uus, uds, dds	+1, 0, -1	1385	2×10^{-23}	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
Ξ^*	uss, dss	0, -1	1533	7×10^{-23}	$\Xi\pi$
Ω^-	sss	-1	1672	0.82×10^{-10}	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$

PSEUDOSCALAR MESONS (Spin 0)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\pi^\pm$	$u\bar{d}, d\bar{u}$	+1, -1	139.569	2.60×10^{-8}	$\mu\nu_\mu$
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	134.964	8.7×10^{-17}	$\gamma\gamma$
$K^\pm$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	+1, -1	493.67	1.24×10^{-8}	$\mu\nu_\mu, \pi^+\pi^0, \pi^+\pi^+\pi^-$
$K^0, \bar{K}^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0, 0	497.72	$\begin{cases} K_S^0 0.892 \times 10^{-10} \\ K_L^0 5.18 \times 10^{-8} \end{cases}$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$
η	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	548.8	7×10^{-19}	$\pi e\nu_e, \pi\mu\nu_\mu, \pi\pi\pi$
η'	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	957.6	3×10^{-21}	$\gamma\gamma, \pi^0\pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
$D^\pm$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	+1, -1	1869	9×10^{-13}	$\eta\pi\pi, \rho^0\gamma$
$D^0, \bar{D}^0$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0, 0	1865	4×10^{-13}	$K\pi\pi$
$F^\pm$ (now $D_s^\pm$)	$c\bar{s}, s\bar{c}$	+1, -1	1971	3×10^{-13}	not established
$B^\pm$	$u\bar{b}, b\bar{u}$	+1, -1	5271	$\left. \begin{matrix} 14 \times 10^{-13} \\ 6 \times 10^{-23} \end{matrix} \right\}$	$D + ?$
$B^0, \bar{B}^0$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	0, 0	5275		$KK\pi, \eta\pi\pi, \eta'\pi\pi$
η_c	$c\bar{c}$	0	2981		

VECTOR MESONS (Spin 1)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
ρ	$u\bar{d}, d\bar{u}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	+1, -1, 0	770	0.4×10^{-23}	$\pi\pi$
K^*	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	+1, -1, 0, 0	892	1×10^{-23}	$K\pi$
ω	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	783	7×10^{-23}	$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma$
ϕ	$s\bar{s}$	0	1020	20×10^{-23}	$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$
J/ψ	$c\bar{c}$	0	3097	1×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
D^*	$c\bar{d}, d\bar{c}, c\bar{u}, u\bar{c}$	+1, -1, 0, 0	2010	$>1 \times 10^{-22}$	$D\pi, D\gamma$
Υ	$b\bar{b}$	0	9460	2×10^{-20}	$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$

Figure 7.9: Pune o poza ca cea din [?]]
de pe prima pagina.

itron nu este observata in experiment (reactia ar fi permisa, pentru ca protonul are energie de repaus mult mai mare decit pozitronul, si aceeasi sarcina). Protonul ar avea $B = 1$ (antiprotonul $B = -1$) iar pozitronul si toti leptonii (si mezonii) $B = 0$. Dezintegrarea protonului nu ar avea atunci loc pentru ca nu ar fi conservata sarcina barionica ! In plus, protonul nu s-ar putea dezintegra nici intr-un neutron pentru ca are masa de repaus mai mica decit a neutronului, si astfel protonul ramine stabil in Univers pentru un timp foarte indelungat (nemasura-

bil inca astazi).

O alta sarcina care trebuie sa se conserve in reactii este *sarcina "strange"* S . Ea a fost introdusa pentru a explica o ciudatenie a barionilor si mezonilor (? , de unde si numele, "strange" inseamna "ciudat" in engleza). Astfel de exemplu, sectiunile eficace ale proceselor in care particula Λ^0 (prezentata in Fig.7.8) este produsa sunt caracteristice *interactiilor tari* ale lui Yukawa. Acelor sectiuni li se pot asocia timpi foarte scurti de producere de ordinul a $10^{-23}s$ (nu inteleg, citeste).

Pe de alta parte, particula Λ^0 este destul de stabila comparativ la timpii nucleari. Astfel, putem estima din Fig.7.8 timpul de viata al particulei Λ^0 daca luam in considerare distanta de aproximativ ... de pe fotografie. Viteza o aproximam la $v = 0.1c$, in lipsa de orice informatie, caci stim ca ea nu poate fi mai mare ca c , dar nu o putem lua nici asa de mica ca viteza unei carute (daca pierdem un ordin, doi de marime, nu va fi bai in calculul acesta). Obtinem atunci un timp de viata relativ lung pentru interactiile nucleare, de $10^{-10}s$.

Diferenta mare intre cei doi timpi ai particula Λ^0 se datoreaza diferentei intre tipurile de reactie in care este produsa si in care ea se dezintegreaza mai tirziu. Astfel, ea este produsa in reactii care includ *interactie tare*, si este desintegrata in reactii care sunt datorate *interactiunii slabe*. Sarcina "strange" S este construita pentru interactiunile tari, in asa fel incit ea sa se conserve in aceste interactiuni, dar nu neaparat si in cele slabe. Valorile acesteia sunt date deasemenea in tabelul 7.9.

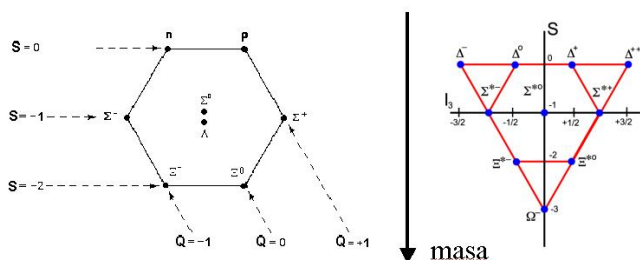


Figure 7.10: pune numai S si Q pe axe. colorat!

In afara de sarcini, o alta indicatie a faptului ca particulele sunt ordonate este data de *masa* particulelor. Astfel, este usor de vazut in tabele ca particulele notate cu aceeasi lieta greceasca au cam aceeasi masa indiferent de indice. Aceasta "potrivire" nu este suprinzatoare, caci si protonul si neutronul au mase apropiate. Folosind aceasta potrivire de mase, si noile sarcini ale particulelor, Murray Gell-Mann a asezat particulele in diverse forme geometrice, exemplificate in Fig.7.10. Incercarea aceasta, desi aduce cu gindul la incercarile geometrice al lui Kepler de a ordona orbitele planetelor, a fost de succes.

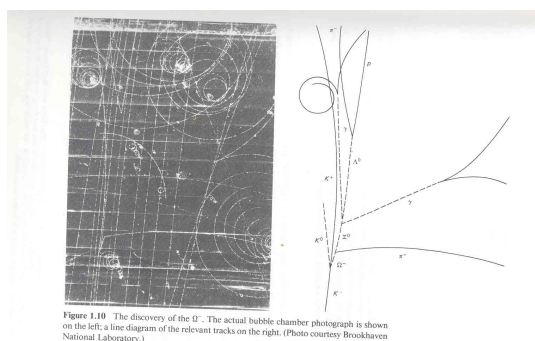


Figure 7.11: poze luate din [?]

Astfel, vedem ca nu numai sarcinile electrice, cele "strange" ori masele se potrivesc, dar chiar si diferentele dintre mase par sa fie cam aceleasi. Aceste diagrame poate ca nu ar fi impresionat mult lumea stiintifica, daca ele nu ar fi prezis o particula nedescoperita inca. Este vorba de particula Ω^- (de la virful de jos) nu fusese observata experimental atunci cind Murray Gell-Mann a desenat diagramele. Diagrama "decuplet" din Fig.7.10 ne spune ca ea ar avea sarcina strange $S = -3$, sarcina electrica

$Q = -1$, iar masa aproximativa

$$m_{\Omega^-} \simeq m_{\Xi^-} - (m_{\Sigma^+} - m_{\Xi^+}) \simeq 1681 MeV \quad (7.24)$$

Figura 7.11 reprezinta prima observatie experimentala a particulei Λ^- , iar reactiile in care ea este produsa si "dezintegrata" i-au confirmat cu succes cele doua sarcini precum si valoarea masei.

Stimulat de succesul acesta intermediar, Murray Gell-Mann a propus inca o diagrama, mult mai simpla, care ar putea explica constructiile tuturor *mezonilor* si *barionilor*. Aceasta, prezentata in 7.12 contine numai trei particule elementare, numite *quarci*. Quarcii d si u ar avea aceeasi sarcina "strange" si cam aceeasi masa (in ordin de marime, desigur), insa o sarcina elementara care nu mai este numar intreg!

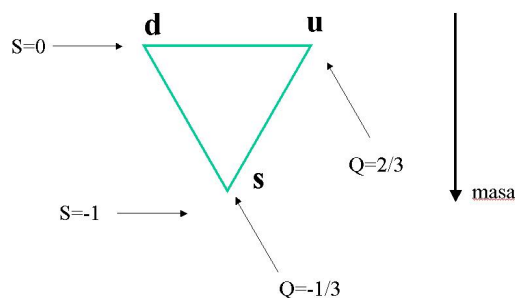


Figure 7.12: triunghi quark

Desigur ca langa acesti quarci, ar exista si antiquarci, particule elementare avind toate sarcinile "oglinnda" si aceeasi masa. *Barionii* ar fi formati atunci din *trei quarci* (nici un antiquark insa!) iar *mezonii* dintr-un quarc si un antiquark de alt tip. Desigur ca atunci *antibarionii* (antiprotionul, antineutronul, etc.), ar fi formati numai din antiquarci. Compozitia noilor particule este prezentata deasemenea in tabelul 7.9. De aici se vede ca masele de repaus ale quarcilor sunt mult mai mici decit masele noilor particule, dar diferenta de masa se explica prin energia de interactie care pastreaza quarcii impreuna.

Desigur ca si aceasta propunere a intimpinat scpticism, nu in ultimul rind datorita faptului ca sarcina quarcilor nu este numar intreg si ca nici o particula cu o astfel de sarcina nu a fost observata, ca sa nu mai spunem ca nici quarcii nu au fost observati direct. Astazi stim ca intr-adevar nu este posibil sa observam quarci liberi, datorita *fortelor de culoare* (vezi sectiunea ??). Cu toate acestea, confirmarea faptului ca protonul are o structura interna asociata cu trei particule, a venit din experimentele de imprastiere pe nuclei.

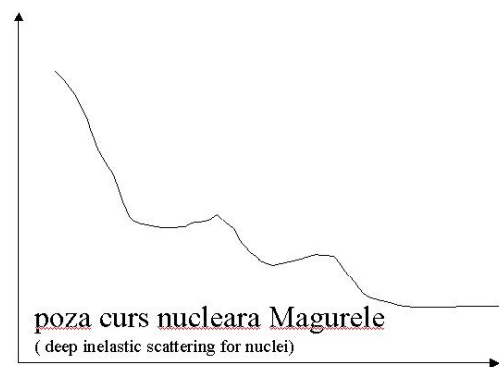


Figure 7.13: structura proton

In Fig.7.13 prezentam rezultatul obtinut de grupul lui ... in ..., in care se vede ...

In final, in ciuda faptului ca a existat o jungla de particule elementare, vedem ca cercetatorii au reusit sa identifice *particulele elementare*. Ele sunt prezentate in 7.14 (din table lipseste particula Higgs!), si consistau din doua familii, asociate *quarcilor* si *leptonilor*. Fiecare din acestea au doua tipuri de particule, *fermioni* si *bosoni*. Fermionii (quarci si leptonii) formeaza caramizile Universului, iar bozonii (cum ar fi fotonul) poarta interactia dintre fermioni. Vom vedea in sectiunile urmatoare ca interactia tare dintre quarci este purtata de *gluoni*, interactia electromagnetica de fotoni, iar interactia slaba de particulele W si Z . In plus acestora li se mai adauga particula Higgs, nedectata inca experimental.

FERMIONS				BOSONS			
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2			Unified Electroweak spin = 1	
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge	Name	Mass GeV/c ² Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1 \times 10^{-8}$	0	u up	0.003	2/3	γ photon	0 0
e electron	0.000511	-1	d down	0.006	-1/3	W^-	80.4 -1
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3	W^+	80.4 +1
μ muon	0.106	-1	s strange	0.1	-1/3	Z^0	91.187 0
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3	Strong (color) spin = 1	
τ tau	1.7771	-1	b bottom	4.3	-1/3	Name	Mass GeV/c ² Electric charge
						g gluon	0 0

Figure 7.14: pune masele si sarcinile

In Figura 7.14 particulele sunt plasate pe coloane, fiecare coloana reprezentind o generatie (astazi quarcul s se considera ca face parte din a doua generatie). Genratiile sunt in principal date de masele particulelor, cele din generatii mai mari avind mase mai mari. Aceasta ordonare sugereaza clar ca poate particulele din generatii superioare sunt stari excitate ale unor alte particule si mai elementare, inasa acest lucru inca nu este clar astazi, si despre el va fi vorba in capitolul dedicat teoriei stringurilor. Tot ea sugereaza ca poate alte generatii exista, si ele nu fost observate datorita maselor foarte mari. Se vede astfel in Figura 7.14 ca deja noi quarci de mase mai mari au aparut, ca c, b, t , care nu au fost introdusi in propunerea initiala a lui M. Gell-Mann, ca si noi leptoni (τ, ν_τ).

In final se poate spune ca "caramanzile" Universului, asa cum sunt prezentate in 7.14 sunt cunoscute. Ramine sa vedem inasa care este natura exacta a interactiilor, si sa urmarim deasemenea cum au fost introduse particulele care poarta interactiile (*gluonii* pentru interactiile *tari*, si particulele W si Z pentru cele *slabe*).

7.2 Cromodinamica cuantica

7.2.1 Quarci si "culorile" lor

Tabelul 7.9 ascunde o particularitate cruciala pentru intelegerea proprietatilor quarcilor. Astfel, barionul Δ^{++} este compus din trei quarci de acelasi tip u . Acum, quarcul (impreuna cu anti-quarcul sau) este de asteptat sa fie un fermion, precum electronul de exemplu. In acest caz ne-am astepta ca quarci sa fie asezati pe "orbite" in interiorul particulei Δ^{++} precum electronii in interiorul atomului. Cum nu putem pune mai mult de doi fermioni pe aceeasi "orbite" (conform principiului lui Pauli), ar trebui ca unul din cei trei quarci " u " sa fie asezat pe o "orbita" superioara.

Cu toate acestea, nu ne astaptam ca in particulele din tabelul 7.9 sa fie "vizibile" aceste orbite superioare (de ce?). Cu alte cuvinte, ne-am astepta sa gasim pe orbita "ground-state" *toti* cei trei quarci, care pot fi asezati fara probleme daca ei ar fi diferiti. Vedem atunci ca, daca ne asteptam ca cei trei quarci u sa fie asezati pe "ground-state"-ul particulei Δ^{++} , ei ar trebuie fie *diferiti*!

Acest lucru se poate face admitind ca quarci u exista in trei "sorturi": *rosii* (r), *verzi* (v) si *albastru* (a)!. Admitind ca fiecare din quarci u ai particulei Δ^{++} reprezinta una din cele trei sorturi, atunci ei ar fi diferiti, si deci ar putea fi asezati toti trei fara nici o problema pe starea "ground-state".

Ipoteza, formulata tot de M.Gell-Mann, pare "scoasa din cutie" pentru a explica o particularitate a tabelului 7.9. Cu toate acestea, asa cum vom vedea mai tirziu, ea este practic *singura* supozitie cu ajutorul caruia putem scrie lagrangeanul cimpului ce descrie quarci si interactia dintre ei!. Inainte inasa de a scrie acest lagrangean, sa vedem care sunt implicatiile unei astfel de supozitii.

In primul rind, sa mentionam ca "culoarea" asociata quarcilor, nu are absolut nici o legatura cu culoarea obiectelor pe care o vedem in jur. Ea defineste practic trei "sorturi" de quarci, si este privita citeodata ca o noua sarcina, precum este sarcina electrica. Daca inasa sarcina electrica este de doua tipuri (pozitiva si negativa), sarcina de "culoare" a quarcilor este de trei tipuri: r, v si a , indiferent de tipul quarcilor (s, p, d , etc.). Cu toate acestea, trebuie sa fim atenti cu ultima interpretare, deoarece un singur quarc va avea o singura culoare (practic este un sort din cele trei), si *niciodata* o amestecatura de mai multe culori. Antiquarci vor fi atunci si ei de trei "sorturi", asociate celor trei sporturi de quarci. Din motive evidente, ei se numesc antialbastri, antiverzi si antirosii.

Pentru exemplificare, prezentam schematic in figura 7.15 structura nucleului de Hidrogen. Aici, protonul din nucleu este format din doi quarci u si unul d , de trei culori diferite. Pe de alta parte, neutronul este format din doi quarci d si unul u , de asemenea de trei culori diferite. In plus, am prezentat si interactia de atractie dintre neutron si proton, care are loc prin intermediul unui boson π *virtual*, compus dintr-un quarc si un antiquarc. Bosonul este *virtual*, el existind practic numai atita timp cit sa se transmita *interactia tare* intre proton si neutron.

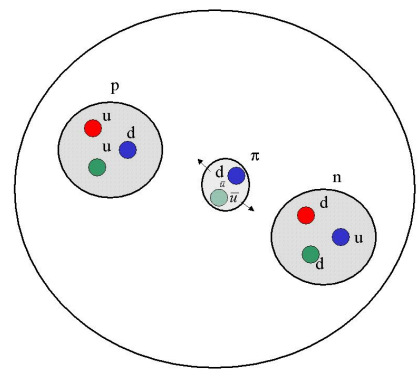


Figure 7.15: pune culorile la mezon sa se potriveasca

Din figura 7.15 se vede clar ca *interactiunea tare* care descrie atractia dintre nucleoni (protoni si neutroni) este diferita in prima instanta de interactiunea de atractie intre quarci (cea care face ca quarci sa stea intr-o singura particula). Aceasta din urma este descrisa de *cromodinamica* (de la "chromo-" ce inseamna colorat, verifica), si despre aceasta va fi vorba in aceste sectiuni. Cu alte cuvinte, cromodinamica descrie atractia dintre quarci colorati.

M.Gell Mann a folosit si aceasta noua sarcina a quarcinilor

pentru a "explica" de ce quarcii nu sunt vazuti separati. Astfel, el a propus ca cei trei quarci dintr-un barion (protonul de exemplu), vor fi obligatoriu de cele trei sorturi (culori) diferite, a caror "suma" va da alb. De fapt, acesta si motivul pentru care am ales cele trei culori ca fiind rosu, verde, si albastru, pentru ca se stie ca daca amestecam aceste culori vom obtine culoarea alb. Astfel, definim "suma" noilor sarcini ca culoarea "amestecaturii". Tot asa dupa cum atomul de hidrogen are o sarcina pozitiva si una negativa a caror suma creaza un atom neutru, tot asa si cei trei quarci de culori diferite vor crea o particula de culoare neutra, o particula pe care o vom considera "alba". Din nou insa, sa fim atenti, pentru ca niciodata nu vom spune ca un quark este "colorat" cu mai multe culori. Un quark are o singura culoare, fiind de un singur sort (culoare).

Dupa M.Gell-Mann, toate particulele observabile ar trebui sa fie *albe*. In consecinta, un quark nu va fi niciodata observat liber, pentru ca el nu poate fi alb, fiind de un anumit sort (culoare). Aceasta explica in mod natural si singurele combinatii observate in experiment. Astfel, nu putem crea niciodata particule din doi quarci qq , pentru ca numai din doua culori din cele trei avute (rosu, verde si albastru) nu obtinem alb. Pe de alta parte, putem construi culoarea alba dintr-o culoare si o "anti-culoare", adica dintre un quark si un antiquarc ($q\bar{q}$), chiar daca acestia sunt de tipuri diferite (s, p, d , etc.). Practic, singurele combinatii observate in experiment vor fi barionii qqq , antibarionii $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ si mezonii $q\bar{q}$.

Desigur insa ca teoria cromodinamicii cuantice trebuie sa explice de ce numai aceste combinatii observate in experiment. Inainte de a construi lagrangeanul asociat acestei teorii, sa mai facem o observatie finala asupra lagrangeanului electrodinamicii cuantice.

7.2.2 Cuplajul minimal Yang-Mills in electrodinamica

Am vazut in capitolele precedente descrierea cimpului electromagnetic in interactie cu electronii. In decursul procesului un lucru remarcabil, des intilnit in fizica, s-a intimplat. Astfel citeodata, ecuatii ce pareau la inceput complicate au fost apoi simplificate, relevind o structura mai adinca a materiei. Poate exemplul cel mai relevant ramine cel al ecuatiilor lui Maxwell pentru cimpurile electrice si magnetice E si B ??, ce au fost simplificate sub forma ecuatiei pentru potentialele vectoriale A si ϕ ?? . Cu toate acestea, surprizele ascunse in ecuatiile electrodinamicii nu se opresc aici.

Astfel, sa consideram din nou lagrangeanul ?? al cimpului lui Dirac ce descrie electroni care nu interactioneaza intre ei:

$$L_e = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (7.25)$$

Se observa ca lagrangeanul este invariant (are aceeasi valoare) la transformarea de etalonare *globala*:

$$\psi'(x) = e^{i\lambda\theta}\psi(x) \quad (7.26)$$

unde $\lambda\theta$ este de fapt o constanta reala, impartita in doua pentru motive ce vor fi clare mai jos. Practic, daca $\psi(x)$ este o solutie care descrie un cimp evoluind datorita lagrangeanului, atunci si $\psi'(x)$ va descrie la fel de bine aceeasi evolutie.

Transformarea de mai sus o numim de etalonare printr-o referinta mai veche la teoria relativitatii. Astfel, consideram un *etalon* in lagrangeanul de mai sus faza *globala* pe care o alegem pentru functia de unda a electronului. Daca de exemplu alegem faza functiei de unda astfel incit ea sa fie nula in origine $\psi(0) = e^{i*0} * 1$, spunem ca am ales un etalon. O puteam alege la fel de bine astfel incit $\psi(0) = e^{i*\pi/2} * 1$, si functia $e^{i*\pi/2}\psi(x)$ ar fi descris aceeasi comportare a electronului, si am fi avut alt etalon.

Comparatia cu teoria relativitatii isi are radacini istorice (vezi [?]), si ea sugereaza un lucru important. Astfel, in teoria relativitatii, etaloanele erau metrul si bataia unui ceas. Pentru ca ecuatiile in teoria relativitatii restrinse sa aiba aceeasi forma, trebuia sa folosim aceleasi etaloane (metre si ceasuri) in masuratorile din tot spatiul. Pe de alta parte, forma ecuatiilor ?? in teoria relativitatii generalizate nu depindeau de metrica aleasa. Cu alte cuvinte, indiferent daca un bat definit ca o unitate de lungime intr-un loc din Univers era mai mare ca alt bat folosit ca unitate de lungime in alt loc din Univers, ecuatiile relativitatii generalizate ?? erau aceleasi (practic, plasa metricii ce o asternem pe Univers nu trebuia sa aiba "ochiuri" egale).

Daca ne-am imagina ca etalonul atasat fazei cimpului lui Dirac este pur si simplu un alt "metru" intr-o alta dimensiune a Universului, atunci ne-am astepta si ca Lagrangeanul lui Dirac sa aiba aceeasi forma indiferent cum alegem faza (etalonul) in *fiecare* punct din spatiu. In acest caz, lagrangeanul ar trebui sa fie acelasi la transformarea:

$$\psi'(x) = e^{i\lambda\theta(x)}\psi(x) \quad (7.27)$$

indiferent ce $\theta(x)$ am elege noi. In acest caz teoria electronilor ar fi o teorie etalonata *local*, precum este teoria relativitatii generalizate. Cum Lagrangeanul 7 nu este evident invariant la transformarea de mai sus, este clar ca trebuie sa construim un alt lagrangean.

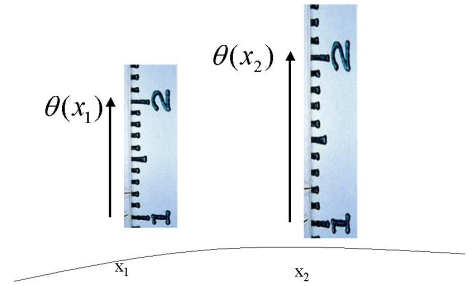


Figure 7.16: dupa [?]

Aceasta o putem face daca am adauga la cimpul $\psi(x)$ componente aditionale. Solutia, banuita deja, este sa adugam la cimpul $\psi(x)$, cimpul de patru componente $A_\mu(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ A_\mu(x) \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Privind la derivata ∂_μ din lagrangean, vedem ce se transforma ca:

$$\partial_\mu\psi'(x) = e^{i\lambda\theta(x)} [\partial_\mu + i\lambda\partial_\mu\theta(x)]\psi(x) \quad (7.29)$$

Pentru a compensa variatia data de cel de-al doilea termen, alegem ca cimpul $A_\mu(x)$ sa se tranforme ca:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (7.30)$$

Definind operatorul

$$D_\mu = \partial_\mu - ie\lambda A_\mu(x) \quad (7.31)$$

vedem ca el se transforma simplu ca:

$$(D_\mu \psi)' = e^{BQ\theta(x)} D_\mu \psi \quad (7.32)$$

si deci urmatorul lagrangean este invariant la orice transformare $\theta(x)$:

$$L_e = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (7.33)$$

Lagrangeanul corespunzator celor doua cimpuri ar fi atunci in prima instanta 7.33 si el are proprietatea ca este invariant (acelasi) pentru *orice* transformare $\theta(x)$ am alege noi, daca alegem noile cimpuri $\phi(x)'$ si $A'_\mu(x)$ dupa ecuatiile 7.27 si 7. Cu alte cuvinte, noul lagrangean este invariant la orice schimbare *locala* de etalon $\theta(x)$, asa cum ne-am dorit.

Dar acum vedem ca lagrangeanul 7.33 este dat in fapt de prima componenta a lagrangeanului electrodinamicii cuantice ??! Cu alte cuvinte, construind o teorie invarianta la schimbarea de etalonare locala, am dat partial peste electrodinamica cuantica! Desigur insa ca la lagrangeanul ?? se mai pot adauga alti termeni care sa contina numai cimpul $A_\mu(x)$ si care sa fie si ei invarianti la transformarea 7. Se verifica direct ca unul dintre acestia este termenul al doilea din lagrangeanul electrodinamicii cuantice ??:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.34)$$

unde $F^{\mu\nu}$ este dat de ?? . In fapt, luind in calcul si posibilitatea ca lagrangeanul sa fie renormalizabil, se poate arata ([?]) ca termenii de tipul celui de mai sus sunt singurii care se pot adauga.

Vedem atunci cum, incercind sa construim o teorie invarianta la transformari locale de simetrie $\theta(x)$, ajungem la un lagrangean:

$$L = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.35)$$

care este identic cu cel al electrodinamicii cuantice. Practic, forma ?? a electrodinamicii cuantice ascundea o inca lege fundamentala: invarianta la transformari locale de etalonare. De aici incolo vom cere ca fiecare teorie fizica pe care o construim sa-si pastreze aceasta lege, si vom incerca sa aplicam aceasta lege in cazul cromodinamicii cuantice.

Este interesant ca acest aspect l-am regasit prezent de la inceputurile constructiei electromagnetismului clasic, acolo unde am vazut ca exista o libertate in alegerea vectorilor potentiali $\mathbf{A}$ si ϕ (vezi relatiile ??). Cu toate acestea, aceasta libertate in alegerea etalonarii determina si functia de unda a electronului $\psi(x)$ si pe cea a fotonului $A_\mu(x)$. De aceea rezultatul experimentului lui Bohm (vezi??) este independent de etalonare!

In final remarcam ca cimpului electromagnetic A_μ nu i-am fi putut aduga un termen de masa in lagrangeanul precedent sub forma $m^2 A^\mu A_\mu/2$, pentru ca acest termen nu ar fi fost invariant la transformarea . Cu alte cuvinte, fotonul nu trebuie sa aiba masa! Aceast proprietate se dovedeste a fi generala cimpurilor Yang-Mills (cele construite in asa fel incit sa fie invariante la transformari locale de etalonare) : bosonii care mediaza interactia (precum fotonul) nu au intial masa. Ei pot insa "acumula" masa prin mecanisme specifice, cum este ruperea de simetrie, de care va fi vorba in sectiunea ??.

7.2.3 Lagrangeanul QCD nerenormalizat

Am afirmat in sectiunea ?? ca supozitia prezentei "culorii" pentru quarci este singura necesara a construi lagrangeanul cimpului cuantic al quarcilor si a descrie interactia dintre quarci. Suntem in masura acum sa aratam cum se poate realiza acest lucru.

Pentru aceasta sa consideram ca exista mai multi quarci de arome f (u , s , d , etc.), fiecare din ei venind in trei sorturi colorate c (rosu, verde si albastru), asa cum am discutat in sectiunea ?? . Un quark de aroma f si culoare c il vom identifica atunci prin notatia q_f^c .

Pe de alta parte, quarkul q_f^c (si antiquarkul sau) este deplin asemannator unui electron, in aceea ca el este fermion (deci descris de un matrice coloana *spinor* cu patru linii), si are o anumita masa m_f . De aceea ne asteptam sa descriem comportarea sa cuantica printr-un lagrangean identic cu cel al lui Dirac ?? , in care doar masa particulei este modificata. Daca consideram ca quarcii nu interactioneaza deloc intre ei, atunci putem scrie forma lagrangeanului care descrie totalitatea quarcilor simplu ca:

$$L_0 = \sum_{fc} \bar{q}_f^c(x) (\not{D}_\mu - m_f) q_f^c(x) \quad (7.36)$$

Sa incercam acum sa urmarim constructia din sectiunea precedenta si sa vedem transformarea *globala* de etalonare la care lagrangeanul de mai sus este invariant. Astfel, am fi tentati sa facem alegerea $q_f^c(x) = e^{B\lambda\theta} q_f^c(x)$, in care numarul $\lambda\theta$ este constant pentru toate aromele f si culorile c . Desi alegerea de mai sus lasa intr-adevar lagrangeanul invariant, ea nu este cea mai generala!

Intr-adevar, faptul ca cei trei quarci de aceeasi aroma f (si culori diferite) au aceeasi masa m_f lasa loc unei alegeri mai generale. Astfel, sa presupunem ca vrem sa transformam functia de unda $q_f^c(x)$ a fiecarui quark dupa transformarea matriceala :

$$q'_f = \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^v \\ q_f^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 \\ U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 \\ U_3^1 & U_3^2 & U_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^v \\ q_f^a \end{pmatrix} = U q_f \quad (7.37)$$

In relatia de mai sus am renuntat sa scriem indicele de culoare c , intelegind prin functia q_f o matrice coloana de trei rinduri. Acum sa alegem matricea U unitara, adica sa indeplineasca:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad (7.38)$$

unde $U^\dagger$ este matricea transpusa si conjugata lui U . In acest caz se verifica imediat ca lagrangeanul 7.36 ramine acelasi! Astfel, inlocuind noua valoare in lagrangeanul 7.36, obtinem:

$$\bar{q}'_f (\not{D}_\mu - m_f) q'_f = \bar{q}_f U^\dagger (\not{D}_\mu - m_f) U q_f = \quad (7.39)$$

$$= \bar{q}_f (U^\dagger U) (\not{D}_\mu - m_f) q_f = \bar{q}_f (\not{D}_\mu - m_f) q_f \quad (7.40)$$

deorece matricea U indeplineste 7.38. In relatia precedenta am forta putin notatiile, in sensul ca matricea coloana q_f are trei componente de culori, fiecare fiind un spinor de patru componente μ . De aceea putem spune ca matricea U de dimensiune 3×3 "comuta" cu operatorii matriceali γ_μ si ei de dimensiune 4×4 .

Exista insa o multime infinita de transformari unitare U , si deci pentru care lagrangeanul 7.36 este invariant la transformarea 7.37. In termeni matematici, toate aceste transformari unitare U formeaza un grup, si anume grupul $SU(3)$. El are proprietatea ca daca alegem doua matrici unitare U_1 si U_2 din grup, atunci este unitar si produsul lor $U = U_1 U_2$. Din teoria

grupurului $SU(3)$ se stie ca toate aceste matrici U se scriu sub forma:

$$U = \exp \left(-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \theta_a \right) \quad (7.41)$$

unde θ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) sunt 8 numere infinitezimale arbitrare, λ^a sunt 8 matrici numite generatorii grupului $SU(3)$, iar g_s este o constanta a carei semnificatie se va vedea mai tirziu. In relatia de mai sus intelegem desigur (precum in ??) exponentiala continand o matrice M ca fiind descompunerea:

$$e^M = 1 + M + \frac{1}{2!}M^2 + \dots + \frac{1}{n!}M^n + \dots \quad (7.42)$$

In reprezentarea aleasa de Gell-Mann, matricile λ^a se scriu ca:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

Tot in teoria matematica a grupului $SU(3)$ se arata ca matricile λ^a indeplinesc relatiile de comutare:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = \lambda^a \lambda^b - \lambda^b \lambda^a = 2if^{abc} \lambda^c \quad (7.47)$$

Contantele f^{abc} sunt niste numere complexe numite *constante de structura*.

Reamintindu-ne putin ce am facut pina acum, am vazut ca lagrangeanul 7.36 este invariant la transformarile *globale* de etalonare 7.37 date de matricile unitare U ce pot fi scrise sub forma 7.41. Am discutat insa in sectiunea precedenta ca ne asteptam ca orice lagrangean (ce descrie un cimp cuantic al acestui Univers) trebuie sa fie invariant la transformarea *locala* de etalonare. Cu alte cuvinte, indiferent ce 8 functii $\theta_a(x)$ am alege pentru transformarea 7.37 (ce ar putea fi acum efectuata in orice punct din spatiu si la orice meoment de timp), noua valoare a lagrangeanului trebuie sa fie neschimbata. Pentru aceasta trebuie sa construim sa introducem un cimp aditional, si un nou lagrangean, precum am procedat in sectiunea precedenta.

Daca comparam cu relatia 7.26 pentru electron, vedem ca in loc de un singur generator λ avem acum 8 generatori λ^a , dati de 7.43 (asociati celor 8 etaloane $\theta_1, \dots, \theta_8$). Cum in cazul electrodinamicii un singur generator λ a introdus un singur cimp aditional A_μ in derivata covarianta 7.32, putem scrie derivata covarianta in cazul cromodinamicii cuantice sub forma:

$$D_\mu q_f(x) = \left[\partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu(x) \right] q_f(x) \quad (7.48)$$

In relatia de mai a trebuit sa introducem 8 cimpuri aditionale, notate cu G_a^μ ($a = 1, 2, \dots, 8$), fiecare avind 4 componente μ pentru dimensiunile spatiale si cea temporală (precum

are cimpul electromagnetic A_μ . Notatia G provine de la denumire de *gluoni* a particulelor atasate acestor cimpuri aditionale. La o alegere particulara a "etaloanelor" $\theta_1, \dots, \theta_8$ trebuie sa spunem si cum se transforma cele 8 cimpuri gluonice G_a^μ . Alegem atunci ca acestea sa se transforme ca:

$$G_a^\mu = G_a^\mu - \partial^\mu \theta_a + g_s f^{abc} \theta_b G_c^\mu \quad (7.49)$$

Se poate verifica atunci imediat ca transformarea cimpului gluonic de mai sus, va conduce la:

$$(D^\mu)' = U D_\mu U^\dagger \quad (7.50)$$

Prin analogie cu lagrangeanul electrodinamicii cuantice 7.35, trebuie sa construim acum si lagrangeanul care descrie gluonii liberi. Pentru aceasta definim (explica):

$$G^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s [G^\mu, G^\nu] = \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu}(x) \quad (7.51)$$

unde:

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \quad (7.52)$$

In acest caz se calculeaza imediat ca $G^{\mu\nu}$ se modifica in urma transformarii de etalonare locale $\theta(x)$ ca:

$$(G^{\mu\nu})' = U G^{\mu\nu} U^\dagger \quad (7.53)$$

si deci termenul $G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu}$ ramine invariant la transformarea de etalonare. Vedem ca acest termen este similar celui descriind fotonii liberi in relatia ???. Daca il introducem in lagrangean cu acelai coeficient $-1/4$ ca la cimpul electromagnetic, obtinem lagrangeanul care este invariant la transformarile locale de etalonare $\theta_a(x)$:

$$L_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f (\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (7.54)$$

Practic acesta este lagrangeanul (nerenormalizat!) care descrie interactiile dintre quarci. El este invariant la transformarile *locale* de etalonare $\theta_a(x)$, asa cum ne-am dorit. Astfel, daca modificam functiile de unda ale quarcilor conform relatiei 7.37 (unde U este dat de 7.41), iar cele ale gluonilor conform 7.49, vom obtine aceeasi valoare a lagrangeanului de mai sus.

Quark-antiquark (): $\frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$

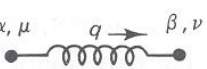
Gluon (): $\frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2}$

Figure 7.17: dupa [?]]

Dupa cum am mentionat la inceput, am fost in stare sa construim interactia dintre quarci pornind de la faptul ca ei au trei culori si ca lagrangeanul acestora este invariant la transformarile *locale* de etalonare. Tot ce ne-ar ramine acum ar fi sa

construim diagramele Feynmann (pornind de la lagrangeanul de mai sus) pentru quarci (asumati a fi fermioni) si cei 8 gluoni (asumati a fi bosoni, precum sunt fotonii). Inainte insa sa remarcam ca, conform lagrangeanului de mai sus, cei 8 gluoni mediaza interactiile intre *toti* quarcii, si deci gluonii nu sunt atasati anumitor arome de quarci.

Pentru a schita principalele diagrame Feynmann, sa dezvoltam lagrangeanul de mai sus folosind forma derivatei covariante (?) 7.48. Obtinem atunci:

$$L_{QCD} = \sum_{fc} \bar{q}_f^c (\not{D}\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^c - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + (7.55)$$

$$+ g_s G_a^\mu \sum_f \bar{q}_f^\alpha \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} q_f^\beta - (7.56)$$

$$- \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c G_\mu^d G_\nu^d \quad (7.57)$$

Prima linie contine termenii pentru cimpurile quarcilor si gluonilor fara interactia intre ei. Din acesti termeni vedem ca gluonii sunt niste particule foarte apropiate fotonilor, *fara masa de repaus*. Astfel, lagrangeanul descriind gluonul de o anumita culoare este identic cu lagrangeanul electromagnetismului. Lipsa masei de repaus ar parea ca este o problema, caci aceasta inseamna ca gluonii virtuali se pot deplasa pe distante infinite, si deci interactia intre quarci ar avea loc la distante oricic de mari. Cu toate acestea, acest lucru nu se impla imediat. In primul rind, particulele observabile sunt albe ("colorless") si ca atare sarcina totala de culoare este nula, si deci aceste particule vor interactia foarte slab intre ele. Situatiia este similara cu atractia dintre doi atomi. Fiecare atom are sarcini pozitive, si negative insa acestea se anuleaza una pe alta. Atunci un atom este neutru si nu interactioneaza cu alt atom decit foarte putin, prin intermediul fortei de dipol.

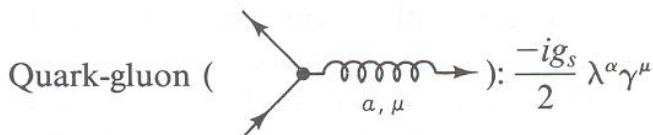


Figure 7.18: dupa [?]

Daorita asemanarii lagrangeanurilor quarcilor si gluonilor liberi cu cei ai electronului si fotonului, putem scrie imediat propagatorii asociati acestora, ce sunt prezentati in Figura 7.17.

Cel de-al doilea rind al relatiei ?? descrie interactia dintre un quark si un gluon. Privind ?? putem vedea ca quarkul q_f^β si antiquarkul $\bar{q}_f^\alpha$ au aceleasi arome, dar culori diferite! Aceasta inseamna ca quarkul isi poate schimba culoarea in urma interactiei cu un gluon prin diagrama Feynmann de interactie din Figura 7.18.

"Diferenta" de culoare aparuta intre cei doi quarci din diagrama Fig.?? este preluata de gluon, ceea ce inseamna ca putem considera ca gluonii (spre deosebire de fotoni!) sunt "incarcati" cu sarcina de culoare! De aceea ne asteptam ca gluonii sa interactioneze *direct* intre ei, spre deosebire de fotoni care nu interactioneaza direct intre ei (mai tineti minte filmul Razboiul Stelelor in care laserii se comportau ca niste sabii? Ei bine, ei trebuie sa fi fost in acest caz laseri cu gluoni, caci caci cu fotoni nu ar fi avut sanse!)

Interactia dintre gluoni se vede direct din ultima linie a relatiei ?? . Aceasta conduce la regulile prezentate in Fig.7.19 pentru interactia gluonilor, ce contin termeni cubici si patratici.

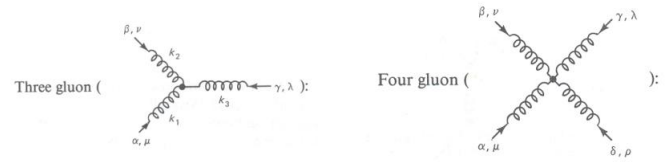


Figure 7.19: dupa [?]

7.2.4 Experimente cu quarci

In sectiunea precedenta am construit lagrangeanul 7.54 pentru interactiile de culoare ale quarcilor printr-o procedura rapida, pornind in fapt numai de la *o singura* observatie experimentală (prezenta a trei culori) si de la principiul general al invariantei la transformarile locale de etalonare.

In felul acesta poate ca am indepartat putin din farmecul surprizei succesului lagrangeanului 7.54 obtinut. Atsfel, poate ca era mai bine sa fi inceput cu multitudinea de observatii experimentale, si sa fi vazut cite comportari deosebite ale hadronilor (barioni sau mezoni) trebuie sa fiteze lagrangeanul dorit. Vom corecta in parte aceasta abordare, amintind in aceasta sectiune cele mai cunoscute aspecte experimentale ce pot fi explicate prin lagrangeanul 7.54.

De la inceput insa trebuie sa spunem ca nu toate rezultatele experimentale sunt astazi riguros explicate prin teoria construita mai sus. Aceasta se datoreaza in primul rind complexitatii interactiilor din lagrangeanul 7.54, asa cum se vede din dezvoltarea 7.55 si din diagramele Feynmann corespunzatoare. In fapt, calculele sunt asa de complicate, incit multe dintre ele au fost efectuate numeric cu ajutorul computerului. In Figura 7.20 prezentam un astfel de calcul numeric al maselor diferitelor barioni si mezoni, calculate cu ajutorul 7.54. Sa ne amintim ca mesele acestor hadroni nu sunt date direct de suma maselor quarcilor, si ca rolul principal il joaca energia de interactie. De aceea este remarcabil acordul dintre teorie si experiment.

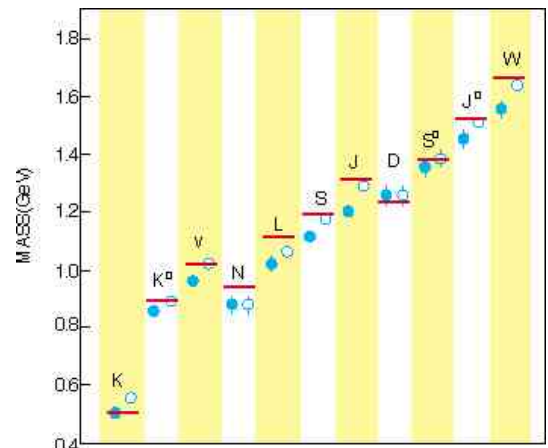


Figure 7.20: dupa 5. S. Aoki et al., <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-lat/9904012>

Daca pina acum nu toate rezultatelele experimentale pot fi explicate riguros, nu este insa mai putin adevarat ca nu exista pina acum *nici o observatie* care sa contrazica flagrant forma 7.54 a cromodinamicii cuantice. Aceasta in ciuda faptului ca exista observatii experimentale care nu par sa fie sugerate direct de forma 7.54 a lagrangeanului.

Supraconductivitatea de culoare

Una dintre cele mai importante observatii experimentale este desigur faptul ca pina acum nici un quark nu a fost observat liber, desi lagrangeanul 7.54 nu pare sa sugereze direct acest lucru. De la inceput trebuie insa sa spunem ca nu ne asteptam ca quarcii liberi sa fie "interzisi" *de facto*. Mai degraba ne asteptam ca ei sa se atraga unii pe ceilalti in acest Univers, si sa formeze diverse structuri, cum ar fi barionii sau mezonii. Numai daca vrem sa scoatem un quark din aceste structuri va fi difil, dar *nu* imposibil.

De fapt, calcule precise au aratat ca la inceputul Universului (in primele ... minute ale sale), temperatura acestuia era asa mare, incit quarcii si gluonii era *liberi*. Practic, ei aveau viteze asa mari incit nu puteau fi tinuti la un loc in structuri barionice sau mezonice. Numai odata ce Universul s-a racit, si viteza acestora a scazut, au format ei structurile cunoscute. O diagrama interesanta care prezinta aceasta comportare este cea din Figura 7.21. Aici se vede cum la temperaturi inalte (doar 170 MeV? de ce nu se vede atunci in experiment?) quarcii si gluonii pot fi eliberati din structurile date.

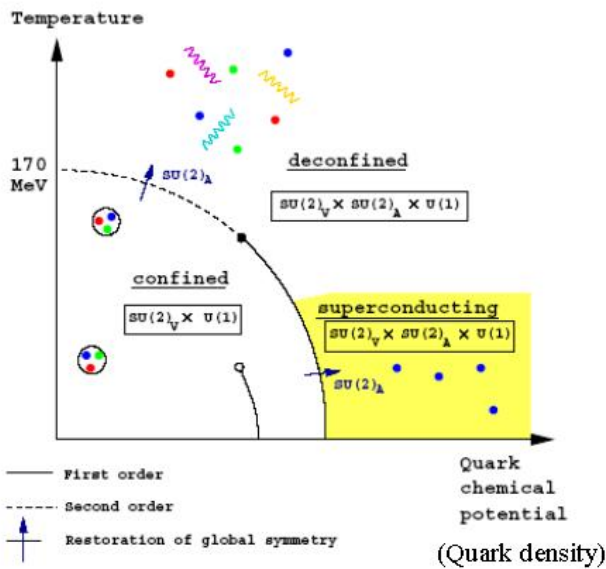


Figure 1: Two massless flavor phase diagram

Figure 7.21: QCD-superconductivity din fisiere pdf

Diagrama de faza 7.21 prezinta pe axa orizontala o valoare corelata cu concentratia de quarci. Recunoastem la concentratii normale structurile barionice sau mezonice. La concentratii inalte insa si temperaturi joase, lagrangeanul 7.54 prezice o stare deosebita a materiei, numita *supraconductivitate de culoare*. Aceasta stare este astazi subiect intensiv de cercetare, deoarece este de asteptat ca ea sa fie gasita in miezul *stelelor neutronice*, stele ce au mase de ordinul masei Soarelui, dar dimensiuni de ordinul zecilor de kilometri! (verifica) Concentratia materiei ia atunci valori uriase (tone de materie intr-un centimetru cub!), suficiente pentru ca supraconductivitatea de culoare sa apara.

Asa dupa cum sugereaza si numele, supraconductivitatea de culoare este o stare asemanatoare supraconductivitatii obisnuite in metale. Astfel, metalele racite la temperaturi de citiva Kelvini prezinta o stare supraconductoare, in care curentul electric poate circula ani de zile intr-un fir fara pierderi de energie masurabile. Ea are loc prin imperecherea electronilor din metal

doi cite doi, in asa-numitele perechi Cooper, datorita unei forte usoare de atractie intre electroni mediate de vibratiile atomilor.

In nucleul stelelor neutronice nu este nevoie de o contributie aditionala caci, asa cum vom vedea mai jos, o forta de atractie intrei doi quarci deja exista (deja ea trebuie renormalizata!). Perechile Cooper astfel formate din doi quarci "colorati" nu mai pot fi "albe", si deci este de asteptat sa gasim astfel de particule de culoare in nucleele starilor neutronice care distrug simetria de culoare (verifica). In plus, calcule avansate arata ca supraconductivitatea de culoare poate avea un rol important in intelegerea exploziilor supernovelor si a exploziilor de raze gamma [?].

Starile lipsite de culoare ale mezonilor

Revenind insa la observatia experimetala numai a hadronilor lipsiti de culoare (albi), trebuie sa spunem ca o explicatie completa nu este inca la indemina, desi lagrangeanul 7.54 si calcule numerice sugereaza acest lucru. Astfel, sa consideram interactia dintre un quark si antiquark de culori diferite, prezentata in Fig.7.22.

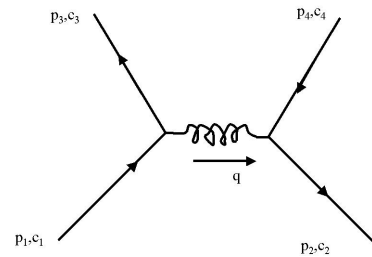


Figure 7.22: dupa [?]

Amplitudinea de probabilitate a acestei imprastieri se scrie, conform regulilor Feynmann din ?? (pune si liniile externe!) ca:

$$-iM = [\bar{u}(3)c_3^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu \right] [u(1)c_1] \left[\frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] \quad (7.58)$$

$$[\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu \right] [v(4)c_4] \quad (7.59)$$

Aceasta amplitudine are exact forma amplitudinii de imprastiere pentru electron-pozitron scrisa in relatia ??, unde g_s este inlocuit de g_e (fi atent), iar in plus apare termenul aditional datorat culorilor f :

$$f = \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4) \quad (7.60)$$

In prima aproximatie deci (mai precis la ... q mare sau mic?) potentialul de interactie dintre un quark si un antiquark este identic cu cel in cazul electrostatic, la care se aduga doar factorul f (consider $\hbar c = 1$):

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_s}{r} \quad (7.61)$$

Sa consideram atunci ca quarcul si antiquarcul au culori diferite, rosu si albastru de exemplu: (urmaresc [?])

