

Hervorragende Fachleute über die Bücher von Dr. Heinrich Blasius:

„... Es ist für den Charakter dieser Bücher kennzeichnend, daß die beiden Bände der Mechanik zusammen 454 Abbildungen und 197 durchgerechnete Aufgaben aus der Praxis bringen, die Wärmelehre 126 Figuren und 67 Beispiele. Die pädagogische Sorgfalt, mit der diese Ergänzungen des klaren und übersichtlichen Textes ausgewählt sind und der gesamte Aufbau des Werkes durchgeführt wurde, kann man mit gutem Gewissen als unübertrefflich bezeichnen. Es sind Bücher, wie sie der praktische Ingenieur erwartet....“

(Zeitschrift für Ingenieurberufsfragen „Der Ingenieur“, 3. Jahrgang Nr.5/6.)

„... In pädagogisch glänzender Weise wird bei Behandlung des Stoffes zunächst einmal die Aufgabe vorangestellt und daran und dafür die Methode entwickelt...“ (Energie und Technik, Heft 5, Sept. 1949.)

„... Besonders hervorheben, daß der Verfasser weder ein Kochrezept noch etwa eine fertige Mahlzeit anbietet, sondern tatsächlich durch sparsamste Verwendung von Worten zum Nachdenken zwingt, immer wieder zwingt zur Überprüfung, und auf diese Weise Schritt für Schritt die Gedankenarbeit bewirkt, die notwendig ist, um klare Vorstellungen der Probleme zu bekommen...“ (Dipl.-Ing. Reinhold Bues, Braunschweig.)

„... An der Hand dieser Beweise kann dann der Leser an den vielerlei Sonderfällen die allgemeine Theorie selbst erarbeiten... Durch die Vielzahl der Beispiele aus dem Arbeitsgebiet sowohl des Bauingenieurs als auch des Maschinenbauers erfassen die Bücher einen großen Leserkreis... Dem Lernenden werden sie eine gute Stütze bei der Einarbeitung, dem praktisch tätigen Ingenieur bei der Auffrischung seiner Kenntnisse aus der angewandten Mechanik sein...“

(G. Worch, München, in „Der Bauingenieur“, Heft 9/1949.)

„... Im Sinne der Idee des Verfassers, die Grundlagen der Mechanik am besten durch Behandlung einer großen Zahl von Einzelfällen vermitteln zu können, muß man ihre Realisierung in den beiden Büchern als mit großem Geschick und Sorgfalt durchgeführt bezeichnen...“

(Zeitschrift für angewandte Physik, Band 1, Heft 9.)

„... Hier wird nicht wie in den meisten Büchern vom Allgemeinen, vom Abstrakten ausgegangen und dann erst das Gelernte auf Beispiele angewendet, sondern die Begriffe werden dadurch zum Verständnis gebracht, daß man mit ihnen rechnet..., auch die Abbildungen sind sehr geschickt angefertigt...“

(Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bd. 2, Heft 3.)

„... So entsteht Schritt für Schritt das Gebäude Festigkeits- und Elastizitätslehre wie etwas organisch Gewachsenes. Von der höheren Mathematik wird sparsamer Gebrauch gemacht... Auf knappem Raum wird eine Fülle von Erkenntnissen entwickelt, die zu bleibendem Wissen vertieft wird..., kann das Buch auch dem Praktiker für die Tagesarbeit dienen...“

(Bauen und Wohnen, Heft 7/1949.)

„... Der Umfang des behandelten Stoffes hat eine Vollständigkeit erfahren, die das Buch auch dem praktischen Ingenieur eine wertvolle Handhabe werden läßt.“

(Neue Bauwelt, Heft 33/1949.)

„... Es besteht kein Zweifel, daß dieses Fachbuch zu den besten dieser Gattung zu rechnen ist. Diese Methode berechtigt die Annahme, daß das Buch viele Freunde erwerben wird...“

(Baumeister, Heft 2/1950.)

MECHANIK

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN VOM TECHNISCHEN STANDPUNKT

I. TEIL

DR HEINRICH BLASIUS

STATIK

BLASIUS · MECHANIK I · STATIK

*Wer von dem technischen Problem her mittels
reichen Übungsmaterials die Begriffsbildungen
in lebendiger Beziehung zum Objekt erarbeiten
will, wird hier finden, was er sucht.*



MECHANIK

Physikalische Grundlagen
vom technischen Standpunkt

Erster Teil

STATIK

von

Dr Heinrich Blasius

Oberstudienrat an der Ingenieurschule zu Hamburg

Vierte Auflage
ein wenig veränderter Abdruck
der dritten neubearbeiteten Auflage
mit 260 Figuren und 113 Aufgaben



1948

**BOYSEN + MAASCH VERLAG
HAMBURG**



Gesamtherstellung von J. J. Augustin in Glückstadt
Copyright 1935 by Boysen + Maasch Verlag, Hamburg
Alle Rechte, auch das der Übersetzung, vorbehalten

INHALT

I Grundbegriffe der Mechanik: Geschwindigkeit, spezifisches Gewicht, Rechnen mit Benennungen, Beschleunigung, Trägheitskräfte	1
II Festigkeit und Elastizität: Zug-, Druck-, Schubspannung, Dehnung, Elastizitätsmaß, Querkürzung, Winkeländerung, Gleitmaß, Vorspannung	8
III Gleichgewicht am Punkt, Grundlagen: Kräfte am Punkt in der Ebene, Wirkung und Gegenwirkung, Belastung und Stützkraft, Gleichgewicht und Zerlegung, Parallelogramm, Kraftdreieck, Komponentengleichungen, Resultante, geschlossenes Krafteck, Kräfteplan	24
IV Hängewerk, Reibung, Raumpunkt, Vorspannung: Seileck, Reibung bei Bewegung und im Gleichgewicht, Krafteck und Komponentengleichungen am Punkt im Raum, Vorspannungen	41
V Gleichgewicht an der Scheibe, Grundlagen: Hebel mit senkrechten Kräften, schiefe Kräfte, Angriffslinie, Schnittpunktsatz, Komponenten- und Momentengleichungen für Scheiben mit festem und beweglichem Lager	60
VI 3 Stützkkräfte, Resultante, Kräftepaar: Stützkkräfte an 3 Punkten (Culmann), Berechnung von Resultante und Angriffslinie, Kräftepaar, Verlegung von Kräften	80
VII Graphische Statik, Seileck, Fachwerk: Konstruktion von Resultante und Angriffslinie, geschlossenes Seileck und Krafteck, Kräftepläne für Fachwerke (Cremona)	93
VIII Gleichgewicht am Körper: Platte mit senkrechten Kräften, Getriebe, Komponenten und Momentengleichungen im Raum	108
IX Mehrere Körper, Fachwerk: Gleichgewicht des Ganzen und der Teile, Stabkräfte in Fachwerken (Ritter), Eigen- gewicht, Raumbachwerk, Kritik der Grundlagen	125
X Arbeit: d'Alembert'sches Prinzip, kleine Verschiebungen, all- gemeiner Beweis, Leistung, perpetuum mobile	149
XI Schwerpunkt, Stabilität: Schwerpunkt von Gewichten, Längen, Flächen, Körpern, Stabilität bei festen und beweg- lichen Stützpunkten	163
XII Reibung: Hebelbremse, Bewegungswiderstand und Stützkraft, Seilreibung, Lagerreibung, Hubschraube, rollende Reibung, selbsthemmende Vorrichtungen	175
XIII Graphische Statik, Sonderausführungen: Stützlinien, Seileck durch 3 Punkte, Einflußlinien, Sonderfälle bei Fach- werken, Verschiebungsplan, statisch unbestimmtes Fach- werk	194
XIV Vermischte Aufgaben: Einheiten, fahrbare Krane, Resul- tanten im Raum, Lastdruck- und andere Bremsen	218
XV Zusammenfassung über Statik	239
Lösungen der Aufgaben, Register	241

VORWORT

Ich nenne meine Bücher „physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt“, weil es mir nicht in erster Linie auf die Darstellung der technischen Anwendungen, sondern auf die Darstellung der Grundlagen ankommt. Ich betrachte die Grundlagen aber auch wiederum nicht vom wissenschaftlichen Standpunkt, wo man bestrebt ist, alles aus einer Reihe notwendiger und hinreichender Prinzipien abzuleiten, um so ein auf möglichst wenig Stützen ruhendes Lehrgebäude zu errichten, sondern vom psychologischen Standpunkt, wo man dem forschenden und schaffenden Geist auf die Spur kommen und dadurch die Sache wirklich verstehen, sich in sie einfühlen will. Und dafür scheint mir die technische Fragestellung nicht nur eine brauchbare Anregung, sondern der gegebene Ausgangspunkt zu sein. Denn jede Wissenschaft entsteht aus dem Problem.

I. Drei Stufen hat das menschliche Erkenntnisvermögen: Es nimmt die Eindrücke der Außenwelt auf, nimmt sie gedächtnismäßig zur Kenntnis. Es arbeitet Verfahren zu ihrer Verwertung, Begriffe zu ihrer Beherrschung aus. Es strebt nach Vollständigkeit, nach einem geordneten, übersichtlichen System. „Lernen“, „Schaffen“, „Ordnen“ sind diese drei Tätigkeiten des Geistes. Er verhält sich „rezeptiv“, „produktiv“, „kritisch“.

Bei der Darstellung der technischen Physik wird man sich mit der ersten Stufe nicht begnügen, wird nicht nach fertigen Formeln rechnen lernen wollen. Man will studieren, nicht lernen. — Die dritte Stufe taugt nicht zur Einführung in die Wissenschaft, sie ist ihre Vollendung. Es ist ein Erbteil griechischer Philosophie und der Scholastik, wenn unser höherer Unterricht, auch manchmal der technische, Definition und Beweis anstatt der Fragestellung an die Spitze stellt.

In der Geschichte der Wissenschaft stehen die „Prinzipien“ nicht am Anfang. Der schaffende Geist arbeitet nicht systematisch, sondern induktiv. Er geht aus von einer Sonderaufgabe, bildet versuchsweise Rechenverfahren, nach Analogie, in Verallgemeinerung ähnlicher Fälle, und sichert diese Versuche, diese Ansätze durch Vergleich mit der Erfahrung, der Messung.

Indem er so von verschiedenen Anregungen ausgeht, findet er verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Dadurch erst entsteht die Frage nach der Vereinbarkeit der verschiedenen Methoden, die kritische Frage. Hier erst ist die Stelle, wo der Beweis gefordert wird, die Ableitung jedes anderen Verfahrens aus einer möglichst kleinen, aber an sich willkürlichen Reihe experimentell erwiesener Grundsätze zwecks Sicherung der Verfahren. Es handelt sich nicht darum, „alles zu beweisen“, sondern die Widerspruchslosigkeit der verschiedenen Verfahren sicherzustellen. Logik schafft nichts Neues, sie formt nur um.

2. Diesen natürlichen, historischen Weg suche ich nachzubilden. Ich stelle jedesmal zuerst eine zahlenmäßig bestimmte Sonderaufgabe und entwickle daran und dafür die Methode. Ähnliche besondere Aufgaben schließen sich an. Die Lösungen werden verallgemeinert und verbessert, und man abstrahiert daraus leicht das Typische, was allen gemeinsam ist. Das Allgemeine versteht sich dann leicht von selbst.

Die Voranstellung der Aufgabe gibt der Entwicklung der Gedanken das Ziel. Man sieht den Erfolg. Man hat ein Urteil, wann die Entwicklung fertig ist. — Man darf eben über der Darstellung der Erkenntnisse nicht versäumen, zunächst einmal die Fragestellung klar zu machen. — Der Hörer will ja auch bei einer Ableitung nicht nur die Richtigkeit der Schlüsse, der Umformungen einsehen, sondern auch den Grund, „warum es so gemacht wird“, „wie man auf die Idee gekommen ist“. Das sieht man am besten am Sonderfall. Der Hörer verlangt nach der heuristischen Darstellung, die ihn die Lösung finden läßt, nicht nach der dogmatischen, die ihn nur belehrt.

Am Sonderfall bekommt man auch schon gleich bei der Entwicklung der Gedanken eine deutlichere Vorstellung vom Inhalt, vom Sinn der Sätze, als wenn man vom Allgemeinen, vom Abstrakten ausgeht und erst nachträglich das Gelernte auf Beispiele anwendet. „Abstrahieren“ ist ein geistiger Vorgang, der voraussetzt, daß Einzelkenntnisse bereits vorhanden sind, von denen das Allgemeine „gelöst“ werden soll. Man muß also erst Einzelkenntnisse schaffen. Allerdings muß man sich dann auch wieder von ihnen lösen. — Es kommt auch bei der abstrakten Darstellung leicht dazu, daß der Beweis dem Hörer wieder entschwindet, und nur die Regel bleibt und schematisch angewendet wird. Wird aber der Beweisgedanke am Sonderfall entwickelt, so wird er auch im Sonderfall immer wieder erschaut. — Man wird natürlich nicht in jedem einzelnen Anwendungsfall von vorn anfangen wollen, aber man muß jederzeit imstande sein, auf die Grundlagen zurückzugehen. Sonst steht man neuen, vom Gewohnten abweichenden Aufgaben ratlos gegenüber.

Auch die Begriffe werden erst am Sonderfall klar. Begriffe fassen eine Summe von Erfahrungen zusammen und heben das Gemeinsame daran heraus. Der Lehrer, der Begriffe definiert, hat die Vorstellung der Fälle, auf die sie passen, im Unterbewußtsein. Der Hörer muß diese Vorstellung mit haben. Man muß ihm also zuerst Erfahrung vermitteln. Es handelt sich um die Darstellung der Begriffsbildung, nicht um die Begriffsdefinition. Wir fragen nicht nach dem Wesen der Dinge. Metaphysik treiben wir hier nicht. Begriffe sind der Ausdruck von Rechengewohnheiten, sind die Zahlgrößen, die in den Gleichungen vorkommen, für die sie ja geschaffen sind. Es kommt weniger darauf an, die Definition zu formulieren, als mit den Begriffen Aufgaben zu lösen. *Hic Rhodus, hic salta!* Begriffe versteht man erst, wenn man sieht, wie man mit ihnen rechnet.

3. Man braucht den geschichtlichen Weg nicht genau zu wiederholen. Die Wissenschaft hat Umwege gemacht, veranlaßt durch die zufälligen Aufgaben, die ihr von außen gestellt waren. Aufgabe des Unterrichts ist es, die Aufgaben in der Reihenfolge der Schwierigkeit zu stellen, Vorsehung zu spielen. Nicht das technische Interesse ist für die Auswahl der Aufgaben maßgebend, sondern die Steigerung in der Entwicklung der Gedanken, der Bildungswert.

Ein solcher quasihistorischer, freigeschichtlicher Weg erfordert eine gewisse psychologische Einfühlung: Ein Verfahren muß an einem zureichenden Beispiel entwickelt werden, nicht zu schwierig, aber auch nicht trivial, sondern typisch. — Vereinfachte Verfahren würdigt man erst, wenn man sieht, wie man es auf natürlichem Wege machen würde, und warum man vereinfachen kann. — Allgemeine Gesichtspunkte kann man erst nach einer gewissen Erfahrung erfassen. Man muß „im Bilde“ sein, muß ihre Tragweite übersehen. Nichts ohne erkennbares Ziel! — Ein Begriff kann erst eingeführt werden, wenn er gewissermaßen „in der Luft liegt“, wenn man Fälle kennt, die seine Einführung fordern. Erst die Sache, dann der Name! — Überhaupt nichts zu früh! Der Lehrer der Grundlagen muß vieles zunächst verschweigen können. — Auch die kritischen Fragen müssen sich zwanglos einordnen. — Die quasihistorische Darstellung verhält sich zur systematischen, wie ein Roman zum psychologischen Lehrbuch.

Solche Darstellungsart führt leicht zu einer gewissen epischen Breite und zu Wiederholungen. Das öftere Vorkommen desselben Gedankens erweist eben seine Tragweite. Andererseits suche ich die Ausdrucksweise im Einzelnen knapp zu halten, um den Gedankengang, die Schlüsse hervortreten zu lassen und um übersichtlich zu bleiben.

Vollständigkeit in der Darstellung der technischen Aufgaben habe ich nicht erstrebt. Allerdings führt die Darstellung der Methoden schon von selbst dahin, daß man das Wesentlichste berührt. Ich wollte aber weder über Maschinenteile, noch über Baukonstruktionen schreiben, sondern zum Studium derselben vorbereiten. Die systematischen Lehrbücher, die es auch geben muß, sollen hier anschließen.

4. Gerade am Beispiel der Mechanik mit ihrer Mannigfaltigkeit der Methoden und den verschiedenen allgemeinen Gesichtspunkten, die sie durchdringen, läßt sich die Arbeit des schaffenden Geistes, die Methodenbildung, trefflich darstellen.

Ich begründe den Kraftbegriff rein statisch und benutze ihn, ohne mich zu Anfang auf die Formulierung einer Definition einzulassen. Das ganze Buch ist die Definition des Kraftbegriffs. — Ich suche den zeichnerischen und den rechnerischen Verfahren, dem analytischen Gesichtspunkt des Gleichgewichts und dem synthetischen der Zerlegung in gleicher Weise gerecht zu werden und ihren Ideengehalt herauszuarbeiten. Eine gewisse Vorliebe für das Rechnen will ich nicht verleugnen. Ist doch der Zwang, bis zum Zahlenergebnis durchzudringen, ein gute:

Erziehungsmittel zum konzentrierten, sachlichen Denken. — Den Arbeitssatz in seiner ausgebildeten Form bringe ich erst ziemlich spät: Er führt in seinen wirklichen Anwendungen auf durchaus nicht einfache geometrische Überlegungen.

Mathematische Schwierigkeiten suche ich zu vermeiden. Sie lenken die Aufmerksamkeit von dem eigentlichen Inhalt der Gesetze ab. Ich baue Statik und Festigkeitslehre mit elementaren Hilfsmitteln auf und benutze Differential- und Integralrechnung erst spät in Festigkeit, Dynamik und Hydraulik; auch da nur an Stellen, wo sie wesentlich ist.

5. Das Buch ist erwachsen aus meinem langjährigen Unterricht an der Ingenieurschule zu Hamburg, geht jedoch in manchen Sonderausführungen über diesen hinaus. Manche Aufgaben können beim ersten Unterricht übergangen oder vom Lehrer durch ähnliche Aufgaben ersetzt werden. So kann das Buch dem Ingenieur auch noch nach seinem Studium in der Praxis zum Weiterstudium dienen. Es dürfte auch dem Universitätsstudenten als Gegengewicht zur kritischen Darstellung und dem Hochschulstudenten beim Studium der Grundlagen von Nutzen sein. Es soll dem Lehrer der allgemeinen Schulen Anregungen zur Ausgestaltung seines Unterrichts auf der Grundlage der technischen Fragestellung geben und mathematisch begabten Schülern und Interessenten jeder Art zum Selbststudium dienen.

Die

3. AUFLAGE

ist neubearbeitet: Zwar an der Darstellungsart ist grundsätzlich nichts geändert. Aber der Wortlaut des Textes ist vielfach neu gefaßt. 125 Figuren sind neu gezeichnet, viele Beispiele neu eingefügt oder ausführlicher behandelt. In Nr 12 ÷ 17 berechne ich jetzt Beschleunigung und Trägheitskräfte, von denen man auch in der Statik oft reden muß, wenn auch nur, um sie auszuschließen. Den Stoff habe ich in eine größere Anzahl von Abschnitten unterteilt und zT umgestellt. Der aufbauende, induktive Gedankengang gipfelt in Abschnitt IX, wo auch die Kritik, die Axiomatik ihre Stelle findet (Nr 245). Vielfachen Wünschen entsprechend ist ein Register angehängt.

Die gegenwärtige

4. AUFLAGE

ist ein fast unveränderter Abdruck der 3-ten. Nur an wenigen Stellen ist der Wortlaut straffer gefaßt, die Anordnung der Formeln verbessert, oder Figuren umgestellt.

Bergedorf, am 31. August 1932

Hamburg, am 30. Mai 1943

Hamburg, am 3. November 1946

H Blasius

VORBEMERKUNGEN

betr Anordnung und Bezeichnungen

Die behandelten Gegenstände sind zu XV Abschnitten zusammengefaßt, aber fortlaufend nummeriert, so daß die Angabe der Nummer zur Auffindung eines Beispiels genügt. Jedem Abschnitt ist eine runde Anzahl von Nummern zugewiesen, auch wenn diese Zahl nicht voll geworden ist, damit durch etwaige spätere Einfügungen nicht alle Nummern sich verschieben. Zusammenfassungen am Schluß jedes Abschnittes dienen der Übersicht über das Erreichte. Die Aufgaben sind mit dem Rechenschieber gerechnet. Die letzte Ziffer ist daher nicht mehr sicher. Ich setze voraus, daß der Leser den Rechenschieber in der Hand hat und mitrechnet.

Das Rechnen mit Benennungen ist konsequent durchgeführt. Jeder Buchstabe in einer Formel gilt als Größe, als benannte Zahl, nicht als Maßzahl in bestimmten Einheiten. Jede Formel kann in allen Einheiten durchgerechnet werden. Abweichungen bei gewissen, in der Praxis gebräuchlichen Formeln sind ausdrücklich als solche gekennzeichnet. Sonst sind Umrechnungsfaktoren nicht mitgeschrieben (zB Nr 3).

Einheitszeichen habe ich grundsätzlich mit mindestens 2 Buchstaben geschrieben, um sie von den Buchstaben, die die Größen bezeichnen, zu unterscheiden. Wenn man gewohnt ist, Benennungen in Formeln mit einzusetzen, so empfindet man es als unzweckmäßig, für Gramm, Sekunde, Stunde, Tonne: g, s, h, t zu schreiben, anstatt: gr, sk, St, t ϕ . — Man hat mir einen Vorwurf daraus gemacht, daß ich mich den Normen nicht füge. Das wäre berechtigt, wenn einer etwa ganz andere Buchstaben verwenden würde: für den Weg w, die Geschwindigkeit g, die Schubspannung s usw. Daß ich aber die Sekunde sk statt s nenne, kann nie Anlaß zu Verwirrung geben, zumal viele auch sec schreiben, was auch keiner mißversteht. Niemand wird die Vorzüge der Normalisierung verkennen bei Dinformat, Fahrradteilen u dergl. Aber die Kehrseite der Normalisierung ist die Erschwerung des Fortschritts. Wer etwas Besseres glaubt bringen zu können, wird mit einem Antrag an zuständiger Stelle selten Erfolg haben. Er muß es selbst durchführen, um zu zeigen, daß es besser ist. Übrigens habe ich einen Zeugen für meinen Standpunkt: Im „zweiten Sonderdruck 1932“ (ETZ 53 Jahrgang, Heft 35) schlägt der AEF als Abkürzung für 1mm QS „1 Tor“ vor. „Das einfache T würde zu Verwechslungen Anlaß geben da Druckangaben in Tor häufig mit Temperaturangaben zusammentreffen!“ Und warum ist denn für Calorie „cal“ vorgeschrieben und nicht einfach „c“?

Als Zeichen im Text und in den Formeln benutze ich
 \rightarrow nach rechts, \uparrow senkrecht aufwärts, \nearrow nach rechts oben gerichtet.
 \odot nach vorn, \otimes nach hinten gerichtet, \curvearrowright rechts drehend.
 \parallel parallel zu, \perp senkrecht auf, \varnothing Durchmesser.

I. Grundbegriffe der Mechanik

Mechanik berechnet Wege, Zeiten, Kräfte, die Abmessungen der Stützen, die diese Kräfte auszuhalten haben, und die Verformung derselben. Wir beginnen mit einem Rückblick auf die Grundbegriffe Geschwindigkeit, spezifisches Gewicht und achten dabei besonders auf das Rechnen mit verschiedenen Einheiten.

1. Geschwindigkeit. Wie weit kommt ein D-Zug in 1 St 50 Min? — Dazu muß vorher gemessen sein, daß er zB in 45 Min 63 km zurücklegt. — Welche Zeit braucht er für 50 km?

I. Regeldetrie: In 1 Minute fährt er $63/45 = 1,40$ km
 In 110 Minuten 110 mal so viel $1,40 \cdot 110 = 154$ km
 50 km in soviel Minuten, } $\frac{50}{1,40} = 35,7$ Min
 wie 1,40 in 50 aufgeht }

II. Formeln: Geschwindigkeit = Weg/Zeit

Im Beispiel $v = \frac{s_1}{t_1} = \frac{63 \text{ km}}{45 \text{ Min}} = 1,40 \frac{\text{km}}{\text{Min}}$

oder in Stunden $= \frac{63 \text{ km}}{0,75 \text{ St}} = 84 \frac{\text{km}}{\text{St}}$

umgerechnet in Sekunden $= 84 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ sk}} = 23,3 \frac{\text{m}}{\text{sk}}$

Und nun Weg = Geschwindigkeit mal Zeit

$$s_2 = vt_2 = 84 \frac{\text{km}}{\text{St}} \cdot 1,83 \text{ St} = 154 \text{ km}$$

Umgekehrt Zeit = Weg/Geschwindigkeit

$$t_3 = \frac{s_3}{v} = \frac{50 \text{ km}}{1,40 \text{ km/Min}} = 35,7 \text{ Min}$$

2. Rechnen mit Benennungen. Wir setzen also die Benennungen der gegebenen Größen in die Formeln mit ein. So folgt die Benennung des Ergebnisses. — Dies Verfahren beruht auf folgender Überlegung:

Jede Größe ist ein Produkt aus Maßzahl und Einheit

ZB „Eine Strecke ist 25 m lang“ „ $s = 25 \text{ m}$ “

heißt „Das Verhältnis Strecke: Meterstab ist $s:m = 25:1$ “

oder „Die Strecke ist 25 mal so lang wie 1 Meter“ „ $s = 25 \cdot m$ “

Indem so jede Größe ihrem Wesen (der Messung) nach ein Produkt ist, kann man mit den Benennungen wie mit Faktoren rechnen. Man rechnet auch auf andere Einheiten um,

indem man zB $\text{km} = 1000 \text{ m}$ $\text{St} = 3600 \text{ sk}$ einsetzt.

Auch ohne die Geschwindigkeit auszurechnen, findet man durch Verhältnisrechnung

$$s_2 = s_1 \frac{t_2}{t_1} = 63 \text{ km} \cdot \frac{110}{45} = 154 \text{ km} \quad t_3 = t_1 \frac{s_3}{s_1} = 0,75 \text{ St} \cdot \frac{50}{63} = 0,595 \text{ St}$$

Die Wege verhalten sich wie die Zeiten, sind „proportional“ den Zeiten.

3. Umlaufzahl. Eine Riemenscheibe von 480 mm \varnothing (Durchmesser) läuft mit einer Umlaufzahl $= n = 135/\text{Min}$ und treibt vermittle eines Riemen eine andere Scheibe von 210 mm \varnothing . Wie groß sind die Riemen-geschwindigkeit und die Umlaufzahl der andern Scheibe?

I. Ein Punkt am Scheibenumfang durchläuft

in 1 Minute 135mal den Umfang $= 135 \cdot 1,51 = 204 \text{ m}$

Formel: Geschwindigkeit = Umfang mal Umlaufzahl

$$v = \pi d_1 n_1 = \pi \cdot 0,48 \text{ m} \cdot \frac{135}{\text{Min}} = 204 \frac{\text{m}}{\text{Min}} = 3,40 \frac{\text{m}}{\text{sk}}$$

oder gleich in sk

$$n_1 = 135/\text{Min} = 2,25/\text{sk} \\ v = \pi d_1 n_1 = \pi \cdot 0,48 \text{ m} \cdot 2,25/\text{sk} = 3,40 \text{ m/sk}$$

II. Die andere Scheibe dreht sich in 1 sk so oft, wie ihr Umfang (0,66 m) in 3,40 aufgeht:

$$n_2 = \frac{v}{\pi d_2} = \frac{3,40 \text{ m/sk}}{\pi \cdot 0,21 \text{ m}} = \frac{5,15}{\text{sk}} = \frac{5,15}{\text{Min}/60} = \frac{309}{\text{Min}} = \frac{18540}{\text{St}}$$

Oder unmittelbar durch Verhältnisrechnung:

$$n_2 = n_1 \frac{d_1}{d_2} = \frac{135}{\text{Min}} \cdot \frac{480}{210} = \frac{309}{\text{Min}}$$

Die Umlaufzahlen verhalten sich umgekehrt wie die Durchmesser, sie sind „umgekehrt proportional“ den Durchmessern.

Es ist „Übersetzungsverhältnis“ $= \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{480}{210} = \frac{16}{7}$.

III. Jede Formel kann in beliebigen Einheiten durchgerechnet werden. Das Ergebnis erscheint in denselben Einheiten. Will man es anders haben, so rechnet man anschließend um:

$$v = \pi d n = \pi \cdot 0,48 \text{ m} \cdot 135/\text{Min} = \pi \cdot 0,48 \text{ m} \cdot 136/60 \text{ sk} = 3,40 \text{ m/sk}$$

Der Faktor 60 erscheint also von selbst durch Einsetzen von $\text{Min} = 60 \text{ sk}$. Damit man das nicht vergißt, kann man schreiben:

$$v_{\text{m/sk}} = \frac{\pi d_m n_{\text{Min}}}{60} = \frac{\pi \cdot 0,48 \cdot 135}{60} = 3,40$$

In dieser Formel sind die Buchstaben Maßzahlen in den als Index angeschriebenen Einheiten, nicht Größen.

Im Gegensatz dazu gilt $v = \pi d n$ unbeschränkt.

4. Aufgabe (Wagenräder). Ein Zug soll mit 65 km/St fahren. Die Triebäder der Lokomotive sollen 200 Uml/Min machen. Welchen \varnothing

müssen sie erhalten? — Wie schnell drehen sich die Wagenräder von 920 mm \varnothing ? — Überlegung, Formel, Verhältnisrechnung!

5. Aufgabe (Winde). Eine Winde soll das Seil mit 0,2 m/sk zu sich heranziehen. Der Trommel \varnothing sei 400 mm. Die Kurbel soll mit 45 Uml/Min gedreht werden. Welches Übersetzungsverhältnis ist anzuordnen? — Das Zahnrad auf der Trommelwelle habe 500 mm \varnothing . Welchen \varnothing bekommt das Ritzel auf der Kurbelwelle?

6. Spezifisches Gewicht. Wieviel wiegt ein Kupferrohr von 80 mm lichtigem \varnothing , 4 mm Wandstärke, 3,5 m Länge? — Messung: Ein Kupferstab von 28 mm \varnothing , 160 mm Länge wiegt 877 gr.

$$\text{I. Stabquerschnitt} = \pi d^2/4 = \pi (2,8 \text{ cm})^2/4 = 6,16 \text{ cm}^2$$

$$\text{Stabvolumen} = Fl = 6,16 \text{ cm}^2 \cdot 16 \text{ cm} = 98,5 \text{ cm}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gewicht der} \\ \text{Raumeinheit} \end{array} \right\} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}} = \text{„spezifisches Gewicht“}$$

$$\gamma = \frac{G_1}{V_1} = \frac{877 \text{ gr}}{98,5 \text{ cm}^3} = 8,90 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

$$\text{oder in kg:} \quad = \frac{0,877 \text{ kg}}{98,5 \text{ cm}^3} = 0,00890 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 8,90 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$\text{noch anders:} \quad = 8,90 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 8,90 \frac{\text{to}}{\text{m}^3} = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

II. Für das Metall des Kupferrohrs ist

Querschnitt = mittlerer Umfang mal Wandstärke

$$F_2 = \pi d_m s = \pi \cdot 8,4 \text{ cm} \cdot 0,4 \text{ cm} = 10,57 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = V_2 = F_2 l_2 = 10,57 \text{ cm}^2 \cdot 350 \text{ cm} = 3700 \text{ cm}^3$$

$$\text{Gewicht} = G_2 = V_2 \gamma = 3,70 \text{ dm}^3 \cdot 8,90 \text{ kg/dm}^3 = 32,9 \text{ kg}$$

Oder in verschiedenen Einheiten durchgerechnet

$$G_2 = F_2 l_2 \gamma = 10,57 \text{ cm}^2 \cdot 350 \text{ cm} \cdot 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3 = 32,9 \text{ kg}$$

$$= 0,1057 \text{ dm}^2 \cdot 35 \text{ dm} \cdot 8,9 \text{ kg/dm}^3 = 32,9 \text{ kg}$$

$$= 10,57 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 8900 \text{ kg/m}^3 = 32,9 \text{ kg}$$

III. Die Maßzahl für γ ist also nicht immer „8,9“, sondern verschieden je nach den Einheiten, in denen man rechnet. Man kann sogar die Größen in verschiedenen Benennungen einsetzen

$$F_2 l_2 \gamma = 10,57 \text{ cm}^2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 8,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 329 \frac{\text{kg cm}^2 \text{ m}}{\text{dm}^3}$$

$$\text{und kürzen} \quad = 329 \frac{\text{kg} \cdot 1 \cdot 10}{10^2} = 32,9 \text{ kg}$$

7. Aufgabe (Drahtdurchmesser). Ein Stahldraht ($\gamma = 7,85 \cdot / \cdot$) von 1400 mm Länge wiegt 5,08 gr. Welchen \varnothing hat er? — Diese Bestimmung des \varnothing ist oft genauer als die unmittelbare Messung.

8. Gewicht der Längeneinheit. Von dem I-Träger Fig 1, Normalprofil Nr 24, ist gegeben Höhe, Flanschbreite, Stegstärke, mittlere

Flanschstärke, Neigung der Abschragung = 14:100 ~ 1:7.
 $\gamma = 7,85 \cdot /$. Wieviel wiegt der Träger für je 1 m Länge?

I. Querschnitt = Steg + 2 · Flansch + 4 · Dreieck

$$F = 19,22 + 19,92 + 6,62 = 45,8 \text{ cm}^2$$

Länge = 1 m = 100 cm; Volumen = $V \cong 4580 \text{ cm}^3$

also für 1 m Länge Gewicht = $G = 35,9 \text{ kg}$

II. Statt für die bestimmte Länge 1 m das Gewicht auszurechnen, fragen wir nach einer Formel für das

$$\text{Verhältnis} \quad \frac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{„Gewicht der} \\ \text{Längeneinheit“} \end{array} \right\}$$

— welche Längeneinheit, bleibt offen. Es braucht ja nicht m zu sein.

$$\text{Es ist} \quad \text{Gewicht} = G = Fl\gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Gewicht der} \\ \text{Längeneinheit} \end{array} \right\} = q = \frac{G}{l} = F\gamma$$

Es ist nicht „ $l = 1$ gesetzt“, sondern „durch l dividiert“.

Im Beispiel $q = 45,8 \text{ cm}^2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3 = 0,359 \text{ kg/cm} = 35,9 \text{ kg/m}$

oder $q = 0,458 \text{ dm}^2 \cdot 7,85 \text{ kg/dm}^3 = 3,59 \text{ kg/dm} = 35,9 \text{ kg/m}$

oder $q = 45,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 35,9 \text{ kg/m}$

So erscheint eine dem Begriff entsprechende Benennung.

III. Will man ohne Umrechnung in üblichen Einheiten rechnen: F in cm^2 , γ in kg/dm^3 , q in kg/m , so bildet man eine Formel in Maßzahlen:

$$q_{\text{kg/m}} = F_{\text{cm}^2} \cdot 10^{-4} \cdot \gamma_{\text{kg/dm}^3} \cdot 10^3 = F_{\text{cm}^2} \cdot \gamma_{\text{kg/dm}^3} / 10$$

im Beispiel $= 45,8 \cdot 7,85 / 10 = 35,9$

9. Aufgabe (Gewicht der Flächeneinheit). Wieviel wiegt Kupferblech von $s = 3 \text{ mm}$ Dicke, $\gamma = 8,9 \cdot /$, anzugeben in kg/m^2 ? — Bilde für das „Gewicht der Flächeneinheit“ p eine Formel in Größen und eine Formel in Maßzahlen für die Einheiten kg/m^2 , kg/dm^2 , mm .

10. Durchflußmenge. Durch ein Rohr von $150 \text{ mm} \varnothing$ fließt Petroleum ($\gamma = 0,8 \text{ kg/dm}^3$) mit $1,8 \text{ m/sk}$. Wieviel kg fließen in 1 Stunde durch?

$$\text{I. Gewicht} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Querschnitt mal Geschwindigkeit} \\ \text{mal Zeit mal spezifisches Gewicht} \end{array} \right. \\ = 1,767 \text{ dm}^2 \cdot 18 \text{ dm/sk} \cdot 3600 \text{ sk} \cdot 0,8 \text{ kg/dm}^3 = 91500 \text{ kg}$$

oder auch in anderen Einheiten:

II. Auch hier bilden wir eine Formel für das „Gewicht pro Zeiteinheit“. Man schreibt dafür oft G_{St} oder G_{Min} oder G_{sk} . Es liegt aber nicht im Sinn des Rechnens mit Benennungen, hier eine bestimmte Zeiteinheit anzugeben, ihre Wahl muß vielmehr freibleiben. Ich schreibe deshalb G^* .

$$\text{Gewicht pro Zeiteinheit} \left. \right\} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Zeit}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Querschnitt mal Geschwindigkeit} \\ \text{mal spezifisches Gewicht} \end{array} \right.$$

$$G^* = Fv\gamma = 1,767 \text{ dm}^2 \cdot 18 \frac{\text{dm}}{\text{sk}} \cdot 0,8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 25,4 \frac{\text{kg}}{\text{sk}} = 91,5 \frac{\text{to}}{\text{St}}$$

$$\text{oder} \quad = 176,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1,8 \frac{\text{m}}{\text{sk}} \cdot 0,8 \frac{\text{to}}{\text{m}^3} \cdot \frac{3600 \text{ sk}}{\text{St}} = 91,5 \frac{\text{to}}{\text{St}}$$

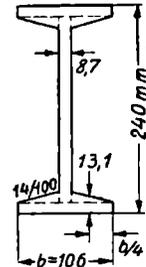


Fig 1. Trägerquerschnitt

11. Aufgabe (Wasserleitung). Durch eine Wasserleitung sollen 30000 m³/Tag mit 1,4 m/sk fließen. Welchen \varnothing muß sie erhalten?

12. Beschleunigte Bewegung. Wenn ein Eisenbahnzug anfährt, so muß die Lokomotive eine Kraft auf ihn ausüben, um so größer, je größer die zu erreichende Geschwindigkeit und je kürzer die Anfahrzeit und die Anfahrstrecke sein sollen. Er bewegt sich dabei mit stetig zunehmender Geschwindigkeit. — Körper, die nicht unterstützt sind, fallen mit wachsender Geschwindigkeit. Antriebskraft ist ihr eigenes Gewicht, die \downarrow gerichtete Schwerkraft, die Anziehungskraft der Erde.

Wir untersuchen diese beschleunigten Bewegungen, die Zunahme der Geschwindigkeit, die zurückgelegten Wege. Der Zug erreiche in der Anfahrzeit 2,5 Min = 150 sk die Endgeschwindigkeit 75 km/St = 20,8 m/sk. Die Geschwindigkeit möge gleichmäßig zunehmen.

Dann steigt sie in jeder sk um $20,8/150 = 0,139$ m/sk
ist also zB nach 90 sk: $v = 90 \cdot 0,139 = 12,5$ m/sk (Tabelle)

Man nennt die Geschwindigkeitszunahme pro Zeiteinheit

$$\text{„Beschleunigung“} = b = \frac{v}{t} = \frac{20,8 \text{ m/sk}}{150 \text{ sk}} = \frac{0,139 \text{ m/sk}}{\text{sk}} = 0,139 \frac{\text{m}}{\text{sk}^2}$$

$$= 0,139 \text{ m/sk in jeder Sekunde!}$$

Dann ist nach 90 sk $v = bt = 0,139 \frac{\text{m}}{\text{sk}^2} \cdot 90 \text{ sk} = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{sk}}$

Bei gleichmäßiger Geschwindigkeitszunahme ist der zurückgelegte

Weg = mittlere Geschwindigkeit mal Zeit
= halbe Endgeschwindigkeit mal Zeit

$$s = \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} bt^2 \quad (v = bt \text{ eingesetzt})$$

zB nach 90 sk $s = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 90 = \frac{1}{2} \cdot 0,139 \cdot 90^2 = 562 \text{ m}$

Anfahrstrecke $s = \frac{1}{2} \cdot 0,139 \frac{\text{m}}{\text{sk}^2} \cdot (150 \text{ sk})^2 = 1560 \text{ m}$ (Tabelle)

t	v	s
sk	m/sk	m
0	0	0
30	4,2	63
60	8,3	250
90	12,5	562
120	16,7	1000
150	20,8	1560

13. Versuch über Beschleunigung durch Kraft. Die für den Zug erforderliche Antriebskraft wird abhängen vom Zuggewicht und von der geforderten Beschleunigung. — Beim freien Fall unter der Schwerkraft besteht eine gewisse, sehr große Beschleunigung. Wir messen sie, indem wir den Vorgang nach Fig 2 verlangsamen.

I. An einer Schnur, die über eine leichte Rolle läuft, hängen links 590 gr, rechts 610 gr. Dann wird das Gesamtgewicht 1200 gr in Bewegung gesetzt durch das Übergewicht 20 gr, so wie der Eisenbahnzug durch die Antriebskraft, der fallende Körper durch seine eigene Schwerkraft. Die Beschleunigung wird jetzt aber nur

$$20/1200 = 1/60 \text{ der Schwerebeschleunigung sein.}$$

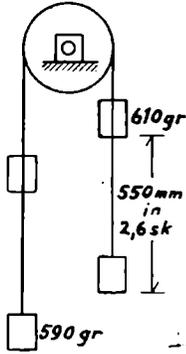


Fig 2. Fallmaschine

Wir messen nach 2,6 sk eine Fallstrecke von 550 mm und berechnen

$$\text{mittlere Geschwindigkeit} = s/t = 0,212 \text{ m/sk}$$

$$\text{Endgeschwindigkeit} = v = 2s/t = 0,424 \text{ m/sk}$$

$$\text{Beschleunigung} = b = v/t = 0,163 \text{ m/sk}^2$$

$$\text{oder unmittelbar} \quad b = 2s/t^2 = 0,163 \text{ m/sk}^2$$

II. Wenn die Beschleunigung zur Kraft proportional ist, so können wir jetzt auf die Beschleunigung beim freien Fall schließen: Es werden beschleunigt

$$1200 \text{ gr durch } 20 \text{ gr um } 0,163 \text{ m/sk}^2$$

$$1200 \text{ gr } ,, \quad 1200 \text{ gr } ,, \quad 0,163 \cdot 1200/20 = 9,8 \text{ m/sk}^2$$

$$\text{Diese „Schwerebeschleunigung“} = g = 9,81 \text{ m/sk}^2$$

ist für alle Körper dieselbe, unabhängig vom Stoff

III. Weitere Versuche bestätigen, daß die Geschwindigkeitszunahme gleichmäßig, und die Beschleunigung zur Kraft proportional ist. Hängen zB links 585, rechts 615 gr, so erfahren dieselben 1200 gr durch das Übergewicht 30 gr die Beschleunigung $0,163 \cdot 30/20 = 0,245 \text{ m/sk}^2$. Nach zB 2,2 sk wird dann die Fallstrecke 592 mm gemessen werden.

14. Beschleunigter Zug. Nun kann die Kraft berechnet werden, die den Zug Nr 12, zB 6 Wagen von je 45 to in 150 sk auf 20,8 m/sk bringt, die also dem Gewicht $G = 270 \text{ to}$ die Beschleunigung $0,139 \text{ m/sk}^2$ erteilt.

I. Der Zug erfährt die	durch die
Schwerebeschl = $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$	Schwerkraft = $G = 270 \text{ to}$
Einheitsbeschl = 1 m/sk^2	Kraft = $270/9,81 = 27,5 \text{ to}$
Beschleunigung = $b = 0,139 \text{ m/sk}^2$	Kraft = $K = 27,5 \cdot 0,139 = 3,83 \text{ to}$

also Kraft am Zughaken } = { 3,83 to + Reibung
der Lokomotive } = { + Luftwiderstand

II. Die „Kraft pro Einheit der Beschleunigung“, die dem betr Körper eigentümlich ist, nennt man seine

$$\left. \begin{array}{l} \text{„Trägheit“} \\ \text{oder „Masse“} \end{array} \right\} = M = \frac{G}{g} = \frac{270 \text{ to}}{9,81 \text{ m/sk}^2} = \frac{27,5 \text{ to}}{\text{m/sk}^2} = 27,5 \frac{\text{to sk}^2}{\text{m}}$$

Danach ist für die verlangte Beschleunigung b

$$\begin{aligned} \text{beschleunigende Kraft} &= \text{Trägheit mal Beschleunigung} \\ &= \text{Masse mal Beschleunigung} \end{aligned}$$

$$K = M b = 27,5 \frac{\text{to sk}^2}{\text{m}} \cdot 0,139 \frac{\text{m}}{\text{sk}^2} = 3,83 \text{ to}$$

III. Oder: Die Kräfte sind den Beschleunigungen proportional.

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Schwerkraft}} = \frac{\text{Beschleunigung}}{\text{Schwerebeschleunigung}} = \frac{K}{G} = \frac{b}{g}$$

also $K = G \cdot \frac{b}{g} = 270 \text{ to} \cdot \frac{0,139}{9,81} = 3,83 \text{ to}$

15. Gebremster Wagen. Ein Wagen von 35 to soll aus einer Geschwindigkeit $v = 40 \text{ km/St}$ auf einer Strecke $s = 80 \text{ m}$ zum Stehen gebracht werden. Gebremst werden die 2 Hinterräder mit je 2 Bremsklötzen (Fig 3). Welche Bremskraft muß ausgeübt werden?

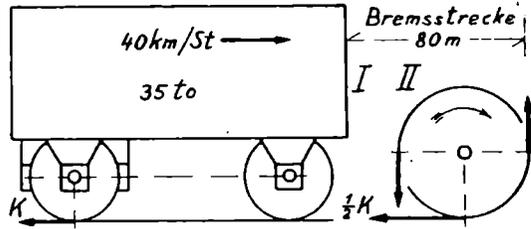


Fig 3. Gebremster Wagen

Es ist
$$s = \frac{vt}{2} = \frac{v^2}{2b} \quad (t = \frac{v}{b} \text{ eingesetzt})$$

aufgelöst:
$$b = \frac{v^2}{2s} = \frac{(11,11 \text{ m/sk})^2}{2 \cdot 80 \text{ m}} = 0,772 \frac{\text{m}}{\text{sk}^2}$$

$$\text{Bremskraft} = K = \mathfrak{M} b = \frac{Gb}{g} = \frac{35 \cdot 0,772}{9,81} = 2,76 \text{ to}$$

am Umfang jedes Hinterrades also 1380 kg, an jedem Bremsklotz 690 kg. Die Bremsklötze hemmen die \curvearrowright Drehung des Rades mit \curvearrowleft Reibungskräften (Fig. II). Am Berührungspunkt mit der Schiene wirkt eine \leftarrow Reibungskraft, die die \curvearrowright Drehung des Rades gegen die Bremskräfte aufrecht zu erhalten sucht und dabei zugleich den Wagen bremst.

16. Aufgabe (Freier Fall). I. Welche Geschwindigkeit hat ein ohne Luftwiderstand frei fallender Körper nach 3,2 sk und welchen Weg hat er zurückgelegt. — II. Welche Geschwindigkeit hat er nach einer Fallstrecke von 30 m und wie lange dauert der Fall? — III. Nach welcher Zeit und nach welcher Fallstrecke wird die Geschwindigkeit 18 m/sk erreicht?

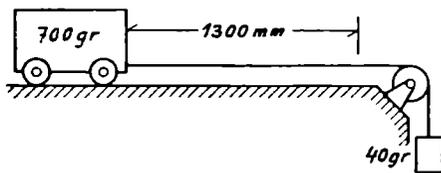


Fig 4. Beschleunigter Wagen

17. Aufgabe (Beschleunigter Wagen). Ein Wagen von 700 gr wird durch ein Gewicht von 40 gr nach Fig 4 angetrieben. Welche Beschleunigung erfahren sie? In welcher Zeit legen sie 1300 mm zurück? Welche Geschwindigkeit haben sie erreicht?

20. Zusammenfassung. Bei gleichmäßiger Geschwindigkeit stehen die zurückgelegten Wege im selben Verhältnis zueinander wie die Zeiten. Bei gleichmäßiger Dichte verhalten sich die Gewichte wie die Volumen. Der Weg ist zur Zeit „proportional“, das Gewicht zum Volumen. Dann können die Größen nach der Dreisatzrechnung, Regeldetrie, berechnet werden. Man stellt aus einer Beobachtung den Wert der einen Größe pro Einheit der anderen fest und benutzt ihn zur Berechnung anderer Wege, Zeiten, Gewichte, Volumen. „Geschwindigkeit“, „spez Gewicht“ sind konstante Verhältnisse, unabhängig von den zufälligen Beobachtungswerten.

Ebenso ist bei gleichmäßiger Geschwindigkeitszunahme die erreichte Geschwindigkeit proportional der Zeit; das konstante Verhältnis die „Beschleunigung“. Ebenso ist die beschleunigende Kraft proportional der Beschleunigung; das konstante Verhältnis die „Trägheit“, die „Masse“; auszurechnen am einfachsten aus Schwerkraft und Schwerebeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$.

Wir berechneten auch Umlaufzahlen, Gewichte pro Längen- und pro Flächeneinheit, Durchflußmengen und -gewichte, Anfahr- und Bremsstrecken. Bei allen diesen Rechnungen kann man die Benennungen als Faktoren mit einsetzen und erhält so die ausgerechneten Größen mit den angemessenen Benennungen. In derselben Weise kann man auf andere Einheiten umrechnen.

II. Festigkeit und Elastizität

21. Spannung. Ein Eisenstab soll mit einer Zugkraft $P = 2000 \text{ kg}$ belastet werden. Wie stark muß man ihn machen, wenn 4fache Sicherheit gefordert wird? — Messung: Ein Stab von $9 \text{ mm } \varnothing$ aus gleichem Stoff reißt bei einer Belastung von 2790 kg .