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

si deci

$$f = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (7.63)$$

Observind ca in suma de mai sus numai matricile 7.43 λ^3 si λ^8 contribuie, obtinem:

$$f = \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = -\frac{1}{6} \quad (7.64)$$

si deci potentialul de interactie 7.65 dintre q_r si $\bar{q}_b$ devine:

$$V_{r\bar{b}}(r) = +\frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} \quad (7.65)$$

Acesta este insa un potential pozitiv, si deci quarkul rosu si antiquarkul albastru se vor *respinge*, neformind astfel impreuna o particula! Acesta este un lucru incurajator, caci dupa cum mentionat numai compozitiile "albe" sunt observate in experiment.

O astfel de compozitie "alba" am putea-o construi dintr-un quark rosu si un antiquark "antirosu" $r\bar{r}$. Cu toate acestea, nu aceasta este combinatia de quarci intilnita in mezonii, caci ea are o culoare preferentiala. Combinatiile care se intilnesc in mezonii se numesc "singleti". Pentru mezonul π^+ compus din quarkul u si antiquarkul $\bar{d}$, aceasta se scrie ca:

$$|\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}) \quad (7.66)$$

In relatia de mai sus am scris doar culorile, suintelegind aroma quarkului (u) si cea a antiquarkului (d). Practic, relatia de mai sus de spune ca fuintia de unda a mezonului π^+ este o combinatie lineara a trei posibilitati $r\bar{r}$, $b\bar{b}$, $g\bar{g}$, ce apar cu egala probabilitate in interiorul mezonului. Potentialul de interactie se calculeaza cu ajutorul a *noua* functii f , ce descriu amplitudinea de tranzitie de la o posibilitate ($r\bar{r}$ sa zicem) la alta ($b\bar{b}$ sa zicem). Calculul cel noua factori f este direct, si suma ponderata a acestora conduce imediat (da-i exercitiu) la rezultatul $f = 4/3$.

Ca atare, potentialul de interactie al celor doi quarci in interiorul mezonului devine *negativ*!

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \quad (7.67)$$

Combinarea quarkului si antiquarkului in starea fara de culoare 7.66 a mezonului *reduce* deci energia totala (am putea spune ca ei se *atrag*). In consecinta, relatiile 7.65 si 7.65 explica de ce quarkul si antiquarkul se "bind" impreuna in starea fara de culoare!

Calcululele de tipul de mai sus sunt insa numai indicative, pentru ca nu am inclus in ele diagrame Feynman de ordin superior. Astfel, prin aceleasi proceduri de mai sus, se poate arata (vezi exercitiul ??), ca doi quarci de culori diferite se atrag! Acest lucru este ingrijorator, caci nici o particula formata numai din doi quarci nu a fost observata experimental, desi aceasta atractie este responsabila pentru formarea perechilor Cooper in starea supraconductoare (care este insa explicatia?). Cu toate acestea, calcule numerice extensive, in care spatiu-timpul a fost impartit in retele ("lattice"), au confirmat partial ipoteza "confinment"-ului quarcilor in stari "colourless" ([?]).

Daca insa quarcii prefera sa se "adune" in interiorul unei particule lipsite de culoare, ramine inca intrebarea, putem oare "elibera" un atfel de quark? Faptul ca nici acest lucru nu este usor, este explicat in diagrama 7.23.

Aici pornind initial de la situatia unui mezon ce contine un quark si un antiquark. Pentru a separa quarkul de antiquark, sa presupunem ca tragem de cei doi. In acest proces trebuie sa depunem o energie mai mare de "binding" decit cea calculata de noi in relatia 7.67, care este de ordinul ... Aceasta insa atunci depaseste (?) valoarea energiei necesare de creare a unei perechi quark-antiquark, care este de ordinul masei quarkului,

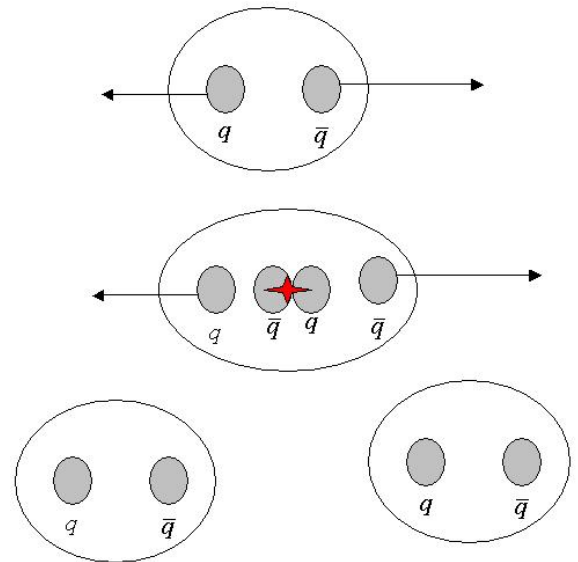


Figure 7.23: fig:separation-quarks

adica ... In decursul procesului este deci de asteptat ca sa formam o pereche de quark-antiquark. Quarcii si antiquarcii se reorganizeaza apoi ca in schita 7.23 si noi vom sfirsi cu doi mezonii separati, in loc de doi quarci separati!

Numarul total de culori al quarcilor

Pe de alta parte, formarea de perechi quark-antiquark este foarte des folosita in experiment, precum este exemplificat in Fig. 7.24, unde doua jeturi de electroni si antipozitroni sunt trimisi unul asupra celuilalt:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q_i + \bar{q}_i \quad (7.68)$$

Acest tip de experiente au avantajul ca conduc la rezultate ce

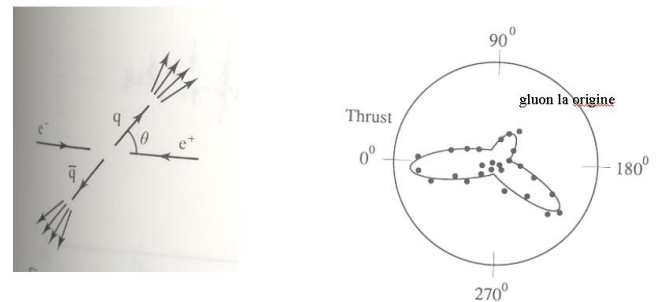


Figure 7.24: dupa [?]

pot fi calculate eventual mai usor. Un atfel de rezultat, important pentru acceptarea cromodinamicii cuantice si a celor 3 culori, a fost determinarea sectiunii eficace a procesului din Fig.7.24. Acest proces este similar procesului de de anihilare a perechii electron-positron intr-un foton si creare apoi a perechii muon-antimuon (care sa ne amintim sunt niste leptoni, practic niste electroni mai grei):

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (7.69)$$

In exercitiul ?? am vazut ca sectiunea eficace a acestui proces este data de (pune sarcina electronului e):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (7.70)$$

unde $\sqrt{s}$ este energia in centrul de masa al sistemului. In relatia de mai sus apare direct sarcina muonului e care este identica cu a electronului.

Noi pina acum nu am discutat alte interactii dintre quarci decit cele de culoare. Faptul inasa ca quarcii au sarcina electrica inseamna automat ca ei interactioneaza la interactia cu cimpul electromagnetic, lucru pe care l-am presupus automat cind am spus ca un foton de energie suficienta poate crea o pereche quark-antiquark. Pe de alta parte, nu ne asteptam ca aceasta interactie sa fie data de altceva decit de sarcina electrica, si in consecinta ne asteptam ca sectiunea eficace a procesului 7.68 sa fie data de aceeasi relatie 7.70 in care trebuie doar sa ajustam sarcinile electrice (masele de repaus nu apar decit in s). Atunci

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i + \bar{q}_i) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left(\frac{e_i}{e}\right)^2 \quad (7.71)$$

unde e_i este sarcina electrica a quarkului de tipul i . Acesta inasa este numai sectiunea eficace datorita producerii unui singur tip de quarci. Noi avem inasa mai multe arome, fiecare avind trei culori, si pentru fiecare trebuie sa scriem valoarea de mai sus, luind in calcul desigur sarcina electrica a quarkului.

Pe de alta parte, in procesele prezentate in Fig.7.24 nu observam niciodata quarcii liberi pentru a-i identifica care sunt, ci jeturi de hadroni (mezoni si barioni) aparind in citeva directii bine definite. De aceea este bine sa luam in calcul suma totala a acestor procese. In plus, in experiment este practic sa se normalizeze sectiunea eficace de producere a quarcilor 7.71 la cea de producere a muonilor 7.70. Practic se imparte numarul de evenimente de producere a jeturilor la numarul de evenimente de producere a muonilor (?). Obtinem atunci in experiment direct valoarea:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_i \left(\frac{e_i}{e}\right)^2 \quad (7.72)$$

unde suma trebuie efectuata pentru diferite arome si cele trei culori. Acest raport (o functie de energia electronilor incidenti), masurat in experiment, este prezentat in Figura.7.25 In primul rind, la energie joase, sub 4GeV , obtinem o valoare $R \simeq 2$. Vedem din tabelul 7.9 ca la aceste energii joase jetul de electroni-pozitroni nu poate excita decit quarci d (sarcina electrica $-e/3$), u ($2e/3$) si s ($-e/3$). In consecinta, formula 7.72 prezice:

$$R(s) = 3 \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 2 \quad (7.73)$$

adica o valoare identica cu cea din experiment! In fapt, daca luam in considerare producerea quarkului c (sarcina electrica $2e/3$) la energii mai mari de $3 - 4\text{GeV}$ (acolo unde el poate fi produs), obtinem $R = \dots$, iar apoi $R = 3.66$ incluzind si aparitia quarkului b (sarcina electrica $-e/3$). Ambele valori sunt confirmate rezonabil de experiment in Figura.7.25, incluzind "threshold"-ul la care ele apar, si care este dat de masa de repaus a quarcilor.

Desi graficul 7.25 nu este o confirmare directa a lagrangeanului 7.54, el este ne confirma faptul ca quarcii vin in *trei* culori (factor 3 care apare esential in calcule), si deci putem considera ca ipoteza culorii este verificata experimental.

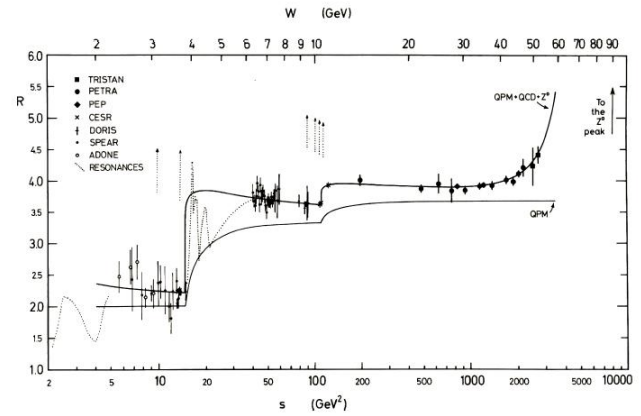


Fig. 8: Data on $R = \sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)$ as a function of the center-of-mass energy $W = \sqrt{s}$ (courtesy Dr. R. Marshall, from Rutherford Appleton Lab. Pub. RAL 88-049). The predictions of the quark parton model and a fit by QCD are also shown. At the highest energies the contribution of an intermediate virtual Z becomes important.

Figure 7.25: dupa <http://www.physics.upenn.edu/~pgl/E27.pdf>

Interactia efectiva dintre doi quarci. Asymptotic freedom

Fig.7.24 mai prezinta un fapt surprinzator. Astfel, in toate experimentele, jeturile de hadroni obtinute par sa mearga in doua sau trei directii *clare* (exemplificat in dreapta Figurii 7.24). Acest lucru nu ar fi surprinzator in sine, caci ne putem imagina ca mai intii se produce perechea de quark-antiquark, si apoi quarkul si antiquarkul produc la rindul lor hadroni printr-un mecanism similar celui prezentat in schita 7.23. Ceea ce este surprinzator este ca *directia* hadronilor rezultati nu se schimba prin aceste procese aditionale!

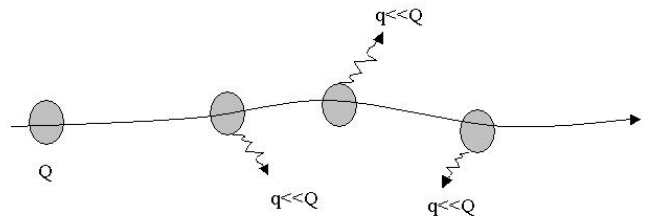


Figure 7.26: dupa Frank Wilczek, Physics Today, August 2000 Volume 53, Number 8, Part 1

Pentru a lamuri acest aspect, sa urmarim cum ar putea aparea o pereche quark-antiquark aditionala care duce mai departe la formarea de hadroni. Cel mai natural mecanism este sa presupunem ca quarkul si antiquarkul creeati *emit* in continuare gluoni, in mod asemanator emisiei de fotoni de catre electronii accelerati (ce creeaza radiatia Cerenkov, vezi??). Gluonii creeaza (adevarat? nu sunt sigur...) la rindul lor alte perechi quark-antiquarci. Acesti produsi aditionali se vor recombina cu cei initiali pentru a forma hadroni fara culoare. In mod normal ne-am astepta ca gluonii creeati sa *poata* avea energie si momente *mari*, comparabile cu ale quarkului initial ce le creeaza. Aceasta pentru ca termenul din diagrama Feynmann 7.18, care ne da amplitudinea de probabilitate a emisiei de gluoni, nu depinde de marimea momentelor. In acest caz inasa, in urma emisiei, *traectoria* quarkului s-ar modifica considerabil (pentru ca gluonul emis ar putea modifica substantial momentul quarkului care il emite). Acelasi lucru s-ar intimpla si la alte emisii ulterioare, si atunci am obtine in final jeturi de hadroni

in toate directiile. Pentru ca in experiment numai citeva directii apar (si care presupunem ca sunt date de quarkul si antiquarkul initial), nu ne ramine de presupus decit ca quarkul initial emite gluoni *doar* de moment si energie mica, care nu modifica substantial traiectoria quarkului initial! Aceasta situatie este desenata schematic in Fig.7.26.

Acest fapt experimental l-am putea reintroduce in diagrama Feynmann 7.18, daca am considera ca constanta interactiunii tari g_s (ce ne da amplitudinea de probabilitate a emisiei unui gluon) este dependent de energia si momentul gluonului emis $g_s = g_s(q)$, in asa fel incit $g_s(q)$ sa devina mic la momente mari.

Desi aceasta procedura ar parea impusa lagrangeanului 7.54, in fapt nu ar fi decit un rezultat care apare natural in urma renormalizarii lui. Astfel, am vazut in cazul electrodinamicii cuantice cum interactia dintre electron si vidul cuantic modifica interactiile si valorile constantelor masurate. In particular, interactia de atractie dintre doua sarcini isi pierde forma Coulomb ??, devenind ?. Aceasta noua interactie a putut fi rescrisa sub forma Coulomb prin intermediul constantei de interactie efective ??.

Un procedeu de renormalizare ar trebui aplicat si lagrangeanului 7.54, pentru ca si aici ne asteptam sa masuram valori *efective* in interactii. Unul din rezultate va fi ca potentialul de interactie dintre doi quarci, dat de o forma Coulomb (calculat de exemplu in 7.65) se va modifica. In forma generala, dupa renormalizare, il putem scrie pe acesta ca:

$$V_{QCD}(r) = -f \frac{\alpha_s(r)}{r} \quad (7.74)$$

unde $\alpha_s(r)$ este transformata Fourier a lui $g_s(q)$ ce apare in diagram Feynmann 7.18. O analiza complexa a renormalizarii [? ?] conduce la urmatoarea valoare a constantei efective de interactiune tare :

$$\alpha_s(q) = \frac{12\pi}{(11n - 2f)\ln(q^2/\Lambda^2)} \quad (7.75)$$

unde n este numarul de culori ($n = 3$) iar f este numarul de arome ($f = 6$ astazi). Formula de mai sus este valabila in limita $q \gg \Lambda$. Constanta Λ trebuie determinata experimental.

Din formula 7 vedem in primul rind ca constanta efectiva de interactie tare $\alpha_s(q)$ tinde intr-adevar la momente mari q catre zero. Rezultatul teoretic 7 obtinut in urma renormalizarii *confirma* deci observatia noastra experimentală ca gluonii de energie si moment mare au o probabilitate mica de a fi emisi.

In plus, in Figura 7.27 prezentam constanta efectiva de interactie tare $\alpha_s(q)$ masurata in experiment, si fitata de catre formula teoretica . Vedem ca lagrangeanul cromodinamicii cuantice 7.54 renormalizat prezice "acurat" curba experimentală, si duce in urma fitarii la o valoare $\Lambda \simeq 200 \text{ MeV}$.

Comportarea de mai sus este opusa celei in cazul electrodinamicii cuantice (vezi Fig.??). Daca tranformam Fourier $\alpha_s(q)$ vom obtine un $\alpha_s(r)$ care creste la valori mari ale distantei r si scade la zero la valori mici ale lui r , in totala opozitie cu comportarea electrodinamica. Cu alte cuvinte (vezi 7.74) *quarcii interactioneaza puternic la distante mare si se ignora reciproc la distante mici!* Aceasta comportare cel putin neasteptata a primit numele de "*asymptotic freedom*". Desigur ca in 7.74 apare si factoul de culoare f , care decide daca interactia va fi de atractie sau respingere, dupa cum am vazut in ??.

Comportarea aceasta a fost insa observata in experiment inainte de a fi dedusa teoretic. Astfel, in imprastierile "deep inelastic scattering" s-a observat ([?]) ca intr-adevar, la distante scurte, quarcii par sa se ignore unii pe ceilalti. Mecanismul acestui proces nu este insa greu de inteles, caci el ia in considerare faptul ca gluonii poarta sarcina de culoare (spre deosebire de fotoni care nu poarta sarcina electrica), asa cum am vazut din diagramele Feynmann 7.19. Atunci are loc urmatorul proces, schitat in 7.28.

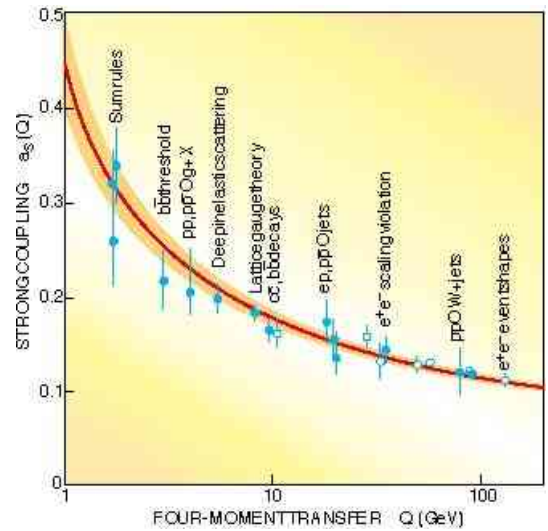


Figure 7.27: dupa Frank Wilczek , Physics Today, August 2000 Volume 53, Number 8, Part 1

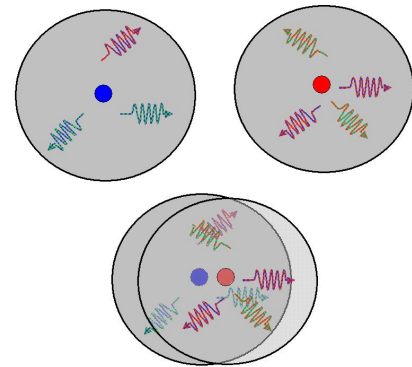


Figure 7.28: dupa mine

Astfel, gluonii emisi de quarci formeaza un "nor" in jurul quarcilor care ii emit. Acest "nor" este insa incarcat cu sarcina de culoare, si are o dimensiune de aproximativ 1 fm , data de Cind quarcii se apropie la distante mai mici de 1 fm , cei doi "nori" se intrepatrund. Rezultatul net este ca distributia sarcinii de culoare pe toata suprafata celor doi nori nu se modifica substantial daca cei doi quarci sunt mai mult sau mai putin apropiati, ori chiar daca sunt unul peste celalalt! Practic, energia de interactie (data de aceasta distributie de culoare) va ramine constanta, indiferent cit de aproape vor fi cei doi quarci. Cum forta de atractie este derivata acestei energii, putem spune ca cei doi quarci nu se vor atrage sau respinge odata ce distanta dintre ei este sub 1 fm . Practic, ei se vor *ignora*! Rezultatul acesta este practic identic cu cel al interactiei a doi nori de sarcina electrica (modelul atomic al lui Thomson), propus in exercitiul ???. Si aici cei doi nori nu se vor mai atrage sau respinge odata de sunt suprapusi unul pe celalt.

Vedem astfel ca lagrangeanul 7.54 cromodinamicii cuantice, odata renormalizat (luind in calcul si interactiile de ordin superior), explica cele mai multe observatii experimentale, confirmind astfel succesul noii teorii.

The Nobel Prize in Physics 2004 "for the discovery of asymptotic freedom in the theory of the strong interaction": David J. Gross H. David Politzer Frank Wilczek

7.3 Interactia electro-slaba

In sectiunile precedente am vazut cum se construiesc interactiile de culoare dintre quarci. Este desigur evident ca o parte din particulele introduse in sectiunea ??, si anume leptonii, nu sunt afectati de aceste interactii. In plus, acei leptoni care sunt neutri, cum ar fi neutrinii, nu sunt afectati nici de fortele electromagnetice. Este atunci evident ca o nou tip de interactiune trebuie introdusa, cel putin pentru neutrini, iar aceasta este *interactiunea slaba*.

Interactiunea slaba nu se limiteaza doar la neutrini, ea apare si intre quarci sau electroni, asa cum vom vedea mai jos. Din motive istorice si pedagogice, incepem insa sa o abordam, studiind primele reactii in care neutrinii apar.

7.3.1 Teoria lui Fermi

Ce sunt neutrinii? Raspunsul general acceptat este ca ei sunt fermioni de spin $1/2$, cu o masa foarte mica, eventual *nula* (in orice caz nemasurabila inca experimental, vezi deasemena sectiunea urmatoare ??). Cu alte cuvinte, ei sunt asemanatori electronilor sau quarcilor de o anumita culoare, in sensul ca sunt descrisi deasemenea de ecuatia lui Dirac ??, in care insa masa se pune nula $m = 0$:

$$(\beta\gamma^\mu\partial_\mu)\phi(x) = 0 \quad (7.76)$$

Ecuatia de mai sus a fost propusa de Weyl in 1929, cu doi ani inainte de introducerea neutrinelui in 1931 de catre Pauli. Este interesant insa ca ea nu a fost acceptata imediat de Pauli ca descriind o singura particula, ca neutrinelul, pe motivul ca ecuatia de mai sus violeaza simetria de oglinda, asa cum vom vedea in sectiunea urmatoare.

In consecinta, neutrinii liberi pot fi descrisi de aceleasi patru solutii ?? u ale ecuatiei lui Dirac, in care insa trebuie sa punem $m = 0$. Sa consideram atunci reactia 7.77 de dezintegrare a neutronului. Aceasta se poate reprezenta ca diagrama din Figura 7.29. Se observa ca in aceasta diagrama am preferat sa reprezentam antineutrinelul (care este rezultat al reactiei 7.77) ca un neutrin ce intra in reactia:

$$n + \nu_e \rightarrow p^+ + e^- \quad (7.77)$$

Am folosit desigur rezultatul din sectiunea ?? care ne spune ca antiparticulele pot fi interpretate matematic ca particule ce se deplaseaza inapoi in timp.

Care este insa *amplitudinea de probabilitate* a unui proces de imprastiere descris de ecuatia de mai sus? Pe aceasta Fermi a scris-o prin comparatie cu amplitudinea de imprastiere electromagnetica dintre doua sarcini (sa zicem dintre un proton si un neutron), prezentata in dreapta Fig.7.29. Astfel, aceasta din urma se scrie conform regulilor lui Feynmann ?? ca:

$$M_{fi} \simeq e^2(\bar{u}_p\gamma^\mu u_p) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (\bar{u}_e\gamma_\mu u_e) \quad (7.78)$$

In relatia de mai sus, protonul liber (ce intra sau iese din reactie) este descris de aceleasi posibile 4 functii ?? u , in care masa sa $m = m_p$ trebuie desigur inclusa. Aceste functii au fost notate cu subscriptul p pentru a le diferentia de cele ale electronului. In plus, se subintelege ca relatia de mai sus se scrie doar pentru acele momente si energii care verifica relatiile de conservare.

Practic, in termenii din stanga si din dreapta recunoastem curentii electrici dati de proton $j_p^\mu = \bar{u}_p\gamma^\mu u_p$ si electron $j_e^\mu = \bar{u}_e\gamma^\mu u_e$ (verifica). Prin compartie cu 7.78, Fermi a propus urmatoarea amplitudine de probabilitate pentru reactia 7.77:

$$M_{fi} = G(\bar{u}_p\gamma^\mu u_n)(\bar{u}_e\gamma_\mu u_\nu) \quad (7.79)$$

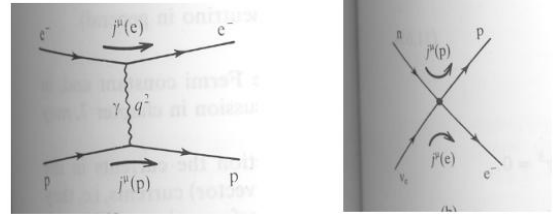


Figure 7.29: dupa [?]]

unde G este o constanta urmata a fi determinata din experiment.

Vedem imediat din relatia de mai sus ca Fermi a propus o interactie *punctuala* intre particulele ce intra in reactie, cu alte cuvinte o interactie care nu este mediata de nici o particula intermediara (cum este fotonul in cea electromagnetica), caci termenul $1/q^2$ corespunzator propagatorului fotonului a disparut. Aceasta eliminare a fost facuta pentru ca in practica s-a observat *absenta* interactiei la distante mari pentru interactiile slabe, iar termenul $1/q^2$ ar fi creat automat o interactia precum cea electromagnetica, care ar fi actionat si la distante mari.

In plus, o asumptia implicita este ca constanta G a interactiei slabe este o *constanta universală*. Astfel, daca consideram o alta interactie slaba, ca de exemplu 7.4:

$$\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu \quad (7.80)$$

atunci amplitudinea acesteia s-ar scrie identic (verifica! si schimab notatia cu μ) ca 7.79:

$$M_{fi} = G(\bar{u}_\nu\gamma^\mu u_\mu)(\bar{u}_e\gamma_\mu u_\nu) \quad (7.81)$$

In relatia de mai sus va apare aceeasi *constanta universală* G .

Desigur insa ca relatii de tipul celor mai sus nu le scriem pentru orice particule, ci doar pentru cele pentru care stim experimental ca interactioneaza slab. Astfel, in relatia precedenta stim ca avem doua tipuri de neutrini, desi nu am subliniat acest lucru, pentru ca functiile de unda ale celor doi neutrini ν_e si ν_μ sunt identice. O estimare a constantei G este propusa in exercitiul ??, care utilizeaza relatia ??:

$$G = 1.16 * 10^{-5} GeV^{-2} \quad (7.82)$$

Valoarea obtinuta este relativ mica, ceea ce este de asteptat, datorita faptului ca neutrinii nu interactioneaza cu materia.

Apart insa de universalitatea constantei G , relatiile de tipul 7.79 si 7.81 propuse de Fermi (interactii date de curentii *slabi*) au o problema aditionala la energii mari. Astfel de exemplu, se poate arata [?]] ca la energii mari sectiunea eficace de imprastiere se poate aproxima ca $\sigma \simeq G^2 s$, unde s este ca de obicei "the square of the center-of-mass energy". Se observa ca relatia de mai sus se poate obtine si din considerente de dimensionalitate, precum am discutat in ?? . Ea insa ingrijoratoare, caci ne spune ca la energii din ce in ce mai mari, sectiunea eficace creste corespunzator, poate chiar la citiva metri patrati daca am avea energii suficiente. Cum este insa de asteptat, astfel de sectiuni eficace mari sunt nerealiste, iar in masuratori se confirma indirect ca intr-adevar relatia de mai sus nu este valabila in jurul energiilor de aproximativ $\sqrt{s} \sim 500 GeV$ (dar nu s-au masurat energii asa de mari, nu-i asa?).

Solutia acestei probleme este o intorcere la forma initiala a amplitudinii pentru interactia electromagnetica, la momentul cind am eliminat propagatorul $1/q^2$. Astfel, putem considera ca interactiunea slaba are loc prin intermediul unui boson (precum

era fotonul), si ca aceasta are loc numai pe distante scurte (spre deosebire de foton), daca ii atribuim acestui boson masa *finita*!

Prin asemanare cu teoria lui Yukawa (prezentata pe scurt in 7.3), bosonul *virtual* (cel responsabil de interactii) ar exista un timp limitat, dat de energia lui de repaus (prin relatia de incertitudine energie-timp). Ca atare el se va deplasa numai pe distante scurte date de acest timp de viata, caci nu poate circula cu o viteza mai mare decit viteza luminii!

Noul boson care intermediaza interactiile *slabe* a fost numit bosonul W , si el poate fi de trei tipuri, asa cum vom vedea mai jos. Diagrama de imprastiere din figura 7.29 se poate apoi redesena sub forma prezentata in 7.30.

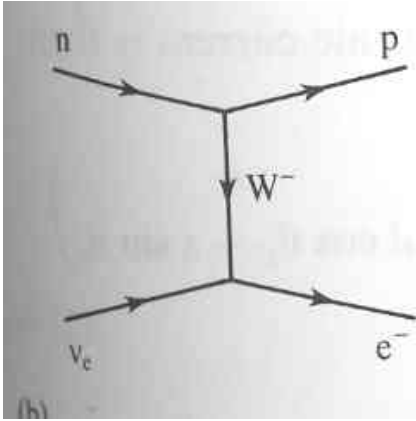


Figure 7.30: dupa [?]

La energii mari propagatorul acestui boson W (un fel de foton cu masa) se comporta ca $1/(M_W^2 - q^2)$. La energii mare, amplitudinea de probabilitate 7.79 a imprastierii unui neutrino pe un neutron se rescrie atunci ca:

$$M_{fi} \simeq g^2 (\bar{u}_p \gamma^\mu u_n) \left(\frac{1}{M_W^2 - q^2} \right) (\bar{u}_e \gamma_\mu u_\nu) \quad (7.83)$$

La energii mari, $q \rightarrow \infty$, amplitudinea procesului de mai sus tinde la zero, si ca atare sectiunea eficace nu va mai creste la energii mari, ba chiar va scadea ($\sigma \rightarrow 1/s$). In plus, la energii mici se recupereaza relatia 7.79, unde relatia dintre noile constante si G este:

$$G \simeq \frac{g^2}{M_W^2} \quad (7.84)$$

Vedem ca din experiment avem practic doua constante necunoscute, g si M_W . Anticipind putin, masa bosonului W cam de 100 GeV ne da o constanta adimensionala a interactiunii slabe de aproximativ:

$$g \simeq \quad (7.85)$$

Remarcabil, aceasta este mai mare decit cea electromagnetica $\alpha = 1/137$, ceea ce inseamna ca intrinsec *interactiile slabe*, nu sunt deloc "slabe", ci chiar mai "tari" decit cele electromagnetice. Ceea ce le face "slabe" este masa foarte mare a bosonului W , care-i creeaza un timp de viata foarte mic in starea sa *virtuala*. Ca atare el se deplaseaza pe distante foarte scurte, de

aproximativ $d \simeq \dots$, spre deosebire de foton care exista si pe distante cosmice, pentru ca masa acestuia din urma este perfect nula. Neutrino va interactiona atunci cu neutronul numai daca vine aproape de neutron la o distanta d . Putem spune ca, pentru neutrino, neutronul are cel mult o raza de $d = \dots$, si ca sectiunea eficace este cel mult $\sigma_{max}^2 \simeq \pi d^2 \simeq \dots$. Aceasta are valoarea scazuta se potriveste cu estimarea noastra din exercitiul ??, si explica de ce neutrino interactioneaza asa slab cu materia.

7.3.2 Elicitatea neutrino

Modelul prezentat in sectiunea precedenta, desi nu este perfect, se potriveste destul de bine cu datele experimentale, exceptind un lucru: neutrino observati au intotdeauna spinul orientat in directia opusa miscarii!. Pentru a introduce aceasta remarcabila observatie experimentală sa incepem cu citeva consideratii pe marginea particulelor clasice.

Faptul ca neutrino nu are masa de repaus (ca si fotonul), conduce la rezultatul ca el se deplaseaza cu *viteza luminii* (de aici incolo consideram masa neutrino este nula, urmind sa revenim la acest aspect in sectiunea ??). Aceasta are o consecinta suprinzatoare in ceea ce priveste *elicitatea* sa.



Figure 7.31: dupa [?]

Astfel, sa consideram figura Fig.7.31, care ne prezinta o particula *clasica* de masa finita in miscare (avind viteza v), si *rotindu-se* in acelasi timp in jurul unei axe paralele cu directia de miscare. Daca privim particula dintr-o pozitie de repaus, atunci vom avea reprezentarea din stanga Fig.7.31 de exemplu. Aici directia particulei coincide cu directia de rotatie data de regula surubului. Spunem atunci ca particula este "right-handed".

Sa presupunem acum ca ne deplasam si noi in directia de miscare a particulei, dar cu o viteza mai mare! Atunci, noua situatie este reprezentata in dreapta Fig.7.31. Aici vedem ca vom observa particula ca se deplaseaza in sens opus (pentru ca o lasam in urma), dar sensul de rotatie al ei ramane neschimbat. Acest sens de rotatie poate fi determinat din nou cu regula surubului referitor la directia de miscare, numai ca acum acesta este dat de directia de "desurubare". Cu alte cuvinte, particula a devenit "left-handed".

Vedem astfel ca o particula de viteza finita poate fi descrisa ca fiind sau "right-handed", sau "left-handed", depinzind de miscarea relativ la particula. Astfel, putem spune ca caracteristicile de "left-handed" sau "right-handed" nu sunt caracteristici *intrinseci* ale particulei.

Alta este insa situatia pentru o particula ca neutrino, care se deplaseaza cu viteza luminii. Pentru ca nu putem depasi niciodata viteza luminii, situatia initiala nu se mai schimba. Astfel, daca particula este initial "left-handed", atunci ea ramane "left-handed" in orice sistem de referinta (unde are desigur aceeasi viteza c si aceeasi directie). Cu alte cuvinte, putem spune ca caracteristicile "left-handed" sau "right-handed" sunt in acest caz caracteristici *interne* ale particulelor ce se deplaseaza cu viteza luminii (ca neutrino).

Aceste argumente clasice se regasesc si intr-o analiza mai riguroasa a ecuatiei lui Dirac pentru electroni ?? sau neutrino 7.76. In sectiunea ?? am mentionat ca exista mai multe alegeri

posibile pentru matricile Dirac γ^μ , in afara de cea prezentata in relatiile ???. Fiecare dintre aceste alegeri este legata de o baza a functiilor de unda pe care vrem sa o folosim.

Dupa cum ne reamintim, alegerea ?? a fost utila pentru ca cele doua componente ψ si χ indeplineau relatia $\psi \ll \chi$, si ca atare puteam lucra in prima aproximatie numai cu matricea ?? de doua componente ψ . In plus cele doua ale acestora ψ_1 si ψ_2 defineau clar electronul de "spin-up" si cel de "spin-down". In discutia urmatoare, o alta alegere este mai potrivita, numita *reprezentarea Weyl*, sau *reprezentarea chirala*. Ea este data de:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.86)$$

Sa scriem acum cele patru componente ale spinorului ψ ca:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad (7.87)$$

unde

$$\phi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \quad \phi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.88)$$

Inlocuind ϕ_L si ϕ_R in ecuatia lui Dirac, vom obtine un set de doua ecuatii, in care cele doua componente ϕ_L si ϕ_R apar in fiecare din ele (o situatie asemanatoare cu ecuatiile ??). In mod inasa remarcabil, in cazul neutrului ($m = 0$), cele doua ecuatii se *separa* pe componente (vezi exercitiul ??):

$$(p_0 + \sigma \mathbf{p}) \phi_L = 0 \quad (7.89)$$

$$(p_0 - \sigma \mathbf{p}) \phi_R = 0 \quad (7.90)$$

$$(7.91)$$

Deoarece neutrul nu are masa, avem $p_0 = |\mathbf{p}|$, si aceste ecuatii se rescriu ca:

$$\sigma \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \phi_L(\mathbf{p}) = -\phi_L(\mathbf{p}); \quad \sigma \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \phi_R(\mathbf{p}) = \phi_R(\mathbf{p}) \quad (7.92)$$

$$(7.93)$$

Acum, ne reamintim ca matricile σ reprezinta operatorul de spin (vezi relatiile ??). Ca atare, operatorul $\sigma \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ masoara componenta spinului *in directia momentului* $\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. Acest operator se numeste *helicity*. Din relatiile precedente vedem ca helicitatea poate ia valorile 1 (pentru "right-handed") si -1 (pentru "left-handed").

Sa ne reamintim inasa ca explicatia *clasica* a spinului a fost miscarea de rotatie in jurul unei axe. Rezultatul precedent este atunci remarcabil, caci daca spinul este orientat in directia miscarii, putem asuma *clasic* ca particula se roteste un jurul unei axe paralele cu directia miscarii, precum in Figura 7.31! Cu alte cuvinte, putem identifica *solutia* primei ecuatiei 7.92 ca descriind un neutrul care se roteste invers fata de sensul dat de regula surubului aplicat in directia de miscare (dreapta Figurii 7.31):

$$\psi_L(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_L(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.94)$$

Aceasta solutie este propusa pentru calcul in exercitiul ???. In mod asemanator, solutia $\psi_R(\mathbf{p})$ va descrie un neutrul ce se roteste *clasic* conform schitei in dreapta Figurii 7.31. In plus, daca spinorul

Conform celor discutate mai sus, spinorii 7.94 $\psi_R(\mathbf{p})$ si $\psi_L(\mathbf{p})$ verifica ecuatiile 7.92, si care atare helicitatea va fi o constanta

intrinseca a neutrului, o constanta de miscare a particulei libere. Aceasta se potriveste din nou cu argumentul nostru clasic ca pentru particulele ce se deplaseaza cu viteza luminii (si numai pentru ele) helicitatea poate fi o caracteristica interna.

Discutiile de mai sus au avut rolul de a introduce notiune de helicitate. Asa cum am mentionat, neutrul este un caz special, caci in acest caz ne asteptam ca sa gasim neutrul liber (sau antineutrul sau) *intr-una* din cele doua stari, sau o combinatie liniara daca vrem sa complicam lucrurile. Remarcabil inasa, *in experiment*, numai neutrul "left-handed" si anti-neutrul "right-handed" sunt observati!

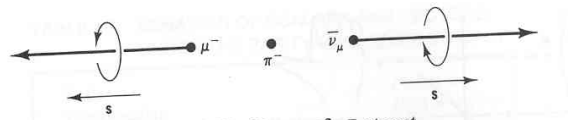


Figure 7.32: dupa [?]]

Un astfel de experiment este schitat in Fig.7.32. Aici un pion π^- aflat *in repaus* se dezintegreaza intr-un muon μ^- si un antineutrino $\bar{\nu}_\mu$ dupa reactia

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (7.95)$$

Cum pionul initial este in repaus, helicitatea particulelor care ies din reactie trebuie sa fie opusa. Cum helicitatea antineutrului este greu de masurat (pentru ca neutrul interactioneaza greu cu materia) experimentatorii au masurat helicitatea muonului μ^- . Si, spre surpriza noastra (caci ei banuiau deja), muonul rezultat din reactie are mereu *aceeasi* helicitate, el este "right-handed". In consecinta, anti-neutrul este si el "right-handed" mereu.

Surpriza sta in aceea ca, din considerente de simetrie, ne-am astepta ca aceeasi reactie sa produca si anti-neutrini "left-handed". Nici aceasta reactie, nici altele, nu au dus la observatia lor experimentală. Este ca si cum antineutrini "left-handed" si neutrini "right-handed" *lipsesc* din natura!

Rezultatul in sine n-ar fi revoltator, daca nu pare ca sfideaza una din simetriile esentiale ale lumii noastre, *simetria in oglinda*. Astfel, nimic nu impiedica in Fig.7.32 generarea anti-neutrului "left-handed" si "right-handed" cu probabilitati egale! Cu toate acestea, acest lucru nu se intimpla in practica.

Citeva cuvinte despre experimentul cu *Co60* al lui Wu, desi deloc nu in detaliu.

Daca ruperea simetriei in oglinda ne socheaza, exista o "portita" care o face mai acceptabila. Astfel, sa punem fata in fata reactia 7.95 in care antineutrul este mereu "right-handed", cu reactia urmatoare

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (7.96)$$

in care neutrul rezultat este mereu "left-handed" asa cum am mentionat.

Aceasta ne sugereaza urmatoare explicatie. Poate ca "simetria de oglinda" nu este rupta. Poate ca ar trebui sa redefinim aceasta notiune. Dupa noua definitie, o particula "privit in oglinda" ar trebui sa se transforme in antiparticula sa! In acest fel, "imaginea in oglinda" a relatiei 7.95 ar fi relatia 7.96, in care antineutrul "right-handed" devine un neutrul "left-handed". Presupunerea nu este extravaganta, caci la urma urmei sarcinile dintr-o imagine in oglinda in care ne uitam nu interactioneaza niciodata cu cele din lumea reala, si daca ele au *toate* semnul opus nu am avea cum sa ne dam seama, comportarea ar fi aceeaasi. rezultatul noi definitii este ca noua simetrie de oglinda nu mai este "rupta", caci ambele reactii 7.95 si 7.96 sunt intilnite in practica.

In plus, prezenta numai a neutrinelor "left-hand" in univers, si observatia precedenta, implica faptul ca ruperea de simetrie initiala intre materie si antimaterie s-a putea sa fie legata de forta slaba.

7.3.3 Lagrangeanul pentru particulele fara masa

Sa incercam sa construim acum o prima forma a lagrangeanului ce descrie interactiile slabe, bazindu-ne pe doua elemente specifice interactiilor tari:

1. Exista mai multe generatii de "electroni" de mase diferite (electronul, muonul, taonul) fiecare avind neutrinelor sau core-spunzator.
2. Din definitia curentului slab, putem banui ca perechea electron (e^-) si neutrinelor sau (ν_e) sunt aspecte diferite ale unei aceeasi particule primare. Acelasi lucru este valabil si pentru perechile (μ^-, ν_μ) si (τ^-, ν_τ).
3. Neutrini apar numai "left-handed", si anti-neutrini numai "right-handed".

A doua remarca ne pune o problema, caci electronul are masa pe cind neutrinelor nu are. Pentru a putea considera ca amindoua provin din aceeasi particula primara, vom presupune pentru inceput ca nici electronul *nu are* masa. Precum in constructia lagrangeanului pentru interactiile de culoare, consideram pentru inceput ca acesti leptoni ($e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau$) nu interactioneaza intre ei. putem scria atunci Lagrangeanul cimpului toatal al acestor particule cu ajutorul formulei ??:

$$L = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \partial_\mu \psi_e + \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\nu + (e \rightarrow \mu, \tau) \quad (7.97)$$

In total sunt 6 termeni, dar cei patru corespunzatori lui μ si τ au fost desemnati prescurtat. De aici incolo, pentru a simplifica formulele, nu vom mai scrie acesti termeni, si ne vom limita la electroni si neutrinelor electronic.

Lagrangeanul de mai sus contine electroni si neutrini si "left-handed" si "right-handed". Pentru ca am vazut in natura ca neutrini "right-handed" (si respectiv anti-neutrini "left-handed") nu exista, va trebui sa-i eliminam pe acestia din Lagrangean. Pentru aceasta revenim la reprezentarea chirala 7.86 folosita in sectiunea precedenta. Pentru ca am vazut ca primele doua componente ale spinorului ψ tin de componenta "left-handed" iar ultimele doua de componenta "right-handed", sa definim urmatoarea matrice:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \beta \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (7.98)$$

si sa selectam aceste componente:

$$\psi_L = \left(\frac{I_4 - \gamma_5}{2} \right) \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.99)$$

$$\psi_R = \left(\frac{I_4 + \gamma_5}{2} \right) \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.100)$$

Folosind definitia 7.98 se poate arata imediat ca

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (7.101)$$

Ca atare, lagrangeanul 7.97 se rescrie ca:

$$L = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{eR} + \bar{\psi}_e \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{eL} + \quad (7.102)$$

$$+ \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu R} + \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu L} + \quad (7.103)$$

Toti acesti spinori au deci 4 elemente, doar ca doua dintre ele sunt mereu nule in reprezentarea chirala. Acum, spinorul neutrinelor cu indicele R , avind practic doar doua componente nenule, reprezinta practic *doua* posibile particule: neutrini "right-handed" (spinul orientat inspre directia de miscare) si antineutrini "left-handed" (sau, desigur, o combinatie a acestora). Noi insa stim ca aceste particule nu au fost observate in experiment, ca atare, cel mai natural este sa eliminam acesti termeni din lagrangean! Ca atare, lagrangeanul devine:

$$L = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{eR} + \bar{\psi}_e \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{eL} + \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu L} \quad (7.104)$$

Sa ne reamintim insa ca acesta descrie o colectie de particule (fermioni) care nu interactioneaza intre ele, pentru ca cimpul bosonic nu este inca adaugat. Constructia cimpului bosonic o facem precum in sectiunile ?? si ??, bazindu-ne pe invarianta la etalonarea *locale*, asa cum a fost propusa de Yang-Mills. Pentru aceasta trebuie insa sa studiem mai intii transformarile *globale* care lasa lagrangeanul invariant.

Probleme, nu imi este complet clar alegerea urmatoare. As prefera sa vad ca aceasta este *singura* posibila. Dar am senzatia ca daca aleg un L format numai din electroni si R din neutrini, pot construi o simetrie, si deci un alt lagrangean! De ce cu atunci un $SU(3)$? Nu este ea cea mai generala? Incerc o linie, dar verifica!

La prima vedere se pare ca celor trei termeni li se poate atasa o simetrie $SU(3)$, precum la interactia de culoare, care ar fi simetria cea mai generala. Cu toate acestea, desi matematic posibil, fizic alegerea ar fi gresita! (verifica cum am zis...) Aceasta pentru ca interactiile slabe conserva helicitatea. Cu alte cuvinte, un electron care intra in reactie "left-handed", iese din reactie sub forma unui neutrino "left-handed". Curentul slab patreaza asadar caracterul de elicitate, si aceasta caracteristica fizica trebuie introdusa in relatiile de simetrie. Am putea spune atunci ca electronul "left-handed" si neutrinelor "left-handed" provin din aceeasi particula "primara", dar electronul "right-handed" este o particula *separata*. Aceste argumente fizice ne conduc la urmatoarea redefinitie:

$$L = \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{eL} \end{pmatrix}; \quad R = \psi_{eR} \quad (7.105)$$

iar lagrangeanul se rescrie ca:

$$L = \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu L + \bar{R} \gamma^\mu \partial_\mu R \quad (7.106)$$

In relatia de mai sus am folosit din nou o simplificare de notatie. Astfel, de exemplu L este o matrice de 8 coloane, si aceasta nu ar putea fi inmultita cu matricea γ care au numai 4 rinduri. Relatia de mai sus trebuie atunci "citita" sub forma urmatoare: in prima instanta, L este o matrice de doua coloane, iar matricea γ doar un "numar". Dezvoltin atunci obtinem relatiile 7.112, iar in acestea revenim la interpretarea initiala de matrici si spinori de dimensiune 4.

Recunoastem atunci o prima simetrie interna $SU(2)$ atasata matricii de 2 dimensiuni L . Cu alte cuvinte, daca facem o transformare interna cu o matrice *unitara* U de dimensiune 2:

$$L \rightarrow UL; \quad UU^{-1} = U^{-1}U = I_2 \quad (7.107)$$

obtinem:

$$L' = \bar{L} (U^{-1})^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu (UL) = \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu (U^{-1}U)L = \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu L = (7.108)$$

adica lagrangeanul ramine invariant. Aceste matrici unitare de dimensiune 2 pot fi insa scrise sub forma generala:

$$U = \exp \left(-\frac{i}{2} \tau_i \theta_i \right) \quad (7.109)$$

Aici τ_i sunt cele trei matrici (ar trebui sa fie σ) prezentate in ??, iar α_i sunt trei numere reale care determina matricea unitara U .

Am vazut ca lagrangeanul este invariant la transformarile globale U . Dar ce se intimpla daca alegem astfel de transformari locale $U(x)$?

$$U(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\tau_i\theta_i(x)\right) \quad (7.110)$$

In acest caz, asa dupa cum anticipam, lagrangeanul nu mai este invariant, datorita derivatei spatio-temporale ∂_μ . Avem atunci $\partial_\mu U(x)L(x) \neq U(x)\partial_\mu L(x)$. Construim atunci un *nou* lagrangian care sa fie invariant si la aceste transformari dupa "reteta" Yang-Mills. Folosim atunci in loc de derivata ∂_μ , derivata covarianta:

$$D_\mu L = \partial_\mu - \frac{i}{2}g\tau_i W_\mu^i L \quad (7.111)$$

Aici $W_\mu^i(x)$ va descrie operatorul de cimp asociat particulelor bosonice care vor descrie interactiile intre electronii si neutrinii "left-handed". Deoarece avem 3 matrici τ_i , vom avea si 3 astfel de bosoni W , dati de indicele i . In plus, fiecare astfel de boson are 4 componente (precum fotonul), ordonate dupa indicele μ .

Noul lagrangean va fi apoi:

$$L = \bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\tau_i W_\mu^i \right) L + \bar{R}\gamma^\mu \partial_\mu R \quad (7.112)$$

Precum in sectiunile ?? si ?? dedicate cimpului electromagnetic si interactiunii de culoare, forma de mai sus este lipsita de sens daca nu specificam cum se transforma $W_\mu^i(x)$ la o transformare unitara locala $U(x)$. Prin comparatie cu relatiile 7 si 7.49, alegem ca cimpul W sa se transforme ca:

$$W_\mu^i(x) \rightarrow W_\mu^i(x) - \partial_\mu \theta^i(x) + gf_{jk}^i \theta^j(x) W_\mu^k(x) \quad (7.113)$$

unde f_{ij} sunt constantele de structura ale simetriei $SU(2)$, date de relatiile ???. Atentie, relatia de mai sus e scrisa "din burta", pune mina si scrie-o pe cea corecta!

Se poate verifica acum direct (vezi exercitiul ??) ca, orice functii $\theta^i(x)$ am alege pentru o transformare unitara U data de 7.110, acestea pastreaza lagrangeanul 7.112 invariant, daca se foloseste desigur transformarea 7.113 pentru cimpul bosonic.

Lagrangeanului 7.112 ii lipseste insa componenta cimpului bosonic $W_\mu^i(x)$ liber. Aceasta se adauga in asa fel incit sa fie si ea invarianta la transformarile 7.113 date de $\theta^i(x)$. O analiza riguroasa (vezi exercitiul ??) arata ca o astfel de forma este asemanatoare formei electromagnetice ?? si cea a gluonului ??, si se scrie simplificat cu ajutorul termenului (din nou "din burta!"):

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + gf_{jk}^i W_\mu^j W_\nu^k \quad (7.114)$$

Lagrangeanul care include si cimpul bosonic liber, si care este invariant la transformarile locale de etalonare $\theta^i(x)$ este:

$$L = \bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\tau_i W_\mu^i \right) L - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} + \bar{R}\gamma^\mu \partial_\mu R \quad (7.115)$$

Aceasta forma intermediara anticipeaza deja, prin notatia pe care am folosit-o, prezenta bosonului intermediar W banuit in experimente, si introdus in sectiune ???. Dupa cum se vede din relatia de mai sus, el actioneaza numai asupra particulelor de

elicitate L . Electronii "right-handed" nu interactioneaza inca intre ei, nici macar prin interactia electromagnetica.

Aici este momentul sa reamintim ca succesul teoriei electrolabe, pe care incercam sa o reconstruim aici, s-a datorat nu numai explicitarii interactiei slabe, dar si unificarii acesteia cu interactia electromagnetica. Aceasta unificare vom incerca sa o urmarim si noi. D aceea trebuie sa introducem in lagrangeanul precedent termeni de interactie si intre electronii "right-handed", care sa conduca in final la interactia electromagnetica.

Acesti termeni pot fi introdusi urmarind o alta transformare de simetrie globala care lasa lagrangeanul 7.112 invariant, si care trebuie sa fie legata de termenii cu R . La prima vedere aceasta este simpla inmultire cu o constanta complexa $R \rightarrow e^{i\beta} R$, care lasa intr-adevar lagrangeanul 7.112 invariant. In fond, aceasta transformare triviala poate fi aplicata si termenului L , asa incit putem spune ca lagrangeanul este invariant la transformare globala:

$$\begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{in\beta} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} \quad (7.116)$$

unde n si β pot fi orice numere reale. Am neclaritati aici, de ce nu aleg $n = 0$? Ca am pus deja transformarile U ...

Cu toate acestea, o parte din aceste transformari, cele care ne permit sa alegem ce numar n vrem noi, sunt deja incluse in transformarile unitare U 7.109. Daca am considera ca putem alege din nou orice numar n , am duplica o parte din transformarile care lasa lagrangeanul invariant. Pentru a elimina transformarile U deja folosite, putem alege $n = 0$, dar aceasta nu este alegerea cea mai potrivita, care sa verifice rezultatele fizice (desi este posibila teoretic).

Alegerea potrivita este $n = 1/2$, din urmatoarele motive. In primul rind, ea este atragatoare pentru ca lasa transformarea β sa actioneze peste ambele componente. Astfel, stim din teorema lui Noether ca fiecarei transformari de simetrie ii este asociata o sarcina care sa se conserve. O valoare $n = 0$ ne-ar conduce la o sarcina pentru electronii R care nu ar fi prezenta pentru particulele L , si deci nu ar conduce in nici un caz la sarcina electrica.

In fond, transformarea 7.116 conduce la urmatoarea divizie a sarcinilor intre particulele L si R :

$$q_L = nq_R \quad (7.117)$$

Pe de alta parte, transformarea 7.109 isi are si ea sarcinile ei asociate. In acest caz putem considera ca electronul "left-handed" si neutrul "right-handed" sunt cele doua stari posibile ale spinorului L . Prin asemanare cu spinul electronului (vezi sectiunea ??), "sarcinile" acestora vor fi:

$$\text{neutrul } L: I_w^3 = \frac{1}{2}; \quad \text{electron } L: I_w^3 = -\frac{1}{2} \quad (7.118)$$

Pe de alta parte, sarcina electronului R asociata la aceste transformari va fi nula $I_w^3 = 0$. Sarcinile electrice ale neutrului si electronului pot fi "recuperate" atunci daca scriem:

$$\text{neutrul } L: Q = I_w^3 - \frac{1}{2} = 0 \quad (7.119)$$

$$\text{electron } L: Q = I_w^3 - \frac{1}{2} = -1 \quad (7.120)$$

$$\text{electron } R: Q = I_w^3 - 1 = -1 \quad (7.121)$$

Termenul cel de-al doilea din relatiile de mai sus care a fost adaugat fortat pentru a reconstitui sarcina electrica poate fi sarcina data de transformarea 7.116. Aceasta sarcina se numeste "weak hypercharge", si se noteaza cu Y_W . Ea este $Y_W = -1$

pentru particulele L si $Y_W = -2$ pentru particulele R . Scriem deci:

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2} \quad (7.122)$$

Atunci lucrurile se potrivesc se potrivește dacă facem, referitor la 7.117, identificarea $q = Y_W/2$, si deci:

$$n = \frac{1}{2} \quad (7.123)$$

asa cum am mentionat. Reapitulind, transformarea globala 7.116 cu $n = 1/2$ lasa lagrangeanul 7.112 invariant. In continuare inasa, vrem sa facem lagrangeanul invariant si la o transformare *locala* de acelasi tip:

$$\begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}g'\beta(x)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}g'\beta(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} \quad (7.124)$$

In relatia de mai sus am scos in evidenta o *noua* constanta de cuplaj g' , care poate fi introdusa datorita libertatii in alegerea acestei simetrii. Ea este diferita de constanta de cuplaj g , si conduce astfel la rezultatul neasteptat ca interactia electrolaba va fi descrisa de *doua* constante de cuplaj! Acest rezultat este folosit de anumiți "critici" in a afirma ca in acest fel teoria interactiei slabe nu poate fi considerata ca a fost unificata cu cea electromagnetica, pentru ca procesul de unificare impune introducerea unei constante de cuplaj aditionale.

Prin repetarea "metodei" Yang-Mills, facem teoria acum invarianta la etalonari locale, introducind derivata covarianta si un cimp bosonic de interactie. Pentru ca simetria 7.124 $U(1)$ are un singur generator $\beta(x)$, cimpul bosonic va fi descris de o singura particula X_μ cu patru componente, precum cimpul electromagnetic. Derivatele covariante vor fi date de sarcina "waek hypercharge" Y_W corespunzatoare unui cimp ψ *oarecare*:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i \frac{Y_W}{2} g' X_\mu \psi \quad (7.125)$$

$$(7.126)$$

In mod particular, pentru particulele L si R , avem:

$$D_\mu L = \partial_\mu L + \frac{i}{2} g' X_\mu L \quad (7.127)$$

$$D_\mu R = \partial_\mu R + i g' X_\mu R \quad (7.128)$$

Remarcam prezenta factorului $n = 1/2$ si faptul ca derivata covarianta trebuie sa actioneze asupra ambelor tipuri de particule L si R , datorita formei matriceale 7.124. Pe de alta parte, cimpul bosonic X_μ se transforma identic cu cimpul electromagnetic al transformarilor locale 7.124 generate de $\beta(x)$ ³:

$$X_\mu(x) \rightarrow X_\mu(x) - \partial_\mu \beta(x) \quad (7.129)$$

Transformarile locale 7.124 lasa acum termenii $i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L$ si $i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R$ invarianti cind transformarile 7.129 sunt utilizate. Acest lucru este verificat in exercitiul ???. In plus, trebuie sa adaugam un termen in lagrangean corespunzator cimpului bosonic X_μ liber, care este inasa, asa cum ne asteptam, identic cu cel al cimpului electromagnetic (atentie ca am folosit mereu aceeasi litera cu doi indici, trebuia sa spun ca este un alt cimp!):

$$X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu \quad (7.130)$$

care introduce termenul $-X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}/4$ in lagrangean. Incorporind aceste rezultate ale noii simetrii 7.129 in lagrangeanul 7.131, obtinem o noua forma acesteia:

$$L = \bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g\tau_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' X_\mu \right) L + \quad (7.131)$$

$$+ \bar{R}\gamma^\mu (\partial_\mu + i g' X_\mu) R - \quad (7.132)$$

$$-\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \quad (7.133)$$

Lagrangeanul de mai sus descrie acum interactiile dintre electroni si neutrini prin intermediul cimpurilor bosonice $W_\mu^i(x)$ si $X_\mu(x)$. El are inasa un mare neajuns: particulele constitutive nu au masa. Aceasta nu numai pentru electroni, dar in mod special pentru bosonul W . In teoria de mai sus bosonul W , purtatorul interactiei slabe, ar actiona pe distante mare, contrar concluziilor discutiei noastre din sectiunea ??.

La prima vedere, adaugarea masei pentru diversele particule nu ar fi dificala. Am putea sa adugam termeni de masa de forma $m\bar{\psi}\psi$ (care apare in ecuatiile lui Dirac), si care au fost lasati deoparte la inceputul sectiunii. Cu toate acestea, solutia nu merge pentru bosonul W , dintr-un motiv ce este legat de renormalizarea teoriei.

Sa ne reamintim ca teoriile de tip Yang-Mills sunt *renormalizabile*, lucru demonstrat de un tinar brilliant, doctorand in anii '50, pe numele sau t'Hooft (si laureat in premiului nobel in ...). Faptul acesta a dus la acceptarea lor de catre comunitatea stiintifica. Pe de alta parte, adaugarea unui termen de masa pentru cimpul bosonic sub forma $m_W \bar{W}W$ conduce automat la divergente ce *distrug* renormalizabilitatea teoriei (vezi discutia din sectiunea ??). Acesta este si motivul esential pentru care electrodinamica este renormalizabila: fotonul are masa *identic* nula.

Pe de alta parte, se stie experimental ca bosonul W are o masa *finita*, ceea ce duce la un semn de intrebare: mai este teoria precedenta corecta, daca nu ii putem aduga masa bosonului fara sa distrugem renormalizarea? Raspunsul la aceasta intrebare a framintat multi ani comunitatea stiintifica, pina cind el a fost gasit, cu ajutorul unei "apropach" specifice teoriilor starii solide: teoria este corecta, dar masa bosonului trebuie adaugata *printr-o alta maniera*, foarte necoventionala, care inasa *patreaza* teoria renormalizabila! Despre aceasta metoda necoventionala va fi vorba in sectiunea urmatoare.

7.3.4 Ruperea de simetrie

Ruperea de simetrie pentru un singur cimp scalar

Sa consideram cimpul scalar cu interactie discutat in sectiunea ??, al carui lagrangean este ?? (vezi ca nu mai foloseste factorialul):

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2) - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (7.134)$$

Spre deosebire de lagrangeanul ?? inasa, sa consideram termenul de masa imaginar! Adica sa alegem constanta μ in asa fel incit $\mu^2 < 0$ ($\lambda > 0$). In acest caz nu mai putem vorbi despre o semnificatie fizica a masei imaginare μ . Ce se intimpla inasa atunci?

Pentru a intelege noua situatie, sa impartim termenii din lagrangean $L = T - V$ in termenul "cinetic" $T = (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)/2$ si in cel potential V :

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (7.135)$$

³"din burta", verifica!

Termenul de potential al cimpului trebuie desigur inteles ca o valoare pe care o ia cimpul in fiecare eveniment din spatiu-timp: $V(x) = V(\phi(x))$. Cum ea are aceeași forma in toate evenimentele spatio-temporale, am reprezentat in Fig.7.33 acest potential. Dupa cum se vede, el arata ca o caciula: este simetric fata de origine si are doua minime. Simetria fata de origine este o invarianta a lagrangeanului la transformarea $\phi \rightarrow -\phi$.

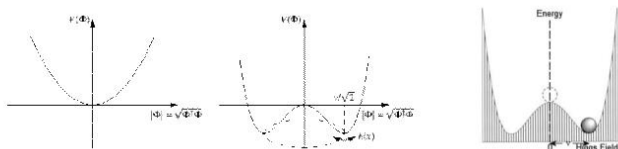


Figure 7.33: dupa [?]

Prezenta minimelor este foarte importanta. Astfel, ele pot fi interpretate in sensul clasic, schitat topt in Fig.7.33. Aici o bila asezata intr-o ripa de forma "palariei" din Fig.7.33 chiar in virful palariei, si miscata putin, va aluneca automat in cele doua gauri ale ripei. Cu alte cuvinte, bila va prefera acea pozitie in care potentialul este minim. Dupa ce bila a alunecat intr-un din cele minime, remarcam o *rupere* a simetriei initiale.

Acelasi lucru se intimpla si cu potentialul ϕ in orice punct x . Daca exista oscilatii cit de mici in cimp, acestea vor face ca cimpul clasic sa ia una din cele valori minime $\phi = -v$ sau $\phi = v$! Datorita continuitatii spatiu-timpului, este de asteptat ca el sa ia aceeasi valoare v sau $-v$ in toate punctele x din spatiu. Valoarea v care minimizeaza potentialul se poate calcula imediat cu:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (7.136)$$

Daca clasic cimpul prefera sa ia valoarea v (pe care o alegem pentru exemplificare), atunci ne asteptam ca cimpul cuantic sa fie descris de oscilatii cuantice χ in jurul acestei valori:

$$\phi(x) = v + \chi(x) \quad (7.137)$$

Intr-un fel, am putea spune ca noul vid a fost modificat, el consistind acum din cimpul constant v . Inlocuind valoarea precedentă in lagrangean, obtinem noul lagrangean:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - 2\lambda v^2 \chi^2) - \lambda v \chi^3 - \frac{1}{4} \lambda \chi^4 + \frac{1}{4} \lambda v^4 \quad (7.138)$$

In acest lagrangean ar trebui sa consideram cimpul $\chi(x)$ un nou cimp, care descrie corect devierile de la cimpul de vid v . In formula precedentă vedem un lucru remarcabil: termenul corespunzător masei cimpului χ a devenit pozitiv:

$$m_\chi = \sqrt{2\lambda v^2} > 0 \quad (7.139)$$

Termenii 3 si 4 din lagrangean descriu interactiile intre particulele cimpului χ , iar ultimul termen din 7.138 este o constanta.

In plus, noul lagrangean nu mai este invariant la transformarea $\chi \rightarrow -\chi$. Spunem in acest caz ca simetria corespunzătoare acestei transformări a fost *rupta*. Ea este rupta *spontan*, pentru ca lagrangeanul initial 7.134 pastra aceasta simetrie, si noi nu am introdus fortat termeni in lagrangean care s-o rupa. Procesul acesta a condus insa la generarea unei mase *finite* si *reale* pentru particula cimpului $\chi(x)$.

Ruperea de simetrie pentru doua cimpuri scalare

In acest caz generalizam procedura precedentă pentru un cimp complex. Cu alte cuvinte, cimpul ϕ este dat acum de:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (7.140)$$

unde din nou $\mu^2 < 0$ si $\lambda > 0$. Lagrangeanul cimpului scalar se scrie acum ca:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (7.141)$$

Potentialul acestuia se scrie sub forma:

$$V(\phi, \phi_2) = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (7.142)$$

Acest potential este reprezentat schematic in Fig.7.34.

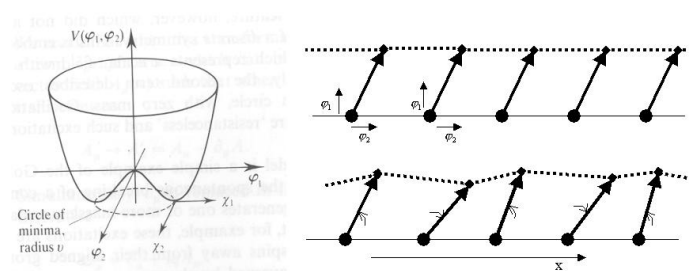


Figure 7.34: dupa [?]

Aici se vede forma de "palarie mexicana" a potentialului reprezentat in spatiul luat de valorile functiilor de unda ϕ_1 si ϕ_2 . Ca si in sectiunea precedentă, cimpul clasic va alege valoarea minima a potentialului, care este tot $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$. Dupa cum vedem insa in figura 7.34, aceasta valoare se insa poate lua pentru mai multe combinatii de valori ale cimpurilor ϕ_1 si ϕ_2 , aflate pe cercul din "josul" palariei, de raza v .

Situatia este reprezentata schematic in dreapta Fig.7.34. Aici, fiecare eveniment x este reprezentat printr-un punct ingrosat. Pentru fiecare punct, o sageata ne spune cit de mare sunt cimpurile clasice $\phi_1(x)$ si $\phi_2(x)$. Pe de alta parte, cimpul clasic este realizat pentru $\phi_1(x)^2 + \phi_2(x)^2 = v^2$, de aceea aceste sageti vor avea aceeasi lungime peste tot cind cimpul este in situatia de potential minim. Pe de alta parte ele, chiar avind aceeasi lungime, ar putea fi orientate in directii aleatoare pentru fiecare punct. Cu toate acestea, lagrangeanul 7.141 ne spune ca exista si o interactie de la un punct la celalat. Aceasta interactie am reprezentat-o printr-o linie intrerupta intre virfurile sagetilor.

In mod plastic ne putem imagina situatia ca un fel de elastic care unește virfurile unor sageti rigide ce se pot roti in jurul capatului lor fix. Daca permitem ca sagetile sa ia directii aleatoare, unele elastice vor fi intinse, ale strinse (cazul din josul Fig.7.34). Ne putem astepta atunci ca situatia de energie minima sa fie atunci cea din partea de sus a Fig.7.34, in care toate sagetile sa fie *aliniolate*!

Sa pun exemplul si poza cu ospatarii?

Fara a pierde din generalitate, noi vom considera ca starea clasica de energie potentiala minima va fi realizata pentru $\phi_1(x) = v$ si $\phi_2(x) = 0$. Variatiile de la aceasta stare de energie minima vor fi descrise atunci de

$$\phi_1(x) = v + \chi_1(x) \quad \phi_2(x) = \chi_2(x) \quad (7.143)$$

De acum incolo vom considera ca cimpul scalar este descris de valorile $\chi_1(x)$ si $\chi_2(x)$, si vom proceda ca si in sectiunea

precedenta, rescriind lagrangeanul:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_1 \partial^\mu \chi_1 - 2\lambda v^2 \chi_1^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_2 \partial^\mu \chi_2) \quad (7.144)$$

$$- \lambda v (\chi_1^3 + \chi_1 \chi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\chi_1^4 + \chi_1^2 \chi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda v^4 \quad (7.145)$$

Sa urmarim acum atent termenii de putere 2 pentru ca ei ne dau coeficientii de masa ai particulelor care descriu excitatiile. Termenii de ordin superior, adunati in linia a doua a relatiei mai sus, ne dau interactiile. Dupa cum vedem, numai cimpul $\chi_1(x)$ are termen de masa, cimpul $\chi_2(x)$ avind masa nula!

$$m_1 = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}; \quad m_2 = 0 \quad (7.146)$$

Rezultatul in sine este remarcabil. Astfel, lagrangeanul initial nu prezenta o simetrie intre cimpurile ϕ_1 si ϕ_2 . In urma alegerii unei stari de energie minima particulara aceasta simetrie a fost rupta. Ca si in sectiunea precedenta, spunem ca simetria a fost rupta in mod *spontan*. In schita din Fig. 7.34 ruperea simetriei se manifesta prin alegerea unei orientari generale a tuturor sagetilor.

Cimpurile χ_1 si χ_2 ce descriu excitatiile sunt ca atare asimetriche. Primul cimp χ_1 are masa. Aceasta pentru ca el descrie o excitatie a cimpului intr-o directie perpendiculara pe carcul de energie minima din Fig. 7.34. In reprezentarea noastra cu sageti el reprezinta o lungire sau scurtare fortata a sagetilor, lucru care cere energie multa pentru ca sagetile sa se deplaseze sa aiba o lungime v . De aceea aceasta excitatie este de asteptat sa aiba masa.

Pe de alta parte, cimpul χ_2 reprezinta o excitatie de de-a lungul cercului de energie minima din Fig. 7.34. In schita din partea dreapta el reprezinta o *rotatie* a sagetilor in jurul punctului fix. Ca atare, aceasta rotatie trebuie sa invinga legatura mai scazuta a elasticului care uneste virfurile sagetilor. In plus, exista rotatii si colective, sub forma unei unde, care cer o energie aproape nula (acestea pot fi imaginate ca o unda ce se propaga in elasticul din Fig. 7.34). Ca atare aceste excitatii sunt mai "usoare", si particulele asociate acestor excitatii nu au masa. Rezultatul este insa general, si se exprima sub forma teoremei lui Goldstone: ruperea spontana a unei simetrii globale genereaza mereu unul sau mai multi bosoni de masa nula.

7.3.5 "Achizitia" de masa pentru bosonul W

Introducerea cimpului Higgs in lagrangian

Punem vedea acum in ce masura rezultatul precedent este util in adaugarea masei bosonului W . Astfel, mecanismul ruperii spontane de simetrie ne genereaza masa pentru anumite cimpuri si ne asigura ca cel putin un alt cimp va capata masa nula. In cazul nostru vrem desigur sa-i dam masa bosonului W si sa ne asiguram o masa nula pentru cimpul electromagnetic. Fals! bosonul Goldstone va fi mincat in alegerea etalonarii!! Citeste mai atent.

Vom introduce deci cel putin doua cimpuri aditionale scalare, pe care sa le amestecam cu cimpurile deja introduse in lagrangeanul fara masa 7.131. Metoda este oarecum indirecta, caci *nu vom modifica* lagrangeanul 7.131 deja existent, ci ne vom folosi de aceste cimpuri scalare aditionale pentru a-i da masa bosonului W . Pentru a fi mai precisi, vom introduce scalar isospinor:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + \beta\phi_4 \\ \phi_1 + \beta\phi_2 \end{pmatrix} \quad (7.147)$$

unde $\phi_1, \dots, \phi_4$ sunt cimpuri reale. Daca ar fi liber, lagrangeanul acestui cimp ar fi, prin asemanare cu relatia 7.141, dat de:

$$L = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (7.148)$$

unde consideram ca si in sectiunile precedente $\lambda > 0$ si

$$m^2 < 0 \quad (7.149)$$

Lasat liber, cimpul acesta s-a asezat in starea de energie minima care este data, dupa un calcul similar celui din sectiunea precedenta, de $\phi^\dagger \phi = -m^2/\lambda$. To ca in sectiunea precedenta (ne amintim sagetile aliniate din Fig. 7.34), alegem din multitudine de posibilitati acea stare clasica care indeplineste in fiecare punct x :

$$\phi_1 = \sqrt{-\frac{2m^2}{\lambda}} = \sqrt{2}\eta; \quad \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0 \quad (7.150)$$

Fluctuatiile fata de aceasta stare clasica de energie minima pot fi descrise de 4 functii $\chi_i(x)$:

$$\phi_1(x) = \sqrt{2}\eta + \chi_1(x); \quad \phi_i(x) = \chi_i(x), \quad i = \overline{2, 4} \quad (7.151)$$

Acum vrem sa facem cimpul $\phi(x)$ sa interactioneze cu cimpurile deja prezente in 7.131, in special cu cimpul W pentru a-i da masa. Pentru aceasta trebuie intr-o prima instanta sa incorporam lagrangeanul 7.148 in lagrangeanul 7.131. Apoi am putea adauga interactia.

Cu toate acestea exista o cale mai simpla. Sa remarcam ca lagrangianul final ii vom cere sa fie invariant la transformari locale de etalonare, asa cum am procedat de la toti termenii de pina acum. Atunci noii termeni introdusi vor trebui sa fie de asemenea invarianti la transformari locale de etalonare. Am vazut in sectiunile precedente ca un termen foarte eficient care pastreaza aceasta invarianta a fost derivata covarianta. Sa introducem atunci cimpul ϕ in lagrangeanul 7.131 sub o forma modificata, care contine o derivata covarianta D pe care urmeaza s-o specificam:

$$L = \beta \bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' X_\mu \right) L + \quad (7.152)$$

$$+ \beta \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' X_\mu) R - \quad (7.153)$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} + \quad (7.154)$$

$$+ (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (7.155)$$

Exista doua tipuri de transformari de etalonare, cele trei functii $\theta_i(x)$?? asociate simetriei $SU(2)$, si functia $\beta(x)$?? asociata simetriei $U(1)$. Simetria $SU(2)$ a fost deja luata in considerare "pe ascuns" cind am facut alegerea cimpului ϕ ca un cimp isospinor (cu doua coloane). Atunci am putea "refolosi" matricea $U(x)$ 7.110, sub forma urmatoare: vom cere ca lagrangeanul total sa invariant nu numai la transformarea 7.107, dar si la transformarea:

$$\phi'(x) = U(x) \phi(x) = \exp \left(-\frac{1}{2} \tau_i \theta_i(x) \right) \phi(x) \quad (7.156)$$

Cu alte cuvinte atunci cind folosim functiile $\theta_i(x)$ sa facem o alegere de etalonare, vom schimba si functia L (conform relatiei 7.107) si cimpul scalar ϕ (conform relatiei precedente), si desigur si cimpul bosonic W conforma ???. Toate aceste transformari vor trebui insa sa lase lagrangeanul invariant.

Vedem atunci ca termenii $(\phi^+\phi)$ care apar in noul lagrangean sunt imediat invarianti la transformarea 7.156. Singurul termen ramas, cel care contine derivata covarianta, va fi si el invariant daca alegem pentru derivata covarianta exact formula 7.113, pe care rescriem din nou aici:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i \right) \phi \quad (7.157)$$

Se verifica apoi direct ca termenul $(D_\mu \phi)^+(D_\mu \phi)$ este invariant (are aceeasi valoare), la orice alegere a etalonarii $\theta(x)$, daca facem desigur in aceiasi timp transformarile 7.156 si 7.113.

Intr-un limbaj mai potrivit, am putea spune ca cimpul ϕ , deoarece se transforma conform *aceleasi* simetriei $SU(2)$, are aceeasi tip de sarcina $I_W = 1/2$. Conform 7.147, particula asociata cimpului ϕ^+ are sarcina $I_W^3 = 1/2$, iar cea asociata cimpului ϕ^0 are sarcina $I_W^3 = -1/2$. Subliniem inca o data ca aceste sarcini sunt de acelasi tip cu cele din ??, deoarece apar in urma invariantei lagrangeanului la aceleasi transformari $\theta_i(x)$, iar aceste transformari trebuie facute pentru toate trei cimpurile L , ϕ si W , asa cum am mentionat.

Particulelor cimpurilor ϕ^+ si ϕ^0 li se mai poate asocia inca o sarcina din cele prezente, si anume sarcina electrica. Dupa cum numele cimpurilor sugereaza, alegerea lui Weinberg a fost ca cimpul ϕ^+ sa aiba sarcina unitara pozitiva $e = +1$, iar cea a cimpului ϕ^0 a fost ca sarcina acestuia sa fie nula $e = 0$. Asa cum am vazut in relatia 7.122, sarcina electrica este o suma a sarcinii de izospin I_W^3 si jumătate din cea de "weak hypercharge" Y_W . Se vede atunci imediat ca alegerea $Y_W = 1$ ne asigura sarcinile electrice $e = +1$ pentru ϕ^+ ($I_W^3 = 1/2$) si $e = 0$ pentru ϕ^0 ($I_W^3 = -1/2$).

Pe de alta parte, sarcina Y_W este asociata transformatilor $U(1)$ date de etalonarea $\beta(x)$. Pentru a "integra" si aceasta sarcina cimpului $\phi(x)$, vom cere deci ca lagrangeanul sa ramina invariant si la transformarea aditionala:

$$\phi'(x) = e^{ig'\beta(x)} \phi(x) \quad (7.158)$$

Cu alte cuvinte, la o functie de etalonare $\beta(x)$ data, vom face trei transformari deodata: spinorul $L - R$ (conform ??), cimpul $\phi(x)$ (conform relatiei de mai sus) si cimpul X_μ (conform 7.129). Se vede imediat ca transformarea precedenta lasa din nou termenul $\phi^+\phi$ invariant. Pe de alta parte, si termenul $(D_\mu \phi)^+(D_\mu \phi)$ va ramine invariant daca facem alegerea 7.125, unde vom folosi sarcina $Y_W = 1$:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g' X_\mu \right) \phi \quad (7.159)$$

Aduncind impreuna derivatele covariante 7.157 si 7.159, putem scrie in final derivata covarianta ce va lasa termenul $(D_\mu \phi)^+(D_\mu \phi)$ invariant la ambele transformari $SU(3) * U(1)$:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i - \frac{i}{2} g' X_\mu \right) \phi \quad (7.160)$$

Aceasta derivata covarianta va trebui sa intre in formula lagrangeanului 7.152. Inlocuind valorile ?? ale matricilor Dirac τ_i , obtinem forma:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \left[\frac{i}{2} g \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} g' X_\mu \right] \phi \quad (7.161)$$

Achizitia de masa pentru bosonul W

Sa urmarim acum cum actioneaza noii termeni in lagrangean. Pentru aceasta, sa ne amintim ca datorita alegerii 7.149, cimpul Higgs clasic are un minim, si ca trebuie sa studiem mai degraba fluctuatiile de la acest minim, date de functiile $\chi(x)$ 7.151.

Pe de alta parte, am dat cimpului Higgs $\phi(x)$ sarcini de izospin si "weak hypercharge" (pentru a-l face sa interactioneze cu cimpurile deja prezente). Astfel a trebuit sa vedem cum se transforma cimpul ϕ la diversele etalonari $\theta_i(x)$ si $\beta(x)$ (relatiile 7.156 si 7.158). Aceste transformari de etalonare le putem folosi acum in ajutorul nostru, pentru a simplifica calculele.

Astfel, stim ca rezultatele sunt independente indiferent de ce transformari de etalonare alegem, pentru ca lagrangeanul este invariant. Pronind de la 7.151, putem face atunci transformarea de etalonare:

$$\theta_i(x) = \dots; \quad \beta(x) = \dots \quad (7.162)$$

Utilizind relatiile 7.156 si 7.158 ajungem la o forma particulara mai simpla pentru cimpul Higgs:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (7.163)$$

Acum ar trebui conform disctuiii noastre sa transformam si celelalte cimpuri, si desigur ca toate ar primi atunci un indice ". Cu toate acestea, noi nu stim oricum cum arata, asa ca vom renunta a mai scrie indicele prim, si vom urmari calculele in aceasta alegere particulara a etalonarilor (situatia este asemanatoare cu cimpul electrostatic, unde stim ca cimpul magnetic este absent, si nu mai facem transformarile necesare plecind de la transformarea Lorentz).

Practic, putem considera in aceasta etalonare ca excitatiile cimpului Higgs, notate mai sus cu $H(x)$ au spin 0 si sunt electric neutre (vezi 7.122). In etalonarea particulara 7.162, derivata covarianta 7.160 se poate calcula mai usor. Folosind forma 7.161 aplicata lui 7.163 se obtine imediat pentru $D_\mu \phi$ valoarea:

$$-\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(\sqrt{2}\eta + H)(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ 2g\partial_\mu H + (H + \sqrt{2}\eta)(-gW_\mu^3 + g'X_\mu) \end{pmatrix} \quad (7.164)$$

si ca atare, intr-o aproximatie in care pastram doar termenii in cel mult g^2 si g'^2 , avem (nu, aici calculez exact!):

$$(D_\mu)^+(D_\mu \phi) = \frac{(\partial_\mu H)^2}{2} + \frac{g^2 \eta^2}{4} [(W_\mu^1)^2 + W_\mu^2]^2 + \quad (7.165)$$

$$+ \frac{\eta^2}{4} (gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2 + \dots \quad (7.166)$$

Termenii de mai sus vor intra deci in lagrangeanul 7.152. Inlocuind si cimpul 7.163, obtinem pentru lagrangean (mie imi iese masa nula!, VERIFICA calculele):

$$L = \bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' X_\mu \right) L \quad (7.167)$$

$$+ \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' X_\mu) R \quad (7.168)$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \quad (7.169)$$

$$+ \frac{g^2 \eta^2}{4} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{\eta^2}{4} (gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2 \quad (7.170)$$

$$+ \frac{(\partial_\mu H)^2}{2} - \frac{2m^2}{2} H^2 \quad (7.171)$$

$$- \beta g \eta [(W_\mu^1)^2 + W_\mu^2]^2 H - \beta \eta (gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2 H + \quad (7.172)$$

Sa ne reamintim acum ca masa particulelor este data de termenul patrat al cimpului. In cazul nostru vedem imediat ca cimpurile $W_\mu^1(x)$ si $W_\mu^2(x)$, desi nu aveau un astfel de termen patrat in 7.152, odata cu adugarea relatiei 7.165 vor capata un astfel de termen patrat! Cu alte cuvinte, in urma interactiei cu bosonul Higgs, particulele asociate cimpurilor $W_\mu^1(x)$ si $W_\mu^2(x)$ *au capatat masa nenula*. Din relatia 7.165, prin comparatie cu masa particulei intr-un lagrangean scalar tipic (data de ??), masa acestor doua particule va fi:

$$M_{W_1} = M_{W_2} = \frac{g\eta}{\sqrt{2}} > 0 \quad (7.173)$$

Dupa cum vedem, masa de mai sus este *reala* si *pozitiva*, deoarece $\eta > 0$ conform relatiei ???. In acest fel, o prima etapa a fost trecuta. Dar ce se intimpla cu cel de-al treilea cimp $W_\mu^3(x)$? Intr-o prima instanta am putea spune ca si el primeste masa, numai ca la o privire atenta, vedem ca *numai* combinatia $(gW_\mu^3 - g'X_\mu)$ intra in 7.165. Atunci am putea defini aceasta combinatie ca:

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'X_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W X_\mu \quad (7.174)$$

unde unghiul θ_W este numit unghiul lui Weinberg, si el este dat de relatia:

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \quad (7.175)$$

El descrie astfel raportul dintre cele constantele g' si g celor doua interactiuni introduse odata cu cele doua simetrii $SU(3)$ si $U(1)$, respectiv cu cele doua sarcini, de isospin si "weak hypercharge".

Alegerea 7.174 este mai mult decit o simpla notatie. Astfel, daca definim si combinatia:

$$A_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'X_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos\theta_W W_\mu^3 + \sin\theta_W X_\mu \quad (7.176)$$

putem "shimba" cimpurile W_μ^3 si X_μ pentru cimpurile Z_μ si A_μ . Cu alte cuvinte, din relatiile 7.174 si 7.176 putem calcula cimpurile W_μ^3 si X_μ ca functii de cimpurile Z_μ si A_μ , si apoi inlocui peste tot in lagrangeanul 7.152. In 7.165, obtinem pentru termenul $(D_\mu)^+(D_\mu\phi)$ valoarea

$$\frac{(\partial_\mu H)^2}{2} + \frac{g^2\eta^2}{4} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{\eta^2(g^2 + g'^2)}{4} Z_\mu^2 + \dots \quad (7.177)$$

Di formula de mai sus vedem ca termenul patrat corespunzator lui A_μ lipseste, si deci putem spune ca numai particula asociata noului cimp Z_μ va avea masa nenula:

$$M_Z = \frac{\eta\sqrt{g^2 + g'^2}}{\sqrt{2}} = \frac{g\eta}{\sqrt{2}\cos\theta_W}; \quad M_A = 0 \quad (7.178)$$

Din relatiile 7.173 si 7.178 vedem ca ne asteptam sa gasim in experiment 4 bozoni responsabili de interactiile slabe si electromagnetice. Despre cei doi bosoni banuiti experimental W^- si W^+ a fost vorba in sectiunea ???. Vedem ca in plus fata de acestia, teoria de mai sus prezice inca un boson Z de masa nenula (responsabil de interactii neutrale, asa cum vom vedea mai jos), si unul de masa nula A . Acesta din urma, avind masa nula, ar putea fi considerat chiar *fotonul*. Despre aceste "asignatii" insa in sectiunea urmatoare, unde vom vedea citeva consecinte experimentale ale lagrangeanului 7.152.

Nu ai zis cum mecanismul Higgs lucreaza: bosonul Goldstone este "mincat" in alegerea particulara a etalonarii, el dispare astfel. In consecinta, bosonii ceilalti, care fara masa au doar doua grade de polarizatie, dupa ce capata masa mai capata un grad aditional longitudinal de polarizatie. Acesta este gradul de libertate asociat bosonului Goldstone!

7.3.6 Bosonii W si Z in experiment

Sa incepem in a dezvoltati primii doi termeni din lagrangeanul 7.152, folosind notatia aditionala $W_\mu = (W_\mu^1 + \beta W_\mu^2)/\sqrt{2}$, si inlocuind cimpurile W_μ^3 si X_μ cu Z_μ si A_μ (relatiile 7.174 7.176). Obtinem atunci (scrie detaliat h.c.):

$$\begin{aligned} & \beta \bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' X_\mu \right) L + \beta \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' X_\mu) R \\ &= i \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + i \bar{\nu} \gamma^\mu \partial_\mu \nu - (g \sin\theta_W) \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \\ &+ \frac{g}{\cos\theta_W} \left(\sin^2\theta_W \bar{e} R \gamma^\mu e_R - \frac{1}{2} \cos 2\theta_W \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu \nu \right) Z_\mu \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + h.c.) \end{aligned} \quad (7.179)$$

Primii doi termeni descriu electroni si neutrini liberi (fara masa inca!). Al treilea termen descrie interactia cu cimpul de masa nula A_μ . Acest cimp este descris de diagrama Feynman din Fig.??, si el se cupleaza numai cu electronii, indiferent daca acestia sunt "left-handed" sau "right-handed", dar nu cu neutrinii. Este deci natural sa identificam cimpul A_μ cu cimpul electromagnetic. Din relatia precedenta obtinem, prin comparatie cu lagrangeanul cimpului electrodinamic ??, ca sarcina electrica este data de:

$$e = g \sin\theta_W \quad (7.184)$$

Vedem insa ca formula de mai sus nu ne "prezice" nici valoarea lui g , nici valoarea unghiului Weinberg θ_W , desi ne da o relatie intre ele.

Cosniderind argumentele de mai sus suficiente pentru a ne convinge ca cimpul A_μ este chiar cimpul electromagnetic, sa vedem ce se intimpla cu bosonul W . Pe de-o parte, masa lui prezisa de teorie este data de relatia 7.173. Asa cum am mentionat, in experiment observam mai degraba combinatiile $W_\mu = (W_\mu^1 + \beta W_\mu^2)/\sqrt{2}$ si W_μ^* , dar acestea au aceeasi masa ca si W^1 si W^2 , data de relatia 7.84 (vezi ce faci cu factorii...). Combinind aceste doua relatii vedem ca obtinem imediat valoarea v a cimpului scalar Higgs ϕ in starea de energie minima (starea de vid) ⁴, vezi factorul de $\sqrt{2}$:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G}} \simeq 246 \text{ GeV} \quad (7.185)$$

⁴"din burta", verifica!

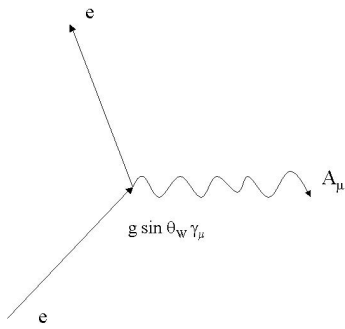


Figure 7.35: aici pun diagrama Feynmann pentru cimpul electromagnetic

Despre masa bosonului W inca nu putem spune nimic, pentru ca pentru a folosi relatia 7.173 avem nevoie de unghiul Weinberg θ_W .

La o analiza atenta se observa ca unghiul θ nu este "prezis" de relatiile de mai sus, si el trebuie "fitat" din experiment. Aceasta fitare se face desigur pentru toti parametrii deodata, incluzind masele bosonilor, insa noi o sa "triram" aici si o sa dam valoarea obtinuta din fitari, inainte de a prezenta masele bosonilor:

$$\sin^2 \theta_W \simeq 0.025 \quad (7.186)$$

Relatia 7.184 de da apoi valoarea lui $g = \dots$. Aceasta, inlocuita in 7.175 conduce la valoarea $g' = \dots$. In final inlocuind si 7.185 in 7.173 si 7.178, obtinem masele bosonilor de:

$$M_W \simeq 79 \text{ GeV}; \quad M_Z \simeq 89 \text{ GeV} \quad (7.187)$$

Este interesant de remarcat aici ca, atunci cind Weinberg si Salam au propus aceasta teorie electroslabă, renormalizabilitatea ei nu era clara. Ca atare, articolul original al lui Weinberg din 1967 nu a fost citat de nimeni timp de 3 ani. Cind insa a parut clar ca teoria este renormalizabila⁵, datorita efortului lui t'Hooft, o intreaga vinatoare a inceput pentru observarea bozonilor W si Z . Cistigatorii au fost fizicianul Carlo Rubbia si olandezul Simon van der Meer care au fost primii sa observe acesti bosoni, si care au si primit premiul Nobel in 1984 pentru aceasta remarcabila realizare.

Discutind acum despre bosonul W , remarcam ca termenul 7.179 ce va apare in lagrangean contine pe ultima linie maniera in care bosonii W^+ si W^- vor interactiona cu electronii si neutrinii. Aceasta interactie este prezentata si in Fig.7.36 prin diagramele sale corespunzatoare. Asa cum ne asteptam, observam ca interactia are loc *numai* intre electronii si neutrinii left-handed (vezi ca s-a schimbat notatia cu functia de unda a lui ν !).

In Fig.7.37 prezentam o fotografie a detectorului de particule elementare DELPHI, impreuna cu un eveniment posibil data de $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^- \rightarrow 4q$ (luata din <http://delphiwww.cern.ch>). DELPHI este un detector (???) la CERN in Elvetia, care studiaza particulele emise in urma coliziunilor electron-pozitron (accelerate initial intr-un LEP circular accelerator, prezentat in Fig.??). Momentan atinge cele mai mari energii din lume, in jurul a 200 GeV .

Cei doi W , obtinuti in urma reactiilor $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ au o viata foarte scurta, si nu pot fi observati direct. Ei decad

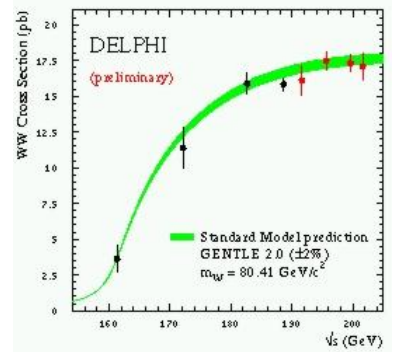
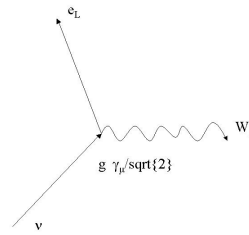


Figure 7.36: aici pun diagrama Feynmann pentru particula W . <http://www.verwaltung.uni-wuppertal.de/forschung/>

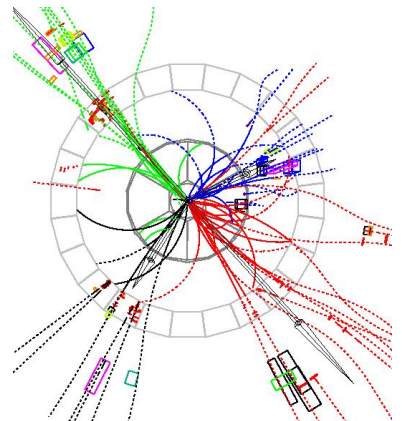


Figure 7.37: <http://delonline.cern.ch>

repede fie in patru quarci (in 4/9 dintre cazuri), fie unul intr-o pereche de quarci si altul intr-un lepton si neutrul sau, (deasemenea 4/9 din cazuri), fie ambii intr-un lepton si neutrul sau (1/9 din cazuri). In Fig.7.37 cei doi W decad in patru quarci, iar jeturile sunt colorate in functie de particulele respective (?).

In Fig.?? prezentam o masuratoare a sectiunii eficace de imprastiere a proceselor $e + e^- \rightarrow W + W^-$, obtinuta in urma selectiei acestor procese din multitudinea de procese rezultate in urma anihilarii electron-pozitron. Analiza a fost efectuata de grupul www2.uni-wuppertal.de in urma masuratorilor de la CERN cu detectorul DELPHI, intre 1996 si 2000, cind procesele de anihilare electron-pozitron au depasit energii de 160 GeV necesare pentru crearea a doi bosoni W . Aceasta s-a facut practic printr-o selectie din milioane de fotografii a acelor care au o probabilitate mare de fi procese $e + e^- \rightarrow W + W^-$. Sectiunea eficace a acestui proces este data de relatia ??:

$$\sigma(s) = \dots \quad (7.188)$$

Vedem din 7.36 ca sectiunea eficace incepe intr-adevar de la o valoare dubla masei bosonului W , asa cum ne asteptam, si ca teoria fiteaza foarte bine experimentul.

Notabil insa, termenul 7.179 contine si interactia cu o *noua* particula, numita particula Z , despre care a fost putin vorba pina acum, pentru ca in practica existenta ei a fost *prezisa* de teorie.

Cele *trei* diagrame Feynmann care descriu interactia leptonilor cu bosonul Z sunt schitate in 7.38. Remarcabil, pentru electron, acestea seamana cu cele date de interactia electromagnetica, la care se adauga. Astfel de exemplu, un electron "emite"

⁵"din burta", verifica!

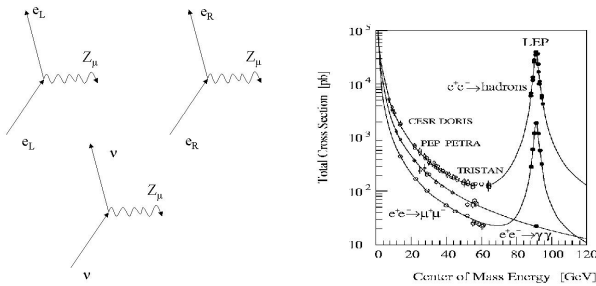


Figure 7.38: din [?]: Sectiunea eficace de imprastiere $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \text{hadrons}$, de unde iese masa Z^0 si numarul de neutrini!+ <http://siux00.physik.uni-siegen.de/>

un boson Z virtual, precum emite si un foton in acelasi timp. De aceea este de asteptat ca prezenta bosonului Z sa duca la corectii in toate experimentele in care interactia dintre electroni este prezenta, lucru confirmat de exemplu in....

Dar in plus, si neutrinii (care nu au sarcina electrica) emit cit un boson Z , conform 7.38. Datorita acestor observatii, interactiile in care bosonul Z este cauza se numesc *interactii neutrale*. Dupa cum am mentionat, existenta bosonului Z este astazi confirmata experimental, cu o masa care este apropiata de valoarea 7.187 (si care este numai o prima valoare estimativa, ce nu ia in calcul corectii de ordin superior). Astfel, in Figura 7.38 vedem rezultatul sectiunii eficace a diverse reactii ce au loc in urma anihilarii electron-proziton, masurate in LEP (cred! ⁶).

Folosind relatia ??, sectiunea eficace a procesului $e^+ + e^- \rightarrow Z \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ se scrie ca:

$$\sigma(s) = \dots \quad (7.189)$$

si prezinta deci un "peak" in jurul energiei bozonului Z . Acest peak re recunoaste clar in 7.38.

7.3.7 In cautarea bosonului Higgs

Ingredientul esential al teoriei electroslabeste fara dubiu cimpul Higgs $\phi(x)$. Acesta este un fel de "eter" care exista in spatiu in stare sa de energie minima. Aceasta a fost shitata in Fig.fig:potential-Higgs-continuu sub forma unor "sageti" care se orienteaza in aceeasi directie. Cimpul tuturor celorlalte particule se suprapune atunci peste acest cimp "primordial".

Am vazut in sectiunea ?? cum intr-o alegere particulara a etalonarii cimpul Higgs este descris de un singur cimp real $H(x)$. In aceasta alegere particulara putem spune ca cimpul Higgs este descris de o singura particula particula fara sarcina electrica, pe care o vom nota cu H . Lagrangeanul 7.167 ne spune imediat care este masa particulei Higgs, prin termenul sau patrat in $H(x)$:

$$m_H = \sqrt{-m^2} \quad (7.190)$$

Dupa cum ne asteptam, aceasta valoare este pozitiva, insa teoria nu ne da nici o indicatie despre ordinul sau de marime! Termenii urmasori din 7.167 (ultima linie) ne dau diagramele Feynmann pentru interactia bosonului Higgs cu bosonii W si Z . Prin comparatie directa cu formulele (definesc W^+ intre timp) 7.174, obtinem rezultatele din Fig.7.39.