Die Belastbarkeit kann man proportional dem Querschnitt annehmen. Wir berechnen deshalb

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kraft pro} \\ \text{Querschnittseinheit} \end{array} \right\} = \text{„Spannung“} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Kraft}} = \sigma = \frac{P}{F}$$

$$\text{Bruchspannung} = \sigma_B = \frac{2790 \text{ kg}}{0,636 \text{ cm}^2} = 4390 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 43,9 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{zulässige} \\ \text{Spannung} \end{array} \right\} = \sigma_{zul} = \frac{4390}{4} = 1098 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{erforderlicher} \\ \text{Querschnitt} \end{array} \right\} = F = \frac{P}{\sigma_{zul}} = \frac{2000 \text{ kg}}{1098 \text{ kg/cm}^2} = 1,82 \text{ cm}^2 \quad 15,2 \text{ mm } \varnothing$$

Rundet man den \varnothing auf 16 mm ab, so wird

$$\left. \begin{array}{l} \text{tatsächliche} \\ \text{Spannung} \end{array} \right\} = \sigma = \frac{P}{F} = \frac{2000}{2,01} = 995 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \text{Sicherheit } 4,4\text{fach}$$

22. Kette. Bei einer Kette (Fig 5) trifft die Zugkraft P zwei Querschnitte F . Es wäre also

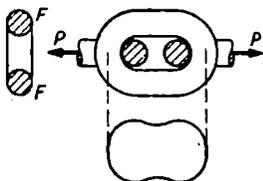


Fig 5. Kettenglied

$$P = 2F\sigma_{zul} \quad F = \pi d^2/4$$

aufzulösen nach P oder F oder d . Es ist aber zu bedenken, daß die Spannung nicht gleichmäßig über F verteilt ist. Denn indem sich das Ketten-eisen, wie gezeichnet, verbiegt, werden die inneren Fasern stärker gedehnt, als die äußeren. Die Zug-

spannung ist also am inneren Rand viel größer als $P/2F$; am äußeren besteht sogar Druck. Man trägt dem dadurch Rechnung, daß man einen kleineren Wert für σ_{zul} annimmt.

Für manche Anwendungsfälle rechnet man $P_{kg} = 5d_{mm}^2$. Das entspricht einem $\sigma_{zul} = 318 \text{ kg/cm}^2$ für die durchschnittliche Spannung. Bei Stegketten wird die gezeichnete Verbiegung zT verhindert. Hier läßt man $P_{kg} = 15d_{mm}^2$ zu.

23. Aufgabe (Fundament). Eine gußeiserne Säule, die 80 to tragen soll, ist nach Fig 6 gegründet. Die zulässigen Druckbeanspruchungen seien für

Gußeisen	600 kg/cm ²
Granit	45 ./.
Mauerwerk	7 ./.
Sandboden	2 ./.

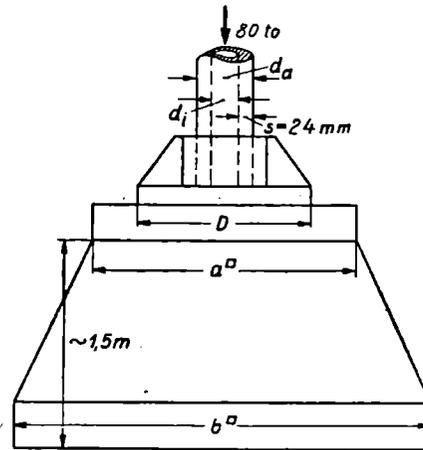


Fig 6. Fundament

Zu berechnen sind die $\varnothing d_a$ und d_i der Säule bei einer Wandstärke $s = 24 \text{ mm}$. (Das Ergebnis bedarf noch einer Nachprüfung wegen der Knickgefahr.) Ferner der $\varnothing D$ des Säulenschuhes, die Quadratseite a des Granitsteines und die Quadratseite b des Fundaments.

— Das Eigengewicht des Fundaments wird zunächst vernachlässigt. Man schätze nachträglich, um wieviel sich der Druck auf den Boden durch Berücksichtigung des Eigengewichts vergrößert, wenn Fundamenttiefe = 1,5 m und $\gamma = 1500 \text{ kg/m}^3$ angenommen wird.

24. Draht mit Eigengewicht. Ein senkrecht hängender Draht (Fig 7) der Länge $l = 600 \text{ m}$ ist unten mit $P = 300 \text{ kg}$ belastet. Wie groß muß der Querschnitt gewählt werden, wenn $\sigma_{zul} = 1200 \text{ kg/cm}^2$ ist?

I. Ohne Rücksicht auf Eigengewicht würde sein

$$\text{Querschnitt} = F_0 = 0,25 \text{ cm}^2 \quad \text{Eigengewicht} = G_0 = 118 \text{ kg}$$

Man kann dieses Eigengewicht zu P addieren, ein neues F , ein neues, größeres G berechnen, dieses nun wieder zu P addieren usw. Man gelangt so zu einer fortschreitenden Annäherung an den gesuchten Wert von F .

II. Man kann auch das Eigengewicht durch die unbekannte Größe F ausdrücken und dieses einsetzen in

$$\sigma_{zul} = (\text{Last} + \text{Eigengewicht}) / \text{Querschnitt}$$

$$\sigma_{zul} = (P + Fl\gamma) / F$$

Aufgelöst $F = \frac{P}{\sigma_{zul} - \gamma l} = \frac{300}{1200 - 471} = \frac{300}{729} = 0,412 \text{ cm}^2$

Eigengewicht $= G = Fl\gamma = 0,412 \cdot 471 = 194 \text{ kg}$

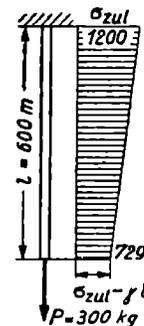


Fig 7. Draht mit Eigengewicht

III. Oder: Wir berechnen zunächst den Anteil des Eigengewichts an der Spannung:

$$\sigma_E = \frac{Fl\gamma}{F} = \gamma l = 7,85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 6 \cdot 10^4 \text{ cm} = 471 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Diese „Spannung durch Eigengewicht“ ist übrigens unabhängig vom Querschnitt und = Gewicht pro Querschnittseinheit (Nr 9).

Was nun noch an der zulässigen Spannung fehlt, ist der

$$\text{Anteil der Last} = P/F = \sigma_{zul} - \sigma_E = \sigma_{zul} - \gamma l = 729 \text{ kg/cm}^2$$

also
$$F = \frac{P}{\sigma_{zul} - \gamma l} = \frac{300}{729} = 0,412 \text{ cm}^2$$

IV. Der Draht reißt schon durch Eigengewicht allein, wenn

$$\gamma l = \text{Bruchspannung} = \sigma_B \quad \text{also bei der „Reißlänge“} = l = \sigma_B / \gamma$$

zB Eisen $\sigma_B = 4500$, $l = 5,7 \text{ km}$ Aluminium $\sigma_B = 1000$ $l = 3,8 \text{ km}$
ein Maß für das Verhältnis Festigkeit/Stoffverbrauch.

25. Aufgabe (Draht mit veränderlichem Querschnitt). Die Spannung in dem Draht Nr 24 nimmt von unten nach oben zu (Fig 7). Man könnte ihn also unten schwächer machen. — Er sei aus 3 je 200 m langen Stücken zusammengesetzt. Wie groß werden die Querschnitte und welchen Bruchteil des obigen Gewichts spart man an Stoff?

26. Spannungen im Kesselblech. Ein zylindrischer Kessel (Fig 8 I II) von 2200 mm \varnothing und 18 mm Wandstärke stehe unter einem inneren Überdruck $p = 12 \text{ at} = 12 \text{ kg/cm}^2$, der \perp Innenfläche nach allen Seiten gleichmäßig wirkt. Dadurch kommen Zugspannungen in das Kesselblech

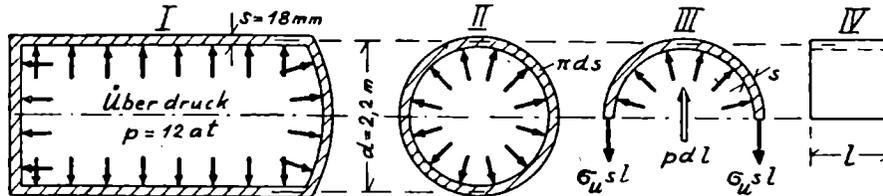


Fig 8. Spannungen im Kesselblech

I. Auf den Boden wirkt die Kraft

$$P = p \cdot \pi d^2 / 4 = 12 \cdot 38000 = 456000 \text{ kg}$$

übrigens unabhängig davon, ob der Boden flach oder gewölbt ist. Sonst würde der Kessel ja nach einer Seite davon fahren. Die Kräfte recht wirken zwar auf einer größeren Fläche, sind aber schief zur Kesselachse und wirken daher in Richtung der Achse nur mit einem Teil ihrer Kraft

Gleichmäßiger Druck auf gewölbter Fläche ist gleich dem Druck auf die Projektion der Fläche.

Diese Kraft beansprucht nun den Ringquerschnitt $= \pi d s = 1244 \text{ cm}$ mit $\sigma = 456000 / 1244 = 367 \text{ kg/cm}^2$

Vom Unterschied zwischen d_a und d_i sehen wir ab.

II. Nicht nur der Querschnitt des Kessels erfährt Spannungen in der Längsrichtung. Auch auf dem Längsschnitt wirken Spannungen in Richtung des Umfangs: Der innere Überdruck sucht die obere Hälfte des Kessels von der unteren abzuheben; auch die vordere von der hinteren. Wir betrachten ein Stück der (beliebigen) Länge l (Fig III IV).

Es wird \uparrow gehoben durch Druck mal Projektion des Halbzylinders
 \downarrow gehalten durch Umfangsspannung mal Längsschnittsteile

$$\downarrow \sigma_U \cdot 2sl = p \cdot dl \uparrow$$

$$\text{Umfangsspannung} = \sigma_U = \frac{pdl}{2sl} = \frac{pd}{2s} = 733 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

im Gegensatz zu obiger Spannung in Längsrichtung

$$\text{Längsspannung} = \sigma_L = \frac{p \cdot \pi d^2 / 4}{\pi ds} = \frac{pd}{4s} = 367 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

III. Die Längsspannung ist halb so groß wie die Umfangsspannung: Der Ringquerschnitt hält ja den Boden rund um fest, während die Längsschnittsteile die Wölbung nur an 2 Seiten halten. Das Verhältnis des gespannten Umfangs zur gedrückten Fläche ist also hier ungünstiger als dort. — Nach den Enden hin wird die Umfangsspannung kleiner, weil die auf den Hälften wirkenden Kräfte zum Teil durch den Boden aufgenommen werden. — Zu berücksichtigen ist ferner noch, daß der Querschnitt des Kesselblechs durch die Nietlöcher geschwächt ist.

27. Kugelkessel. Ein Zylinderkessel vom Radius r unter dem Überdruck p sei abgeschlossen durch eine Wölbung vom Radius R (Fig 9).

I. In einer Kugel gibt es nur eine, allseitige gleiche Spannung:

$$\sigma = \frac{\text{Druck mal Projektion der Halbkugel}}{\text{Ringquerschnitt}} = \frac{pR}{2s}$$

II. Die Wandstärke soll im Mantel und im Boden die gleiche sein.

Dann muß sein $\frac{pR}{2s} = \sigma_{zul} = \frac{pr}{s}$ also $R = 2r$ $\alpha = 30^\circ$
 $h = (2 - \sqrt{3})r = 0,268 r$

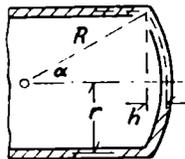


Fig 9. Gewölbter Kesselboden

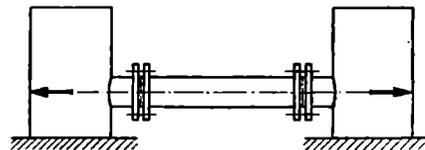


Fig 10. Spannungen im Rohr

28. Aufgabe (Rohr). Ein gußeisernes Rohr vom lichten \varnothing 250 mm, verbindet 2 Kessel miteinander (Fig 10). Es sei Überdruck $= p = 25 \text{ at}$. $\sigma_U = \sigma_{zul} = 300 \text{ kg/cm}^2$. Welche Wandstärke muß es haben?

Ob und in welcher Größe die Längsspannung auftritt, ist unbestimmt. Man kann nämlich durch Anziehen der Flanschschrauben beliebigen Zug in das Rohr hineinbringen, da ja die Kessel feststehen. Es kann sogar

Druck in der Rohrriechung auftreten, wenn sich das Rohr, etwa durch Erhitzung, ausdehnt. — Besteht an einer Stelle eine Muffenverbindung derart, daß das Rohr sich beliebig ausdehnen kann, so tritt keine Längsspannung im Rohr auf. Dafür erfahren die Kessel je eine Kraft, die sie auseinander drückt. Wie groß ist diese, wenn der \varnothing der Dichtungsfuge gleich dem äußeren \varnothing des Rohres ist?

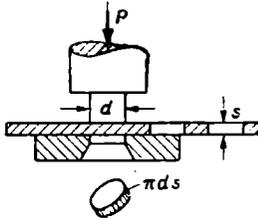


Fig 11. Schubspannungen

29. Schubspannungen. In ein Blech der Dicke $s = 6$ mm sollen Löcher vom $\varnothing d = 24$ mm gestanzt werden (Fig 11). Welche Kraft P ist nötig?

Die Fläche, an der der Zusammenhang des Stoffes gelöst werden soll, ist die zylindrische Mantelfläche πds der ausgestanzten Platte. Die Kräfte zwischen den Teilchen (Molekülen), die den Zusammenhang aufrechterhalten, und die überwunden werden müssen, liegen hier nicht wie in Nr 21 ÷ 28 senkrecht zur Fläche, sondern in der Fläche. Man nennt sie „Schubkräfte“. Auch die Reibung, zB zwischen Treibriemen und Riemenscheibe, ist eine Schubkraft. Auch hier beziehen wir die Schubkraft auf die Einheit des betroffenen Querschnitts „Schubspannung“ $= \tau = P/F \parallel$ Fläche

Im Gegensatz dazu heißen die Zug- und Druckspannungen, die senkrecht („normal“) zur Fläche stehen, „Normalspannungen“ σ .

Es sei Bruchspannung $\tau_B = 4000$ kg/cm² dann ist $P = 18100$ kg

30. Gestängeschloß. Ein längeres Pumpengestänge übertrage die Zugkraft $P = 6000$ kg. Es sei aus einzelnen Stangen zusammengesetzt, die miteinander durch die Keilbefestigung Fig 12 zusammengeschlossen sind. Der Stangenkopf muß dicker sein als der Schaft, weil er durch das Keilloch geschwächt ist. Infolge des Anziehens der Keile besteht gleichzeitig an der Berührungsstelle der Stangenköpfe eine Druckkraft P_1 , die wir $= 0,25 \cdot P = 1500$ kg annehmen wollen.

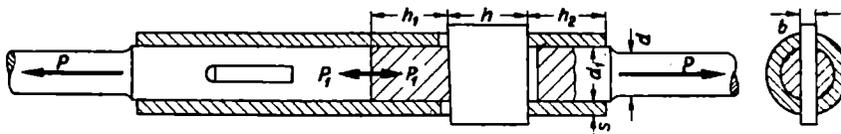


Fig 12. Keilverbindung

Wir berechnen die einzelnen Querschnitte je nach der Art der Beanspruchung unter Annahme gewisser zulässiger Spannungen.

I Zug im Schaft $= \sigma_1 = 1000$ kg/cm² = 1000 at $d = 28$ mm

II Zug im Kopf $= \sigma_2 = 800$ at, kleiner als im Schaft angenommen, weil die Spannungsverteilung nicht gleichmäßig ist. (Vergl Nr 22.) Die einspringenden Ecken sind besonders gefährdet. Man rundet sie deshalb ab.

$$\text{Kopfquerschnitt} = \pi d_1^2/4 - d_1 b = 7,5 \text{ cm}^2$$

III Druck an der Anlagefläche des Keils im Kopf $=\sigma_3 = 1600$ at groß angenommen, weil der Stoff ja, allseitig eingeschlossen, nicht ausweichen kann.

$$d_1 b = 4,7 \text{ cm}^2 \quad (\text{beachte } P_1!)$$

Auflösung von II und III: $d_1 = 40 \text{ mm} \quad b = 12 \text{ mm}$

IV Schub in den beiden Keilquerschnitten $=\tau_4 = 600$ at

$$2bh = 12,5 \text{ cm}^2 \quad h = 52 \text{ mm}$$

wenn nicht infolge Biegung ein größeres h gefordert wird,

V Druck an den Anlageflächen des Keils in der Hülse $=\sigma_5 = 1200$ at

$$2bs = 6,25 \text{ cm}^2 \quad s = 26 \text{ mm}$$

Für die Hülsenstärke ist also diese Anlagefläche maßgebend. Der Zug in dem durch die Löcher geschwächten Hülsenquerschnitt selbst ist nur 157 kg/cm^2 . — Man kann auch die Hülse schwächer machen und nur an den Anlagestellen verstärken.

VI Die Maße h_1 und h_2 ergeben sich aus Versuchen über das Aufreißen des Stangen- bzw Hülsenkopfs. Berechnung auf Grund einer einfachen Beanspruchungsart kommt hier nicht in Frage. Man nimmt etwa $h_1 = h_2 = d_1$, auch etwas kleiner.

31. Aufgabe (Maßverhältnisse). Die Querschnitte von Nr 30 unterliegen alle der gleichen Kraft, abgesehen von P_1 . Sie müssen deshalb im umgekehrten Verhältnis der Beanspruchungen stehen. Das Hinzutreten von P_1 ändert das Querschnittsverhältnis unter Umständen um einen bestimmten Faktor. Daraus folgen dann bestimmte Verhältnisse der Maße unabhängig von P . Man setzt abgerundet etwa

$$b = \frac{1}{4} d_1 \quad d = \frac{3}{4} d_1 \quad h = \frac{3}{2} d_1$$

und braucht dann nur noch ein Maß unmittelbar aus dem gegebenen P zu berechnen. — Welchen Verhältnissen der Beanspruchungen entsprechen die hier angegebenen Maßverhältnisse, wenn $P_1 = 0,25 P$ angenommen wird?

32. Aufgabe (Bolzenverbindung). An einem T-Träger (Fig 13) ist mittels eines Bolzens die Last $P = 4000 \text{ kg}$ aufgehängt. I. Berechne die Maße aus folgenden zulässigen Beanspruchungen: Schaft 1200 ; Lasche 1000 ; Auge 800 ; Anlagefläche am Bolzen 1500 . Hier nimmt man gleichmäßigen Druck auf dem halben Zylindermantel an. Als Tragkraft ist daher der Druck auf die Projektion zu setzen (Nr 26). Schub im Bolzen 750 ; Anlagefläche im Träger 1800 at.

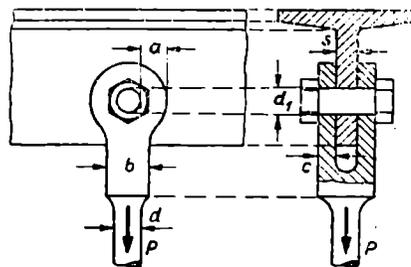


Fig 13. Aufhängung am Bolzen

II. Aus der letzten Bestimmung folgt die Trägerstärke s . Angenommen aber, der Träger sei bereits vorhanden und es sei $s = 9 \text{ mm}$, dann folgt d_1 aus der Anlagefläche im Träger. Wie groß werden dann die Maße und die jetzt kleinere Schubspannung im Bolzen?

33. Elastizität. Jeder Stoff wird unter dem Einfluß einer Zugkraft länger. Ein Gummischlauch (Fig 14) werde mit verschiedenen Gewichten P belastet. Gemessen wird jedesmal die Höhe h des Endes über einem beliebigen Nullpunkt (Tabelle) und die Länge 883 mm bei einer bestimmten Belastung (1500 gr). Bei 0 gr kann weder die Höhe noch die Länge gemessen werden, weil der Schlauch dann krumm ist.

P	h	Δh	Δl	σ	ε
gr	mm	mm	mm	kg/cm ²	mm/mm
0	?	?	0	0	0
500	606	?	18	1,38	0,0220
1000	585	21	39	2,75	0,0475
1500	561	24	63	4,13	0,0768
2000	534	27	90	5,50	0,1099
2500	504	30	120	6,88	0,1463

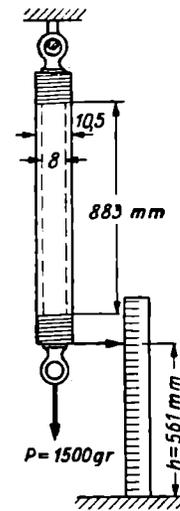


Fig. 14 →
Messung der
Ausdehnung
von Gummi

I. An den Differenzen Δh sehen wir, daß die Ausdehnung nicht gleichmäßig ist. Δh steigt mit wachsender Belastung. Für den Schritt von 0 ÷ 500 gr dürfte die Differenz etwa 18 mm gewesen sein. Nun können wir die Verlängerung Δl für jedes P feststellen und auch die ursprüngliche Länge $l = 883 - 63 = 820$ mm.

II. Um unabhängig von den Maßen des gewählten Schlauchs zu werden, berechnen wir

Spannung = Belastung der Querschnittseinheit,

$$\text{zB} \quad \sigma = \frac{P}{F} = \frac{1,500 \text{ kg}}{0,363 \text{ cm}^2} = 4,13 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 4,13 \text{ at}$$

„Dehnung“ = Verlängerung der Längeneinheit
(bezogen auf die ursprüngliche Länge)

$$\begin{aligned} \text{zB} \quad \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} = \frac{63 \text{ mm}}{820 \text{ mm}} = 0,0768 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0,0768 = 76,8 \cdot 10^{-3} \\ &= 7,68 \% = \frac{76,8}{1000} \text{ (der Länge!)} = 76,8 \frac{\text{mm}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Diese verschiedenen Ausdrucksformen für einen Bruchteil sind im Sinne des Rechnens mit Benennungen (Nr 2) einander gleichwertig.¹⁾

III. Die Auftragung von σ über ε ergibt eine nach oben gewölbte Kurve (Fig 15I), aus der wir zusammengehörige Werte von σ und ε für Gummi entnehmen können. — ZB: Ein Gummistrang von 6 mm \varnothing und 380 mm Länge soll um 22 mm verlängert werden.

¹⁾ Das Zeichen „%“ kann immer „Hundertstel“ gelesen werden. „Prozent“ ist überflüssig, aber auch „vom Hundert“ ist entbehrlich. „‰“ = Tausendstel = 10^{-3} , nicht „Promille“.

Zu der Dehnung $=\varepsilon=0,0580$ lesen wir aus der maßstäblich aufzu-
 tragenden Kurve ab die Spannung $=\sigma=3,25$ at, also die Kraft $=918$ gr.

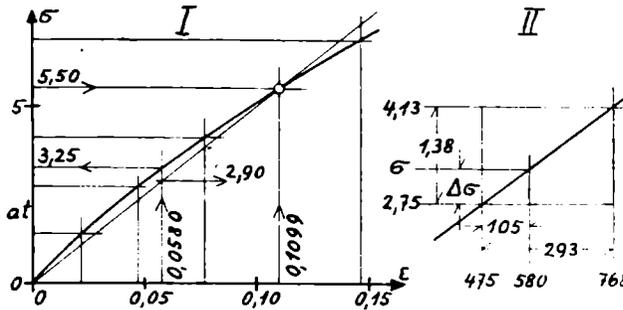


Fig 15.
 Dehnung von Gummi

Auch aus der Tabelle folgt σ , und zwar durch Interpolation:

σ ändert sich von 2,75 auf 4,13 um 1,38 at

wenn ε sich ändert von 475 auf 768 um 293 Zehntausendstel

Um welchen Betrag ändert sich σ von 2,75 aus,

wenn ε sich ändert von 475 auf 580 um 105 Zehntausendstel

Die Differenzen sind angenähert einander proportional

$$\text{Iso } \Delta\sigma = \frac{1,38 \cdot 105}{293} = 0,50 \text{ at} \quad \sigma = 2,75 + 0,50 = 3,25 \text{ at}$$

$$\text{Regel: Teildifferenz in } \sigma = \frac{\text{ganze Differenz in } \sigma}{\text{ganze Differenz in } \varepsilon} \cdot \text{Teildifferenz in } \varepsilon$$

Das Interpolieren wird veranschaulicht durch Fig II.

34. Formel zwischen σ und ε . I. Die Kurve ist ziemlich gerade.
 Wir nehmen daher σ und ε angenähert als proportional zueinander an
 und legen die gerade Linie durch den vorletzten Meßpunkt von Fig 15 I.
 Dann folgt aus Proportionen

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0,1099}{5,50 \text{ at}} \quad \varepsilon = \frac{0,1099}{5,50 \text{ at}} \cdot \sigma = \frac{0,0200}{\text{at}} \cdot \sigma = \alpha \cdot \sigma$$

Der Faktor von σ ist die „Dehnung pro Einheit der Spannung“:

$$\text{„Dehnungszahl“} = \alpha = \frac{0,0200}{\text{at}} = 0,0200 \text{ pro at} = \frac{2,00}{100} \text{ für je } 1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

II. Man kann auch das umgekehrte Verhältnis bilden:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5,50 \text{ at}}{0,1099} \quad \sigma = \frac{5,50 \text{ at}}{0,1099} \cdot \varepsilon = 50 \text{ at} \cdot \varepsilon = E \cdot \varepsilon$$

Der Faktor von ε ist die „Spannung pro Einheit der Dehnung“:

$$\text{„Elastizitätsmaß“} = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 50 \text{ at} = 50 \text{ at für } 1 \frac{\text{mm}}{\text{mm}}$$

Daß die „Einheit der Dehnung“, 1 mm/mm, im allgemeinen von keinem
 Stoff erreicht wird, daß er vielmehr vorher zerrißt, daß also die Span-

nung 50 at gar nicht vorkommen kann, ist für die Formel belanglos, so fern die gegebenen Werte von σ bzw. ε sich in angemessenen Grenzen halten. Der Faktor selbst ist ja tatsächlich nur eine Verhältniszahl

$$E = \sigma/\varepsilon = 50 \text{ at pro mm/mm} = 0,050 \text{ at pro mm/m.}$$

III. Für den Gummistrang von Nr 33 III gibt die Formel

$$\sigma = E\varepsilon = 50 \text{ at} \cdot 0,0580 = 2,90 \text{ at}$$

also die Kraft = 820 gr, weniger als nach Kurve und Interpolation.

Man nennt die proportionale Beziehung „Hooke“'sches Gesetz“:

Spannung = Elastizitätsmaß mal Dehnung

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{ausführlicher} \quad \frac{P}{F} = E \frac{\Delta l}{l}$$

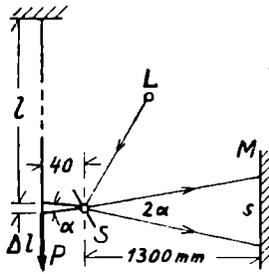


Fig 16. Messung der Ausdehnung von Stahl

35. Ausdehnung von Stahl. I. Ein Stahldraht von 0,5 mm \varnothing und der Länge $l = 4,5$ m mit $P = 1,7$ kg belastet (Fig 16). Die kleine Ausdehnung Δl wird gemessen, indem das senkende Drahtende einen Spiegel S um α dreht, vermittelt eines Hebels von 40 mm Länge. An einer Lichtquelle L fällt ein Strahl auf S . Er wird reflektiert auf einen Maßstab M , der 1300 mm von S entfernt ist. Dreht sich der Spiegel um α , so dreht sich der reflektierte Strahl um 2α . Gemessen wird ein Ausschlag des Lichtflecks um $s = 121$ mm. Dann ist angenähert

$$\text{Ausdehnung} = \Delta l = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{1300} \cdot 121 = 1,86 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \text{Dehnung} = \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} = \frac{1,86 \text{ mm}}{4,5 \text{ m}} = 0,413 \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 413 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \\ &= 413 \cdot 10^{-6} = 413 \text{ Millionstel (der Länge!)} \end{aligned}$$

$$\text{Spannung} = \sigma = \frac{P}{F} = \frac{1,7 \text{ kg}}{0,196 \text{ mm}^2} = 8,67 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} = 867 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 867 \text{ at}$$

Spannung und Dehnung sind bei etwa 2000 at einander proportion

II. Man berechnet daraufhin die Dehnungszahl

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0,476 \cdot 10^{-6}}{\text{at}} = 0,476 \text{ Millionstel der Länge pro at}$$

oder das Elastizitätsmaß

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 2100000 \text{ at} = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{at}}{\text{mm/mm}} = \begin{cases} 2100000 \text{ at} \\ \text{für die Dehnung 1} \end{cases}$$

Wer daran Anstoß nimmt, daß 2100000 at und Dehnung = 1 bei Eisen unmöglich sind, kann auch sagen

$$E = 2,1 \text{ at}/10^{-6} = 2,1 \text{ at für eine Dehnung von 1 Millionstel}$$

$$\text{oder} \quad = 2100 \frac{\text{at}}{10^{-3}} = 2100 \frac{\text{at}}{\text{mm/m}} = 2100 \text{ at pro mm/m}$$

III. Um wieviel verlängert sich hiernach der Draht von Nr 24? Die Spannung ist unten infolge Last 729 at, nimmt nach oben zu infolge Eigengewichts, gleichmäßig, bis 1200 at, ist also durchschnittlich 964 at.

$$\text{Also } \Delta l = \frac{964 \text{ at}}{2,1 \cdot 10^6 \text{ at}} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ mm} = 276 \text{ mm} !$$

36. Aufgabe (Verlängerung). I. Welche Verlängerung erfährt der in Nr 24 berechnete Draht, wenn man ihn nur mit $P = 150 \text{ kg}$ belastet? — II. Welche Verlängerung erfährt der Draht von Nr 25 unter Belastung mit $P = 300 \text{ kg}$? — III. mit $P = 150 \text{ kg}$? In diesem Fall sind die mittleren Spannungen in den 3 Teilstrecken verschieden.

37. Stahl bei höheren Spannungen. I. Das Hooke'sche Proportionalitätsgesetz $\sigma = E \cdot \epsilon$ gilt bis zur

$$\text{„Proportionalitätsgrenze“} = \sigma_P \sim 2000 \text{ kg/cm}^2.$$

Dort ist die Dehnung $\sim 10^{-3}$. — Bei weiterer Drucksteigerung nimmt die Dehnung schneller zu als die Spannung (Fig 17). Bei $\sim 2500 \text{ at}$ steigt zunächst die Spannung überhaupt nicht weiter, es findet aber eine beträchtliche Dehnung bis auf $\sim 5\%$ statt, zB 225 mm bei 4,5 m. Diese Zustandsänderung nennt man „Fließen“, die Spannung

$$\text{„Fließ- oder Streckspannung“} = \sigma_S \sim 2500 \text{ kg/cm}^2.$$

Danach kommt wieder eine Spannungssteigerung unter weiterer beträchtlicher Dehnung. Die Spannung erreicht ein Maximum bei der

„Bruchspannung“ $= \sigma_B \sim 4500 \text{ kg/cm}^2$ und nimmt dann wieder ab. Bei einer Dehnung von $\sim 20\%$ (900 mm bei 4,5 m) erfolgt der Bruch durch Einschnürung an der zufällig schwächsten Stelle.

II. Entlastet man den gespannten Draht, so federt er bei kleinen Spannungen auf die ursprüngliche Länge zurück. Bei größeren Spannungen dagegen, insbesondere nach dem Fließen, bleibt ein Teil der Dehnung als „dauernde Dehnung“ bestehen. Nur ein kleiner Teil ist „elastische Dehnung“ (Fig 17). Er ist etwa aus demselben Elastizitätsmaß zu berechnen das für den ungereckten Draht gilt. Die Grenze, bis zu der der Stoff „vollkommen elastisch“ ist, heißt „Elastizitätsgrenze“. Sie liegt in der Nähe der Proportionalitätsgrenze.

III. Bei spröden Stoffen wie Gußeisen fehlt das Fließen und die größere Dehnung dahinter. Sie reißen sofort nach mehr oder weniger proportionaler Ausdehnung. — Bei Kupfer fehlt das Fließen; aber die Proportionalitätsgrenze liegt bei $\sim 10^{-2}$ Dehnung.

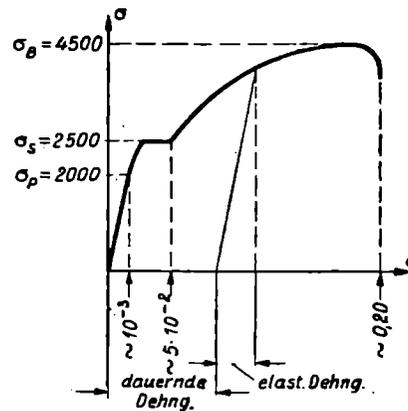


Fig 17. Dehnung von Stahl

tionalitätsgrenze liegt niedrig: $\sigma_P \sim 500 \text{ at}$ mit $E = 1,15 \cdot 10^6 \text{ at}$. Weiterhin nimmt die Dehnung stark zu bis $\sim 30\%$ bei $\sigma_B \sim 2500 \text{ at}$.

38. Drahtseil. Ein Drahtseil, das über Rollen und Trommeln läuft, wird durch Zug und durch Biegung beansprucht.

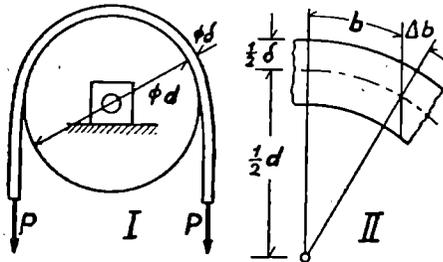


Fig 18. Draht über Rolle

I. Ein Stahldraht (Fig 18 I) vom $\varnothing \delta = 0,9 \text{ mm}$ sei über eine Rolle vom $\varnothing d = 800 \text{ mm}$ gelegt und mit $P = 8 \text{ kg}$ belastet. Dann ist

$$\text{Zuganteil} = \sigma_z = P/F = 1260 \text{ at}$$

Indem sich nun der Draht krümmt, kommt außen Zug, innen Druck im Zusammenhang mit der Verlängerung Δb des Bogenteils b (Fig II). Aus Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\delta/2}{d/2} \quad \text{also} \quad \text{Biegungsanteil} = \sigma_b = E \frac{\Delta b}{b} = E \frac{\delta}{d} = 2360 \text{ at}$$

$$\text{Gesamtbeanspruchung} = \sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{P}{F} + E \frac{\delta}{d} = 3620 \text{ at}$$

Vorausgesetzt ist, daß der Draht vollkommen elastisch bleibt, daß er nach Entlastung in die gestreckte Lage zurückfedert. Bei Sonderstählen, wie sie für Drahtseile, Federn u a verwendet werden, treten viel höhere Werte von σ_P σ_S σ_B auf, als in Nr 37 angegeben.

II. Ein Drahtseil ist biegsamer als ein gerader Draht. Indem die einzelnen Drähte des Seils Schraubenlinien bilden, wird die Krümmung des Seils zT durch Torsion der querlaufenden Teile der Drähte ermöglicht. Man trägt diesem Umstand durch Herabsetzung des Biegungsanteils Rechnung:

$$\text{Beanspruchung} = \sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{P}{F} + \frac{3}{8} E \frac{\delta}{d}$$

39. Berechnung eines Drahtseils. Ein Seil soll 4 t tragen. $\sigma_{zul} = 3000 \text{ at}$. Das Seil soll aus 6 Litzen bestehen. Jede Litze hat 1 Hanfseele und 3 Lagen mit $6 + 12 + 18 = 36$ Drähten. Das Seil hat also 216 Drähte. Gesucht der Draht $\varnothing \delta$ und der $\varnothing d$ der Trommeln und der Rollen.

Für die 2 Unbekannten besteht nur 1 Gleichung. Die Verteilung des σ_{zul} auf Zug und Biegung ist also noch frei.

Mit	$\sigma_z = 1500$	$\sigma_b = 1500$	wird	$\delta = 1,25 \text{ mm}$	$d = 656 \text{ mm}$
„	$\sigma_z = 1000$	$\sigma_b = 2000$	„	$\delta = 1,54$	$d = 605$
„	$\sigma_z = 750$	$\sigma_b = 2250$	„	$\delta = 1,77$	$d = 620$

Mit steigendem σ_b wird also d zunächst kleiner, dann aber wieder größer, weil es auch noch von δ abhängt, welches mit abnehmendem σ_z zunimmt.

Am besten nimmt man $\sigma_z = \frac{1}{3} \sigma_{zul}$ $\sigma_b = \frac{2}{3} \sigma_{zul}$
 Mit $\sigma_{zul} = 3000 \text{ at}$ erhält man als Regel $d = 400 \delta$

Das berechnete δ rundet man nach unten ab $\delta = 1,5$ mm
dann wird das Seil leichter, die Rolle nur unwesentlich größer:

$$\sigma_z = 1050 \quad \sigma_b = 1950 \text{ at} \quad d = 606 \text{ mm}$$

40. Querkürzung. Ein Flacheisen der Länge $= a = 600$ mm, Breite $= b = 50$ mm, Dicke $= c = 4$ mm sei mit 3200 kg belastet. Dann ist

$$\sigma = 1600 \text{ kg/cm}^2 \quad \varepsilon_a = \sigma/E = 762 \cdot 10^{-6} \quad \Delta a = 0,457 \text{ mm}$$

Außer dieser Verlängerung in der Kraftrichtung findet eine Verkürzung von Breite und Dicke statt.

Gemessen $\Delta b = 0,011$ mm hiernach $\Delta c = 0,00088$ mm

Hiernach „Querkürzung“ $= \varepsilon_b = \Delta b/b = 220 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_c = \Delta c/c$

Sie ist ein Bruchteil der Längsdehnung $\varepsilon_b/\varepsilon_a = 220/762 = 0,289$

gewöhnlich $1/3$ bis $1/4$, durchschnittlich $3/10$ von ε_a

$$\varepsilon_b = \varepsilon_c = \frac{1}{m} \varepsilon_a = \nu \varepsilon_a = \nu \frac{\sigma}{E} \quad \text{wobei} \quad m = 3 \text{ bis } 4$$

$$\text{oder} \quad \nu = 0,3$$

Das Volumen des Stoffes nimmt infolge der Querkürzung nicht so stark zu, als wenn die Längsdehnung allein vorhanden wäre. Wir berechnen

Volumenänderung $= \Delta V = bc \Delta a - ca \Delta b - ab \Delta c$

$$= bc \cdot a \varepsilon_a - ca \cdot b \varepsilon_b - ab \cdot c \varepsilon_c = abc (\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

Ihr Verhältnis zum ursprünglichen Volumen, die Raumdehnung, ist also

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c = (1 - 2\nu) \varepsilon_a = (1 - 2\nu) \frac{\sigma}{E} = 0,4 \frac{\sigma}{E} = 305 \cdot 10^{-6}$$

Im Beispiel: $V = 120 \text{ cm}^3$ also $\Delta V = 305 \cdot 10^{-6} \cdot 120000 = 36,6 \text{ mm}^3$

41. Elastische Ausdehnung eines Kessels durch den Überdruck. Ein Zylinderkessel von 2,5 m \varnothing , 8 m Länge, 24 mm Wandstärke, (berechnet für etwa 15 at Überdruck), wird bei der Wasserdruckprobe unter einen Überdruck von 25 at gesetzt. Wieviel Liter Wasser muß man nach vollständiger Füllung des Kessels noch hineinpumpen, um den Überdruck zu erzeugen?

Die Umfangsspannung $\sigma_U = 1300 \text{ kg/cm}^2$ hat eine Vergrößerung des Umfangs und eine Verkürzung der Länge zur Folge, die Längsspannung $\sigma_L = 650 \text{ kg/cm}^2$ umgekehrt. Es ist also:

$$\text{Umfangsdehnung} = \varepsilon_U = \frac{\sigma_U}{E} - \nu \frac{\sigma_L}{E} = \frac{1300 - 0,3 \cdot 650}{2,1 \cdot 10^6} = 526 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Längsdehnung} = \varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E} - \nu \frac{\sigma_U}{E} = \frac{650 - 0,3 \cdot 1300}{2,1 \cdot 10^6} = 124 \cdot 10^{-6}$$

Hieraus folgen die Vergrößerungen von Radius und Länge: Es ist nämlich

$$\text{Umfangsdehnung} = \varepsilon_U = \frac{2 \pi \Delta r}{2 \pi r} = \frac{\Delta r}{r} = \varepsilon_r = \text{Radiusdehnung!}$$

also Vergrößerung des Radius $= \Delta r = \varepsilon_r \cdot r = 0,658 \text{ mm}$

„ der Länge $= \Delta l = \varepsilon_L \cdot l = 0,992 \text{ mm}$

Das Kesselvolumen vergrößert sich infolge Δr um einen Hohlzylinder, infolge Δl um eine Schicht:

$$\Delta V = 2\pi r l \cdot \Delta r + \pi r^2 \cdot \Delta l = 41,4 + 4,9 = 46,3 \text{ dm}^3$$

Dazu kommt noch die Raumverminderung des Wassers. Wasser wird pro at um 1/20000 seines Volumens verdichtet:

$$\Delta V_W = \frac{p}{20000 \text{ at}} \cdot V = \frac{25}{20000} \cdot 39,3 \text{ m}^3 = 49,1 \text{ dm}^3$$

Die Wasserdruckprobe fordert also nach vollständiger Füllung des Kessels noch 95,4 dm³ Wasser.

42. Formänderung infolge Schub. I. Eine Welle Fig 19 I wird durch die Kräfte KK verdreht um α (Fig II). Dann bestehen in allen Querschnitten Schubspannungen τ . Infolge dieser Spannungen verschieben sich die Querschnitte in sich selbst, und aus Achsenparallelen werden Schraubenlinien. Diese bilden einen Winkel γ mit der Achse. Aus ursprünglich rechteckigen Oberflächenteilchen werden Parallelogramme, indem sich unter die Wirkung von τ die eine Rechteckseite gegen die andere um s verschiebt (Fig III). Wir nennen

Winkeländerung = Verschiebung pro Einheit des Abstands

$$\text{arc} \gamma \sim \text{tg} \gamma = s/h$$

Dies Verhältnis ist innerhalb gewisser Grenzen proportional zu τ .

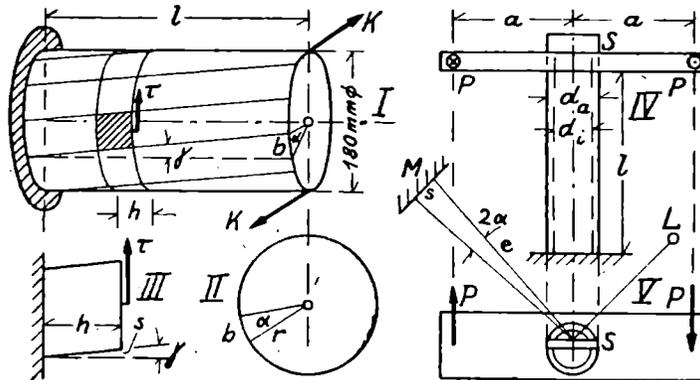


Fig 19. Messung der Formänderung bei Schub

Die Formänderung durch Schub studiert man am besten an einer Welle wie Fig I, denn ein rechteckiger Körper wie Fig III wird zugleich gebogen: Die rechte Grenzfläche verschiebt sich nicht nur \uparrow , sie dreht sich auch \curvearrowright . In der verdrehten Welle aber tritt auf der ganzen Länge nur Winkeländerung auf.

II. Um die Beziehung zwischen τ und γ durch Messung zu ermitteln, denken wir uns ein Rohr (Fig IV V) durch die Kräfte PP verdreht. Wir nehmen zwei einander entgegengesetzt gleiche Kräfte, damit sich das Rohr nicht zugleich biegt. Wir nehmen ein Rohr, weil bei einer vollen

Welle τ und γ im Innern kleiner sind als außen. Dann aber ist der Zusammenhang zwischen P und τ nicht einfach zu berechnen. Bei einem dünnen Rohr aber können wir mit einem mittleren τ im mittleren Radius rechnen.

Gemessen: Rohrlänge $= l = 590$ mm $\varnothing d_a = 9$ mm $\varnothing d_i = 7$ mm
2 Kräfte, je $P = 1,5$ kg je am Hebelarm $= a = 132$ mm

Am oberen Rohrende ist ein Spiegel S befestigt, der einen Lichtstrahl auf einen Maßstab M reflektiert. Gemessen wird im Abstand $e = 850$ mm eine Verschiebung $s = 124$ mm.

III. Auswertung: Den Kräften $2P = 3,0$ kg im Abstand $a = 132$ mm entspricht nach dem Hebelgesetz im mittleren Radius $r_m = 4$ mm

$$\text{eine Kraft} = 3,0 \cdot 132/4 = 99,0 \text{ kg}$$

auf dem Querschnitt $= \pi \cdot 8 \cdot 1 = 25,1 \text{ mm}^2$

also Schubspannung $= \tau = 3,95 \text{ kg/mm}^2 = 395 \text{ kg/cm}^2$

Die Winkeländerung folgt aus der Skalenablesung:

$$\text{Drehung des Lichtstrahls} = 2 \text{ arc} \alpha = 124/850 = 0,146$$

$$\text{,, ,, Rohrendes} = \text{arc} \alpha = 0,073 \quad \sim 4^{\circ}11'$$

Aus $b = l \text{tg} \gamma = r \text{arc} \alpha$ (nach Fig I II)

folgt $\text{arc} \gamma \sim \text{tg} \gamma = 0,073 \cdot 4/590 = 495 \cdot 10^{-6} \quad \sim 1,70'$

und nun, Proportionalität vorausgesetzt, das Verhältnis

$$\text{„Gleitmaß“} = G = \frac{\tau}{\text{tg} \gamma} = \frac{395 \text{ at}}{495 \cdot 10^{-6}} = 800000 \text{ at}$$

Im Anwendungsfall ist dann $\tau = G \text{tg} \gamma \quad \text{tg} \gamma = \tau/G$

43. Aufgabe (Formänderung durch Schub). I. Eine Transmissionswelle von $180 \text{ mm} \varnothing$ und 6 m Länge wird so stark beansprucht, daß an ihrer Oberfläche $\tau = 400 \text{ at}$ erreicht wird. Um welchen Winkel wird ihr Endquerschnitt gegen den Anfangsquerschnitt verdreht? — II. Wie groß darf τ höchstens sein, wenn die Verdrehung nicht mehr als ein Viertelgrad pro Meter sein darf?

44. Schraubenbolzen eines Zylinderdeckels. Der Deckel eines Motors oder eines Behälters (Fig 20I) wird durch Schraubenbolzen gehalten. Diese müssen mit einer gewissen Vorspannung angezogen werden, denn durch den Überdruck im Zylinder dehnen sie sich elastisch aus. Ohne Vorspannung würde also der Deckel von der Dichtung ein wenig abgehoben werden.

Es seien: 8 Bolzen 140 mm lang $22 \text{ mm} \varnothing$ $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ at}$
Dichtungsring: $260 \text{ mm} \varnothing$ innen 20 breit 5 dick $E = 20000 \text{ at}$
Überdruck im Zylinder $= 20 \text{ at}$ auf $260 \text{ mm} \varnothing$ also $P = 10,6 \text{ to}$.
Er allein bringt in die Bolzen eine Spannung $= 349 \text{ at}$ Zug.

Die Vorspannung vor Inbetriebnahme des Zylinders sei $V = 8 \text{ to}$. Dadurch allein haben die Bolzen 263 at Z , die Dichtung 45 at D . Wie groß wird nun die Bolzenbeanspruchung durch Überdruck und Vorspannung

zugleich? Darf man die Anteile (349 und 263 at) einfach addieren? Wie groß muß die Vorbelastung V mindestens sein, damit die Fuge dicht bleibt? Oder wird sie bereits undicht?

$$\text{I. Jedenfalls ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{Zug in} \\ 8 \text{ Bolzen} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Druck auf} \\ \text{Dichtung} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Kraft infolge} \\ \text{Überdrucks} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow Z = D + P \uparrow$$

Anfangs mit $P = 0$ ist

$$Z = D = V = \text{Vorbelastung}$$

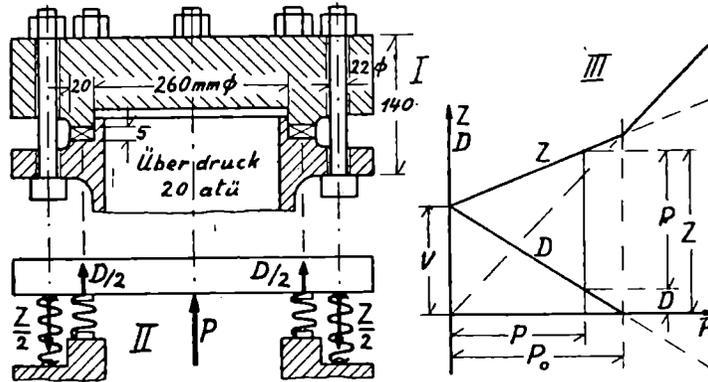


Fig 20. Schraubenbolzen eines Zylinderdeckels

Tritt nun aber der Überdruck hinzu, so verlängern sich die Bolzen elastisch, sie federn. Der Zylinderdeckel hebt sich. Auch die Dichtung dehnt sich elastisch aus, als wenn es Federn wären (Fig II). Dabei wird Z größer, aber D kleiner als der Anfangswert V . Das bestehende D ist also kleiner als die Vorbelastung V , also $Z = D + P$ kleiner als $V + P$.

Man darf also nicht addieren! — Bei steigendem P kann die Dichtung sogar völlig entlastet werden ($D = 0$). Der Klotz Fig II würde sich bei einer bestimmten Hebung von den Druckfedern abheben. Danach ist $Z = P$, als wenn nie eine Vorspannung dagewesen wäre.