Faptul ca relatia 7.190 nu ne prezice o valoare masei bosonului Higgs nu a descurajat comunitatea stiintifica. Aceasta a cautat prezenta bosonului in reactii ce sunt date de diagramele Feynmann 7.39, desi pina acum nu a gasit o dovada evidenta

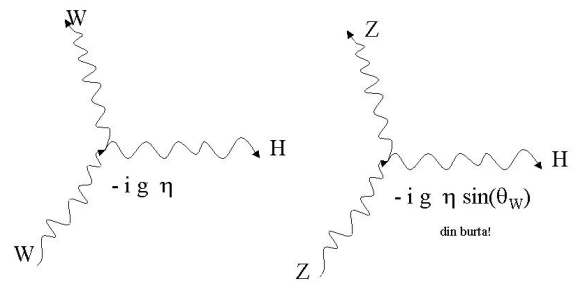


Figure 7.39: diagrama-Feynmann-boson-Higgs

a prezentei acestuia. In prezent se estimeaza ca masa acestuia este in jur de 100GeV , cu o limita teoretica maxima de aproximativ 250GeV (de cine e data? citeste....).

Acceleratoarele moderne au probat pina acum (2004) energii de pina la 110GeV si au gasit in milioanele de evenimente observate citeva care pot fi interpretate ca implicind bosonul Higgs, dar nici unul dintre acesta nu este concluziv. Din fericire, "lobbyul" fizicienilor a condus la constructia LHC, mentionat in sectiunea. Acesta va genera jeturi de protoni si antiprotoni ⁷care vor proba energii de pina la 1000GeV . De aceea se presupune ca constructia LHC, urmind a fi finalizata in 2007) va da raspunsul final in detectarea bosonului Higgs.

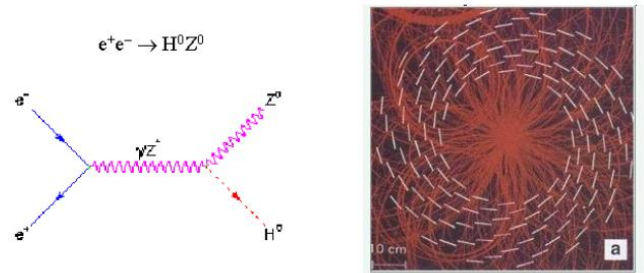


Figure 7.40: <http://www.ciencia-hoy.retina.ar/hoy47/masa02.htm>

In Fig.7.40 prezentam o posibila reactie in care bosonul Higgs ar putea fi observat, precum si simularea unui rezultat de masura (da-i ceva exemple de simulari aici!).

7.3.8 Masa electronilor.Lagrangeanul nerenormalizat pentru teoria electro-slaba

Ultima forma pe care am obtinut-o pentru lagrangean a fost 7.167. Aceasta insa nu contine un element fundamental, pe care nu l-am introdus inca: masa electronilor!

Astfel, sa ne reamintim ca nu am introdus masa electronilor, pentru a-i face pe acestia de aceeasi "spita" cu neutrinii. Am putea acum incercam sa introducem masa electronilor conform termenului obisnuit $-m\bar{e}e$ din lagrangeanul electrodinamicii cuantice ???. Folosind relatiile ??, acest termen s-ar scrie ca:

$$-m\bar{e}e = -m\bar{e} \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right] e = -m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \quad (7.191)$$

⁶"din burta", verifica!

⁷"din burta", verifica!

Daca am introduce acest termen in lagrangeanul 7.167 am avea imediat o problema cu invarianta locala la transformările locale de etalonare. Astfel, deoarece funcțiile e_R și e_L se transformă diferit în simetriile $SU(2)$ și $U(1)$ asociate, lagrangeanul $\mathcal{L}$ ar mai fi invariant la transformările ?? de etalonare $\theta_i(x)$ și $\beta(x)$.

O manieră prin care să introducem alți termeni prin lagrangean, *pastrînd invarianta la transformările locale de etalonare*, este prin intermediul cimpului Higgs. Astfel, stim din relațiile ?? și ?? cum cimpul Higgs $\phi(x)$ se transformă la o alagere a lui $\theta_i(x)$ și $\beta(x)$. Se verifică atunci imediat că o alegere de forma $\bar{L}\phi e_R$ lasă lagrangeanul invariant la orice transformare locală de etalonare. Alegem atunci să adăugăm la lagrangian termenul

$$\delta\mathcal{L} = -g_e (\bar{L}\phi e_R + \bar{e}_R\phi L) \quad (7.192)$$

În alegerea particulară a etalonării 7.162, am văzut că cimpul Higgs devine ??. Atunci lagrangeanul precedent se rescrie ca (vezi că nu am un factor de $\sqrt{2}$):

$$\delta\mathcal{L} = -(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)(g_e + H) = -(g_e\eta)\bar{e}e - g_e\bar{e}eH \quad (7.193)$$

Comparînd cu relația 7.191 vedem că primul termen este identic, și el ne dă o masă a electronului de:

$$m_e = g_e\eta \quad (7.194)$$

Din păcate, și această valoare este arbitrară, căci ea depinde de noua constantă de cuplaj g_e . Cu toate acestea, mecanismul este atragător, căci în afara că ne rezolvă problema masei electronului, ne dă și maniera în care bosonul Higgs interacționează cu electronul (al doilea termen în 7.193). Adăugînd și acest termen la ultima formă a lagrangeanului, putem scrie forma finală a lagrangeanului care descrie interacțiile electroslabă între electroni și neutrini:

termenii care conțin aceste cimpuri bosonice libere *nu* se vor mai adăuga încă odată la lagrangian. Pentru a mai explicita, iată termenul care se va adăuga la lagrangeanul precedent, și care încorporează taonul și neutrinel său:

$$\delta\mathcal{L}_{\tau\nu\tau} = i\bar{\tau}\gamma^\mu\partial_\mu\tau - (g_\tau\eta)\bar{\tau}\tau + i\bar{\nu}_\tau\gamma^\mu\partial_\mu\nu_\tau \quad (7.203)$$

$$-(g\sin\theta_W)\bar{\tau}\gamma^\mu\tau A_\mu \quad (7.204)$$

$$+\frac{g}{2\cos\theta_W}(2\sin^2\theta_W\bar{\tau}\gamma^\mu\tau_R - \cos 2\theta_W\bar{\tau}\gamma^\mu\tau_L + \bar{\nu}_\tau\gamma^\mu\nu_\tau) Z_\mu \quad (7.205)$$

$$+\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_\tau\gamma^\mu\tau_L W_\mu^+ + h.c.) \quad (7.206)$$

$$-g_\tau\bar{\tau}\tau H + (7.207)$$

Practic, singurul termen diferit este g_τ , care încorporează masa taonului $m_\tau = g_\tau\eta = \dots$. Într-est, toate celelalte diagrame de pînă acum sînt la fel, în ele trebuie doar să schimbăm tipul de lepton!

7.3.9 Quarcii și interacția slabă

După cum am observat în dezintegrarea neutronului ??, interacțiile slabe nu sînt numai apanajul leptonilor. Acest lucru nu mai este acum de mirare căci stim de exemplu că protonii au sarcină electrică, și deci prezintă interacții electromagnetice. Cum am văzut în secțiunea precedentă că acestea sînt o formă particulară a interacțiilor electroslabă, nu este de mirare că și hadronii (particulele care conțin quarci) să prezinte interacții electro-slabe.

Cum însă hadronii în sine nu sînt particule elementare, este de așteptat că elementele de cărămidă ale acestora (quarcii) să prezinte aceste interacții. La o analiză mai atentă se arată de exemplu că dezintegrarea β a neutronului este dată de procesul schitat din Fig.7.41

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e\nu e} = & i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e - (g_e\eta)\bar{e}e + i\bar{\nu}_e\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e \quad (7.195) \\ & -(g\sin\theta_W)\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu \quad (7.196) \\ & +\frac{g}{2\cos\theta_W}(2\sin^2\theta_W\bar{e}\gamma^\mu e_R - \cos 2\theta_W\bar{e}\gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e) Z_\mu \quad (7.197) \\ & +\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_e\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + h.c.) \quad (7.198) \\ & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} \quad (7.199) \\ & +\frac{g^2\eta^2}{4}[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{\eta^2}{4}(gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2 \quad (7.200) \\ & +\frac{(\partial_\mu H)^2}{2} - \frac{2m^2}{2}H^2 \quad (7.201) \\ & -\beta g\eta[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2]H - \beta\eta(gW_\mu^3 - g'X_\mu)^2H - g_e\bar{e}eH + (7.202) \end{aligned}$$

Probabil că la acest moment un exercițiu util ar fi citirea nenumăraților termeni din formula precedentă, și interpretarea fiecăruia conform construcției de pînă acum...

Cu toate acestea, remarcăm însă că lagrangeanul precedent nu am inclus roate speciile de leptoni (muonul, și neutrinel muonic, sau taonul și neutrinel taonic). Aceștia însă se adăuga însă imediat, remarcînd că muonul sau taonul, nu sînt decît alte specii de electroni, cu o masă mai mare. Remarcabil însă, *aceeași* bosoni A , W , Z , sau bozonul Higgs vor media și interacțiile dintre celelalte specii de leptoni. Observația aceasta crucială este ușor de înțeles dacă ne gândim că același cimp electromagnetic A acționează pentru toate particulele care au sarcină electrică (cum este muonul sau taonul). De aceea și

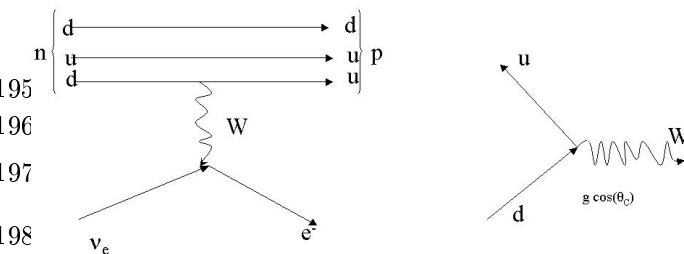


Figure 7.41: pune W^+ sau W^- , după cum e cazul

Acest proces este descris de diagrama Feynmann schitată în dreapta Fig.7.41, care este aproape identică cu diagrama Feynmann ??, dacă facem identificarea $u \leftrightarrow \nu_e$ și $d \leftrightarrow e$. Termenul Feynmann asociat acestui vertex ig nu este însă identic și pentru procesul din 7.41 și pentru procesul din ??. Factorul $\cos(\theta_C)$ este dat de unghiul Cabibbo θ_C .

O analiză completă a interacțiilor slabe pentru quarci a scos în evidență că acestea sînt identice cu cele date de lagrangeanul leptonic 7.195, dacă facem identificarea:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_C + s\sin\theta_C \end{pmatrix} \quad (7.208)$$

Cu alte cuvinte, quarci care acționează în interacțiile slabe precum electronul sau neutrinel sînt *combinatii liniare* ale quarcilor ce apar ca funcții de "eigenstates" în cromodinamica cuantică. Unghiurile de tip Cabibbo definesc atunci această combinație liniară, fiind constante experimentale ce nu sînt prezise de teorie. În plus, quarcul d' are masă finită, spre deosebire de neutrinel care are momentan masă considerată nulă.

Un altfel de exemplu al interacției slabe este dezintegrarea 7.4 a pionului π^- într-un lepton (electron, muon sau taon) și antineutrino sau, prezentată schematic în Fig. 7.42. Se remarcă în această figură cum timpul a fost schimbat pentru axa reală (explica), așa cum am văzut în discuția ?? pentru electron pozitron.

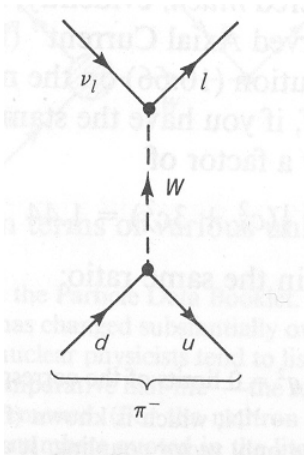


Figure 7.42: din [?] pag 314

În afara de aceste modificări, interacția slabă pentru quarci este identică cu cea dată de lagrangeanul 7.195. Practic aceiași bosoni A , W , Z și H acționează, și doar constantele se modifică pentru a obține sarcinile (?) și masele corecte pentru noii quarci. În plus, ca și la interacția dintre leptoni, se ține cont de elicitatea diversilor quarci, definită cu ajutorul spinorilor L și R . În acest fel de exemplu doar quarcii "left-handed" vor interacționa cu bosonul W , ca și în cazul electronilor și neutrinoilor.

Valoarea unghiului Cabibbo se determină experimental, de exemplu prin compararea ratei de dezintegrare în cazul dezintegrării β pentru neutron și dezintegrarea particulei Λ^0 . Cu ajutorul formulelor ?? (cele cu rata Γ) se arată ușor ca:

$$\frac{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow pe^- \bar{\mu}_e)}{\Gamma(n \rightarrow pe^- \bar{\mu}_e)} \simeq \frac{g^4 \sin^2 \theta_C}{\cos^2 \theta_C} = \tan^2 \theta_C \quad (7.209)$$

Măsurătorile experimentale arată ca:

$$\theta_C = 13^\circ \quad (7.210)$$

7.4 Dincolo de modelul standard

7.4.1 Lagrangeanul modelului standard

Secțiunile precedente au arătat cum pot fi descrise interacțiile de culoare pentru quarci, și interacțiile electro-slabe atât între quarci, cât și între leptoni. Este poate interesant aici să încercăm să rescriem lagrangeanul care descrie toate aceste interacții (copiată după [?], dar nu are interacția gluon-gluon!, poate găsești altă formă mai frumoasă):

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (7.211) \\ & + \sum_{k=1}^6 [\bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' X_\mu \right) L] \quad (7.212) \\ & + \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' X_\mu) R - (g_1 \bar{L} \phi R + g_2 \bar{L} \bar{\phi} R + h.c.) \quad (7.213) \\ & + \left| \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_i W_\mu^i - \frac{i}{2} g' X_\mu \right) \phi \right|^2 - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (7.214) \\ & + \frac{1}{2} g_s (\bar{\psi}_q^j \gamma^\mu \lambda_{jk}^a \psi_q^k) G_{\mu\nu}^a \quad (7.215) \end{aligned}$$

În forma de mai sus am adunat toți termenii pentru interacțiile electr-slabe și de culoare, pe care nu i-am explicat însă, (așa cum am procedat până acum pentru a vedea mai clar vereturile diverselor diagrame Feynmann).

În el, fermionii sunt descriși fie de stările "left-handed" L , fie de stările "right-handed" R ale spinorilor posibili. Există astfel 6 spinori cunoscuți, prezentați și în diagrama 7.14, fiecare dintre ei compus din două particule p_1 și p_2 . Trei dintre aceștia sunt leptoni:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad (7.216)$$

Alți trei sunt combinații lineare ale quarcilor ce apar în cromodinamica cuantică (vezi de exemplu 7.208):

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad (7.217)$$

Din rezultatele experimentale (?), combinațiile liniare sunt date de *același* unghi Cabibbo θ_C : $d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C$, $s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C$, $b' = \dots$. Spinorii left-handed L și R sunt dați de combinațiile ⁸, verifică în mod special dacă R este corect, și nu are două componente!

$$L = \begin{pmatrix} p_{1L} \\ p_{2L} \end{pmatrix}; R = p_{2R} \quad (7.218)$$

unde componentele "left-handed" și "right-handed" ale particulelor sunt date de:

$$p_L = \left(\frac{I_4 - \gamma_5}{2} \right) p \quad p_R = \left(\frac{I_4 + \gamma_5}{2} \right) p \quad (7.219)$$

Recapitulând, lagrangeanul 7.211 ne prezintă în prima linie cimpurile bosonice și cimpul gluonic liber. În cea de-a doua și a treia linie el ne introduce fermionii, modul în care aceștia interacționează cu diversii bosoni, și modul în care fermionii acumulează masă prin intermediul interacției cu bosonul Higgs. A treia linie descrie cimpul Higgs însuși, și interacția acestuia cu diversii bosoni, pentru că ultimul termen să descrie interacția de culoare între quarci și gluoni.

Lagrangeanul 7.211 este practic *aproape tot* ce știm despre interacțiile între particulele elementare. El definește ceea ce se numește *modelul standard* al particulelor, și reprezintă o culme a cunoașterii noastre umane. Practic, acest lagrangean împreună cu teoria gravitației este tot ce am putut verifica în acest moment în experimentele noastre cu materia. Ce este dincolo de ele este la momentul actual speculație, chiar dacă cu șanse mai mari sau mai mici de reușită.

⁸"din burta", verifică!

7.4.2 Marea Unificare

Asa cum am mentionat, lagrangeanul Modelului Standard 7.211 este practic tot ceea ce s-a putut verifica experimental despre particulele elementare pina acum, in afara desigur de bosonul Higgs, ingredientul esential al teoriei electrolabe. El este deasemenea *renormalizabil*, lucru pe care nu l-am abordat in detaliu aici (da-i detalii...).

Asa cum este el insa, lagrangeanul Modelului Standard 7.211 prezinta inca niste simetrii care sunt practic "impuse" fara argumente anume. O astfel de simetrie este sarcina electrica. Astfel, sarcina electrica a unui quarc este precis o treime (sau doua treimi) din cea a unui electron (sau altfel spus sarcina protonului este *perfect* identica cu cea a electronului). O astfel de coincidenta ne spune fara dubiu ca Modelul Standard este explicabil de o teorie "superioara" care se reduce la Modelul Standard.

Aceasta teorie "superioara" ar trebui nu numai sa explice coincidente ca sarcina aelectrica, dar si sa incorporeze teoria gravitatiei a lui Einstein, teorie care a fost lasata complet la o parte din momentul in care am introdus cuanta de energie. Un astfel de proiect care sa unifice toate forte, incluzind gravitatie, poarta numele de "Marea Unificare".

Dupa cum probabil se stie, aceste tip de incercare i-a umplut anii din urma ai lui Einstein, fara succes insa. Opinia generala esta ca Einstein nu a reusit in incercarea sa pentru ca refuzat sa incorporeze mecanica cuantica, care am vazut ca este cruciala in aplicarea lumii microscopice. Pe de alta parte, despre o astfel de incercare, numita "teoria stringurilor", va fi vorba in ultimul capitol al acestei carti.

In plus de a incorpora gravitatie, este de asteptat ca "Marea teorie" sa explice in mod natural si valori ale marimilor care sunt luate astazi din experiment, cum ar fi masele particulelor, sau unghiurile Weinberg $\sin \theta_W$ si unghiul Cabibbo $\sin \theta_C$ (de verificat ca nu iese din teorie).

Ce ne face insa pe noi sa credem insa ca o astfel de teorie va putea fi construita? Un argument des intilnit este cel al constantelor de cuplaj renormalizate, asa cum este prezentat in Figura.7.43 Ideea acestui argument este urmatoarea. Constantele de cuplaj *renormalizate* determina practic energia de interactie dintre doua particule:

$$U(r) \simeq \frac{g(r)}{r^2} \quad (7.220)$$

In lagrangeanul 7.211 sunt practic trei constante de cuplaj g , g' , si g_s . Printr-o analiza riguroasa ⁹primele doua se recompun in constanta de cuplaj a interactie slabe g_W si cea a interactiei electromagnetice α . Ultima este desigur constanta de cuplaj pentru interactia tare.

Acum fiecare din aceste constante de cuplaj renormalizate $g(r)$ ne arata cum evolueaza forte atractie sau respingere intre particule cu distanta. Toate trei sunt prezentate in Fig.7.43 in reprezentarea momentului (sa pun reprezentarea spatiului?). Vedem aici de exemplu comportarea de "asymptomatic freedom" a constantei de cuplaj tare, care scade odata ce momentul creste. Pe de alta parte, constanta de cuplaj a interactiei electromagnetice creste. Ambele comportari au fost insa verificate numai pina energii de circa 10^2 GeV .

Daca insa toate cele trei constante de cuplaj ar proveni dintr-o teorie unificatoare, atunci la o anumita distanta r foarte mica ne-am astepta ca toate cele trei forte sa aiba aceasi valoare (de ce? pierde argumentul...). Cu alte cuvinte, la momente mari, toate cele trei curbe din Fig.7.43 ar trebui sa converge intr-un singur punct, ceea ce pare din Fig.7.43 sa se intimple la energii foarte mari, de circa 10^{19} GeV ! Aceste energii sunt insa de mii

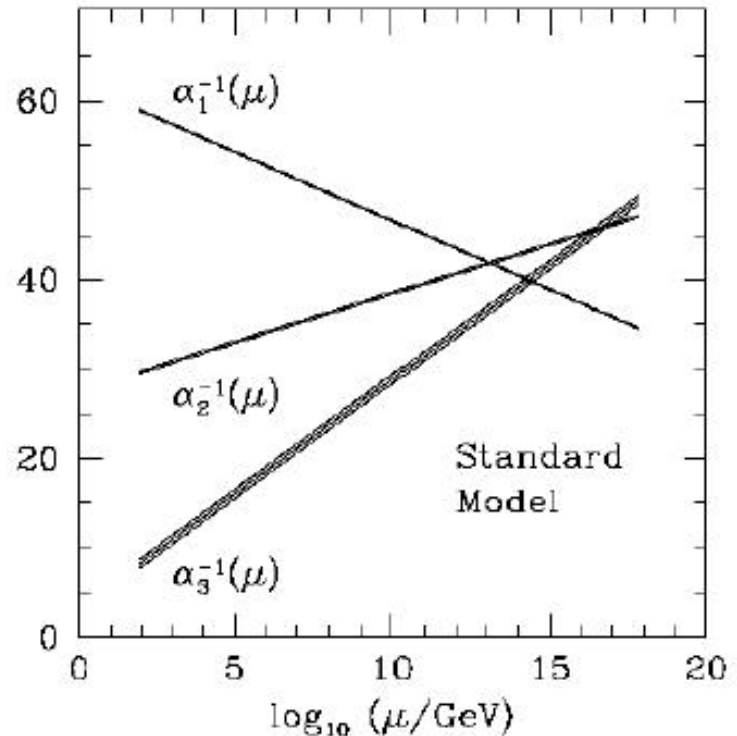


Figure 7.43: constante-cuplaj-renormalizate

de miliarde de ori mai mari decit energiile pe care le putem atinge azi in laboratoare, si reprezinta distante de ordinul $r =$. Rezultatul este complet descurajator pentru experimentalisti caci, pentru a atinge aceste energii, ar trebui sa construim acceleratori de timpul LHC pe o lungime de ... ani lumina! Sau altfel spus, energia ce trebuie imprimata unui simplu electron este atunci echivalenta cu energia cinetica ce o are o masina de o tona ce se deplaseaza cu viteza de aproximativ 10000Km/h.

Remarcabil insa, aceste energii de 10^{19} GeV au o semnificatie mult mai adinca. Astfel, ele descriu asa-numita masa Plank M_p a particulelor. Aceasta este, asa cum a sugerat Plank, singura valoare a masei unei particule (sau corp) ce se poate construi din constantele fundamentale $c, \hbar, G$ (constanta lui Newton) ¹⁰ (vezi tabelul unitatilor Plank ??):

$$M_{Plank} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 2.210^{-8} \text{ Kg} \simeq 10^{19} \text{ GeV} \quad (7.221)$$

Cu alte cuvinte, energia de repaus a unei particule cu masa Plank este de 10^{19} GeV . Marimea aceasta, desi poate parea arbitrar aleasa la prima vedere, apare mai clar daca facem urmatoarea argumentatie. Astfel putem compara forta de atractie electromagnetica dintre un proton si un electron cu forta de atractie gravitacionala dintre ele. Obtinem atunci:

$$\frac{F_{Newton}}{F_{Coulomb}} = \frac{G m_e m_p}{\alpha \hbar c} \sim 10^{-40} \quad (7.222)$$

Relatia de mai sus ne arata imediat cu cite ordine de marime forta gravitacionala este mai slaba decit cea electromagnetica. Pe de alta parte, sa consideram doua particule incarcate electric cu sarcina e , dar cu o masa de ordinul masei lui Plank M_{Plank} . In acest caz, folosind ??, raportul precedent devine:

$$\frac{F_{Newton}}{F_{Coulomb}} = \frac{G M_p M_p}{\alpha \hbar c} \sim \frac{1}{\alpha^2} \quad (7.223)$$

⁹pune referinta

¹⁰Verifica in GeV

adica mult mai aproape de unitate (factorul $1/\alpha^2$ reprezinta de fapt contributia cimpului electromagnetic). Cu alte cuvinte, daca particulele elementare ar avea masa Plank $M_p \simeq 10^{15} \text{ GeV}$ si sarcina electrica e atunci forta gravitationala ar fi cam de acelasi ordin de marime cu celelalte forte. Aceasta este practic o cale scurta de a intelege graficul Fig.7.43.

Pe de alta parte rezultatul de mai sus pare complet descurajator si din alt punct de vedere. Astfel, in versiunea cea mai pesimista, lagrangeanul Modelului Standard 7.211 nici nu pare sa sugereze ca ar exista "altceva" pina la energii de pina la 10^{19} GeV . Cu alte cuvinte, pina cind nu vom fi in stare sa construim acceleratori de 10^{19} GeV (si oare peste cite milioane de ani vom fi in stare de asa ceva?), nici nu vom afla ceva nou in afara de ceea ce ne ofera 7.211. Un astfel de scenariu pesimist nu este insa de pus de-o parte, caci la urma urmei pina acum nu am masurat inca *nimic* care sa se abata de la Modelul Standard, nici macar un lucru cit de mic!

Verifica daca distantele asociate $l = \dots$ sunt de ordinul distantei Plank $\Lambda_P = !$

experimental urmatorul nivel de energie de 10^{19} GeV , acestuia fiindu-i asociat primele 10^{-26} s din viata Universului!

7.4.3 Desert in fizica in anii ce vin?

Daca modelul particulelor elementare este modelul standard, si numai acesta, atunci nu mai avem ce descoperi pina atingem 10^{19} GeV , cu alte cuvinte o sa fie un desert.

Dar sunt surprizxe si inca probleme (cum ar fi masa *renormalizata* a lui Higgs, care ar iesi prea mare, citeste).

7.5 Exercitii

gamma-pi formula 10.80 din [?]

7.6 Idei

verifica pe toti care au luat premiul Nobel.

specifica notatiile de particula, antiparticula, etc. la particule elementare.

cum explici ca pionul (mezon) decade intr-un muon (lepton) care apoi se duce in electron? (vezi figura Powell 7.6) nu in-seamna ca cuarcii din mezon se transforma in lepton?

La QCD folosesc tip=flavour (foloseste aroma!), sort=culoare, spune.

Sa bag si teorema lui Noether de conservare a sarcinilor la invarianta lagrangeanului?

sa zic la cititori sa nu amestece SU(3) de la spd cu SU(3) de la culori!

pune la toate teoriile ce e "exciting" acum in materie!

sa fac si ruperea de simetrie "chirala" la hadroni, sau sa o mentionez impreuna putin la teoria electrolaba? nu am zis nimic de ea...

atentie, quarcii la distante mari nu se atrag puternic, ei *interactiioneaza* puternic. Factorul f decide daca se atrag sau resping.

urmareste in [?] calcule de sectiune eficace, caci le face frumos. adauga eventual sectiune eficace estimari?

o ecuatie citita este o teorie pe jumătate intelesă...

ma simt ca cineva care urca un munte. el nu va putea scrie niciodata despre muntele intreg (asta o fac doar cei ajunsi de mult pe vîrf), ci numai despre drumul sau...

mereu incurca diagramele in moment, caci par ca beamurile vin unul spre celalalt la distanta oareceare. spune undeva clar ca beamurile sunt *alinate perfect*, si ca reprezentarea in moment este doar o reprezenatare!

dai exercitii de tipul: pune o ecuatie gresita si zii unde e greseala! trebuie verificat la dimensiunile matricelor, la dimenasiunile fizice (metri, etc.), sau la diversii indici de sumare. studentul invata stfel sa "citeasca" ecuatiile.

puna MARE "schimbare de notatie", sai SIMPLICARE, cind este cazul!

zii la helicitate ceva de foton, ca merge.

relatia spin-numar de particule.

experimental sunt doar doi W! vezi ca undeva ai zis ca sunt 3! verifica

fai undeva eventual Noether

Higgs este renormalizabila, sa spun citeva cuvinte de ce!

pune ultimele date din Particle Data Group: July 2002 Particle Physics Booklet: global fit $m_H = 98+51$

To describe the weak interactions in a Yang-Mills theory, the gauge symmetry must be spontaneously broken. We know that this happens, but we do not know why.

spune clar de ce W, Z si Higgs sunt bosoni!.

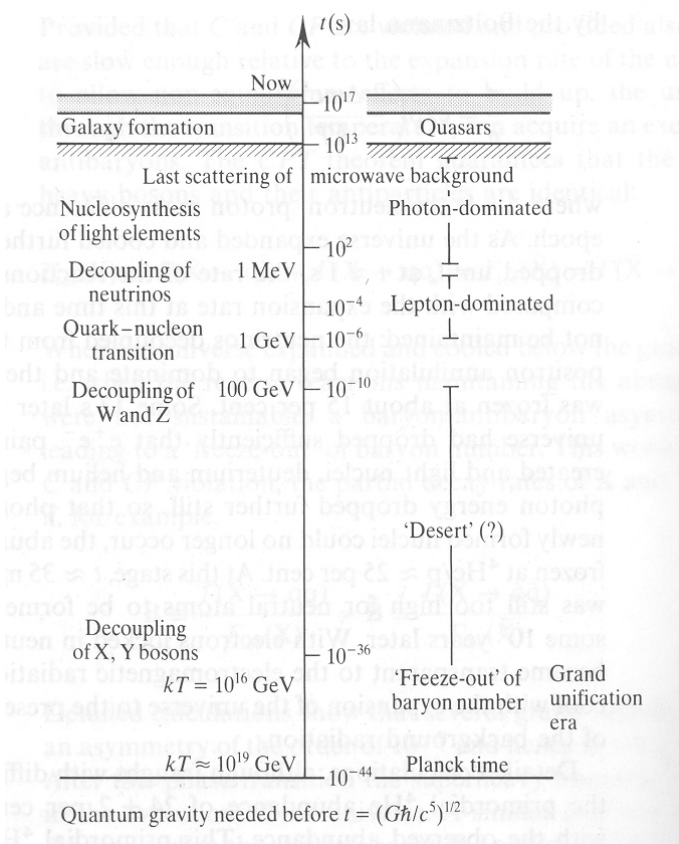


Figure 7.44: din [?], pag. 636

In final, mentionam ca enrgiile inalte la care fortele se unifica pot fi puse pe o scala corelata cu evolutia Universului, asa cum este prezentat in Fig.7.44. Astfel, presupunind ca Universul in urma "Marii explozii" se expandeaza cu o viteza apropiata de viteza luminii, putem "asigna" fiecarui moment t al sau o dimensiune $d = ct$, si o "temperatura" data de energia media a particulelor (?). Atunci se poate observa ca in primele momente de dupa aparitia sa ($t = 10^{-44} \text{ s}$!), particulele elementare (leptonii, quarcii, etc.) ar fi avut energii de aproximativ 10^{19} GeV , adica valori la care toate fortele ar fi trebuit sa fie unificate. Mai "tirziu", dupa un timp de $t = 10^{-36} \text{ s}$ ar fi scazut energia particulelor, astfel incit fortele (si bosonii corespunzatori sa se separe) sa se separe.

Din astfel de modele vedem si cit de dificil va fi sa testam

pune peste tot in diagrame W^- sau W^+ , dupa cum e cazul.
sa mentionez de oscilatiile neutrinilor solari, si de posibilitatea ca acestia sa aiba masa finita, fara a intra in detalii.

ai pus formulele 6.30 (Γ) si 6.42 (σ) din [?] ? Pune-le aici sau la QED si FOLOSESTE-LE des!

sa zic cum s-a prevazut charmul? la cabibbo...

Sa fac cum fotonul ia masa in supraconductori? Cel putin pentru mine... desi as putea-o include din moment ca am facut deja Fermi liquid! FA-I!

Referinta la Goedel, care o fac in ultimul capitol din anexa?

sa zic mai pe larg de supersimetrie, care "potriveste" mai bine extrapolarile α . supersimetria are legatura cu superstringurile (de fapt de acolo vine). fa-i o subsectiune in ultima sectiune.

pune ultimele rezultate cu neutrinii solari care se pare ca au masa. si poze faine cu detectorul Super-Kamiokande! fa-i o subsectiune din asta in ultima sectiune.

Contents

8	Teoria Stringurilor	243
8.1	Introducind stringul	243
8.1.1	Ce este un string?	243
8.1.2	De ce totusi stringul?	243
8.1.3	Ce speram de la "string"?	244
8.1.4	Este chiar asa de simplu? Nu!	245
8.1.5	Avertisment	245
8.2	Stringul bosonic "open" clasic	246
8.2.1	Ecuatiile de miscare ale stringului cu capete libere	246
8.2.2	Caracteristicile clasice ale stringului	248
8.2.3	Miscarea clasica a stringului	249
8.3	Quantificarea stringului bosonic	250
8.3.1	Parametrizarea conului de lumina	250
8.3.2	Oscilatiile cuantice	252
8.3.3	Starile cuantice excitate ale stringului	253
8.4	Superstringul open	256
8.4.1	Introducerea fermionilor. Ecuatiile de miscare. Doua sectoare	256
8.4.2	Cuantificare. Sectorul NS	258
8.4.3	Sectorul R	259
8.4.4	Supersimetria, Proiectia GSO	260
8.5	Current areas of research	261
8.5.1	Teorii curente	261
8.5.2	Compactifiarea dimensiunilor. Dualitatea T. Teoria M.	262
8.5.3	Compactificarea si legatura cu cosmologia	264
8.5.4	Braneworlds si marimea dimensiunilor aditionale	266
8.5.5	O conexiune surpriza: gaurile negre	268
8.5.6	Catre ce?	269
8.6	Exercitii	269
8.7	Idei	269

Chapter 8

Teoria Stringurilor

8.1 Introducind stringul

În capitolul precedent am urmărit construcția Modelului Standard, care este descris de Lagrangeanul ???. Așa cum am menționat, acesta, împreună cu teoria relativității generalizate (denumită cîteodată simplu teoria gravitației), este *aproape tot* ce știm despre evoluția materiei în acest moment.

La sfîrșitul capitolului precedent am văzut încercările care se fac pentru o înțelegere încă mai adîncă legilor materiei: supersimetria, "Marea teorie" etc. Una dintre scopurile acestor încercări este unificarea Modelului Standard cu teoria gravitației pe care, odată cu introducerea mecanicii cuantice în capitolul ??, am lăsat-o cîmva pe de-o parte, la marginea drumului. Lucrul nu este întîmplător înșă, și se datorează în principal scalelor diferite ale celor două teorii: mecanica cuantică are de-a face cu particule microscopice, pe cînd gravitația are de-a face în general cu corpurile masive ceresti. Cîteva puncte de legătură ar fi interiorul stelelor masive, sau începutul Universului, dar acestea sînt mai degrabă cazuri particulare.

În încercarea lor de a găsi o astfel de teorie unificatoare, fizicienii au dat peste o soluție care are *potentialul* de a fi cea corectă: "teoria stringului". În acest ultim capitol vom încerca să vedem principalele ei caracteristici, avertizînd de la început cititorul că teoria stringului este în prezent un *domeniu nou* de cercetare, de numai 30 de ani vechime, cu un avînt urias în ultimii 10 de ani (acord?).

În plus, *nu există încă nici o verificare experimentală* a teoriei stringurilor, exceptînd desigur rezultatele experimentale precedente pe care teoria încearcă să le "îngurgiteze". Este deci o șansă (mai mare, sau mai mică, după opinia fiecăruia), că teoria să fie în final *falsă*, și că atare cititorul să-și fi pierdut în zădar timpul. În aceste cazuri nu putem decît să-l consolem pe cititor că nu va fi fost singurul!

În final, o mică observație asupra traducerii numelui teoriei. În mod normal, aceasta ar fi de "teoria corzilor", înșă varianta academică acceptată la noi este de "teoria stringurilor" ("string" = "coardă" în engleză). Noi optăm cîteodată chiar pentru o denumire mai puțin academică ca "teoria stringului", pentru a scoate în evidență faptul că în realitate ne așteptăm ca *singurul* tip de "caramidă" de bază a materiei să fie "stringul". În pasul următor, modul în care acesta va oscila va genera particulele elementare, adică acestea vor fi doar forme diferite sub care "stringul" se vede.

etc., toate prezentate în tabelul ??) sînt toate de fapt *nu niste puncte infinitesimale*, ci *ate minuscule*, făcute toate din același tip de "material".

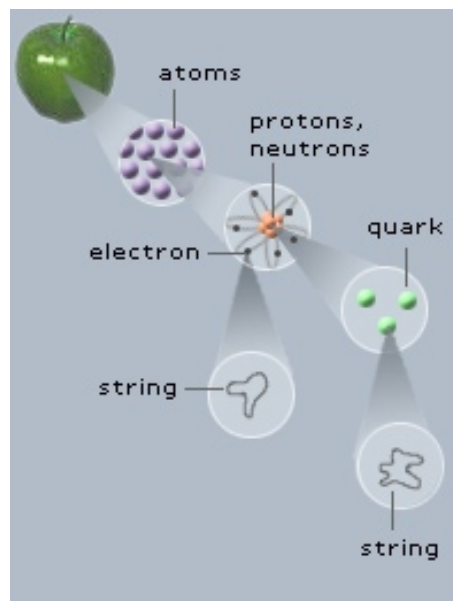


Figure 8.1: ilustrație-string

Aceste atome pot fi "open" sau "closed", mai lungi sau mai scurte, de forme diferite, în diferite moduri de vibrație etc. Toate ar fi înșă făcute din *același "material"*, și ar fi descrise altfel *de aceeași ecuație*. Și electronul ar fi o astfel de ată (sau coardă dacă vreți) și fotonul, chiar dacă acesta din urmă se deplasează cu viteza luminii și are masă de repaus nulă. Și quarcii și gluonii, oricît de mare diferența între ele, chiar dacă unul e fermion și altul boson. *Toate particulele* ar fi făcute din aceste atome minuscule.

Lăsînd la o parte detaliile tehnice pe care le vom construi, ne așteptăm ca aceste atome să se comporte în mod asemănător corzilor vibrante mecanice introduse în secțiunea ???. Așa cum vom vedea, cea mai importantă caracteristică a lor ar fi atunci *modul de vibrație*. În mod simplist, ne-am aștepta ca un anumit mod de vibrație să facă ată să se comporte ca un electron, un altul ca un foton, etc. (vezi Fig.??).

Cît de lungă ar fi ată? Cît de încîrligată? Așa cum vom vedea ne așteptăm ca dimensiunea ei să fie în jurul a lungimii Planck, adică de aproximativ $10^{-35}m$!. Nu va fi atunci de mirare că în experiențele moderne, care probează dimensiuni nu mai mici de $10^{-15}m$, aceste atome se vad ca niste puncte minuscule!

8.1.1 Ce este un string?

Fără prea mult cuvînt, ilustrația 8.1 introduce stringul. Propunerea este că particulele elementare (leptonii, quarcii, fotonul,

8.1.2 De ce totuși stringul?

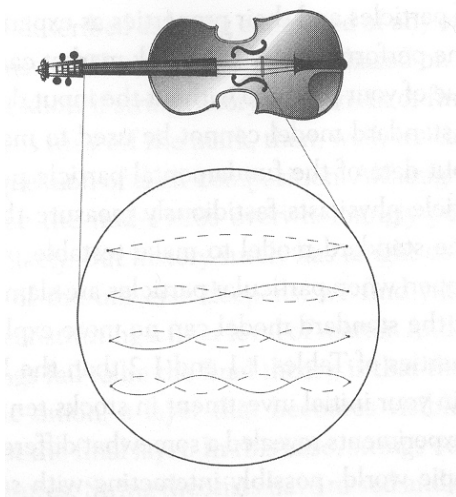


Figure 8.2: string-chitara

Avantajul evident al introducerii ate este de fapt cel general al oricarei structuri. Ata ar fi facuta din acelasi "material" pentru toate particulele elementare, numai ca se manifesta diferit intr-un caz sau altul. Ea "este" fie un foton, fie un quarc, fie altceva, de modul cum vibreaza, daca are capete libere sau nu, etc. Insa in felul acesta am reduce tabelul particulelor elementare ?? la o singura structura: stringul!

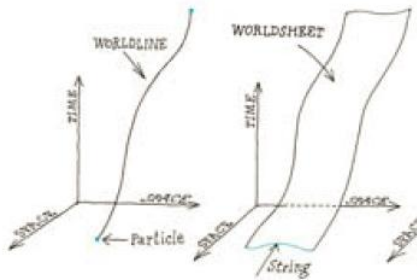


Figure 8.3: worldsheet

In plus inasa, stringul are *potentialul* de a include relativitatea generalizata in teorie. Astfel, sa privim cu atentie Figura 8.3. Aici este prezentate, in spatiul Minkovski, "urma" lasata de o particula in miscare, si cea lasata de o ata in miscare. Dupa cum vedem, particula in miscare construiește o linie de univers, iar ata contruiește o suprafata, numita "worldsheet".

Din teoria relativitatii stim ca un ingredient esential este o anumita *echivalenta* intre coordonatele de spatiu si timp. Intr-o forma simplista ¹, aceasta se reduce in a nu putea spune imediat daca o anumita directie este spatiu sau timp, daca eliminam identificarea explicita a axelor. Ori linia de univers a particulei din Fig.8.3 pare ca nu indeplineste aceasta conditie. Directia ei este orientata aproape in directia axi timpului, in mod special la viteze mici, si deci axa timpului trebuie sa fie cea orientata vertical in Fig.8.3. Ca atare, linia de univers a unei particule "tradeaza" cumva axa timpului.

Pe de alta parte, suprafata "worldshetului" nu ne da o astfel de indicatie. Un vector tangent la ea poate fi orientat si in directia timpului si in directia axei spatiale. Nu putem spune in ce directie (temporala sau spatia) va fi orientat acest vector

¹Argumentul asta e inventat cu totul de mine. Vezi sa nu fie cu totul fals.

decit daca avem o informatie prealabila despre axele spatiu-timpului. In consecinta teoria va fi intrinsec "mai compatibila" cu teoria relativitatii generalizate.

8.1.3 Ce speram de la "string"?

Ceea ce ne intereseaza pe noi odata cu introducerea stringului vor fi doua lucruri esentiale:

- Care este ecuatia care descrie evolutia unui singur string?
- Cum iese din aceasta ecuatie *exact* tabelul ?? al particulelor elementare si *exact* comportarea descrisa de Modelul Standard?

Este evident ca raspunsul la prima intrebare ne va da o ecuatie "fundamentala". Ea ar trebui sa descrie atunci tot Universul, pentru ca toate particulele sunt facute din aceleasi ate. In plus speram, precum grecii antici, ca Universul sa fie nu numai descriptibil, dar si *frumos*. Ca atare ecuatia primordiala trebuie sa fie cit se poate de *simpla*.

O prima forma a acestei ecuatiei fundamentale o putem obtine prin comparatie cu ecuatia relativista care descrie ecuatia de miscare a unei particule relativiste. Asa cum a fost discutat in seciunea ??, particula relativista este descrisa clasic de actiunea:

$$S = m \int ds \quad (8.1)$$

Aceasta este practic proportionala cu "lungimea" liniei de Univers. Dintre toate liniile de univers, particula clasica va alege acea linie de univers care minimizeaza actiunea S de mai sus.

In plus, aceeasi actiune ne da si comportarea cuantica, conform mecanismului lui Feynman (vezi ??). Astfel, amplitudinea de probabilitate a tranzitiei particulei de la un eveniment x la alt eveniment y este proportionala cu suma fazelor e^S tuturor liniilor de univers posibile si imposibile clasic care incep in x si se termina in y .

$$M(x, y) \simeq \sum e^{iS} \quad (8.2)$$

Cum actiunea particulei in miscare era proportionala cu "lungimea" liniei de Univers, este logic sa *definim* prin asemanare actiunea stringului in miscare ca fiind proportionala cu *ariei* worldsheetului descris de el:

$$S = T \int dA \quad (8.3)$$

Actiunea de mai sus se numeste *actiunea Nambu-Goto*, si ea ne-am astepta sa fie *ecuatia fundamentala* cautata. Aceasta actiune se foloseste atunci exact la fel pentru prescriptiile clasice si cuantice: in cazul clasic acesta va fi minima pentru miscarea reala a stringului, iar in cazul cuantic trebuie sa calculam o probabilitate de tranzitie de la o situatie la alta. Amplitudinea acestei probabilitati de tranzitie va fi atunci proportionala cu suma fazelor e^{iS} ale tuturor worksheeturilor posibile care indeplinesc conditiile initiale si finale.

Stringul descris de actiunea 8.3 se numeste *string relativist*, pentru ca evolutia acestui difera in anumite cazuri de evolutia

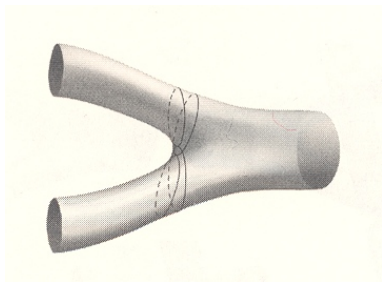


Figure 8.4: string-vertex

stringului clasic prezentat în ???. Vedem că el conține un singur parametru T , care ar trebui să fie același pentru toate particulele. Cu alte cuvinte, T ar trebui să fie *singura variabilă* a teoriei, care trebuie să fie obținută din experiment.

Cu toate că stringul este relativist, ecuațiile lui de mișcare vor include vibrații ca în ??, în funcție de condițiile de frontieră. Ne așteptăm atunci să atașăm diferitelor moduri de vibrații diversele particule elementare din tabelul ??, și astfel să putem răspunde cel puțin parțial la a doua întrebare de la începutul acestei secțiuni.

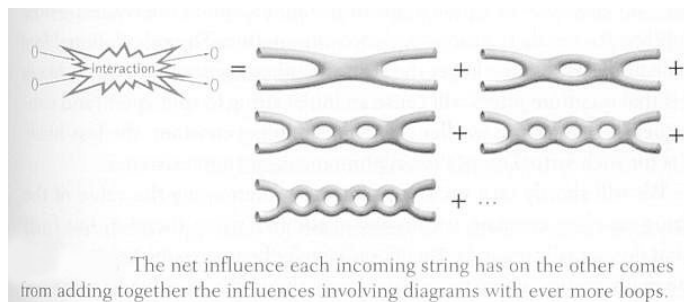


Figure 8.5: strings-interaction-perturbation

Pe de altă parte, ne așteptăm ca să putem construi diagrame Feynman pentru interacția dintre stringuri. O astfel de diagramă a interacției între două stringuri închise este prezentată în Fig.8.5. Aici timpul evoluează pe axa orizontală, de la stânga la dreapta, iar interacția este reprezentată ca o sumă de amplitudini pentru diferite ordine ale interacției. Vedem însă că interacția pentru un singur ordin este reprezentată de un worldsheet "smooth" în care singularitățile au disparut.

Pe de altă parte, avantajul acestei descompunerii este evident când privim la forma worldsheetului ce descrie interacția dintre particule într-un singur ordin, așa cum este exemplificat în Fig.8.6 pentru ordinul doi. Vedem aici că putem interpreta același worldsheet, datorită topologiei, ca o sumă a tuturor diagramelor Feynman de același ordin care le-am fi desenat pentru particule! Astfel, adunând toate worldsheeturile de ordinul doi schitate în Fig.8.6, vom include toate interacțiile particulelor în ordin doi, cum ar fi interacția dublă sau "self-energy".

Fig. 1: $g = 2$ world sheet and some corresponding 2-loop Feynman graphs.

Figure 8.6: string-feynmann-diagram

obține în cazul în care calculăm diagrame Feynman, remarcăm că calculul amplitudinilor date de fiecare worldsheet posibil rămâne dificil.

8.1.4 Este chiar așa de simplu? Nu!

Nu, nu este așa simplu! De fapt putem spune cu certitudine că un program ca cel din secțiunea precedentă este imposibil!

Astfel, pentru a putea obține dintr-un tip de string un spectru de particule cit de cit asemănător cu cel al Modelului Standard, teoreticienii teoriei stringurilor au trebuit să ia în calcul diverse situații, cum ar fi:

- Au stringurile capete libere sau nu?
- Putem distinge direcția pe un string sau nu?

În plus ei, ei au trebuit să adauge tot felul de *ingrediente adiționale* la "ecuația fundamentală" 8.3 prezentată în secțiunea precedentă, cum ar fi de exemplu:

- Dimensiuni adiționale ale spațiului în care trăim (evident acestea ar fi mici).
- Coordonate *anticomutative* pentru unele din aceste noi dimensiuni compacte ($x_1x_2 + x_2x_1 = 0$).
- Sarcini eventuale la capetele stringului.

Toate aceste ingrediente adiționale distrug frumusețea și simplitatea teoriei pe care am fi vrut să o avem. Pe de altă parte ele par să fie necesare pentru a putea construi o teorie care să se reducă la Modelul Standard. Chiar însă cu aceste ingrediente, teoria stringurilor *nu* are încă o structură bine definită. Astfel, nu știm încă de exemplu dacă electronul ar trebui să fie un string deschis sau unul închis.

Vom mai vedea în plus că sunt cel puțin 5 teorii posibile care au o șansă de a se reduce la Modelul Standard. Iar toate aceste 5 se cred a se trage dintr-o altă teorie (numită M theory) în care particulele nici măcar stringuri nu ar mai fi, ci suprafețe infinitezimale, cu o dimensiune care nu se extinde în Universul observabil!

Cu alte cuvinte, știm acum că teoria stringurilor *nu* poate explica Universul numai pe baza asumpțiilor simpliste ale secțiunii precedente. Pentru a se putea reduce la Modelul Standard, forma finală a acestei teorii a stringurilor trebuie să conțină astfel de ingrediente "extravagante". Teoreticienii teoriei stringurilor sunt încă în căutarea acestor ingrediente necesare pentru a face o teorie consistentă și reductibilă la Modelul Standard și la gravitație.

Ca atare, secțiunile care urmează trebuie privite mai degrabă ca o prezentare a unor din aceste încercări. Nu este însă mai puțin adevărat că fiecare din aceste ingrediente "dau gust" noii teorii și, dacă acestea vor fi confirmate în experiment, ne vor schimba extraordinar modul în care noi percepem acum Universul în care trăim.

8.1.5 Avertisment

Înainte de a trece la o introducere tehnică a stringurilor, vrem să atenționăm din nou cititorul cu privire la faptul că teoria stringurilor este încă în dezvoltare, și că ea nu a fost verificată experimental, și că atare poate fi complet falsă.

În lumea fizicii teoretice contemporane este o dezbatere aprinsă cu privire la posibilitatea ca teoria stringurilor să descrie lumea fizică reală. Dezbateră merge de la a considera teoria un nonsens, pînă la a o considera singura teorie viabilă la momentul prezent, iar numele cercetătorilor implicați în dezbateră "ranges" de la doctoranzi obișnuiți pînă la laureați ai premiului Nobel. Iată aici câteva citate ale unor laureați ai premiului

Nobel: ²

Gerard 't Hooft (premiul Nobel in 19..) ceva pozitiv

Steven Weinberg (premiul Nobel in 19..) ceva pozitiv

Richard Feynman (premiul Nobel in 19..) "... I do feel strongly that this is nonsense! ... I think all this superstring stuff is crazy and is in the wrong direction. ... I don't like it that they're not calculating anything. ... why are the masses of the various particles such as quarks what they are? All these numbers ... have no explanations in these string theories - absolutely none! ... "

Sheldon Glashow (premiul Nobel in 19..) "... superstring theory ... is, so far as I can see, totally divorced from experiment or observation. ... string theorists ... will say, "We predicted the existence of gravity." Well, I knew a lot about gravity before there were any string theorists, so I don't take that as a prediction. ... there ain't no experiment that could be done nor is there any observation that could be made that would say, "You guys are wrong." The theory is safe, permanently safe. I ask you, is that a theory of physics or a philosophy? ... "

Phil Anderson (premiul Nobel in 19..) "Is string theory a futile exercise as physics, as I believe it to be? It is an interesting mathematical specialty and has produced and will produce mathematics useful in other contexts, but it seems no more vital as mathematics than other areas of very abstract or specialized math, and doesn't on that basis justify the incredible amount of effort expended on it."

Dupa cum vedem, pararerele despre teoria stringurilor sunt extrem de impartite chiar intre specialisti. Riscul este atunci extrem de mare ca tot ceea ce vom discuta in sectiunile urmatoare sa se dovedeasca intr-o zi fals, si a alta teorie sa ia locul acum favorizat al teoriei stringurilor. In cazul acesta, daca cititorul a decis sa continue studiul teoriei stringurilor si dupa acest avertisment, se va fi imbunatatit cu citeva cunostinte inutile. Pe de alta parte, se prea poate ca macar citeva din ideile vehiculate in sectiunile urmatoare sa se dovedeasca adevarate, caz in care cititorul nu poate fi decit multumit ca le-a studiat intr-o vreme cind ele erau inca in dubiu!

8.2 Stringul bosonic "open" clasic

8.2.1 Ecuatiile de miscare ale stringului cu capete libere

Asa cum am mentionat in sectiunea precedenta, exista doua tipuri de stringuri "open" si "close". In aceasta sectiunea vom discuta, spre exemplificare, numai despre prima forma, desi analiza pentru "closed" string este asemanatoare, exceptind conditiile de margine.

Asa cum este exemplificat in Figura 8.7, miscarea stringului in spatiu-timpul 4 dimensional este descrisa de o suprafata. Practic, forma stringului la un moment t este data de intersectia acestei suprafate cu un "plan" paralel cu axele x, y, z . In spatiu, stringul arata deci ca o "ata", intr-un mod asemanator coardei vibrante descrisa in sectiunea ??.

²citeaza cartea de la biblioteca cu Superstring: A theory of everything?. Eu am luat din <http://infoproc.blogspot.com/2005/01/string-theory-quotes.html>

Exista insa o deosebire fundamentala intre stringul nostru si coarda vibranta, si anume ca *stringul nu are structura interna*. In cazul coardei vibrante, putem identifica un atom atom, a carui traiectorie o putem urmari. Suprafata creata atunci de coarda vibranta in spatiu-timp este mai degraba o colectie de linii de univers asociate fiecarui atom. In cazul stringului structura interna nu exista, si suprafata (worldsheet) sa in spatiu-timp arata mai degraba "lucioasa". Aici nu mai putem alege un punct de pe string caruia sa-i urmarim propria sa evolutie in timp.

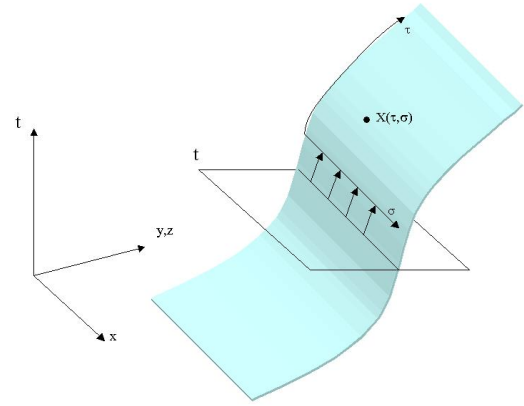


Figure 8.7: worldsheet-clasic

Cu toate acestea, descrierea matematica a stringului este posibila, si aceasta deoarece intregul "worldsheet" are o forma anume. Aceasta forma se descrie intr-un mod asemanator suprafetelor curbe Riemann (discutate in sectiunea ?? si folosite de-a lungul intregului capitol dedicat teoriei relativitatii generalizate) prin alegerea unei parametrizari:

$$x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau) \quad (8.4)$$

Practic, la fiecare pereche (σ, τ) asociem un punct pe "worldsheet", a carui pozitie este data de $x^\mu(\sigma, \tau)$. Stim aceste patru functii $x^\mu(\sigma, \tau)$ complet, atunci putem "plota" worldsheetul. Intr-o astfel de parametrizare oarecare, elementul de arie al "worldsheetului" este dat de relatia ?? $dA = L(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$, unde densitatea de lagrangean L este

$$L(\sigma, \tau) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} \quad (8.5)$$

Dupa definita ??, "worldsheetul" care se va observa in experiment este cel pentru care aria acestuia este un extrem (minima sau maxima). Modalitatea de a-l gasi este identica cu cea folosita in ?? si ?. Astfel, deoarece aria acestuia este minima, variatia de arie intre "worldsheetul" de aria minima, si unul apropiat infinitezimal de el este zero. Ca si in ?? si ??, fie δ diferenta intre valorile diversilor termeni intre aceste doua situatii. Va trebui deci sa avem :

$$\delta S \simeq \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} d\sigma \delta L = 0 \quad (8.6)$$

indiferent de "worldsheet" alegem infinitezimal apropiat de cel observabil clasic. Se observa ca in relatia de mai sus am considerat ca ambele "worldsheeturi" au parametrizarea σ de la 0 la π , ceea ce este perfect acceptabil, din moment de stim ca aria nu depinde de parametrizare.

Asa cum se vede din 8.5, densitatea de lagrangean L depinde insa direct numai de functiile:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (8.7)$$

unde facem distintie desigur între marimile covariante și contravariante (detaliaza).

Variantia între cele două "worldsheeturi" δL se poate scrie atunci ca:

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \delta \dot{X}^\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) \delta X^{\mu'} \quad (8.8)$$

Derivatele ce apar în paranteze sunt niste funcții ce apar des în calcule, și de aceea primesc o notatie specială. Ele pot fi calculate explicit cu ajutorul 8.5, obținind (atenție la covarianța și contravarianța, reaminteste):

$$P_\mu^\tau(\tau, \sigma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (8.9)$$

$$P_\mu^\sigma(\tau, \sigma) = \frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (8.10)$$

Intr-o prima fază putem scrie:

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau}; \quad \delta X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \quad (8.11)$$

Apoi putem rescrie cei doi termeni din 8.8 folosind relațiile precedente:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \delta X^\mu \right) - \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \quad (8.12)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right) - \delta X^{\mu'} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) \quad (8.13)$$

Inlocuind aceste două valori în ??, obținem:

$$\delta S \simeq \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \delta X^\mu \right) \right] \quad (8.14)$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right) \right] \quad (8.15)$$

$$- \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) \right) \right] \quad (8.16)$$

Primii doi termeni se simplifică imediat, obținind:

$$\delta S \simeq \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \delta X^\mu \right]_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \quad (8.17)$$

$$- \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) \right) \right] = 0 \quad (8.18)$$

Termenul precedent δS trebuie să fie nul *indiferent* ce "worldsheet" infinitesimal alegem, cu alte cuvinte, indiferent ce funcții δX^μ alegem. A doua linie a relației precedente ne spune că acest lucru nu este posibil decât atunci când:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \right) = 0 \quad (8.19)$$

Pe de altă parte, primii doi termeni al relației 8.17 nu par să fie automat zero. Primul termen este practic o condiție la timpul inițial τ_i și final τ_f . Noi însă alegem alege configurații "worldsheet" care au "capetele" fixate la momentele inițiale și finale. Cu alte cuvinte, precum în cazurile ?? și ??, noi

calculăm posibilitățile de variație ale stringurilor între situații inițiale identice și situații finale identice. Matematic, aceasta se scrie prin $\delta X^\mu(\sigma, \tau_i) = \delta X^\mu(\sigma, \tau_f) = 0$. Aceasta ne asigură automat că primul termen al relației 8.17 este nul.

Al doilea termen al relației 8.17 este legat de *condițiile de capăt* ale stringului. Astfel, pentru coarda clasică ?? ne putem imagina că evoluția ei depinde crucial de modul cum acționăm asupra capetelor ei. În fond, copii cînd se joacă cu coarda acționează asupra capetelor ei cu niste forte, în așa fel încît coarda să descrie mișcarea dorită. În cazul nostru, două sunt condițiile de capăt naturale pe care le putem alege. Prima este situația în care stringul este *fixat* la ambele capete. În acest caz avem desigur $\delta X^\mu(\sigma = 0, \tau) = \delta X^\mu(\sigma = \pi, \tau) = 0$, și deci termenul al doilea din 8.17 va fi automat nul. Aceasta condiție de numeste Dirichlet și ea este importantă în construcția D-brane-urilor, așa cum vom vedea mai tirziu. O altă posibilitate naturală este să lăsam capetele stringurilor să se miste *liber*. Aceasta condiție se numeste *Neumann*. și ea se scrie matematic ca:

$$\frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}}(0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}}(\pi, \tau) = 0 \quad (8.20)$$

Si aceasta condiție ne asigură automat că termenul al doilea din relația 8.17 este nul. Este deocamdată neclar de ce aceasta condiție de capăt a stringului descrie exact o mișcare liberă a capetelor stringului, însă acest lucru va apărea mai clar în relațiile următoare ???. Al doilea termen al relației 8.17 ne sugerează deja că, alegînd condiția ??, putem alege orice fel de variații ale capetelor stringului $X^\mu(\sigma = 0, \tau)$ și $\delta X^\mu(\sigma = \pi, \tau)$, termenul cel de-al doilea din 8.17 fiind mereu nul datorită ???.

Seminificația funcției $P_\mu^\tau(\tau, \sigma)$ (defineste-le mai devreme) apare evidentă dacă integram această funcție de-a lungul unei linii pe worldsheet la un τ constant dat:

$$p_\mu(\tau) = \int_0^\pi P_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma \quad (8.21)$$

Funcția $p_\mu(\tau)$ depinde numai de τ , și este atasată întregului string. Să calculăm acum derivata ei, folosind relația 8.19 și condițiile Neumann de capăt 8.20.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^\pi \frac{\partial P_\mu^\tau(\tau, \sigma)}{\partial \tau} d\sigma = \quad (8.22)$$

$$- \int_0^\pi \frac{\partial P_\mu^\sigma(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma = -P_\mu^\sigma(0, \tau) + P_\mu^\sigma(\pi, \tau) = 0 \quad (8.23)$$

Din relația de mai sus vedem că funcțiile $p_\mu(\tau) = p_\mu$ sunt constante, iar din relația 8.21 se observă că ele au dimensiune de impuls patru-dimensional. Pe de altă parte însă, parametrizarea τ, σ este încă la liberă noastră alegere. Cea mai simplă parametrizare a worldsheetului pentru τ este cea în care $\tau = t$. În acest caz putem asocia funcțiile $p_\mu(\tau) = p_\mu(t)$ *impulsului 4-dimensional* al întregului string, care se conservă astfel în mișcarea liberă.

Relațiile 8.19 și 8.20 descriu mișcarea stringului relativist "open" cu capete libere, într-o reprezentare $X^\mu(\sigma, \tau)$ generală. Ținînd însă cont de forma complexă 8.5 a densității de lagrangean L , ele nu sunt ușor de rezolvat. De aceea vom încerca acum să construim o reprezentare particulară, în care ecuațiile 8.19 și 8.20 capătă ceva sens.

8.2.2 Caracteristicile clasice ale stringului

In aceasta sectiune vrem sa aratam ca stringul descris de actiunea 8.3, in limita nerelativista, se comporta intr-un mod asemanator coardei vibrante descrise in sectiunea ???. Sa ne reamintim ca ecuatiile 8.19 si 8.20 care trebuiesc indeplinite sunt independente de parametrizarea aleasa $X^\mu(\sigma, \tau)$. Sa alegem atunci o parametrizare particulara, care simplifica aceste ecuatii, in care identificam coordonata τ cu timpul $\tau = t$. Cu alte cuvinte

$$X^0(\sigma, \tau) = c\tau = ct \quad (8.24)$$

Aceasta reprezentare este schitata in Fig.8.7 prin "planul" paralel cu axele x, y, z ce intersecteaza worldsheet-ul stringului la momentul $t = \tau$.

Dupa cum am mentionat inainte, de-a lungul stringului la momentul $t = \tau$, parametrizarea aleasa trebuie sa fie intre $\sigma = (0, \pi)$, indiferent de momentul ales t . Intre parametrizarile σ a doua astfel de momente infinitesimal apropiate t si $t + \Delta t$ (vezi Fig.8.7) nu exista inca nici o legatura. O astfel de legatura o putem crea daca construim parametrizarea σ la momentul $t + \Delta t$, folosind parametrizarea σ la momentul t , in felul urmatoare. In fiecare punct σ_0 de pe linia corespunzatoare stringului la momentul t (data de $X^0(\sigma, \tau) = ct$) ducem niste planuri *perpendiculare* pe aceasta linie. Aceste planuri vor intersecta linia corespunzatoare stringului la momentul $t + \Delta t$ (data de $X^0(\sigma, \tau) = c(t + \Delta t)$) in niste puncte care vor primi atunci acelasi σ_0 ca cel din care au fost pornite planurile.

In acest fel am construit practic o parametrizare σ (o metrica) pe suprafata "de gheata" a worksheetului in care liniile date de aceasi σ sunt *perpendiculare* pe liniile date de acelasi $\tau = t$. De aceea si proiectiile lor pe "planul" x, y, z vor fi perpendiculare unele pe altele. Se vede insa ca aceste proiectii se pot scrie ca vectorii:

$$\text{proiectia liniei de acelasi } t : \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \quad (8.25)$$

$$\text{proiectia liniei de acelasi } \sigma : \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (8.26)$$

Se vede ca proiectiile acestor linii pe "planul" x, y, z sunt niste vectori 3-dimensionali. Avem deci *in orice punct* de pe worldsheet:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) = 0 \quad (8.27)$$

ceea ce conduce, folosind si 8.24, la (nu iese direct din definitie, fara sa fac proiectia?):

$$\dot{X} \cdot X' = \left(c, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \cdot \left(c, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0 \quad (8.28)$$

Pe de alta parte, vectorul $\partial \mathbf{X} / \partial t$ are o semnificatie fizica aparte. Astfel, conform constructiei precedente, el este un vector tridimensional perpendicular in orice moment pe tangenta la string (care este data de $\partial \mathbf{X} / \partial \sigma$). Mai mult insa, daca scriem $\partial \mathbf{X} / \partial t = \Delta \mathbf{X} / \Delta t$, recunoastem in $\Delta \mathbf{X}$ deplasarea in timpul Δt . Atunci putem spune ca $\partial \mathbf{X} / \partial t$ reprezinta in spatiul 3-dimensional viteza de deplasare a stringului intr-o directie perpendiculara la tangenta sa:

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (8.29)$$

Aceasta ne permite sa scriem atunci:

$$\dot{X}^2 = - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 = -c^2 + v_\perp^2 \quad (8.30)$$

Pe de alta parte, in afara de viteza $v_\perp$, mai exista o marime ce are semnificatie fizica directa: lungimea stringului. Sa definim atunci functia $s(\sigma)$ ca o masura a lungimii stringului. Cu alte cuvinte $s(0) = 0$ este inceputul stringului si $s(\sigma = \pi) = l$ este lungimea totala a stringului. Valoarea $s(\sigma)$ este atunci lungimea fizica a stringului de la capatul $\sigma = 0$ la punctul σ . Deoarece $ds(\sigma)$ reprezinta atunci distanta fizica $|d\mathbf{X}|$ intre doua puncte infinitesimal apropiate ale stringului, la acelasi moment de timp t , vedem ca putem scrie:

$$ds = |d\mathbf{X}| = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| |d\sigma| \quad (8.31)$$

De aici deducem ca:

$$X'^2 = -0 + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \quad (8.32)$$

Inlocuind 8.28, 8.30, si 8.32 in forma densitatii de lagrangean 8.5 (care este in fapt elementul de arie al worldsheetului), obtinem forma simplificata:

$$L(\sigma, t) = -T_0 \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \quad (8.33)$$

Daca integram aceasta valoare pe toata lungimea stringului, obtinem o actiune pentru intreg stringul data de:

$$L(t) = -T_0 \int_0^l ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \quad (8.34)$$

unde l este lungimea fizica totala a stringului la momentul t . Forma de mai sus este foarte asemanatoare cu forma lagrangeanului pentru particula libera ???. In relatia de mai sus apare insa viteza $v_\perp$ cu care fiecare "bucatica" de string se deplaseaza perpendicular pe tangenta la string, iar in plus trebuie sa integram desigur actiunea pe toata lungimea stringului (dar unde apare viteza *totala* a stringului?). Simplificind, este ca si cum fiecare "bucatica" de string se comporta ca o particula.

Asemanarea cu particula clasica merge insa mai departe, daca incercam sa calculam cei doi termeni care intra in ecuatiile 8.19. Calculul se face direct explicind forma celor doi termeni din 8.19 cu ajutorul relatiei 8.5. Inlocuind *apoi* relatiile 8.28, 8.30, si 8.32, se obtine ³:

$$P^{\tau\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2} \right)^{-1/2} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad (8.35)$$

$$P^{\sigma\mu} = \frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} = T_0 \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2} \right)^{1/2} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (8.36)$$

Sa privim pentru inceput componentele temporale $\mu = 0$ ale acestor vectori. Avem atunci:

$$P^{\tau 0} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}; \quad P^{\sigma 0} \sim \frac{\partial X^0}{\partial \sigma} = 0 \quad (8.37)$$

³verifica contravarianta si covarianta!

Relatia 8.19 pentru componenta temporală $\mu = 0$ spune atunci imediat ca:

$$\frac{\partial P^{\tau,0}}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ds}{d\sigma} \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0 \quad (8.38)$$

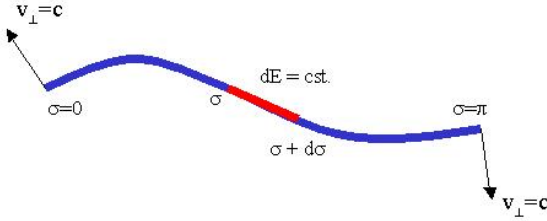


Figure 8.8: string-bucatica

Sa consideram o bucata infinitesimala de string $d\sigma$, parametrizata de la σ la $\sigma + d\sigma$ (vezi Fig.8.8). Daca inmultim relatia precedenta cu $d\sigma$, obtinem ca pentru aceasta bucata de string, marimea urmatoare este *constanta in timp*:

$$dE = \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} = \text{const.} \quad (8.39)$$

Marimea de mai sus are dimensiunea unei energii, si forma ei sugereaza ca dE este energia relativista asociata "bucatii" $d\sigma$ de string. Din nou, comparam aceasta energie ce se conserva cu energia particulei libere ?? ce se conserva deasemenea. Vedem atunci ca energia de repaus a "bucatii" de string este $T_0 ds$. Prin comparatie cu coarda vibranta ?? asociem atunci singurei marimi introduse ad-hoc in teorie, T_0 , denumirea de *tensiune* a stringului.

Este de observat ca "bucatica" de string din Fig.??, desi este delimitata de o valoare fixa si constanta $d\sigma$ intre doua valori date σ si $\sigma + d\sigma$, nu are o lungime ds care este constanta in timp!. De fapt, lungimea ds a acestei "bucati" este "ajusteaza" in functie de viteza transversala $v_{\perp}$, in asa fel incit energia totala dE sa fie constanta. In plus, energia totala a stringului, care este o suma a tuturor energiilor "bucatilor" $d\sigma$, va fi deasemenea constanta, pentru ca σ variaza intre valorile constante σ_0 si $\sigma = \pi$.

8.2.3 Miscarea clasica a stringului

Sa rescriem acum expresia 8.37b), punind impreuna numai componentele spatiale:

$$\mathbf{P}^{\sigma}(\sigma, t) = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(\sigma, t) \quad (8.40)$$

Pe de alta parte, la capetele stringurilor avem conditia 8.20, care ne spune practic ca valoarea precedenta trebuie sa fie nula la aceste doua capete: $\mathbf{P}^{\sigma}(0, t) = \mathbf{P}^{\sigma}(\pi, t) = 0$. Pe de alta parte, vectorul $\partial \mathbf{X} / \partial s$ este vectorul unitate tangent la string, al carui modul este 1, dupa cum se vede imediat si din relatia 8.31. Cum acesta nu poate avea deci valoare nula, singurul termen care poate fi nul in relatia 8.42 pentru cele doua capete este cel de sub radical. Ca atare, deducem ca viteza transversala $v_{\perp}$ a stringului la capete este egala cu viteza luminii:

$$v_{\perp}(\sigma = 0, t) = v_{\perp}(\sigma = \pi, t) = c \quad (8.41)$$

Cu alte cuvinte, *capetele stringului se deplaseaza cu viteza luminii!*

In continuare sa aratam ca putem scrie o ecuatie de evolutie a stringului relativist ce este asemanatoare ecuatiei clasice de evolutie a coardei vibrante ?? . Sa rescriem acum si expresia 8.37b), punind impreuna numai componentele spatiale:

$$\mathbf{P}^{\tau} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \quad (8.42)$$

Folosind atunci relatiile 8.42 si 8.42 in ecuatie de miscare a stringului 8.19, obtinem:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right] \quad (8.43)$$

Deoarece functia $s = s(\sigma)$ este o functie directa intre s si σ , putem scrie ca $(\partial / \partial \sigma) = ds / d\sigma (\partial / \partial s)$. Inlocuind in relatia de mai sus, obtinem ecuatie de oscilatie a stringului relativist:

$$\left[\frac{T_0 / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right] \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right] \quad (8.44)$$

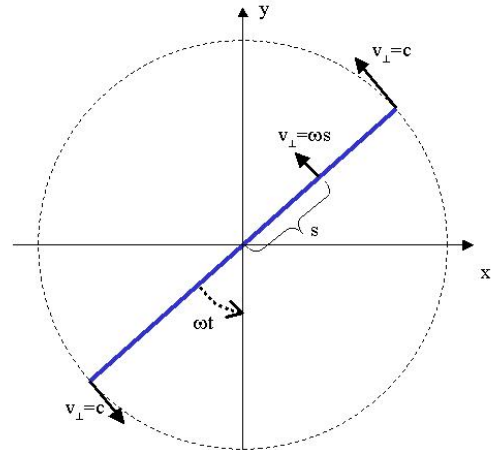


Figure 8.9: string-rigid

Comparind cu relatia clasica ?? a coardei vibrante vedem ca stringul are o *tensiune efectiva* T si o *densitate de masa efectiva* μ date de:

$$\mu_{eff} = \frac{T_0 / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}; \quad T_{eff} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (8.45)$$

Vedem ca densitatea de masa efectiva μ_{eff} a unei bucatele $d\sigma$ are o valoare compatibila cu cea data de teoria relativitatii restrinse daca consideram ca aceasta "bucata" se deplaseaza cu viteza $v_{\perp}$. Acest rezultat este in perfecta linie cu conservarea energiei totale a bucatii $d\sigma$, obtinuta in relatia 8.39.

Tensiunea efectiva T_{eff} are o forma desemeenea relativista. In plus, tensiunea efectiva la capetele stringului devine nula, pentru ca acestea se deplaseaza cu viteza luminii. Acest lucru confirma faptul presupus in conditia Newmann 8.20 ca capetele stringului sunt libere, si ca asupra lor nu actioneaza nici o forta care sa genereze o tensiune suplimentara nenula.

O solutie simpla a ecuatiei de miscare a stringului 8.45 este prezentata in Fig.8.9. Aici un string drept de lungime totala l se roteste in jurul centrului cu frecventa unghiulara constanta $\omega = 2c/l$. Aceasta ne asigura practic ca viteza stringului la capete este egala cu vitea luminii: $v_{\perp}(A) = \omega l/2 = c$. Faptul ca acesta solutie verifica ecuatie de miscare 8.45 este lasat pe seama exercitiului ??.

Spune ceva de Regge traiectorii si de ce s-a crezut la inceput ca stringurile pot descrie nucleonii.

8.3 Quantificarea stringului bosonic

In sectiune precedenta ne-am ocupat cu *miscarea clasica* a stringului, miscare ce rezulta din forma actiunii initiale 8.3. In aceasta sectiune vom incerca sa "descoperim" cite ceva din comportarea cuantica a aceluasi string. Trebuie sa mentionam de la inceput ca exista doua abordari des intilnite in literatura pentru cuantificarea stringului:

1. Cuantificarea covarianta pentru o parametrizare cu restrictii
2. Cuantificarea in parametrizarea conului de lumina

In prima situatie se alege o parametrizare speciala, in care anumite relatii trebuie indeplinite, precum este relatia 8.28. Se cuatifica apoi covariant sistemul, in sensul ca *toate* componentele parametrizarii X^{μ} devin operatori, mult ca si la cuantificare covarianta a cimpului electromagnetic, descrisa in ???. In acest caz insa nu toate valorile masurabile X^{μ} pot fi admise, ci doar cele care indeplinesc conditiile initiale clasice. Aceasta se face matematic prin limitarea spatiului functiilor de unda ale sistemului, in asa fel incit valorile proprii ai operatorilor X^{μ} (care sunt valorile masurabile) sa indeplineasca conditiile initiale. Procedura aceasta speciala de a limita spatiul functiilor de unda este in fapt procedura Gupta-Bleuler de cuantificare covarianta a cimpului electromagnetic (vezi ??).

A doua modalitate elimina complicatiile procedurii Gupta-Bleuler, pornind de la solutii clasice care nu au *nici* o conditie. Practic, se alege o parametrizare in care doua dintre componentele X^{μ} (si anume X^0 si X^1) se pot afla in functie de celelalte ramase X^I , ($I = 2, 3$). Apoi se cuantifica *numai* componentele X^I . Deoarece nu avem conditii asupra lui X^I , nu va fi necesar sa restringem spatiul functiilor de unda asociate acestor operatori. Dezavantajul este insa ca covarianta ecuatiilor nu mai este explicita. Aceasta trebuie verificata la sfirsit.

In sectiunile urmatoare vom prezenta aceasta a doua cuantificare. Mentionam insa ca ambele metode conduc la aceleasi rezultate fizice. In plus, anticipind complicatiile care vor urma, vom face o generalizare, presupunind ca spatiu-timpul in care se misca stringul nu are dimensiunea 4 cum am fost obisnuiti pina acum, ci dimensiunea D , unde $D \geq 4$. Motivatia acestei generalizari va fi clara in sectiunea ??.

In aceasta parametrizare inlocuim coordonatele de timp 0 si cea spatiala 1 cu coordonatele + si -, definind:

$$X^+ = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}; \quad X^- = \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}} \quad (8.46)$$

In relatia de mai sus, alegerea eliminarii coordonatei spatiale 1 este desigur arbitrara, in acelasi fel am fi putut elimina oricare alta coordonata spatiala. Setul de coordonate spatiale ramase le vom recunoaste prin notatia:

$$X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d) \quad (8.47)$$

unde $d = D - 1$ este numarul de coordonate spatiale. Schimbarea de coordonate 8.46, in care coordonatele 0 si 1 sunt inlocuite cu coordonatele + si - o vom presupune de acum implicita pentru orice alte marimi vectoriale, nu numai pentru coordonatele spatiale. Vom avea de exemplu $P^{\tau+} = (P^{\tau 0} + P^{\tau 1})/\sqrt{2}$.

In continuare vom alege o parametrizare pentru τ asemanatoare celei din sectiunea precedenta. In Fig.8.10 am desenat plane pentru care coordinata X^+ este constanta. Din relatile 8.46 vedem ca acestea formeaza un "unghi" de 45 de grade cu axele 0 si 1, si sunt paralele cu celelalte axe spatiale. Vom alege atunci parametrizarea τ in asa fel incit toate punctele de pe worksheet care sunt la intersectia worksheetului cu unul din aceste plane sa aiba aceeasi coordonata τ :

$$X^+(\tau, \sigma) \sim \tau \quad (8.48)$$

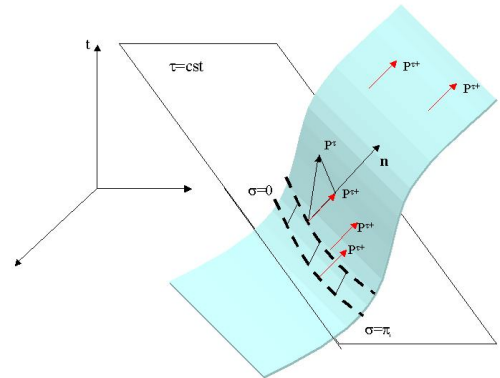


Figure 8.10: light-cone-one

Pe de alta parte, am vazut in relatia 8.22 ca valoarea $p_{\mu}(\tau)$, asociata intregului string, este constanta. Aceasta se va intimpla si pentru $p^+(\tau) = p^+$, care nu inseamna de fapt decit ca coordonata + impulsului se conserva, deoarece si $p^0(t) = p^0$ si $p^1(t) = p^1$ se conserva deasemenea. Avem deci:

$$p^+(\tau) = p^+ = \text{constant} \quad (8.49)$$

Vom folosi aceasta constanta a miscarii p^+ , si alegem in final parametrizarea τ in asa fel incit:

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \quad (8.50)$$

Pentru fiecare intersectie a worksheetului cu planul $X^+ = \text{constant}$ putem acum alege o parametrizare σ . Sa ne remindim

acum prin relatia 8.21 ca $P_\mu^\tau(\tau, \sigma)$ reprezinta densitatea de impuls $p_\mu(\tau)$ purtata de string. Atunci putem spune ca, de-a lungul stringului schitat in Fig.8.10, $P^{\tau+}(\tau, \sigma)$ este densitatea de impuls p^+ asociata coordonatei $+$. Alegerea noastra pentru parametrizarea σ este cea in care aceasta densitate de impuls este constanta, si data de:

$$P^{\tau+}(\tau, \sigma) = P^{\tau+} = \frac{p^+}{\pi} \quad (8.51)$$

Practic, ne putem imagina ca constructia parametrizarii σ pentru fiecare intersectie a planului $X^+ = cst$ cu worldsheetul se face pas cu pas, incepind de la capatul $\sigma = 0$ pina la capatul $\sigma = \pi$. Pentru fiecare pas se alege $\Delta\sigma$ in asa fel incit 8.51 sa fie satisfacuta, iar apoi se trece la urmatorul punct, proces exemplificat in Fig.8.10.

Relatiile 8.50 si 8.51 definesc univoc parametrizarea (τ, σ) a stringului. Sa vedem acum care sunt principalele avantaje ale acestei parametrizari. Astfel, relatia 8.19, scrisa pentru componenta $+$ devine, folosind 8.51:

$$\frac{\partial P^{\sigma+}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial P^{\tau+}}{\partial \tau} = 0 \quad (8.52)$$

ceea ce inseamna ca $P^{\sigma+}(\tau, \sigma)$ este constant de-a lungul liniei de intersectie din Fig.8.10. Pe de alte, conditia de capat Neumann 8.20 ne spune ca $P^{\sigma+}(\tau, 0) = P^{\sigma+}(\tau, \pi) = 0$, la capete. In consecinta valoare este nula de-a lungul intregului string, si deci pe intregul worldsheet:

$$P^{\sigma+}(\tau, \sigma) = 0 \quad (8.53)$$

Pe de alta parte, din relatia 8.50 obtinem ca $X'_\mu = \partial_\tau X^+ = 0$, si inlocuind in forma explicita 8.9, avem ca $P^{\sigma+} \sim (\dot{X} X')$. Cum primul termen este nul din 8.53, obtinem ca pe intreaga suprafata a worldsheetului:

$$\dot{X} X' = 0 \quad (8.54)$$

Aceasta relatie este identica cu cea obtinuta in 8.28 pentru parametrizarea ..., si ea ne spune practic ca liniile σ constant de pe worldsheet sunt perpendiculare pe cele de τ constant.

O a doua relatie utila se obtine folosind forma explicita 8.9 pentru $P^{\tau+}$. Folosind relatia precedenta, si parametrizarea 8.51, aceasta se scrie ca:

$$P^{\tau+} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^+}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 2\alpha' p^+}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} = \frac{p^+}{\pi} \quad (8.55)$$

Simplificind termenii si prelucrind putin relatia precedenta, obtinem o a doua ecuatie utila:

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (8.56)$$

Relatia aceasta se combina usor cu 8.54 pentru a obtine urmatoarea relatie intre vectorii D-dimensional $\dot{X}$ si X' (sa amintesc asta mai clar, ca sa se "citeasca" mai usor ecuatiile):

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (8.57)$$

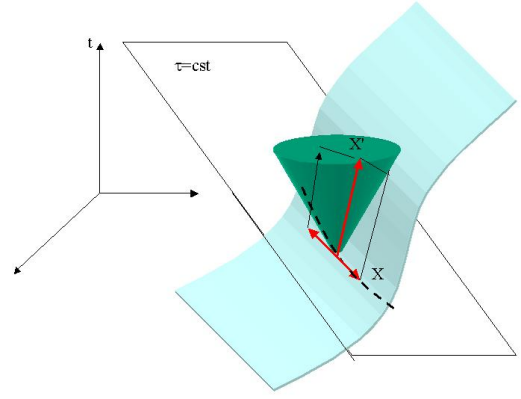


Figure 8.11: string-relatie-con-lumina

Aceasta relatie a fost reprezentata sugestiv in Figura 8.11. Aici se vede ca suma si diferenta vectorilor $\dot{X}$ si X' sunt alti doi vectori ce trebuie sa fie pe conul de lumina, in asa fel incit modulul lor sa fie nul, conform cu 8.57.

Daca separam componentele $+$ si $-$ in 8.57, folosind relatiile 8.46 obtinem:

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (8.58)$$

Folosind acum si $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$ ce se obtine din 8.50, vom avea:

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (8.59)$$

Rezultatul acesta ne spune ca in parametrizarea conului de lumina, coordonata $-$ se exprima simplu in functie de coordonatele spatiale ramase I .

Relatiile 8.57 simplifica pe de alta parte enorm ecuatiile de miscare ale stringului. Astfel, intr-o prima faza putem utiliza 8.56 pentru a scrie $\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^2 X'^2} = X'^2$, deoarece $X'^2 > 0$ (distanța spatiala sau temporală?). Inlocuind acum aceasta relatie, ca si 8.54 si 8.56 in ecuatiile explicite pentru toate componentele $P^{\tau\mu}$ si $P^{\sigma\mu}$ (deci nu numai componentele $+$), obtinem dupa citeva calcule imediate formele simplificate:

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (8.60)$$

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu \quad (8.61)$$

Acestea conduc la rindul lor prin inlocuire directa in 8.19 la ecuatie de miscare a stringului:

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (8.62)$$

Relatia de mai sus este valabila pentru toate componentele μ (pentru componenta $+$ ea este desigur triviala). In reprezentarea conului de lumina vedem deci ca toate aceste componente $(-, 2, 3, \dots, D)$ satisfac *ecuatia undei*!

Solutiile acestei ecuatii sunt desigur oscilatii, precum si ecuatie initiala obtinuta de noi 8.44 conduce la oscilatii. Ne asteptam ca, cuantificind aceste oscilatii, sa obtinem diferite stari excitate ale stringului, care sa conduca la diferite particule ce sunt observate experimental. Inainte de a cuantifica oscilatiile, sa vedem forma lor clasica.

Solutia generala a ecuatiei 8.62 se scrie, conform discutiei din ?? (la mecanica) sub forma $X^\mu(\tau, \sigma) = f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)$. Pe de alta parte, solutia noastra trebuie gasita numai intr-un interval finit dat $\sigma = [0, \pi]$, si ca atare putem folosi seriile Fourier. In plus ea trebuie sa satisfaca conditiile Neumann 8.20, care se traduc cu ajutorul relatiei 8.60 in $X^{\mu'}(\tau, 0) = X^{\mu'}(\tau, \pi) = 0$. Solutia *generală* care sa indeplineasca conditiile de mai sus este:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = C_0 + C_1\tau + \beta \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* e^{in\tau} - A_n e^{-in\tau}) \cos n\sigma \quad (8.63)$$

Faptul ca solutia de mai sus este reala, si satisface ecuatiei unde si conditiile Neumann se verifica imediat. Demonstratia faptului ca ea este si o solutie generala o lasam pe seama exercitiului ??.

In mod evident, constantele C_0 si C_1 sunt usor de identificat ca fiind pozitia initiala a stringului $C_0 = x_0^\mu$ si impulsul sau total $C_1 = 2\alpha' p^\mu$ (factorul $2\alpha'$ intra pentru ca τ nu are dimensiune, iar $2\alpha'\tau$ are dimensiunea corecta a timpului). Constanta C_2 se poate verifica si cu ajutorul 8.60 si 8.21. Constantele complexe A_n sunt in literatura de specialitate redefinite, pentru simplificari ce vor apare evidente mai tirziu:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \left(\alpha_0^\mu \tau + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \right) \quad (8.64)$$

unde vom avea deci:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu; \quad \alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* = -A_n \frac{n}{\sqrt{2\alpha'}} \quad (8.65)$$

Dupa cum am mentionat la inceput, parametrizarea conului de lumina este utila pentru ca coordonatele $X^+(\tau, \sigma)$ si $X^-(\tau, \sigma)$ se exprima in functiile de coordonatele $X^I(\tau, \sigma)$. De fapt coordonata $X^+(\tau, \sigma)$ este triviala, si este data de 8.50, asa ca nu ne mai ramine decit sa exprimam $X^-(\tau, \sigma)$. Pentru aceasta folosim dezvoltarea 8.64 pentru a scrie:

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (8.66)$$

Inlocuind componentele relatiei de mai sus in relatia 8.59 vom obtine ca:

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \quad (8.67)$$

$$= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (8.68)$$

unde a doua relatie a fost obtinuta prin schimbarea de variabila ... Prin comparatie directa a termenilor obtinem atunci:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (8.69)$$

Relatia de mai sus asigura ca odata ce stim valorile tuturor oscilatorilor I atunci putem afla imediat oscilatia componentelor

– cu relatia de mai sus. Scopul intermediar al acestei sectiuni a fost atins. Astfel, daca stim *toate* oscilatiile α_p^I , atunci stim automat si coordonatele X^- , care sunt date de relatia 8.64. Functia X^+ este data trivial de alegerea 8.50, iar conditiile 8.62 vor fi automat satisfacute.

8.3.2 Oscilatiile cuantice

Sa incercam acum sa cuatificam stringul open, pornind de la observatia ca valorile componentelor I , si anume α_n^I si x_0^I (vezi 8.64) determina complet cunoasterea sistemului. Astfel, componentele coordonatei – se calculeaza cu 8.69 si, daca se stie si x_0^- se inlocuieste in 8.64. Componenta $+$, data de 8.50, se afla direct daca se stie desigur p^+ . Pentru simplitate vom considera acum ca marimile x_0^I si p^+ , care sunt niste constante, sunt cunoscute si nu trebuie cuantificate. Tot ce ramine de cuatificat atunci sunt marimile α_n^I si x_0^I caci, daca stim clasic aceste marimi, stim tot sistemul.

Cuantificare incepe atunci de la observatia ca, in reprezentarea aleasa, pozitia generalizata este $X^I(\tau, \sigma)$. Practic este ca si cum am impartit stringul in bucatele $\Delta\sigma$, si fiecarai aceste bucatele atribui o pozitie $X^I(\tau, \sigma)$ (vezi Fig.8.10). Fiecare din aceasta "bucatica" i se poate asocia si un impuls generalizat, care este $P^{\tau I}(\tau, \sigma)$. Datorita relatiilor 8.60, acesta ia forma simpla $P^{\tau I}(\tau, \sigma) = T \dot{X}^I(\tau, \sigma)$. Forma aceasta justifica alegerea sa ca impuls generalizat, pentru ca este o derivata a coordonatei spatiale $X^I(\tau, \sigma)$ a bucatii de string la timpul τ (mi-e frica sa vorbesc de impuls generalizat, ca nu a fost facut niciunde..).

In cuantificarea stringului, pozitia "bucatii" $\Delta\sigma$ de string $X^I(\sigma)$ si impulsul sau asociat $P^{\tau I}(\sigma)$ vor deveni *operatori* in reprezentarea Heisenberg. Valorile proprii ale acestor operatori dau rezultatele clasice ale masuratorii. Relatiile de comutare pe care acesti operatori trebuie sa le indeplineasca se scriu atunci imediat ($\hbar = 1$ la noi), utilizind modelul descris in sectiunea ?? (atentie la coeficient, ca creed ca lipseste un α' , vezi 4.2.1 green):

$$\begin{aligned} [X^I(\sigma), P^{\tau J}(\sigma')] &= i\delta_{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \\ [X^I(\sigma), X^J(\sigma')] &= 0 \\ [P^{\tau I}(\sigma), P^{\tau J}(\sigma')] &= 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

Practic vedem ca doua "bucatele" $\Delta\sigma$ de pe string pot fi masurate simultan, numai pozitia si impulsul asociate aceleiasi "bucati" nu pot fi masurate simultan. Din relatia 8.64 vedem ca si functiile α_n^I si x_0^I vor deveni operatori. Practic, indicele $n \neq 0$ ne va da tipul de oscilatie, iar operatorii α_n^I vor descrie evolutia cuantica a acestor oscilatii. Marimea α_0^I , care are indicele $n = 0$, va descrie impulsul total al stringului p^I , asa cum se vede din relatia 8.65.

Daca inlocuim in relatiile 8.70 dezvoltarea 8.64, obtinem relatiile de comutare pentru operatorii α_n^I si x_0^I . Rezultatul va conduce la singurii comutatori nenuli, care sunt:

$$\begin{aligned} [x_0^I, p^J] &= \beta\delta_{IJ} \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= m\delta_{IJ}\delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (8.71)$$

celelalte combinatii fiind nule. Nu vom de duce aici rezultatul de mai sus, ci il propunem spre verificare in exercitiul ??.

Cea de-a doua relatie este nenula numai pentru $n \neq 0$, adica pentru oscilatori (sa ne amintim ca $n = 0$ determina termenul impulsului intregului string p^I , vezi 8.65). Ea seamana cu relatiile de comutare ?? pentru operatorii de creare si anihilare ai oscilatorilor, dar nu exact. Pentru a recupera relatiile ??, introducem un nou operator a_n^I , dat de:

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \text{ pentru } n \geq 1 \quad (8.72)$$

Pe de alta parte, avem observatia ca, conform ecuatiei 8.65, avem relatia de conjugare $\alpha_{-n}^I = (\alpha_n^I)^*$ intre valorile clasice. Aceasta relatie se interpreteaza ca spunind ca valoarea lui α_{-n}^I pentru $n \geq 1$ se deduce automat din cea a lui α_n^I pentru $n \geq 1$ prin complex conjugare. Cind aceste valori devin operatori, in-seamna ca *operatorul* α_{-n}^I pentru $n \geq 1$ se deduce si el automat din *operatorul* α_n^I pentru $n \geq 1$ prin aplicarea hermitianului: $\alpha_{-n}^I = (\alpha_n^I)^\dagger$. Aceasta ne asigura ca valorile proprii ale celor doi operatori (valorile masurate clasice) vor fi complex conjugate (vezi si discutia din sectiunea ??). In termenii operatorului a_n^I , care este definit numai pentru $n \geq 1$ (vezi 8.72), vom avea

$$\alpha_{-n}^I = (\alpha_n^I)^\dagger = a_n^{I\dagger} \sqrt{n} \text{ pentru } n \geq 1 \quad (8.73)$$

Folosind relatiile 8.72 si 8.73, si urmarind atent semnele lui n din relatia a doua de comutare din 8.71 (unde n este si negativ!), putem rescrie 8.71 in termeni continind numai operatorii α_n^I , definiti pentru $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} [a_m^I, (a_n^I)^\dagger] &= \delta_{IJ} \delta_{m,n} \\ [a_m^I, a_n^I] &= 0 \\ [(a_m^I)^\dagger, (a_n^I)^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (8.74)$$

Relatiile de mai sus sunt definitorii pentru operatorii de creare si anihilare ai oscilatorilor $n \geq 1$ de polarizare transversala I . Prin comparare directa cu ?? identificam deci a_m^I operatorul de anihilare cuantica asociat oscilatorului n si de polarizare I , iar $(a_m^I)^\dagger$ va fi operatorul sau de creare.

Cum ceilalti operatori ramasi, x_0^I si $\alpha_0^I \sim p^I$ adreseaza miscare stringului ca un tot (pozitia lui initiala, impulsul lui), vedem ca oscilatorii $n \geq 1$ descriu *stările excitate* ale stringului in care suntem interesati. Aceste stari excitate vor identifica diversele particule, de aceea ne oprim acum asupra lor.

8.3.3 Starile cuantice excitate ale stringului

Dupa cum am mentionat suntem acum interesati in starile excitate ale stringului open, care sunt create de operatorii $(a_m^I)^\dagger$ asociati oscilatiilor $n \geq 1$. Aceste stari excitate vor fi indentificate ca fiind diversele particule prezise de teorie (vezi Fig.8.12). Ne va interesa in special masa de repaus a acestor particule si modurile lor de polarizare.

Pentru a calcula masa particulelor corespunzatoare starilor excitate, sa introducem operatorul asociat masei, prin comparatie cu relatia clasica pentru masa de repaus ??:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - \sum_I p^I p^I \quad (8.75)$$

unde am folosit relatiile 8.46 pentru coordonatele + si - ale conului de lumina.

Asa cum am mentionat in sectiunea precedenta, avantajul parametrizarii conului de lumina este ca componenta - se obtine direct din componentele I prin relatiile 8.69, iar componenta + este triviala. Deasemenea, pentru simplitate, am considerat ca componenta impulsului p^+ , ce intra in definitia 8.50 este o *constanta*. In consecinta, trebuie doar sa calculam *operatorul* p^- si sa-l inlocuim in relatia precedenta. Aceasta se

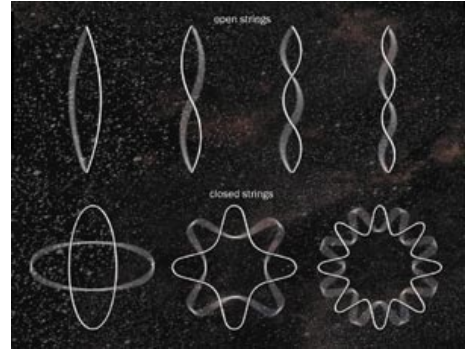


Figure 8.12: spectrum particule

face direct cu ajutorul relatiilor 8.65 si relatiei clasice 8.69 in care se calculeaza componentele -. In cazul *clasic*, vom obtine deci o valoare a impulsului p^- data de:

$$p^- = \frac{\alpha_0^-}{\sqrt{2\alpha'}} = \frac{1}{4\alpha' p^+} \sum_{p \in Z, I} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (8.76)$$

unde α_p^I sunt valorile clasice ale oscilatiilor, si *nu operatori*.

Sa ne reamintim acum ca la alegerea operatorilor avem mereu o libertate in plus, singura conditie fiind practic ca valorile proprii ce se masoara sa satisfaca relatiile clasice in limita $\hbar \rightarrow 0$ (vezi discutia din sectiunea ??). Cu alte cuvinte, cind alegem operatorul p^- , putem folosi in *fiecare termen* al dezvoltarii 8.76 fie ordinea *operatorilor* $\alpha_p^I \alpha_{-p}^I$ fie ordinea $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$. Acesti operatori vor fi diferiti, deoarece ei nu comuta intre ei (vezi relatia 8.71). Cu toate acestea, in limita clasica, ambele vor conduce la relatia clasica 8.76. Aceasta libertate de alegere a ordinii operatorilor in 8.76 este practic foarte diversificata, caci putem alege o infinitate de combinatii, cite una pentru fiecare termen $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$.