II. Bei der Belastung des Deckels mit P nimmt also die Bolzenkraft Z über die Vorbelastung hinaus zu, die Dichtungskraft D ab:

$$Z = V + \Delta Z \quad D = V - \Delta D$$

ΔZ und ΔD hängen miteinander zusammen, denn beide hängen ab von der Hebung h des Deckels nach dem Elastizitätsgesetz (Nr 34):

$$\Delta Z = \frac{E_1 F_1 h}{l_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \text{ at} \cdot 30,4 \text{ cm}^2}{140 \text{ mm}} \cdot h = 456\,000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}} \cdot h$$

$$\Delta D = \frac{E_2 F_2 h}{l_2} = \frac{20\,000 \text{ at} \cdot 176 \text{ cm}^2}{5 \text{ mm}} \cdot h = 704\,000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}} \cdot h$$

Der Faktor von h gibt an, daß Z infolge des Federns der Bolzen um 456 to pro mm der Ausdehnung zunimmt. Er heißt „Federkonstante“. Die Dichtung ist weniger elastisch als die Bolzen.

III. Nun stellt sich h so ein, daß das Gleichgewicht I besteht:

$$\uparrow P = \downarrow Z - D = (V + \Delta Z) - (D - \Delta D) = \Delta Z + \Delta D$$

P wird getragen durch die Zunahme von Z und die Abnahme von D !

$$P = (456 + 704) \frac{\text{to}}{\text{mm}} \cdot h \quad h = \frac{10,6 \text{ to}}{1160 \text{ to/mm}} = 9,13 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$Z = V + \Delta Z = 8,00 + 4,17 = 12,17 \text{ to}$$

$$D = V - \Delta D = 8,00 - 6,43 = 1,57 \text{ to}$$

$$\text{Probe: } \Delta Z + \Delta D = 4,17 + 6,43 = 10,60 \text{ to} = P = Z - D!$$

Beanspruchung der Bolzen = 400 at Z der Dichtung = 9 at D

Von der großen Vorbelastung ist also wenig geblieben. Deshalb ist auch die Beanspruchung der Bolzen nicht viel größer als der Anteil (349 at) des Überdrucks allein.

45. Wahl der Vorspannung. I. Um den Einfluß der Vorspannung und der Elastizität von Bolzen und Dichtung zu übersehen, schreiben wir die Rechnung von Nr 44 in Buchstaben:

$$\text{Federkonstanten} \quad c_1 = \frac{E_1 F_1}{h_1} = 456 \frac{\text{to}}{\text{mm}} \quad c_2 = \frac{E_2 F_2}{h_2} = 704 \frac{\text{to}}{\text{mm}}$$

$$\begin{aligned} \text{Kräfte} \quad Z &= V + \Delta Z = V + c_1 h = 8,0 \text{ to} + h \cdot 456 \text{ to/mm} \\ D &= V - \Delta D = V - c_2 h = 8,0 \text{ to} - h \cdot 704 \text{ to/mm} \\ P &= Z - D = \Delta Z + \Delta D = (c_1 + c_2) h \end{aligned}$$

Die Lösung von Nr 44 III ist dann in Buchstaben

$$h = \frac{P}{c_1 + c_2} \quad Z = V + \frac{c_1 P}{c_1 + c_2} \quad D = V - \frac{c_2 P}{c_1 + c_2}$$

Wir tragen Z und D abhängig von P auf (Fig III). Z steigt von V aus um $\frac{456}{1160} P$ geradlinig. D fällt steiler. Die Differenz der Ordinaten ist $= P$.

II. Bei welchem Überdruck reicht die Vorspannung $V = 8 \text{ to}$ nicht mehr aus? — Es wird $D = V - c_2 h = 0$

$$\text{wenn} \quad h = V/c_2 = 11,37 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = h_0$$

$$\text{Dann ist} \quad Z = V + c_1 h = 8,0 + 5,19 = 13,19 \text{ to} = P_0 \quad (\text{Fig III})$$

Also wird der Deckel undicht beim Überdruck $= p_0 = 24,8 \text{ at}$.

Bei noch größerem P bleibt dann $D = 0$; und $Z = P$ steigt schneller als vorher, so als wenn immer $V = 0$ gewesen wäre, auf einer Geraden durch den Nullpunkt.

III. Bei gegebenem $P = 10,6 \text{ to}$ folgt der Mindestwert der Vorbelastung aus $Z = V + c_1 h = P \quad D = V - c_2 h = 0 \quad P = (c_1 + c_2) h$

$$\text{Also} \quad V_{\min} = \frac{c_2 P}{c_1 + c_2} = \frac{704}{456 + 704} \cdot P = 6,53 \text{ to}$$

Je steiler die untere Gerade im Vergleich zur oberen ist, um so größer muß V sein, damit D positiv bleibt. Also: Je unelastischer die Dichtung

im Verhältnis zu den Bolzen ist, um so größer muß die Vorbelastung im Verhältnis zur Kraft des Gasdruckes sein, damit die Fuge dicht bleibt.

Ist die Dichtung als ganz unelastisch zu betrachten, so muß die Vorbelastung mindestens gleich der zu erwartenden Kraft des Gasdruckes sein. Die Bolzenbelastung bleibt dann konstant, so lange die Fuge dicht bleibt.

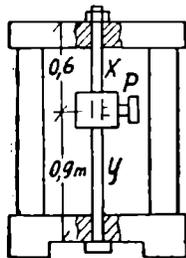


Fig 21. Stab mit Vorspannung

46. Aufgabe (Stab mit Vorspannung). Ein senkrechter Stab (Fig 21) ist in einem starren (unelastischen) Rahmen eingespannt mit einer Vorspannung $= V = 400 \text{ kg}$. Danach wird an ihm ein Gewicht $= P = 600 \text{ kg}$ angeklemt in $\frac{3}{5}$ der Höhe. Wie groß werden dann die Kräfte X und Y in den beiden Teilstrecken? — Anders gefragt: Wie verteilt sich P ? Wird der Zug oben mehr vergrößert oder der Zug unten mehr vermindert?

50. Zusammenfassung. Die Beanspruchung der Stoffe gibt man an, indem man die Kraft pro Einheit des betroffenen Querschnitts ausrechnet. Man unterscheidet

„Normalspannungen“ $\sigma = P/F$ \perp Querschnitt (Zug bzw Druck)

„Schubspannungen“ $\tau = P/F$ \parallel Querschnitt

und berechnet die Querschnittsmaße und ihre Verhältnisse mit Rücksicht auf die Bruchspannungen bzw zulässigen Spannungen.

Die Formänderungen, die die Stoffe erleiden, sind innerhalb gewisser Grenzen proportional zu diesen Spannungen

$\sigma = E \cdot \varepsilon =$ „Elastizitätsmaß“ mal „Dehnung“

$\tau = G \cdot t g \gamma =$ „Gleitmaß“ mal „Winkeländerung“.

Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ ist die Verlängerung der Längeneinheit. Die „Querkürzung“ ist ein Bruchteil ν der Längsdehnung. Diese Elastizität der Stoffe ist unter Umständen für die Kraftverteilung von Bedeutung, wenn mehrere Bauteile federnd unter Vorspannung aufeinander wirken.

III. Gleichgewicht am Punkt, Grundlagen

Um Körper zu heben oder zu unterstützen, hängt man sie an Seilen, Kränen, Ladebäumen auf, lagert sie auf Brücken, Fundamenten usw. Sie üben dann Zug- oder Druckkräfte aus. Umgekehrt gesagt: sie werden durch Zug- oder Druckkräfte im Gleichgewicht gehalten. Bei den nächsten Aufgaben kann man von der Ausdehnung des Körpers absehen, ihn als „Punkt“ betrachten.

51. Flaschenzug. I. Vermittels des Flaschenzugs Fig 22 I hebt man eine Last Q durch eine Kraft $P = \frac{1}{2}Q$. Denn wenn ein Seil über Rollen läuft, so ist ohne Reibung im ganzen Seil die gleiche Zugkraft, hier $= P$.

Die untere Rolle, mit Q belastet, wird von zwei Seilen getragen, also ist $\downarrow Q = 2P \uparrow$
 Aus demselben Grund besteht im Aufhängeseil der oberen Rolle die Kraft $\uparrow R = 2P \downarrow$
 Ebenso ist bei Fig II
 $Q = 4P \quad R = 5P$

II. Diese Verhältnisse bestehen im Gleichgewicht ohne Reibung. Wird Q gehoben (gesenkt), so muß P größer (kleiner) sein wegen Reibung. Aber auch ohne Reibung muß beim Anheben P größer sein

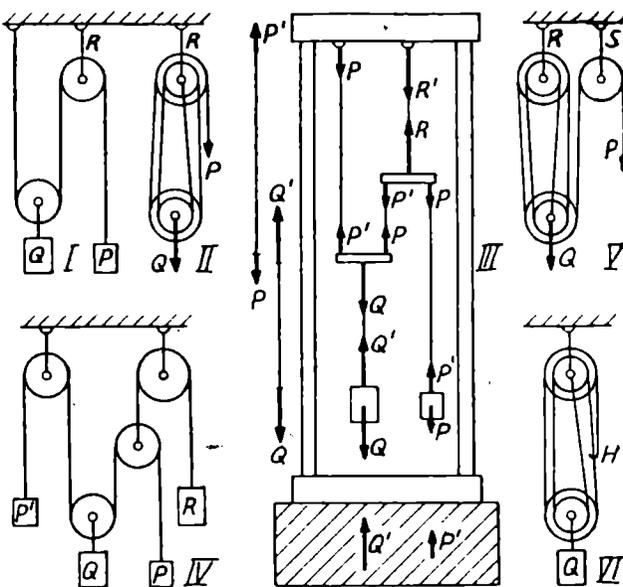


Fig 22. Flaschenzüge

wegen Beschleunigung (Nr 14). Soll zB eine Last $Q = 800 \text{ kg}$ durch den Flaschenzug Fig II in 5 sk eine Hubgeschwindigkeit $= 1,5 \text{ m/sk}$ erreichen, so ist $b = 0,3 \text{ m/sk}^2$ beschleunigende Kraft $= Q \cdot 0,3/9,81 = 24,4 \text{ kg}$
 Also Seilzug $= P = 206,1 \text{ kg}$ während des Anhebens ohne Reibung.
 Wird die Hubgeschwindigkeit $1,5 \text{ m/sk}$ während 1,2 sk gestoppt, so ist $b = 1,25 \text{ m/sk}^2$ verzögernde Kraft $= 102 \text{ kg}$
 Also Seilzug $= P = 174,5 \text{ kg}$ während des Stoppens ohne Reibung.
 Während des gleichmäßigen Hebens aber treten diese Kräfte nicht auf.
 Gleichmäßige Bewegung gilt als Gleichgewicht.

52. Wirkung und Gegenwirkung. Bei dem Flaschenzug Fig I wird die lose Rolle durch $2P \uparrow$ getragen, die feste durch $\downarrow 2P$ belastet. Je nachdem, was man meint, zeichnet man also (Fig III) im mittleren Seil die Kraft \uparrow oder \downarrow . — Durch die Kraft im linken Seil wird der Haken belastet \downarrow , die Rolle vom Haken getragen \uparrow . Es könnte ja statt des Hakens eine feste Rolle da sein. — Das Aufhängeseil der festen Rolle belastet den Haken mit $R \downarrow$, trägt die Rolle mit $R \uparrow$. Auch hier könnte R durch ein Gewicht ausgeübt werden (Fig IV). Man könnte auch P und P' festmachen und R vermittlems Q heben oder umgekehrt.

Überhaupt übt jedes Seilstück von Fig III an seinen beiden Enden entgegengesetzte und gleiche Kräfte aus: die Belastung Q der Rolle und die Tragkraft Q' am Gewicht usw. Auch der Anziehungskraft Q der Erde auf das Gewicht entspricht die Anziehungskraft Q' des Gewichts auf die Erde. Jedes Seilstück wird seinerseits von beiden Enden mit den entgegengesetzten Kräften P bzw Q bzw R gezogen. Vergl auch Fig 5 8

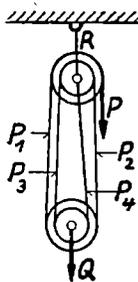
10 12. Überall, wo 2 Körper aufeinander einwirken, haben wir zwei Kräfte: Tragkraft und Belastung, Wirkung und Gegenwirkung zu unterscheiden, die notwendigerweise einander entgegengesetzt und gleich sind; eigentlich nur verschiedene Ausdrucksweisen für denselben Zustand. Was man als Wirkung und was als Gegenwirkung bezeichnet, richtet sich nur nach dem Verwendungszweck, ob P oder ob Q die treibende Kraft sein soll. — An dem Gewicht Q ist dann die Tragkraft Q' mit der Anziehungskraft Q der Erde im Gleichgewicht; an der festen Rolle die Belastungen P und P' mit der Tragkraft R usw.

53. Hebungen und Kräfte. Bei dem Flaschenzug Fig II braucht man zum Heben der Last Q nur die Kraft $P = \frac{1}{4}Q$ auszuüben, bei größerer Rollenzahl noch weniger. Dafür muß man auch P um 4 m senken, wenn man Q um 1 m heben will. Man muß ja 4 Seile um je 1 m verkürzen.

Die Gewichte stehen im umgekehrten Verhältnis der Bewegungen, der Hebungen bzw Senkungen. — Allgemein: Will man mit einer kleinen Kraft (P) einen großen Widerstand überwinden, so geht die gewünschte Bewegung entsprechend langsam vor sich; und umgekehrt muß man eine verhältnismäßig große Kraft (Q) ausüben, wenn man gegen einen gewissen Widerstand eine schnelle Bewegung erzielen will.

54. Aufgabe (Flaschenzüge). I. Wie groß sind die Kräfte $P R S$ in Fig V, ausgedrückt in Bruchteilen von Q ? — II. Welche Kräfte kommen in die Stränge des Flaschenzugs Fig VI, wenn statt des Seils eine Kette benutzt wird, und wenn deren Ende mit einem Haken H in den benachbarten Strang eingehakt wird? — III. Wie schnell laufen die einzelnen Seile von Fig II aufwärts bzw abwärts, wenn Q mit 1,5 m/sk gehoben wird? Wie schnell drehen sich die Rollen (\varnothing 300 mm)?

55. Flaschenzug mit Reibung. Wenn ein Seil über eine Rolle läuft, so muß wegen Lagerreibung und Seilsteifigkeit die Kraft im ablaufenden Strang etwa 5% größer sein als im auflaufenden. Durch den Flaschenzug Fig 23 werde Q gehoben. Die Seilkräfte seien $P P_1 P_2 P_3 P_4$. Dann ist



$$P = 1,05 P_1 \quad P_1 = 1,05 P_2 \quad P_2 = 1,05 P_3 \quad P_3 = 1,05 P_4$$

$$P_2 = 1,05^2 P_4 \quad P_1 = 1,05^3 P_4 \quad P = 1,05^4 P_4 = 1,216 P_4$$

$$\text{Gleichgewicht: } \downarrow Q = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \uparrow$$

$$\text{eingesetzt: } Q = P_4(1 + 1,05 + 1,05^2 + 1,05^3) = 4,31 P_4$$

$$Q = 3,55 P \quad P = 0,282 Q \quad R = 1,282 Q$$

Fig 23.
Flaschenzug
mit Reibung

Wird Q gesenkt, so ist umgekehrt:

$$P_1 = 1,05 P \quad P_2 = 1,05^2 P \quad P_3 = 1,05^3 P \quad P_4 = 1,05^4 P$$

$$Q = P(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4) = 4,53 P \quad P = 0,221 Q$$

56. Schiefe Ebene. Auf einem Schrägaufzug (Fig 24 I) vom Neigungswinkel $\alpha = 27^\circ$ soll ein Wagen $Q = 90$ kg emporgezogen werden. Welche Kraft (Gewicht) $P \parallel$ Bahn ist dazu erforderlich, bei unbeschleunigter Bewegung, ohne Reibung, also im Gleichgewichtszustand (Nr 51)?

I. Man müßte Versuche machen, das Ergebnis P/Q abhängig von α in Tabellen festlegen. — Folgende Überlegung nach Stevin führt zur Berechnung, auch ohne Versuche: Auf einer schiefen Ebene (Fig II) liegt eine Kette, die an den Ecken über Rollen geführt und auch sonst reibungslos beweglich ist. — Es ist nicht anzunehmen, daß eine Bewegung eintritt. — Das Gewicht L des auf der Länge l liegenden Kettenstücks ist eine \downarrow wirkende Kraft, Schwerkraft! Diese denken wir uns nun ersetzt durch eine Kraft L_x , die in Richtung der Kette abwärts zieht, und eine Kraft L_y , die auf die Unterlage drückt. Dann muß L_x im Gleichgewicht sein mit der Schwerkraft H der Kettenlänge h .

Nun verhalten sich die Gewichte wie die Strecken $H:L = h:l$.

Also: $L_x:L = h:l$ oder $L_x =$ Projektion von L auf die Ebene wenn man die Längen der Pfeile, die die Kräfte darstellen, ihrer Größe proportional macht. Ebenso ist dann der Druck auf die Ebene

$L_y =$ Projektion von L auf die Normale zur Ebene

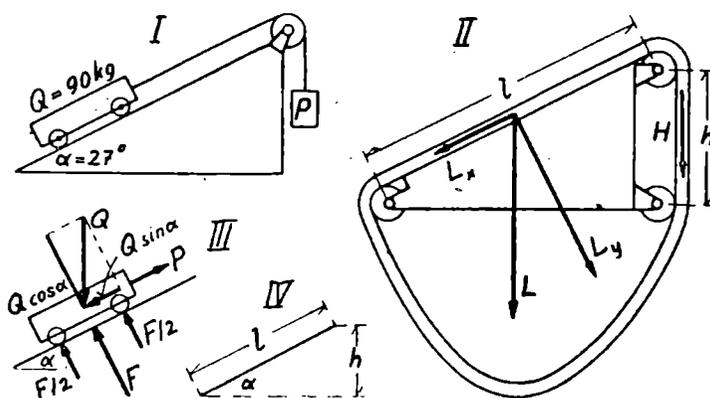


Fig 24. Schiefe Ebene, Stevin'sche Kette

II. So ersetzen wir also (Fig III) die Schwerkraft Q des Wagens, welche \downarrow wirkt, durch seine Projektion \parallel Ebene $= \sphericalangle Q \sin \alpha = 40,9 \text{ kg}$ und „ „ \perp Ebene $= \sphericalangle Q \cos \alpha = 80,2 \text{ kg}$

Die erste ist mit P im Gleichgewicht, oder: wird von P überwunden, oder: zieht P in die Höhe. Die zweite drückt auf die Ebene, oder: ist mit der Tragkraft, der Stützkraft F der Fläche im Gleichgewicht:

$$\nearrow P = Q \sin \alpha \sphericalangle = 40,9 \text{ kg} \quad \nwarrow F = Q \cos \alpha \sphericalangle = 80,2 \text{ kg}$$

III. Das stimmt überein mit dem Grundsatz in Nr 53: Wird der Wagen Q zB um $h = 3 \text{ m}$ gehoben (Fig IV), so sinkt P um $l = h/\sin \alpha = 6,60 \text{ m}$.

Es ist also $P:Q = \sin \alpha$ $h:l = \sin \alpha$ also $P:Q = h:l$

die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die Hebungen.

57. Flaschenzug mit schiefen Seilen. Eine lose Rolle (Fig 25I) wird von 2 Seilen getragen, die je den Winkel $\alpha = 40^\circ$ mit der Vertikale

bilden. Die Last $Q = 90$ kg wird also im Gleichgewicht gehalten von 2 schiefen Kräften P (Fig II).

I. Wir ersetzen die P durch je eine \uparrow und eine \rightarrow Ersatzkraft, durch die Projektion von Pfeilen, deren Länge der Kraft P entspricht. Die $\leftarrow \rightarrow$ heben einander auf, die beiden senkrechten Ersatzkräfte tragen Q

$$\uparrow 2P \cos \alpha = Q \downarrow \quad P = Q/2 \cos \alpha = 58,7 \text{ kg}$$

Je größer α , um so größer P/Q . Für $\alpha = 60^\circ$ wird $P = Q$ (Fig III). In der Tat bilden dann ja die 3 Kräfte gleiche Winkel miteinander. Dann ist kein Unterschied zwischen ihnen. Daß die eine davon \downarrow wirkt, ist belanglos. Ebenso gut könnte am linken Seil die Last hängen, über eine Rolle wirkend, \nwarrow ziehend, gehalten von den beiden anderen. — $\alpha = 90^\circ$ ist unmöglich. Das Seil würde vorher reißen. Die Last Q wird immer einen gewissen Durchhang des Seils Fig I verursachen.

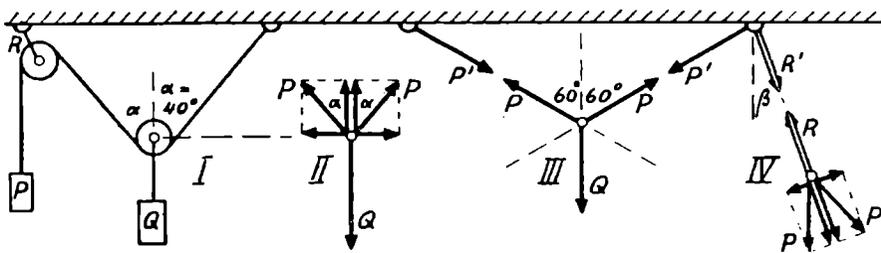


Fig 25. Flaschenzug mit schiefen Seilen

II. Die feste Rolle in Fig I ist mit einem senkrechten P und mit einem schrägen P belastet (Fig IV). Ihr Aufhängeseil stellt sich also in die Winkelhalbierende ein. Wir ersetzen jedes P durch die Projektionen \parallel und \perp zur Winkelhalbierenden:

$$\beta = \alpha/2 = 20^\circ \quad \nwarrow R = 2P \cos \beta \searrow = 110 \text{ kg}$$

$\nwarrow R$ trägt die Rolle, $\searrow R'$ belastet den Haken.

58. Aufhängeseil eines Flaschenzugs. In einem Flaschenzug Fig 26 I mit 2 Rollen hängt eine Last $Q = 96$ kg. Das Windenseil, mit $P = 48$ kg belastet, läuft unter $\alpha = 57^\circ$ gegen die Vertikale. Wie stellt sich das Aufhängeseil ein und wie stark ist es belastet?

I. P und Q ziehen mit vereinter Kraft am Aufhängeseil. Die schiefe Kraft P , halb so lang gezeichnet wie Q , wird nach Nr 56 ersetzt durch ihre Projektionen $\rightarrow P_x$ und $\downarrow P_y$ (Fig II). P_y wird mit Q zusammengefaßt. Dann werden $Q + P_y$ und P_x zu einer neuen schiefen Kraft zusammengefaßt, die nun (nach Nr 56) mit P und Q gleichwertig ist (Fig III). Diese Ersatzkraft für P und Q ist die Belastung R' des Aufhängeseils. Entgegengesetzt dazu ist die Tragkraft R .

Macht man die Konstruktionen II und III in einer Figur (IV) und beachtet, daß die Konstruktion des P_y unten wiederholt werden kann, so erkennt man, daß

die Ersatzkraft R' Diagonale des Parallelogramms aus Q und P ist.

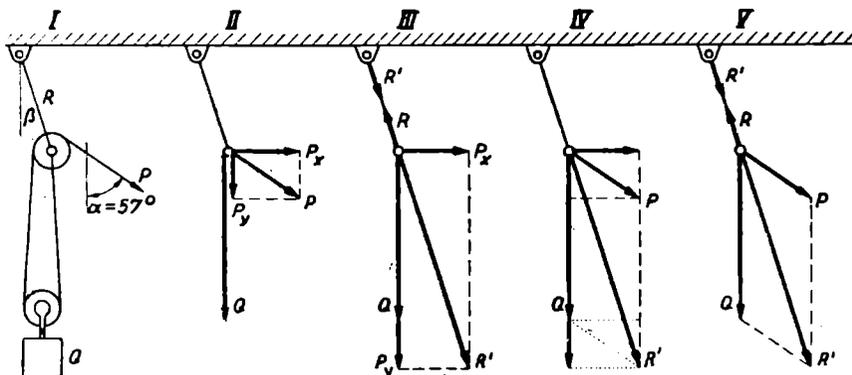


Fig 26. Aufhängeseil eines Flaschenzuges

II. Wir wählen einen Maßstab: Pfeil : Kraft = 1 mm : 5 kg
 zeichnen also (Fig V) Pfeil $Q = 19,2$ mm Pfeil $P = 9,6$ mm
 konstruieren das Parallelogramm und messen

Winkel $\beta = 18^{\circ}15'$ Pfeil $R = 25,7$ mm also Kraft $R = 128,5$ kg

III. Man kann auch berechnen:

$$P_x = P \sin \alpha = 40,3 \text{ kg} \quad P_y = P \cos \alpha = 26,1 \text{ kg}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_x}{Q + P_y} = \frac{40,3}{122,1} \quad \beta = 18^{\circ}15'$$

$$R = \sqrt{40,3^2 + 122,1^2} = \frac{40,3}{\sin \beta} = \frac{122,1}{\cos \beta} = 128,5 \text{ kg}$$

oder in Buchstaben:

$$R = \sqrt{P^2 \sin^2 \alpha + (Q + P \cos \alpha)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \alpha}$$

Damit ist die Kraft gefunden, durch die man P und Q ersetzen kann, — die den beiden gleichwertig ist, — die aus ihrer vereinten Wirkung entsteht. Man nennt diese

Ersatzkraft R' „Resultante“ der „Komponenten“ P und Q ,
 konstruiert als Parallelogrammdiagonale.

Insbesondere heißen P_x und P_y „rechtwinklige Komponenten“ von P .

59. Aufhängung an 2 Drähten. An 2 Drähten, die mit der Waage-rechten die Winkel 57° und 48° bilden, hängt ein Gewicht $\downarrow Q = 180$ kg (Fig 27 I). Es wird getragen von den Kräften $\searrow A$ und $\nearrow B$. An den Aufhängepunkten wirken die Belastungen $\searrow A'$ und $\swarrow B'$.

I. Berechnung: Wir ersetzen A und B durch Komponenten:

Die waagerechten Komponenten sind miteinander im Gleichgewicht

$$\leftarrow A \cos 57^{\circ} = B \cos 48^{\circ} \rightarrow$$

Die senkrechten Komponenten tragen zusammen die Last

$$\uparrow A \sin 57^{\circ} + B \sin 48^{\circ} = Q \downarrow$$

Auflösung $A = 125$ kg $B = 102$ kg

II. Konstruktion: A und B tragen Q mit vereinter Kraft. Dann muß nach Nr 58 die Resultante (Diagonale) von A und B gleich der Tragkraft Q' sein. Man konstruiert hiernach A und B , indem man Q' entgegengesetzt und gleich Q macht (Fig II) und durch den Endpunkt Parallele zu den Seilen legt. Dann kann man A und B nach dem zur Zeichnung von Q gewählten Kraftmaßstab abmessen: $A = 125 \text{ kg}$ $B = 102 \text{ kg}$.

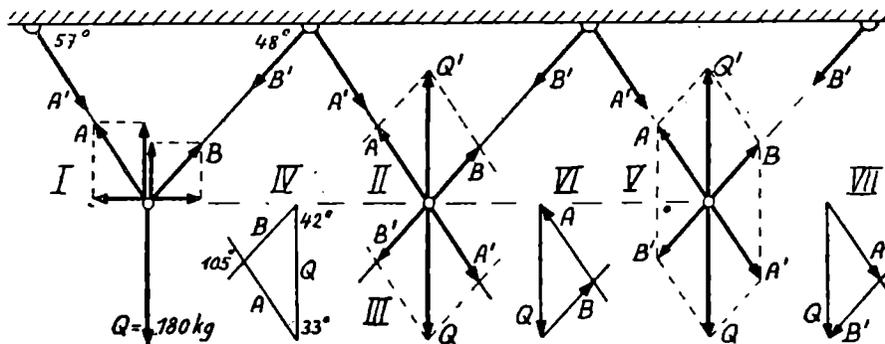


Fig 27. Aufhängung an 2 Drähten

III. Andere Konstruktion: Die Belastung Q verursacht die Kräfte A' und B' an den Aufhängepunkten. Diese Kräfte kann man auch dadurch hervorrufen, daß man in Richtung des linken Seils eine Kraft A' wirken läßt, in Richtung des rechten eine Kraft B' (Fig III). Wenn nämlich eine Kraft genau in Richtung des einen Seils wirkt, so bleibt das andere ungespannt. A' und B' sind also mit Q gleichwertig, die „Wirkungen“ der „Ursache“. Gleichwertig sind sie nach Nr 58, wenn Q Diagonale des Parallelogramms aus A' und B' ist. Man konstruiert dies, indem man durch die Spitze von Q Parallele zu den Seilen legt, die auf ihren Verlängerungen einschneiden. Damit ist also Q ersetzt durch (zerlegt in) zwei ihm gleichwertige Kräfte A' und B' , die so gerichtet sind, daß jede nur ein Seil belastet. Das sind dann die Wirkungen des Q auf die Aufhängepunkte.

IV. Andere Berechnung: Man berechnet das Parallelogramm aus Q und den in Fig IV angeschriebenen Winkeln nach dem Sinussatz:

$$A = \frac{Q \sin 42^\circ}{\sin 105^\circ} = 125 \text{ kg} \quad B = \frac{Q \sin 33^\circ}{\sin 105^\circ} = 102 \text{ kg}$$

V. Unwesentlich ist, daß die Kraft Q senkrecht abwärts gerichtet ist. Die 3 Seile können auch in einer waagerechten Ebene liegen, dann über Rollen abwärts geführt und mit Gewichten belastet sein. Mit solchem Gerät kann man das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte experimentell bestätigen. Man kann auch sagen, daß A durch B und Q getragen wird, oder daß B ersetzt wird durch A' und Q' . Alle diese Möglichkeiten kommen in dem Sechseck Fig V zum Ausdruck.

VI. Zur Konstruktion und Berechnung braucht man nur eine der beiden Hälften des Parallelogramms, ein Dreieck:

Man legt den Pfeil Q in einem beliebigen Maßstab hin und zieht durch die Endpunkte Parallele zu den Krafrichtungen $A B$.

Fig VI zeigt das Gleichgewicht der am Knotenpunkt angreifenden Kräfte, wobei die Pfeile hintereinander herlaufen.

Fig VII zeigt die Zerlegung, den Ersatz des Q durch A' und B' , wobei die Pfeile vom Anfang zur Spitze von Q laufen.

60. Abziehen einer Last. Eine Last $Q = 110 \text{ kg}$ soll an einem Haus hochgewunden werden. (Fig 28 I.) Um an dem vorspringenden Balkon vorbeizukommen, soll sie von zwei Männern durch ein unter 25° abwärts geneigtes Seil abgezogen werden; so stark, daß das Windenseil um 20° aus der Vertikale abgelenkt wird.

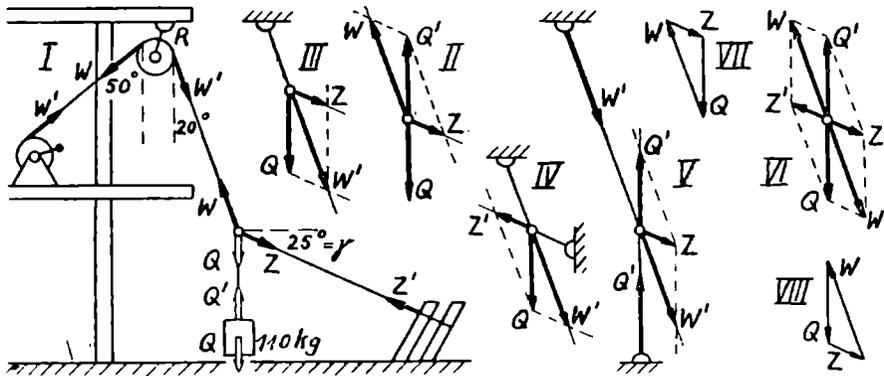


Fig 28. Abziehen einer Last

I. Windenzug W und Zugkraft Z ergeben wie A und B in Nr 59^r als Resultante die Tragkraft Q' . Aus der Diagonale Q' konstruieren wir daher die Parallelogrammseiten W und Z in den gegebenen Richtungen (Fig II). Zwar kann man das schräg abwärts gerichtete Z eigentlich nicht Tragkraft nennen, aber die Konstruktion ist nach Nr 59 V unabhängig davon. Um so größer wird eben W .

II. Last Q und Zugkraft Z ergeben als Resultante die Kraft W' , durch die die Winde zum Ablaufen gebracht würde, wenn sie nicht gesperrt wäre (Fig III). Man zieht also durch die Spitze von Q eine Parallele zu Z bis zum Schnitt mit der Verlängerung von W .

III. Q kann ersetzt werden durch 2 Kräfte: die Kraft W' , die nicht das Zugseil, und die Kraft Z' , die nicht das Windenseil belastet. Man zieht also durch die Spitze von Q Parallele zum Zugseil und zum Windenseil (Fig IV). Dann ist Q zerlegt in Z' und W' .

IV. Man kann sogar W' und Q' als Wirkungen von Z auffassen (Fig V). Alle diese Möglichkeiten kommen in Fig VI zum Ausdruck. Nötig ist nur das Dreieck (Fig VII oder VIII).

V. Abmessen oder Berechnung nach Nr 59 ergibt

$$Z = 53 \text{ kg} \quad W = 141 \text{ kg}$$

61. Aufgabe (Verschiedene Winkel). I. Wähle andere Richtungen von Z ($\gamma = -40^\circ; -20^\circ; 0^\circ; +20^\circ; +40^\circ$). — Für welche Zugrichtung wird die Kraft Z , die zur Ablenkung des Windenseils um 20° erforderlich ist, am kleinsten? — II. Berechne die Kraft R im Aufhängeseil der Rolle.

62. Aufgabe (Hängewerk). Über einen Fabrikhof geht eine gußeiserne Wasserleitung von 22 m Länge, 275 mm lichtem \varnothing und 90 kg/m Rohrgewicht. Sie ist nach Fig 29 aufgehängt. Als Knotenpunktslast G gilt das Gewicht der Leitung und des Wassers von Mitte bis Mitte benachbarter Teilstrecken. Die äußersten halben Teilstrecken gelten als in der Mauer aufgelagert. Die Hängewerkstäbe sind an den Enden umgebogen und in Ringe eingehakt. Mit Rücksicht auf die daraus folgende einseitige Beanspruchung (Nr 22) wählen wir nur 150 kg/cm² als zulässige Beanspruchung. Wie stark müssen die Stäbe werden? — Die Kraft B' ist im rechten Feld Belastung der Wand, im linken Tragkraft am zweiten Knotenpunkt. — Mit welcher Kraft ist der Aufhängepunkt am Pfeiler belastet?

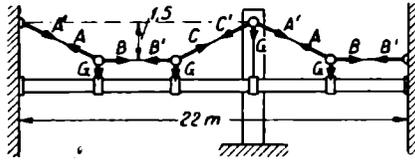


Fig 29. Hängewerk ↑

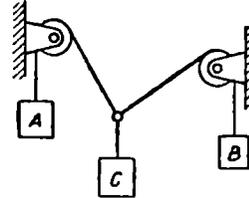


Fig 30. Einstellung des Knotenpunktes →

63. Aufgabe (Einstellung eines Knotenpunktes). Der Knotenpunkt Fig 30 wird sich um so tiefer einstellen, je größer das Gewicht C ist, um so weiter rechts, je größer B ist. Konstruiere die Gleichgewichtslage bei gegebenem $A B C$.

64. Ladebaum. Am Ladebaum Fig 31 I hängt eine Last $Q = 1200$ kg in einem Flaschenzug mit 2 Rollen. Der Windenzug ist also $W = 600$ kg. Wie groß ist Druck D im Baum und Zug Z in der Verspannung?

I. Feststellung der Kräfte: Der Punkt, der Beschlag, an dem der Flaschenzug hängt, ist durch die Kräfte Q und W belastet (Fig II). Die Verspannung hält ihn mit der Kraft Z und belastet den Mast mit der Kraft Z' . Der Ladebaum stützt den Punkt mit der Kraft D und belastet den Mast mit der Gegenkraft D' .

Diese Kraft liegt in Richtung des Baums. Ein beiderseits gelenkig befestigter Stab würde sich ja unter dem Einfluß zweier Kräfte, die nicht in eine Linie fallen, drehen. Auch wenn der Stab krumm ist, liegen die Kräfte in der Verbindungslinie der Angriffspunkte. Nur wenn der Stab an einem Ende eingespannt ist, kann die Kraft am andern Ende beliebige Richtung haben.

Daß die stützende Kraft D nach rechts oben geht, ergibt sich auch daraus, daß man sich den Baum durch ein nach rechts oben gehendes Seil wie in Fig 27 ersetzt denken kann. Oder: Man stelle sich vor, daß man

den aus seiner Verbindung mit dem Mast gelösten Baum selbst stützen sollte. Dann müßte man ihn nach rechts oben stemmen. Stützkkräfte (Tragkräfte) sind die Kräfte, die man an Stelle der Befestigungen anbringen muß, um den Knotenpunkt im Gleichgewicht zu halten.

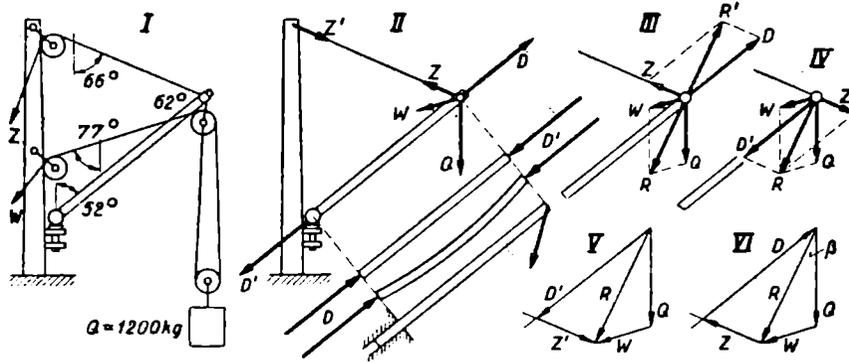


Fig 31. Kräfte am Ladebaum

II. Konstruktion: Die Resultante R der Belastungen Q und W muß im Gleichgewicht sein mit der Resultante R' der Stützkkräfte Z und D (Fig III, vergl Fig 27 II, 28 II).

III. Die Resultante R wird ersetzt durch 2 nach der Parallelogrammkonstruktion (Nr 58) gleichwertige Kräfte Z' und D' , von denen $Z' \parallel$ Seil nicht den Baum und $D' \parallel$ Baum nicht das Seil belastet:

Man zeichnet also R als Diagonale von Q und W (Fig IV)

und zeichnet dann zu R als Diagonale das Parallelogramm $Z' D'$.

Man faßt Q und W zusammen zur Resultante R

und „zerlegt“ dann R wieder in die „Komponenten“ Z' und D' .

Vergl Fig 27 III, 28 IV. — Es sind an sich viele Zerlegungen von R möglich, aber nur die eine erfüllt die Bedingung, daß die eine Komponente nur die Verspannung, die andere nur den Mast belastet. Diese an den Mast „weitergegebenen“ Kräfte sind der Resultante R und damit den Belastungen Q und W , die Wirkung der Ursache, gleichwertig.

IV. Es genügt, je die Hälfte der Parallelogramme, die „Kraftdreiecke“ zu konstruieren: Man trägt Q und W aneinander an (Fig V VI), und zieht die Ersatzkraft R vom Ausgangspunkt von Q zur Spitze von W . Der gerade Weg ist „Ersatz“ für den geknickten. Durch die Endpunkte von R zieht man dann Parallele zu Seil und Baum. Die Pfeile trägt man ein entweder im Sinne der weitergegebenen Kräfte (Fig V):

$D' Z'$ ist Ersatz für R bzw QW : Die Pfeilrichtungen laufen

vom selben Ausgangspunkt zum selben Endpunkt. —

oder im Sinne der Stützkkräfte (Fig VI; vergl Nr 59 VI):

$QWZD$ sind im Gleichgewicht miteinander: Die Pfeile bilden einen geschlossenen Weg mit aneinander anschließenden Pfeilrichtungen.

Abmessen ergibt $Z = 785 \text{ kg}$ $D = 1650 \text{ kg}$

V. Man berechnet nach Nr 58 $\beta = 23^{\circ}39'$ $R = 1456 \text{ kg}$
dann nach dem Sinussatz $Z = 784 \text{ kg}$ $D = 1651 \text{ kg}$

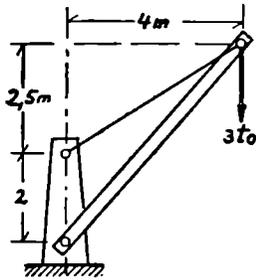


Fig 32. Ausleger

65. Aufgabe (Ausleger). Konstruiere und berechne die Stützkkräfte des Auslegers Fig 32. — Beachte, daß Z im Gegensatz zu Nr 64 nach schräg unten geht und wie dafür D um so größer wird. Vergl Nr 60 I.

66. Kreuzkopf. Die Kolbenmaschine Fig 33 I habe einen Zylinder von $350 \text{ mm } \varnothing$. In der gezeichneten Stellung ($\alpha = 40^{\circ}$) sei der Überdruck 12 at . Dann übt der Dampf mittels der Kolbenstange auf den Kreuzkopf die Kraft $K = 11550 \text{ kg}$ aus. Wie groß sind die weitergegebenen Kräfte: die Kraft P' an der Pleuelstange in Richtung der Pleuelstange und die Belastung F' der Gleitbahn senkrecht auf ihr?

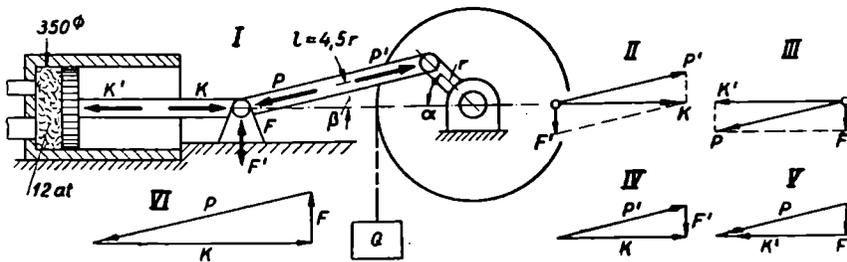


Fig 33. Kräfte am Kreuzkopf

Der Kraft P' entspricht als Gegenkraft der Widerstand, die Reaktionskraft P ; der Belastung F' die Stützkraft, die Führungskraft der Fläche F . Das Dasein von P erkennt man, wenn man sich die Maschine rückwärts laufend denkt, so daß die Last Q sinkt und der Zylinder als Pumpe wirkt. Überwiegt der Dampfdruck, so werden die Reibungskräfte im einen Sinne, überwiegt die Last, so werden sie im anderen Sinne überwunden. Im reibungslosen, unbeschleunigten Zustand sind die Kräfte ganz unabhängig von der Bewegungsrichtung. Jedenfalls aber bestehen in beiden Fällen die Kräfte in beiden Richtungen: weitergegebene Kräfte und Stützkkräfte, Wirkung und Gegenwirkung.

Im Fall Dampfmaschine wird K zerlegt in P' und F' (Fig II).

Im Fall Pumpe wird P ersetzt durch K' und F' (Fig III).

Diese Zerlegungen kann man auch in Form der Dreiecke (Fig IV V) zeichnen. Durch das geschlossene Dreieck Fig VI kommt in beiden Fällen das Gleichgewicht der am Kreuzkopf wirkenden Kräfte zum Ausdruck. Auf die Bewegungsrichtung kommt es nicht an.

Berechnung des Winkels: $\sin \beta / \sin \alpha = r/l = 1/4,5$ $\beta = 8^{\circ}13'$
der Kräfte: $P = K / \cos \beta = 11670 \text{ kg}$ $F = K \tan \beta = 1666 \text{ kg}$

67. Schiefe Ebene. In Nr 56 wurde auf einer schiefen Ebene mit $\alpha = 27^\circ$ das Gewicht $G = 90$ kg durch eine Kraft \parallel Ebene gehalten. Für diesen Fall sind in Fig 34 I nochmals gezeichnet die Stützkraft F und die Belastung F' der Fläche, ebenso Z und Z' , Wirkung und Gegenwirkung; ferner die Zerlegung von G in Z' und F' (Fig II), das Kraftdreieck im Sinn der Zerlegung (Fig III) und des Gleichgewichts (Fig IV); schließlich die Tragkraft G' als Resultante der Stützkräfte (Fig V).

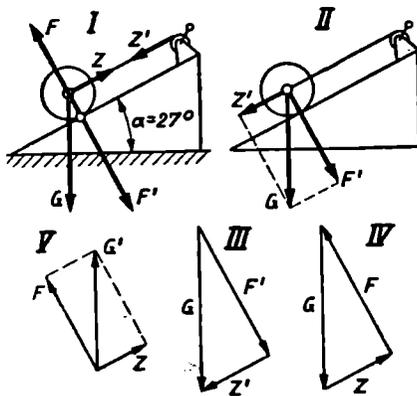


Fig 34. Schiefe Ebene, Seil \parallel Ebene

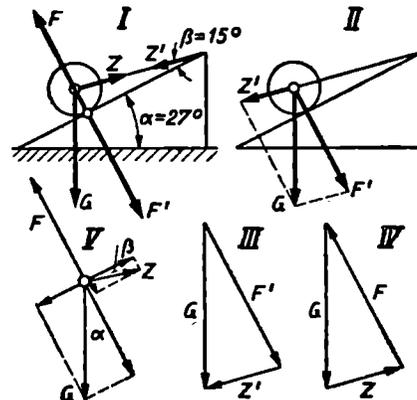


Fig 35. Schiefe Ebene, schiefes Seil

Ist nun das haltende Seil nicht \parallel Ebene, sondern um $\beta = 15^\circ$ gegen diese geneigt (Fig 35), so ist jetzt zu zeichnen:

Stützkraft $Z \parallel$ Seil, Stützkraft $F \perp$ Ebene

I. Konstruktion: Die Schwerkraft $\downarrow G$ ist also zu zerlegen in $Z' \parallel$ Seil und $F' \perp$ Ebene (Parallelogramm II oder Dreieck III).

Oder: G ist im Gleichgewicht mit Z und F (Dreieck IV): Lege G hin und ziehe durch die Endpunkte Linien \parallel Seil und \perp Fläche.

II. Berechnung: Aus dem Dreieck folgt nach dem Sinussatz:

$$Z = \frac{G \sin \alpha}{\cos \beta} = 42,3 \text{ kg} \quad F = \frac{G \cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 91,1 \text{ kg}$$

Oder: Gleichgewicht der Komponenten \parallel und \perp Ebene (Fig V):

$$\begin{aligned} \nearrow G \sin \alpha &= Z \cos \beta \nearrow & Z &= 42,3 \text{ kg} \\ \searrow F &= G \cos \alpha + Z \sin \beta \searrow & F &= 91,1 \text{ kg} \end{aligned}$$

In diesem Fall drückt also auf F noch eine Komponente von Z ; im Gegensatz zu Fig 34.

68. Aufgabe (Walze mit Keil). Auf einem Gefälle 1:8 liegt eine Walze von 400 kg reibungslos (Fig 36). Damit sie nicht fortrollt, legt man einen Keil von 20° davor. Berechne den Druck auf den Boden, auf den Keil.

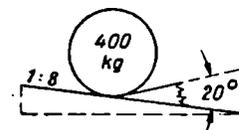


Fig 36. Walze mit Keil

69. Aufgabe (Einstellung einer Walze). Auf einer schiefen Ebene (Fig 37) liegt eine Walze vom Gewicht $\downarrow Q$, gehalten durch ein mit $\searrow P$ belastetes Seil. Konstruiere, wo sie sich hinstellt.

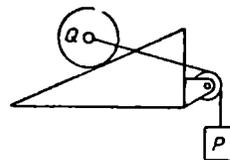


Fig 37.
Einstellung der Walze

70. Gleichgewicht beliebig vieler Kräfte. An der Spitze des Auslegers (Fig 38) wirken drei (oder mehr) gegebene Kräfte

110 kg 170 kg 150 kg in den angegebenen Richtungen

Wie groß sind die Kräfte im Zugstab und im Druckstab?

I. Konstruktion der Resultante: Wir suchen zunächst die gegebenen Kräfte durch eine einzige zu ersetzen. Wir fassen zuerst 110 kg und 170 kg zu einer Resultante zusammen. Diese und 150 kg ergeben dann die Ersatzkraft R für alle Drei. R wird nun wieder ersetzt durch $Z' \parallel$ Zugstab und $D' \parallel$ Druckstab wie in Nr 64.

• Statt der Parallelogramme braucht man nur Dreiecke zu zeichnen. Man braucht nicht einmal die Teilresultanten auszuziehen. Es genügt, wenn man die Einzelkräfte aneinander anträgt (Fig II). Die Gerade vom Anfang bis zur Spitze dieses „Kräftezugs“ ist die Ersatzkraft R . Die Reihenfolge des Antragens ist gleichgültig.

II. Konstruktion der Stabkräfte: R wird dann selbst wieder ersetzt durch (zerlegt in) die weitergegebenen Kräfte Z' und D' , indem man durch die Endpunkte des Kräftezugs Parallele zu den Auslegerstäben zieht (Fig II).

Oder: Durch die Stützkkräfte Z und D wird der Kräftezug geschlossen (Fig. III). Damit gewinnt man eine Gleichgewichtsbedingung, die unabhängig ist von der belanglosen Unterscheidung zwischen gegebenen Belastungen und gesuchten Stützkkräften (vergl Nr 59 V, Nr 66):

Die an einem Punkt angreifenden Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht, wenn sie ein geschlossenes Vieleck mit aneinander anschließenden Pfeilrichtungen bilden.

Man trägt dann also die gegebenen Kräfte aneinander an und schließt das Vieleck durch Parallele zu den unbekanntem.

Oder: Die Resultante aller Kräfte, die im Gleichgewicht miteinander sind, ist Null, weil ja der ganze Kräftezug geschlossen ist.

Abmessen ergibt: $R = 185 \text{ kg}$ $Z = 317 \text{ kg}$ $D = 159 \text{ kg}$

III. Berechnung: Wir denken uns jede der am Knotenpunkt angreifenden Kräfte, Belastungen und Stützkkräfte, ersetzt durch rechtwinklige Komponenten (Fig 39 I). Dann ist wie in Nr 57 59 67:

$$\begin{aligned} \Sigma \leftarrow \text{Komponenten} &= \Sigma \rightarrow \text{Komponenten} \\ Z \cos 25^\circ + 110 \cos 64^\circ &= 150 \cos 50^\circ + 170 \cos 62^\circ + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \uparrow \text{Komponenten} &= \Sigma \downarrow \text{Komponenten} \\ Z \sin 25^\circ + 150 \sin 50^\circ &= 110 \sin 64^\circ + 170 \sin 62^\circ \end{aligned}$$

aufgelöst $Z = 317 \text{ kg}$ $D = 159 \text{ kg}$

Dieser Gedanke vom Gleichgewicht der Komponenten ist gleichwertig mit der Regel vom geschlossenen Krafteck. Man erkennt das, indem man das geschlossene Krafteck auf eine vertikale und auf eine horizontale Linie projiziert (Fig 39 II).

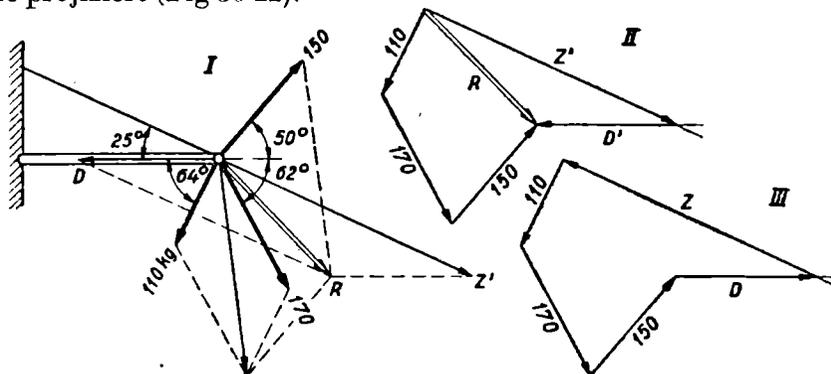


Fig 38. Beliebig viele Kräfte am Punkt, zeichnerisches Verfahren

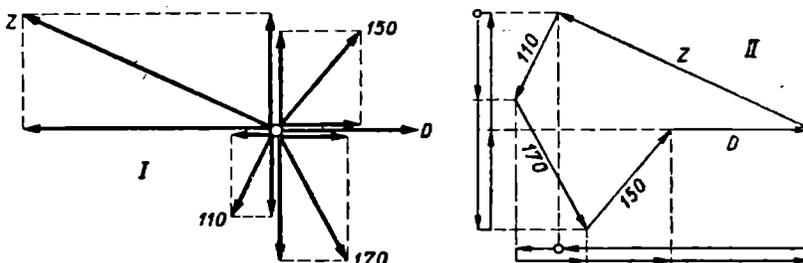


Fig 39. Beliebig viele Kräfte am Punkt, rechnerisches Verfahren

Man kann das Krafteck auch auf jede andere Richtung projizieren und erhält dann das Gleichgewicht der Komponenten für diese. — Umgekehrt: Gelten die Komponentengleichungen für 2 Richtungen, so ist das Krafteck geschlossen und die Komponentengleichung gilt dann auch für jede andere Richtung.

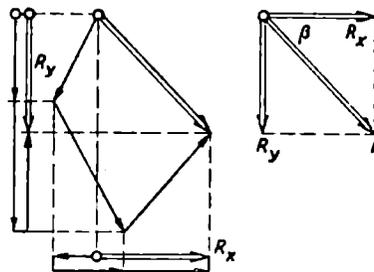


Fig 40. Resultante am Punkt

71. Berechnung der Resultante. Man ersetzt die $\rightarrow \leftarrow$ Komponenten der gegebenen Kräfte, wie sie in Fig 39 I und in den Gleichungen von Nr 70 auftreten, durch eine einzige \rightarrow Kraft (Fig 40)

$$R_x = 150 \cos 50^\circ + 170 \cos 62^\circ - 110 \cos 64^\circ = 128 \text{ kg} \rightarrow$$

ebenso die $\downarrow \uparrow$ Komponenten durch

$$R_y = 110 \sin 64^\circ + 170 \sin 62^\circ - 150 \sin 50^\circ = 134 \text{ kg} \downarrow$$

Aus diesen rechtwinkligen Komponenten der Ersatzkraft folgt

$$\beta = 46^\circ 20' \quad R = 185 \text{ kg}$$

Auch diese Berechnung ist in Übereinstimmung mit der Konstruktion Fig 38 II, wie man durch Projektion erkennt. Vergl auch Nr 58.

Aus R folgt dann vermittels Komponentengleichungen oder Sinussatz wieder Z und D . Jedoch ist zur Berechnung derselben die vorherige Berechnung von R nicht nötig.

Will man aber den belasteten Punkt nicht durch einen Ausleger stützen, sondern durch ein einziges Seil wie in Nr 58, so stellt sich dieses in die Resultantenrichtung ein und ist mit R belastet.

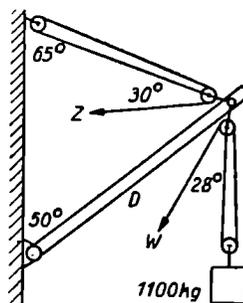
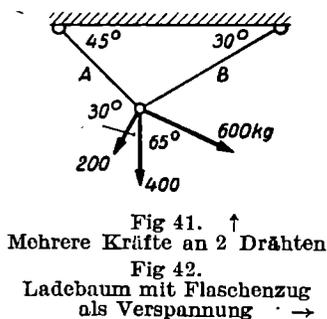
72. Wahl der Komponentenrichtungen. Wendet man die Berechnung nach rechtwinkligen Komponenten auf den Ladebaum Nr 64 an, so erhält man wie in Nr 59 zwei Gleichungen, in deren jeder beide Unbekannte vorkommen. In Nr 70 III dagegen kam D in der zweiten Gleichung nicht vor, weil es keine \uparrow Komponente hatte. Das ist leichter aufzulösen.

Dasselbe erreichen wir beim Ladebaum, wenn wir Komponenten \parallel und \perp Baum wählen. Dann tritt D beim Gleichgewicht der Komponenten \perp Baum nicht auf:

$$\begin{aligned} \nwarrow Z \sin 62^\circ + 600 \sin 25^\circ &= 1200 \sin 52^\circ \searrow & Z &= 784 \text{ kg} \\ \nearrow D = Z \cos 62^\circ + 600 \cos 25^\circ + 1200 \cos 52^\circ &\swarrow & D &= 1651 \text{ kg} \end{aligned}$$

So war es auch bei der schiefen Ebene, wo wir Komponenten \parallel und \perp Ebene wählten (Nr 67).

73. Aufgabe (Mehrere Kräfte an 2 Drähten). Konstruiere und berechne die Zugkräfte in den nach Fig 41 belasteten Drähten nach Nr 70–72.



74. Aufgabe (Ladebaum mit Flaschenzug als Verspannung). Ein Ladebaum ist nach Fig 42 gestützt und belastet. Konstruiere und berechne Z und D .

75. Mehrere Knotenpunkte. Eine Last $P = 400 \text{ kg}$ ist an 2 Seilen aufgehängt (Fig 43). Seil A ist an dem durch C verspannten Mast D befestigt, B an E und F . Solche Masten sind eingegraben. Es soll aber angenommen werden, daß sie nur lose eingegraben sind oder nur auf dem Boden aufstehen, so daß die Drucke E und D die Richtung des Mastes haben. Vergl Nr 64 I. Berechne $A B C D E F$.

A und B sind mit P im Gleichgewicht (Fig II), A' mit C und D (Fig III), B' mit E und F (Fig IV). Die 3 Kräftecke können mit den gemeinsamen Seiten zusammengesetzt werden zu dem „Kräfteplan“ Fig V. Die Pfeile sind hier im Sinn der Zerlegung eingetragen. $C D E F$ sind die stützenden Kräfte, $C' D' E' F'$ die am Boden wirkenden.

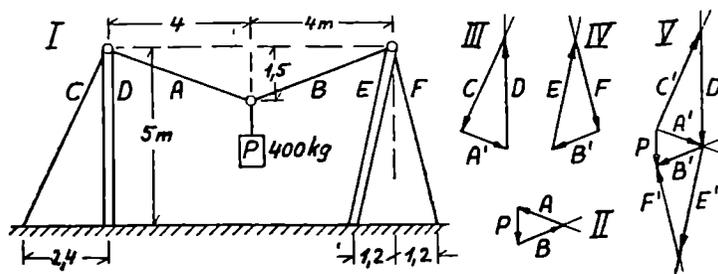


Fig 43. Aufhängung an Masten

Abmessen oder Berechnung nach Sinussatz oder nach Komponenten-gleichungen ergibt

$$A = B = 570 \quad C = 1230 \quad D = 1310 \quad E = 1250 \quad F = 1040 \text{ kg}$$

76. Kniehebel. Durch 2 Stäbe $A B$ (Fig 44 I), die einen flachen Winkel miteinander bilden, kann man mit einer verhältnismäßig kleinen Kraft K am Gelenk eine große Druckkraft D' im Preßzylinder ausüben.

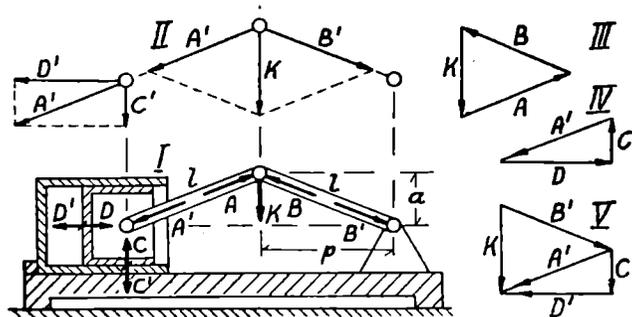


Fig 44. Kniehebel

K wird zerlegt in die weitergegebenen Kräfte $A' B'$ (Fig II). Oder: K ist im Gleichgewicht mit den Widerstandskräften, Gegenwirkungen, Stützkraften $A B$ (Fig III), die trotz des kleinen K groß sind, weil sie einander fast entgegenwirken (Nr 57). — A' verursacht den Druck C' auf die Zylinderwand und den Druck D' im Preßzylinder. Auch dies kann im Sinne der Zerlegung (Fig II) oder des Gleichgewichts (Fig IV), als Parallelogramm oder als Dreieck gezeichnet werden. — Die Kräfte dreiecke können mit der gemeinsamen Seite A' zu dem Kräfteplan Fig V zusammengelegt werden.

Die Länge der Stäbe sei je $l = 900 \text{ mm}$. Das Gelenk stehe um $a = 60 \text{ mm}$ vor der Mittelstellung. Aus dem Kräfteplan folgt dann:

$$C = \frac{1}{2} K \quad \text{aus ähnlichen Dreiecken} \quad D:C = p:a$$

wobei Projektion $= p = \sqrt{l^2 - a^2} = 898 \text{ mm}$ nahezu $= l!$

$$\text{eingesetzt: } D = \frac{pK}{2a} = 7,48 K \quad \text{das Mehrfache von } K!$$

Der Zylinder habe $250 \text{ mm } \varnothing$. In ihm soll ein Überdruck von 10 at ausgeübt werden. Dann wird $D = 4910 \text{ kg}$ $K = 657 \text{ kg}$.

77. Aufgabe (Nietpresse). Durch Wasserdampfdruck auf den in Fig 45 gezeichneten Kolben K wird mittels Stangen, die einen Kniehebel H bilden, der Nietstempel S abwärts gedrückt. Zeichne den Kräfteplan.

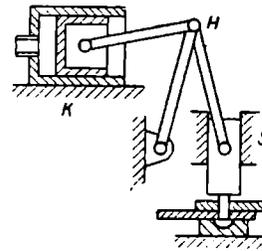


Fig 45. Nietpresse

80. Zusammenfassung. Wenn an einem Körper Kräfte angreifen: Gewichte, durch Gewichte zu messende Dampfdrucke, Windzüge oder dergl, so wird er sich im allgemeinen in beschleunigte Bewegung setzen. Um ihn in der Ebene im Gleichgewicht zu halten, braucht man 2 Stützen von beliebig gegebenen Richtungen oder eine Stütze von bestimmter zu berechnender Richtung.

Die Krafrichtung ist bei einem Seil \parallel Seil, bei einem Stab \parallel Stab, wenn er an beiden Enden gelenkig befestigt ist, bei einer Gleitfläche \perp Fläche, wenn keine Reibung besteht. Bei der Angabe der Richtung der zwischen 2 Körpern wirkenden Kraft ist zu unterscheiden: Wirkung und Gegenwirkung, Belastung und Tragkraft, weitergegebene Kraft und Stützkraft.

Demgemäß sprechen wir vom Gleichgewicht der an einem Punkt angreifenden Kräfte, der Belastungen und Stützkraften, oder von der Zusammenfassung der Belastungen und ihrer Zerlegung in die weitergegebenen Kräfte. Der Techniker, der Ursache und Wirkung, Mittel und Zweck unterscheidet, wird eher an die weitergegebenen Kräfte denken. Für das Gleichgewicht des Körpers ist es belanglos, was Belastung, was Stützkraft, was uns bekannt, was uns unbekannt ist. Auch die Stützkraften belasten den Körper.

Die Zusammenfassung gegebener Kräfte zur Resultante geschieht vermittels des Parallelogramms oder des Kräftezugs. Die Zerlegung geschieht so, daß die Teilkräfte einzeln nur je eine Stütze belasten, zusammen aber den Belastungen gleichwertig sind, die Wirkungen der Ursache.

Als Gleichgewichtsbedingung gilt die Regel vom geschlossenen Kräfteck. Danach ist der Kräftezug der gegebenen Kräfte durch die Stützkraften von gegebenen Richtungen zu schließen. Rechnerisch entspricht dieser Konstruktion das Gleichgewicht der rechtwinkligen Komponenten mit passend gewählten Komponentenrichtungen. Man kann die Kräfte-dreiecke auch trigonometrisch berechnen.

IV. Hängewerk Reibung Raumpunkt Vorspannung

81. Hängewerk. Eine gußeiserne Leitung von 250 mm \varnothing und 12 mm Wandstärke ($\gamma = 7,2 \text{ kg/dm}^3$), in der Öl ($\gamma = 0,86$) fließt, ist mittels eines Hängewerks (Fig 46 I) aufgehängt an Pfosten im Abstand $l = 15 \text{ m}$, Teilstrecke $t = 2,5 \text{ m}$.

Die Form des Bogens kann man nicht etwa ganz willkürlich wählen. Wählt man den einen Knick zu klein, den nächsten zu groß, so wird sich die Leitung unter dem ersten Knick senken, unter dem anderen heben, also nicht mehr gerade bleiben. Das soll vermieden werden. Willkürlich wählen wir a und den Durchhang $f = 2,0 \text{ m}$. Danach sind die Maße b und c und die Stabkräfte zu bestimmen.

Gewicht der Längeneinheit, Rohr und Öl = 113,3 kg/m (Nr 8)

Knotenpunktsbelastung = $G = 283 \text{ kg}$ (Nr 62)

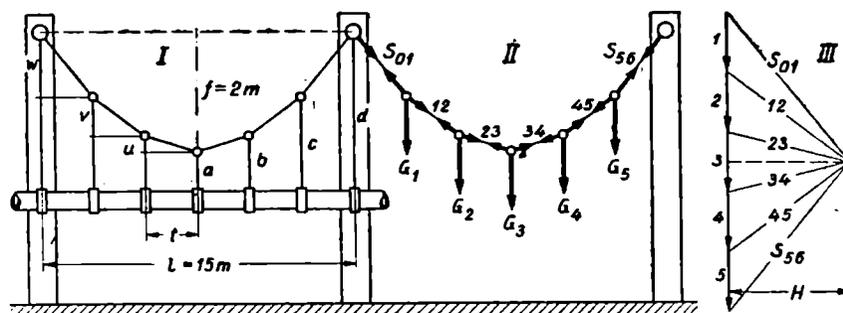


Fig 46. Hängewerk, Gestalt und Kräfteplan

I. Gleichgewichtsbedingung: Die Belastung G jedes Knotenpunkts wird von den angrenzenden Stabkräften getragen (Fig II). Für jeden Knotenpunkt besteht also ein Kraftdreieck. Diese Dreiecke lassen sich wie in Nr 75 76 mit den gemeinsamen Seiten zu einem Kräfteplan (Fig III) aneinanderlegen. Die Knotenpunkte sind mit 1 ÷ 5 nummeriert, die Aufhängepunkte mit 0 und 6. Die Stäbe erhalten die Indices der beiden angrenzenden Knotenpunkte, zB S_{34} = Stabkraft zwischen 3 und 4. Es sind also zB im Gleichgewicht miteinander $G_4 S_{45} S_{34}$. Die Gestalt des Hängewerks muß so sein, daß dieser Kräfteplan möglich ist, daß die Kraftdreiecke aneinander passen. Ändern sich die Lasten, so verzieht es sich.

II. Konstruktion. Man kann ein solches Hängewerk zeichnen, indem man vom Kräfteplan ausgeht. Man trägt die 5 Lasten G untereinander an, wählt neben der Mitte von G_3 einen Punkt und verbindet ihn mit den Pfeilspitzen der G . Parallel dazu zeichnet man dann die Stäbe des Hängewerks mit Rücksicht auf die gegebene Teilung t . So ergeben sich bestimmte Längen a b c und Knickwinkel. Die schrägen Verbindungslinien im

Kräfteplan sind nach dem für G gewählten Kraftmaßstab die Stabkräfte; der Abstand H ist ihre gemeinsame Horizontalkomponente. Je größer H gewählt wird, um so kleiner wird der Durchhang f . Welches H zu $f = 2$ m führt, kann man durch Probieren finden.

III. Berechnung von H : Die in Fig I gezeichneten Dreiecke, die die Differenzen $u v w$ der Maße $a b c d$ enthalten, sind ähnlich gewissen Dreiecken im Kräfteplan. Es bestehen also

die Proportionen: $u : t = \frac{1}{3} G : H$ oder $u = 1 \cdot Gt/2H$

$$v : t = \frac{3}{9} G : H \quad v = 3 \cdot Gt/2H$$

$$w : t = \frac{5}{9} G : H \quad w = 5 \cdot Gt/2H$$

zusammen: $u + v + w = f = 9 \cdot Gt/2H$

Also $f = \frac{9Gt}{2H}$ aufgelöst $H = \frac{9Gt}{2f} = 1590 \text{ kg}$

IV. Die Stabkräfte sind etwas größer als H . Am größten ist die Zugkraft am Aufhängepunkt $= S_{01} = \sqrt{H^2 + (\frac{3}{9}G)^2} = 1740 \text{ kg}$
Mit $\sigma_{zul} = 200 \text{ at}$ (vergl Nr 62) ergibt sich Stab $\varnothing = 34 \text{ mm}$.

V. Zur Berechnung der Längen bilden wir die Verhältnisse zu f :

$$u = \frac{1}{9}f \quad \text{also} \quad b = a + \frac{1}{9}f = a + 222 \text{ mm}$$

$$v = \frac{3}{9}f \quad \text{,,} \quad c = a + \frac{3}{9}f = a + 889 \text{ mm}$$

$$w = \frac{5}{9}f \quad \text{,,} \quad d = a + \frac{5}{9}f = a + 2000 \text{ mm}$$

82. Hängewerk mit $2n$ Teilstrecken. Die halbe Länge sei in n Teilstrecken geteilt. ($n = 3$ in Nr 81.) Angenommen ist also eine gerade Anzahl Teilstrecken auf der ganzen Länge. Im andern Fall ist in der Mitte ein waagerechter Stab. Das Gesamtgewicht auf l sei Q .

Dann ist Teilstrecke $= t = l/2n$ Knotenpunktslast $= G = Q/2n$

Die Höhen der Knotenpunkte über dem tiefsten Punkt des Bogens seien $h_1 h_2 \dots h_n = f$ (Fig 47), ihre Differenzen seien $u_1 = h_1$

$u_2 = h_2 - h_1 \dots$ Dann folgt, wie in Nr 81 aus ähnlichen Dreiecken:

$$u_1 = 1 \frac{Gt}{2H} \quad h_1 = 1 \frac{Gt}{2H}$$

$$u_2 = 3 \frac{Gt}{2H} \quad h_2 = h_1 + u_2 = 4 \frac{Gt}{2H}$$

$$u_3 = 5 \frac{Gt}{2H} \quad h_3 = h_2 + u_3 = 9 \frac{Gt}{2H}$$

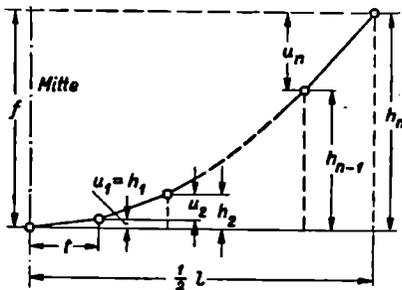


Fig 47. Hängewerk mit $2n$ Teilstrecken

$$u_n = (2n-1) \frac{Gt}{2H} \quad h_n = ?$$

Summe der ungeraden Zahlen = Anzahl der Zahlen mal Mittelwert

$$\text{Summe} = n \cdot \frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2 \quad \text{also} \quad f = h_n = n^2 \frac{Gt}{2H}$$

Die Höhen der Knotenpunkte verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Abstände von Mitte Bogen. Die Punkte liegen also auf einer Parabel. Wir setzen ein $t = l/2n$ $G = Q/2n$ dann ist unabhängig von n

$$\text{Durchhang} = f = \frac{Ql}{8H} \quad \text{umgekehrt} \quad \text{Horizontalkraft} = H = \frac{Ql}{8f}$$

83. Leitungsdraht. Ein Kupferdraht ($\gamma = 8,9 \text{ kg/dm}^3$) von $3 \text{ mm } \varnothing$ hänge bei 60 m Spannweite $1,2 \text{ m}$ durch. Wie groß ist seine Zugspannung?

Der Draht ist ein Hängewerk wie Nr 82 mit unendlich vielen Lasten, dem Eigengewicht. Allerdings ist das Eigengewicht gleichmäßig über die krumme Bogenlänge verteilt, Q in Nr 82 aber gleichmäßig über die Projektion. Das macht aber bei kleinem Durchhang nicht viel aus. Wir benutzen deshalb die Formel von Nr 82, die ja unabh. g. von n auch für $n = \infty$ gilt:

$$Q = \gamma Fl = 3,77 \text{ kg} \quad H = \frac{Ql}{8f} = 23,6 \text{ kg} \quad \sigma = \frac{H}{F} = 334 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

H ist die Horizontalkomponente der Zugkraft im Draht. In der Mitte ist die Zugkraft gleich H , an den Enden etwas größer, indem als Vertikal-komponente das halbe Gewicht hinzukommt. Auch das ist zu vernachlässigen. — σ wird unabhängig vom Drahtquerschnitt.

$$\text{Einsetzen ergibt} \quad \sigma = \frac{\gamma l^2}{8f} = \frac{8900 \text{ kg} \cdot (60 \text{ m})^2}{8 \cdot \text{m}^3 \cdot 1,2 \text{ m}} = 3,34 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 334 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

84. Aufgabe (Durchhang). Ein Eisendraht von $5 \text{ mm } \varnothing$ über 45 m Spannweite wird mit 180 kg stramm gezogen. Berechne den Durchhang?

85. Aufgabe (Hängewerk). Berechne das Hängewerk Nr 81 unter der Annahme, daß die Länge $l = 15 \text{ m}$ in nur 5 Teilstrecken geteilt ist.

86. Seileck. Die Konstruktion von Nr 81 ist nicht auf gleiche Kräfte in gleichen Abständen beschränkt. Sind zB in Fig 46 II die Lasten G_1 und G_2 größer als G_4 und G_5 , so muß das Hängewerk links krummer, rechts gestreckter gebaut werden.

Wir verallgemeinern die Konstruktion unter Einführung gewisser Bezeichnungen: Es soll ein Seil (Fig 48) gespannt werden, durch welches die gegebenen Kräfte $K_1 K_2 K_3 K_4$ an den gegebenen Punkten im Gleichgewicht gehalten werden sollen. Dann werden die Kräfte im „Kräfteplan“ zu einem „Kräftezug“ aneinandergereiht. Neben diesem wählt man einen „Pol“, zieht die „Seilstrahlen“ und parallel dazu im „Lageplan“ die „Seilstränge“ so, daß sie sich auf den Verlängerungen der Kraft-richtungen schneiden. An den Schnittpunkten greifen dann die Kräfte vermittels besonderer Seile oder Stäbe an. Auf den äußersten Strängen dieses „Seilecks“ („Seilpolygons“) wählt man die Aufhängepunkte 0 und 5. Die Dreiecke im Kräfteplan sind die Kraftdreiecke, die Seilstrahlen die Seilkräfte, insbesondere die äußersten Seilstrahlen S_{01}' und S_{45} die Belastungen der Aufhängepunkte.

Man hat unendlich viele Möglichkeiten, das Seileck zu zeichnen: Man kann den ersten Seilstrang, den man parallel zu einem Seilstrahl zeichnet, durch einen beliebigen Punkt legen (Fig 48 punktiert). Man kann den Pol nach oben oder unten, nach rechts oder links beliebig verlegen. Dadurch ergeben sich aufwärts oder abwärts laufende, gestrecktere oder krummere Seilecke. Liegt der Pol links vom Kräftezug, so ist das Seileck nach oben gewölbt (Fig 48 gestrichelt). In die Seilstränge kommt dann Druck. Sie müssen dann aus Stäben gebildet sein. Das Seileck heißt dann auch „Stützlinie“. Aus dem Hängewerk wird dann ein „Sprengwerk“, zB ein

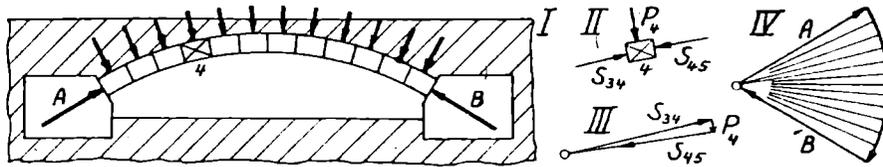


Fig 49. Brückenbogen

Brückenbogen (Fig 49 I): An dem trapezförmig zugeschnittenen Quaderstein 4 ist die Belastung P_4 , \perp Rückseite angenommen, im Gleichgewicht mit den Fugendrucken S_{34} und S_{45} (Fig II III). Im Kräfteplan Fig IV bilden die P den Kräftezug. Die Seilstrahlen sind die Fugendrucke.

87. Reibung. I. Will man einen eisernen Klotz $G = 32$ kg (Fig 50) auf einer eisernen Unterlage fortschleifen, so braucht man dazu eine Kraft K . Man mißt zB 4,8 kg. Neben dem Flächendruck $= G$ besteht an der Berührungsfläche noch eine Schubkraft, eine Reibungskraft $= K$. Zwei Klötze hintereinander erfordern zweifellos die doppelte Kraft. Ob das auch der Fall ist, wenn sie übereinandergestellt sind, ist fraglich; der Flächendruck steigt. Bei gleichem Flächendruck aber ist

Zugkraft $= K = \mu \cdot G$ proportional Gewicht
im Beispiel „Reibungszahl“ $= \mu = 0,15$ für Eisen auf Eisen.

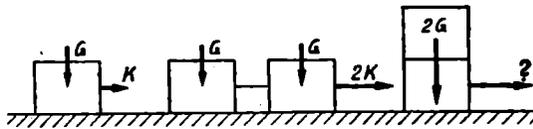


Fig 50. Reibungszahl

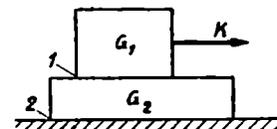


Fig 51. Reibung an 2 Flächen

II. Diese Verhältniszahl hängt ab vom Flächendruck und von der Geschwindigkeit der Bewegung. Wir werden von dieser Abhängigkeit in der Regel absehen und μ als gegebene Konstante betrachten. Man macht ja bei den technischen Konstruktionen die Flächen so groß, daß bestimmte Flächendrucke innegehalten werden. μ ist, wenn der Körper aus der Ruhelage gelöst werden soll, etwas größer, als wenn er sich bereits in Bewegung befindet. Außerdem bestehen dann noch die zur Beschleunigung erforderlichen Kräfte.

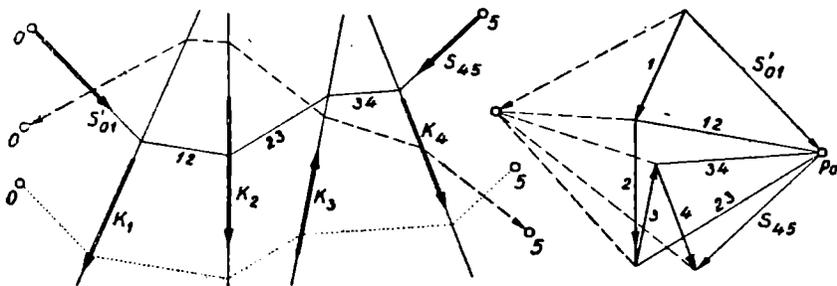


Fig 48. Seilecke

III. Zur Erläuterung des Unterschieds zwischen Reibung der Ruhe und Reibung der Bewegung diene das Beispiel Fig 51: Zwei Gewichte liegen übereinander auf einer Unterlage. Es sei $G_1 = 52 \text{ kg}$ und $G_2 = 24 \text{ kg}$. An den Grenzflächen 1 und 2 seien

die Reibungszahlen der Ruhe $\mu_{01} = 0,19$ $\mu_{02} = 0,12$
 „ „ „ Bewegung $\mu_1 = 0,17$ $\mu_2 = 0,11$

An G_1 wird mit K gezogen. Dann kann G_2 mitgehen oder liegen bleiben.

Um die Bewegung einzuleiten, sind an der oberen Grenzfläche 9,88 kg, an der unteren nur 9,12 kg erforderlich. Das obere Gewicht nimmt also das untere mit. Die Kraft K ist im Anfang 9,12 kg und sinkt alsbald auf 8,36 kg. Dieselbe Kraft besteht auch als Reibungskraft zwischen beiden Gewichten. Der größere Wert, 9,88 kg, der dort möglich ist und der erreicht werden müßte, wenn Bewegung eintreten soll, wird nicht voll in Anspruch genommen.

Hält man aber den unteren Körper einen Augenblick fest, so ist an der oberen Grenzfläche anfangs $K = 9,88 \text{ kg}$, weiterhin nur $K = 8,84 \text{ kg}$. Der untere Körper bleibt dann liegen, auch wenn man ihn nun losläßt. Jetzt ist die Reibung an der Unterlage nicht voll ausgenutzt.

88. Reibung in Keilnut. Ein Klotz (Fig 52), etwa ein Hobeltisch, mit $G = 700 \text{ kg}$ belastet, gleitet in einer Keilnut vom Winkel $\alpha = 140^\circ$, an der $\mu = 0,05$ ist. Welche Kraft K ist nötig, ihn zu bewegen?

An jeder Keilwange besteht die Normalkraft $N \perp$ Fläche und die Reibungsschubkraft $S \parallel$ Fläche entgegen der Bewegungsrichtung. Fig 52 zeigt dies in 2 Ansichten. Nach vortt gehende Kräfte sind durch \odot , nach hinten gehende durch \otimes gezeichnet. Von den N tragen nur die \uparrow Komponenten:

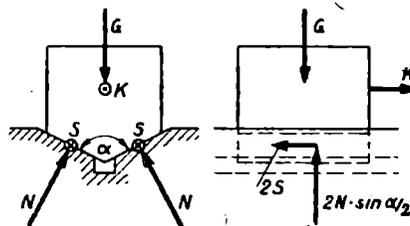


Fig 52. Reibung in einer Keilnut!

$$\uparrow 2N \sin \alpha / 2 = G \downarrow \quad \rightarrow K = 2S \leftarrow \quad S = \mu N$$

also $K = \frac{\mu G}{\sin \alpha / 2}$ im Beispiel $K = \frac{0,05 G}{\sin 70^\circ} = 0,053 G = 37 \text{ kg}$

Bei der Bewegung in Keilnuten ist also das Verhältnis $K:G$ größer als auf der schlichten Ebene. Die Keilnut wirkt wie eine schlichte Ebene mit erhöhter Reibungszahl μ' . Man schreibt:

$$K = \mu' G \quad \text{wobei} \quad \mu' = \frac{\mu}{\sin \alpha / 2} = \frac{0,05}{\sin 70^\circ} = 0,053$$

89. Kreuzkopf mit Reibung. Bei der Maschine Nr 66 sei an der Gleitfläche $\mu = 0,04$. Dort tritt also eine Normalkraft N und eine Reibungsschubkraft S auf (Fig 53). Es war $K = 11\,550 \text{ kg}$ $\beta = 8^\circ 13'$

I. Komponentengleichungen und Reibungsgesetz ergeben:

$$\rightarrow K = P \cos \beta + S \leftarrow \quad \uparrow N = P \sin \beta \downarrow \quad S = \mu N$$

Auflösung: $P = \frac{K}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = 11\,600 \text{ kg}$ $N = 1657 \text{ kg}$
 $S = 66,3 \text{ kg}$

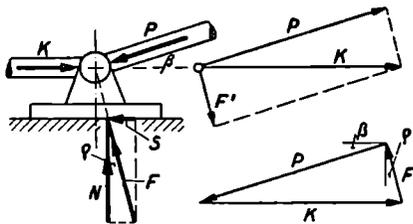


Fig 53. Kreuzkopf mit Reibung
(im Parallelogramm muß der Pfeil mit P' bezeichnet werden)

II. Die Komponenten N und S kann man auch zu einer Resultante F zusammenfassen, die dann an Stelle der bisher \perp Gleitfläche stehenden Stützkraft F von Nr 66 tritt. Dieses F ist schief gegen die Flächennormale, um so mehr, je größer S im Verhältnis zu N ist. Dieser „Reibungswinkel“ ϱ der Stützkraft gegen die Normale folgt aus

$$\operatorname{tg} \varrho = S/N = \mu = 0,04 \quad \varrho = 2^\circ 17'$$

Dann kann man das Kraftdreieck bilden, oder K in P' und F' (jetzt schief!) zerlegen. Dann ist nach dem Sinussatz:

$$P = \frac{K \cos \varrho}{\cos(\beta - \varrho)} = 11\,600 \text{ kg} \quad F = \frac{K \sin \beta}{\cos(\beta - \varrho)} = 1658 \text{ kg}$$

Die Resultante F von N und S ist hier nur unmerklich größer als N , weil S so klein ist.

III. N und S bzw. F sind Resultanten von Kräften, die auf der Gleitfläche verteilt sind. Da nun K über der Gleitfläche angreift, so ist der Kreuzkopf bestrebt, überzukippen. Der Druck ist also rechts größer als links. Die zusammengefaßte Kraft N ist also etwas vor Mitte Kreuzkopf zu zeichnen. — F muß auf das Gelenk zielen. Ginge es zB links vorbei, so würde es den Kreuzkopf drehen, bis er eben rechts mit größerem Druck aufliegt als links.

90. Aufgabe (Schiefe Zugkraft). Ein Klotz vom Gewicht $G = 30 \text{ kg}$ (Fig 54) der gegen die Unterlage die Reibungszahl $\mu = 0,27$ besitzt, wird durch eine unter $\alpha = 28^\circ$ schräg aufwärts gerichtete Kraft K gezogen. Berechne K ? Bei welchem Winkel α ist K am kleinsten?

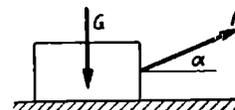


Fig 54. Schiefe Kraft am Klotz

91. Schiefe Ebene. Auf einer schiefen Ebene (Fig 55), $\alpha = 27^\circ$, liegt $G = 90$ kg. Die Kraft K sei \parallel Ebene, die Reibungszahl $\mu = 0,22$.

I. Wird das Gewicht aufwärts gezogen, so wirken die Kräfte Fig I.

Danach ist $\nearrow K_1 = G \sin \alpha + S_1 \swarrow \quad \nwarrow N_1 = G \cos \alpha \searrow \quad S_1 = \mu N_1$

eingesetzt $K_1 = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 58,5$ kg

Oder: die Resultante aus N und S bildet mit der Normalen den Reibungswinkel ϱ : $\text{tg } \varrho = \mu \quad \varrho = 12^\circ 55'$.

Dann folgt aus dem Kraftdreieck: $K_1 = \frac{G \sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho} = 58,5$ kg

II. Soll das Gewicht abwärts gleiten, so wirkt die Reibungskraft S umgekehrt (Fig II). F liegt dann um $12^\circ 25'$ links der Normalen.

Dann ist $\nearrow K_2 = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \frac{G \sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho} = 23,2$ kg

Mit dieser \nearrow aufwärts gerichteten Kraft muß man stützen, damit G nicht beschleunigt abwärts gleitet.

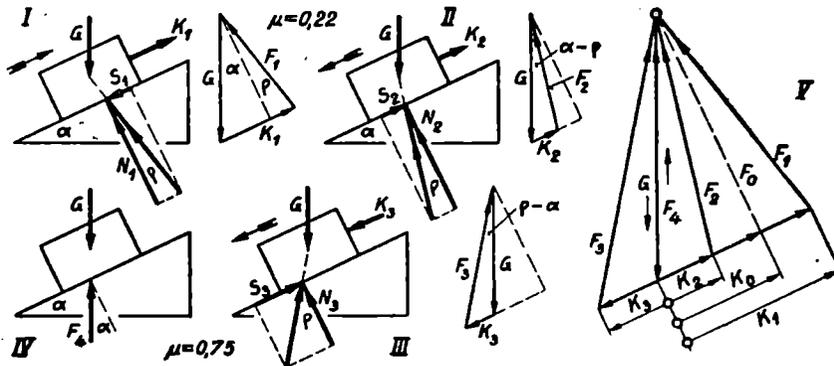


Fig 55. Schiefe Ebene mit Reibung

III. Zieht man an G mit einer Kraft K zwischen K_1 und K_2 , so bleibt G liegen. Die Reibung ist dann nicht voll ausgenutzt. Sie ist insbesondere gar nicht beansprucht, wenn $K = G \sin \alpha = 40,9$ kg ist (Nr 56). Ist aber zB $K = 50$ kg, so ist $S = 50 - 40,9 = 9,1$ kg \swarrow , während es 17,6 kg sein kann. Die Reibung ist also nur zu 52% beansprucht. K_1 und K_2 sind nur die Grenzwerte, bei denen Bewegung eintritt. — Wird K durch ein oberhalb befestigtes Seil ausgeübt, so ist K zwischen K_1 und K_2 unbestimmt, abhängig davon, ob G vorher aufwärts oder abwärts bewegt wurde.

IV. Der untere Grenzwert K_2 kann negativ werden, wenn die Reibungskraft größer als die Schwerkraftskomponente wird. μ muß dann $> \text{tg } \alpha$ sein, $\varrho > \alpha$ zB $\mu = 0,75 \quad \varrho = 36^\circ 52'$. F liegt dann nicht nur links der Normalen, sondern auch links der Vertikale (Fig III). K ist dann \swarrow abwärts gerichtet. Man muß

nachschieben mit $\swarrow K_3 = G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{G \sin(\varrho - \alpha)}{\cos \varrho} = 19,3$ kg

V. In diesem Fall $\varrho > \alpha$. braucht man G nicht zu stützen. Wenn man keine Kraft K ausübt, so bleibt es liegen (Fig IV). F_4 ist dann vertikal aufwärts gerichtet, mit G im Gleichgewicht und in einer Linie liegend. Es bildet mit der Normale den Winkel $\alpha < \varrho$. — Die Schubkraft S ist nur so groß, wie zum Gleichgewicht erforderlich ist, nämlich $= G \sin \alpha = 40,9 \text{ kg}$. Ihr Verhältnis zur Normalkraft $N = G \cos \alpha = 80,2 \text{ kg}$ ist kleiner als μ , nämlich $= \tan 27^\circ = 0,51 < 0,75$. Die Reibung ist eben nicht voll ausgenutzt. Man muß ja mit $19,3 \text{ kg}$ abwärts drücken, ehe das Gewicht gleitet. Oder man könnte die Ebene steiler stellen (bis $36^\circ 52'$).

VI. Man kann hiernach den Reibungswinkel bestimmen, indem man die Ebene so steil stellt, daß das Gewicht eben zu gleiten beginnt.

VII. Fig V gibt eine Übersicht über die Lage von F und die Größe von K in allen Fällen. K_0 ist der Wert ohne Reibung (Nr 56).

92. Aufgabe (Schiefe Ebene). Die Kraft K von Nr 91 Fig 55 soll um $\beta = 15^\circ$ steiler stehen als die schiefe Ebene. (Vergl Nr 67; 80.) Berechne $K_0 K_1 K_2 K_3$ vermittels μ und vermittels ϱ .

93. Bewegungskeil. Ein mit P belasteter Klotz (Fig 56) wird durch einen Keil mit dem Keilwinkel α gehoben. Mit welcher Kraft K muß man den Keil eintreiben?

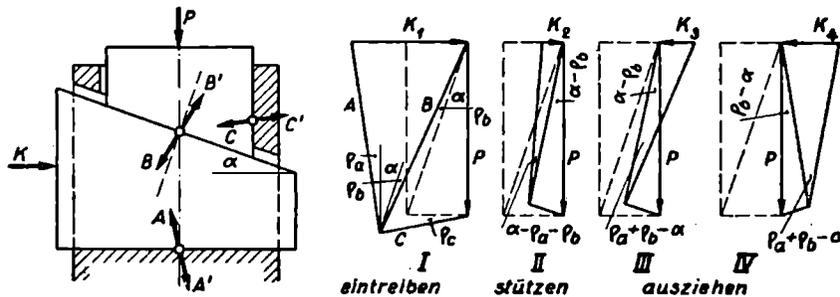


Fig 56. Bewegungskeil

I. Die Kräfte an den Gleitflächen sind entgegen der Bewegungsrichtung gegen die Normalen geneigt:

A am Widerlager um ϱ_a

B zwischen Klotz und Keil um ϱ_b C an der Klotzführung um ϱ_c

Das Gleichgewicht kommt zum Ausdruck in dem Kräfteplan I:

P hinlegen, durch die Endpunkte Parallele zu C und B ziehen, durch die Endpunkte von B Parallele zu A und K_1 .

Dabei entstehen die angeschriebenen Winkel. Gestrichelt eingetragen ist der Kräfteplan, der ohne Reibung gilt. Aus dem Sinussatz folgt

$$B = \frac{P \sin(90^\circ + \varrho_c)}{\sin(90^\circ - \alpha - \varrho_b - \varrho_c)} \quad K_1 = \frac{B \sin(\alpha + \varrho_a + \varrho_b)}{\sin(90^\circ - \varrho_a)}$$

eingesetzt $K_1 = P \frac{\cos \varrho_c \sin(\alpha + \varrho_a + \varrho_b)}{\cos(\alpha + \varrho_b + \varrho_c) \cos \varrho_a}$ für Eintreiben.

II. Für die umgekehrte Bewegung sind wieder 2 Fälle möglich: Entweder läßt sich der Keil durch P herausdrücken, dann muß man ihn mit K_2 stützen (Fig II). Oder er bleibt stecken, auch wenn man P noch so groß macht. Will man in diesem Fall die Last sinken lassen, so muß man den Keil ausziehen (Fig III, IV). Der Fall tritt ein, wenn $\alpha < \varrho_a + \varrho_b$

Ist schon ϱ_b allein $> \alpha$, so wird der Klotz vom Keil beim Ausziehen mitgenommen und gegen die linke Führung gedrückt (Fig IV). Er wird dann durch diese vom Keil abgestreift. Bei $\varrho_b < \alpha$ aber gleitet er von selbst auf ihm \searrow und liegt dann rechts an (Fig III).]

94. Aufgabe (Keil). Berechne $K A B C$ in Nr 93 für $P = 700 \text{ kg}$
 $\alpha = 12^\circ$ $\mu_a = \mu_b = \mu_c = 0,08$ (für I II) $= 0,12$ (für III) $= 0,24$ (für IV). — Wie groß sind die Werte von μ für die Grenzfälle II gegen III und III gegen IV?

95. Befestigungskeil. Wenn in Nr 93 $\alpha < \varrho_a + \varrho_b$ ist, so bleibt der Keil stecken, wenn man keine Kraft K ausübt. Die Reibung ist dann im allgemeinen an keiner Stelle voll ausgenutzt.

I. Bei dem Befestigungskeil Fig 57 I ist jede Flanke um $\frac{1}{4} \sim 4^\circ 5'$ gegen Keilmittellinie geneigt. Der ganze Keilwinkel ist also $\alpha = 8^\circ 10'$. Die Kräfte A und B an den Berührungsstellen liegen in Richtung Mittellinie Stange, also um $4^\circ 5'$ gegen die Normale geneigt, im Gleichgewicht mit $P + P_1$ (Nr 30). Die Reibungszahl muß dann mindestens 0,0714 sein, wenn der Keil stecken bleiben soll.

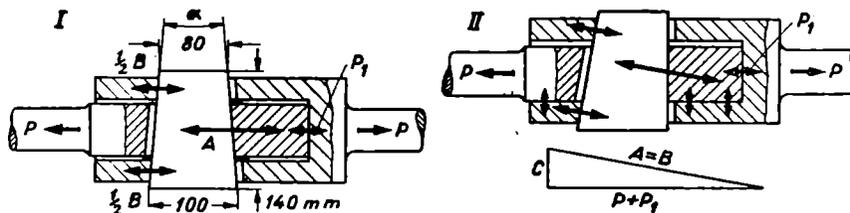


Fig 57. Befestigungskeil

II. Ist der Keil nur an einer Seite abgeschrägt (Fig II), so kann der äußere Stangenkopf am Keil gleiten, bis er am inneren mit der Kraft C zum Anliegen kommt. Ist der Keilwinkel $= 8^\circ 10'$ wie in Fig I, so geschieht das, wenn $\mu < 0,1435$ ist. Dann stellen sich die Kräfte an den Berührungsstellen schief. Herausgedrückt aber wird der Keil erst, wenn $\mu < 0,0714$ ist.

96. Dreibeiniger Bock. Um einen Punkt im Raum zu stützen, braucht man 3 Stäbe. Ein dreibeiniger Bock, aufgestellt nach den Maßen von Fig 58 I, gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig, ist mit $\downarrow P = 600 \text{ kg}$ belastet. Wie groß sind die Stützkkräfte $A B C$ (aufwärts gerichtet) bzw die Belastungen $A' B' C'$ der Stäbe oder der Erde (abwärts gerichtet)?

I. Die Stäbe A und B können ersetzt werden durch einen Stab in ihrer Winkelhalbierenden; oder: die einander gleichen Kräfte A und B werden

ersetzt durch R_{AB} . R_{AB} und C ergeben die Tragkraft P' entgegen P . — Umgekehrt: man zerlegt P in R_{AB}' und C' , R_{AB}' in A' und B' (Fig II).

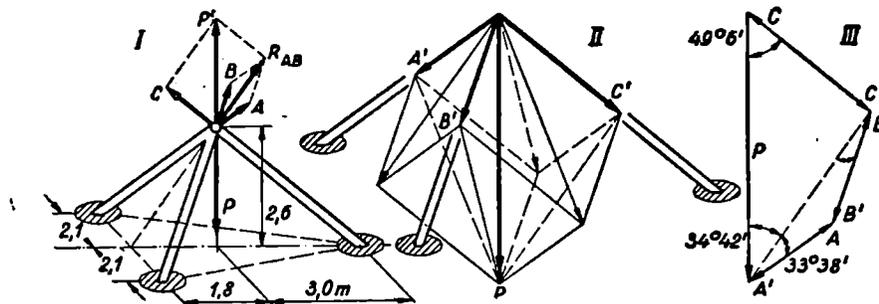


Fig 58. Dreibeiniger Bock

II. Ist der Bock nicht gleichschenkelig und P nicht senkrecht, so ist die Richtung von R_{AB} bestimmt als Schnittlinie der Ebenen AB und CP . Man kann auch zuerst B und C zusammenfassen in der Schnittlinie von BC mit AP oder zuerst C und A . So ergeben sich 3 Konstruktionen (Fig II). P wird dabei Raumdiagonale eines Parallelepipedes aus $A' B' C'$.

Im Raum ist die Resultante dreier Kräfte Raumdiagonale eines Parallelepipedes, dessen Kanten die Kräfte sind.

Umgekehrt wird eine Last zerlegt in die 3 Stützrichtungen, so daß sie Raumdiagonale der 3 weitergegebenen Kräfte wird, gleichwertig mit ihren Wirkungen.

III. Es genügt, statt des Körpers das räumliche „Krafteck“ $PABC$ (Fig III) zu zeichnen. Die Pfeile kann man im Sinne der Zerlegung oder des Gleichgewichts setzen. Durch Abmessen oder nach dem Sinussatz folgt:

$$C = 344 \text{ kg} \quad A = B = 274 \text{ kg}$$

97. Räumlicher Ausleger. An einer Wand ist der Ausleger Fig 59 I befestigt. Die Stäbe AB liegen in einer waagerechten Ebene, C senkrecht über der Winkelhalbierenden von A und B . An der Spitze wirkt eine Last $\downarrow P = 1800 \text{ kg}$ und ein Windzug $W = 900 \text{ kg}$, der nach links vorne unten auf das gezeichnete Loch in der Wand zielt, hinter dem die Winde zu denken ist.

I. P bewirkt in C Zug, in A und B Druck; W in A Druck, in C Zug, in B Zug oder Druck, je nachdem, wie W zur Ebene AC liegt: Liegt es in dieser Ebene, so hat es keinen Anteil an B . — W liegt oberhalb dieser Ebene, weil $1,3:1,8$ kleiner ist als $1,6:1,4$ (punktirierte Linie in Fig I!). Also bewirkt W in B Zug. Der Anteil von P dürfte aber überwiegen. Wir zeichnen deshalb die Stützkraft B als Druck. Sie wird aber jedenfalls kleiner als A .