In analiza sistematica a teoriei stringului bosonic, toate aceste combinatii posibile se iau in calcul, si numai aceea care creeaza o teorie consistenta este aleasa. Din lipsa de spatiu, nu vom aborda aceasta constructie, ci vom alege o cale mai scurta care, chiar lipsita de o completa rigurozitate, conduce la solutia corecta.

Ideea este ca nu ne asteptam ca solutia finala sa contina o combinatie ciudata a ordinii operatorilor $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ ori $\alpha_p^I \alpha_{-p}^I$ pentru fiecare termen din suma 8.76. Datorita simetriei, combinatia finala va avea o forma simetrica deasemenea. Remarcind ca in relatia 8.76 scriind fie *toti termenii* in ordinea $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ fie toti termenii in ordinea $\alpha_p^I \alpha_{-p}^I$ obtinem aceasi lucru (pentru ca $p \in Z$), alegem ordinea tuturor termenilor data chiar de 8.76:

$$4\alpha' p^+(p^-) = \sum_{p \in Z, I} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (8.77)$$

unde in relatia de mai sus termenii α_p^I si $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ sunt *operatori*. Folosind relatiile de comutare 8.71, si relatia 8.65 avem atunci succesiv (Tot nu stiu daca sa pun suma la I sau sa zic clar la inceput si sa n-o mai pun deloc. E mai bine asa...):

$$\begin{aligned} 4\alpha' p^+(p^-) &= \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (8.78) \\ &= 2\alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \\ &= 2\alpha' p^I p^I + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\sum_{I=2}^{d=D-1} 1 \right) \end{aligned}$$

si deci masa de repaus (sa zic ca despre asta e vorba!) stringurilor in aceste stari excitate este:

$$M_1 = \sqrt{\frac{26 - D}{24\alpha'}} \quad (8.90)$$

La o prima vedere rezultatul este incurajator, pentru ca cel putin masa este reala si pozitiva pentru $D \leq 26$. Pe de alta parte, ordinul de marime al acestei mase este dat de aproximativ $M \sim 1/\sqrt{\alpha'}$. Folosind valoarea lui $\alpha' \sim \dots$ estimata in ??, obtinem valori ale maselor acestor prime excitatii $M \sim 10^{19} \text{ eV}$, de ordinul masei lui Plank, si multe ordine superioare ale maselor particulelor elementare (quarci, electroni, etc.).

Intrucit vrem ca teoria sa se aplice particulelor cunoscute (electroni, quarci, fotoni, etc.) vrem sa obtinem mase ale starilor excitate cu ... ordine de marime mai mici, altfel putem spune ca teoria cosntruita pina acum este inutila. Acest lucru se intimpla numai in cazul cind $D = 26$, cind obtinem $M_1 = 0$. Atunci teoria ar contine cel putin particule de masa nula, numite generic *fotoni* (generic, pentru ca sa ne amintim ca in Modelul Standard fotonul nu este o particula fundamentala, ci o combinatie a particulelor W si Z). Aceasta particula de masa nula apoi ar putea capata o masa putin diferita de zero (ca electronul) in alte situatii prin mecanisme aditionale.

Concluzionind, suntem aproape fortati in a presupune ca, pentru ca teoria sa poata fi aplicabila particulelor fundamentale observabile din Modelul standard, trebuie sa avem:

$$D = 26 \quad (8.91)$$

Vedem ca in acest caz Universul trebuie sa aiba *26 de dimensiuni*! Rezultatul acesta este confirmat de o analiza riguroasa a stringului bosonic open [? ? ?], in care se arata ca de fapt $D = 26$ este singura dimensiune in care teoria este consistenta!

In plus, remarcam o alta proprietate remarcabila a starii excitate $p = 1$, a carui particula i-am atasat generic denumire de *foton*. Astfel, cum $I = 2, 3, \dots, D - 1$ inseamna ca avem $D - 2$ astfel de moduri transversale de excitatie ale fotonului. In spatiu-timpul patru-dimensional fotonul acesta ar avea doar doua polarizari transversale, adica *exact atitea cite se observa experimental*! Faptul ca numarul acesta de polarizari se potriveste cu cel experimental este remarcabil, pentru ca pina acum nu am avut practic *nici un argument* care explica de ce observam experimental numai fotoni transversali, si nu si fotoni longitudinali sau temporali! Sa ne reamintim ca in procedura Gupta-Bleurer am luat acest fapt experimental dat pentru a pune restrictii asupra teoriei ⁵.

In final, observam ca starile excitate $p = 2$ (in spatiul de dimensiune $D = 26$ pe care trebuie sa-l avem) vor avea o masa $M_2 = \sqrt{2/\alpha'} \sim \dots$ foarte mare. Ca atare pe ele le putem neglija, spunind ca oricum stari de asemenea energie ridicata (data de masa de repaus $E_2 = M_2 c^2$) nu pot fi obtinute curind in laboratoarele noastre experimentale). Cu alte cuvinte asemenea stari excitate ale stringului pot exista, numai ca noi nu putem sa excitam stringul in asemenea stari in laboratoarele noastre.

Acest rezultat neplacut *submineaza* "asteptarea" noastra din sectiunea ??, unde am presupus ca diversele stari excitate ale stringului descriu particule elementare de diverse mase. Acest lucru nu se intimpla! Vedem ca de fapt nu putem utiliza decit prima stare excitata stringului, celelalte sunt inutilizabile! Acest lucru se va pastra de-a lungul diverselor forme ale teoriei stringului, in sensul ca nu putem utiliza in prima varianta decit

starile de masa nula. Nu trebuie insa sa eliminam in acest caz teoria, caci sunt citeva lucruri care ne pot ajuta. Astfel, exista posibilitatea ca in alte formulari ale teoriei starile de masa nenula sa fie foarte degenerate, si sa putem gasi apoi mecanisme aditionale (ca compactificarea dimensiunilor) care sa atribuia mase mici acestor stari.

	String bosonic open	String bosonic closed
dimensiunea spatiu-timpului D	26	26
ground state	tahion	tahion
prima stare excitata	foton	graviton
Nr polarizatii ale primei stari excitate	D-2	...
Particule	numai bosoni	numai bosoni

Figure 8.13: tabel-string-bosonic

Ne putem acum intreba daca starile cuantice ale stringului descriu fermioni ori bosoni. Raspunsul nu este trivial, si aceasta deoarece noi am folosit aici numai prima cuantificare pentru particule, si deci nu avem o teorie cuantica a cimpului pentru stringuri care sa ne dea imediat raspunsul. Cu toate acestea, caracterul fermionic sau bosonic al particulelor poate fi gasit in numarul sau de componente, si modul acestora de transformare. Astfel, remarcam cu usurinta ca starea de groundstate este *nedegenerata* si ca prima stare excitata $a_1^\dagger |0\rangle$ are caracter *vectorial*, in care insa numai polarizatiile transversale sunt vizibile. In termeni tehnici, reamintindu-ne discutia din ?? referitoare la conexiunea spin-statistica, spunem atunci ca starea de groundstate descrie o particula scalara, ce nu are componente, si deci spinul ei este zero, particula fiind deci un *boson*. Pe de alta parte, prima stare excitata se transforma ca un vector, si deci are spinul 1 ⁶ si este tot un *boson*. In acelasi fel, *toate starile cuantice ale stringului sunt bosoni*, de unde si numele folosit in aceasta sectiune de *string bosonic*.

Rezultatele pe care le-am obtinut aici pentru starile cuantice ale stringului bosonic open le recapitulam in tabelul 8.13. In acest tabel includem si starile excitate ale stringului bosonic closed, desi pentru acesta nu am efectuat nici un fel de calcule.

Observam astfel ca pentru stringul bosonic open am obtinut un rezultat *pozitiv* prin identificarea primei sale stari excitate cu fotonul, prezicind corect si numarul de polarizatii ale sale, dar ca avem un rezultat *negativ* prin prezenta tahionului in teorie. Acelasi lucru se intimpla si la stringul bosonic closed, unde teoria prezice corect *gravitonul* (particula cuantica purtatoare a interactiei gravitationale), cu numarul sau de polarizatii, dar include deasemenea tahionul. In plus ambele teorii de string bosonic au dezavantajul ca prezic *numai* bosoni si nu fermioni, si au nevoie de un spatiu-timp de 26 de dimensiuni ca sa functioneze corect!

Enumereaza elementele pozitive:

1. fotonul cu polarizarea sa
2. gravitonul cu polarizarea sa

Enumereaza elementele negative sau surprinzatoare:

1. tahionul
2. numai bosoni
3. 26 de dimensiuni
4. doar doua particule sunt prezise (fotonul si gravitonul): celelalte excitatii au masa mult prea mare.

⁵verifica aceste asertiuni puternice!

⁶Asa e? Alta argumentatie mai buna?

Prezenta unui spatiu-timp de 26 de dimensiuni nu anuleaza corectitudinea teoriei. Astfel, putem presupune ca celelalte 22 de dimensiuni sunt foarte mici si deci inobservabile inca pentru aparaturile noastre experimentale. Desigur ca aceasta complica lucrurile, pentru ca un astfel de spatiu-timp nu va mai fi Minkovski, dar nu exclude aceasta posibilitate, iar pe de alta parte poate aduce alte avantaje, cum ar fi o mica masa nenula⁷ pentru stringul closed (vezi sectiunea ??).

Sumarizind, vedem ca teoria stringului bosonic prezice citeva lucruri remarcabile, dar contine inca imperfectiuni. O parte din aceste imperfectiuni se indeparteaza daca teoaria stringului bosonic se face mai complexa, devenind teoria *superstringului*, asa cum vom vedea in sectiunea urmatoare. Aceasta imbunatatire va rezulta insa pe seama cresterii complexitatii teoriei, si a introducerii unor presupuneri aditionale.

8.4 Superstringul open

In primele doua sectiuni am discutat stringul bosonic. Am vazut astfel ca, asa cum ii spune si numele, principalul lui *dezavantaj* este ca poate descrie numai particule bosonice, si nu fermioni.



Figure 8.14: superstring-artistic

Pentru a putea descrie si fermioni, fizicienii au venit cu o constructie mai complexa, care se numeste *superstring*. Practic, un superstring este stringul bosonic caruia i se adauga doua oscilatii aditionale pe lungimea lui (vezi Fig. 8.14). Aceste oscilatii sunt insa intrinseci, cu alte cuvinte nu au de-a face cu oscilatia formei stringului. In plus ele sunt descrise clasic prin variabile anticomutative.

8.4.1 Introducerea fermionilor. Ecuatiile de miscare. Doua sectoare

Este obisnuit sa se porneasca de la lagrangeanul stingului bosonic intr-un gauge care se numeste "conformal gauge". Aici practic actiunea stringului bosonic se scrie:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu \quad (8.92)$$

Nu vom intra in detaliile acestei parametrizari, dar amintim numai ca se pot alege multe parametrizari in asa fel incit lagrangeanul 8.5 sa se scrie exact sub forma de mai sus, printre care si light-cone gauge. In particular, forma de mai sus este triviala pentru light-cone gauge, asa cum se vede daca se inlocuiesc 8.54 si 8.56. Alegerea lui conformal gauge este utila in punerea in evidenta a supersimetriei, asa cum vom vedea mai tirziu.

Apoi la forma 8.92 se adauga termenul ce descrie oscilatiile fermionice aditionale pe string:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu - \mathbb{B} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu) \quad (8.93)$$

unde $\rho = 0, 1$. In plus, fata de forma 8.5 se vede ca am folosit $2\alpha' = 1$ (Acum il scriu asa, ca la green, dar apoi baga-l la loc peste tot). Poate pare ciudat ca am adaugat termenii corespunzatori lui ψ^μ intr-o forma a lagrangeanului care deja este exprimata intr-un gauge anume, si la forma generala 8.5. Dada daca am fi utilizat insa termenul general 8.5, si am fi folosit diferitele constrangeri necesare, am fi ajuns tot la forma de mai sus.

Primul termen din lagrangeanul 8.97 descrie evolutia stringului bosonic asa cum a fost el studiat in primele doua sectiuni. Practic el ne da pozitia stringului in spatiu, prin coordonatele $X^\mu(\tau, \sigma)$. Miscarea acestui string in spatiu-timp formeaza un worldsheet, asa cum este prezentat in Fig.8.15.

Termenul al doilea din 8.97 descrie miscarea oscilatiilor fermionice aditionale de-a lungul stringului, specifice superstringului. Functia $\psi(\tau, \sigma)$ este aici *reala* (nu complexa), o matrice coloana cu doua linii:

$$\psi^\mu(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu(\tau, \sigma) \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) \end{pmatrix} \quad (8.94)$$

Vedem ca in acest fel fiecare punct de pe worldsheet este descris in plus fata de pozitia lui $X^\mu(\tau, \sigma)$, de catre doi vectori aditionali $\psi_-^\mu(\tau, \sigma)$ si $\psi_+^\mu(\tau, \sigma)$.

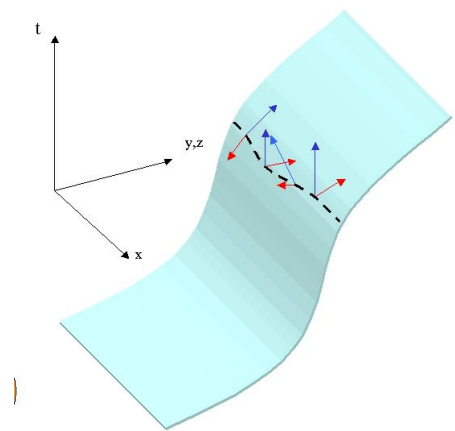


Figure 8.15: superstring-actiune

Pe de alta parte, prin comparatie cu ecuatiile lui Dirac ??, acest termen secund este ales in asa fel incit el sa descrie ecuatiile lui Dirac intr-o dimensiune! (este intr-una?) Matricile lui Dirac ρ folosite aici vor trebui sa satisfaca o relatie asemanatoare cu ??:

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta^{\alpha, \beta} \quad (8.95)$$

Ca si in cazul ecuatiei lui Dirac ??, si aici sunt posibile mai multe alegeri pentru ρ^α . Noi vom folosi aici alegerea:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{B} \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.96)$$

Observam atunci ca actiunea 8.97 descrie practic fermioni pe string, si nu este inca evident cum stringul ca o totalitate se

⁷verifica!

va comporta ca un fermion! In finalul prezentarii actiunii 8.97 mentionam ca $\bar{\psi}$ este definit sub forma obisnuita (??? 3.2.2 la Kaku!) $\bar{\psi}^\mu = \psi^\mu \rho^0$.

Ecuațiile de miscare pentru oscilatiile ψ^μ se pot deduce observind ca in forma 8.97 partea fermionica ψ^μ a actiunii este separata de cea bosonica X^μ . Sa incercam atunci sa calculam o variatie infinitezimala a celui de-al doilea termen al actiunii 8.97:

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\mathbb{B} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu) \quad (8.97)$$

Folosind $\delta(\partial_\alpha \psi_\mu) = \partial_\alpha(\delta\psi_\mu)$ avem, pe rind:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{B} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu) &= \mathbb{B}(\delta\bar{\psi}^\mu) \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \mathbb{B} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha(\delta\psi_\mu) \\ &= \mathbb{B}(\delta\bar{\psi}^\mu) \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \partial_\alpha(\mathbb{B} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \delta\psi_\mu) - \mathbb{B}(\partial_\alpha \bar{\psi}^\mu) \rho^\alpha (\delta\psi_\mu) \end{aligned}$$

Se poate verifica imediat ca primul si al treilea termen au valori absolute identice, dar semn opus (arata, sau dai exercitiu). Folosind si faptul ca termenii $\alpha = 0, 1$ sunt asociati lui τ si σ (adica $\partial_0 = \partial_\tau$, si $\partial_1 = \partial_\sigma$), si dezvoltind suma dupa α , o variatie infinitezimala a actiunii 8.97 se scrie ca:

$$\begin{aligned} \delta S_f &= \frac{2\mathbb{B}}{2\pi} \int d^2\sigma (\delta\bar{\psi}^\mu) \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - \quad (8.98) \\ &+ \frac{\mathbb{B}}{2\pi} \int d\sigma [\bar{\psi}^\mu \rho^0 \delta\psi_\mu]_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} + \frac{\mathbb{B}}{2\pi} \int d\tau [\bar{\psi}^\mu \rho^1 \delta\psi_\mu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \end{aligned}$$

Coform principiului actiunii clasice, variatia δS_f trebuie sa fie nula la *orice* variatie infinitezimala $\delta\psi_\mu$. Acest lucru se intimpla numai daca coeficientul lui $\delta\psi_\mu$ din primul termen este mereu nul. Obtinem deci din primul termen ecuatia de evolutie a oscilatiilor $\psi_\mu(\tau, \sigma)$:

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu = 0 \quad (8.99)$$

Scriind aceasta relatie pentru cele doua componente $+$ si $-$ din 8.94, si folosind forma 8.96 pentru matricile ρ^α , obtinem ecuațiile:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_+ &= 0 \\ (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_- &= 0 \end{aligned} \quad (8.100)$$

Vedem ca in reprezentarea conformala (?) aceste solutii au o reprezentare foarte simpla. Astfel, functia $\psi_+(\tau, \sigma)$ descrie oscilatii ondulatorii ce se deplaseaza numai intr-o directie, iar $\psi_-(\tau, \sigma)$ oscilatii ondulatorii ce se deplaseaza in directia opusa!

Pe de alta parte, variatia 8.98 a actiunii nu este inca nula, pentru ca mai avem doi termeni. Al doilea termen nu pune probleme, pentru ca il vom trata ca in cazul general al variatiei actiunii: vom presupune ca variatiile termenilor in situatiile initiale si finale sunt nule. Cu alte cuvinte, alegem variatia $\delta\psi^\nu$ in asa fel incit ea sa fie nula in momentul initial si final $\delta\psi^\nu(\tau_i, \sigma) = \delta\psi^\nu(\tau_f, \sigma) = 0$, si termenul al doilea va fi nul.

Pentru al treilea termen din 8.98 trebuie sa punem conditii de capat pentru string, alegind relatii pentru functiile $\psi^\nu(\tau, 0)$ $\psi^\nu(\tau, \pi)$ in asa fel incit si acest de-al treilea termen sa fie nul. Ca si pentru stringul liber, conditiile de capat le alegem noi, numai ca acum acestea nu par a fi asa de evidente. Inlocuind relatia $\bar{\psi}^\mu = \psi^\mu \rho^0$, anulara acestui de-al treilea termen se reduce la (covarianta!):

$$[\psi_+^\mu \delta\psi_{\mu+} - \psi_-^\mu \delta\psi_{\mu-}]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0 \quad (8.101)$$

⁸verifica!

Deoarece avem de-a face cu un open string, putem alege conditii de capat in asa termenul de sus sa se anuleze la fiecare capat $\sigma = 0$ si $\sigma = \pi$. Din 8.101, aceasta se reduce la relatia $\delta\psi_{\mu-}^2 = \delta\psi_{\mu-}^2$ pentru fiecare capat separat. Pentru capatul $\sigma = 0$ putem alege conditia de capat:

$$\psi_+(\tau, 0) = \psi_-(\tau, 0) \quad (8.102)$$

Atunci, chiar cind folosim variatiile $\delta\psi_{\mu+}$ si $\delta\psi_{\mu-}$ suntem obligati sa respectam conditia de mai sus la capatul $\sigma = 0$. Cu alte cuvinte, vom avea si $\delta\psi_+(\tau, 0) = \delta\psi_-(\tau, 0)$, si se vede atunci termenul din 8.101 va fi nul pentru $\sigma = 0$.

Ne putem intreba desigur de ce alegerea 8.102 si nu alta. Ea se justifica prin aceea ca alegerea unui "overall sign" intre $\psi_{\mu+}$ si $\psi_{\mu-}$ rezulta in aceleasi evolutii, si ca atare putem spune ca am absorbit acest semn in capatul $\sigma = 0$.

Pentru capatul $\sigma = \pi$ alegerea unei constante de proportionalitate diferite va face o diferenta cruciala pentru evolutia teoriei superstringurilor. Astfel, exista doua posibilitati care produc termenul din 8.101 nul:

$$R : \psi_+(\tau, \pi) = \psi_-(\tau, \pi) \quad (8.103)$$

$$NS : \psi_+(\tau, \pi) = -\psi_-(\tau, \pi) \quad (8.104)$$

In ambele situatii, daca impunem aceste conditii ele vor trebui indeplinite si de variatiile $\delta\psi_{\mu+}$ si $\delta\psi_{\mu-}$ (ca si mai devreme), si termenul din 8.101 va fi nul la capatul $\sigma = \pi$.

Cele doua alegeri 8.103 definesc doua posibile tipuri de solutii ale superstringului, care se spune ca sunt in doua sectoare: primul sector este *Ramond* (R) iar cel de-al doilea sector este *Neveu-Schwarz* (NS). Diferenta dintre acestea doua o putem anticipa acum, spunind ca unul dintre sectoare va genera fermionii iar celalalt bosonii.

In finalul acestei sectiuni scriem solutiile ecuatiei undelor care verifica conditiile de capat alese 8.102 si 8.103, acestea putind fi verificate imediat.

Pentru sectorul *R* acestea sunt:

$$\psi_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (8.105)$$

$$\psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

unde $n \in \mathbb{Z}$ iar, d_n^μ sunt niste constante complexe. Deoarece functia ψ^μ a fost aleasa reala (de ce?), in teoria clasica intre aceste constante trebuie sa existe o relatie asemanatoare 8.65: $d_{-n}^\mu = (d_n^\mu)^*$.

Pentru sectorul *NS* avem:

$$\psi_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)} \quad (8.106)$$

$$\psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}$$

unde de data aceasta r ia numai valori "jumătate de întreg": $r = n + 1/2$, cu $n \in \mathbb{Z}$. Aceasta ne asigura obtinerea semnului minus in 8.103. In plus, ca si pentru sectorul *R* avem $b_{-r}^\mu = (b_r^\mu)^*$.

Datorita supersimetriei exista si o libertate in a alege o transformare de etalonare pentru ψ^μ . Se poate arata in parametrizarea conului de lumina ca aceasta implica posibilitatea alegerii unei transformari de etalonare pentru care $\psi^+ = 0$. In plus, nu numai X^- dar si ψ^- se pot calcula acum functie de restul componentelor transversale. *Nu vom face calculul* (de fapt nu e mult, dar ar lua inca cel putin o pagina jumate. S-o fac?) acesta aici, ci vom prezenta direct rezultatul clasic care ne intereseaza in cele doua sectoare:

$$\begin{aligned} \text{NS: } \alpha_0^- &= \frac{1}{2p^+} \left(\sum_m \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_{r \in Z + \frac{1}{2}} |r| b_{-r}^I b_r^I \right) \\ \text{R: } \alpha_0^- &= \frac{1}{2p^+} \left(\sum_m \alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \sum_{n \in Z} |n| d_{-n}^i d_n^i \right) \end{aligned} \quad (8.107)$$

In relatia de mai sus am pus $|r|$ cu minuta mea, fara sa verific, caci fara modul termenul clasic cu r ar fi dat zero! Dar era si la α tot $|n|$ daca am fi folosit operatorii a . Confirma asta. Relatia aceasta este o extensie directa a relatiei 8.69, unde s-a folosit alegerea $\alpha' = 1/2$.

8.4.2 Cuantificare. Sectorul NS

Pentru inceput in sa scriem relatiile de comutare ce se obtin in urma cuantificarii superstringului. Astfel, in light-cone gauge, cuantificam numai ⁹ coordonatele transversale X^I si ψ^I . Relatiile de comutare pentru coordonatele X^I sunt date de 8.70 ¹⁰. Aceasta conduce automat la aceleasi relatii 8.71 pentru operatorii α_m^I .

Acum in sa impunem si conditii de comutare pentru operatorii ψ^I (cei transversali), dati de relatiile 8.105 pentru sectorul R si 8.111 pentru sectorul NS:

$$\{\psi_A^I(\tau, \sigma), \psi_A^J(\tau', \sigma)\} = \pi \delta(\sigma - \sigma') \delta_{IJ} \quad (8.108)$$

Folosind 8.105 si 8.106 se arata ca ei conduc la urmatoarele relatii de comutare:

$$\begin{aligned} \text{Sector NS: } \{b_r^I, b_s^I\} &= \delta_{r+s} \\ \text{Sector R: } \{d_m^I, d_n^I\} &= \delta_{m+n} \end{aligned} \quad (8.109)$$

In plus, faptul ca functia ψ^μ este reala conduce cum am vazut in 8.105 si 8.106 la $b_{-r}^\mu = (b_r^\mu)^*$ si $d_{-n}^\mu = (d_n^\mu)^*$ pentru valorile clasice. Aceasta se reduce la relatia pentru operatori:

$$b_{-r}^\mu = (b_r^\mu)^\dagger; \quad d_{-n}^\mu = (d_n^\mu)^\dagger \quad (8.110)$$

Incepem cu sectorul NS^{11} , si scriem pentru inceput masa clasica a stringului data de 8.75, folosind 8.111 (si alegerea $2\alpha' = 1$):

$$M_{NS}^2 = 2p^+ \alpha_0^- - \alpha_0^I \alpha_0^I = \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_r |r| b_{-r}^I b_r^I$$

Ca si in cazul stringului bosonic, vom incerca sa transformam relatia de mai sus intr-un operator, si tot ca in cazul stringului

bosonic vedem ca avem libertatea in a alege ordinea operatorilor $\alpha_{-m}^I \alpha_m^I$ si $b_{-r}^I b_r^I$. Daca din relatia de comutare 8.71 vedem ca in loc $\alpha_{-m}^I \alpha_m^I$ putem folosi $\alpha_{-m}^I \alpha_m^I$, din relatia de comutare 8.109 vedem ca in loc de $b_{-r}^I b_r^I$ putem folosi $-b_{-r}^I b_r^I$. Ca si in cazul stringului bosonic, incercam sa folosim o forma care este *simetrica* la schimbarile de variabile $m \rightarrow -m$ si $r \rightarrow -r$. Luind in calcul observatiile precedente, aceasta se scrie pentru operatori ca

$$M_{NS}^2 = \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_r r b_{-r}^I b_r^I$$

Folosind relatiile de comutare 8.71 si 8.109, avem acum succesiv:

$$\begin{aligned} M_{NS}^2 &= \sum_{m=1} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \alpha_m^I \alpha_{-m}^I) + \sum_{r=1/2} (r b_{-r}^I b_r^I - r b_r^I b_{-r}^I) \\ &= \sum_{m=1} (2\alpha_{-m}^I \alpha_m^I + [\alpha_m^I, \alpha_{-m}^I]) + \sum_{r=1/2} (2r b_{-r}^I b_r^I - r \{b_r^I, b_{-r}^I\}) \\ &= \sum_{m=1} (2\alpha_{-m}^I \alpha_m^I + m(D-2)) + \sum_{r=1/2} (2r b_{-r}^I b_r^I - r(D-2)) \end{aligned}$$

Suma care apare dupa r (definita de "Hurwitz zeta function"), se poate calcula folosind 8.84, rezultand in:

$$\begin{aligned} \sum_{r=N+1/2} r &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots = \frac{1}{2} (1 + 3 + 5 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} [(1 + 2 + 3 + 4 + \dots) - (2 + 4 + 6 + \dots)] \\ &= \frac{1}{2} [\zeta(-1) - 2\zeta(-1)] = -\frac{1}{2} \zeta(-1) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Inlocuind in 8.111 obtinem in final formula operatorului de masa pentru superstring:

$$M_{NS}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{m=1} m a_m^{I\dagger} a_m^I + \sum_{r=1/2} r b_r^{I\dagger} b_r^I - \frac{D-2}{16} \right)$$

Comparind acesta formula cu 8.85 observam ca fata de stringul bosonic avem pentru inceput doua diferente evidente: excitatiile fermionice $b_r^{I\dagger}$ contribuie la masa superstringului, iar constanta din dreapta este diferita. Termenul $n_r^I = b_r^{I\dagger} b_r^I$ este din nou numarul de fermioni din starea r , numai ca acum acesta nu poate lua decit valorile 0 si 1.

Starea de ground state o stringului NS^{12} se obtine cind nici oscilatia a (de "unduire" a stringului), nici oscilatia fermionica descrisa de b_r^I nu sunt excitate. In aceasta stare ground state $|0 >$ masa stringului este data de:

$$M_0 = \beta \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \sqrt{\frac{D-2}{16}} \quad (8.111)$$

si deci este imaginara, ca si in cazul stringului bosonic. Ea descrie deasemenea un *tahion*.

Prima stare excitata se obtine excitind fermionul $b_{1/2}^I$, datorita factorului $r = 1/2$ care apare in suma. Ea se scrie simbolic $|1, I > = (b_{1/2}^I)^\dagger |0 >$ si va avea o masa:

$$M^2 |1, I > = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} - \frac{D-2}{16} \right) |1, I > \quad (8.112)$$

¹²sunt deranjat de formula 3.2.32 din green care da alt rezultat pentru masele starilor, pentru ce este ea? Rezultatul meu este verificat cu mohaupt.pdf

⁹verifica

¹⁰vezi ce e cu π si cu α' , ca difera

¹¹Calculul de mai jos este din ploeger.pdf, dar el este confirmat indirect si de kreuzer.pdf pagina 40 si de schwarz pag.28. Argumentarile lipsesc in sa.

Occupation	Mass	State
$N = 0$	$\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}$	$ k\rangle$
$N = \frac{1}{2}$	$\alpha' M^2 = 0$	$b_{-1/2}^\mu k\rangle$
$N = 1$	$\alpha' M^2 = \frac{1}{2}$	$b_{-1/2}^\mu b_{-1/2}^\nu k\rangle$ $\alpha_{-1}^\mu k\rangle$
$N = \frac{3}{2}$	$\alpha' M^2 = 1$	$b_{-1/2}^\mu b_{-1/2}^\nu b_{-1/2}^\rho k\rangle$ $\alpha_{-1}^\mu b_{-1/2}^\nu k\rangle$ $b_{-3/2}^\mu k\rangle$

Figure 8.16: Din mohaupt.pdf. Spune ca starea $|k\rangle$ nu este degenerata.

Ca si in cazul stringului bosonic, putem alege diverse dimensiuni D ale Universului. Daca $D > 10$ relatia de sus ne spune ca si aceasta stare excitata va fi tahionica. Daca $D < 10$ vedem ca masa starii este pozitiva si reala, dar valoarea este de ordinul $1/\sqrt{\alpha'} \sim 10^{19} eV$, si deci prea mare pentru a putea descrie particulele reale. De aceea si in acest caz, vedem ca exista o singura valoare $D = 10$ pentru care masa primei stari excitate este nula. Ca si inca cazul stringului bosonic, numai in acest caz avem sansa de a construi o teorie in care masele particulelor descrise de *superstring* se apropie de "range-ul" maselor particulelor reale. Ca atare putem spune ca, in cazul *superstringului*, dimensiunea necesara a Universului este $D = 10$!:

$$D = 10 \quad (8.113)$$

Teoria superstringului open necesita deci un alt numar de dimensiuni al Universului decit teoria stringului bosonic! Numai in acest caz prima stare excitata descrie particule de masa nenula, pe care le denumim din nou generic *fotoni*. Vedem ca acestea au acelasi numar $D - 2$ de polarizatii transversale posibile I ca si in cazul stringului bosonic, si ca acestea este intr-adevar numarul de polarizatii pe care ne asteptam sa-l observam experimental (pentru Universul nostru cu $D = 4$ obtinem $D - 2 = 2$).

A doua stare excitata se obtine fie prin excitarea oscilatiilor α_n^I , fie prin doua excitatii ale oscilatiilor fermionice b_r^I . Ambele insa dau o masa mare $M = 1/\sqrt{\alpha'} \sim 10^{19} eV$ care le "arunca" dincolo de interesul nostru direct in descrierea particulelor elementare. In tabelul sumarizam stările cuantice ale superstringului in sectorul NS .

Sa analizam acum caracterul bosonic sau fermionic al stărilor. Astfel, vedem din tabelul 8.16 ca starea de ground state nu este degenerata. Ca si in cazul stringului bosonic, aceasta ne spune ca aceasta descrie o *particula scalara*, de spin zero, si deci un *boson*. Urmatoarea stare excitata din 8.16 este fotonul, care se comporta *vectorial* in Universul de 10 dimensiuni, si ca atare ea trebuie sa fie tot un *boson*, precum in cazul stringului bosonic.

In fond, toate stările excitate ale sectorului NS se comporta vectorial or tensorial, deoarece se obtin prin inmultirea mai multor operatori vectoriali, si ca atare toate aceste stări descriu bosoni. Aceasta este oarecum surprinzător, daca stim ca am

pornit de faptul ca operatorii $b_r^{I\dagger}$ creeaza fermioni pe suprafata worldsheetului. Cu toate acestea insa, fiecare operator $b_r^{I\dagger}$ nu face decit sa contribuie cu valoare de $1/2\alpha'$ la masa particulei descrisa de string care se misca in 10 dimensiuni, inasa particula in sine se va transforma ca un produs de vectori (un tensor), si deci ea se comporta ca un boson in 10 dimensiuni. Ajungem astfel la concluzia ca particulele descrise de superstring in sectorul NS sunt toate *bosoni*.

8.4.3 Sectorul R

Un calcul pentru operatorul de masa in sectorul R se efectueaza asemanator cu cel pentru sectorul NS , pornind tot de la formula 8.111. Operatorul de masa al superstringului ia atunci o forma asemanatoare 8.111. In cursul asezarii operatorilor in ordinea normala, suma $\sum_m$ dupa m anuleaza suma $\sum_n$, si ca atare constanta din termenul masei va dispărea:

$$M_R^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{m=1} m \alpha_m^{I\dagger} \alpha_m^I + \sum_{n=0} n d_n^{I\dagger} d_n^I \right) \quad (8.114)$$

Vedem ca in acest caz masa stării "ground state" este nula. Cu alte cuvinte, *tahionul* a disparut! Acest lucru este extrem de incurajator. In schimb starea de "ground-state" este acum *degenerata*. Intr-adevar, datorita operatorului d_0^I , care nu apare in operatorul de masa, vedem ca si starea $d_0^{I\dagger} |0\rangle$ are tot masa nula.

Occupation	Mass	State
$N = 0$	$\alpha' M^2 = 0$	$ a\rangle$
$N = 1$	$\alpha' M^2 = 1$	$d_{-1}^\mu a\rangle$ $\alpha_{-1}^\mu a\rangle$

Figure 8.17: Din mohaupt.pdf. Spune ca starea $|a\rangle$ este degenerata

Si prima stare excitata este degenerata, caci ea poate provine fie de la oscilatia superstringului α_1^I , fie de la excitatia fermionica d_1^I , ambele aducind un factor de 1 in relatia 8.114. Pe de alta parte, toate stările excitate au acum mase foarte mari $M = 1/\sqrt{\alpha'} \sim 10^{19} eV$, si deci nu ar fi inca observabile experimentale. Un sumar al diverselor stări ale superstringului in sectorul R este prezentat in tabelul 8.17.

Ne mai ramine de discutat in ce masura stările cuantice din tabelul 8.17 descriu fermioni sau bosoni. Astfel, starea de ground state este degenerata (vezi tabelul 8.17), si deci particula descrisa de superstring *nu* mai este un scalar ca in cazul sectorului NS . O idee despre forma acesteia ne putem face urmarind relatia de comutare pentru operatorii d_0 . Vom scrie inasa aici nu relatia 8.109 de comutare pentru componentele transversale, ci relatia de comutare daca am fi incercat sa cuantificam sistemul covariant, ca la Gupta-Bleuler:

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu,\nu} \quad (8.115)$$

Practic, avem de-a face cu 10 operatori d_0^μ , cite unul pentru fiecare componenta μ , care trebuie sa indeplineasca o relatie similara cu cea gasita la ecuatiei lui Dirac ??!. Este clar atunci ca acesti operatori nu mai pot actiona asupra unor stari scalare simple, cum a fost cazul operatorilor din sectorul NS , care actionau asupra groundstatului scalar $|0\rangle$. Practic, este aceeași problema pe care a avut-o si Dirac cind a cautat 4 operatori γ^μ care sa indeplineasca conditia ?? similara celei de mai sus: el a trebuit sa aleaga o *matrice* coloana de 4 dimensiuni pentru stările sistemului, in asa fel incit sa poata gasi *matrici* 4 dimensionale γ^μ care sa verifice relatiile ??!. Vedem astfel ca, datorita relatiei 8.115 avem aceeași problema ca si Dirac, numai ca acum in 10 dimensiuni.

Solutia acestei probleme este inasa practic aceeași. In teoriile matematice, se arata ca exista 10 matrici Γ^μ *reale* de 32×32 elemente, care actioneaza pe matrici coloana de 32 de elemente, si care indeplinesc relatiile:

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = \eta^{\mu,\nu} \quad (8.116)$$

In practica matricile Γ^μ se asimileaza operatorilor d_0^μ pina la o constanta $d_0^\mu \sim \Gamma^\mu$ ¹³. Pe de alta parte, acest lucru este benefic pentru noi, caci inseamna ca starea de ground state este o matrice coloana de 32 de elemente, si deci este intrinsec degenerata, asa cum ne dorim pentru sectorul S . Mai mult inasa, faptul ca ea se supune regulilor de transformare pentru matricile Γ^μ , inseamna ca matricea de 32 de coloane este de fapt un *spinor*, si ca atare particula descrisa de superstringul in starea de groundstate este un *fermion* (intr-un mod asemanator cum ecuatiei lui Dirac descrie fermioni).

Mai mult inasa, stările excitate se obtin in sectorul R prin aplicarea unor operatori vectoriali, α_n ori d_n asupra stării de ground state care este un spinor. Rezultatul este ca aceste stări excitate vor descrie tot fermioni. Practic este ca si cum am spune ca fiecare operator corespunzator componentei I , α_n^I sau d_n^I , nu face decit sa creeze un alt spinor (deci tot un fermion). Acesta va descrie un fermion de alta masa, conform 8.114. Vedem deci ca toate particulele descrise de sectorul R sunt deci *fermioni*.

8.4.4 Supersimetria, Proiectia GSO

Actiunea 8.97 are o simetrie interna. Astfel, la o matrice ϵ oarecare, ea ramine invarianta la transformarea:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \delta \psi^\mu &= \mathbb{B} \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \end{aligned} \quad (8.117)$$

Transformare de mai sus se numeste de *supersimetrie*. Vedem ca practic ea amesteca coordonatele bosonice X^μ cu cele fermionice ψ^μ , si ca este o generalizare a relatiilor ?? pentru particula supersimetrica¹⁴. Aceasta ne spune ca sistemul este supersimetric pe suprafata 2-dimensională a worldsheetului, dar aceasta nu inseamna autamat ca superstringul se va comporta ca o particula supersimetrica in Universul de 10 dimensiuni.

De fapt putem vedea ca superstringul nu descrie inca particule supersimetrice daca privim tabelele 8.17 si 8.16. Astfel, sectorul NS descrie bosoni de mase multipli intregi de $1/(2\alpha')$, pe cind sectorul R descrie numai fermioni a caror mase sunt multipli intregi de $1/(\alpha')$. Cu alte cuvinte, exista in teorie bosoni care nu isi au echivalent fermioni avind aceeași masa! Teoria nu este deci supersimetrica.

Pentru a face teoria supersimetrica in 10 dimensiuni, avem nevoie de inca un ingredient, care se numeste *proiectia GSO*

(dupa numele fizicienilor Gliozzi, Scherk si Olive care au propus mecanismul). Acesta consta practic in selectarea numai anumitor stări din multitudinea oferite de cele doua sectoare. Procedul, desi pare artificial, este inasa justificat matematic intr-o analiza riguroasa¹⁵.

O prima parte a acestei selectii o putem intui imediat din observatia precedenta asupra maselor. Astfel, conform procedurii *GSO*, trebuie sa eliminam automat din sectorul NS stările care nu au mase multipli intregi $1/(\alpha')$. Privind putin relatia 8.111, aceasta inseamna practic eliminarea tuturor stărilor care au *multipli pari* de operatori b_r^I , si considerarea stărilor fizice observabile doar a celor care ramın. Aceasta eliminare ne aduce un bonus neasteptat: starea *tahionica* de ground state este automat *eliminată*, pentru ca are un numar par (zero) de operatori b_r^I !

Atunci putem presupune ca teoria pe care o cautam contine stările cuantice ale superstringurilor din sectorul NS si superstringuri din sectorul R , toate avind mase multipli intregi de $1/\alpha'$. In acest caz, cel putin fiecarui boson ii corespunde un fermion de aceeași masa, si invers, ca si inc azol teoriilor supersimetrice. In plus, starea tahionica de ground state a disparut.

Dar procedura *GSO*, nu se opreste aici, pentru ca o simpla numaratoare a gradelor de libertate arata ca acestea nu satisfac supersimetria, unde gradele de libertate trebuie sa fie egale pentru bosonii si fermionii parteneri. Astfel, in sectorul NS fotonul devine noul ground state, avind masa nula si 8 grade de libertate (polarizatiile transversale). Pe de alta parte, groundstate-ul din sectorul R ar parea ca are intr-o prima faca 32 grade de libertate, cite elemente au matricile coloana¹⁶. Cu toate acestea, particulele descrise de aceste matrici trebuie sa se supuna ecuatiei lui Dirac, care practic injumatateste¹⁷ gradele de libertate la 16. Acestea sunt isa inca duble fata de cele ale bosonilor.

	Sector NS (bosoni)		Sector R (fermioni)	
Groundstate M=0	$b_{1/2}^{I^*} 0\rangle$	8 grade de libertate	$ 0\rangle$ degenerata 8 grade de libertate numai o chiralitate	
$M = \frac{1}{\alpha'}$	$b_{1/2}^{I^*} b_{1/2}^{I^*} b_{1/2}^{I^*} 0\rangle$: $\alpha_i^{I^*} b_{1/2}^{I^*} 0\rangle$: $b_{3/2}^{I^*} 0\rangle$:	$C_0^3 = 56 g.I$ $8*8 = 64 g.I$. $C_8^3 = 8 g.I$. total=120 grade de libertate	$d_i^{I^*} 0\rangle$: $8*8 = 64 g.I$. $\alpha_i^{I^*} 0\rangle$: $8*8 = 64 g.I$. total=120 grade de libertate	

Figure 8.18: tabel-superstring-GSO

In acest caz prescriptia *GSO* este de a alege din sectorul R numai acele stări care au o anumita *chiralitate*!. Astfel, dupa cum stim din discutia din ?? despre muoni, chiralitatea este o proprietate exacta numai a particulelor de masa nula, si deci se aplica groundstate-ului din sectorul R . Tot prin analogie cu ecuatiea lui Dirac, chiralitatea este descrisa de operatorul $\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9$ pentru care avem $\Gamma^{11} = 1$. Acesta nu poate lua decit valorile proprii $+1$ si -1 , ce descriu cele doua chiralitati posibile. Daca alegem componentele groundstate-ului de a numita chiralitate, inseamna ca selectam din cele 16 grade de

¹⁵Sau nu este inca?

¹⁶Pentru ca matricile Γ pot fi alese reale, altfel pentru matrici complexe ar fi fost 64 de grade de libertate!

¹⁷De ce? Cum se vede clar?

¹³Verifica!

¹⁴sa zic ca istoric supersimetria particulei a fost construita inspirata fiind de supersimetria stringului

libertate doar 8. In felul acesta avem ca si groundstate-ul din cele doua sectoare au acelasi numar de grade de libertate, asa cum cere supersimetria!

In plus, chiralitatea este utila in mod practic. Astfel, am vazut in sectiunea ?? ca numai neutrinii de o anumita chiralitate (si anume left handed ¹⁸) sunt observati in experiment. Eliminind deci din sectorul R anumiti fermioni massless de o chiralitate anume, avem sansa de a construi o teorie care sa satisfaca si aceasta cerinta experimentală.

Selectionarea starilor din sectorul R nu se face inasa numai pentru ground state, dar si pentru starile excitate ¹⁹. Acestea sunt alese (vezi hooft.pdf) intr-un mod asemanator cu cel din sectorul NS , privind la numarul total in care operatorul $d_n^{\mu\dagger}$ actioneaza. Astfel, dintre starile excitate supravietuiesc doar starile:

$$d_{n_1}^{\mu\dagger} \dots d_{n_N}^{\mu\dagger} |0\rangle^{\pm} \quad (8.118)$$

unde elicitatea $\pm$ a starii $|0\rangle$ se alege in asa fel incit sa fie $+$ pentru N par si $-$ pentru N impar ²⁰.

In tabelul 8.18 prezentam starile superstringului din cele doua sectoare pe care le-am ales in urma selectiei GSO . Ele pot constitui baza de plecare a unei teorii supersimetrice consistente a superstringului open. Aceasta face parte din asa numita teorie de tip I a superstringurilor, care contine, pe langa stringul open, si stringurile closed. Mai multe despre aceasta inasa in sectiunea urmatoare.

In final, sumarizam putin rezultatele pentru superstringul open, vedem ca am fost in stare sa construim o teorie supersimetrica a superstringului open, care sa contina perechi de bosoni si fermioni. Completitudinea si coreenta acesteia este inca obiect de cercetare ²¹, inasa pentru noi am vrut sa dam aici numai o idee despre cum arata tehnic o astfel de teorie. In afara de numarul de dimensiuni ale Universului necesare ($D = 10$), teoria ne-a aratat si alte surprize. Astfel, din motive practice, doar starile fara masa din tabelul 8.18 au o sansa de a descrie particulele elementare, starile excitate avind o masa prea mare. Numarul acestora este finit, dar pe de alta parte si numarul particulelor elementare este restrins, asa incit aceasta nu este o problema majora. In schimb, observam surprinzator ca toate aceste stari de masa nula pentru fermioni sau bosoni nu contin oscilatii α_n^I ("undituri") ale stringului inasi, ci mai degraba oscilatii ale oscilatiilor fermionice b_r^I si d_n^I de pe suprafata lui. Acest rezultat constrasteaza in mod evident cu asteptarea noastra din sectiunea 8, unde am presupus ca diferitele "undituri" ale stringului descriu diversele particule.

Ne vom opri aici cu descrierea matematica a diverselor aspecte, urmind sa prezentam numai in urmatoarea sectiune diversele aspecte ale punctelor de cercetare in acest moment.

8.5 Current areas of research

In aceste ultime sectiuni vom incerca sa facem o scurta trecere in revista a directiilor de cercetare ce au loc in prezent pentru teoria stringurilor. Desigur ca complexitatea noilor subiecte nu va permite o abordare matematica a subiectelor.

8.5.1 Teorii curente

¹⁸Verifica

¹⁹ Sunt confuzionat la starile excitate din sectorul R , pentru ca dupa Green acestea nu trebuie sa contina un numar par de operatori $d_n^{\mu\dagger}$, pe cind de roo da un exemplu in pag 32 care contine astfel de stari! De zis doar citeva cuvinte daca se selecteaza sau nu si din starile excitate ceva. Eu merge pe mina hooft.pdf

²⁰Verifica

²¹Asa e?

Sa ne reamintim scopul initial al teoriei stringurilor, acela de a descrie particulele elementare si interactiile dintre ele. Dupa cum am remarcat in sectiunile precedente, numai starile *massless* ale excitatiilor stringurilor au sansa de a descrie aceste particule elementare, si am si mentionat citeva, cum ar fi fotonul. De aceea mai este o cale lunga pina a descrie spectrul maselor particulelor elementare ori interactiile dintre ele.

Un urmator pas ar fi construirea unor teorii complet consistente a teoriei stringurilor. Acest lucru este posibil, inasa surpriza a aparut in momentul in care s-a dovedit ca exista cel putin cinci maniere de a realiza acest lucru, care conduc astfel la cinci teorii susceptibile a descrie realitatea.

Pe de alta parte, am vazut ca in cadrul Modelului Standard toate interactiile fundamentale, exceptind gravitatia, sunt descrise de grupul de simetrie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Un urmator pas al teoriei stringurilor ar fi atunci ordonarea starilor massless ale starilor excitate in acest grup de simetrie, pentru fiecare teorie candidata, si selectarea acelora care indeplinesc aceasta conditie. Acest lucru nu este imediat, caci fiecare dintre cele cinci teorii pot fi ajustate ulterior, asa incit in prezent se iau toate in calcul. In Fig.8.19 sumarizam aceste teorii, ia in continuare le vom face o scurta prezentare.

Superstrings, d=10				
Type	Open or closed?	Oriented?	N	Details
I	Open (plus closed)	No	1	Graviton, no tachyon, $SO(32)$ gauge symmetry, charges are attached to the ends of the strings
IIA	Closed	No	2	Graviton, no tachyon, only a $U(1)$ gauge symmetry
IIB	Closed	Yes	2	Graviton, no tachyon, no gauge symmetry
Heterotic $E_8 \times E_8$	Closed	Yes	1	Graviton, no tachyon, $E_8 \times E_8$ gauge symmetry
Heterotic $SO(32)$	Closed	Yes	1	Graviton, no tachyon, $SO(32)$ gauge symmetry

Figure 8.19: cinci-teorii

1. Tipul I.

Aceasta este practic teoria pe care am construit-o in sectiunile precedente pentru superstringul open. Am vazut astfel cum algem ambele sectoare NS si R pentru a descrie bosoni si fermioni, si cum facem proiectia GSO pentru a obtine o teorie supersimetrica. Proiectia GSO a selectat deasemenea o anumita chiralitate pentru groundstate-ul fermionilor, lucru folositor pentru Modelul Standard, pentru ca neutrinii observati experimental au numai una din cele doua chiralitati.

In plus, superstringurilor open li se mai adauga superstringurile closed, caci acestea se obtin oricum in mod natural din cele open in cazul in care cele doua capete se unesc. Aceasta conduce la prezenta gravitonului.