II. Die Konstruktion nach Nr 96 würde nach den Regeln der Projektionslehre durchzuführen sein. — Wir rechnen hier mit dem Gleichgewicht der rechtwinkligen Komponenten. Das ist nach Nr 70 gleichwertig mit

Parallelogramm bezw Krafteck; auch im Raum. Wir nennen die Richtungen nach Fig I: $x \perp$ Wand, $y \parallel$ Wand waagerecht, z vertikal. Wir bilden zunächst die rechtwinkligen Komponenten von W , einer schief im Raum liegenden Kraft. Die Richtung von W ist gegeben durch den Winkel der Horizontalprojektion von W mit der x -Richtung

$$\text{das „Azimut“} = \delta = 41^\circ 40'$$

und durch den Winkel gegen die Horizontalebene

$$\text{die „Neigung“} = \varepsilon = 15^\circ 5'$$

Wir zerlegen $W = 900 \text{ kg}$ zunächst in eine vertikale und eine horizontale Komponente (Fig II): $W_z = W \sin \varepsilon = 234 \text{ kg}$ $W_h = W \cos \varepsilon = 869 \text{ kg}$
dann letztere in $W_x = W_h \cos \delta = W \cos \varepsilon \cos \delta = 649 \text{ kg}$
und $W_y = W_h \sin \delta = W \cos \varepsilon \sin \delta = 578 \text{ kg}$

W ist Raumdiagonale des Rechteckts aus $W_x W_y W_z$ (Fig III, wie P in Nr 96). Es kann auf dreierlei Weise in eine Komponente und eine Teilresultante zerlegt werden.

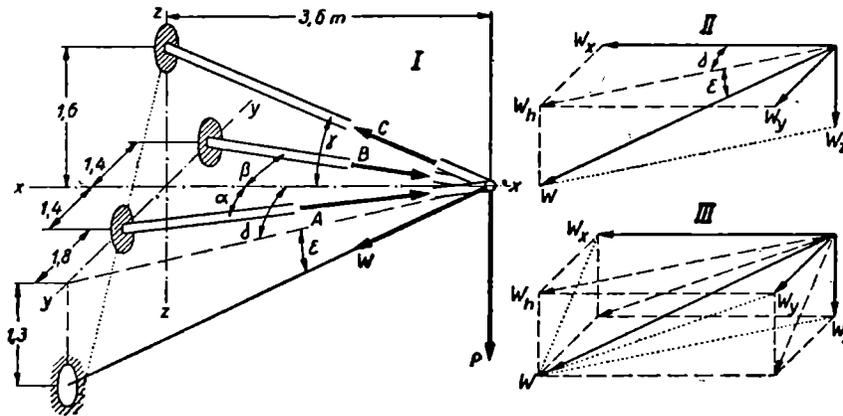


Fig 59. Räumlicher Ausleger

III. Gleichgewicht der rechtwinkligen Komponenten:

$$\begin{aligned} \uparrow C \sin \gamma &= 1800 + 234 \downarrow & C &= 5010 \text{ kg Zug} \\ \rightarrow A \cos \alpha + B \cos \beta &= C \cos \gamma + 649 \leftarrow & A + B &= 5610 \text{ kg} \\ \otimes \sin \alpha &= B \sin \alpha + 578 \odot & A - B &= 1590 \text{ kg} \end{aligned}$$

\odot bedeutet: nach vorn

$$A = 3600 \text{ kg Druck}$$

\otimes bedeutet: nach hinten

$$B = 2010 \text{ kg Druck}$$

B hätte auch negativ herauskommen können, dann wäre es, im Gegensatz zur Annahme in Fig I, Zug. — Man könnte auch alle Pfeile in der Figur ohne Besinnen als Zugpfeile einzeichnen. Negatives Ergebnis würde dann Druck bedeuten. Die A - und B -Glieder in den Gleichungen würden dann ja auch auf der andern Seite stehen.

98. Aufgabe (Gleichseitiger Bock). Über einem gleichseitigen Grundrißdreieck von 2,8 m Seitenlänge stehen drei gleiche Bockbeine

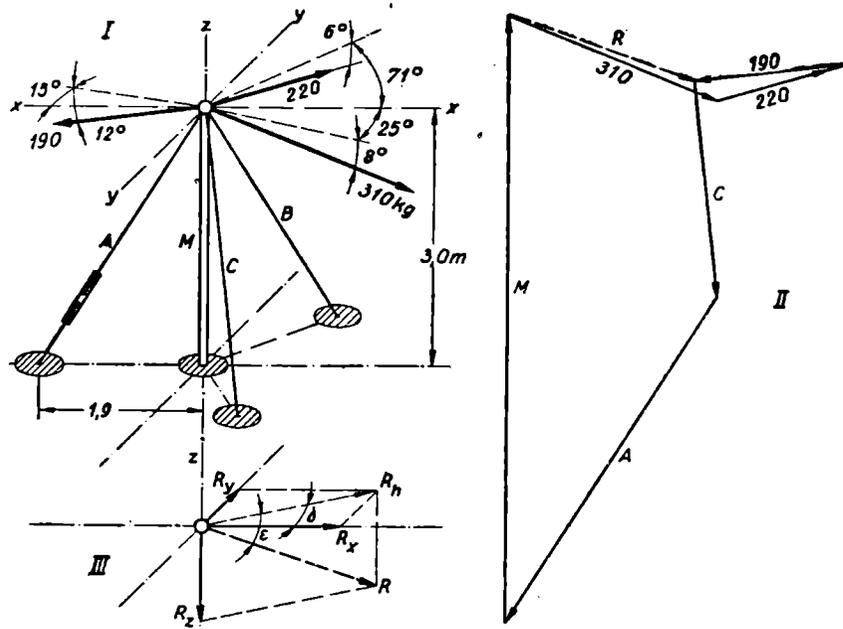


Fig 61. Verspannter Mast, perspektivisch

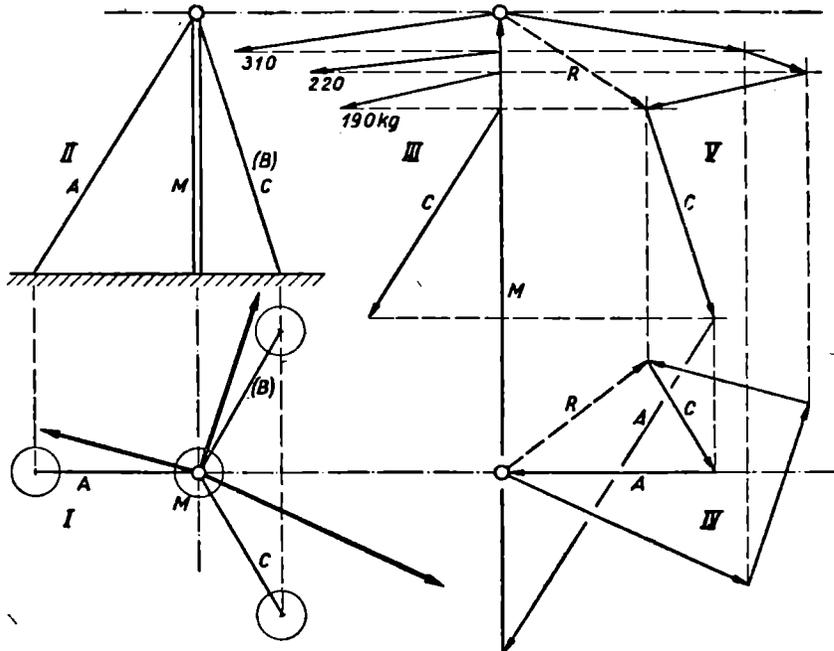


Fig 62. Verspannter Mast, Grundriß und Aufriß

ABC von je 3,7 m Länge. An der Spitze hängt die Last $P = 380$ kg in einem Flaschenzug. In der Ebene AB und zwar in der Winkelhalbierenden liegt der Windenzug $W = 95$ kg. Berechne die Belastung der Bockbeine; am einfachsten die Anteile von P und W getrennt voneinander.

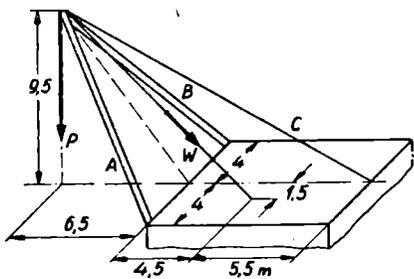


Fig 60. Schwimmkran

99. Aufgabe (Schwimmkran). An dem Kran Fig 60 hängt die Last $P = 6,9$ to. Der Windenzug zielt nach einer Winde, die nicht in der Mittelebene des Krans steht. $W = 1,15$ to. Berechne die Stützkräfte $A B C$.

100. Verspannter Mast. Ein 3,0 m hoher Mast (Fig. 61 I) ist verspannt durch 3 Drahtseile, deren Projektionen im Grundriß Winkel von 120° miteinander bilden und deren Fußpunkte

je 1,9 m vom Mastfußpunkt entfernt liegen. An der Spitze greifen 3 Kräfte an, jede gegeben durch Größe, Azimut und Neigung.

I. Auch ohne Verspannungen kann der Mast die 3 Kräfte tragen, wenn er fest eingegraben ist und stark genug, die Biegung auszuhalten. Wir wollen aber von der „Einspannung“ absehen (Nr 64; 75) und annehmen, daß er drehbar auf dem Boden aufsteht, daß also die Kraft in Richtung des Mastes wirkt. — Der Mast wäre auch durch 2 Seile genügend verspannt, wenn diese nach der der Belastung abgewandten Seite gehen. Ist aber die Belastung wechselnd, so könnte auf eines oder beide Seile Druck fallen. Dann müßten es Stäbe sein oder es muß eben noch ein drittes Seil gespannt werden. — Dann aber kann man durch ein Spannschloß, das in einem der Drähte angebracht ist, Vorspannung hineinbringen: Zieht man das Spannschloß an, so kommt schon ohne Lasten in A Zug, zB 200 kg. Dann haben B und C ebenfalls je 200 kg Zug, der Mast 507 kg Druck. — Der Einfluß der Vorspannung nimmt bei Aufbringung der 3 Kräfte ab (Nr 44), denn die der Belastung abgewandten Seile dehnen sich, der Mast neigt sich, das dritte Seil, im Beispiel B wird schlaffer. Wir wollen annehmen, daß die Vorspannung nicht allzu groß war und daß deshalb B ganz schlaff wird. Dann ist die Vorspannung überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen, auch wenn sie vor Belastung dagewesen war. $B=0!$

K	Azi- mut	Nei- gung	$K_x \rightarrow$	$K_y \otimes$	$K_z \downarrow$
kg	—	—	kg	kg	kg
310	— 25°	6°	+ 278	— 130	+ 43
220	+ 71°	6°	+ 71	+ 207	+ 23
190	+ 165°	12°	— 180	+ 48	+ 40
—	—	—	+ 169	+ 125	+ 106

Wir bilden die rechtwinkligen Komponenten der gegebenen Kräfte und ihre algebraischen Summen (Tabelle). Dann sind die Gleichgewichtsbedingungen (Winkel Seil/Mast = $\alpha = 32^\circ 20'$):

$$\begin{array}{rcl} \odot C \sin \alpha \sin 60^\circ = 125 \otimes & C = 270 \text{ kg} \\ \leftarrow A \sin \alpha = C \sin \alpha \cos 60^\circ + 169 \rightarrow & A = 451 \text{ kg} \\ \uparrow M = (A + C) \cos \alpha + 106 \downarrow & M = 715 \text{ kg} \end{array}$$

101. Konstruktion des Gleichgewichts. Den 3 Komponentengleichungen entspricht das geschlossene Krafteck der an der Mastspitze angreifenden Kräfte, Belastungen und Stützkkräfte. Wir tragen also (Fig 61 II) die gegebenen Kräfte räumlich aneinander an, (das führt zunächst auf ihre Resultante R ,) und müssen dann das Krafteck durch 3 Pfeile von gegebenen Richtungen CAM schließen. — Man muß es sich räumlich vorstellen: Die Spitze von R liegt hinter der durch den Anfang des Kräftezugs gehenden Zeichenebene. Durch diesen Punkt muß eine Parallele zu C gezogen werden, bis sie die Zeichenebene, in der A und M liegen sollen, schneidet. Durch diesen Punkt wird dann eine Parallele zu A gezogen, bis sie die Vertikale M schneidet.

Fig 62 zeigt die Ausführung dieser Konstruktion nach den Regeln der Projektionslehre. Der Mast ist in Grundriß (I) und Aufriß (II) gegeben. Die 3 gegebenen Kräfte sind zunächst in die Zeichenebene umgeklappt (III), um aus den gegebenen Neigungen ihre Projektionen zu gewinnen. Dann ergibt sich Grundriß (IV) und Aufriß (V) des Kräftezugs der gegebenen Kräfte. Durch die Projektionen des Endpunkts von R gehen nun die Projektionen von C parallel zu den Projektionen des Seils C in der Mastzeichnung (I II). Dann folgen A und M . A und M erscheinen unverkürzt; C nur in Projektionen. Es muß noch in die Zeichenebene gedreht werden (III).

102. Berechnung der Resultante der gegebenen Kräfte.
I. Die Projektion der Resultante ist für jede Richtung gleich der algebraischen Summe der Projektionen der Einzelkräfte, wie sie in den Gleichungen Nr 100 auftraten. (Vergl Nr 71.)

$$R_x = 169 \text{ kg} \quad R_y = 125 \text{ kg} \quad R_z = 106 \text{ kg}$$

Hieraus folgen (Fig 61 III)

$$\begin{array}{ll} \text{Azimut} = \delta = 36^\circ 30' & \text{Horizontalkomponente} = R_h = 210 \text{ kg} \\ \text{Neigung} = \varepsilon = 26^\circ 50' & \text{Resultante} = R = 235 \text{ kg} \end{array}$$

Wenn das Azimut dieser Resultante zwischen 0° und 120° liegt, so ist B dasjenige Seil, welches bei geringer Vorspannung schlaff wird.

II. Zum Stützen des Mastes genügt bei den gegebenen Kräften auch ein Seil, welches nach links vorn unter $\delta = 36^\circ 30'$ gegen x gerichtet ist. Hat sein Fußpunkt den Abstand 1,9 m vom Mast, so ist die Zugkraft in ihm 393 kg, der Druck im Mast 438 kg. — Dieser Seilzug ist nicht etwa die Resultante von A und C . — A und C müßte man sich ersetzt denken durch ein Seil in der Ebene AC im Azimut δ gegen x . Dann hat sein Fuß-

punkt den Abstand 1,035 m vom Mast. Der Winkel Seil/Mast ist dann 19° , der Seilzug 645 kg, der Mastdruck 715 kg wie in Nr 100.

103. Aufgabe (Verspannter Mast). Zwischen 2 je nach 4 Seiten gleichmäßig verspannten Masten ist nach Fig 63 ein Seil gespannt, welches in der Mitte 200 kg mit 0,9 m Durchhang trägt. Die Vorspannung soll fortfallen. Berechne die Stützkkräfte.

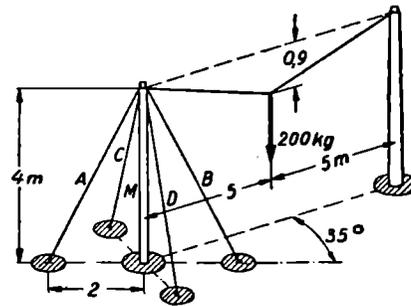


Fig 63. Verspannter Mast

104. Drei Stäbe in der Ebene. Bei den Aufgaben der Ebene hatten wir je 2 stützende Bauteile, Seile, Gelenkstäbe, Gleitflächen, bei den Aufgaben des Raums je 3. Wo 4 Stützen waren (verspannter Mast), war Vorspannung möglich. Wir untersuchen daraufhin den Fall, wo 3 in einer Ebene liegende Stäbe eine Last tragen (Fig 64 I). Die Stäbe sind unten gegabelt und umfassen das Auge, an dem P hängt. Durch alle 7 Löcher ist ein Bolzen gesteckt.

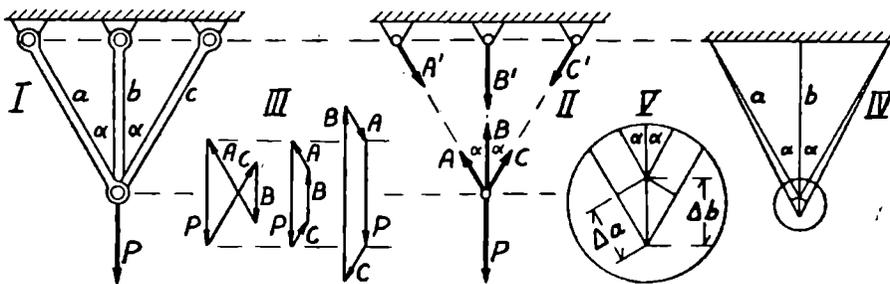


Fig 64. Drei Stäbe in der Ebene

I. Die Komponentengleichungen für die 3 Stützkkräfte (Fig II) sind:

$$\leftarrow A \sin \alpha = C \sin \alpha \rightarrow \quad \uparrow A \cos \alpha + B + C \cos \alpha = P \downarrow$$

Die erste Gleichung ergibt $A=C$, was auch aus Symmetriegründen selbstverständlich ist. Danach heißt die zweite:

$$2 A \cos \alpha + B = P$$

Das reicht noch nicht zur Bestimmung der Unbekannten A und B . Eine dritte Komponentengleichung, etwa $\perp C$, würde ergeben:

$$\sphericalangle A \sin 2 \alpha + B \sin \alpha = P \sin \alpha \sphericalangle$$

Ein Versuch der Auflösung zeigt aber, daß diese Gleichung nicht unabhängig von der vorigen ist (Nr 70 III).

II. Die Gleichgewichtsbedingungen allein können auch nicht zur Lösung führen. Es kommt ja noch darauf an, ob die unteren Bolzenlöcher der 3 Stäbe voreinander passen, wenn sie zusammengeführt werden. — Die Löcher zweier Stäbe, etwa A und C , passen immer. Ein Punkt in der

Ebene ist in 2 „Dimensionen“ beweglich. Der erste Stab (A) nimmt ihm einen Teil seiner Beweglichkeit, beschränkt ihn auf eine Linie (Kreis). Der zweite Stab (C) nimmt ihm auch noch den zweiten „Freiheitsgrad“ und stellt ihn fest. Die Lage des Punkts ist durch 2 Stäbe geometrisch bestimmt. Der dritte Stab (B) ist eigentlich überflüssig.

Wenn man ihn trotzdem einbaut und wenn nun sein Bolzenloch etwas zu tief sitzt und man treibt dann den Bolzen mit Gewalt ein, so besteht als Vorspannung in B irgend ein Druck, in A und C ein entsprechender Zug ($= B/2\cos\alpha$), noch ehe P angehängt ist. Es sind also unendlich viele Gleichgewichtszustände möglich. — Das zeigt auch die Vielecks-konstruktion (Nr 70 II): Man kann, an P anschließend, unendlich viele Kraftecke (Fig III) zeichnen, deren Seiten den 3 Stäben parallel sind.

III. Angenommen nun, die Löcher passen im unbelasteten Zustand genau voreinander, dann muß sich nach Belastung mit P ein ganz bestimmter Gleichgewichtszustand einstellen. — Bei Belastung verlängern sich die Stäbe (Fig IV), und zwar B verhältnismäßig mehr als A . Den Dehnungen entsprechend müssen sich auch die Kräfte verhalten.

In Fig V sind die Verlängerungen vergrößert herausgezeichnet.

Hieraus Verhältnis der Verlängerungen	$\Delta a = \Delta b \cdot \cos\alpha$
Nun ist „ „ Längen	$b = a \cdot \cos\alpha$
Also „ „ Dehnungen	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} = \frac{\Delta a \cdot b}{a \cdot \Delta b} = \cos^2\alpha$

Dies ist auch das Verhältnis der Kräfte, wenn die Stäbe gleichen Querschnitt haben und aus gleichem Stoff bestehen.

$$\text{Also zB für } \alpha = 30^\circ: \quad \frac{A}{B} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} = \cos^2\alpha = 0,750$$

Dies ist die in I gesuchte unabhängige dritte Gleichung. Aus ihr und der Statikgleichung $2A\cos\alpha + B = 1,732A + B = P$

$$\text{ergibt sich die Auflösung } B = 0,435P \quad A = C = 0,326P$$

IV. Zur Lösung der Aufgabe genügten also die Gleichungen der Statik allein nicht. Es mußten, wie in Nr 44, Betrachtungen über die Elastizität mit herangezogen werden. Solche Aufgaben, bei denen mehr Stäbe vorhanden sind, als nötig sind, um den Punkt in der Ebene geometrisch festzulegen, nennt man „statisch unbestimmt“. — Im Raum hat der Punkt drei Freiheitsgrade; drei Stützen sind statisch bestimmt.

105. Senkung eines Knotenpunkts. In Fig 64 V wurden die Verlängerungen durch ein kleines Dreieck miteinander in Beziehung gesetzt. Wir studieren dieses mathematische Verfahren an folgender Aufgabe: 2 Stahldrähte von 3 mm \varnothing tragen nach Fig 65 I eine Last von 40 kg. Wie groß ist die Senkung des Knotenpunkts infolge der Elastizität der Drähte? $E = 2,1 \cdot 10^6$ at.

I. Wir berechnen $\alpha = 18^\circ 26'$ Kraft in jedem Draht = 63,2 kg
Drahtlänge = $l = 632$ mm Verlängerung jedes Drahts = $\Delta l = 0,269$ mm

Dann kann das vergrößerte h nach Pythagoras berechnet werden (Fig II)
 Senkung $= \Delta h = \sqrt{(l + \Delta l)^2 - p^2} - h = \sqrt{(632,456 + 0,269)^2 - 600^2} - 200$
 Das müßte sehr genau berechnet werden, da die Wurzel nur wenig größer
 als h ist. Deshalb mußte auch $l = 632,456$ so genau berechnet werden.

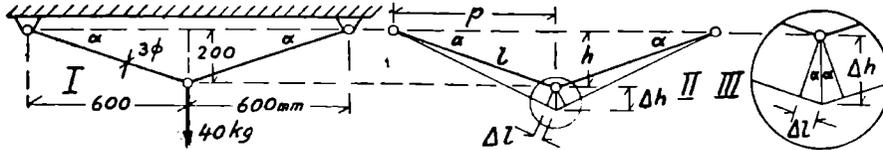


Fig 65. Senkung des Knotenpunkts

II. Wir tragen in Fig II die alte Länge l auf der neuen durch einen kurzen Kreisbogen ab. Dann liegt Δl mit Δh in einem Dreieck, das in Fig III vergrößert herausgezeichnet ist. Die Kreisbogenstücke können als geradlinig angesehen werden, unter dem Winkel α gegen Δh .

Dann ist $\Delta h = \Delta l / \sin \alpha = 0,269 / \sin 18^\circ 26' = 0,852 \text{ mm}$

Je flacher die Drahtaufhängung, um so größer wird Δh , nicht nur wegen der größeren Kräfte. Auch bei gleicher Spannung; also entsprechend stärkeren Drähten, fordert dasselbe Δl ein größeres Δh , indem der steilere Kreisbogen weniger von der Vertikale abweicht.

106. Verspannter Mast, statisch unbestimmt. Ein Mast B (Fig 66 I) ist verspannt durch 2 Drähte A und C von $9 \text{ mm } \varnothing$ ($0,636 \text{ cm}^2$) und belastet mit $P = 100 \text{ kg} \rightarrow$. In C befindet sich ein Spannschloß. Der Mast gilt nicht als eingespannt, fest eingegraben, er sei am Boden frei drehbar; in Richtung \perp Zeichnung ebenfalls verspannt. Er gilt als starr; nur die Elastizität der Drähte soll berücksichtigt werden. $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ at}$. Wie groß sind die Kräfte ABC ohne und mit Vorspannung?

Jedenfalls ist $\alpha = 14^\circ 56'$ Drahtlänge $= l = 3105 \text{ mm}$. Und dann:

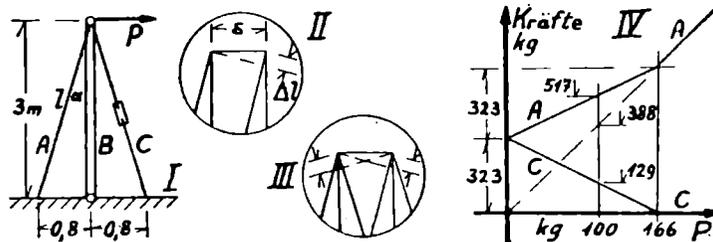


Fig 66. Verspannter Mast mit Vorspannung

I. Ohne Vorspannung, Spannschloß lose: $C = 0$ $P = 100 \text{ kg}$

$$\leftarrow A \sin \alpha = P \rightarrow \quad A = 388 \text{ kg} \quad \uparrow B = A \cos \alpha \quad \downarrow = 375 \text{ kg}$$

$$\text{Verlängerung des Drahts} = \Delta l = \frac{388 \cdot 3105}{0,636 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 0,903 \text{ mm}$$

$$\text{Verschiebung des Angriffspunkts} = s = \Delta l / \sin \alpha = 3,51 \text{ mm} \quad (\text{Fig II})$$

II. Vorspannung allein; $P=0$: Das Spannschloß werde um 1,5 mm gegen den ungespannten Zustand verkürzt; jeder Draht also um 0,75 mm elastisch verlängert.

$$\text{Dann ist } A = C = \frac{0,75 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,636}{3105} = 323 \text{ kg} \quad B = 624 \text{ kg}$$

Verschiebung des Angriffspunkts = $s = 2,92 \text{ mm}$

III. Vorspannung wie II; danach $P=100 \text{ kg}$ aufgebracht: A nimmt über die Vorspannung hinaus zu um ΔA , C ab um ΔC . Wenn der Mast starr ist, so verlängert sich Draht A um ebensoviel, wie sich C verkürzt (Fig III), also $\Delta A = \Delta C$.

$$\text{Dann ist } \leftarrow \Delta A \cdot \sin \alpha + \Delta C \cdot \sin \alpha = P = 100 \text{ kg} \rightarrow$$

$$\text{also } \Delta A = \Delta C = \frac{1}{2} \cdot 388 = 194 \text{ kg} \quad \text{die Hälfte des Wertes von Fall I!}$$

P wird durch die Zunahme von A und durch die Abnahme von C gehalten (Nr 44 III)! Es wird also

$$A = 323 + 194 = 517 \text{ kg} \quad C = 323 - 194 = 129 \text{ kg} \quad B = 624 \text{ kg}$$

$$\text{Verschiebung des Angriffspunkts} = s = 2,92 + \frac{1}{2} \cdot 3,51 = 4,68 \text{ mm}$$

IV. C wird schlaff, wenn $P = 2 \cdot 323 \cdot \sin \alpha = 166 \text{ kg}$ wird. Darüber hinaus tritt Fall I ein. Den Verlauf der Kräfte mit wachendem P zeigt Fig IV, entsprechend Nr 45 Fig 20 III.

107. Drahtspeichen. Das Vorderrad eines Fahrrades (Fig 67 I) sei mit P belastet. Wie verteilt sich die Last auf die 16 Speichen? — Wir nehmen die Speichen radial an. Eigentlich laufen sie tangential zur Nabe. Beim Hinterrad ist das wesentlich. Die Kraftverteilung ist statisch unbestimmt. Sie hängt ab von der Vorspannung jeder einzelnen Speiche und von der elastischen Dehnung, die diese erfährt. Auch auf die Verbiegung der Felge unter dem Einfluß der Zugkräfte kommt es an. Wir wollen hier

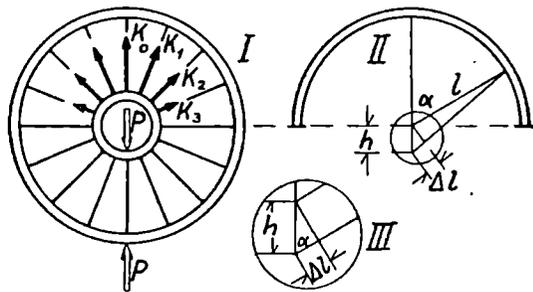


Fig 67. Drahtspeichen

die Felge als starr annehmen. Wohl kaum mit Recht. Doch würde dieses Beispiel für statisch unbestimmte Kraftverteilung dann gleich sehr kompliziert werden.

I. Wir nehmen zuerst an, daß die Speichen bei unbelastetem Rad keine Vorspannung haben, daß sie aber andererseits auch ge-

rade gestreckt sind und nicht lose in den Befestigungsstellen hängen. Dann tragen jedenfalls nur die oberen Speichen die Last P . Dann ist

$$\downarrow P = K_0 + 2K_1 \cos \alpha_1 + 2K_2 \cos \alpha_2 + K_3 \cos \alpha_3 \uparrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Statikgleichung} \\ \text{für 4 Unbekannte} \end{array} \right.$$

Das Verhältnis der K ist gleich dem Verhältnis der Dehnungen. — Die Nabe senkt sich gegen die Felge um h (Fig II). Das ist auch die Ver-

längerung der senkrechten Speiche. Eine schräge Speiche verlängert sich nach Fig II III um $\Delta l = h \cos \alpha$. (Vergl Fig 64 V.) K_α ist nach dem Hooke'schen Gesetz proportional Δl . Also ist auch $K_\alpha = K_0 \cos \alpha$

$$\text{Also } P = K_0(1 + 2 \cos^2 \alpha_1 + 2 \cos^2 \alpha_2 + 2 \cos^2 \alpha_3) = K_0 \cdot 4,00$$

$$\text{Also } K_0 = 0,250 P \quad K_1 = 0,231 P \quad K_2 = 0,177 P \quad K_3 = 0,096 P$$

II. Wenn Vorspannung besteht, und zwar in allen Speichen gleichmäßig $= V$, so tragen die oberen durch Vergrößerung der Kraft, die unteren durch Verringerung derselben (Nr 106 III). Die Kraftänderungen sind dann nur halb so groß wie die Kräfte im Fall I.

$$\text{oben: } K_0 = V + 0,125 P \quad \text{unten: } K_0 = V - 0,125 P \quad \text{usw}$$

Allerdings muß die Vorspannung genügend groß sein, so daß auch die unterste Speiche nicht schlaff wird; — also mindestens $V = 0,125 P$. Dadurch wird die Kraft in der obersten Speiche mindestens $0,250 P$. Man gewinnt also hinsichtlich der Beanspruchung nichts im Vergleich zu Fall I. Im Gegenteil! Man vermeidet aber die ruckweise Beanspruchung der Speichen, die sonst bei jedem Umlauf plötzlich unter Spannung gesetzt und dann wieder schlaff würden.

III. Hat das Rad $4n$ Speichen, zB $4n = 24$

$$\text{so ist wegen } 1 + 2 \cos^2 \alpha_1 + 2 \cos^2 \alpha_2 + \dots + 2 \cos^2 \alpha_{n-1} = n$$

$$\text{ohne Vorspannung } K_0 = P/n = P/6$$

als ob die Hälfte der oberen Speichen gleichmäßig trüge;

$$\text{mit Vorspannung } K_0 = V + P/(2n) = V + P/12$$

als ob die Hälfte aller Speichen gleichmäßig trüge; dazu aber V .

108. Aufgabe (Drei Stäbe in der Ebene). Wie groß werden ABC in Nr 104, wenn die 3 Stäbe gleich lang sind?

110. Zusammenfassung. Die Regel vom geschlossenen Krafteck führte in der Anwendung auf mehrere Knotenpunkte zum Kräfteplan. Bei Hängewerk, Seileck, Stützlinie folgt daraus eine bestimmte Form der tragenden Linie.

Die Berücksichtigung der Reibung an Flächen geschieht durch Einführung einer Reibungsschubkraft \parallel Fläche. Bei Bewegung ist diese Schubkraft im allgemeinen zur Normalkraft proportional, oder, was dasselbe ist, die Stützkraft an der Fläche ist um den Reibungswinkel gegen die Normale geneigt. Diese Kraft ist dann in den Gleichgewichtsbedingungen (Krafteck, Komponentengleichungen) zu berücksichtigen. — Bei Stillstand ist die Reibung im allgemeinen nicht voll ausgenutzt. μ und ϱ geben dann nur den größtmöglichen Wert der Reibung an. Wie groß die Schubkraft tatsächlich ist, bzw welche Richtung die Stützkraft hat, ergibt sich dann aus der Gleichgewichtsforderung. Aus dem Reibungsgesetz folgt dann nur ein Mindestwert der Reibungszahl oder ein Höchstwert eines Neigungswinkels, bei dem noch Ruhezustand möglich ist.

Bei Raumaufgaben sind 3 Stützkraften statisch bestimmt. Zur Berechnung dienen die Komponentengleichungen für 3 Richtungen. Zeich-

nerisch führt die Regel vom Parallellflach bzw vom geschlossenen räumlichen Kräfteck zur Lösung. Dieses wird trigonometrisch berechnet oder nach den Regeln der Projektionslehre konstruiert.

Bei statisch unbestimmten Aufgaben, wenn in der Ebene mehr als 2, im Raum mehr als 3 Stützen bestehen, hängt die Kraftverteilung mit ab von dem Verhältnis der elastischen Dehnungen der Bauteile und von den Vorspannungen, mit denen sie eingesetzt sind.

V. Gleichgewicht an der Scheibe, Grundlagen

Bisher wurde der Körper als Punkt betrachtet. Wir lassen die Kräfte jetzt an verschiedenen Punkten des Körpers angreifen, lassen sie aber noch in einer Ebene liegen und sprechen insofern vom Gleichgewicht an der Scheibe.

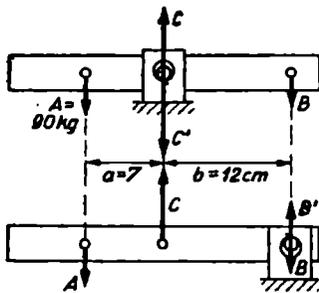


Fig 68. Hebel

111. Hebelgesetz. An dem Waagebalken Fig 68, der selbst als gewichtslos angenommen wird, soll ein Gewicht $A = 90 \text{ kg}$ durch eine Kraft B im Gleichgewicht gehalten werden.

I. Versuche zeigen, daß die Kräfte sich umgekehrt wie die Hebelarme verhalten (Archimedes). A wird also im Gleichgewicht gehalten

am Hebelarm 1 durch $90 \cdot 7 = 630 \text{ kg}$
 „ „ 12 „ $630/12 = 52,5 \text{ kg}$

$$\text{Es ist } \frac{B}{A} = \frac{a}{b} \quad B = \frac{Aa}{b} = \frac{90 \text{ kg} \cdot 7 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 52,5 \text{ kg}$$

II. Die \curvearrowright drehende Wirkung von A , abhängig von Kraft und Hebelarm, kommt hierbei zum Ausdruck durch das Produkt

Kraft mal Hebelarm = „Moment“ = $Aa = 90 \text{ kg} \cdot 7 \text{ cm} = 630 \text{ kgcm}$
 dh die gleichwertige Kraft am Hebelarm 1 cm ist 630 kg

Eine Kraft von 60 kg am Hebelarm 10,5 cm würde dieselbe drehende Wirkung haben: dasselbe B fordern. Man schreibt dann:

$$\curvearrowright \text{ Moment von } B \text{ im Gleichgewicht mit } \curvearrowleft \text{ Moment von } A \\ \curvearrowright Bb = Aa \curvearrowleft$$

III. Das Lager wird durch die Summe der Kräfte belastet

$$\uparrow \text{ Stützkraft } = C = A + B \downarrow = 142,5 \text{ kg}$$

IV. Man kann sich den Hebel auch bei B drehbar denken.

Dann ist $C = A \cdot 19/12 = 142,5 \text{ kg}$

$$\downarrow B = C - A \uparrow = 52,5 \text{ kg}$$

Der Zapfen B liegt oben im Lager an. Kraft und Lagerdruck haben ihre Rollen getauscht.

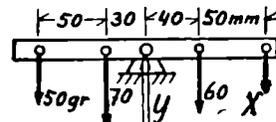


Fig 69. Mehrere Kräfte am Hebel

V. Hängen mehrere Gewichte am Waagebalken nach Fig 69, so berechnen wir

$$X = \Sigma \text{Anteile} = \frac{50 \cdot 80}{90} + \frac{70 \cdot 30}{90} - \frac{60 \cdot 40}{90} = 41,1 \text{ gr}$$

$$= \frac{\Sigma \text{ Momente}}{\text{Hebel von } X} = \frac{50 \cdot 80 + 70 \cdot 30 - 60 \cdot 40}{90} = 41,1 \text{ gr}$$

Oder unabhängig davon, was gegeben und was gesucht ist:

$$\Sigma \text{ linksdrehende Momente} = \Sigma \text{ rechtsdrehende Momente}$$

$$\curvearrowleft 50 \cdot 80 + 70 \cdot 30 = 60 \cdot 40 + X \cdot 90 \curvearrowright$$

$$\text{Stützkraft im Lager} = \uparrow Y = 50 + 70 + 60 + X \downarrow = 221,1 \text{ gr}$$

112. Auflagerkräfte. Der Balken Fig 70 ist mit 3 Lasten belastet, darunter das Eigengewicht 90 kg, und durch A und B gestützt. Er belastet die Fundamente mit A' und B' . Beide Lager sind „Kipp Lager“. Dann geht die Auflagerkraft durch Mitte Walze. Das rechte ist auch Rollenlager. Dann treten bei nur senkrechten Belastungen keine waagerechten Kräfte auf. Auf die Höhe des Balkens, und ob die Last oben drauf liegt oder unten angehängt ist, kommt es nicht an, nur auf die waagerechten Abstände.

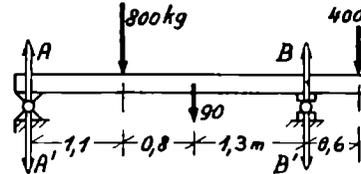


Fig 70. Auflagerkräfte

I. Wir denken uns Lager A ersetzt durch Stützkraft A , den Balken um B drehbar.

Dann ist

$$\curvearrowleft \text{ Momente} = \curvearrowright \text{ Momente}$$

$$\curvearrowleft A \cdot 3,2 + 400 \cdot 0,6 = 800 \cdot 2,1 + 90 \cdot 1,3 \curvearrowright$$

oder „algebraische Summe“ (Σ) aller Momente ($+$ \curvearrowleft $-$ \curvearrowright) = Null

$$\curvearrowleft A \cdot 3,2 + 400 \cdot 0,6 - 800 \cdot 2,1 - 90 \cdot 1,3 = 0$$

oder \curvearrowleft Moment der Stützkraft = $\curvearrowright \Sigma$ Momente der Lasten

$$\curvearrowleft A \cdot 3,2 = 800 \cdot 2,1 + 90 \cdot 1,3 - 400 \cdot 0,6 \curvearrowright$$

also $A = 486,6 \text{ kg}$ Ebenso $B = 803,4 \text{ kg}$

Kontrolle $\uparrow A + B = 800 + 90 + 400 \downarrow = 1290 \text{ kg}$

II. Man kann A und B auch aus Anteilen berechnen:

Anteil von 800 kg: $800 \cdot 2,1/3,2 = 525,0$ $800 \cdot 1,1/3,2 = 275,0$

400 kg: $-75,0$ $475,0$

90 kg: $36,6$ $53,4$

zusammen $A = 486,6$ $B = 803,4 \text{ kg}$

Die Anteile ergänzen einander je zu der betr. Last. Sie lassen sich paarweise mit je einer Rechenschiebereinstellung berechnen.

113. Drehpunkte. I. Der Balken ist unter den an ihm angreifenden Kräften, Belastungen und Stützkraften, freischwebend im Gleichgewicht. Der Drehpunkt kann daher irgendwo angenommen werden.

ZB Drehpunkt bei 400 kg $\curvearrowleft A \cdot 3,8 + B \cdot 0,6 = 800 \cdot 2,7 + 90 \cdot 1,9 \curvearrowright$

oder „ „ 90 kg $\curvearrowleft A \cdot 1,9 + 400 \cdot 1,9 = 800 \cdot 0,8 + B \cdot 1,3 \curvearrowright$

Auch aus diesen Gleichungen folgen dieselben Werte A und B wie oben. Zweckmäßiger aber sind die Gleichungen in Nr 112, in denen nur A oder nur B vorkommt, weil die im Drehpunkt angreifende Kraft den Hebelarm Null hat. Vergl Nr 72.

II. Wir untersuchen den Zusammenhang der Gleichungen für verschiedene Drehpunkte: Der Drehpunkt liege in der Entfernung e links vom linken Auflager. Dann ist

$$\curvearrowleft A e + B(e + 3,2) = 800(e + 1,1) + 90(e + 1,9) + 400(e + 3,8) \curvearrowright$$

Läßt man den Drehpunkt immer weiter \leftarrow rücken, e sehr groß werden, so werden die Hebelarme verhältnismäßig immer mehr einander gleich. Die kleinen Unterschiede kann man dann neben dem großen e vernachlässigen. Die Momentengleichung geht dann nach Kürzen von e über in die „Komponentengleichung“ $\uparrow A + B = 1290 \downarrow$.

Die Komponentengleichung ist die Momentengleichung für unendlich weit entfernten Drehpunkt.

III. Zugleich steckt in der Formel der algebraische Beweis dafür, daß die Momentengleichung für jeden Drehpunkt richtig ist, wenn die Momentengleichung für einen Drehpunkt und die Komponentengleichung gelten. Denn die Faktoren der e heben einander auf wegen der Komponentengleichung und die Glieder ohne e wegen der Momentengleichung für A . — Allgemein: Die \downarrow Kräfte seien K , ihre \rightarrow Abstände von einem Nullpunkt x , der \leftarrow Abstand des Drehpunkts von diesem e ,

dann ist $\Sigma \text{ Momente} = \Sigma K(e + x) = e \cdot \Sigma K + \Sigma K x$

Aus $\Sigma K = 0$ und $\Sigma K x = 0$ folgt also $\Sigma K(e + x) = 0$

Deshalb auch sind nur 2 der Gleichungen unabhängig voneinander. Nur 2 Stützkräfte sind statisch bestimmt.

IV. Welche Kräfte Stützkräfte und welche Belastungen sind, ist nur eine technische Frage. A und B könnten die Belastungen, die 800 kg und die 400 kg die Stützkräfte gewesen sein. Das physikalische Gesetz sagt unabhängig von dieser Unterscheidung:

Für alle an einer Scheibe angreifenden Kräfte ist

$\Sigma \curvearrowleft \text{ Momente} = \Sigma \curvearrowright \text{ Momente}$ oder algebraische Σ aller Momente = 0 und zwar für jeden beliebigen Drehpunkt.

114. Wagen auf 3 Achsen. Ein dreiachsiger Güterwagen von 9 to Eigengewicht ist nach Fig 71 belastet mit 5 Lasten von je 2,4 to. Wie groß sind die Achsdrucke?

I. Das Eigengewicht allein belastet jede Achse mit 3 to. — Voraussetzung für solche gleichmäßige Verteilung des Eigengewichts ist aber, daß die Federn sich gleich stark durchdrücken. (Vergl Balken von drei Mann getragen!) Fährt die Vorderachse etwa über einen Buckel auf der Schiene, so erhalten die beiden äußeren Achsen mehr, die Mittelachse weniger. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt. Nur 2 Auflagerkräfte können aus den Momentengleichungen bestimmt werden.

Die $5 \cdot 2,4$ to fassen wir zunächst zusammen zu einer einzigen Kraft $P = 12$ to (Fig II) (Resultante) in der Mitte der Lasten.

Dann ist für Drehpunkt B : $\curvearrowright A \cdot 4 = C \cdot 4 + 12 \cdot 0,8 \curvearrowleft$

Komponentengleichung: $\uparrow A + B + C = 12 + 9 \downarrow$

Jede weitere Momentengleichung ist nicht mehr unabhängig:

ZB für Drehpunkt A : $\curvearrowleft B \cdot 4 + C \cdot 8 = 12 \cdot 3,2 + 9 \cdot 4 \curvearrowright$

Es gelingt nicht, aus diesen Gleichungen A B C zu berechnen. Ein Versuch der Auflösung ergibt $0 = 0$. — Multipliziert man die zweite Gleichung mit 4 und zieht die erste davon ab, so folgt die dritte (Nr 113 III).

II. Eine dritte unabhängige Gleichung gewinnen wir erst durch Berücksichtigung der elastischen Zusammendrückung der Federn. (Vergl Nr 44 II; 104 III; 107 I.) Wir setzen voraus, daß die Achsen in gleicher Höhe liegen und daß die Schienen keinen Buckel haben. Indem sich nun der Wagenkasten schief stellt (Fig II), wird die Stauchung der mittleren Feder das arithmetische Mittel aus den Stauchungen der beiden äußeren. Bei gleichen Federn besteht derselbe Zusammenhang auch zwischen den Kräften:

$$B = \frac{1}{2}(A + C)$$

Dies ist die gesuchte dritte Gleichung neben den beiden Statikgleichungen.

Auflösung ergibt

$$A = 8,2 \quad B = 7,0 \quad C = 5,8 \text{ to}$$

III. Man kann die Auflagerung statisch bestimmt machen, indem man die inneren Federenden von A und B an einem Waagebalken befestigt (Fig III).

Dann ist immer $A_1 = B_1$

auch wenn ein Rad über einen Buckel fährt. Der Waagebalken stellt sich dann eben entsprechend schief ein. — Mit dieser Gleichung als dritter wird dann

$$A_1 = B_1 = 7,8 \text{ to} \quad C_1 = 5,4 \text{ to}$$

Ordnet man den Waagebalken zwischen B und C an, so wird

$$A_2 = 8,6 \text{ to} \quad B_2 = C_2 = 6,2 \text{ to}$$

Bei statisch unbestimmten Aufgaben sind viele Werte der Unbekannten möglich, je nachdem, wie man die Aufgabe „bestimmt“ macht: ob durch Anordnung von Gelenken „statisch bestimmt“ oder durch Annahmen über Auflagerhöhen und Federung „elastisch bestimmt“.

IV. Werden 3 Pferde nebeneinander vor einen Wagen gespannt, so sorgt man durch gelenkige Anordnung der Querstücke nach Fig 72 I oder II dafür, daß die Pferde gleichmäßig (statisch bestimmt) ziehen.

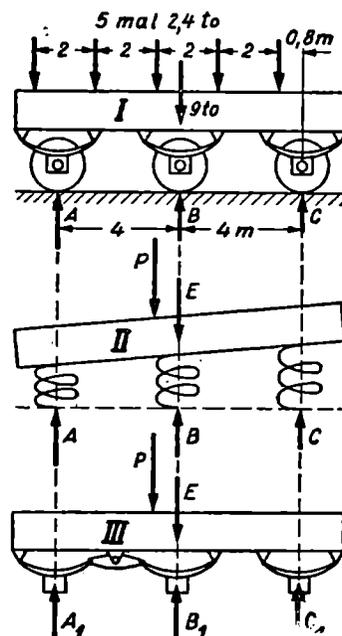


Fig 71. Dreiachsiger Wagen

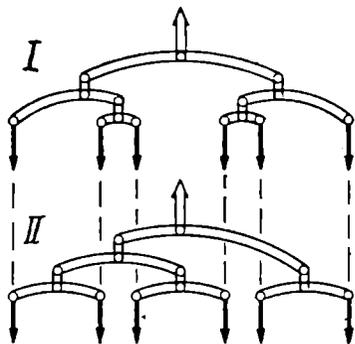


Fig 72. Anspannvorrichtung

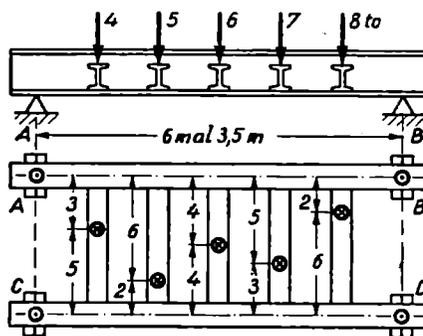
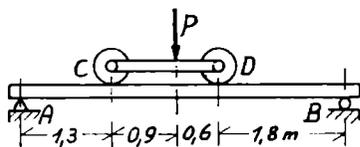


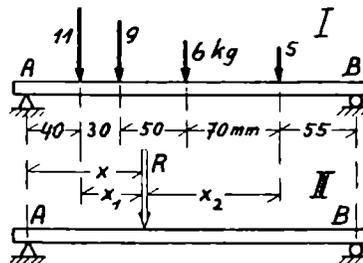
Fig 73. Brückenträger

115. Aufgabe (Brückenträger). Ein Brückenträger besteht aus 2 Längsträgern, zwischen denen Querträger liegen. Auf diesen sind Buckelbleche aufgenietet und auf diesen wird die Straße, die Bahn gebaut. Wir nehmen in Fig 73 beispielshalber auf jedem Querträger eine Einzellast an. — Die Stützkräfte der Querträger sind die Belastungen der Längsträger. — Berechne so $A B C D$.

116. Aufgabe (Innere Kräfte). Auf einem Träger AB (Fig 74) läuft eine Krankatze, belastet mit P . Berechne aus P die Raddruck C und D , aus diesen die Auflagerkräfte A und B . — Man kann A und B auch unmittelbar aus P berechnen. Auch beim Wagen Nr 114 haben wir ja nicht von den Auflagerkräften an den Federgehängen gesprochen. Solche Kräfte sind für das Ganze „innere Kräfte“.



↑ Fig 74. Träger mit Krankatze
 Fig 75. Resultante →



117. Resultante. Die 5 Lasten in Nr 114 fassen wir in der Mitte zusammen. — Auch verschiedene Lasten in ungleichen Abständen voneinander (Fig 75 I) können wir durch eine „Resultante“ ersetzen. — Gleichwertig den Lasten ist sie, wenn sie dieselben Auflagerkräfte verursacht. I. Die Auflagerkräfte sind zusammen gleich Σ Einzelkräfte und werden aus Momentengleichungen berechnet. Deshalb muß auch

die Ersatzkraft gleich der Summe der Einzelkräfte sein
 und für jeden Drehpunkt dasselbe Moment haben wie diese.

Also (Fig II): $\downarrow R = 11 + 9 + 6 + 5 = 31 \text{ kg} \downarrow$

Drehpunkt A: $\curvearrowright R x = 11 \cdot 40 + 9 \cdot 70 + 6 \cdot 120 + 5 \cdot 190 = 2740 \text{ kgmm}$

Also: $x = 2740/31 = 88,4 \text{ mm}$

Das muß für jede Auflagerstellung, für jeden Drehpunkt gelten:

$$x_1 = \frac{\Sigma \text{ Momente}}{\Sigma \text{ Kräfte}} = \frac{11 \cdot 0 + 9 \cdot 30 + 6 \cdot 80 + 5 \cdot 150}{11 + 9 + 6 + 5} = \frac{1500}{31} = 48,4 \text{ mm}$$

Ebenso $x_2 = 3150/31 = 101,6 \text{ mm}$ zu x und x_1 passend!

Aus den Einzellasten wie aus R folgt $A = 19,8$ $B = 11,2 \text{ kg}$

Es ist aber kein Vorteil, zuerst R zu berechnen, und dann erst A und B .

II. Soll der Balken durch ein einziges Auflager unterstützt werden, so muß es unter R liegen. Allerdings wäre dann das Gleichgewicht labil. R müßte unter dem Drehpunkt angreifen.

Für dieses eine Auflager muß die Summe der Momente der Einzelkräfte Null sein: $\curvearrowright 11x_1 + 9(x_1 - 30) = 6(80 - x_1) + 5(150 - x_1) \curvearrowleft$

Hieraus folgt in der Tat $x_1 = 48,4 \text{ mm}$ wie oben.

III. In Nr 116 ist $\downarrow P$ Resultante der Balkenbelastungen $\downarrow C$ und $\downarrow D$.

118. Aufgabe (Resultante). Liegt R außerhalb eines Auflagers, so wird die andere Auflagerkraft negativ. Der Balken Nr 112 Fig 70 könnte \curvearrowright überkippen, wenn die Kraft auf dem überragenden Ende größer wäre oder weiter \rightarrow läge. — Berechne den Ort der Resultante der 3 Lasten. Berechne dann A und B aus R .

119. Winkelhebel. An dem Winkelhebel Fig 76 I greifen 2 Gelenkstangen $A B$ an, schief zu den Armen des Winkelhebels. Gefordert wird die Kraft $B = 80 \text{ kg}$. Wie groß muß A sein? Wie groß ist der Lagerdruck D und welche Richtung hat er?

I. Wir ersetzen A und B durch je eine drehende und eine nicht-drehende Komponente \perp und \parallel Arm.

Dann ist $\curvearrowright (A \cos \alpha) \cdot a = (B \cos \beta) \cdot b \curvearrowleft$ $A = 96,3 \text{ kg}$

II. Wir denken uns den Winkelhebel zu einer Scheibe Fig II erweitert, auf der die Arme a und b nur aufgezeichnet sind. Es kommt auf die Gestalt des Körpers nicht an. Die Kräfte mögen ausgeübt werden durch Seile, die über Rollen laufen und durch Gewichte belastet sind. — Wir wollen nun vermeiden, daß sie schief zu den Armen wirken. Wir befestigen sie deshalb an den Fußpunkten der Lote h_a und h_b vom Drehpunkt auf die Seile bzw Gelenkstangen. Diese Verlegung der Kraft A in ihrer Richtung nach A'' ändert ihre drehende Wirkung nicht. Man kann das so darstellen, daß man A durch A' aufhebt und A'' dafür anbringt; daß man also zu A hinzufügt zwei Kräfte A' und A'' , die einander aufheben, die also am Gleichgewicht nichts ändern.

Eine Kraft darf auf ihrer „Angriffslinie“ verlegt werden.

Dann heißt die Momentengleichung $\curvearrowright A'' h_a = B'' h_b \curvearrowleft$

oder $\curvearrowright A (a \cos \alpha) = B (b \cos \beta) \curvearrowleft$ $A = 96,3 \text{ kg}$

Das ist in der Tat dieselbe Gleichung wie in I, nur dient der Cosinus jetzt nicht zur Berechnung der drehenden Komponente, sondern des Hebelarms.

„Hebelarm“ ist das Lot vom Drehpunkt auf die Angriffslinie.

III. Wir verlegen beide Kräfte an den Schnittpunkt ihrer Angriffslinien (Fig II). Dort bilden wir ihre Resultante. Sie muß auf den Drehpunkt der Scheibe zielen. Sonst dreht sich die Scheibe. Die Resultante ist dann die Belastung D' des Drehpunkts, entgegen der Stützkraft D . Das Parallelogramm wird aus dem gegebenen B so konstruiert, daß die Diagonale durch den Drehpunkt geht (Parallele zu A''' durch die Spitze von B'''). Abmessen ergibt $A = 96,3$ $D = 149,0$ kg

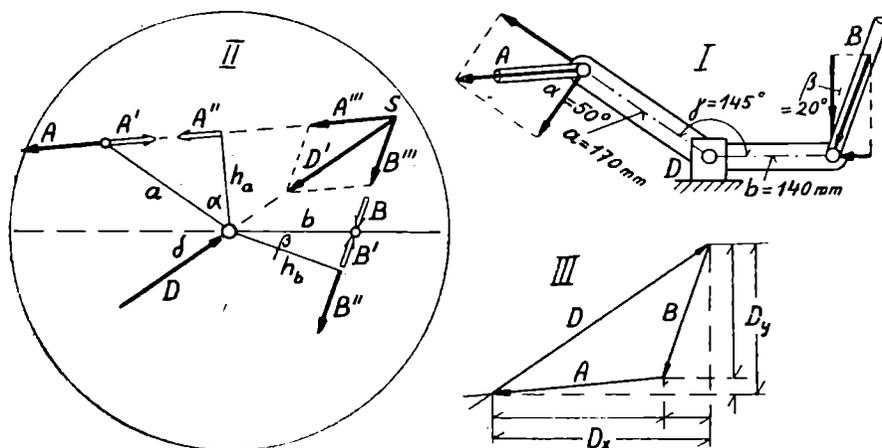


Fig 76. Winkelhebel

IV. Die Scheibe ist unter den Kräften $A B D$ freischwebend im Gleichgewicht. Was gegeben, was gesucht ist, ist Nebensache. — Wir müssen die Bedingungen des Gleichgewichts so ausdrücken, daß keine Kraft eine Sonderstellung einnimmt. Statt zu sagen: Die Resultante von A und B zielt auf das Lager; oder: Der Lagerdruck zielt zum Schnittpunkt der Angriffslinien von A und B ; sagen wir:

Drei Kräfte sind an der Scheibe im Gleichgewicht,
wenn ihre Angriffslinien sich in einem Punkt schneiden
und wenn die Kraftpfeile ein Dreieck bilden.

Dieses (Fig III) ist gleichwertig mit Komponentengleichungen. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \rightarrow D_x &= A \cos 50^\circ + B \sin 20^\circ \leftarrow & D_x &= 123,3 \text{ kg} \\ \uparrow D_y &= A \sin 50^\circ + B \cos 20^\circ \downarrow & D_y &= 83,6 \text{ kg} \\ \delta &= 34^\circ 7' & D &= 149,0 \text{ kg} \end{aligned}$$

Schnittpunktsatz und Krafteck sind also gleichwertig mit Komponenten- und Momentengleichungen.

120. Beispiele zum Schnittpunktsatz. I. Ähnliche Konstruktionsgrundsätze traten bereits beim Kreuzkopf (Nr. 89 III) und bei der schiefen Ebene (Nr 91 Fig 55) auf. Auch dort mußte F so liegen, daß es mit den andern Kräften durch einen Punkt ging, um nicht zu drehen.

II. Die Scheibe Fig 77, an der 2 Kräfte A und B an verschiedenen Punkten angreifen, soll in einem dritten Punkt unterstützt werden. Das

darf keineswegs ein beliebig gewählter Punkt sein. Um D oder E würde sich die Scheibe \curvearrowright bzw. \curvearrowleft drehen. — Man verlege A und B an ihren Schnittpunkt und bilde dort die Resultante R_{AB} . In diesem Schnittpunkt oder in einem beliebigen anderen Punkt der Angriffslinie von R kann man die Scheibe stützen, ohne daß sie sich dreht. Die Stützkraft C ist entgegengesetzt und gleich R_{AB} . — Also: die Angriffslinien gehen durch einen Punkt, und die Kraftpfeile bilden ein Dreieck.

III. Die Schaukel mit schiefen Seilen Fig 78 hängt gerade, wenn P in der Mitte liegt. Sie wird sich schief ziehen, wenn P seitlich liegt — bis P über dem Schnittpunkt der Seile liegt. — Eine Schaukel mit parallelen Seilen aber hängt immer gerade.

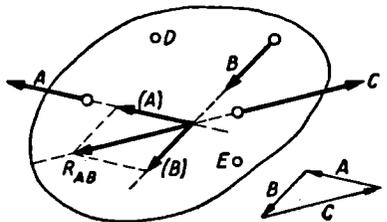


Fig 77. Scheibe mit 3 Kräften

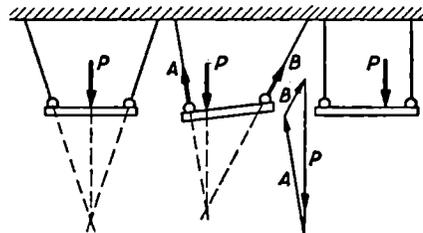


Fig 78. Schaukel

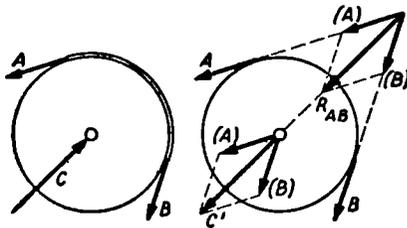


Fig 79. Rolle

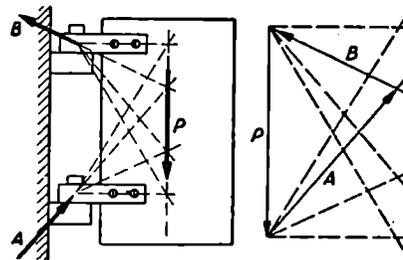


Fig 80. Tür auf 2 Angeln

IV. An der Rolle Fig 79 sind die Seilzüge A und B mit der Lagerstützkraft C im Gleichgewicht. Die Resultante R_{AB} zielt aufs Lager. Dorthin verlegt ergibt sie die Lagerbelastung C' . — C' kann wieder zerlegt werden in A und B . Man kann also sagen, daß die Seilzüge den Kran so belasten, als ob sie am Drehpunkt der Rolle angriffen. Auf den Rollen \emptyset kommt es nicht an.

V. Bei der Tür auf 2 Angeln (Fig 80) kann man nur sagen, daß sich A und B auf der Angriffslinie von P schneiden. Man hat also unendlich viele mögliche Kraftdreiecke. Ob das Gewicht der Tür oben oder unten getragen wird, ist statisch unbestimmt. Das hängt ab von Anschrauben der Beschläge und von kleinen Durchbiegungen der Tür und des Pfostens. Nur wenn an einer der Angeln Spielraum besteht, fällt dort die \uparrow Stützkraftkomponente fort. Die Aufgabe wird dann statisch bestimmt.

121. Versuche. Die vorstehenden Gesetze kann man durch Versuche bestätigen: Eine leicht drehbare Scheibe (Fig 81 I) wird mit den Gewichten von Nr 111 V belastet. X wird gemessen. Man überzeugt sich, daß es auf die Höhe der Aufhängepunkte nicht ankommt, sondern nur auf den Abstand vom Drehpunkt, den Hebelarm.

Man darf aber die Gewichte nicht zu hoch hängen, sonst wird das Gleichgewicht labil. — Wenn zB bei dem Waagebalken Fig II III die Lasten P und Q über (unter) dem Drehpunkt angreifen, so wird bei einer kleinen \curvearrowright Drehung des Balkens der Hebelarm von P größer (kleiner), der von Q kleiner (größer). Dadurch wird die \curvearrowright Drehung vergrößert (rückgängig gemacht): Das Gleichgewicht ist labil (stabil).

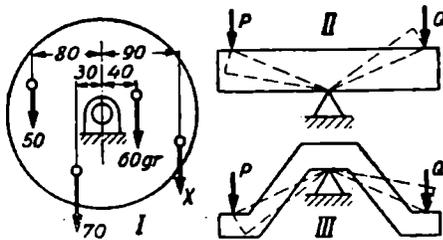


Fig 81. Versuche zum Hebelgesetz

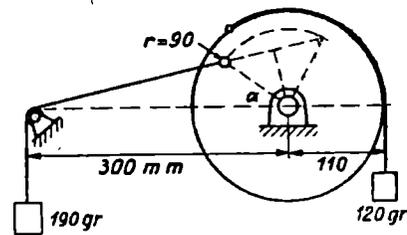


Fig 82. Einstellung der Scheibe

Auch die Querstücke von Fig 72 sind infolge ihrer Krümmung stabil. Das vorgehende Pferd kommt an einen kleineren Hebelarm. Man kann auch nach Fig 76 II das Gesetz von der Verlegbarkeit der Kräfte bestätigen. Auch hier ist die Einstellung labil, wenn man die mit Gewichten belasteten Schnüre in S angreifen läßt. Übt man aber die Kräfte durch Federwaagen aus, so kann das Gleichgewicht stabil werden.

122. Aufgabe (Einstellung einer Scheibe). An der Scheibe Fig 82 wirkt ein Moment von 13200 gr mm. Im Abstand 90 mm von der Achse wirkt eine Kraft von 190 gr (mindestens 147 gr!) mittels einer Schnur, welche über eine kleine Rolle im Abstand 300 mm von der Scheibenachse geht. — Je größer die Belastung der Schnur, um so kleiner wird der Winkel α , denn um so kleiner muß der Hebelarm der Belastung werden. Berechne α und den Lagerdruck bei der gegebenen Belastung. — Es gibt 2 Gleichgewichtslagen, eine stabile und eine labile.

123. Briefwaage. Die Briefwaage Fig 83 I besteht aus einem Winkelhebel mit den Armen $a = 160$ $b = 45$ mm, an dem die Last P und das Gewicht $G = 130$ gr miteinander im Gleichgewicht sind. Der Knickwinkel $\gamma = 40^\circ$ ist wesentlich. Wäre der Hebel gerade (Fig II), so würde er gar nicht ausschlagen, sondern senkrecht stehen bleiben, bis $P = 462$ gr geworden ist. Dann würde er plötzlich umschlagen.

Hebelarme sind die Lote vom Drehpunkt auf die Angriffslinien.

Also Momentengleichung: $\curvearrowright G \cdot a \sin \alpha = P \cdot b \sin (\alpha + \gamma) \curvearrowleft$

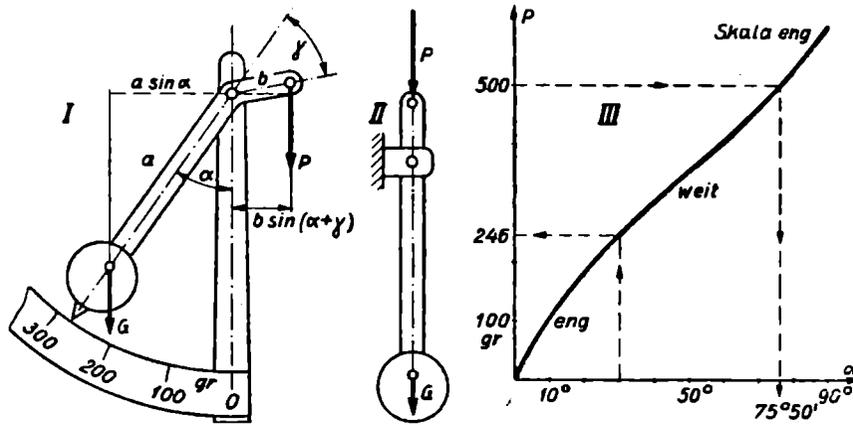


Fig 83. Briefwaage

α	P
0°	0
10°	105
20°	182
30°	246
40°	302
50°	354
60°	406
70°	462
80°	525
90°	603

Um die Skala herzustellen, müssen wir α abhängig von P für runde Werte von P berechnen. Kann man nicht nach α auflösen, so berechnet man P abhängig von α :

$$P = \frac{Ga \sin \alpha}{b \sin(\alpha + \gamma)} = 462,2 \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \quad (\text{Tabelle})$$

und trägt die Kurve Fig III auf. Man erhält dann die zu den Teilstrichen gehörenden Winkel durch Abgreifen aus der Kurve oder durch Interpolation aus der Tabelle:

ZB zu $P = 500 \text{ gr}$ gehört $\alpha = 70^\circ + 10^\circ \cdot 38/63 = 76,0^\circ$

Auflösung nach α vermittels der Formel für $\sin(\alpha + \gamma)$

$$\text{ergibt } \text{ctg } \alpha = \frac{Ga}{P b \sin \gamma} - \text{ctg } \gamma = \frac{719,1}{P} - 1,182$$

Aus der Krümmung der Kurve sieht man, daß die Skala für kleine und für große Gewichte eng, für mittlere weit ist.

124. Aufgabe (Bremshebel). An einem Rollwagen soll eine waagerechte Bremsstange Q (Fig 84) vermittels eines Winkelhebels durch eine senkrechte Zugstange P betätigt werden. Beim Anziehen der Bremse ist es zweckmäßig, daß der Bremsklotz zuerst schnell bewegt, nachher mit großer Kraft angedrückt wird. Der Hebelarm von Q muß also mit fortschreitender \sphericalangle Drehung kleiner werden.

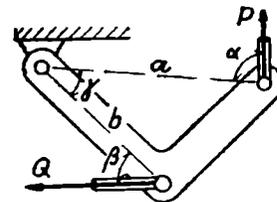


Fig 84. Bremshebel

Dann wird Q im Verhältnis zu P größer. Das Verhältnis Q/P ist das umgekehrte Bewegungsverhältnis (Nr 53)! — Es sei $a = 250 \text{ mm}$ $b = 190 \text{ mm}$ $\gamma = 40^\circ$ (nicht zu groß!) P und Q sollen bei der Drehung senkrecht bzw waagerecht bleiben. — Berechne P/Q oder Q/P für $\beta = 105^\circ$ bis -15° in Abständen von je 15° . $\beta = -15^\circ$ bedeutet „Einschnappen“ des Hebels.

125. Galgen. In einem Pfosten (Fig 85 I) ist ein Querbalken mittels eines Bolzens A befestigt (Fig II), durch eine Strebe B gestützt und am Ende mit $P=200\text{ kg}$ belastet. Wie groß sind die Stützkkräfte A und B ?

I. B liegt in Richtung der Strebe. Von A ist die Richtung unbekannt: A ist nicht etwa nur \downarrow , denn die Strebe B drängt den Querbalken \rightarrow . A ist auch nicht nur \leftarrow , denn P dreht den Balken \curvearrowright , so daß das linke Ende \uparrow strebt. — Die Angriffslinien von PBA müssen durch einen Punkt gehen. A zielt also auf den Schnittpunkt von P und B . Die Kräfte müssen ein Kraftdreieck bilden (Fig III). Abmessen oder Berechnen ergibt:

$$\alpha = 40^\circ 35' \quad \beta = 18^\circ 10' \quad A = 398\text{ kg} \quad B = 498\text{ kg}$$

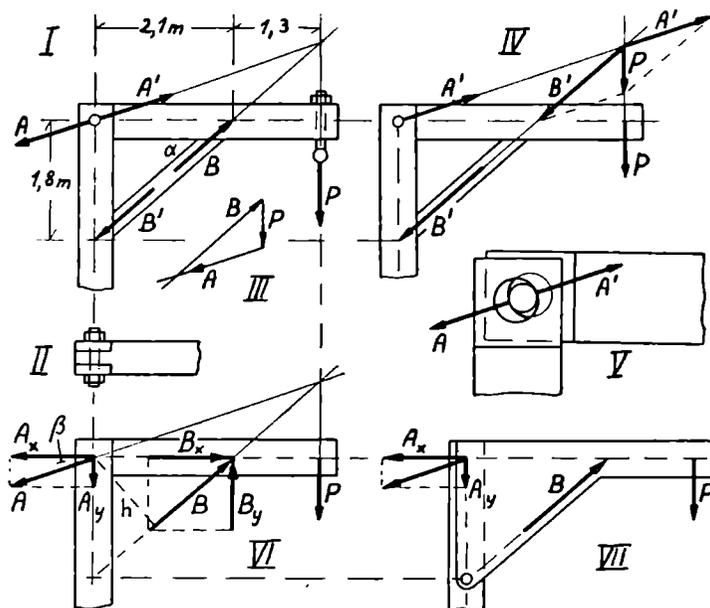


Fig 85. Galgen

II. A und B sind die Stützkkräfte, A' und B' die an den Pfosten weitergegebenen Kräfte. Sie sind die Wirkungen von P , gleichwertig mit P (Nr 59 III; 64 III), aus P durch Zerlegung zu gewinnen: Man verlegt P auf seiner Angriffslinie an den Schnittpunkt mit der Angriffslinie von B (Fig IV), ersetzt es dort durch 2 gleichwertige Kräfte so, daß A' nur den Bolzen belastet, B' nur auf die Strebe drückt. So ergibt sich die Richtung von A . Fig V zeigt, wie der Bolzen dann in Pfosten und Querbalken anliegt. Der Galgen ist gleichwertig einem Stabwerk wie Nr 65 Fig 32.

III. Der Konstruktion nach Schnittpunktsatz und Kräfteck entspricht die Berechnung nach Momenten- und Komponentengleichungen. Wir denken uns den Balken um A drehbar (Fig VI). Dann ist

Moment der drehenden Komponente von $B = \text{Moment von } P$

$$\curvearrowright B_y \cdot 2,1 = P \cdot 3,4 \curvearrowleft \quad B_y = 324\text{ kg} \quad \alpha = 40^\circ 35'$$

$$B = B_y / \sin \alpha = 498\text{ kg} \quad B_x = B \cos \alpha = 378\text{ kg}$$

Danach die Gleichgewichte der Komponenten:

$$\leftarrow A_x = B_x \rightarrow = 378 \text{ kg} \quad \downarrow A_y = B_y - P \uparrow = 124 \text{ kg}$$

hieraus $\beta = 18^\circ 10'$ $A = 398 \text{ kg}$

IV. Man kann auch den „Hebelarm“ von B berechnen, das Lot vom Drehpunkt A auf die Angriffslinie von B :

$$h = 2,1 \sin \alpha = 1,367 \text{ m} \quad B = P \cdot 3,4 / h = 498 \text{ kg}$$

V. Man kann sich den Balken auch um B drehbar denken. Dann folgt A_y unmittelbar, nicht erst aus dem vorher berechneten B

$$\curvearrowleft A_y \cdot 2,1 = P \cdot 1,3 \curvearrowright \quad A_y = 124 \text{ kg}$$

VI. Auch A_x kann man so berechnen, daß es allein für sich aus dem gegebenen P folgt. (Vergl Nr 72.) Man wählt den Drehpunkt so, daß weder A_y noch B um ihn drehen, — also den Schnittpunkt von A_y und B (Fig VII, ein Winkelhebel mit B als Gelenkdruck).

$$\text{Dann ist } \curvearrowleft A_x \cdot 1,8 = P \cdot 3,4 \curvearrowright \quad A_x = 378 \text{ kg}$$

Der „Drehpunkt“ hat bei diesen Betrachtungen kaum mehr die Bedeutung eines wirklichen Drehpunkts. Er ist nur ein Bezugspunkt für die Berechnung von Hebelarmen.

126. Drehkran. An dem Drehkran Fig 86I mit der Höhe 5,6 m und der Ausladung 3,4 m hängt eine Last $P = 2000 \text{ kg}$ an einem über eine feste Rolle gehenden Seil. Die Winde ist in die Kransäule eingebaut und gesperrt. Rollen- und Trommel $\varnothing = 0,5 \text{ m}$. An der Kurbel wirkt keine Kraft. Der Ausleger ist durch eine schräge Strebe wie in Nr 125 gestützt. Die Stützkräfte $A B C D$ sind zu konstruieren und zu berechnen.

I. Der Kran als Ganzes ist durch Spurlager A und Halslager B gestützt. In A wirkt eine \uparrow Tragkraft an der Stirnfläche des Zapfens und eine \rightarrow Stützkraft an seiner Leibung. Im Halslager ist die Kraft B waagrecht. Das ist statisch bestimmt im Gegensatz zur Tür auf 2 Angeln (Nr 120 V).

Die Kraft im Windenseil hat auf die Größe der Stützkräfte $A B$ keinen Einfluß. Windenzug W und Gegenkraft W' greifen beide am Kran an. Entgegengesetzt gleiche Kräfte, die in einer Linie liegen, können den Körper weder verschieben noch drehen. Sie haben einander auf. Was anders wäre es, wenn die Winde nicht am Kran angebracht wäre, sondern dahinter stünde, wenn der Windenzug wie P von außen auf den Kran ausgeübt würde. Der Windenzug der eingebauten Winde ist für die Wirkung auf die Lager ebenso belanglos wie die Kräfte in der Strebe, an der Befestigungsstelle Querbalken/Säule, an der Sperrklinke, überhaupt zwischen allen den Teilen und Teilchen, aus denen der Kran und seine Teile bestehen. Auf diese „inneren Kräfte“, überhaupt auf den Aufbau des Krans, kommt es nicht an. Das Gleichgewicht am Kran besteht zwischen den „äußern Kräften“: den Belastungen und den Stützkräften, deren Gegenkräfte an andern Körpern (Erde, außerhalb stehende Winde, Fundament, Stützgerüst) angreifen, wo sie dann ihrerseits miteinander oder mit andern Kräften im Gleichgewicht sind.

II. A zielt auf den Schnittpunkt S_1 von P und B . Oder: P und B bilden an ihrem Schnittpunkt eine Resultante, die nicht um das Spurlager drehen darf (Fig II), die also auf das Lager zielt, die Lagerbelastung A' . Daraus folgt die Richtung von A . Danach die Größe von A und B aus dem Kraftdreieck (Fig III). — Oder: man ersetzt P durch seine Wirkungen: B' , welches im Halslager \perp Zapfen wirkt, und A' , das aus irgend einer Richtung aufs Spurlager zielt. Man muß also P auf die Höhe des Halslagers verlegen und es dort zerlegen (Fig IV V).

III. Berechnung: Drehpunkt A : $\curvearrowright B \cdot 5,6 = P(3,4 + 0,25!) \curvearrowleft$
 P greift am Rollenumfang an, nicht etwa an der Achse! $B = 1304$ kg
 Komponenten; $\rightarrow A_x = B \leftarrow = 1304$ kg $\uparrow A_y = P \downarrow = 2000$ kg
 ohne Rücksicht auf Eigengewichte. — Die Resultante A zu bilden ist zwecklos, da A_x an der Zapfenleibung angreift, A_y an der Stirnfläche.

127. Ausleger des Drehkrans. I. Der Ausleger (Fig 86 I) ist gestützt durch C und D , belastet mit P und W . An ihm ist also auch W „äußere Kraft“. Die Resultante von P und W geht durch den Schnittpunkt S_2 in Richtung Rollachse (Nr 120 IV). C zielt auf den Schnittpunkt S_3 von R_{PW} mit D (Fig I; VI). Die Größe von C und D folgt dann aus dem Kräfteck (Fig VII). — Oder: man schiebt R_{PW} nach S_3 und zerlegt es dort in C' und D' (Nr 125 II; Fig 85 IV).

II. Berechnung: Drehpunkt C : $\curvearrowright D \cdot 2,1 \sin \alpha = (P + W_y) \cdot 3,4 \curvearrowleft$
 P und W greifen im Rollenlager an, im Gegensatz zu Nr 126 III, und haben daher hier nur den Hebelarm 3,4! — Die weitere Berechnung geschieht wie in Nr 125 III \div VI, aber unter Berücksichtigung von W :

$$\begin{array}{lll} \delta = 44^\circ 10' & W_x = 1435 & W_y = 1393 \text{ kg} \\ D_y = 5500 & D = 8450 & D_x = 6410 \text{ kg} \\ C_y = 2107 & C_x = 4975 & C = 5400 \text{ kg} \end{array}$$

Berechnet man C_x aus dem Drehpunkt im Schnittpunkt Säule/Strebe (Nr 125 VI), so muß man beachten, daß auch $\leftarrow W_x$ um diesen \curvearrowright dreht:

$$\curvearrowright C_x \cdot 1,8 = (P + W_y) \cdot 3,4 - W_x \cdot 1,8 \curvearrowleft$$

III. Auch an der Kransäule besteht Gleichgewicht, und zwar zwischen $ABCDW'$. Man könnte also etwa AB aus CDW ausrechnen oder auch CD aus ABW . Das ist aber nicht zweckmäßig. (Vergl Nr 116.)

128. Ladebaum. Der Ladebaum Fig 87 I ist belastet mit einem Flaschenzug: Last = $P = 1200$ kg, Windenzug = $W = 600$ kg. Die Verspannung V greift an einem andern Punkt an, im Gegensatz zu Nr 64. Die Kraft im Gelenk liegt deshalb nicht mehr in Richtung des Baumes.

I. Zeichne maßstäblich ihre Richtung und das Kräfteck.

II. Wir berechnen V aus der Momentengleichung für das Gelenk. Hebelarme sind die Lote vom Gelenk auf die Angriffslinien. Der Ladebaum ist so gewissermaßen ein Winkelhebel mit mehreren Armen:

$$\curvearrowright V \cdot 4 \sin 66^\circ = P \cdot 6 \sin 48^\circ - W \cdot 6 \sin 14^\circ \curvearrowleft \quad V = 1226 \text{ kg}$$

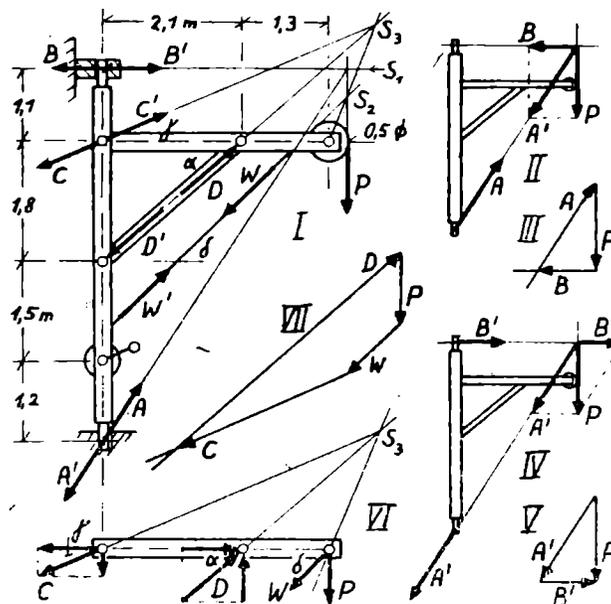


Fig 86. Drehkran

Dieselbe Gleichung kommt, wenn wir PWV in drehende und nicht-drehende Komponenten zerlegen (Fig II).

Die Kraft G im Gelenk ergibt sich in Übereinstimmung mit dem Kraft-eck aus Komponentengleichungen \parallel und \perp Baum:

$$\begin{aligned} \surd G_x &= V \cos 66^\circ + P \cos 48^\circ + W \cos 14^\circ & G_x &= 1882 \text{ kg} \\ \surd G_y &= V \sin 66^\circ - P \sin 48^\circ + W \sin 14^\circ & G_y &= 373 \text{ kg} \end{aligned}$$

Man kann sich den Baum auch bei V drehbar denken:

$$\begin{aligned} \surd G_y \cdot 4 &= (P \sin 48^\circ - W \sin 14^\circ) \cdot 2 \quad \surd & G_y &= 373 \text{ kg} \\ G &= 1920 \text{ kg} & & \text{um } 11^\circ 12' \text{ flacher als der Baum!} \end{aligned}$$

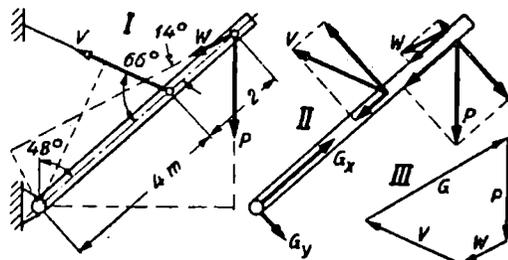


Fig 87. Ladebaum, mehrere Angriffspunkte

129. Aufgabe (Ladebaum). In Fig 87 werden bei unveränderten Winkeln die Angriffspunkte von PW und V vertauscht. Wie ändert sich jetzt die Richtung von G ? Konstruiere und berechne V und G .

130. Leiter. Eine Leiter (Fig 88 I) ist oben gegen eine Kante gelehnt, reibungslos, unten in den Erdboden eingedrückt, so daß dort auch \leftarrow Stützkkräfte ausgeübt werden können, so daß sie nicht abrutscht. Belastet ist sie mit $P=110 \text{ kg}$ $Q=70 \text{ kg}$ und dem Eigengewicht $E=35 \text{ kg}$. Ihre Neigung ist $\alpha=65^\circ$. Welche Größe und

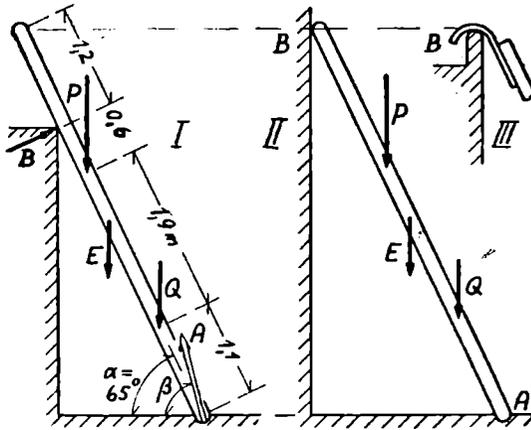


Fig 88. Leiter

Richtung haben die Stützkraften am Boden und an der Kante?

B ist \perp Fläche, hier also \perp Leiter. A zielt nach dem Schnittpunkt von B mit der Resultante von PQE . Wir brauchen aber R nicht vorweg zu berechnen (Nr 117I), A ist jedenfalls steiler als die Leiter. Als Unbekannte sind also einzuführen ihre Größe und Richtung oder 2 Komponenten von ihr.

$$\curvearrow B \cdot 3,6 = (P \cdot 3,0 + Q \cdot 1,1 + E \cdot 2,4) \cos \alpha \quad B = 57,7 \text{ kg}$$

A folgt aus \uparrow und \leftarrow Komponenten:

$$\uparrow A_y = P + Q + E - B \cos \alpha \downarrow = 215 - 24,4 = 190,6 \text{ kg}$$

$$\leftarrow A_x = B \sin \alpha \rightarrow = 52,3 \text{ kg}$$

$$\beta = 74^\circ 38' > \alpha! \quad A = 198,0 \text{ kg}$$

Man kann A auch aus Komponenten \parallel und \perp Leiter berechnen:

$$\curvearrow A_p = (P + Q + E) \sin \alpha \searrow = 195,0 \text{ kg}$$

$$\nearrow A_s = (P + Q + E) \cos \alpha - B \swarrow = 90,8 - 57,7 = 33,1 \text{ kg}$$

$$\beta - \alpha = 9^\circ 38' \quad A = 198,0 \text{ kg}$$

131. Aufgabe (Leitern). Dieselbe Leiter mit derselben Neigung und denselben Belastungen sei I gegen eine senkrechte Wand gelehnt (Fig II), oben reibungslos; — II als Hakenleiter oben übergehakt (Fig III), unten reibungslos. Berechne beidemale Größe und Richtung von A und B .

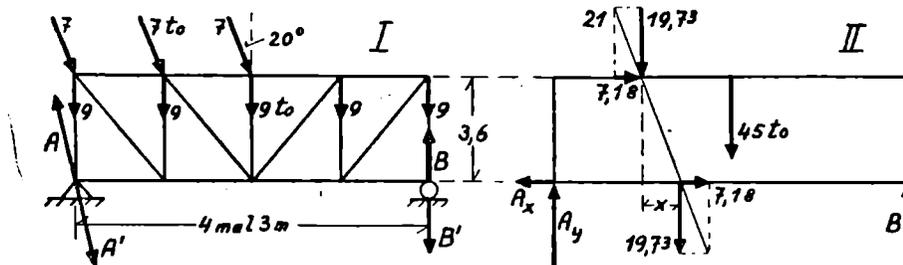


Fig 89. Träger mit schiefen Lasten

132. Träger mit schiefen Lasten. Der Träger Fig 89 I ist belastet mit 5 gleichen Lasten von je 9 to (Eigengewicht und Fahrbahn) und 3 gleichen schiefen Lasten (bremsender Zug, teilweise auf der Brücke befindlich, oder Krankkatze mit schiefem Windenzug). Von den beiden Lagern ist eines ein Rollenlager. Dann kann der Träger bei steigender Temperatur sich ausdehnen. Wären beide Lager fest, so könnten in beiden

waagerechte Stützkkräfte, Komponenten A_x B_x auftreten. Sie wären bei höherer Temperatur nach innen gerichtet, bei niedrigerer nach außen. Sie wären statisch unbestimmt. Vergl Nr 126 Drehkran mit Spurlager und Halslager, Nr 130 Leiter am Boden eingedrückt, an der Wand reibungslos angelehnt. Unbekannt sind also $A_x \leftarrow A_y \uparrow B \uparrow$

I. Die gleichen Lasten fassen wir je zu einer Resultante zusammen (Fig II). Die schiefen zerlegen wir dabei in \downarrow und \rightarrow Komponenten. Drehpunkt A ergibt eine Gleichung für B . Eine Gleichung für A_y erhalten wir mit Drehpunkt bei B in Höhe des linken Auflagers, so daß auch A_x keinen Hebelarm hat.

$$\begin{aligned} \curvearrowright B \cdot 12 &= 19,73 \cdot 3 + 45 \cdot 6 + 7,18 \cdot 3,6 \curvearrowright & B &= 29,58 \text{ to} \\ \curvearrowleft A_y \cdot 12 &= 19,73 \cdot 9 + 45 \cdot 6 - 7,18 \cdot 3,6 \curvearrowleft & A_y &= 35,15 \text{ to} \end{aligned}$$

Ferner gelten die Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} \uparrow A_y + B &= 19,73 + 45 \downarrow = 64,73 \text{ to} && \text{eine Kontrolle!} \\ \leftarrow A_x &= 7,18 \text{ to} \rightarrow & A &= 35,8 \text{ to} && \text{unter } 11^\circ 33' \text{ gegen Vertikale} \end{aligned}$$

Wäre auch rechts ein festes Lager, so würde auch B_x auftreten, und in der Gleichung $\leftarrow A_x + B_x = 7,18 \text{ to} \rightarrow$ würden zwei Unbekannte stehen.

II. Man kann A_y und B auch aus Anteilen berechnen

Anteil von	an A_y	an B
45,00	22,50	22,50
19,73	$\frac{3}{4} \cdot 19,73 = 14,80$	$\frac{1}{4} \cdot 19,73 = 4,93$
7,18	$-7,18 \cdot 3,6/12 = -2,15$	$+7,18 \cdot 3,6/12 = +2,15$
zusammen	$A_y = 35,15$	$B = 29,58 \text{ to}$

Die \downarrow Kräfte verteilen sich auf A_y und B wie in Nr 112. Auch die \rightarrow Kräfte haben Anteil an den \uparrow Auflagerkräften. Sie liegen 3,6 m über dem festen Lager, kippen den Träger \curvearrowleft , entlasten A_y und belasten B um denselben Betrag. Die Summe $A_y + B$ wird dadurch also nicht beeinflusst.

III. Das \curvearrowleft Moment der \rightarrow Komponenten kann man vermeiden, wenn man die 21 to auf ihrer Angriffslinie \searrow verlegt in die Höhe des festen Lagers (Fig II). Dann hat die \rightarrow Komponente keinen Hebelarm mehr, dafür die \downarrow einen größeren; um $x = 3,6 \cdot \text{tg } 20^\circ = 1,31 \text{ m}$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } A_y &= 22,5 + 19,73 \cdot 7,69/12 = 22,5 + 12,65 = 35,15 \text{ to} \\ B &= 22,5 + 19,73 \cdot 4,31/12 = 22,5 + 7,08 = 29,58 \text{ to} \end{aligned}$$

133. Aufgabe (Gerberträger). Wenn die durch einen Träger zu überbrückende Spannweite groß ist, so legt man ihn auf 3 oder mehr Auflager $A B C$ (Fig 90). Der Längenausdehnung wird Rechnung getragen, indem das mittlere Auflager eine Pendelsäule ist, das rechte ein Rollenlager. Trotzdem wäre er als durchlaufender Balken statisch unbestimmt wie der dreiachsige Wagen Nr 114. Senkt sich nämlich das mittlere Auflager, so wird B kleiner, A und C größer. Deshalb ist das Gelenk G angeordnet — und zwar nicht über dem Auflager B , sondern um einen gewissen Bruchteil der Spannweite daneben („Gerberträger“). Dann wird nämlich die Biegungsbeanspruchung kleiner: des Nebenträgers wegen

der kürzeren Spannweite, des Hauptträgers wegen der Belastung des überragenden Endes. — Berechne die Auflagerkräfte. — Der Gelenkdruck G ist Stützkraft am Nebenträger, Belastung am Hauptträger.

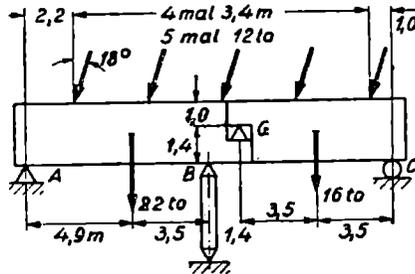


Fig 90. Gerberträger

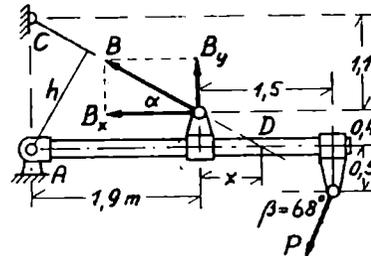


Fig 91. Exzentrische Angriffspunkte

134. Exzentrische Angriffspunkte. An der Stange Fig 91 (Ladebaum) greifen die Kraft $P = 240$ kg (Last und Windenzug) und die Verspannung B exzentrisch an. Zu berechnen die Stützkräfte A_x A_y B .

I. Um A dreht nicht nur B_y , sondern infolge der Exzentrizität auch B_x :

$$\curvearrow (B \sin \alpha) \cdot 1,9 + (B \cos \alpha) \cdot 0,4 = (P \sin \beta) \cdot 3,4 + (P \cos \beta) \cdot 0,5 \curvearrow$$

$$B \cdot (1,9 \sin \alpha + 0,4 \cos \alpha) = 223 \cdot 3,4 + 90 \cdot 0,5$$

$$\alpha = 30^{\circ} 4' \quad B \cdot 1,300 \text{ m} = 802 \text{ kgm} \quad B = 618 \text{ kg}$$

$$\downarrow A_y = B_y - P_y = 310 - 223 \uparrow = 87 \text{ kg}$$

$$\rightarrow A_x = B_x + P_x = 534 + 90 \leftarrow = 624 \text{ kg}$$

Statt das \curvearrow Moment von B aus beiden Komponenten zu berechnen, kann man auch den Hebelarm h von B aus maßstäblicher Zeichnung abmessen oder berechnen als Summe der Projektionen der Maße 1,9 und 0,4 auf h :

$$h = 1,9 \sin \alpha + 0,4 \cos \alpha = 1,300 \text{ m}$$

II. Man kann den exzentrischen Angriff vermeiden, indem man B auf seiner Angriffslinie an den Punkt D auf Mittellinie Stab verlegt und dort erst zerlegt. Dann hat B_x keinen Hebelarm mehr, dafür B_y einen größeren: $x = 0,4 / \tan \alpha = 0,691 \text{ m}$ oder aus Ähnlichkeit $= 0,4 \cdot 1,9 / 1,1 = 0,691 \text{ m}$

$$\curvearrow B_y (1,9 + 0,691) = 223 \cdot 3,4 + 90 \cdot 0,5 \curvearrow$$

$$B_y = 310 \quad B = 618 \quad B_x = 534 \text{ kg} \quad \text{usw}$$

Auch P kann man auf Mittellinie Stab verlegen. Sind aber Last und Windenzug getrennt gegeben, so lohnt es sich nicht.

III. A_y und A_x folgten aus dem zuvor berechneten B . Wir können aber auch Drehpunkte so wählen, daß in jeder Gleichung nur eine Unbekannte steht (Nr 72; 125 V VI), während die andern keinen Hebelarm haben.

Also zur Berechnung von B : Drehpunkt $A =$ Angriffspunkt von A

„ „ „ A_x : „ $C =$ Schnittpunkt A_y/B

„ „ „ A_y : „ $D =$ „ A_x/B

$$\curvearrow A_x \cdot (1,1 + 0,4) = 223 \cdot 3,4 + 90 \cdot 2,0 \curvearrow \quad A_x = 624 \text{ kg}$$

$$\curvearrow A_y \cdot (1,9 + 0,691) = 223 \cdot (1,5 - 0,691) + 90 \cdot 0,5 \curvearrow \quad A_y = 87 \text{ kg}$$

135. Leiter mit Reibung. Eine Leiter (Fig 92I) von der Länge $l = 2,8$ m steht auf waagrechtem Fußboden gegen eine senkrechte Wand gelehnt, aufgerichtet unter $\alpha = 65^\circ$, belastet mit $P = 80$ kg an der Stelle $a = 1,2$ m. Vom Eigengewicht sehen wir ab. — Ohne Reibung würde sie abrutschen. Es sei $\mu = 0,3$ oder Reibungswinkel $= \rho = 16^\circ 42'$ am Boden und an der Wand. Dann treten als Stützkkräfte die Normalkomponenten und die Schubkomponenten $A_n A_s B_n B_s$ auf. Auch bei Reibung kann die Leiter abrutschen, wenn man zu hoch hinaufsteigt.

I. Im Bewegungsfall ist $B_s = \mu B_n$ $A_s = \mu A_n$. Im Gleichgewichtsfall aber ist die Reibung im allgemeinen nicht voll ausgenutzt $B_s < \mu B_n$ $A_s < \mu A_n$. Oder (Fig II): die Resultanten A und B liegen innerhalb der Winkel CAD bzw DBE . — Sie müssen sich mit P in einem Punkt schneiden. Gleichgewicht ist also nur möglich, wenn die Angriffslinie von P durch das Viereck $CDEF$, äußerstenfalls durch C geht.

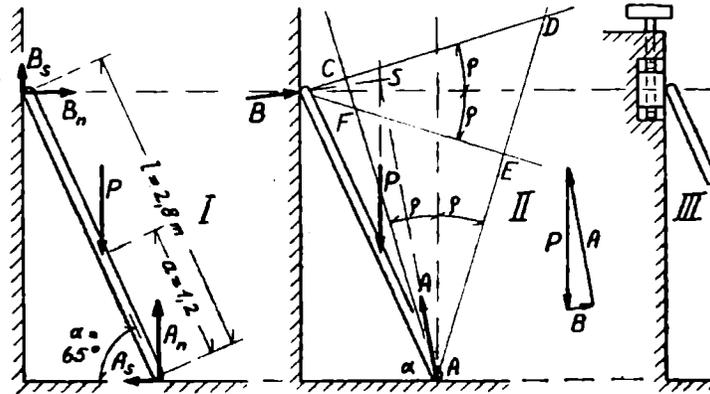


Fig 92. Leiter mit Reibung;

Wo auf der Angriffslinie von P der Schnittpunkt S liegt, darüber sagen die Gleichgewichtsbedingungen (Schnittpunktsatz Krafteck Reibungsgesetz) nichts aus. Das ist statisch unbestimmt. Wir haben ja auch 4 Unbekannte. — Es gibt in der Tat verschiedene Möglichkeiten. Indem man die Leiter verschieden belastet, biegt sie sich mehr oder weniger durch und gleitet dann an der Wand. Ist sie zuletzt \uparrow gegliitten, so wird B_s \downarrow gerichtet sein; S wird tief liegen; und umgekehrt. Oder: man denke sich den Wandteil bei B beweglich (Fig III). Zieht man ihn durch die Schraube ein wenig hinauf, so dreht sich die Stützkraft B in die Linie BD hinein. Die Reibung wird dann oben mehr, unten weniger in Anspruch genommen. — Drückt man den Wandteil etwas nach unten, so kann B sogar abwärts gerichtet sein. An der Berührungsstelle B kann dann Gleiten eintreten, ohne daß die Leiter abrutscht; wenn nämlich die Angriffslinie von P rechts von F durchgeht, so kommt B eher als A an die Grenze des Reibungswinkels. Geht sie aber zwischen C und F durch, so rutscht die Leiter in dem Maß ab, wie man den Wandteil senkt.

II. Rechnerisch ist $B_n \cdot l \sin \alpha + B_s \cdot l \cos \alpha = P \cdot a \cos \alpha$
 in Zahlen $\curvearrowright B_n \cdot 2,540 + B_s \cdot 1,182 = P \cdot 0,507 \curvearrowleft$
 $\uparrow A_n = P - B_s \downarrow \quad \leftarrow A_s = B_n \rightarrow$

Jede weitere Gleichung ist abhängig. Die Gleichungen reichen nicht, um die 4 Unbekannten zu bestimmen. Die Aufgabe ist eben statisch unbestimmt. Es bestehen viele Möglichkeiten:

III. Annahme: Bei B ist die Reibung garnicht ausgenutzt:

Mit $B_s = 0$ wird $B = B_n = 0,200 P = A_s \quad A_n = P$
 $A_s/A_n = 0,200 > \mu = 0,3$ Reibung am Boden nur zu $2/3$ ausgenutzt.

IV. Annahme: Volle Reibung aufwärts bei B : $\uparrow B_s = 0,3 B_n$

$$B_n = 0,175 P = A_s \quad B_s = 0,0525 P \quad A_n = 0,948 P$$

$$A_s/A_n = 0,185 = 0,617 \mu \quad \mu \text{ unten weniger ausgenutzt}$$

V. Annahme: Volle Reibung abwärts bei B : $\downarrow B_s = 0,3 B_n$

In den Gleichungen II ist B_s als \uparrow angenommen. Dort müssen wir also $\uparrow B_s = -0,3 B_n$ einsetzen.

$$B_n = 0,232 P = A_s \quad B_s = -0,070 P \quad A_n = 1,070 P$$

$$A_s/A_n = 0,217 = 0,724 \mu \quad \mu \text{ unten mehr ausgenutzt}$$

VI. Wie hoch darf P steigen? — Die Angriffslinie von P muß durch C gehen. Berechnung des Dreiecks ABC mit der Vertikale durch C ergibt

$$a = 1,883 \text{ m} \quad \text{unabhängig von der Größe von } P$$

Aus dem Kraftdreieck folgt dann $A = 0,957 P \quad B = 0,287 P$

VII. Oder: In den Gleichungen II setzen wir für diesen Fall ein

$B_s = 0,3 B_n \quad A_s = 0,3 A_n$ und betrachten auch a als unbekannt.