Intr-o analiza ulterioara se adauga alte elemente, cum ar fi coeficientii Chan Paton pentru capetele stringului open. Acestia au avansat ca construiesc o teorie de simetrie $SO(32)$, care incorporeaza ²² simetria $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ a Modelului Standard de care avem nevoie.

2. Tipul IIA

Aceasta teorie contine *numai* superstringuri closed. Spre deosebire de superstringurile open, am vazut ca acestea au

²²Verifica. Din Rudolph, String Theory and Beyond

moduri de oscilatie care se deplaseaza in stinga sau in dreapta. Fiecare dintre acestea pot fi cuatificate in sectorul R sau NS , creind astfel 4 combinatii, si pentru fiecare dintre aceste combinatii se face o proiectie GSO specifica.

Pentru teoriile de tipul IIA se alege o astfel de proiectie GSO in care fiecare fermion are un partener de chiralitate opusa. In acest fel, aceste teorii nu pot include automat observatia experimentală a prezentei neutrinoilor numai de o anumita elicitate.

3. Tipul IIB

Acestea sunt asemnatoare cu teoriile de tipul IIA, continind deasemenea numai superstringuri closed. Fata de teoriile IIA numai proiectia GSO pentru combinatia de sectoare $R - R$ este aleasa diferit. Aceasta conduce in final ruperea de simetrie pentru chiralitate, teoria admitind fermioni de o anumita elicitate care nu au parteneri fermioni de elicitate opusa.

4. Heteroic $E_8 \times E_8$

Teoriile de tip heteroic se aplica deasemenea pentru stringurile closed. Si in acest caz se face o separatie intre modurile de vibratie care se deplaseaza la stinga si cele care se deplaseaza la dreapta. Spre deosebire de variantele precedente, teoriile de tip Heteroic aleg o solutie extrema: moduri de o anumita directie se construiesc pentru un *string bosonic*, iar modurile de directie opusa se construiesc pentru un *superstring*!

Combinatia pare imposibila la prima vedere, pentru ca am vazut ca stringul bosonic traieste in 26 de dimensiuni, iar superstringul in 10 dimensiuni. Cu toate acestea, acest lucru este posibil daca compactificam 16 de dimensiuni ale stringului bosonic! Pentru a exeplica, scriem actinea care descrie stringul heteroic in reprezentarea conului de lumina [?]:

$$S = -T \int d\sigma d\tau \left[\sum_{i=1}^{i=10} \partial_a X^i \partial_a X^i + \sum_{I=1}^{I=16} \partial_a X^I \partial_a X^I + \mathcal{B} \bar{S} \gamma^- (\partial_\tau + \partial_\sigma) S \right]$$

Se vede ca acest lagrangean este o combinatie dintre cel al stringului bosonic ?? si cel al superstringului ?? . Pentru a selecta modurile de diverse directii, asupra lui se mai pun restrictiile $(\partial_\tau - \partial_\sigma) X^I = 0$ si $\gamma^+ S = 0$.

Compactificarea celor 16 dimensiuni nu este inclusa mai sus, dar ea se efectueaza pe un torus 16 dimensional. Acest torus are o simetrie $E_8 \otimes E_8$ care elimina citeva anomalii cunoscute ale teoriei ²³. Pina in anii mid-1990 acest tip de teorie a fost considerata ca fiind cea mai promitatoare pentru a descrie particulele elementare, pentru ca grupul de simetrie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ al Modelului Standard poate fi inclus relativ usor in grupul de simetrie E_8 ²⁴.

5. Heteroic $SO(32)$

Aceste teorii sunt foarte asemanatoare celor de dinainte, cu diferenta ca compactificarea celor 16 dimensiuni are loc pe un torus de simetrie $SO(32)$ ²⁵.

Prezenta a cinci teorii care ar putea explica Modelul Standard este si incurajatoare si descurajatoare. Incurajatoare pentru ca aceasta inseamna ca teoria stringurilor are in sine o diversitate foarte mare, iar un dintre aceste solutii ne poate conduce la solutia cautata. Descurajanta, pentru ca ne-am fi asteptat ca teoria stringurilor sa fie directa, sa conduca numai la un singur rezultat, care ar fi explicat atunci lumea fizica reala.

8.5.2 Compactifierea dimensiunilor. Dualitatea T. Teoria M.

Intre teoriile prezentate in sectiunea precedenta se pare ca exista insa anumite relatii, ce se numesc dualitati. Pentru a un exemplu de astfel de dualitati, sa studiem inasa mai intii cum are loc o simpla compactificare a unei dimensiuni pentru stringul closed, si care sunt principalele consecinte ale acesteia.

Pnetru aceasta sa consideram cazul stringului closed care se misca de data aceasta nu intr-un spatiu euclidian, ci intr-un spatiu-timp *cilindric* (ca cel exemplificat in Fig.8.21). Aici raza R a spatiului *curb* este considerata de aceeaasi ordin de marime ca si lungimea stringului $R \sim l_s = 10^{-33} m$.

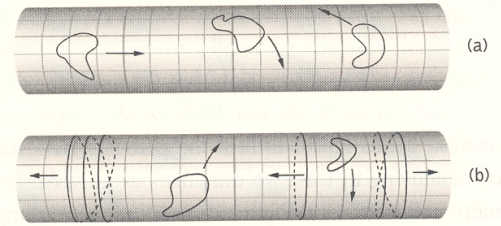


Figure 10.3 Strings can move on a cylinder in two different ways—in “unwrapped” or “wrapped” configurations.

Figure 8.20: cilindru-wrapped-unwrapped-string, din "the elegant Univers"

Daca consideram ca dimensiunea X^9 este cea compactificata, atunci putem scrie formal ca $X^9 = X^9 + 2\pi R$. Sa consideram acum pentru claritate ca dimensiunea stringului este mult mai mica decat R . In acest caz, miscarea stringului poate fi privita ca msicarea unei particule de-a lungul cercului de raza R , iar argumentele urmatoare sunt valabile si pentru stringul open.

Miscarea particulei seamana inasa cu miscarea orbitala a electronului in jurul atomului descrisa in sectiunea ?? . Aici inasa (vezi relatia ??) am vazut ca starile stationare sunt date de functii de unda ale electronului pentru care circumferinta cercului este un numar intreg de lungimi de unda. Tot asa si in cazul nostru, miscarea stringului (vazut mult mai mic ca cercul pentru claritate), va fi descrisa de o functie de unda care se cuprinde un numar intreg in circumferinta cercului de raza R :

$$2\pi R = n\lambda_n \quad (8.119)$$

Conform relatiei ??, impulsul acestui string va fi atunci discret:

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{n\hbar}{R} \quad (8.120)$$

El va contribui inasa la masa de repaus a particulei ²⁶ conform relatiei ?? . Aceasta inseamna ca fiecare stare stationara va descrie in fond un string cu masa de repaus *nenu*la, data de reatia:

$$m_n^2 \sim \frac{n^2}{R^2} \quad (8.121)$$

Vedem astfel ca particula ce descrie starea stationara va capata masa m_n , desi initial ea era masless! Mecanismul acesta este foarte folositor, caci vedem ca *in urma cuantificarii pe un spatiu compact stringurile capata masa de repaus finita*, desi initial ele aveau masa de repaus nula. Mecanismul poate fi

²³Care?. Eu am citat Kaku 10.1.1

²⁴Asa e? Citez Proeyen

²⁵Asa e?

²⁶Cum contribuie? Este complet neclar....

folosit deci ²⁷ in principiu pentru constructia Modelului Standard, unde multe dintre particulele fundamentale au masa de repaus nenula.

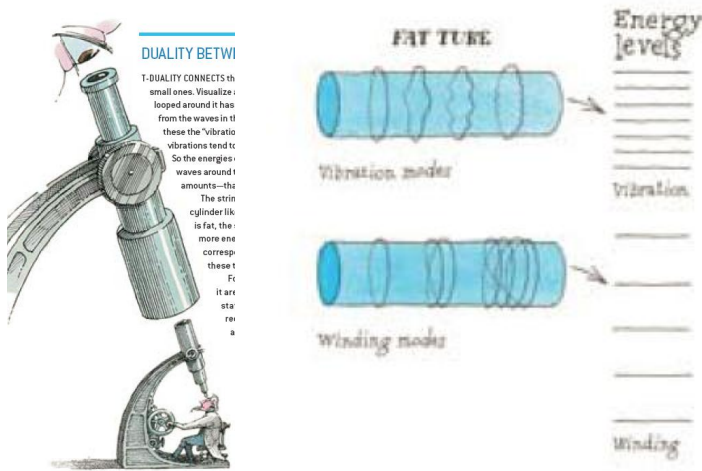


Figure 8.21: T duality . dupa michael duff. scientific american

Pentru stringul closed exista insa inca o alta posibilitate, si anume ca acesta sa se *infasoare* de mai multe ori in jurul cercului, precum este prezentat in Fig.8.21. Dupa cum am vazut in relatia ??, energia totala a stringului este proportionala cu lungimea lui, constanta de proportionalitate fiind chiar tensiunea in string. Deoarece stringul closed este "infasurat", lungimea acestuia L_s este un numar intreg de circumferinta cercului $L_s = m \cdot 2\pi R$, cu $m \in \mathbb{N}$. Folosind aceste rezultat in ??, avem:

$$E_m = TL_s = T(m \cdot 2\pi R) \quad (8.122)$$

Pentru stringul closed, si aceste excitatii vor contribui la masa de repaus a particulei asociate starii cuantice a stringului excitat. Masa de repaus va fi atunci ²⁸:

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \dots \quad (8.123)$$

Termenii suplimentari sunt cei care dau in mod normal masa particulei ce descrie stringul excitat, si sunt asemanatori formei $\frac{1}{2} \alpha' m^2$. Pentru starile massless ei sunt desigur nuli.

Vedem ca forma de mai sus ne produce un mecanism prin care starile de masa nula a stringului capata o masa finita, in urma cuantificarii. Pe de alta parte, aceasta forma are o simetrie extrem de interesanta la schimbarile:

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}; \quad n \leftrightarrow m \quad (8.124)$$

Aceasta ne spune ca spectrele particulelor create pentru o compactificare $R < \alpha'$ este identic cu spectrul particulelor create intr-un spatiu cuantificat cu $R > \alpha'$. Aceasta deparece fiecare particula din primul caz isi are un corespondent cu o masa identica in cel de-al doilea caz, daca se fac schimbarile de mai sus.

Aceasta simetrie poarta numele de *dualitatea T*, si este exemplificata frumos de schita din Fig.8.21. Practic, cunatificarea pe un Univers cu un R foarte, foarte mic, produce aceleasi

rezultate ca si cuantificarea pe un spatiu curb cu un $R' = 1/R$ foarte mare. Si invers, daca masuram spectrul particulelor, nu putem spune daca ne aflam intr-un spatiu curb cu raza R mare sau dimpotriva, intr-unul cu raza $R' = 1/R$ mica!

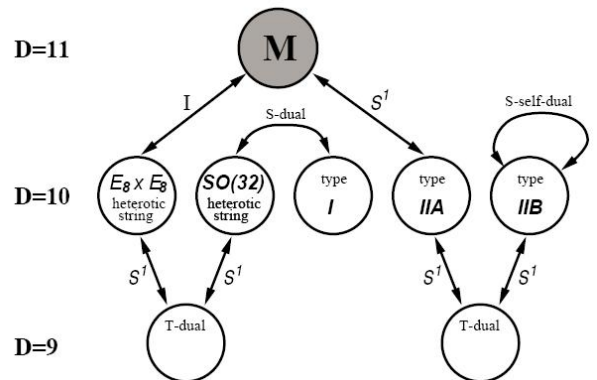


Figure 8.22: dualities . dupa rudolph. zii de M ce se vede sus

Pe de alta parte, observatia de mai sus are o consecinta directa pentru cele cinci teorii prezentate in sectiunea precedenta, Astfel, se poate arata ca ceea ce este interpretat ca o excitatie 8.120 datorita periodicitatii spatiului curb intr-o teorie, poate fi interpretata ca o excitatie 8.122 datorita "infasurarii" intr-o alta teorie. Spunem in acest caz ca cele doua teorii sunt *T-duale*. Aceste este intr-adevar cazul a citorva dintre cele cinci teorii, asa cum este schitat in Fig.8.22.

In afara de dualitatea T care coreleaza citeva din teorii, mai exista si o alta dualitate care face corelatii intre teorii, numita dualitatea S (de la "strong"). Aici o teorie la cosntante de cuplaj g_s mici este identica cu o alta teorie la constante de cuplaj g_s mari. Ori, dupa cum putem vedea si din schita 8.22, o teorie poate fi S-duala insasi, insemnind ca teoria se comporta identic la constante de cuplaj mari ca la constante de cuplaj mici.

Ce inseamna aceste relatii intre diversele teorii, schitate in Fig.8.22? In afara de faptul evident ca cunoasterea noastra este inca insuficienta, parerea generala este ca toate aceste cinci teorii se obtin probabil dintr-o teorie mai *cuprinzatoare*, numita *teoriaM*, asa cum este schitat si in Fig.8.22.

Putine lucruri se stiu despre teoria M, insa se banuieste ca ea traiseste intr-un Univers cu 11 dimensiuni (deci cu una mai mult), si ca ea conduce la *supergravitatie* in limita cuplajului sau slab ²⁹. Astfel, am vazut ³⁰ ca supergravitatiea este o teorie ce traieste in 11 dimensiuni, dar care din pacate nu este renormalizabila. Acest din urma lucru a facut ca ea sa fie indepartata in ultimul timp ca o teorie descriind lumea fizica reala.

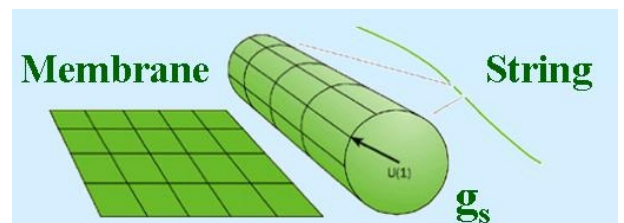


Figure 8.23: 1995: introducerea dimensiunii 11: strings "un-wrap" intr-o "membrane" cind interactia e puternica

²⁷ Asa e?

²⁸ Este neclar de ce masa apare sub forma patratică. În plus, la stringul înfășurat nu am și lungimi de unda care să se cuprindă în mR ? În acest caz subminez primele nivele de energii! Deci, de ce numai $p = n/R$ și nu și $p = n/(mR)$?

²⁹Discutie preluata din Schwartz 2000

³⁰ Aduaga la particule elementare info despre supersimetrie, si undeva despre supergravitatie.

Cu toate acestea, acum lucrurile sunt privite printr-o alta prisma. Astfel, daca supergravitatiea ar fi teoria M in limita cuplajului slab, atunci renormalizarea sa nu ar mai fi deloc un argument pentru ca teoria sa fie indepartata. Am putea spune ca procedura corecta de renormalizare este data chiar de teoria M completa, pe care insa acum nu o stim.

In plus, in ultimii ani au fost gasite conexiuni intre teoria stringurilor de tipul IIA si teoria supergravitatiei, iar pe de alta parte s-a observat ca ecuatiile supergravitatiei in 11 dimensiuni admit solutii care descriu o membrana. Aceste membrane conduc atunci la un mecanism prin care teoria supergravitatiei in 11 dimensiuni sa fie redusa la teoria stringurilor in zece dimensiuni, asa cum este prezentat in 8.23. Aici membrana este compactificata intr-o dimensiune in asa fel incit ea devine un string, iar spatiu-timpul in care acest string va evolua va avea o dimensiune mai putin decit cele 11 initiale, adica exact 10 dimensiuni de cit are nevoie superstringul! Cu toate acestea, mecanismul schitat aici este inca subiect de dezbatere stiintifica. De remarcat insa ca acest mecanism introduce inca un parametru in teoria stringurilor, si anume raza de curbura a spatiului in care membrana se cuantifica.

8.5.3 Compactificarea si legatura cu cosmologia

Dupa cum am vazut in sectiunile precedente, dimensiunile aditionale ale Universului joaca un rol crucial in dezvoltarea noilor teorii (ca teoria stringurilor, supergravitatiea, sau Kalutza-Klein). Aceste noi dimensiuni sunt insa in mod evident compactificate, din moment ce noi nu le observam. Desigur ca doua intrebari sunt importante: cum facem compactificarea, si cum putem masura experimental daca exista alte dimensiuni?

In teoria stringurilor am vazut cum, datorita dualitatii T pentru stringurile closed, un spatiu curbat de dimensiune R poate fi echivalent cu un spatiu curbat de dimensiune $\sqrt{\alpha'}/R$. Pe de alta parte, compactificarea se poate face nu numai pe spatii perfect circulare, dar si pe altfel de spatii. In teoria stringurilor, compactificarea se face spatiile asa-numite Calabi-Yau, care au proprietatea de simetrie inclusa in dualitatea T.

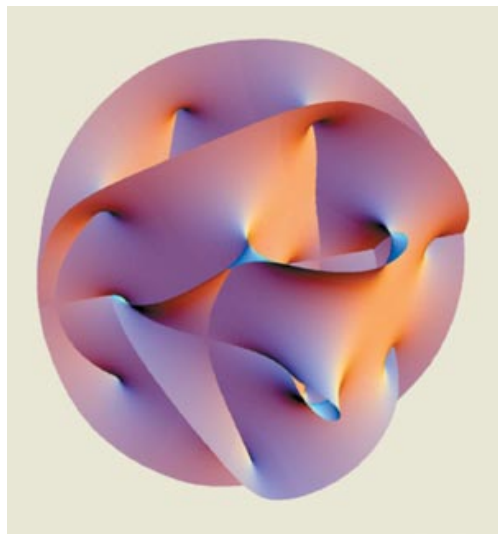


Figure 8.24: Spatii Calabi-Yau: de pe internet

Aceste spatii Calabi-Yau sunt foarte greu de vizualizat, prezintand topologii complicate, cu tunele, gauri, si pot fi in numar foarte mare. Un exemplu de astfel de spatiu este prezentat in Fig.8.24. Sunt multe astfel de spatii posibile, fiecare

avind topologia sa, data de niste parametri numiti *moduli*. In urma compactificarii, fiecare dintre aceste spatii va conduce la alt spectru posibil pentru superstringuri, dat de valoarea *modulilor*. Din nou, acesta poate fi privit ca un avantaj, caci exista atunci sansa ca sa gasim solutia corecta, care descrie lumea reala. Pe de alta parte, va fi foarte dificil sa explicam de ce natura a ales *tocmai acel set de moduli* pentru spatiile Calabi-Yau si nu altul!

O estimare conservativa a numarului posibil de spatii Calabi-Yau este de 10^{100} ³¹. Pare atunci aproape imposibil de explicat de ce numai una din aceste solutii a fost aleasa. Pe de alta parte, tocmai aceasta diversitate devine un argument daca urmarim principiul *antropic*.

Astfel, parerea multor cosmologi este ca Universul in care traim are multi parametri care sunt "fine-tuned", pentru ca in final acest Univers sa poata contine viata asa cum o stim. De exemplu, virsta Universului este suficient de mare pentru ca Viata sa aiba timp sa se dezvolte. Putem spune si ca spectrul particulelor elementare permite constructia atomilor, apoi a moleculelor, etc. (Sa ne imaginam ca totul ar fi aratat asa de "hot" ca in primele momente de viata ale Universului, viata nu ar fi avut probabil nici o sansa sa apara).

Exista atunci cateva posibilitati, cum a ar fi de exemplu ca la fiecare nastere a sa Universul selecteaza anumite spatii Calabi-Yau pentru compactificare, care in final dau intreaga evolutie a Universului. Universul se naste si dispare apoi, urmind ca la o noua nastere a sa aleaga alta modalitate de compactificare³². Ori ca Universul nostru observabil este numai o parte din Universurile create in "inflationary epoch" (teoriile "pocket Univers", exemplificate in 8.25). Fiecare dintre acestea au din nou propria lor evolutie, iar noi ne aflam in acel "pocket" care permite aparitia vietii.

Ceea ce este interesant, este ca valorile "modulilor" spatiilor Calabi-Yau conduc la un parametru important in cosmologie, si anume *constanta cosmologica* Λ (o masura energiei vidului, vezi ??), care determina printre altele virsta Universului. Acest parametru, discutat in sectiunea ??, a fost considerat de Einstein marea greseala a vietii sale, dar astazi se considera ca poate nu a fost chiar o greseala. Astfel, observatii experimentale recente (1998) asupra supernovelor indepartate au demonstrat ca Universul se expandeaza cu miscare putin *mai accelerata* decit ne-am fi asteptat din modelul clasic De Sitter cu $\Lambda = 0$ (prezentat in sectiunea ??).

Pentru a explica aceasta observatie experimentală, unii cosmologi au presupus ca in Univers este mai multa masa decit se vede³³, si aceasta a primit numele de "dark matter" (pentru ca nu se vede). Aceasta ar fi intr-o cantitate cam de acelasi ordin de marime ca si masa observabila, pentru ca diferenta dintre modelul de Sitter si observatie nu este mare. Aceasta "dark matter" poate fi considerata in teoria stringurilor ca fiind energia de vid, care se poate calcula odata de modulii spatiilor Calabi-Yau 6-dimensionale se stiu. Cu alte cuvinte, din "moduli" calculam energia vidului, apoi constanta cosmologica Λ , apoi acceleratia Universului, si comparam cu experimentul. Pentru a explica actuala acceleratie mica a expansiunii, cercetatorii au calculat ca avem nevoie de o constanta cosmologica nu mai mare de $\Lambda = 10^{-120}$ (sa ne reamintim ca modelul de Sitter avea $\Lambda = 0$).

Pe de alta parte, valoarea modulilor spatiilor Calabi-Yau mai este conectata cu lumea experimentală printr-un alt fapt: ruperea de supersimetrie. Astfel, particulele observate nu sunt

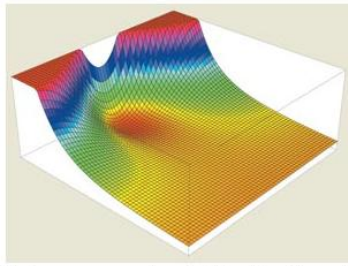
³¹Din Superstrings, PhysicsWeb, 2003 de Sussind si din "The string-theory landscape" PhysicsWeb 2003

³²Asta e inventata de mine, dar trebuie sa existe pe undeva in literatura

³³Recent s-a propus is o alta solutie, care implica prezenta a "very tiny ripples" la inceputul Universului. Acestea s-ar fi indepartat intre timp dincolo de Universul observabil, de unde inca isi fac simtita prezenta creind prin atractia lor o expansiune mai rapida a Universului. Vezi "Was Einstein right when he said he was wrong?" din PhysWeb



Figure 8.25: Luata de pe <http://universe-review.ca/R15-16-manyfoldu.htm> Asta e un site cu poze minunate. Citeste-l bine. Este poza de mai sus pentru "pocket Univers"? Verifica daca e asa!



Stringscape - a small part of the string-theory landscape showing the new de Sitter solution as a local minimum of the energy (vertical axis). The global minimum occurs at the infinite size of the extra dimensions on the extreme right of the figure.

Figure 8.26: Din "The string-theory landscape", PhysWeb

supersimetrice (in fond ne dorim inca sa gasim particule supersimetrice in noile acceleratoare, pentru a avea o prima confirmare experimentală a supersimetriciei). Pina una alta, la energiile cunoscute de sub 1TeV nu avem particule supersimetrice. Aceasta se traduce in constanta cosmologica, prin intermediul modurilor, in felul urmatoar: daca toate particulele ar fi fost supersimetrice, atunci $\Lambda = 0$. Daca vrem ca supersimetricia sa fie "rupta" cel puțin sub 1TeV , atunci constanta cosmologica trebuie sa fie in mod normal (fara "potriviri" perfecte intre constante) cel puțin $\Lambda = 10^{-60}$.

Vedem atunci ca exista o contradictie puternica intre valoarea "prezisa" de teoria stringurilor (in mod normal de peste $\Lambda = 10^{-60}$) si cea observabila experimental (de sub $\Lambda = 10^{-120}$), contradictie care este valabila si in cazul modelului de Sitter simplu (cand $\Lambda = 0$). Pentru multi aceasta diferenta de 60 de ordine de marime, cea mai mare nepotrivire experiment-teorie de pina acum, este un argument puternic pentru a elimina teoria stringurilor³⁴. Pentru altii, faptul ca exista atat de multe posibilitati in alege compactificarea dimensiunilor in multiple spatii Calabi-Yau (cam 10^{100} de posibilitati este un argument pentru a continua in teoria stringurilor: astfel, din multitudinea de posibilitati poate ca exista una in care coeficientii se potrivesc asa de perfect, incit aceasta ar da si ruperea de supersimetricie sub 1TeV , si constanta cosmologica foarte mica de sub $\Lambda = 10^{-120}$ (vezi si Fig.8.26). Momentan nu exista in consens asupra acestei diferente intre teorie si experiment.

8.5.4 Braneworlds si marimea dimensiunilor aditionale

Multa vreme s-a considerat ca, stringurile closed sunt mai susceptibile in a explica lumea fizica inconjuratoare decit stringurile open, deoarece au mai multe "features" ce pot fi folosite (ca de exemplu infasurarea in jurul unei dimensiuni compacte, discutata in sectiunea ??). O "inventie" noua inasa, numita "D-branes", a readus stringurile open in actualitate.

Astfel, in sectiunea ?? am discutat despre conditiile de capat ale stringului open, si am mentionat doua: Dirichlet si Neumann. In practica inasa am folosit numai cea de-a doua conditie, vazind ca atunci capetele stringului open se misca liber cu viteza luminii. Asupra acestor capete am putea impune inasa si conditii Dirichlet. Astfel, le-am putea lega de un punct fix, le-am putea sa alunece liber pe o linie, sau pe un plan. In aceste ultime doua cazuri am avea desigur de-a face cu o combinatie de conditii Neumann si Dirichlet.

In general, am putea limita miscarea stringului la un hiper-

³⁴Un alt mod de a privi problema este de a spune ca daca constanta cosmologica ar fi avut valoarea prezisa in mod normal de teoria stringurilor $\Lambda = 10^{-60}$ (fara "potriviri"), atunci Universul ar fi avut o viata extrem de scurta.

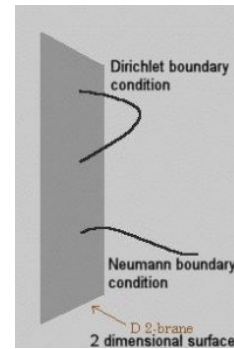


Figure 8.27: D2brane

plan de dimensiune p . Acest hiperplan, pe care capataul stringului este constrins sa se miste, se numeste atunci un Dp -brane ("D" de la Dirichlet si "brane" de la cuvintul membrane). De exemplu, daca constringem sa fie fiz intr-un punct, atunci acel punct se numeste ca este un D0-brane. Planul pe care stringurile din Fig.8.27 sunt constrinse sa se miste se numeste un D2-brane (pentru ca are dimensiunea 2).

Dar D-brane-urile nu sunt numai hiperplane fixe pe care capetele stringurilor sunt constrinse sa se miste. Ele pot fi obiecte dinamice, care se misca sau care fluctueaza, sau care interactioneaza cu alte obiecte.

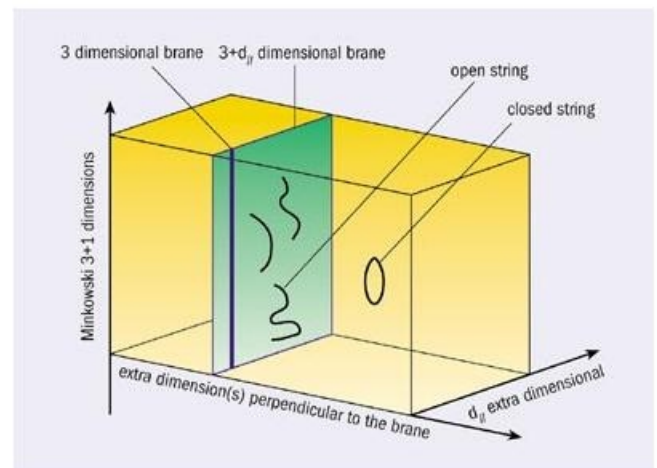


Fig. 4. In the type I string framework, our universe contains (besides the three known spatial dimensions; denoted by a single blue line) some extra dimensions ($d_{\perp} = p-3$) parallel to our world p -brane (green plane), along which the light described by open strings propagates, as well as some transverse dimensions (yellow space), where only gravity described by closed strings can propagate. The longitudinal extra dimensions have a string size of about 10^{-18} m, while the size of the transverse dimensions varies between 10^{-14} m and a fraction of a millimetre.

Figure 8.28: Google "Testing times for strings"

Dintre aceasta multitudine de obiecte D-brane care pot fi construite, poate ca cele mai fascinante sunt *worldbrane*-urile. In cazul acesta avem de-a face cu D3-branes, adica capetele stringului sunt constrinse sa se afle intr-un hiperplan de dimensiune 3 din universul de 9 dimensiuni spatiale (vezi Fig.8.28). Presupunerea aditionala este inasa ca *acest hiperplan este Universul in care ne aflam noi!* Cu alte cuvinte, noi nu vom putea atinge niciodata alte puncte din Universul de noua dimensiuni, pentru ca ele sunt in afara hiperplanului 3 dimensional, care se

numeste acum *worldbrane*. O imagine artistica a acestei situatii este prezentata in Fig.8.29.

Presupunerea de mai sus este si spectaculara si excentrica. Spectaculara, pentru ca ea ne permite sa consideram ca celelate 6 dimensiuni nu sunt compactificate ca in cazul spatiilor Calabi-Yau, ci pot extinse orict de mult, pot avea dimensiuni orict de mari, pentru ca noi oricum nu le putem "vedea", fiind constrinsi sa traim in acel hiperplan dat. Pentru a nu putea "vedea" celelate dimensiuni, constrangeri aditionale se aplica, cum ar fi aceea ca fortele electromagnetice, sau slabe si tari nu se extind in afara worldbrane-ului, asa cum este exemplificat in Fig.8.29.

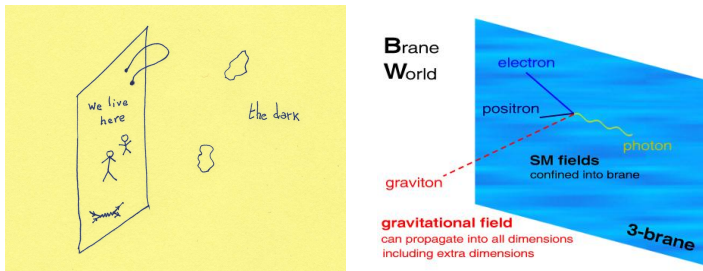


Figure 8.29: braneworld

Pe de alta parte astfel de constrangeri nu se pot aplica fortele gravitaionale, pentru ca ea este cea care da intrinsec forma spatiu-timpului, conform teoriei gravitatiei generalizate. In acest caz forta gravitacionala poate parasii worldbrane-ul, cum este schitat in Fig.8.28. Dar si in acest caz trebuie sa punem constrangeri aditionale asupra marimii celor 6 dimesiuni pe care nu le vedem. Astfel, daca acestea ar fi fost foarte mari, atunci supernovele ar fi emis energie gravitacionala in toate cele 9 directii spatiale, si evolutia lor ar fi fost vizibil modificata. In plus, dimensiuni mari ale celor 6 dimensiuni ar fi influentat in mod vizibil istoria Universului. Toate aceste efecte impun o limita superioara pentru marimea celor 6 dimensiuni aditionale de ordinul a citorva zecimi de milimetru.

In Fig.8.30 prezentam o imagine artistica a worldbrane-ului, intr-un caz in care acesta nu este un hiperplan simplu, ci arata mai degraba ca o foie de hirtie impachetata, in asa fel incit suprafete sale sunt foarte apropiate. Vedem ca in acest caz putem avea interactii intre puncte cu totul separate pe worldbrane (deci in Universul observabil), datorita apropierii a doua suprafete ale worldbrane-ului.

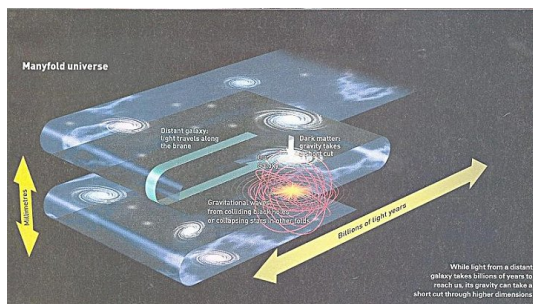


Figure 8.30: review-univ-braneworld-paralele

Dar si asa, valori de ordinul de marime al milimetrelor ar fi mult mai mari decit cele asteptate pentru spatiile Calabi-Yau compactificate, de un ordin de marime care ar putea fi testate experimental. La o prima vedere s-ar putea sa fiti surprinsi, caci daca dimensiunile aditionale ar fi cam de 1 mm, atunci sigur s-ar putea vedea veti spune! Dar sa nu uitam ca noi "vedem" in mod obisnuit prin intermediul fortelor electro-

magnetice, care sunt fortate in acest caz sa stea in braneworld! Singura noastra "lumina" cu care vedem in afara braneworld-ului este forta gravitacionala, iar surpriza mai mare este ca aceasta forta nu a fost testata pina in prezent pentru dimensiuni de sub o zecime de milimetru! De aceea prezentam in continuare un rezultat al cautarii altor dimensiuni cu ajutorul fortei gravitacionale, care este util desigur tuturor teoriilor ce includ dimensiuni aditionale.

Ideea de baza a experimentului este prezentata in Figura 8.31. Aici liniile de cimp gravitacional sunt desenate pentru un corp aflat pe un spatiu cilindric, aproape de corp si departe de corp. Vedem ca aproape de corp suprafata este aproape 2-dimensional. Legea lui Gauss ?? (sau mai exact disiparea de energie emisa) ne spune atunci ca energia emisa trebuie sa se distribuia uniform in cercuri de raza r concentrice corpului. Aceste cercuri au o circumferinta de $2\pi r$, si deci forta gravitacionala (data de cimp) trebuie sa scada conform $F \sim 1/r$. In figura 8.31, la distante mari, suprafata apare unidimensionala, ca o ata. Ca atare liniile de cimp se distribuie pe circumferine egale (care sunt de doua ori circumferinta tubului), si deci forta de atractie va fi constanta $F \sim 1/r^0$.

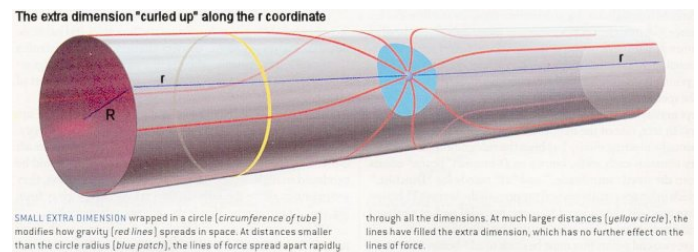


Figure 8.31: gravitation-extra-dimensions

In acelasi fel, in cazul trei dimensional liniile de cimp se distribuie pe o suprafata $4\pi r^2$ a unei sfere in jurul punctului (unde r este raza sferei), si deci forta evolueaza ca $F \sim 1/r^2$. In patru dimensiuni forta va avea atunci o evolutie data de $F \sim 1/r^3$. Cu alte cuvinte, modul in care evolueaza forta gravitacionala cu diostanta ne da numarul de dimensiuni ale Universului. Atunci, daca vrem sa testam existenta unor dimensiuni aditionale de marimea unui milimentru, trebuie atunci sa masuram comportarea fortei gravitacionale pe distante de aproximativ un milimetru. Daca gasim o abatere a comportarii de la $F \sim 1/r^2$ catre $F \sim 1/r^3$ atunci putem spune cu certitudine ca o noua dimensiune isi va face aparitia. Sau mai simplu vorbind, o eventuala abatere de la legea lui Newton semnaleaza aparitia unor dimensiuni aditionale.

In anul 2003 a fost efectuat un astfel de experiment [?] care sa testeze evolutia fortei cu distanta pentru regiuni de ordinul zecimilor de milimetri. In Fig.[?] prezentam aparatul folosit. Acesta prezinta doua "sheet" de tungsten, plasate la o distanta de 0.1 mm, intre care vrem sa masuram atractia gravitacionala. Aceasta nu o facem in asa direct, ci indirect.

Astfel³⁵, unul dintre sheet (numita detector) are o frecventa particulara de rezonanta. Aceasta este cam de 1KHz adica mult deasupra frecventelor ce pot fi induse de vibratiile obiectelor inconjuratoare, ca podeaua de exemplu. Apoi celalalt "sheet" (numit sursa) este pus sa vibreze cu *exact* aceasta frecventa de rezonanta a "sheetului" numit detector. Datorita fortei gravitacionale, "sheet"-ul sursa va transmite vibratia "sheet"-ului detector, iar acesta va reactiona foarte sensibil, deoarece este pe frecventa lui de vibratie. Amplitudinea vibratiei sheetului detector este apoi monitorizata cu o proba electrica, si ea ne da informatie despre magnitudinea fortei de atractie

³⁵N-am citit cu atentie articolul original [?]. Citeste-l, caci zice mai mult decit descrierea din PhysWeb pe care am imprumutat-o aici!

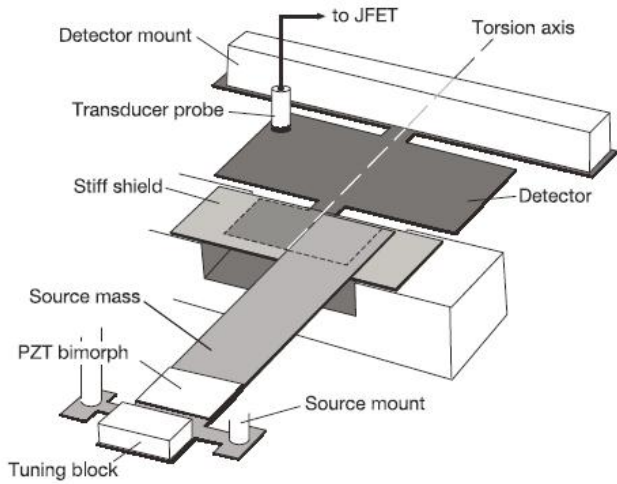


Figure 8.32: apparatus-long din [?]

Newton.

Rezultatele experimentului acestuia sunt insa descurajatoare, caci in urma lui nu s-a observat o abatere de la legea lui Newton nici pentru distante de $0.1mm$. Cu alte cuvinte, marimea eventualelor dimensiuni aditionale trebuie sa fie mai mica decit $0.1mm$.

8.5.5 O conexiune surpriza: gaurile negre

Am vazut in sectiunile precedente ca masa stringului *excitat* este de ordinul masei lui Plank $M_{Plank} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.210^{-8}Kg \simeq 10^{19}GeV$. Exista inasa o alta proprietate remarcabila a masei Plank, pe care n-am discutat-o in sectiunea ?? cind aceasta a fost introdusa.

Astfel, stim din relatia ?? ca *dimensiunea caracteristica* a unei particule de masa m este data de lungimea Compton:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (8.125)$$

In cazul unui corp de masa Plank M_p , aceasta lungime Compton ia valoarea lungimii Plank Λ_p . In cazul stringului noi am ales³⁶ lungimea stringului de ordinul de marime al lungimii Plank. Aceasta devine atunci egala si cu Lungimea Compton pentru stringul *excitat* (toate acestea marimi reflectind in fapt lungimea caracteristica a stringului excitat).

Pe de alta parte, am vazut in sectiunea ?? ca fiecarui corp ii este asociata o raza Schwarzschild data de:

$$R = \frac{2mG}{c^2} \quad (8.126)$$

Daca raza Schwarzschild R este mult mai mica decit dimensiunea corpului de masa m , avem de-a face cu un caz obisnuit, si acest lucru se intimpla de cele mai multe ori pentru densitati obisnuite ale materiei. Daca inasa dimensiunea corpului este mai mica decit raza Schwarzschild R atunci avem de-a face cu o *gaura neagra*, si acest lucru se intimpla la densitati mari.

Sa introducem acum valoarea masei lui Plank in formula precedenta³⁷:

$$R = \frac{2M_p G}{c^2} = 2\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 2\Lambda_p = 3.2 \cdot 10^{-35}m \quad (8.127)$$

Pentru stringul excitat avem atunci o situatie aparte: dimensiunea stringului excitat $l_s = \Lambda_p = \dots$ este de acelasi ordin de marime sau mai mica decit raza Schwarzschild R , si deci *stringul excitat poate fi considerat o gaura neagra!*

Desigur ca aceste rezultat este valabil pentru orice particula de masa lui Plank caruia ii atribuiem o dimensiune mai mica decit lungimea lui Plank (am putea spune ca densitatea de materie depaseste atunci valoarea critica). In acest sens, rezultatul de mai sus nu este o previziune a teoriei stringurilor, pentru ca noi am ales de la inceput exact aceste dimensiuni pentru string. Pe de alta parte, daca stringurile sunt reale, atunci observatia ca ele ar putea fi considerate mici gauri negre devine de o importanta deosebita.

Comparatia devine chiar mai "intrigue" daca privim semnificatia cuantica a lungimii Compton. Astfel, lungimea Compton reprezinta distanta pe care pozitia particulei nu se mai poate decide cu certitudine. Pe aceasta distanta am putea spune ca particula (in cazul nostru stringul) are "salturi" cuantice imprezibile de la un punct la altul.

Pe de alta parte, teoria clasica a gaurii negre ne spune ca orice obiect ce se afla in gaura neagra, deci la o distanta de corp mai mica decit Schwarzschild R , nu mai poate niciodata scapa. Vedem atunci o contradictie in comportarea unei particule de masa M_p si dimensiune Λ_p (cum este stringul excitat), deoarece $R = \Lambda_p$ in acest caz. Din teoria clasica deducem ca daca el intra in interiorul zonei gaurii negre de raza R el nu mai poate scapa, pe cind mecanica cuantica ne spune ca el poate scapa datorita principiului de incertitudine (vezi si 8.33)! Aceasta constradictie semnifica in fond "the breaking of" relativitatii generalizate la dimensiuni Plank.

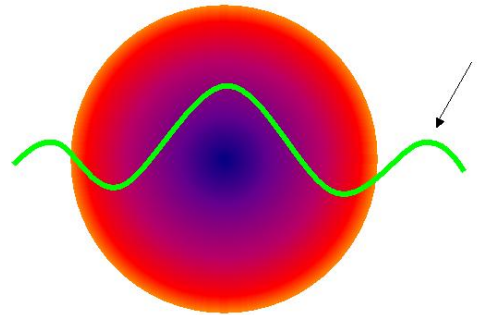


Figure 8.33: Clasic particula nu mai poate iesi din gaura neagra. Cantic poate iesi datorita principiului de incertitudine

Pornind de la aceasta observatii asupra stringului excitat, un esantion important al cercetarii este directionat asupra impactului teoriei stringurilor in teoria gaurilor negre, sau invers, o eventuala confirmare a teoriei stringurilor cu ajutorul gaurilor negre.

Una dintre propunerile cele mai spectaculoase³⁸ este ca nu numai stringul excitat ar putea fi considerat o mica gaura neagra, dar si invers, anume ca si marile gaurile negre cosmice pot fi considerate stringuri excitate in anumite conditii! Ideea ar fi urmatoarea. Vazut din perspectiva unui observator exterior, corpurile care sunt atrase de gaura neagra, nu trec niciodata de dincolo de raza Schwarzschild R (vezi sectiunea). Am putea spune ca, pentru el, aceste corpuri se aduna pe suprafata de raza R , unde se inghesuiesc cu timpul.

Daca privim aceste corpuri ca pe niste stringuri, propunerea lui Susskind este ca, cind o anumita temperatura sa va atinge (numita temperatura Hagedorn), toate aceste stringuri se vor

³⁶ Asa e? Nu am pus argumente la inceput.

³⁷ Am un factor de doi in plus...

³⁸ citeaza Susskind hep-th/9309145 si vezi ce e cu cartea lui

uni intr-un singur string enorm! Cu alte cuvinte, gaura neagra cosmica va deveni un string urias. Daca este asa, a conjecturat Susskind, atunci putem incerca sa studiem proprietatile gaurilor negre considerind ca acestea sunt stringuri excitate urias. Una dintre aceste proprietati cunoscute clasic este entropia gaurii negre (cantitatea de informatie stoacata in gaura neagra) si Susskind a aratat ca entropia calculata pe baza supozitiei precedente este de acelasi ordin de marime cu valoarea clasica.

Desigur ca astfel de argumente au insa si implicatii imediate in cosmologie si istoria Universului. Astfel, putem extrapola discutia despre incertitudinea pozitiei exemplificata in Fig.8.33 la modelul prezentat in Fig.8.25. Aici putem spune ca Universul se contracta pina la dimensiuni minuscule, moment in care datorita principiului de incertitudine un proces de evaporare completa poate avea loc pentru gaura neagra astfel formata, conducind practic la renasterea Universului. Tranzitia de la "moarte" la "viata" se poate face atunci printr-un string urias, cu ajutorul caruia putem poate calcula proprietatile Universului renascut³⁹

spune cite tone este tensiune din string!

spune ca atunci cind fac parametrizarea am mereu $\sigma = 0, \pi$ si deci pot duce liniile perpendiculare fara grija. Dar ce fac cu capatul daca taietura nu se potriveste.

spune ca cuantificarea este de ordinul intii la stringuri. Mentioneaza ca ar trebui sa ai "string field theory", dar noi nu facem asa. comparatia cu particula.

la stringul bosonic am folosit notatiile din zwiembach, la superstring folosesc Green. Pune-le pe toate ca la green, sa se potriveasca.

light gauge e un caz particular de conformal gauge, vezi 4.3.1 green la inceput. compara 4.1.1 cu 2.2.1 la green ca sa vezi ca in 4.1.1 avem $2\alpha' = 1$.

pune peste tot i in loc de I la polarizarile transversale, ca se vede mai usor!

in general se foloseste $|k\rangle$ pentru ground state, si nu $|0\rangle$ cum am folosit eu. schimba si tu.

pune tabele pentru stari ca in mohaupt.pdf pagina 45 si 46.

nu am zis deloc ca superstringurile se spera ca e TOE, adica theory of everything. spune si asta.

n-am scris nimic despre Universul Holografic cum se leaga gaura neagra cu dualitatea T?

8.5.6 Catre ce?

8.6 Exerciții

1. Sa consideram expansiunea unui cimp in zece dimensiuni in care dimensiunea 9 este periodica⁴⁰. In acest caz cimpul se poate descompune in serii Fourier date de:

$$\phi(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi_n(x^\mu) e^{8\pi i n x^9 / R} \quad (8.128)$$

unde $M = 0, \dots, 9$ iar $\mu = 0, \dots, 8$. Aratati ca daca in acest caz ecuatia cimpului in zece dimensiuni este $\partial_M \partial^M \phi = 0$, ea se reduce in opt dimensiuni la ecuatii de forma $\partial_\mu \partial^\mu \phi = m_n^2 \phi_n$. Aceste cimpuri descriu deci particule de masa nenula m_n .

8.7 Idei

teoria stringurilor, sau teoria coardelor?

ziceam la QED ca tot Universul este ca un matras. ondulatiile pe el creeaza particulele elementare si de aceea ele se anihileaza unele pe altele de exemplu. dar au aceste "ondulatii" pe matras ceva in comun cu stringurile? Nu cred, insa sugestia poate fi de folos.

aici adauga si de QED

sa introduc coarda vibranta la mecanica

sa introduca lagrangeanul pentru o singura particula in miscare la relativitate restrinsa.

Nu este exclus din ce am citit pina acum ca sa mai adaugam o dimensiune temporala (nu spatiala)! Ce fel de lume este atunci? Fascinata!

shadow-world iese din teoria stringurilor E-12. Materia interactioneaza doar gravitational. Shadow world s-ar afla in centrul Pamintului. Citeste.

³⁹Fabulez...

⁴⁰din proeyen 5.5

Contents

9	Anexa matematica	273
9.1	Matematica: Functia, Derivata, Integrala	273
9.1.1	Functia	273
9.1.2	Derivata	274
9.1.3	Integrala	275
9.2	Vectors	276
9.3	Matematica: cimpuri scalare si vectoriale	276
9.3.1	Cimpul scalar	276
9.3.2	Integrale multidimensionale	277
9.3.3	Operatorul ∇	277
9.4	Matematica - Geodezice	279
9.4.1	Metrica	279
9.4.2	Coordonate covariante, contravariante.. . . .	281
9.4.3	Geodezica	282
9.4.4	Curbura spatiului	283
9.5	Spatiul Hilbert. Vectori bra si ket	283

Chapter 9

Anexa matematica

9.1 Matematica: Functia, Derivata, Integrala

Actualul success al fizicii se datoreaza in mod sigur si matematicii. Finalmente fizica isi exprima concluziile prin metode pur matematice (ecuatii, formule, etc.) si astfel se bazeaza in mod fundamental pe adevarurile matematicii. Matematica pare insa o stiinta aparte, pe care matematicienii ar vrea-o definita, daca se poate, cit mai abstract, pe fundamente pur logice, fara legatura cu lumea reala. Astfel lumea (descrisa de fizica bazata pe matematica) ar putea aparea necesar facuta numai in felul in care e, pentru ca e "singurul mod logic" (un fel de a spune ca D-zeu nu ar fi avut de ales in a construi o alta lume).

Cu toate acestea, nu este atat de evident ca matematica este rupta de realitate. In fond, *matematica se bazeaza pe realitate* in chiar exprimarea ei. Ecuatiile se scriu cu cerneala facuta din atomi, insasi numerele sunt niste reprezentari abstracte ale unor experiente cotidiene (obiectele). Faptul ca $1+1=2$ *pentru toti oamenii* este tot un rezultat al unei experiente fizice care este identica la noi toti. Ce ar fi matematica daca, dindu-i 1 mar si inca 1 mar lui Ionescu el ar fi mincat 3 mere? Iar Popescu 4 mere?