Dann ist $B_n = 0,3 A_n \quad A_n = P - 0,3 B_n = P - 0,09 A_n$

$$A_n = 0,918 P \quad A_s = 0,275 P \quad A = 0,957 P$$

$$B_n = 0,275 P \quad B_s = 0,083 P \quad B = 0,287 P$$

$$0,275 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha + 0,083 \cdot l = a \quad a = 0,673 \cdot l = 1,883 \text{ m}$$

VIII. Bis oben hin darf man nur steigen, wenn die Leiter ganz innerhalb des Reibungswinkels ϱ bei A liegt, wenn also bei gegebenem $\mu \quad \alpha > 73^\circ 18'$ oder bei gegebenem $\alpha \quad \mu > 0,466$ wird.

IX. A_s war hier immer \leftarrow gerichtet. Nimmt man aber statt des $\downarrow P$ eine \swarrow gerichtete Kraft, so kann A_s auch \rightarrow gerichtet sein.

136. Gleitstück. Die verstellbare Schraubzwinde Fig 93 I hat ein Gleitstück der Länge l , welches sich infolge der mit der Exzentrizität a wirkenden Kraft K in jeder Stellung festklemmt, \rightarrow wenn es kurz genug ist.

Der Kreuzkopf einer Lokomotive (Fig II) fährt an einer Stange mit einem Gleitstück, welches sich trotz der exzentrisch wirkenden Kräfte nicht klemmt, — wenn es lang genug ist.

Im Fall I liegt das Gleitstück in den Ecken links oben und rechts unten an der Stange an. Die Stützkkräfte A und B , die K im Gleichgewicht halten, müssen innerhalb der Winkel ϱ liegen. Sie sollen sich mit K in einem Punkt schneiden. Also muß die Angriffslinie von K durch den

gemeinsamen Winkelraum der beiden ϱ gehen. Sie muß außerhalb des Schnittpunkts der schrägen Schenkel der Winkel ϱ verlaufen. Dann ist Gleichgewicht möglich. Die Lage des Schnittpunkts im Winkelraum ist statisch unbestimmt. Kraftdreieck Fig III.

$$\text{Höchstmaß von } l = 2a \operatorname{tg} \varrho = 2\mu a$$

Im Fall II muß die Angriffslinie von K innerhalb des Schnittpunkts der Schenkel der Winkel ϱ verlaufen. $l > 2\mu a$. Dann ist kein Gleichgewicht möglich mit Kräften $A B$ innerhalb ϱ . Dann wird eben K nur im Gleichgewicht gehalten durch die Pleuelstangenkraft P und die Führungskraft F gemäß Kraftdreieck Fig IV (Nr 89). Bei A und B treten dann keine Kräfte auf. — Sobald aber $l < 2\mu a$ ist, treten dort beliebig große Kräfte auf.

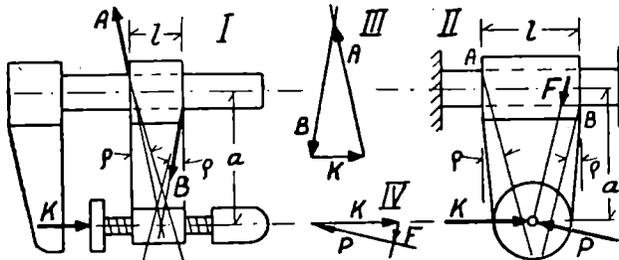


Fig 93. Schraubzwinde, Kreuzkopfführung

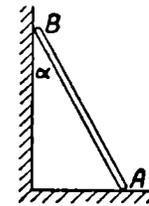


Fig 94. Brett an Wand

137. Aufgabe (Angelehntes Brett). Unter welchem Winkel α darf man ein Brett an die Wand lehnen (Fig 94), ohne daß es abrutscht? An der Wand und am Boden sei $\mu = 0,25$.

140. Zusammenfassung. Die Scheiben, deren Gleichgewicht wir untersuchten, waren in 2 Punkten gestützt. Statisch bestimmt war die Aufgabe nur, wenn in einem der Stützpunkte die Kraftrichtung bekannt war (Halslager, Rollenlager, Pendelsäule, reibungslose Wand in Nr 130, dagegen Nr 135). — Eine Kraft darf auf ihrer Angriffslinie verlegt werden. Das ändert das Gleichgewicht mit den Stützkraften nicht, allerdings die Stabilität. — Drei Kräfte (zB 1 gegebene, 2 gesuchte) sind miteinander im Gleichgewicht, wenn ihre Angriffslinien durch einen Punkt gehen, und wenn die Kraftpfeile ein Dreieck bilden. Der Schnittpunktsatz bestimmt die Richtung der einen Stützkraft, das Kraftdreieck die Größe der beiden. — Rechnerisch entsprechen dem die Komponenten- und Momentengleichungen. Hebelarm ist das Lot vom Drehpunkt auf die Angriffslinie. Die Wahl der Drehpunkte und der Komponentenrichtungen ist frei. Sie werden zweckmäßig so gewählt, daß nur je eine Unbekannte in jeder Gleichung vorkommt. Zur leichteren Bildung der Momente ist es manchmal zweckmäßig, den Angriffspunkt einer Kraft auf ihrer Angriffslinie zu verlegen.

VI. 3 Stützkräfte Resultante Kräftepaar

141. Leiter verspannt. Eine Leiter kann man gegen Abrutschen sichern auch dadurch, daß man sie wie in Fig 95 I verspannt. Sie sei belastet mit $P = 90 \text{ kg}$, ohne Eigengewicht. Bei A und B wird keine Reibung angenommen. Dann kommt Zug in die Verspannung C .

I. Es sind also jetzt 3 unbekannte Kräfte ABC , jede von bekannter Richtung, die an verschiedenen Punkten der Scheibe angreifen. Auch das ist statisch bestimmt. Bisher (Nr 119 ÷ 134) hatten wir eine unbekannte Kraft von bekannter Richtung und eine unbekannte Kraft von unbekannter Richtung. Letzteres ist dasselbe wie 2 unbekannte Komponenten ($A_x A_y$). Es waren also auch dort 3 unbekannte Kräfte, von denen 2 am selben Punkt angriffen.

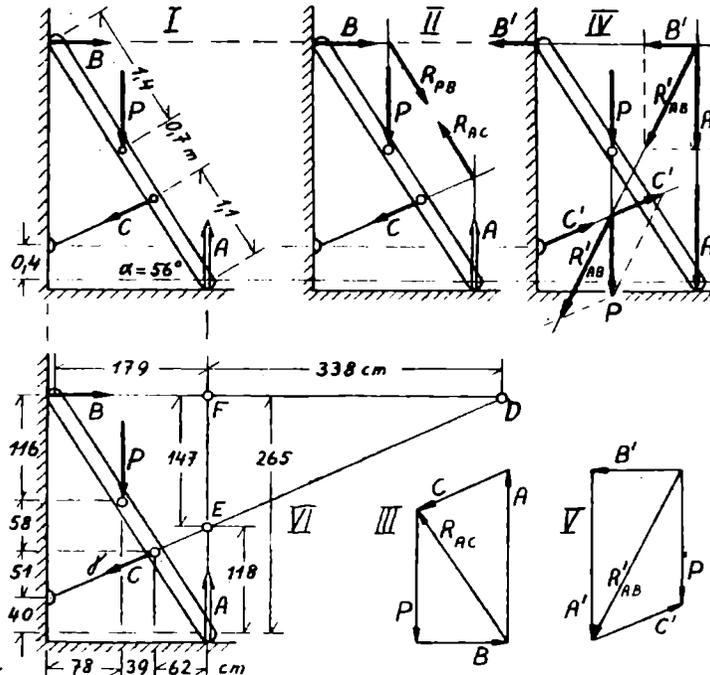


Fig 95. Leiter verspannt

II. Die vorliegende allgemeinere Aufgabe können wir auf jene zurückführen, indem wir A und C an ihren gemeinsamen Schnittpunkt verlegen (Fig II). Dann muß P im Gleichgewicht sein mit B und der Resultante R_{AC} . R_{AC} muß also zum Schnittpunkt von P mit B zielen, muß mit R_{PB} im Gleichgewicht sein. Im Kräfteplan Fig III legen wir durch die Endpunkte von P Parallele zu B und R , dann durch die Endpunkte von R Parallele zu A und C . Dann ist das Kräfteck $PBAC$ geschlossen. —

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, ein solches Viereck aus gegebenem P und gegebenen Richtungen von $A B C$ zu schließen. (Vergl Nr 104 II Fig 64 III.) Erst die Richtung von R , der Schnittpunktsatz, schneidet das richtige Krafteck heraus (Culmann'sches Verfahren).

III. Man kann auch zuerst A und B zu R_{AB} zusammenfassen und dieses mit R_{PC} ins Gleichgewicht bringen. — Oder vom Standpunkt der Zerlegung (Fig IV V): Man ersetzt P am Schnittpunkt mit C durch eine Kraft C' , die nur am Haken zieht, und eine Kraft R' , die durch den Schnittpunkt $A B$ geht, so daß sie dort in A' und B' zerlegt werden kann. Dann ist P ersetzt durch gleichwertige Kräfte in Richtung und Lage der weitergegebenen Kräfte.

IV. Wir berechnen $A B C$, nachdem wir die Maße in Fig VI berechnet oder einer maßstäblichen Zeichnung entnommen haben: $\gamma = 23^\circ 30'$
 Drehpunkt A $\curvearrowright B \cdot 265 = P \cdot 101 + (C \cos \gamma) \cdot 91 + (C \sin \gamma) \cdot 62 \curvearrowleft$
 oder nach Verlegung von C an den Punkt E über A :

$$\curvearrowright B \cdot 265 = P \cdot 101 + (C \cos \gamma) \cdot 118 \curvearrowleft$$

Komponenten: $\rightarrow B = C \cos \gamma \leftarrow$ und $\uparrow A = P + C \sin \gamma \downarrow$
 übereinstimmend mit den Kraftecken Fig III; V. (Vergl Nr 70 III.)

$$\text{Auflösung: } B = 0,687 P \quad C = 0,749 P \quad A = 1,299 P$$

V. Es ist erwünscht, Gleichungen zu haben, in denen nur je 1 Unbekannte vorkommt. Dann wählen wir den Drehpunkt so, daß die beiden andern keinen Hebelarm haben, — im Schnittpunkt ihrer Angriffslinien! Vergl Nr 125 VI; Nr 134 III.

$$\text{Drehpunkt } D: \quad \curvearrowright A \cdot 3,38 = P \cdot 4,39 \curvearrowleft \quad A = 1,299 P$$

$$\text{Drehpunkt } E: \quad \curvearrowright B \cdot 1,47 = P \cdot 1,01 \curvearrowleft \quad B = 0,687 P$$

$$\text{Drehpunkt } F: \quad \curvearrowright (C \cos \gamma) \cdot 1,47 = P \cdot 1,01 \curvearrowleft \quad C = 0,749 P$$

142. Wagen mit Bergstütze. Ein Anhänger (Fig 96 I) steht losgekuppelt auf einem Gefälle 1:8, gegen Abrollen gesichert durch eine Bergstütze C in der Mittelebene des Wagens. Sein Eigengewicht $G = 800$ kg sei zusammengefaßt im Schwerpunkt, in der Mitte zwischen den Achsen. Er ist beladen mit 5 Lasten von je 600 kg in gleichen Abständen nach Fig I. Wie groß sind die Achsdrucke $A B$ und die Stützkraft C ?

I. Die Lasten fassen wir zu einer Resultante $P = 3000$ kg in ihrer Mitte zusammen und berechnen die Maße Fig II, die Winkel und die Komponenten \parallel und \perp Straße:

$$\alpha = 7^\circ 8' \quad P_p = 372 \quad P_s = 2980 \text{ kg}$$

$$\beta = 33^\circ 40' \quad G_p = 99 \quad G_s = 794 \text{ kg}$$

II. Eine Gleichung, die C allein enthält, kommt aus Komponenten \parallel Straße, denn A und B sind \perp Straße:

$$\curvearrowleft C \sin \beta = C_p = P_p + G_p = 372 + 99 \curvearrowright = 471 \text{ kg}$$

$$C = 850 \text{ kg} \quad \curvearrowright C_s = C \cos \beta = 707 \text{ kg}$$

A und B folgen nun aus Momentengleichungen für Drehpunkte auf B bzw A , — am Boden? — in den Achsen? — in der Höhe des Angriffspunkts von C ? — Das ist beliebig!

Drehpunkt bei B am Boden ergibt:

$$\curvearrowright A \cdot 3,2 = P_s \cdot 1,2 - P_p \cdot 1,9 + G_s \cdot 1,6 - G_p \cdot 1,2 + C_s \cdot 1,1 + C_p \cdot 0,9 \curvearrowleft$$

Oder wenn man C am Boden zerlegt:

$$\curvearrowright A \cdot 3,2 = P_s \cdot 1,2 - P_p \cdot 1,9 + G_s \cdot 1,6 - G_p \cdot 1,2 + C_s \cdot 1,7 \curvearrowleft$$

C_p ist ausgefallen. Dafür ist der Hebelarm von C_s größer.

Oder Drehpunkt in der Achse B :

$$\curvearrowright A \cdot 3,2 = P \cdot 1,2 - P_p \cdot 1,5 + G_s \cdot 1,6 - G_p \cdot 0,8 + C_s \cdot 1,1 + C_p \cdot 0,5 \curvearrowleft$$

P_p , G_p , C_p haben alle einen um 0,4 m kleineren Hebelarm. Das hebt sich auf, weil $C_p = P_p + G_p$.

Oder Drehpunkt in Höhe des Angriffspunkts der Stütze:

$$\curvearrowright A \cdot 3,2 = P_s \cdot 1,2 - P_p \cdot 1,0 + G_s \cdot 1,6 - G_p \cdot 0,3 + C_s \cdot 1,1 \curvearrowleft$$

Jetzt ist C_p auch ohne Verlegung ausgefallen.

III. Nach der letzten Auffassung folgen A und B aus Anteilen:

$$\begin{array}{r} \text{Anteil von:} \quad \swarrow 2980 \searrow 372 \swarrow 794 \searrow 99 \nearrow 707 \\ A = 1118 - 116 + 397 - 9 + 243 = 1633 \text{ kg} \\ B = 1862 + 116 + 397 + 9 - 950 = 1434 \text{ kg} \\ A + B = 2980 \quad + 794 \quad - 707 = 3067 \text{ kg} \end{array}$$

IV. C tritt überhaupt nicht auf, wenn man den Schnittpunkt von B und C als Drehpunkt D wählt (2,55 m über Boden):

$$\begin{array}{r} \curvearrowright A \cdot 3,2 = P_s \cdot 1,2 + P_p \cdot 0,65 + G_s \cdot 1,6 + G_p \cdot 1,35 \curvearrowleft \\ A = 1118 + 76 + 397 + 42 = 1633 \text{ kg} \end{array}$$

Für B würde man dann den Schnittpunkt E wählen.

V. Wenn die Resultante von P und G links von diesem Punkt vorbeigehe, so würde B negativ werden. Der Wagen würde sich über die Stütze hinwegheben. — Als Drehpunkt für C würde nach den Regeln von Nr 141 V der Schnittpunkt von A und B gelten. Dieser Schnittpunkt liegt hier im Unendlichen. Dann geht die Momentengleichung über in die Komponentengleichung, mit der wir in I begannen. Vergl Nr 113.

143. Aufgabe (Markise). Die Stangen großer Markisen sind nicht einfach um feste Drehpunkte drehbar. Die Markisen würden sonst herabgelassen zu tief stehen, oder hinaufgezogen zu hoch hinaufreichen. Die Stange ist vielmehr an einer Hülse H (Fig 97) befestigt, die auf einer senkrechten Führungsstange gleitet, und durch einen Lenker L so geführt, daß H beim Herablassen der Markise aufwärts gleitet. Die Belastung des Endes sei $P \downarrow$. Durch das Zugseil Z wird sie aufgezo-gen. Konstruiere und berechne die Stützkräfte HLZ im Verhältnis zu P . — Die Hebelarme können geometrisch berechnet oder aus einer maßstäblichen Zeichnung abgegriffen werden. — Wo auf der Stange muß $\downarrow P$ angreifen, damit keine Kraft in Z erforderlich ist?

144. Aufgabe (Scheibe in Parallelführung). Die Scheibe Fig 98 ist an einer senkrechten Führungsstange mit 2 Hülsen A und B beweg-

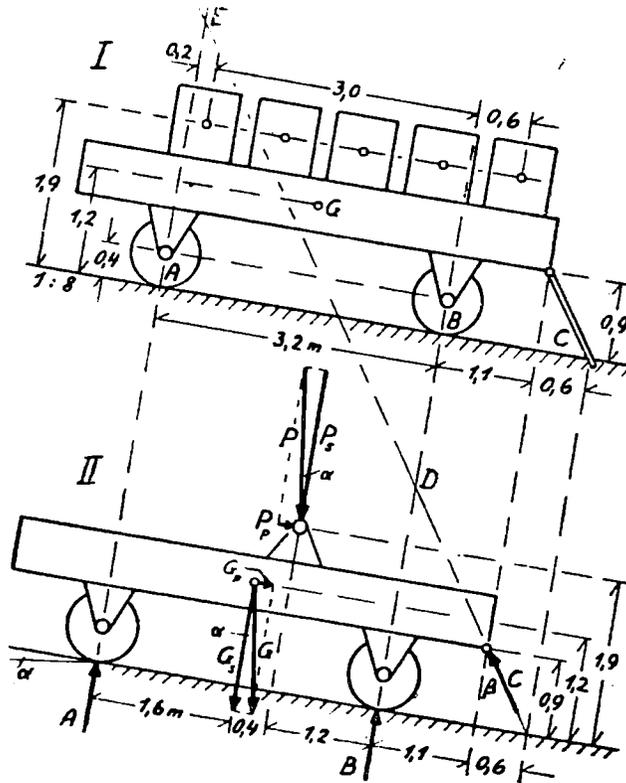
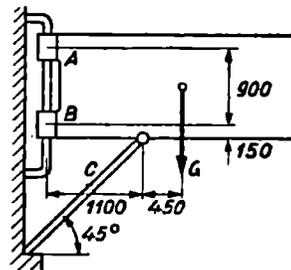
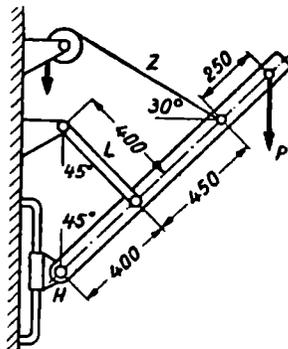


Fig 96. Wagen mit Bergstütze



↑ Fig 98. Scheibe in Parallelführung
← Fig 97. Markise

lich, durch eine schiefe Stange C gestützt und mit $\downarrow G = 40 \text{ kg}$ belastet. Berechne die Stützkräfte. — Bei welchen Stellungen des G wechseln die Kräfte A und B ihr Vorzeichen?

145. Aufgabe (Wagen auf schiefer Ebene). Der Wagen Nr 142 Fig 96 I werde nicht durch die Stütze C gegen Abrollen gesichert, sondern I durch Bremsen an der Hinterachse, — oder II durch Bremsen an der Vorderachse, — oder III durch Steine oder Hemmschuhe unter den Rädern der Hinterachse. Berechne die Stützkräfte.

146. Anzahl der statisch bestimmten Stützkkräfte. I. Beim Gleichgewicht an der Scheibe waren 3 Stützkkräfte statisch bestimmt. Der Scheibe hat nämlich 3 „Freiheitsgrade“ (Nr 104 II): Sie kann \uparrow oder \downarrow , sie kann \rightarrow oder \leftarrow verschoben werden, sie kann \curvearrowright oder \curvearrowleft gedreht werden. Ein Gelenkstab allein, A in Fig 99 I, beschränkt einen Punkt auf eine Linie, der zweite Stab B hält den Punkt ganz fest, der dritte C verhindert die Drehung um den Gelenkpunkt $A B$, wenn er nicht gerade auf diesen selbst zielt. Die 2 Kräfte $A B$ sind gleichwertig mit 1 Kraft von unbekannter Größe und Richtung, also mit 2 unbekannt Komponenten (Nr 141 I). Es sind also, den 3 Freiheitsgraden entsprechend, 3 unbekannte Stützkkräfte bzw Stützkraftkomponenten statisch bestimmt. Mehr als 3 Komponenten waren statisch unbestimmt (Nr 120 V; 135 I). Beim Balken mit nur \downarrow Lasten (Nr 112) wird die \leftarrow Auflagerkomponente $A_x = 0$. Deshalb sind in Nr 114 schon 3 Kräfte statisch unbestimmt.

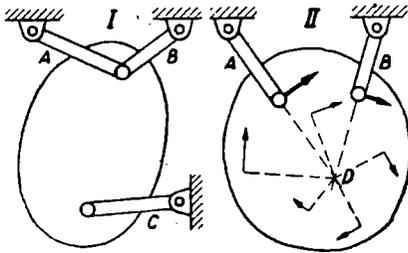


Fig 99. Freiheitsgrade der Scheibe

II. Es ist nicht nötig, daß A und B im selben Punkt angreifen. Auch wenn sie an verschiedenen Punkten angreifen (Fig II), hat die Scheibe noch einen Freiheitsgrad. Sie kann sich noch drehen. — Um welchen Punkt? — Wenn sich eine Scheibe um einen Punkt dreht, so bewegen sich alle andern Punkte \perp Verbindungslinie zum Drehpunkt. Nun bewegen sich die Endpunkte der Stäbe A und B jedenfalls \perp Stab, also liegt der Drehpunkt der Scheibe \perp zu dieser Bewegungsrichtung, in der Verlängerung des Stabes, im Schnittpunkt D der Verlängerungen. — Die Lage dieses Schnittpunkts wechselt mit fortschreitender Drehung. D ist kein fester, sondern nur ein „momentaner Drehpunkt“. Auch hier verhindert ein dritter Stab die Drehung, wenn er nicht gerade durch D geht. So ist in Nr 141 Fig 95 der Punkt F der momentane Drehpunkt der Bewegung, die eintritt, wenn man die Stütze C wegnimmt. Er ist dann auch gerade der „Drehpunkt“ für die Momentengleichung, aus der man C allein berechnet. Ebenso deutet man die Punkte D und E . In Nr 142 tritt nach Wegnahme von C Parallelbewegung ein, Drehung um einen unendlich fernen Drehpunkt. Deshalb folgt C dort aus einer Komponentengleichung:

III. Die 3 Angriffslinien dürfen nicht durch einen Punkt gehen. Sonst wird die Drehung nicht verhindert. Ist C in Nr 141 zu steil, rückt seine Verlängerung immer näher an F heran, so wird die Kraft C unendlich groß. Ist C noch steiler, so wird es negativ. Die Leiter gleitet ab. Je größer das Dreieck DEF , um so größer werden die Hebelarme der Stützkkräfte, um so kleiner die Stützkkräfte.

IV. Die Momentengleichung gilt für jeden beliebigen Drehpunkt, die Komponentengleichung für jede beliebige Richtung. Es dürfen aber nur 3 Gleichungen voneinander unabhängig sein, entsprechend der Anzahl

der statisch bestimmten Unbekannten. Wir beweisen das wie in Nr 113.

An einer Scheibe (Fig 100) wirken allgemein eine Anzahl von Kräften K mit den Komponenten $K_x \rightarrow$ und $K_y \uparrow$, deren Angriffspunkte die Koordinaten $x \leftarrow$ und $y \uparrow$ in Bezug auf einen Drehpunkt D haben. Dann gelten die Gleichungen

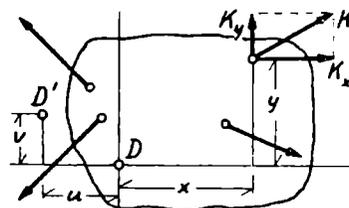


Fig 100. Gleichgewicht der Scheibe

$$\begin{aligned} \text{algebraische Summe der } \rightarrow \text{Komponenten} &= \Sigma K_x = 0 \\ \text{,, ,, ,, } \uparrow \text{ ,,} &= \Sigma K_y = 0 \\ \text{,, ,, ,, Momente um } D &= \Sigma(K_x y - K_y x) = 0 \end{aligned}$$

Dieser allgemeinen Form entsprechen zB die Momente

- Nr 127: $W_y \cdot 3,4 - W_x \cdot 1,8$ Nr 134: $(B \sin \alpha) \cdot 1,9 + (B \cos \alpha) \cdot 0,4$
 Nr 132: $19,73 \cdot 3 + 7,18 \cdot 3,6$ Nr 135: $B_n (l \sin \alpha) + B_s (l \cos \alpha)$
 Nr 141: das Moment von C Nr 142: die Momente von P und G

Nun soll für einen andern Drehpunkt D' gelten

$$M' = \Sigma[K_x(y - v) - K_y(x + u)] = 0$$

Dies folgt nun aus obigen 3 Gleichungen, indem wir die Summe zerlegen:

$$M' = \Sigma[K_x y - K_y x] - v \cdot \Sigma K_x - u \cdot \Sigma K_y$$

Diese 3 Summen sind einzeln Null, also ist auch $M' = 0$. Die Gleichung $M' = 0$ ist also abhängig von obigen 3 Gleichungen. Ausführlich gesagt: Die Hebelarme der K_x vergrößern sich bei einer Verlegung des Drehpunkts alle um denselben Betrag v . Da aber $\Sigma K_x = 0$ ist, so ändern sich die positiven Glieder um ebensoviel wie die negativen. Der Wert des Ausdrucks bleibt also unverändert Null. Vergl Nr 142 II.

147. Resultante. In Nr 71; 102 faßten wir Kräfte am Punkt zu einer Resultante zusammen; in Nr 117 parallele Kräfte; auch in Nr 142 ua. Das dient nicht nur der Vereinfachung der Rechnung. Wir stellen damit auch fest, wo ein Körper unterstützt werden muß, wenn er in nur 1 Punkt drehbar aufgehängt werden soll.

An der Scheibe Fig 101 wirken 4 schiefe Kräfte. Gegeben sind ihre Größe K , ihre Richtung α und die Koordinaten $x y$ ihres Angriffspunkts, gemessen von dem Angriffspunkt von K_3 aus (Tabelle).

Nr	K	α	x	y	$K_x \rightarrow$	$K_y \uparrow$	$K_x y \curvearrowright$	$-K_y x \curvearrowright$
—	kg	—	mm	mm	kg	kg	kgmm	kgmm
1	84	25°	+79	+22	+76,1	+35,5	+1675	-2805
2	76	330°	-15	+55	+65,8	-38,0	+3620	-570
3	62	165°	—	—	-59,9	+16,0	—	—
4	51	235°	+94	-16	-29,3	-41,8	+469	+3927
Σ	—	—	—	—	+52,7	-28,3	\rightarrow	+6316

I. Die Ersatzkraft muß die gleichen Stützkräfte zur Folge haben, wie die Einzelkräfte. Nun werden die Stützkräfte aus Komponenten- und Momentengleichungen berechnet. Also muß sein

$$\begin{aligned} \text{Komponente der Ersatzkraft} &= \Sigma \text{Komponenten der Einzelkräfte} \\ \text{Moment der Ersatzkraft} &= \Sigma \text{ Momente der Einzelkräfte} \end{aligned}$$

In der Tabelle sind hiernach berechnet

$$\begin{aligned} \text{die Komponenten} \quad \rightarrow R_x &= \Sigma K_x = \Sigma K \cos \alpha = 52,7 \text{ kg} \\ \uparrow R_y &= \Sigma K_y = \Sigma K \sin \alpha = -28,3 \text{ kg} \end{aligned}$$

auch übereinstimmend mit der Konstruktion Fig II,

und das Moment $\curvearrowright M = \Sigma [K_x y - K_y x] = 6316 \text{ kgmm}$
für den Angriffspunkt von K_3 als Drehpunkt.

Daraus folgt: Richtung der Resultante = $28^\circ 14'$ abwärts
Größe = $R = 59,8 \text{ kg}$ Hebelarm = $h = M/R = 105,6 \text{ mm}$

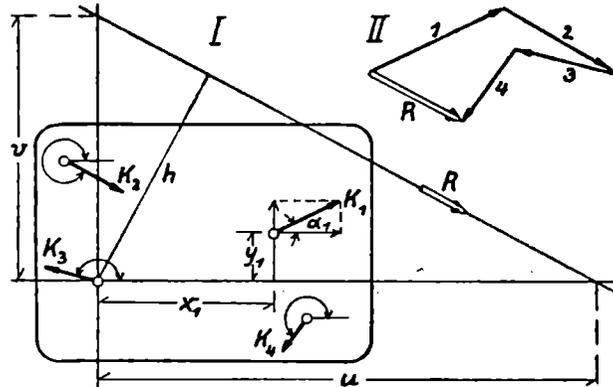


Fig 101. Resultante schiefer Kräfte

II. Die Angriffslinie ist am einfachsten zu zeichnen, wenn man die Abschnitte u v auf den Koordinatenachsen kennt. — Verlegt man R auf ihrer Angriffslinie an eine Achse, so wirkt nur eine Komponente drehend (Nr 134 II). Wir berechnen so gerade u bzw v einzeln:

$$u = M/(-R_y) = 223,2 \quad v = M/R_x = 11,98 \text{ mm}$$

III. Die Angriffslinie geht außerhalb der Angriffspunkte der Einzelkräfte vorbei. In der Tat haben die Einzelkräfte noch für Punkt 1 ein \curvearrowright Moment. Deshalb muß R für 1 ebenfalls ein \curvearrowright Moment haben. — Oder: Die Einzelkräfte wirken einander zT entgegen, so daß R im Verhältnis zu den K klein wird, während die Momente für Drehpunkt 3 einander nicht in dem Maße aufheben. Deshalb muß der Hebelarm h groß werden.

IV. Für die Berechnung von Stützkräften braucht man die Resultante der gegebenen Kräfte nicht vorher zu berechnen (Nr 130). Will man aber die Scheibe durch nur 1 Punkt stützen, so muß dieser auf der berechneten Angriffslinie liegen.

148. Aufgabe (Resultante). I. Berechne die Lage der Resultante der Kräfte von Fig 102, die teils ↓ teils ↑ gerichtet sind. — II. Berechne die Auflagerkräfte A und B aus R; III. aus den Einzelkräften. — IV. Der Balken soll durch nur 1 Lager unterstützt werden? Wo muß es liegen?

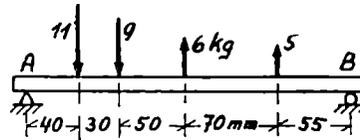


Fig 102. Resultante entgegengesetzter Kräfte

149. Sonderfall. I. Die Resultante gleichgerichteter Kräfte liegt zwischen beiden, näher der größeren (Fig 103 I). Die Resultante entgegengerichteter Kräfte liegt außerhalb derselben, auf der Seite der größeren. Der Balken müßte ja auch außerhalb unterstützt werden. Je mehr die Kräfte einander entgegengesetzt gleich werden, um so kleiner wird R, um so weiter rückt es fort. Das Moment für den oberen Kraftangriffspunkt muß ja immer dasselbe bleiben. — Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte kann man überhaupt nicht mehr durch eine ersetzen. R ist Null geworden und ins Unendliche gerückt. Das Moment aber bleibt bestehen. Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte muß man unersetzt stehen lassen. Man nennt sie ein „Kräftepaar“. Es besteht auch kein Gleichgewicht. Der Balken kann auch nicht durch nur ein Lager gestützt werden.

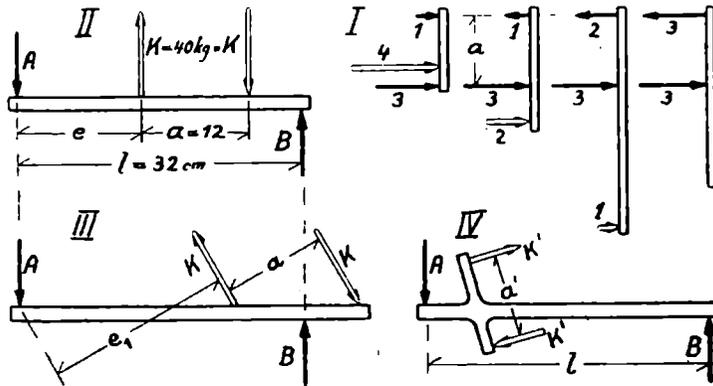


Fig 103. Lage der Resultante, Kräftepaar

II. Ist ein Balken mit einem solchen Kräftepaar belastet (Fig II), so folgen die Auflagerkräfte aus

$$\curvearrowleft Bl = K(e + a) - Ke = Ka \curvearrowright \quad \downarrow A = B + K - K = B \uparrow$$

also $B = Ka/l = 40 \cdot 12/32 = 15 \text{ kg} = A$

Auch die Auflagerkräfte sind also einander entgegengesetzt und gleich, ein Kräftepaar. — Das Gleichgewicht ist unabhängig von e, von der Lage des Paares. Man kann es verschieben, auch drehen (Fig III), immer ist das

$$\text{Moment des Paares} = M = K(e_1 + a) - Ke_1 = Ka = 480 \text{ kgcm}$$

= Kraft mal Abstand unabhängig vom Drehpunkt

Auch wenn man die Kräfte vergrößert und den Abstand im umgekehrten

Verhältnis verkleinert (zB Fig IV: $K' = 48 \text{ kg}$ $a' = 10 \text{ cm}$), so daß $M = 480 \text{ kgcm}$ bleibt, so bleiben die Auflagerkräfte, unverändert.

Ein Kräftepaar darf man verschieben, drehen, „verzerren“, ohne seine Wirkung zu ändern, wenn nur Ka dasselbe bleibt.

Es fordert zum Gleichgewicht ein anderes entgegengedrehendes Paar

$$\curvearrowright Al = Ka \curvearrowleft \quad 15 \cdot 32 = 40 \cdot 12 = 48 \cdot 10 = 480 \text{ kgcm!}$$

150. Kräfte, deren Resultante Null ist. Nicht nur bei 2 entgegengesetzt gleichen Kräften verschwindet die Resultante. Auch bei mehreren Kräften kann sie Null werden. — An der Scheibe Fig 104 I wirken 5 gleiche Kräfte je $P = 90 \text{ kg}$ am Umfang eines Kreises von 150 mm Radius in gleichen Winkelabständen tangential. Die Scheibe wird gestützt durch 2 Lager A, B , von denen eines als Schlitzloch gestaltet ist; statisch bestimmt! B ist \perp Schlitz.

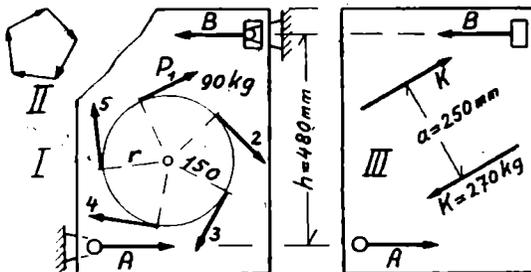


Fig 104. Scheibe mit Kräftepaar belastet

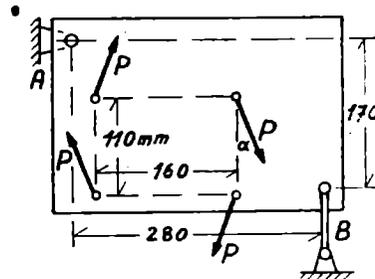


Fig 105. Scheibe mit Kräftepaar

Die Resultante der P verschwindet und demnach alle Komponentensummen. A muß entgegengesetzt und gleich B werden. Das Moment der P ist für den Mittelpunkt des Kreises $M = 5 Pr = 6750 \text{ kgcm} \curvearrowright$

Es ist für jeden andern Drehpunkt ebensogroß. Weil nämlich die Komponentensummen verschwinden, so werden bei einer Verschiebung des Drehpunkts die \curvearrowright Momente zusammen um ebensoviel größer wie die \curvearrowleft . Der Gesamtwert des Momentes M ändert sich also nicht. Vergl die Beweise Nr 146 IV; 149 II. Das Kräftepaar A, B muß das entgegengesetzte Moment haben $\curvearrowright Ah = 5 Pr \curvearrowleft \quad A = 6750/48 = 140,6 \text{ kg} = B$

Die Gleichung ist unabhängig von der Wahl eines Drehpunkts.

Kräfte, deren Resultante Null ist, verhalten sich wie ein Kräftepaar. Sie können ersetzt werden durch ein Paar von gleichem Moment (Fig III)

$$M = Ka = 6750 \text{ kgcm} \quad \text{zB} \quad a = 250 \text{ mm} \quad K = 270 \text{ kg}$$

irgendwo auf der Scheibe.

151. Aufgabe (Resultante Null). An der Scheibe Fig 105 wirken 4 gleiche Kräfte je $P = 25 \text{ kg}$ je unter $\alpha = 22^\circ$ gegen die Vertikale. Die Scheibe ist gestützt durch ein festes Lager A und eine senkrechte Pendelsäule B . Die Lage des Kraftsystems der P zu den Lagern ist belanglos. Berechne A und B .

152. Verschiebung einer Last. Auf dem Balken Nr 112 Fig 70 wird das Gewicht 800 kg um 0,5 m \leftarrow verschoben. Dann wird A größer, B um ebensoviel kleiner. Zu berechnen die neuen Werte $A_n B_n$.

I. Man braucht A und B nicht neu zu berechnen, denn der Einfluß der andern Lasten bleibt unverändert. Nur das Moment der 800 kg ändert sich für jeden Drehpunkt um $\curvearrowright 800 \cdot 0,5 = 400 \text{ kgcm}$
Also wird A größer B kleiner um $800 \cdot 0,5 / 3,2 = 125 \text{ kg}$

$$A_n = 611,6 \text{ kg} \quad B_n = 678,4 \text{ kg}$$

II. Man kann das auch so darstellen: Die Verschiebung des Gewichts G (Fig 106) um $v \leftarrow$ wirkt so, als ob man G durch G' aufhebt und G'' dafür hinstellt, als ob man den bestehenden Lasten ein Kräftepaar $G' G''$ hinzufügt. Dieses Paar fordert zum Gleichgewicht ein andres Paar DD , die Vergrößerung von A und die Verkleinerung von B , so daß

$$\curvearrowright D l = G v \curvearrowleft \quad D = G v / l = 800 \cdot 0,5 / 3,2 = 125 \text{ kg}$$

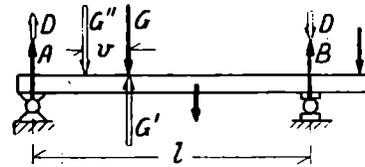


Fig 106. Verschiebung einer Last

153. Aufsteigen auf Leiter. Auf der Leiter Nr 130 Fig 88 I steigt $Q = 70 \text{ kg}$ um $s = 0,7 \text{ m}$ aufwärts, längs der Leiter gemessen (Fig 107). Wie groß sind die neuen Stützkräfte $A_n B_n$?

Verschiebung von Q ist Hinzutreten eines Kräftepaars vom Moment Kraft mal Projektion des Abstands = Kraftkomponente mal Abstand
 $= Q s \cos \alpha = 70 \cdot 0,7 \cos 65^\circ = 20,7 \text{ kgm}$

Die Stützkraft B bleibt \perp Leiter. Also ist auch die Änderung $D \perp$ Leiter. Die Änderung von A ist das entgegengesetzte D . Das neue A_n ist die Resultante aus dem alten $\curvearrowleft A$ und dem $\curvearrowright D$.

$$\begin{aligned} \text{Hiernach ist} \quad D &= 20,7 / 3,6 = 5,8 \text{ kg} \\ B_n &= 57,7 + 5,8 = 63,5 \text{ kg} \\ A_{xn} &= 52,3 + 5,2 = 57,5 \text{ kg} \\ A_{yn} &= 190,6 - 2,4 = 188,2 \text{ kg} \\ \text{oder} \quad A_{sn} &= 33,1 - 5,8 = 27,3 \text{ kg} \\ A_{pn} &= 195,0 \text{ kg unverändert} \end{aligned}$$

154. Aufgabe (Absteigen auf Leiter). Auf den Leitern Nr 131 Fig 88 II III steigt P um 0,4 m längs Leiter gemessen abwärts. Berechne die neuen Stützkräfte.

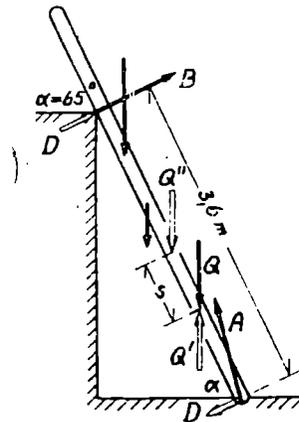


Fig 107. Aufsteigen auf der Leiter

155. Verschiebung der Resultante. In Nr 147 Fig 101 werde der Angriffspunkt von $K_1 \uparrow$ verlegt um $\Delta y = 30$. (Neue Ordinate = 52 mm.)

I. Größe und Richtung von R wird dadurch nicht geändert (Fig 101 II). Aber das \curvearrowright Moment wird dadurch vergrößert um $K_x \Delta y = 76,13 \cdot 30 = 2284 \text{ kgmm}$ für jeden Drehpunkt

Die neue Resultante R_n ist also \parallel und $= R$, aber gegen die alte verschoben (Fig 108I) um

$$v = \text{Hebelarmvergrößerung} = \frac{\text{Momentvergrößerung}}{\text{Kraft}} = \frac{2284}{59,8} = 38,2 \text{ mm}$$

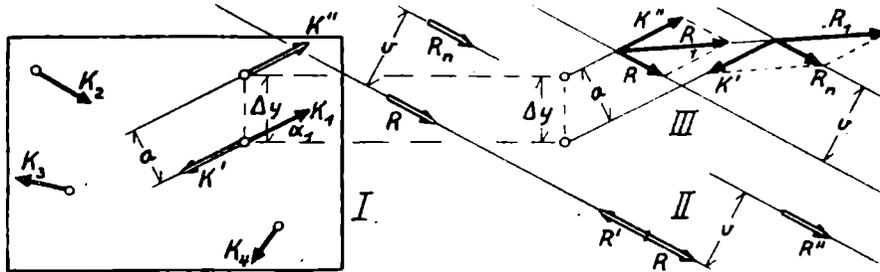


Fig 108. Verschiebung der Resultante

II. Die Verlegung von K_1 bedeutet (Fig I), daß dem bestehenden Kraftsystem ein Kräftepaar $K' K''$ hinzugefügt wird (Nr 152 II; 153). Das eben gibt für jeden Drehpunkt dieselbe Momentvergrößerung (Nr 149 II). — Die bestehenden Kräfte sind zusammengefaßt in der alten Resultante R . Gefragt ist also nach der Resultante aus der Kraft R und dem Kräftepaar $K' K''$. Auch das kann man so darstellen (Fig II), daß zu R ein Paar $R' R''$ hinzugefügt wird, das dem $K' K''$ gleichwertig ist, durch Verschieben Drehen Verzerren aus ihm hervorgegangen (Nr 149 II).

$$\curvearrow Rv = \text{Moment des Paares} = Ka \curvearrow = K \Delta y \cos \alpha = 2284 \text{ kgmm} \curvearrow$$

$$\text{Verschiebung} = v = \text{Moment/Resultante} = 2284/59,8 = 38,2 \text{ mm}$$

Verlegung einer Kraft (K) ist Hinzufügung eines Kräftepaars ($K' K''$). Und Hinzufügung eines Kräftepaars ($K' K''$) zu einer Kraft (R) ist Verschiebung der Kraft bei unveränderter Größe und Richtung um den Betrag: Moment des Kräftepaars ($K' K''$) durch Kraft (R).

III. Wir konstruieren die Resultante aus Kraft R und Kräftepaar $K' K''$ (Fig III): Wir vereinigen R und K'' am Schnittpunkt ihrer Angriffslinien zu einer Resultante R_1 . Diese vereinigen wir mit K' zur Resultante R_n , die dadurch \parallel und $= R$ und um v verschoben erscheint.

IV. Bei der Rolle Nr 120 IV Fig 79 bedeutet die Verlegung von A an die Achse Hinzufügung eines \curvearrow Kräftepaars, die Verlegung von B an die Achse Hinzufügung eines \curvearrow Moments. Die beiden Paare heben einander auf. Die Verlegungen sind also zulässig: (A) und (B) sind gleichwertig mit A und B . (Vergl auch Nr 127 I.)

156. Statik als Gleichgewicht von Kräftepaaren. Bei jeder Gleichgewichtsaufgabe gelten die Komponentengleichungen. Die Kräftecke sind geschlossen. Zu jeder Kraft besteht irgendwo eine entgegengesetzte. Eine Kraft geht nicht verloren, sondern wird irgendwo „aufgenommen“, in den Punkten, in denen der Körper gelagert ist. Danach muß es immer möglich sein, die bestehenden Kräfte zu Paaren zusammenzufassen, die dann miteinander im Gleichgewicht sein müssen, nach Nr 149.

I. Beim Drehkran (Fig 109 I) ist das $\downarrow P$ durch das $\uparrow A_y$ gestützt, „aufgenommen“. Das ist noch kein Gleichgewicht. Sie bilden ein \curvearrowright Kräftepaar und fordern zum Gleichgewicht ein \curvearrowleft Kräftepaar, die Stützkraft $\leftarrow B$, die selbst wieder durch das $\rightarrow A_x$ aufgenommen wird. Dann ist

$$\curvearrowleft \text{Paar } BA_x = \curvearrowright \text{Paar } PA_y \quad \curvearrowleft Bh = Pa \curvearrowright$$

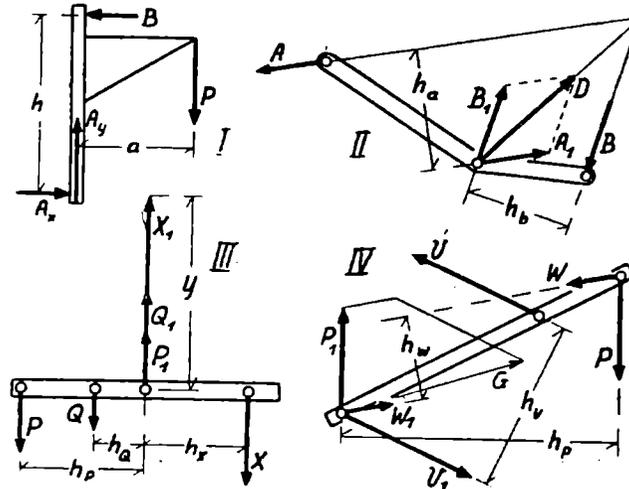


Fig 109. Gleichgewicht von Paaren

II. Beim Winkelhebel (Fig II) ist D als Resultante von $A_1 = A$ und $B_1 = B$ aufzufassen. Dann ist

$$\text{Links-drehendes Paar} = \text{Rechts-drehendes Paar} \quad \curvearrowleft Ah_a = Bh_b \curvearrowright$$

III. Beim einfachen Hebel (Fig III) mit mehreren Lasten denkt man sich die Stützkraft Y im Lager zerlegt in $P_1 + Q_1 + X_1$. Dann ist auch hier Zusammenstellung von Paaren möglich: $\curvearrowleft Xh_x = Ph_p + Qh_q \curvearrowright$

IV. Beim Ladebaum (Fig IV) denken wir uns den Gelenkdruck G als Resultante von $P_1 W_1 V_1$. Dann ist $\curvearrowleft Vh_v = Ph_p - Wh_w \curvearrowright$

wobei ohne Rücksicht auf einen „Drehpunkt“ die Hebelarme als gegenseitiger Abstand der Kräfte des Paares gelten, als Abstand jeder Kraft von dem Lager, in dem sie aufgenommen und weitergeleitet wird. — Die Paare müssen dann einander aufheben.

157. Statik unter dem Gesichtspunkt der Kraftverlegung. Man kann, wie immer, statt von den Stützkräften auch von den weitergegebenen Kräften sprechen, kann sagen, daß die Kräfte in den Beispielen von Fig 109 an den festen Drehpunkt „verlegt“ sind (Fig 110).

Überhaupt ist es Aufgabe der Technik, Lasten zu verlegen: Lasten müssen gestützt, aufgenommen werden. Das geschieht am einfachsten, indem man ein Fundament unmittelbar darunter setzt. Will man aber unter der Last Platz haben, so muß man Brücken, Krane, Maschinenständer bauen. Soviel Platz man braucht, so groß muß die Spannweite,

die Ausladung sein. Zweck solcher Bauwerke ist also, Lasten durch seitlich liegende Lager zu stützen, sie auf seitlich liegende Lager zu verlegen.

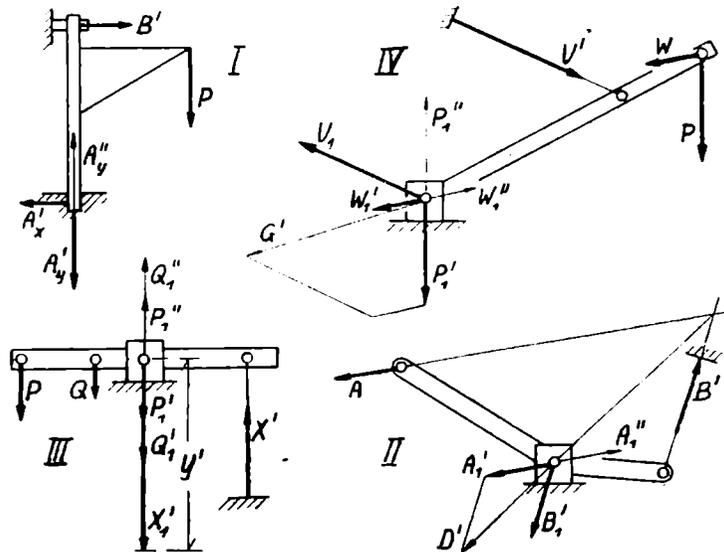


Fig 110. Kraftverlegung

I. Beim Drehkran (Fig 110 I) soll P als A_y' im festen Lager aufgenommen werden. Dieser Verlegung ist ohne weiteres nicht möglich. Denn die Verlegung einer Kraft ist ohne Störung des Gleichgewichts nur auf ihrer Angriffslinie zulässig. Es müssen also noch andere Kräfte als Wirkungen von P auftreten. Die Aufgabe ist also, die gegebenen Lasten so zu verlegen, daß sie durch gleichwertige weitergegebene Kräfte an den Lagerstellen ersetzt sind. — Man muß das erstrebte, aber unzulässige A_y' zunächst wieder aufheben durch A_y'' . Dann kann man sagen, P sei ersetzt durch $PA_y'A_y''$: durch die verschobene Kraft A_y' und das Paar PA_y'' . Letzteres dreht und verzerrt man dann nach Nr 149 in das Paar $B'A_x'$. So hat man P umgewandelt in gleichwertige Wirkungen auf die Lagerstellen: in die Spurlagerbelastung A_y' und das Paar $A_x'B'$ an den Zapfen.