Astfel, fundamental, matematica isi poate crea propriile ei probleme, pentru ca si ea la rindul ei se bazeaza pe ceva, si anume *experienta cotidiana*! Se formeaza un cerc vicios daca ea incearca sa explice lucurile simple din lumea inconjuratoare (adunarile, scaderile, etc.) bazindu-se tocmai pe lumea inconjuratoare. Acest lucru a fost speculat magistral de Godel, care a demonstrat ca exista afirmatii in matematica ce nu pot fi dovedite (in interiorul matematicii!) nici false, nici adevarate, deci matematica este incompleta!

Problemele acestea insa vom incerca sa le punem deoparte pe moment, si ne vom baza constructiile matematice pe experienta "normala" cotidiana. Totusi, cind vom avea probleme cu bazele matematice al unui proces pe care incercam sa-l explicam, e bine sa ne aducem aminte de consideratiile de mai sus, pentru ca ele ne pot ajuta sa "desacralizam" matematica folosita, eliminind de exemplu infinitati (la care noi, ca oameni, oricum nu avem acces).

Un obstacol aditional il va reprezenta *limbajul specific* matematicii. Caci, spre deosebire de limbajul verbal, unde literele si cuvintele au acelasi inteles intotdeauna, limbajul matematic necesita mai multa atentie, caci simbolurile utilizate sunt fie definite de autor pe parcurs (si valabile numai intre anumite pagini!), fie subintelese! Nu e de mirare deci ca cea mai deasa intrebare adresata unui autor de articol de fizica de cineva din bransa este "Ce ai vrut sa spui aici?".

In paragrafurile urmatoare incercam sa-l introducem pe cititor in cele mai utilizate instrumente matematice, functia, derivata si integrala.

9.1.1 Functia

Cum am amintit, orice experienta cotidiana este finalmente una fizica (caci ce este fizica altceva decit explicarea lumii inconjuratoare?). Totusi, vorbim de o experienta fizica atunci cind observatia cotidiana este masurata (cuantificata). Caci am vrea sa spunem nu numai "masina a trecut" dar si "masina a trecut *atunci* si *atit* de repede". Modul cel mai natural (in prezent!) de a prezenta mai multa informatie sunt *numerele* (lasam la imaginatia cititorului constructia altor moduri!). Ele pot da o informatie mai precisa, si sunt *reproductibile* pentru toti oamenii. Si primul mod de transmitere a acestei informatii va fi fost scrierea acestora pe o foaie de hirtie. Si cind cifrele sunt multe, ce alt mod de ordonare mai natural se putea imagina decit *tabelele*?

Sa consideram deplasarea unui tren (care are citeva zeci de statii de oprire). Ce este mai important pentru noi la el? Desigur, timpii cind ajunge si pleaca din statii, si nu culoarea, costumul conductorului, etc. Ori aceasta informatie *completa* se obtine printr-un tabel care ne da timpii de plecare si sosire in diferitele statii. Daca vrem insa sa aflam in ce statie trenul a stat mai mult, sau pe unde s-a deplasat trenul cu viteza mai mare, etc., tabelul poate fi migalos. Trebuie sa ne uitam la toate cifrele, sa tinem minte, si eventual sa facem si scaderi! Aceeasi problema tipica a fost intimpinata si de primii oameni ce au vrut sa foloseasca numerele scrise in tabele. Folosirea lor e migaloasa, si nu prezinta intotdeauna informatia in modul cel mai simplu. Asa ca altceva a fost inventat, si anume *graficul*! Un exemplu de grafic se afla in Fig. 9.2, unde miscarea unui tren intre citeva statii A,B,C (situate pe un drum drept pentru simplificare), este reprezentata printr-o linie rosie.

Pozitia trenului in diverse momente de timp se citeste acum trasind linii paralele la axe (pe axa orizontala timpul, iar pe cea verticala distanta), si vazind unde le intersecteaza (pentru usurinta, de cite ori ne uitam la un grafic, e bine sa ne imaginam o multime de linii trase paralel cu axele, ca un fel de retea). Astfel, punctul P de pe grafic ne spune ca la timpul "4h" trenul se afla la "175km" departare (vezi liniile albastre), undeva intre statiile A si B. Punctele M si N ne "spun" ca trenul ajunge la "50Km" (deci in statia A) la ora "2h" si pleaca la "3h". Comparind timpul de sedere in cele trei statii, putem acum spune cu usurinta ca trenul sta cel mai mult in statia A, si astfel, cel putin intr-un caz, graficul poate avea o utilitate si simplitate mai mare decit tabelul.

Dar miscarea trenului din Fig. 9.2 poate fi exprimata si intr-un alt mod mai abstract, prin intermediul unei *functii* atasate graficului prezentat. In general, o functie este o relatie unica de la elementele unei multimi (timpii, de exemplu) catre elementele altei multimi (pozitiile posibile ale trenului). Astfel, daca atasam functia $f(x)$ graficului din Fig. 9.2, vom intelege prin notatia $f(4h)=175Km$ ca la ora 4h trenul se afla la kilometrajul 175Km. Daca facem aceste atribuii, atunci putem spune ca $f(x)$ (ori simplu f) reprezinta traseul *integral* al trenului, in-

telegind automat ca x este un timp prezent pe grafic, iar $f(x)$ este pozitia in care se afla trenul in momentul x .

Exista o diferenta fundamentala intre utilizarea unei functii (sau grafic) pe de o parte, si utilizarea unui tabel pe de alta parte. Astfel, daca utilizam o functie (sau grafic), presupunem ca cunoastem toate *pozitiile* trenului intr-un interval dat (caci de la orice punct de pe grafic se pot duce paralele la axe si afla *aproximativ* intersectiile cu axele), pe cind tabelul nu ne ofera decit un numar limitat de valori. Cu alte cuvinte, nici tabelul nici graficul nu exprima exact realitatea, caci cina sta sa moaore o infinitate de puncte? Cu toate acestea, ce altceva putem face decit sa acceptam cunoasterea realitatii in limitele noastre finite? Caci graficul unei miscari reale, desi reprezinta *aproximativ* si *extrapolat* realitatea, ne poate fi totusi util daca aproximatia utilizata este in limitele dorite de noi.

9.1.2 Derivata

Avantajul functiilor (caci despre ele va fi vorba de acum incolo, atasindu-le in sa mereu in imaginar un grafic) este ca permite crearea unui limbaj matematic in care reprezentarile noastre despre realitate pot fi manipulate mai usor. Sa consideram de exemplu tot miscarea trenului din Fig. 9.2. Dar in schimb sa vorbim nu despre pozitia lui, ci despre *viteza* lui. Astfel, stiind acum distanțele si timpii, putem incerca sa aflam *viteza medie* intre statii. De exemplu, distanta intre statiile N si Q este de 175 km, iar trenul o parcurge in 2h, cu o viteza medie deci de $v[N,Q]=175/2=87.5\text{Km/h}$. Intre statiile R si S viteza medie este de $v[R,S]=100/1.5=66.6\text{Km/h}$.

O notiune mai apropiata de experienta noastra cotidiana este in sa nu viteza medie, ci *viteza instantanee*. Caci de cite ori o masina ne improasca cu apa din balta de pe drum, ne gindim imediat la viteza mare, de moment, a masinii (evenimentul este asa de scurt, incit face imposibila perceperea a doua momente *successive* de timp intre care sa atribuim instinctiv o viteza medie). Dar definirea in termeni matematici a vitezei instantanee ridica o problema. Caci viteza este definita ca distanta parcursa intr-un anumit interval de timp, ori, daca viteza este instantanee, acel interval de timp nu mai exista, este zero!

Solutia gasita de matematicieni la aceasta problema se numeste *calcul diferential* (de la diferenta), ori *infinitesimal*, si a fost introdusa in secolul XVII de catre Newton si Descartes (verifica). Pentru problema vitezei instantanee, ea se exprima astfel: *am putea sa definim viteza instantanee ca pe limita a unei viteze medii, cind cele doua capete ale intervalului pe care se calculeaza viteza medie se apropie de punctul in care vrem sa calculam viteza instantanee*. Astfel, viteza instantanee in punctul P, ar fi viteza medie intre punctele N si Q, cind acestea ar "aluneca" pe grafic catre P, (vezi Fig. 9.2) sau mai simplu cind punctul P este fix, iar Q "aluneca" catre P.

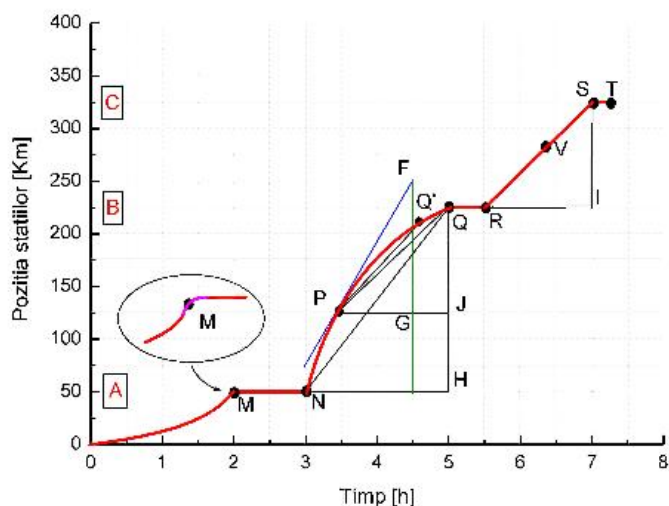


Figure 9.1: Calculul derivatei

Pentru a o calcula, sa observam ca viteza medie intre punctele P si Q este distanta parcursa (QJ in Fig. 9.2) impartita la timpul in care a fost parcursa (PJ), si deci este tangenta unghiului $\widehat{QPJ}$: $v_m[P,Q] = \tan(\widehat{QPJ})$. In general, viteza medie dintre doua puncte este tangenta unghiului format de segmentul ce uneste cele doua puncte cu axa orizontala. Cind vrem sa calculam viteza instantanee a punctului P, nu avem decit sa urmarim *tangenta* formata de segmentul PQ' (cind Q' "aluneca" spre P) cu axa orizontala. Din figura Fig. 9.2 se poate usor anticipa ca acel segment va tinde sa aiba *directia liniei tangente la curba in punctul P*. Astfel, *viteza instantanee* in punctul P ar fi tangenta unghiului format cu axa orizontala de catre linia tangenta in punctul P la grafic. Din Fig. 9.2 aceasta ar fi $v_i[P] = \tan(\widehat{FPG}) = 125\text{km}/1.5\text{h} = 83.3\text{km/h}$.

Constructia grafica folosita este utila si intuitiva, dar totusi greoaie, si de aceea vom incerca sa o "imbracam" acum in haine cu adevarat matematice, folosind limbajul specific al matematicii. Pentru aceasta, folosind functia $f(x)$ atasata graficului, observam ca putem scrie viteza instantanee in punctul P (data de tangenta la grafic cu axa orizontala), ca:

$$v_{inst}[P] = \lim_{Q' \rightarrow P} \frac{f(x_P) - f(x_{Q'})}{x_P - x_{Q'}} \quad (9.1)$$

unde simbolul $\lim_{Q' \rightarrow P}$ il citim ca "limita cind Q' tinde la P".

Daca definim acum derivata functiei f atasata graficului ca o cu totul alta functie, desemnata prin f' sau $f'(x)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (9.2)$$

observam ca derivata functiei in punctul x_0 , desemnata prin semnul $'$, este tocmai viteza instantanee, si deci tangenta la grafic! Mai observam ca procedura de mai sus se poate aplica oricarei functii. In general, de cite ori vedem scris semnul $'$ in dreptul unei functii, ca in f' , trebuie sa intelegem ca f' este o alta functie decit f (numita derivata ei), dar care se calculeaza din f cu ajutorul tangentei la grafic, adica formula 9.2! *Derivata functiei f calculata in punctul x este tangenta la grafic in x !*

O alta modalitate uzuala de scriere a derivatei este:

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} \quad (9.3)$$

unde se subintelege ca dx este o distanta foarte mica (infinitesimala) $dx = x - x_0$ cind x este apropiat de x_0 , $df(x)$ este diferenta corespunzatoare $df(x) = f(x) - f(x_0)$ iar $|_{x_0}$ inseamna "calculat in punctul x_0 ".

Dar definitia derivatei din 9.2 are multe "ascunzisuri matematice" pe care nu le vom decit aminti aici, pentru ca pentru noi este mai importanta intelegerea "intuitiva" a definitiei. Este important de observat astfel ca limita 9.2 trebuie sa existe si sa fie *unica*. Din discutia noastra cu tangenta, aceasta pare evident, in sa uitati ce se intimpla daca vrem sa calculam derivata functiei f din Fig.9.2 in punctul M: mai multe "tangente" pot fi duse la grafic! Matematicienii ar prefera in acest caz sa defineasca o limita pentru stnga punctului M (adica Q vine "din stnga") si o limita pentru dreapta (adica Q vine "din dreapta"). Lasam ca exercitiu cititorului sa demonstreze ca ambele sunt finite, si sa le calculeze valorile. Problema in sa nu ar fi rezolvata si pentru noi, caci care e atunci viteza instantanee in punctul M, cea de la venire (stnga), ori cea de la plecare (dreapta)?

Solutia care ne alunga in sa noua toate "nelinistile filozofice" si invinge "teama" de matematica, este cea prezentata in insetul Fig. 9.2: nimeni nu are un timp infinit sa masoare toate pozitiile in jurul punctului M, si daca o infinitate ramini nemasurate, de ce sa nu presupunem ca ele arata ca cele din insetul figurii Fig. 9.2? Functia f are acum tangenta in M, ceea ce inseamna ca f este derivabila in M! De aceea, de acum incolo, ne vom folosi de acest "truc", sa presupunem ca *toate* functiile "fizice" cu care vom lucra noi sunt derivabile in orice punct (adica tangenta poate fi dusa in orice punct), si, mai mult, *infinit derivabile*, adica si derivata derivatei este derivabila, una din alta, toate sunt derivabile!

Avantajul derivatei este in sa altul, mai putin evident aici. Astfel, matematicienii au aratat, iar noi am tot exersat prin clasa a XI-a, ca derivata functiilor uzuale (sin, cos, tan, etc.) sunt tot functii uzuale!. Astfel, de exemplu, $\sin'(x) = \cos(x)$! Cu alte cuvinte, desi ne asteptam ca derivata functiei $\sin(x)$, calculata cu procedeul grafic prezentat mai sus, sa fie o functie greoi de calculat in fiecare punct, acum aflam ca ea este extrem de simplu de calculat, pentru ca este chiar $\cos(x)$. Din minunile matematicii!

Mai mult, exista reguli de derivare a functiilor compuse, ca suma produsul, etc. De exemplu, $(fg)' = f'g + g'f$. Astfel daca stim derivatele functiilor f si g in parte, vom sti si derivata produsului lor! La sfirsitul cartii prezentam un tabel cu derivatele functiilor uzuale si reguli de derivare ale functiilor compuse pentru uzul cititorului. Cert este ca, daca am putea exprima functiile noastre "fizice" in compusi de functii uzuale, putem in principiu calcula derivatele lor. De exemplu, daca $f(x) = x * \sin(x)$, atunci $f'(x) = (x * \sin(x))' = 1 * \sin(x) + x * \cos(x)$

9.1.3 Integrala

O alta marime care se va dovedi utila este aria subintinsa de grafic. De exemplu, fie functia prezentata cu o linie rosie in dreapta Fig.9.2. "Aria de sub grafic" intre punctele $x_1 = 2$ si $x_2 = 6$ este data de sufrata hasurata ABNM. O modalitate de calculare a ariei hasurate, este sa o impartim in multe dreptunghiulete mici, si apoi sa adunam ariile. Pentru simplitate am ales in figura 4 dreptunghiuri de inaltime cit valoarea functiei in stanga dreptunghiului.

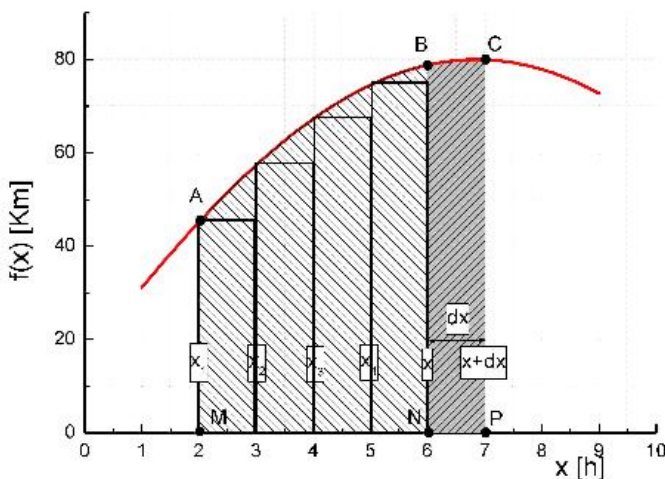


Figure 9.2: Calculul integralei

Am putea scrie atunci:

$$Aria[x_1, x_2] \simeq \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i) * (x_{i+1} - x_i) \quad (9.4)$$

Putem alege latimea dreptunghiurilor constanta, $dx = x_{i+1} - x_i$. Notatia pentru latimea dreptunghiului dx nu este intimplator asemanatoare cu cea de la derivata. Intr-adevar, o aproximatie mai precisa a ariei se obtine alegind dreptunghiuri cit mai inguste, pentru care dx este o marime infinetizimala (dar finita, data de $(x_2 - x_1)/N$, unde N este numarul de dreptunghiuri). Atunci putem "imbunatati" relatia de mai sus cu:

$$Aria[x_1, x_2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i) * dx \quad (9.5)$$

Formula de mai sus ne da o modalitate destul de precisa (depinde de N cit de mare putem alege) de calcul a ariei de sub functie. Pentru o alta functie, aceeasi procedura de calcul poate fi folosita. Din cauza aceasta, ar fi util sa introducem o notatie pentru aceasta procedura de calcul a ariei. Vom alege:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) * dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i) * dx \quad (9.6)$$

Semnul $\int$ se numeste integrala, iar formula de mai sus se citește: "integrala de la x_1 la x_2 din $f(x)$ ". Cert este ca de cite vom vedea expresia din stanga relatiei 9.6, vom face "putin" abstractie de dx si vom sti ca trebuie sa calculam aria de sub f intre x_1 si x_2 .

Bine, bine, veti spune, dar ce mare chestie cu aria sau integrala asta? Ei bine, integrala este inversa derivatei! Astfel, sa definim urmatoare functie de x :

$$g(x) = \int_{x_1}^x f(y) * dy \quad (9.7)$$

In definitia de mai sus am schimbat semnul x cu semnul y , dar aceasta este o problema numai de notatie. Din nou, avind x_1 si $f(x)$, un numar si o functie date, functia $g(x)$, adica integrala functiei f intre x_1 si x , va fi unica, si se poate calcula cu 9.7. Derivata functiei $g(x)$ astfel definita se calculeaza cu 9.2 si este:

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_1}^x f(y) * dy - \int_{x_1}^{x_0} f(y) * dy}{x - x_0} \quad (9.8)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(y) * dy}{x - x_0} \quad (9.9)$$

unde am folosit la numarator diferenta dintre doua arii. Din figura 9.2 putem in sa vedea ca, atunci cind intervalul dx este foarte mica, aria subintinsa de grafic intre x si x_0 este foarte bine aproximata de dreptunghiul NBPC: $\int_{x_0}^x f(y) * dy \simeq (x - x_0) * f(x) = dx * f(x)$, si deci

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x)}{x - x_0} = f(x) \quad (9.10)$$

Derivata functiei $g(x)$ definita in equatia 9.7 este $f(x)$ ori-care ar fi x_1 !

In acelasi fel in care am aratat mai sus ca derivata unei integrale este functia in sa, putem arata ca integrala unei derivate ne returneaza tot functia in sa. Astfel

9.3.2 Integrale multidimensionale

Daca integrala functiei scalare a fost aria de sub grafic, nu este de mirare ca vom defini integrala functiei bidimensionale $f(\vec{r}) = f(x, y)$ din Fig. 9.3 ca volumul de sub suprafata functiei. Ca si in calculul integralei scalare 9.6 acest volum se aproximeaza ca o suma de N volume mici, fiecare egal cu aria bazei sale mici dA (aleasa constanta) inmultita cu inaltimea (care e chiar valoarea functiei) $f(\vec{r}_i) = f(x_i, y_i)$:

$$\int_S f(\vec{r}) dA = \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) dA \quad (9.18)$$

Ca si in cazul integralelor scalare 9.6, avem doua abordari, cea numerica (prezentata mai sus) si cea analitica. Aceasta din urma foloseste formulele matematice ale functiilor uzuale. Desi amindoua conduc la acelasi rezultat, noi o vom folosi din nou mai mult pe cea analitica, pastrand insa in minte constructia celei numerice 9.18. Avantajul este ca astfel "spargem" imaginat in minte elementele fiecarei formule continind semnul integralei, si deci facilitam "traducerea" si intelegerea a ceea ce citim.

Forma bazei S in 9.18 poate fi oricare, dar ea determina evaluarea analitica a integralei. Astfel, daca baza S este un dreptunghi, atunci putem scrie suma 9.18 ca:

$$\sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) dA = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1}^{i=\sqrt{N}, j=\sqrt{N}} f(x_i, y_j) \cdot dx dy \quad (9.19)$$

Dupa cum se observa, am ales bazele dreptunghiuri mici identice de latime dx si lungime dy . Elementul $dA = dx \cdot dy$ se mai numeste si element de arie. Din limitele integralei vedem ca baza totala S este data de dreptunghiul de laturi $(x_2 - x_1)$ si $(y_2 - y_1)$. Folosind definitia integralei scalare 9.6, putem face in acest caz identificarea:

$$\int_S f(\vec{r}) dA = \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \right] dy \quad (9.20)$$

Integrarea analitica se poate face acum mai intii integrand dupa o variabila (in cazul de sus x), pastrand pe cealalta constanta, si apoi integrand dupa variabila ramasa.

Cum am discutat, integrala cimpului scalar tridimensional nu mai poate fi vizualizata, dar ea se defineste exact in acelasi fel ca 9.18, si poate fi scrisa ca:

$$\int_{\Omega} f(\vec{r}) dV = \sum_i f(\vec{r}_i) dV \quad (9.21)$$

unde volumul dV al fiecarui element micut se numeste element de volum. Volumul total pe care se integreaza, notat cu Ω , poate avea in general avea orice forma. Suma din dreapta ne spune ca trebuie doar sa "spargem" forma in cubulete mici dV , sa inmultim volumul dV al fiecarui cubulet cu valoarea functiei in interiorul acelu cubulet $f(\vec{r}_i)$ si apoi sa adunam rezultatele! Daca Ω este un cub, atunci o formula similara lui 9.20 poate fi utilizata, altfel alte trucuri trebuie folosite.

Remarcam in definitiile integralelor 9.6, 9.18, 9.21 identificarea semnului de integrala cu o suma de elemente mai mici. Parte din limbajul nostru matematic pe care-l construim aici va fi ca aceste elemente pot fi scalare (unde vom scrie in general dx , dy sau dz), de arie (dA) sau de volum (aici scriem in general dV).

9.3.3 Operatorul ∇

Sa consideram din nou exemplul functiei bidimensionale din Fig. 9.3. Ne intereseaza o aproximatie a diferentei functiei $f(x, y)$ intre doua puncte apropiate A si B : $\Delta f = f(A) - f(B)$, folosind, daca se poate, derivata unei functii. Alegind un punct N de pe sprafata astfel incit AN si NB "merg" de-a lungul axelor, vedem din Fig. 9.3 ca putem scrie $\Delta f = PB = PQ + QB = MN + QB$.

Dar, deoarece AN este de-a lungul axei y , pe linia corespunzatoare lui $x = 8$, putem scrie MN ca variatia functiei scalare $f(8, y)$: $MN = f(8, y = 3) - f(8, y = 1)$, sau

$$MN = \frac{f(8, y = 3) - f(8, y = 1)}{\Delta y = 3} \Delta y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(8,2)} \Delta y \quad (9.22)$$

unde prin notatia ∂ intelegem derivata functiei in raport cu o anume variabila (celelalte sunt constante). In acelasi mod putem calcula si QB cu ajutorul derivatei functiei $f(x, 3)$. Vom avea atunci:

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(5,3)} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(8,2)} \Delta y \quad (9.23)$$

Desigur ca formula de mai sus nu este decit o formula simplificata e expansiunii Taylor. Intr-o forma generalizata pentru trei dimensiuni, vom avea atunci:

$$\Delta f(x, y, z) \simeq \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \quad (9.24)$$

Putem simplifica formal relatia de mai sus, daca definim operatorul ∇ ca

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (9.25)$$

Operatorul ∇ transforma deci un *cimp scalar* $f(\vec{r})$ intr-un *cimp vectorial* $\nabla f(\vec{r})$, caci acum in fiecare punct din spatiu, prin aplicarea 9.25 vom obtine un vector!

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (9.26)$$

Cum diferenta infinitezimala dintre pozitiile a doua puncte poate fi scrisa ca $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ avem, utilizind produsul scalar al vectorilor,

$$df(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (9.27)$$

Forma vectoriala a operatorului ∇ definit in 9.25 face posibila generalizarea lui cind este aplicat la vectori. Astfel, asemanator produsului scalar intre vectori, definim operatorul ∇ aplicat unui cimp vectorial $\vec{C}(x, y, z) = C_x(x, y, z)\vec{i} + C_y(x, y, z)\vec{j} + C_z(x, y, z)\vec{k}$ ca

$$\nabla \cdot \vec{C}(x, y, z) = \nabla_x C_x + \nabla_y C_y + \nabla_z C_z = \quad (9.28)$$

$$= \frac{\partial C_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial C_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial C_z(x, y, z)}{\partial z} \quad (9.29)$$

Astfel, in fiecare punct din spatiu al cimpului vectorial $\vec{C}(x, y, z)$ putem calcula un numar real cu formula de mai sus. Cantitatea $\nabla \cdot$ se numeste divergenta.

O alta marime utila, obtinuta din produsul vectorial a doi vectori, se numeste "rotor", si este data de:

$$\nabla \times \vec{C}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (9.30)$$

$$= \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) \vec{k} \quad (9.31)$$

"Rotorul" $\nabla \times$ transforma astfel un cimp vectorial in alt cimp vectorial.

Desigur ca veti intreba, la ce bune aceste constructii matematice? Acum, de fiecare data cind vad un ∇ trebuie sa ma uit cui se aplica, unui cimp vectorial sau unui scalar, nu este de ajuns ca deja am integralele multidimensionale de "citit"? Adevarul este ca avem de ∇ pentru ca el sta la baza teoriei electromagnetismului. Astfel ∇ este una din acele constructii matematice care supravietuiesc viguros timpului, tocmai pentru ca ele sunt indispensabile unui anumit domeniu de aplicatie.

In final discuta, fara sa demonstrezi, doua teoreme matematice privitoare la ∇ :

$$\oint_S \vec{C}(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r}) dA = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \vec{C}(\vec{r})] dV \quad (9.32)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{C}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_S [\nabla \times \vec{C}(\vec{r})] \vec{n} dA \quad (9.33)$$

9.4 Matematica - Geodezice

9.4.1 Metrica

Sa consideram o varietate n -dimensionala R_n integrata intr-un spatiu euclidian de dimensiune m ($m < n$). Presupunem ca pe varietatea R_n este prezenta o retea de identificare a punctelor, pe care o identificam cu un sistem de coordonate $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Putem spune ca vom cunoaste deplin varietatea n -dimensionala R_n daca vom sti complet m functii

$$y_j = y_j(x^1, \dots, x^n), j = \overline{1, m} \quad (9.34)$$

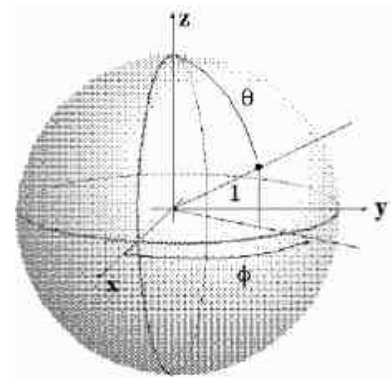
Mai simplist, aceasta inseamna ca daca ni se furnizeaza niste coordonate $P = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ oarecare, putem afla pozitia acelui punct P in spatiul euclidian m -dimensional (data de $P = (y^1, y^2, \dots, y^m)$) cu ajutorul functiei 9.34. Daca calculam toate pozitiile posibile ale lui P , pornind de la toate valorile pe care le poate lua setul de puncte $P = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, atunci vom fi in stare sa "desem" complet varietatea dimensionala R_n .

Sa ne imaginam acum ca niste "omuleti" traiesc numai in varietatea R_n , fara sa aiba acces la celelalte puncte ale spatiului "total" E_m , si care masoara aceasta varietate. Pe distante mici insa, sa presupunem ca varietatea R_n se comporta "euclidian". Aceasta inseamna ca, daca consideram doua puncte $M = (x_M^1, x_M^2, \dots, x_M^n)$ si $N = (x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^n)$ apropiate, distanta ds dintre acestea, masurata in varietatea R_n , este aproape aceeasi cu cea masurata de un observator aflat in spatiul "total" E_m :

$$ds^2 = \sum_{j=1}^m (y_j^M - y_j^N)^2 = \sum_{j=1}^m dy_j^2 \quad (9.39)$$

Fie suprafata 2-dimensională a unei sfere "integrate" in spatiul nostru 3-dimensional euclidian (vezi Fig9.2). Sa presupunem ca (pentru usurinta calcului) sfera are raza egala cu o unitate si ca alegem sistemul de identificare a punctelor pe suprafata $P = (x^1, x^2)$ precum sistemul de grade (longitudine si latitudine) al Pamintului. Alegem deci retea de "identificare" a punctelor (vezi Fig9.2) astfel:

$$x^1 = \theta \quad x^2 = \phi \quad (9.35)$$



Daca ni se dau niste coordonate oarecare $x^1 = \theta$ si $x^2 = \phi$, putem calcula din Fig 9.2 pozitiile sale x, y, z in spatiul euclidian:

$$y_1(\theta, \phi) = x = \sin \theta \cos \phi \quad (9.36)$$

$$y_2(\theta, \phi) = y = \sin \theta \sin \phi \quad (9.37)$$

$$y_3(\theta, \phi) = z = \cos \theta \quad (9.38)$$

In exemplul sferei, ei ar fi niste fiinte plane 2-dimensionale, care s-ar plimba *numai* pe sfera, si care ar avea niste rigle pentru a masura distantele. Riglele ni se vor parea noua desigur curbate, si deformabile, pentru ele se s-ar aseza mereu in suprafata sferei. Pentru valori apropiate ale punctelor de pe sfera, putem observa ca spatiul este aproape plan, precum si noua ni se pare Pamintul plan, desi este rotund. Riglele folosite pentru a masura aceste distante mici vor fi aproape drepte, geometria euclidiană poate fi aplicata intr-o prima aproximatie, si atunci putem considera ca distanta masurata de "omuleti" este aproape identica cu cea masurata de noi in spatiul 3-dimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9.40)$$

Sa incercam sa exprimam aceasta distanta in coordonatele $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ale punctelor din varietate, presupunind functiile 9.34 complet cunoscute, si folosind formula diferentialei (pentru ca punctele M si N sunt apropiate).

$$dy_j = y_j(x_M^1, x_M^2, \dots, x_M^n) - y_j(x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x^i} dx^i \quad (9.41)$$

Derivata partiala se poate calcula (pentru ca functiile 9.34 se presupun cunoscute) fie in punctul M, fie in punctul N. Daca cele doua puncte sunt apropiate, atunci valoarea ei este aproximativ aceeași, si o putem considera constanta intr-o regiune mica din apropierea celor doua puncte M si N. Inlocuind in relatia precedenta, avem:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x^i} dx^i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x^k} dx^k \right) = \sum_{i,k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^k} \right) dx^i dx^k \quad (9.42)$$

In relatia de mai sus putem defini functiile

$$g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^k} |_{(x^1, x^2, \dots, x^n)} \quad (9.43)$$

Valorile g_{ik} pot fi calculate in fiecare punct $P = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, cunoscandu-se functiile 9.34, si deci ele trebuie privite ca pe o functie $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ de coordonatele varietatii R_n . Distanța ds dintre M si N se poate calcula deci ca:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx^i dx^k \quad (9.45)$$

unde $dx^i = x_M^i - x_N^i$, iar g_{ik} trebuie calculat fie in M, fie in N, fie intr-o vecinate mica a acestora.

Din figura 9.2 se poate vedea ca distanta intre doua puncte M si N infinitezimal apropiate se calculeaza cu:

$$ds^2 = AB^2 + BC^2 = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2 \quad (9.46)$$

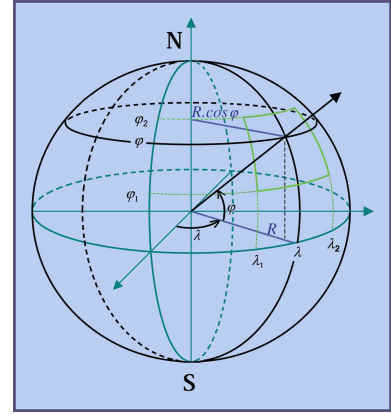
Prin comparatie cu 9.77, putem identifica direct valorile metricei:

$$g_{11}(\theta, \phi) = 1; \quad g_{12}(\theta, \phi) = g_{21} = 0; \quad g_{22}(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \quad (9.47)$$

Acestea se puteau calcula insa si direct din relatia 9.43, si folosind 9.36. Avem atunci, de exemplu,

$$g_{22}(\theta, \phi) = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} = \quad (9.48)$$

$$= (-\sin \theta \sin \phi)^2 + (\sin \theta \cos \phi)^2 + (0)^2 = \sin^2 \theta \quad (9.49)$$



Pentru a intelege mai bine notinua de distanta infinitezimala ds , sa calculam distnta pe cerc intre punctele S si P (un sefert de cerc). Vedem din Fig. 9.2 ca ele au coordonatele $S(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ si $P(\theta = \pi/2, \phi = \pi/2)$. Putem scrie atunci:

$$SP_{cerc} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} ds = \quad (9.50)$$

$$\int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \sqrt{(d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2} \quad (9.51)$$

Obtinem astfel un sfert din perimetrul unui cerc de raza unitate, asa cum ne asteptam.

Relatiile de mai sus sunt abstracte, insa foarte "puternice". Astfel, recapitulind putin, am presupus ca pe varietatea R_n exista un sistem *oarecare* de coordonate $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Acestea nu fac decit sa identifice punctele din R_n . Am poresut desemenea ca cunoastem m functii 9.34 care determina coordonatele punctelor in spatiul E_m . Dinduni-se niste valori ale unui punct $P = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, putem calcula atunci cu 9.34 pozitiile sale $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ in spatiul E_m . Nu stim daca varietatii R_n i se pot atribui coordonate euclidiene pe toata intinderea sa, dar pe portiuni mici am presupus ca R_n se comporta euclidian. In consecinta, am dedus realtia 9.77 care ne spune cum se poate calcula distanta intre doua puncte apropiate M si N *in functie de coordonatele varietatii* $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Astfel, mai intii trebuie sa calculam *metrica* varietatii R_N , folosind relatiile 9.43 pentru $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ in fiecare punct al varietatii. Odata stiuta aceasta, si coordonatele celor doua puncte M si N, nu avem decit sa inlocuim in 9.77 si sa calculam distanta corespunzatoare infinitezimala. O distanta macroscopica se calculeaza atunci prin integrare.

9.4.2 Coordonate covariante, contravariante..

Se vede ca relatia 9.77 se poate scrie simplificat ca

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i dx^i \quad (9.52)$$

daca definim

$$dx_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} dx^k \quad (9.53)$$

Relatia de mai sus poate fi folosita pentru ca varietatii R_n , descrisa de coordonatele $(x^1, \dots, x^n)$ sa-i poata fi atasata un sistem "paralel" de coordonate $(x_1, \dots, x_n)$: mai intii se stabileste o origine a noului sistem (foarte probabil identica cu cea a vechiului sistem), si apoi se calculeaza succesiv (ori prin integrare) coordonatele noului sistem cu ajutorul 9.62. Pentru o separare clara a celor doua, coordonatele originale $(x^1, \dots, x^n)$ se numesc *coordonate covariante*, si se desemneaza prin indici superiori x^k iar coordonatele noi $(x_1, \dots, x_n)$ se numesc *coordonate contravariante* si se recunosc prin indicii sai inferiori x_k . Fiecare punct din varietatea R_n a fi desemnat deci prin doua seturi de numere, cite unul pentru fiecare sistem de coordonate.

Desigur ca sistemul de coordonate contravariante isi are si el "metrica" lui, notata aici cu g^{ki} (indici superiori!). Aceasta metrica se calculeaza pentru fiecare punct din varietate daca construim sistemul de ecuatii:

$$dx_1 = \sum_{i=1}^n g_{1i} dx^i \quad \dots \quad dx_n = \sum_{i=1}^n g_{ni} dx^i \quad (9.54)$$

Considerind necunoscutele dx^k , putem rezolva sistemul de mai sus pentru fiecare punct al varietatii, utilizind de exemplu metoda Kramer. Vom obtine atunci solutii de tipul

$$dx^k = \sum_{i=1}^n g^{ki} dx_i \quad (9.55)$$

si deci putem identifica direct metrica g^{ik} a sistemului contravariant ca fiind matricea inversa a metricii g_{ik} *in fiecare punct al varietatii R_n* . Acest lucru se poate verifica si daca scriem direct (sa mai scriu liniile de mai sus cu ecuatiile?)

$$dx_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} dx^k = \sum_{k,l=1}^n g_{ik} g^{kl} dx_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kl} \right) dx_l \quad (9.56)$$

Cum relatia de mai sus are loc indiferent de ce valoare i alegem, nu putem avcea decit ca

$$\sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kl} = \delta_{il} \quad (9.57)$$

unde δ_{il} este simbolul lui Dirac (1 daca $i=l$, a altfel 0). Relatia de mai sus este o alta maniera de a vedea ca matricea g^{ik} este inversa matricii g_{ik} .

Sa construim sistemul de coordonate contravariante atasat sferei, inclund direct in relatiile 9.62

$$dx_1 = \sum_{i=1}^n g_{1i} dx^i = 1 \cdot d\theta + 0 \cdot d\phi = d\theta \quad (9.58)$$

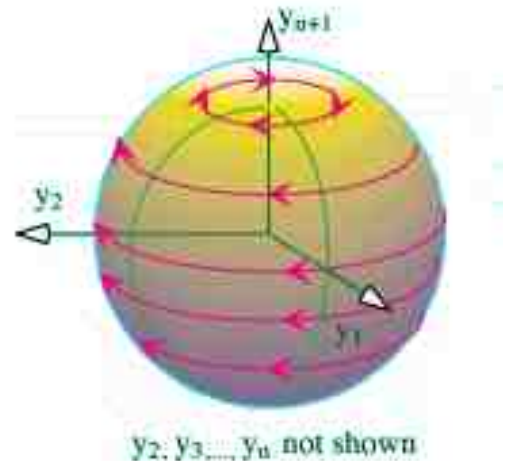
$$dx_2 = \sum_{i=1}^n g_{2i} dx^i = 0 \cdot d\theta + \sin^2 \theta \cdot d\phi = \sin^2 \theta d\phi \quad (9.59)$$

Daca alegem aceeasi origine, putem scrie atunci direct coordonatele contravariante ca (verifica, nu sunt sigur):

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \phi(\sin \theta)^2 \quad (9.60)$$

Pentru sfera, metrica g^{ik} a sistemului contravariant x_k se calculeaza inversind matricea g_{ik} data de 9.47. Obtinem deci

$$g^{11} = 1 \quad g^{12} = g^{21} = 0 \quad g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (9.61)$$



In finalul acestei sectiuni sa adoptam o conventie de scriere a sumelor datorata lui Einstein, care simplifica mult scrierea ecuatiilor. Astfel, vom elimina semnul de suma daca in dreapta sumei apar *precis doi indici* care trebuie sumati, si daca unul dintre ei este superior, iar celalalt inferior. Semnificatia fizica a acestei reguli, numita contractie (cred!, verifica), o discutam mai tirziu. Astfel, de exemplu, putem rescrie ecuatiile 9.62 si 9.77 (care are doua sume in definitia ei ce le eliminam) ca

$$dx_i = g_{ik} dx^k \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (9.62)$$

9.4.3 Geodezica

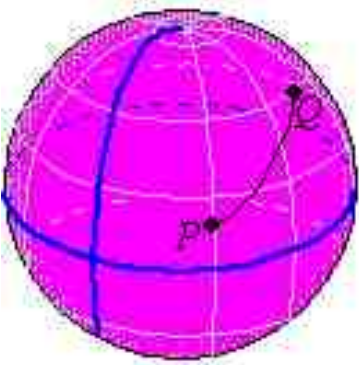
Pe sfera din exemplul precedent, sa consideram doua puncte date A si B aflate la o *distanța mare* între ele. Putem parcurge distanța dintre A si B pe diferite "carari", in sa ne intereseaza care este "cararea" cea mai scurta. Intr-un spatiu euclidian aceasta este prin definitie linia dreapta. Intr-un spatiu curb (ca suprafata sferei) acest lucru nu mai este evident, daca nu cel puțin pentru simplul motiv ca o "dreapta" nu mai poate fi construita. (Aici e ciudat, ce se intimpla cu cilindru?). Desigur ca acesta problema este cruciala in masuratorile suprafetelor neplate ale pamintului (dealuri, munti), adica in geodezie.

Exista doua abordari des intilnite in literatura. Prima considera transportul paralel al vectorilor, cea de-a doua presupune rezolvarea directa a ecuatiilor, folosind metoda lui Lagrange. Aici alegem a doua metoda, mai "spinoasa", dar nu mai puțin riguroasa (chiar mai mult, as zice eu).

Astfel, sa presupunem ca, ca vrem ca o masina sa strabata "cararea" de la A la B intr-un timp minim, mergind in sa cu viteza constanta (ceea ce este echivalent cu a spune ca trebuie sa alegem cararea cea mai scurta). Distanța parcursa atunci se poate scie ca:

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} = \int_A^B \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt \quad (9.63)$$

Sa ne reamintim ca $g_{ik} = g_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ sunt functii cunoscute de coordonatele covariante x^k . Problema noastra este sa gasim o traiectorie care minimizeaza integrala de mai sus. Traiectoria o putem afla daca stim un set de functii de timp pentru fiecare coordonata $x^k = x^k(t)$. Cu alte cuvinte, daca cineva ne da un timp t anume, noi trebuie sa inlocuim in functiile $x^k = x^k(t)$ presupuse cunoscute, si afla coordonatele masinii complete ale masinii x^k la acel moment de timp t . Dar cum sa gasim functiile $x^k = x^k(t)$?



Considerind in sa timpul in mod clasic, Newtonian, vedem ca integrala 9.63 este de tipul Lagrange, asa cum am discutat in ???. Mai precis ea este de forma:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} f(x^i, \dot{x}^i) dt \quad (9.64)$$

unde

$$f(x^i, \dot{x}^i) = \sqrt{g_{ik}(x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i \dot{x}^k} \quad (9.65)$$

este o functie ce are o forma analitica de coordonate si viteze, dar nu depinde explicit de timp, ci doar implicit, prin coordonatele x^i . (ecutia are limitele de integrare timpul acum! trebuie sa spun ca formulare e echivalenta), Conform ??, integrala de mai sus este minima atunci cind au loc urmatoarele relatii in fiecare punct al traiectoriei:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^m} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^m} = 0; \quad m = \overline{1, n} \quad (9.66)$$

Ecuatia de mai sus ne da cheia in aflare traiectoriilor (or furtiilor) $x^k = x^k(t)$, si acest lucru se poate vedea daca o "disecam" intr-un mod numeric (computeristic). Astfel, cineva ne da la un moment initial pozitiile x_0^i si vitezele initiale $\dot{x}_0^i$ ale masinii. La un moment ulterior mic $0 + dt$, putem inlocui in sistemul de ecuatii de mai sus ...

Sa incercam in sa acum sa gasim si o forma analitica a traiectoriei masinii. Astfel, inlocuind direct functia f din 9.65, unde x^i si $\dot{x}^i$ apar explicit, putem calcula derivatele ce apar in 9.66, obtinind:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^m} = \frac{g_{im} \dot{x}^i + g_{mk} \dot{x}^k}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \quad (9.67)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^m} = \frac{\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \quad (9.68)$$

Derivata cu timpul se scrie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^m} \right) = \frac{\frac{d}{dt} (g_{im} \dot{x}^i + g_{mk} \dot{x}^k)}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} + \quad (9.69)$$

$$+ (g_{im} \dot{x}^i + g_{mk} \dot{x}^k) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \right) \quad (9.70)$$

Acum, pargurgerea traiectoriei de la A la B se poate efectua pe *distanța minima* intr-o infinitate de moduri daca permitem vitezei sa varieze (accelerat, apoi decelerat, etc.). Toate aceste solutii se regasesc in ecuatiile de mai sus. Pe noi in sa ne intereseaza in primul rind traiectoria, si de aceea simplificam problema, cautind numai solutia in care traiectoria e parcursa cu viteza constanta. Cum viteza este data de

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} \quad (9.71)$$

avem atunci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2v} \right) = 0 \quad (9.72)$$

si deci al doilea termen din relatia 9.69 se anuleaza. Pentru rescrierea termenului rams, atentie mai mare trebuie in sa

acordam derivatei cu timpul, caci acesta apare prin intermediul coordonatelor. Astfel, avem:

$$\frac{dg_{im}(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \dot{x}^k \quad (9.73)$$

unde am folosit notatia lui Einstein. Termenul ramas din 9.69 se rescrie atunci (aici schimb putin coeficientii si acum apar de 4 ori, explica ca nu e nici o problema sau rescrie atent):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^m} \right) = \left(\dot{x}^i \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \dot{x}^k + g_{im} \ddot{x}^i \right) + \left(\dot{x}^k \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} \dot{x}^i + g_{mk} \ddot{x}^k \right) \quad (9.74)$$

Inlocuindu-l pe acesta si 9.68 in relatia 9.66, obtinem:

$$g_{im} \ddot{x}^i + g_{mk} \ddot{x}^k + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \quad (9.75)$$

Cum $g_{im} = g_{mi}$, primii doi termeni sunt egali, si traiectoria este data de:

$$2g_{mk} \ddot{x}^k + \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \quad (9.76)$$

Termenul din paranteza se numeste simbolul lui Christoffel:

$$\Gamma_{ik,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (9.78)$$

Relatia se mai poate simplifica daca o inmultim cu g^{ml} , adunam dupa m . Avem astfel

$$g^{ml} (g_{mk} \ddot{x}^k + \Gamma_{ik,m} \dot{x}^i \dot{x}^k) = g^{ml} g_{mk} \ddot{x}^k + g^{ml} \Gamma_{ik,m} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \quad (9.79)$$

Pentru primul termen folosim relatia 9.57:

$$g^{ml} g_{mk} \ddot{x}^k = \delta_{kl} \ddot{x}^k = \ddot{x}^l \quad (9.80)$$

In al doilea definim simbolul lui Christoffel de ordin doi

$$\Gamma_{ik}^l = g^{ml} \Gamma_{ik,m} = \frac{g^{ml}}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (9.82)$$

Inlocuind inapoi acesti doi termeni, obtinem relatia simplificata a traiectoriei:

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \quad (9.84)$$

Atita munca, pentru o ecuatie atat de simpla, veti spune. Este adevarat ca din considerente de simetrie, puteam presupune o forma similara, insa problema ar fi fost aflarea coeficientilor Γ_{ik}^l . In fapt, complexitatea ecuatiei sta tocmai in forma coeficientilor Γ_{ik}^l dati de 9.81. Astfel, acestia trebuie calculati in orice punct al varietatii R_n , cunoscandu-se insa valorile metricii $g_{ik} = g_{ik}(x_1, \dots, x_n)$ in acel punct si punctele invecinate (pentru a calcula derivatele).

Avantajul formei 9.83 este ca ne da direct *traiectoria minima* urmata de masina intre A si B parcursa in plus si cu *viteza constanta*. Astfel, reamintindu-ne discutiile despre abordarea numerica a ecuatiilor, vedem imediat maniera in care aceasta poate fi implementata intr-un program software. Astfel, daca ni se da pozitia $(x_1, \dots, x_n)$ si viteza masinii $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ la un moment $[t]$, putem calcula componentele pozitiei si ale vitezei la un moment ulterior $[t + dt]$ utilizind 9.83 cu:

$$x^l[t + dt] = x^l[t] + \dot{x}^l[t] dt \quad (9.85)$$

$$\dot{x}^l[t + dt] = \dot{x}^l[t] + dt (-\Gamma_{ik}^l \dot{x}^i[t] \dot{x}^k[t]) \quad (9.86)$$

In felul acesta putem crea iteratii succesive si afla traiectoria, care este de fapt distanta cea mai scurta intre punctele de pe traiectorie.

9.4.4 Curbura spatiului

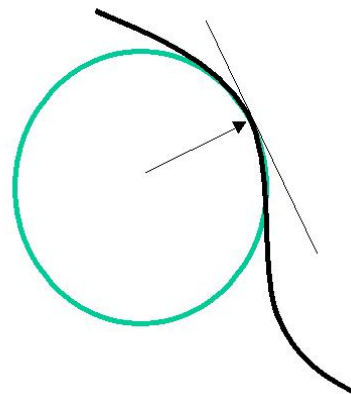


Figure 9.4: Raza de curbura (sau razele?). Care e contractia? tangenta la o sfera?, paraboloid mai degraba, doua numere

9.5 Spatiul Hilbert. Vectori bra si ket