II. Beim Winkelhebel (Fig II) ist die Kraft A die Ursache. Ihre Wirkungen sind der Druck B' auf die andere Gelenkstange und der Lagerdruck D' , zusammengesetzt gedacht aus $A_1'B_1'$. Auch hier ist dann A zerlegt in, weitergeleitet als verschobene Kraft A_1' und Kräftepaar $B'B_1'$.

III. Beim Hebel (Fig III) sind den gegebenen Lasten PQ gleichwertig die verlegten Kräfte $P_1'Q_1'$ und das Paar XX_1' .

IV. Beim Ladebaum (Fig IV) sind P und W die Ursache; ihnen gleichwertig die verschobenen Kräfte $P_1'W_1'$ und das Paar $V_1'V_1'$ als ihre Wirkungen. $P_1'W_1'V_1'$ werden zum Gelenkdruck G' zusammengefaßt.

V. Auf die Aufgaben mit 3 Stützkräften an verschiedenen Angriffspunkten läßt sich diese Auffassung nicht ohne Zwang anwenden. Hier bleibt es bei der Zerlegung von Nr 141 III.

160. Zusammenfassung. 3 Stützkkräfte an der Scheibe sind statisch bestimmt. Sie können an 3 verschiedenen Punkten angreifen. Ihre Konstruktion folgt aus Schnittpunktsatz und Krafteck (Culman). Berechnet werden auch diese Aufgaben aus Komponenten- und Momentengleichungen. 3 Gleichungen sind unabhängig voneinander. Die Drehpunkte wählt man oft zweckmäßig im Schnittpunkt zweier Kräfte.

Die Resultante eines Belastungssystems berechnet man so, daß sie dieselben Komponenten und Momente hat, wie die Einzelkräfte zusammen. Dann sind die Stützkkräfte die gleichen.

Dabei besteht ein Sonderfall, wenn die Komponentensummen verschwinden, ohne daß die Momentensumme Null wird. Dann ist kein Ersatz durch eine einzige Kraft möglich, sondern nur durch ein Kräftepaar. Das Moment eines Kräftepaars ist = Kraft mal Abstand, unabhängig vom Drehpunkt, seine Wirkung unabhängig von Verschiebung, Drehung und Verzerrung. Kraft und Kräftepaar sind gleichwertig mit einer verschobenen Kraft. Von diesen Eigenschaften kann man bei Gleichgewichtsaufgaben Gebrauch machen.

VII. Graphische Statik: Seileck Fachwerk

161. Resultante mehrerer Kräfte. Das Gleichgewicht dreier Kräfte zeichnen wir nach Schnittpunktsatz und Kraftdreieck (Nr 119 IV). Treten mehrere gegebene Kräfte auf, so kann man sie vor der Konstruktion der Stützkkräfte durch eine Resultante ersetzen.

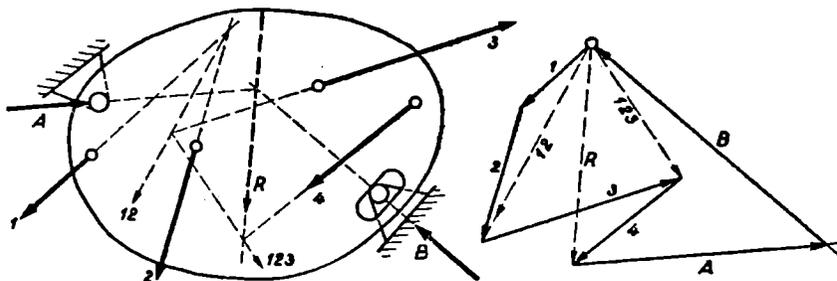


Fig 111. Konstruktion der Resultante und ihrer Angriffslinie

Die Scheibe Fig 111 ist mit 4 Kräften belastet, in 2 Punkten durch A und B gestützt. Bei B ist ein Schlitzloch angeordnet, um die Aufgabe statisch bestimmt zu machen. Die Richtung des Schlitzes ist willkürlich, sie darf nur nicht $\perp AB$ sein.

I. Wir verlegen zunächst die Kräfte 1 und 2 an den Schnittpunkt ihrer Angriffslinien und bilden dort R_{12} . Ebenso R_{123} aus R_{12} und Kraft 3. Ebenso schließlich die endgültige Resultante R .

In Fig 111 sind die Parallelogramme an den Schnittpunkten unterdrückt. Die Teilresultanten sind in einem Kräfteplan gebildet. Im „Lageplan“ sind nur die Angriffslinien und die Schnittpunkte eingetragen.

II. Um nun die Stützkkräfte A und B zu konstruieren, wird R zum Schnitt mit B gebracht. Dorthin zielt A . Schließlich ergibt sich die Größe von A und B im Kräfteplan.

III. Die Scheibe ist auch dann im Gleichgewicht, wenn sie in einem, auf der Angriffslinie von R gelegenen Punkt unterstützt wird.

162. Resultante nahezu paralleler Kräfte. Die Schnittpunkte von Fig 111 werden nicht immer aufs Zeichenpapier fallen. Der Schnittpunktsatz versagt ganz, wenn die Kräfte einander parallel sind. In Fig 112 soll die Resultante R der nahezu parallelen Kräfte 1 2 3 4 gebildet werden. — Wie soll man nun zu Schnittpunkten gelangen? —

I. Wir wählen eine schief zu den gegebenen Kräften liegende Zusatzkraft Z , vereinigen mit ihr der Reihe nach die Kräfte 1 2 3 4 nach Nr 161 und fügen zum Schluß eine Kraft Z' an, die zu Z entgegengesetzt und gleich ist und mit ihr in einer Linie liegt, die also Z wieder aufhebt. Diese Resultante $Z 1 2 3 4 Z'$ ist nach Größe, Richtung und Lage das gesuchte R . — Aus R würden dann Stützkkräfte wie in Fig 111 folgen.

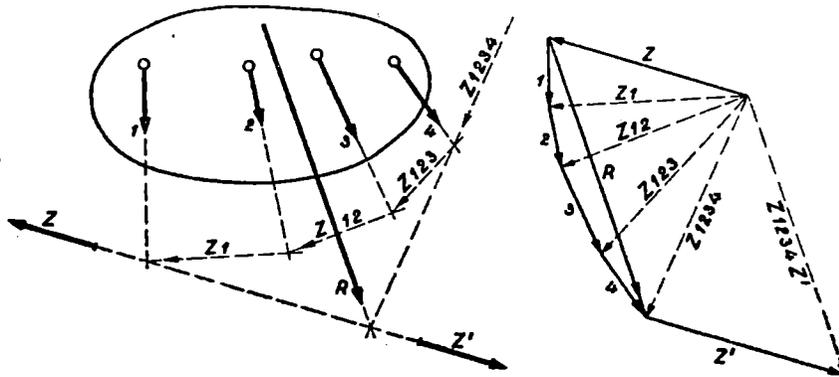


Fig 112. Resultante nahezu paralleler Kräfte

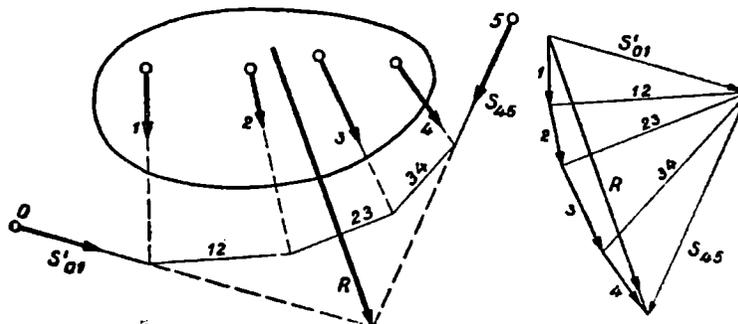


Fig 113. Resultante aus Selleck

II. Der so nach Nr 161 entstehende Kräfteplan und der Zug der Angriffslinien der Teilresultanten erinnern an die Konstruktion des Seilecks.

Aus Fig 112 folgt also die Regel: Die Resultante mehrerer Kräfte geht durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstränge eines beliebigen Seilecks, welches die Einzelkräfte verbindet.

III. Das kann auch aus der Vorstellung des Seilecks heraus begründet werden (Fig 113, vergl Nr 86): Die Kräfte S_{01}' und S_{45} , die in den äußersten Seilsträngen wirken, sind die Belastungen der Aufhängepunkte, die Wirkungen der gegebenen Kräfte und insofern ihnen gleichwertig. Die Resultante von S_{01}' und S_{45} , die durch ihren Schnittpunkt geht, ist daher ebenfalls gleichwertig: Resultante der gegebenen Kräfte.

Oder: R , an den äußersten Seilsträngen hängend, hat dieselben Belastungen der Aufhängepunkte zur Folge, wie die Kräfte 1 2 3 4; ist also ihr Ersatz.

Oder: Jede Kraft an den Knotenpunkten des Seilecks wird nach Nr 59 zerlegt in die in den angrenzenden Strängen wirkenden Seilkräfte. Die Kräfte in den inneren Seilsträngen heben einander auf; die in den äußersten bleiben übrig. Sie sind die Belastungen der Aufhängepunkte und werden zur Resultante R zusammengefaßt-

163. Aufgabe (Leitern). Konstruiere die Resultante der Belastungen der Leitern Nr 130; 131 Fig 88 I II; danach die Stützkkräfte.

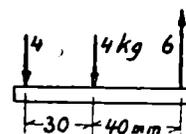


Fig 114. Konstruktion des Auflagerorts

164. Aufgabe (Auflagerbestimmung). Der Balken Fig 114 ist mit 3 senkrechten Kräften belastet. Konstruiere den Punkt, in dem er durch ein einziges Auflager unterstützt werden kann.

165. Kräfte, deren Resultante nahezu oder ganz Null ist. Die Kräfte 1 2 3 4 von Fig 115 heben einander der Größe nach fast auf. Es bleibt nur eine kleine Resultante R übrig. Aber selbst wenn R ganz verschwände, bestünde nicht etwa notwendigerweise Gleichgewicht. Die Kräfte können die Scheibe noch drehen, im Beispiel \curvearrowright .

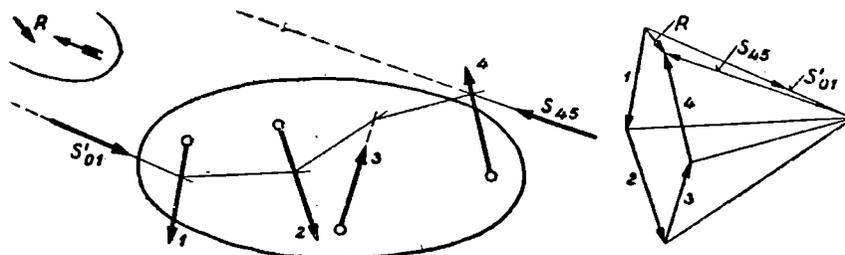


Fig 115. Resultante bei nahezu geschlossenem Kräfteck

Konstruiert man das Seileck, so werden die äußersten Seilstränge nahezu parallel zueinander. Ihr Schnittpunkt liegt also weit weg. — Je kleiner

R wird, um so weiter rückt seine Angriffslinie hinaus. Die drehende Wirkung kann dabei bestehen bleiben. — Bei geschlossenem Krafteck, $R = 0$, ist es also nicht mehr möglich, für die Einzelkräfte eine Resultante, eine einzige Ersatzkraft, zu finden.

Wir können aber nach Nr 162 III die in den äußersten Seilsträngen wirkenden Seilkräfte S_{01}' und S_{45} als Ersatz ansehen. Diese werden im Grenzfall einander entgegengesetzt und gleich. — Kräfte, deren Resultante nicht mehr aufs Zeichenpapier fällt, können also wenigstens durch 2 Kräfte ersetzt werden. — Kräfte, deren Resultante ganz Null ist, können überhaupt nicht mehr durch eine Kraft, wohl aber durch 2 einander entgegengesetzte gleiche Kräfte, durch ein „Kräftepaar“ ersetzt werden.

Je nach der Wahl des Pols und des ersten Seilstranges gibt es viele Ersatzkräftepaare, kleine Kräfte in großem Abstand, große in kleinem, von beliebiger Richtung, jedenfalls aber im Beispiel \curvearrowright .

166. Gleichgewicht. Kräfte, deren Resultante Null ist, können überdies auch miteinander im Gleichgewicht sein. Dann müssen die Kräfte S_{01}' und S_{45} des ersetzenden Paares (Fig 115) einander aufheben. Die äußersten Seilstränge müssen in eine Linie fallen.

Wir bilden ein Beispiel dafür: Wir berechnen nach den Maßen von Fig 116 zwei der 4 Kräfte als Auflagerkräfte für die beiden anderen. Oder wir berechnen Ort und Größe einer der Kräfte als Resultante der anderen oder konstruieren sie nach Nr 162.

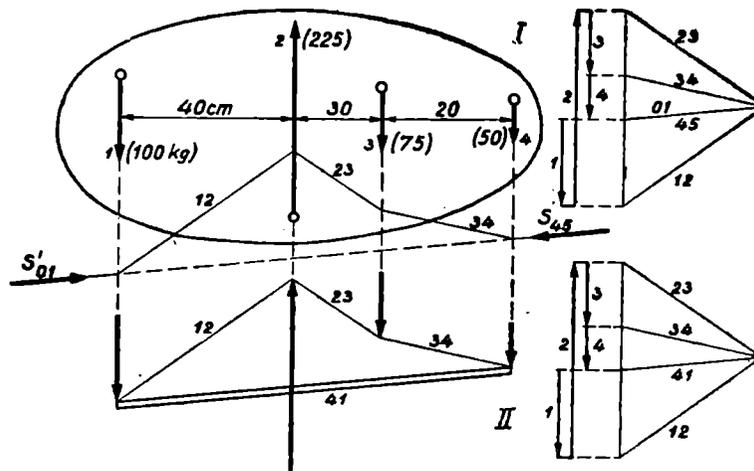


Fig 116. Gleichgewicht (in I sind die Maße 30 und 20 vertauscht)

Zeichnen wir nunmehr das Seileck für die 4 Kräfte (Fig I), so stellt man fest, daß tatsächlich die Endstränge in eine Linie fallen.

Das Seil bedarf dann keiner Aufhängpunkte mehr. Wir können in der Linie $01 = 45$ einen Stab anordnen (Fig II). Dieses geschlossene Stabsystem ist unter den 4 Kräften freischwebend im Gleichgewicht. Die schließende Linie erhält dann sinngemäß die Bezeichnung 41.

Regel: Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht, wenn außer dem Krafteck auch das Seileck „geschlossen“ ist.

Ein geschlossenes Seileck ist unter den an ihm angreifenden Kräften freischwebend im Gleichgewicht. Ein „offenes Seileck“ wie Fig 113; 115 bedarf der Aufhängepunkte. — Man läßt die Kräfte, statt an der Scheibe, an einem Seileck im Gleichgewicht sein. Für das Gleichgewicht kommt es auf den Körper nicht an, nur auf die Kräfte und ihre Angriffslinien.

167. Auflagerkräfte für parallele Lasten. Diese Bedingung des Gleichgewichts können wir zur Konstruktion ausnutzen. — Der Balken Fig 117 I ist links durch Kipplager (Gelenk!), rechts durch Rollenlager (= Halslager = Schlitzloch = Gelenkstange) gestützt und mit 3 Kräften belastet. Die Stützkkräfte zu konstruieren.

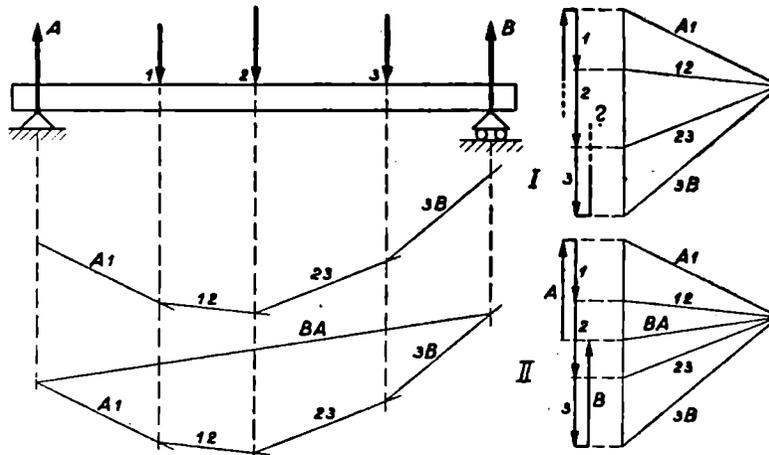


Fig 117. Auflagerkräfte für parallele Lasten

Alle 5 Kräfte $A\ 1\ 2\ 3\ B$ sollen miteinander im Gleichgewicht sein. — Krafteck und Seileck sollen geschlossen sein. — Wir tragen die 3 gegebenen Kräfte aneinander an. Vor 1 soll A , hinter 3 soll B anschließen. Länge der Pfeile noch unbekannt. Wir wählen einen Pol und ziehen die Seilstrahlen. Strahl BA noch unbekannt. Wir ziehen die Seilstränge von $A1$ bis $3B$. — Nach Nr 166 ergibt sich nun BA als schließende Linie („Schlußlinie“) (Fig II). Parallel hierzu ziehen wir den noch fehlenden Seilstrahl BA und können dann die Größe von A und B abmessen.

168. Aufgabe (Auflagerkräfte). Konstruiere A und B in Fig 70; — X und Y in Fig 69. — Konstruiere die Stützkkräfte der Leiter Fig 88 III, bei der die Konstruktion Nr 161 II versagt. (Vergl Nr 163.)

169. Auflagerkräfte bei schiefen Belastungen. Bei dem Brückenträger Fig 118 ist von der Kraft A im Kipplager auch die Richtung unbekannt. Die Pendelsäule B ist einem Rollenlager gleichwertig.

Von dem Krafteck $A\ 1\ 2\ 3\ B$ zeichnen wir $1\ 2\ 3$ und anschließend $B\uparrow$ senkrecht von unbekannter Länge. A muß dann das Krafteck schließen.

Ziehen wir nun zu den bekannten Seilstrahlen $A1$ bis $3B$ die Parallelen, in beliebiger Höhe beginnend, so bleibt der Schnittpunkt von $A1$ mit A unbestimmt (unteres Seileck), weil die Richtung von A nicht bekannt ist. — Wir legen deshalb den Seilstrang $A1$ durch das feste Lager. Dann liegt der Schnittpunkt in A , unabhängig von der Richtung von A . Wir können nun die Schlußlinie BA ziehen. Die Parallele dazu im Kräfteplan schneidet auf B dessen Länge ab. A schließt das Krafteck.

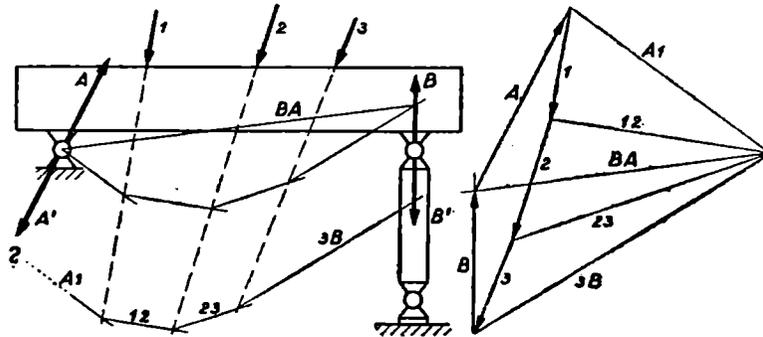


Fig 118. Auflagerkräfte bei schiefen Lasten

170. Aufgabe (Brückenträger). Wie ändert sich die Konstruktion von Nr 169, wenn links das Rollenlager, rechts das Kipplager ist?

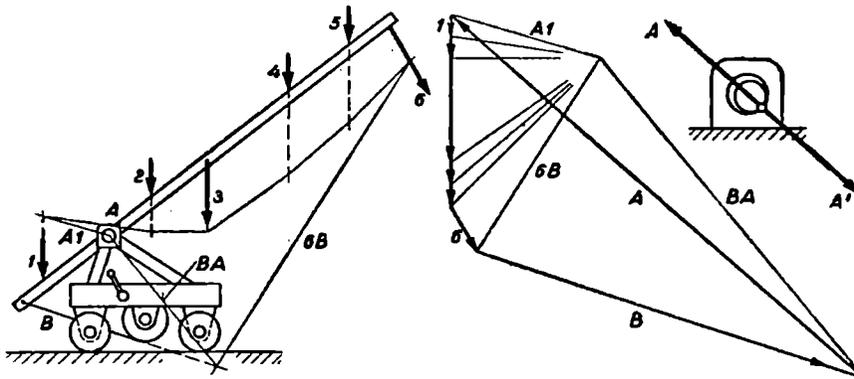


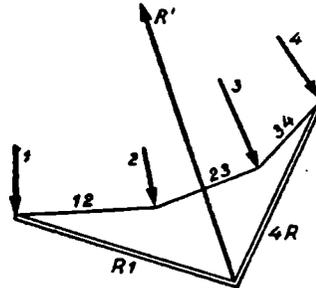
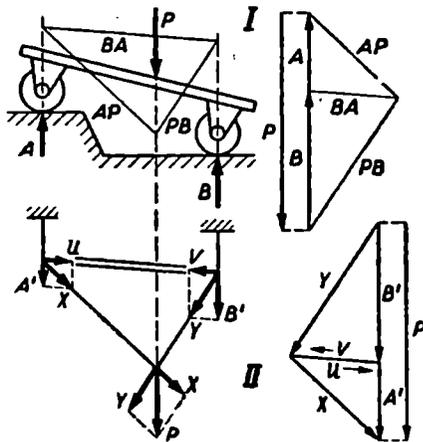
Fig 119. Magirusleiter

171. Magirusleiter. Bei den Aufgaben Nr 163, bei denen erst die Resultanten, dann die Stützkkräfte konstruiert werden sollten, können wir nun auch unmittelbar die Stützkkräfte aus den Lasten erhalten. Auch bei ihnen handelt es sich um ein „Kipplager“ und ein „Rollenlager“.

Die Magirusleiter Fig 119 ist in A drehbar gelagert. Sie wird durch das Band B gehoben, gehalten, abgelassen. Sie ist mit 6 Kräften belastet, darunter das Eigengewicht (3) und eine schiefe Kraft (6) im Zusammenhang mit den Arbeiten, die dort oben ausgeführt werden.

Das Seileck, das nach Nr 169 in A beginnen muß, soll die Kräfte in der Reihenfolge $A\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ B$ erfassen. Wir tragen also die Kräfte $1\div 6$ aneinander an. Dann muß A vor 1 , B hinter 6 anschließen; B mit bekannter Richtung. Dann zeichnen wir das Seileck $A1\div 6B$, beginnend in A ! $6B$ wird mit der Angriffslinie von B zum Schnitt gebracht. Von dort geht die Schlußlinie BA nach A zurück. Die Parallele zu BA schneidet im Kräfteplan die Länge von B auf der Linie von bekannter Richtung ab. A schließt das Krafteck. Die so konstruierte Richtung von A gibt an, wie die Zapfen in den Lagern anliegen.

172. Aufgabe (Magirusleiter). Konstruiere die Auflagerkräfte an den Rädern von Fig 119. — A und B sind dabei innere Kräfte. — Man muß dabei noch ein genügend großes Eigengewicht des Wagens annehmen. — Wegen der Kraft 6 muß mindestens ein Räderpaar des Wagens gebremst sein. Die Reibung am Boden muß genügend groß sein. Bremsst man beide Achsen, so ist die Aufgabe statisch unbestimmt. — Es ist auch ein Unterschied, ob die Räder gebremst sind, oder ob man ihnen Keile, Steine, Hemmschuhe vorlegt. — Ebenso konstruiert man die Stützkkräfte bei Galgen, Drehkran, Leitern, Wagen u.a (Nr 125 \div 134; 145) mit beliebig vielen Lasten, ohne vorher die Resultante der Lasten zu bilden.



↑ Fig 121. Resultantenkonstruktion als Gleichgewichtsfall

← Fig 120. Auflagerkräfte durch Zerlegung

173. Sonderfälle. I. Der Wagen Fig 120 I steht mit seinen Rädern auf zwei waagerechten Ebenen, die verschieden hoch sind, zwei Stufen. Er ist mit P senkrecht \downarrow belastet. Dann sind die Stützkkräfte ebenfalls senkrecht \uparrow . Er rollt nicht etwa \rightarrow . Wir konstruieren A und B vermittels des Seilecks $AP\ PB$ und der Schlußlinien BA .

II. Man kann diese Seileckkonstruktion auch so deuten: P belastet das Hängewerk Fig II und wird nach Nr 59 zerlegt in die Zugkräfte X und Y . X wird zerlegt in A' und U ; Y in B' und V . U und V drücken auf die Verspreizungsstange und heben einander auf. So ist P ersetzt durch die weitergegebenen Kräfte $A'\ B'$.

III. Auch das Seileck, das der Resultantenkonstruktion Fig 113 dient, kann man als Gleichgewichtsfigur betrachten, insofern die Gegenkraft R' die gegebenen Kräfte an dem geschlossenen Seileck Fig 121 im Gleichgewicht hält. Die äußersten Seilstränge heißen dann $R1$ und $4R$.

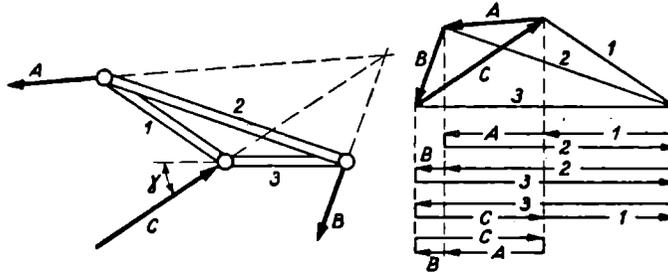


Fig 122. Winkelhebel als Seileck

IV. Der Winkelhebel Nr 119 Fig 76 sei als Dreieck aus Gelenkstäben gebildet (Fig 122). Dann kann man, etwa von einem gegebenen A ausgehend, den Kräfteplan konstruieren. Für jeden Knotenpunkt besteht ein geschlossenes Krafteck: $A 2 1$; $2 B 3$; $1 3 C$. Die inneren Kräfte werden je einmal \rightarrow und einmal \leftarrow durchlaufen. Also bleibt auch für die äußeren Kräfte ein geschlossenes Krafteck $A B C$ übrig. — Die Stäbe 123, aus denen der Winkelhebel besteht, sind dann ein geschlossenes Seileck zu den im Gleichgewicht miteinander stehenden $A B C$. Die Kräfte 1 2 3 im Kräfteplan sind dann Seilstrahlen wie die in Fig 116.

174. Stützkkräfte an 3 Angriffspunkten. Eine Leiter wie Nr 141 Fig 95, an 3 Stellen gestützt, trägt $P Q$ und das Eigengewicht E (Fig 123).

Wir fassen A und C an ihrem Schnittpunkt zusammen. Dieser Punkt ist dem festen Lager von Nr 169 Fig 118 gleichwertig. In ihm beginnen wir das Seileck zu zeichnen. Der letzte Seilstrang schneidet auf B ein. Von dort geht die Schlußlinie S nach AC zurück. Die Parallele dazu

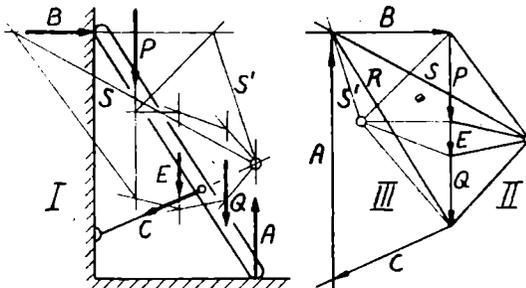


Fig 123. Stützkkräfte an 3 Punkten

schneidet im Kräfteplan die Größe von B ab. Die Resultante R_{AC} schließt das Krafteck. Sie wird dann in A und C zerlegt. — Durch zweckmäßige Wahl des Pols kann man die Schnittpunkte in passende Lage bringen. Man erhält dann eine andere Schlußlinie S' . Das Ergebnis bleibt dasselbe.

175. Aufgabe (3 Stützkkräfte). Man kann das Seileck in Fig 123 auch in andern Schnittpunkten beginnen lassen. — Konstruiere ebenso die Stützkkräfte des Wagens mit Bergstütze (Nr 142 Fig 96). Die 5 Lasten

brauchen nicht zu einer Resultante zusammengefaßt zu werden. Sie können auch voneinander verschieden sein.

176. Stützkkräfte für ein Kräftepaar. Die Kreisscheibe Fig 124 ist am Umfang tangential mit 3 gleichen Kräften belastet. Die Radien der Angriffspunkte bilden miteinander Winkel von 120° . Die Resultante der 3 Kräfte ist also Null. Sie sind ein Kräftepaar, (durch ein Kräftepaar ersetzbar). Gestützt ist die Scheibe durch die Zapfen A und B . B greift in einen radialen Schlitz, ist also \perp Schlitz.

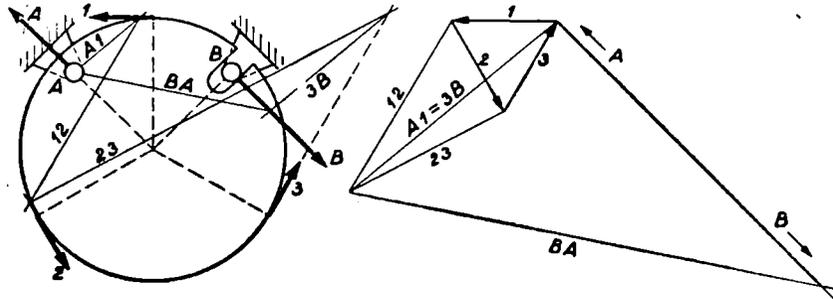


Fig 124. Stützkkräfte für ein Kräftepaar

Das Seileck soll die Kräfte in der Reihenfolge $A\ 1\ 2\ 3\ B$ erfassen. Im Kräfteplan schließt also A vor 1 an, B hinter 3. A ist also entgegengesetzt und gleich B . Ihre Länge ist noch unbekannt. Die Seilstrahlen $A1$ und $3B$ fallen zusammen. Wir ziehen nun die Seilstränge $A1 \div 3B$, dann die Schlußlinie BA . Die Parallele dazu schneidet die Größe von $B=A$ aus. — Ein Kräftepaar wird durch ein Kräftepaar im Gleichgewicht gehalten!

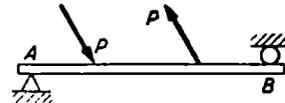


Fig 125. Balken mit Kräftepaar

177. Aufgabe (Balken mit Kräftepaar). Konstruiere die Stützkkräfte in Fig 125.

178. Resultantenkonstruktion und Momentengleichung. Aufgaben über Scheiben mit mehreren Lasten lösen wir rechnerisch durch Momentengleichungen, zeichnerisch durch die Seileckkonstruktion, beruhend auf Schnittpunktsatz und Kräfteparallelogramm. Daß beide Verfahren auf dasselbe Ergebnis führen müssen, bedarf des Beweises.

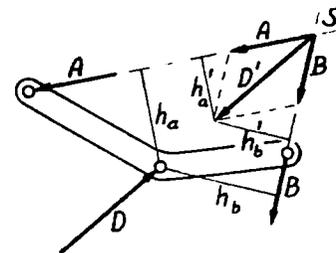
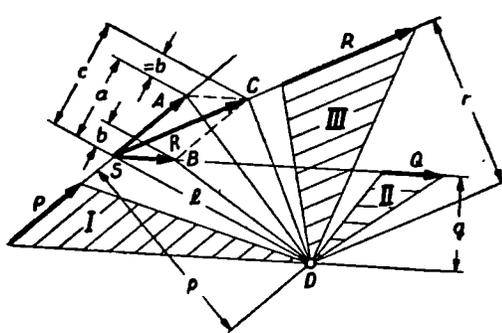
I. Die Kräfte P und Q in Fig 126 seien an ihrem Schnittpunkt S zu einer Resultante R zusammengefaßt. Das Moment von P bezüglich des beliebig gelegenen Drehpunkts D ist $= P \cdot p$, gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks I. Diese Fläche ist unabhängig von einer Verschiebung des P in seiner Angriffslinie! — Ebenso die Momente von Q und R .

Nun schieben wir alle Kräfte an den Schnittpunkt S , so daß die Dreiecke die gemeinsame Seite l bekommen.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad \text{Moment von } P &= P p = 2 \cdot \text{I} = 2 \cdot SDA = l a \\ \text{Moment von } Q &= Q q = 2 \cdot \text{II} = 2 \cdot SDB = l b \\ \text{Moment von } R &= R r = 2 \cdot \text{III} = 2 \cdot SDC = l c. \end{aligned}$$

Nun ist wegen der Parallelogrammkonstruktion $a + b = c$
 also ist die Summe der Momente $Pp + Qq = l(a + b) = lc = Rr$
 Das Moment einer nach Schnittpunktsatz und Dreieck konstruierten Resultante ist gleich der Summe der Momente der Komponenten. Das gilt auch für mehr als 2 Einzelkräfte, die man ja eine nach der andern hinzufügen kann. — Daß Kräfteck und Komponentengleichung einander gleichwertig sind, wurde schon in Nr 70; 71 bewiesen. Die Resultantenkonstruktion nach Nr 161; 162 muß also auf dasselbe Ergebnis führen wie die Berechnung nach Nr 147.

II. Im Gleichgewichtsfall sind Kräfteck und Seileck geschlossen. Indem dabei die letzten Kräfte in der Schlußlinie einander aufheben, wird auch das Moment Null. Die Konstruktion des Gleichgewichts mit



↑ Fig 127. Schnittpunktsatz und Momentengleichung

← Fig 126. Moment der Resultante

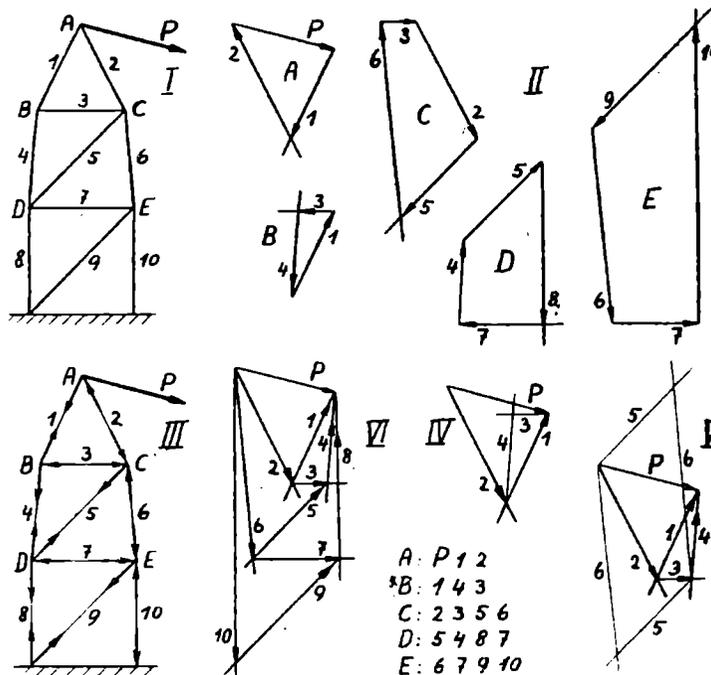


Fig 128. Fachwerk

Krafteck und Seileck muß also auf dasselbe Ergebnis führen wie die Berechnung mit Komponenten- und Momentengleichungen.

III. Insbesondere im Fall des Gleichgewichts dreier Kräfte an der Scheibe folgt diese Vereinbarkeit von Konstruktion und Rechnung auch unmittelbar aus Fig 127: (Vergl Nr 119 Fig 76.)

Die in S gebildete Resultante von A und B zielt auf D .

(Das ist der Schnittpunktsatz und der Satz vom Krafteck!)

Inhalt des schraffierten Parallelogramms $= Ah'_b = Bh'_a$

Die Höhen h' sind den Hebeln h proportional.

Also ist auch $Ah_a = Bh_b$ (Momentengleichung!)

179. Fachwerk. Der Mast Fig 128 I ist an der Spitze mit $P = 2400$ kg belastet. Die 10 Stabkräfte sollen konstruiert werden.

I. Das Fachwerk muß genügend viele Stäbe haben, so daß es bei beliebiger Belastung seine Gestalt nicht ändert; im Gegensatz zum Hängewerk Nr 81, das nur für eine Belastung paßt und bei anderer Belastung sich verzieht. Das Fachwerk darf aber auch nicht zu viel Stäbe haben, sonst ist es statisch unbestimmt (Nr 104; 106; 107). — Jeder Punkt in der Ebene muß durch je 2 Stäbe festgelegt sein: Punkt E durch 9 und 10, anschließend Punkt D durch 7 und 8 usw. 5 Punkte sind also durch 10 Stäbe unbeweglich und statisch bestimmt gegen ein Fundament festgelegt; — ebensoviel Stäbe, wie Längenangaben nötig sind, um das Liniennetz geometrisch zu konstruieren. — Die Stabkräfte nehmen wir in der Stabrichtung an. Wir setzen damit voraus, daß die Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind. Die übliche Verbindung durch Knotenbleche erfüllt diese Bedingung allerdings nicht besonders gut.

II. Für Punkt A gilt das Krafteck Fig II A: Wir legen P hin, zB im Maßstab 1 mm : 200 kg, ziehen durch die Endpunkte Parallele zu 1 und 2 und setzen die Pfeile im Sinne des Gleichgewichts: 1 zieht an A ↙; 2 drückt auf A ↘; eingetragen in Fig III. An B zieht 1 dann ↗ und ist nach Fig II B im Gleichgewicht mit 3 ← und 4 ↙. An C drücken 2 ↘ 3 → und werden nach Fig II C gestützt durch 5 ↙ 6 ↑. Wir schreiten weiter zu D und zu E , jedesmal zu dem Knotenpunkt, an dem nur noch 2 Unbekannte zu bestimmen sind, und konstruieren die Stützkräfte durch das „geschlossene Krafteck“ (Nr 70). Am nächsten Knotenpunkt bekommen dann die Stabkräfte den entgegengesetzten Pfeil als weitergegebene Kräfte. Die Kräfte werden abgemessen: zB $S_{10} = 6600$ kg

180. Kräfteplan. I. Wir wollen die Kraftecke zum Kräfteplan aneinanderlegen (Nr 75; 76): Wir zeichnen II B an II A (Fig IV), wollen fortfahren wie bei II C. — Das geht nicht, da sich in Fig IV die Resultante 2 3 nicht bilden läßt. 3 müßte an 2 neu angetragen werden. — Wir können aber schon 3 4 anders an 1 antragen (Fig V). Dann kommen 2 und 3 zusammen. Durch ihre Endpunkte ziehen wir Parallele zu 5 und 6. — Auch dies kann auf zweierlei Weise geschehen und geschieht zweckmäßigerweise so, daß für den nächsten Knotenpunkt die Resultante 5 4

vorgebildet ist (Fig VI). — Die Pfeile sind nur noch im Sinne der weitergegebenen Kräfte eingetragen: Die Resultante von $2 \searrow$ und $3 \rightarrow$ ist zerlegt in $6 \searrow$ und $5 \nearrow$. Ebenso zerlegen wir $5 \nearrow$ $4 \nearrow$ in $7 \rightarrow$ $8 \uparrow$ usw. — So entsteht der Kräfteplan Fig VI, in dem für jeden Knotenpunkt der Kräftezug der bereits bekannten Kräfte schon vorbereitet ist.

II. Die Rücksichtnahme auf den nächsten Knotenpunkt ist praktisch etwas umständlich auszuführen. — In der Figur ist die Reihenfolge aufgeschrieben, wie die Kräfte im Krafteck aufeinander folgen und zwar im Sinne der Pfeilrichtungen der an dem Knotenpunkt angreifenden Belastungen und Stützkkräfte, nicht der weitergegebenen Kräfte. Vergleicht man die Tabelle mit der Fachwerkzeichnung, so erkennt man, daß

die Kräfte im Krafteck so aufeinander folgen,

wie man die Stäbe trifft, wenn man den Knotenpunkt \curvearrowright umkreist. Der Umlauf darf auch \curvearrowleft erfolgen, nur überall im selben Sinn.

Nach dieser Umlaufregel, entsteht der „Cremona-sche Kräfteplan“, in dem jede Stabkraft nur einmal gezeichnet zu werden braucht.

III. Die Entscheidung über Zug oder Druck folgt aus der Richtung, in der die Stützkkräfte am alten Knotenpunkt wirken, bzw die vermittels des Stabes weitergegebenen Kräfte am neuen:

S_5 zieht an $C \swarrow$, also an $D \nearrow$; oder:

S_5 erfährt von C Zug \nearrow und gibt ihn an $D \nearrow$ weiter.

S_7 drückt auf $D \leftarrow$, also auf $E \rightarrow$; oder:

S_7 erfährt von C Druck \rightarrow und gibt ihn an $E \rightarrow$ weiter.

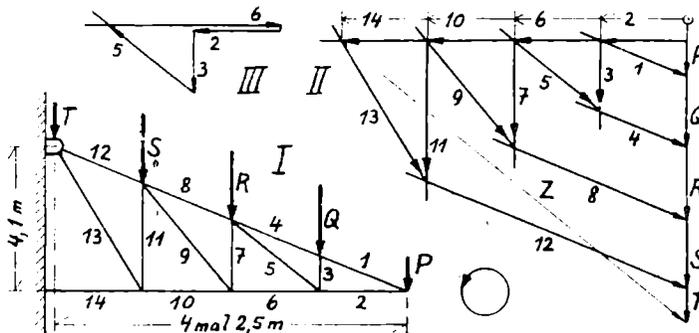


Fig 129. Bahnhofsdach

Reihenfolge
des

Antragens:

P 1 2

1 Q 4 3

2 3 5 6

5 4 R 8 7

6 7 9 10

9 8 S 12 11

10 11 13 14

181. Bahnhofsdach. An der Wand eines Bahnhofsgebäudes sind eine Reihe von Bindern wie Fig 129 I befestigt. (Ausladung 4 mal 2,5 m, Höhe an der Wand 4,1 m, Binderabstand 6 m). Über die oberen Knotenpunkte der Binder laufen Träger \parallel Wand, die die Dachlast (50 kg/m^2) tragen. So ist der Binder belastet mit den Kräften

$$Q = R = S = 810 \text{ kg} \quad P = T = 405 \text{ kg}$$

Die Stäbe 1 4 8 12 sind selbst nicht auf ihrer Länge belastet; sie werden nur auf Zug, nicht auf Biegung beansprucht.

Wir umkreisen nach der Regel von Nr 180 II die Knotenpunkte \curvearrowright . Das ergibt die in der Tabelle aufgeschriebene Reihenfolge des Antragens im Kräfteplan Fig II. Je die beiden letzten Kräfte sind die jeweils unbekanntenen Stützkkräfte, die das Krafteck schließen. Ihre Pfeilrichtungen werden sogleich umgedreht, um die weitergegebenen Kräfte zu erhalten.

Die Kräfte 2 6 10 14 liegen zum Teil aufeinander, wie das herausgezeichnete Krafteck Fig III zeigt. — Die Resultante Z aus 13 12 T ist die Kraft, die am oberen Befestigungspunkt des Binders am Mauerwerk ausgeübt wird. — Wählt man den Umlaufsinn \curvearrowright , so entsteht ein Kräfteplan, der gegen den gezeichneten um 180° gedreht ist.

182. Aufgabe (Fachwerk mit parallelen Gurten). Konstruiere den Kräfteplan für Fig 130. Die Lasten seien je 2 to, die Länge 4 mal 2,5 m, die Höhe 2,1 m. Die Stabkräfte werden dann aus maßstäblicher Zeichnung abgemessen. Zug oder Druck folgt aus Nr 180 III.

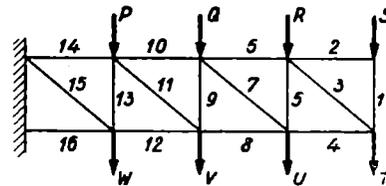


Fig 130. Fachwerk mit parallelen Gurten

183. Aufgelagertes Fachwerk. Eine Brücke besteht aus 2 Wänden, zwischen denen die Fahrbahn durch Querträger getragen wird (Fig 73). Die Wand Fig 131 I einer Brücke mit gebogenem Obergurt sei durch die Querträger belastet mit $P = Q = 24 \text{ to } \downarrow$ $R = S = T = 44 \text{ to } \swarrow$ unter 20° gegen die Vertikale. Wir entwerfen den Cremona'plan.

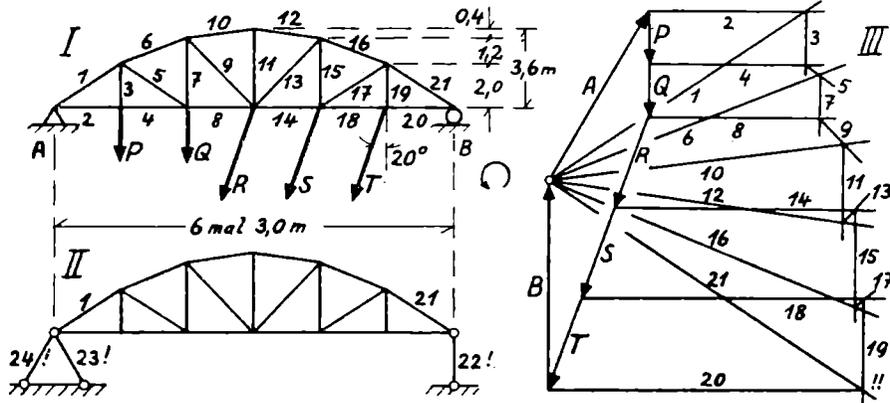


Fig 131. Aufgelagertes Fachwerk

I. Ist das Fachwerk mit 12 Punkten und 21 Stäben statisch bestimmt? 3 Punkte sind durch 3 Stäbe gegeneinander festgelegt; denn ein Dreieck ist durch die 3 Seiten geometrisch bestimmt. Jeder weitere Punkt fordert je 2 Stäbe mehr zur geometrischen und zur statischen Festlegung. Für p Punkte also 3 Stäbe und 2 mal den Überschuß von p über 3:

$$\text{Stabzahl} = s = 3 + 2(p - 3) = 2p - 3$$

Man kann auch sagen, daß $2p = 24$ Stäbe nötig sind, um $p = 12$ Punkte gegen das Fundament festzulegen (Nr 179 I). 3 davon sind nötig, um das Ganze gegen das Fundament zu halten durch 1 festes Lager (= 2 Stäbe) und 1 Rollenlager (= 1 Stab). Die übrigen $2p - 3$ Stäbe liegen dann im Fachwerk selbst (Fig II).

II. Bei den auf einem Fundament aufgebauten, „eingespannten“ Fachwerken begannen wir die Konstruktion an der Spitze, wo nur 2 Stabkräfte unbekannt waren. Bei dem auf 2 Punkten „aufgelagerten“ Fachwerk können wir nirgends beginnen. Wir müssen zuvor die Auflagerkräfte $A B$ konstruieren; — vermittels des Seilecks, welches nach Nr 169 durch das feste Lager A geht. (In Fig 131 fortgelassen.)

III. Wir bilden nun den Kräfteplan (Fig III) unter Beachtung der Umlaufregel, beginnend am Auflagerpunkt mit $A 2 1$; dann $2 P 4 3$ usw. Wir können anschließen an die Seileckkonstruktion, in der die Belastungen und die Auflagerkräfte bereits aneinanderliegen, müssen dann aber den Umlaufsinn \curvearrowright wählen, weil die in der Reihenfolge $PQRSTBA$ bereits aneinander angetragenen Kräfte \curvearrowleft um das Fachwerk herumliegen.

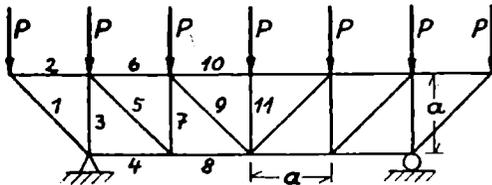
184. Bemerkungen zum aufgelagerten Fachwerk. I. Beim Aufbau des Kräfteplans bemerkt man, daß beim vorletzten Krafteck (19 18 T 20) nur noch eine Unbekannte (20) zu bestimmen ist. Hier ergibt sich also nicht die letzte Ecke des Kraftecks als Schnittpunkt, sondern es muß passen: Der Schnittpunkt 19/21 des drittletzten Kraftecks (16 17 19 21) muß schon in waagerechter Richtung neben der Pfeilspitze von T liegen. Das ist eine Kontrolle, die dadurch zustande kommt, daß wir die Konstruktion der Auflagerkräfte aus dem Gleichgewicht des Ganzen vorweggenommen haben, während doch eigentlich die Gleichgewichte an jedem der 12 Knotenpunkte genügt hätten, um die 24 Unbekannten ($A_x A_y B$ und 21 Stabkräfte) zu bestimmen. Das letzte Krafteck (21 20 B) braucht überhaupt nicht mehr gezeichnet zu werden.

II. Man vereinfacht den Entwurf des Kräfteplanes durch folgende Bemerkungen: a: Die Stabkräfte des Obergurtes 1 6 10 12 16 21 liegen wie die Strahlen eines Seileckes, dessen Knotenpunkte belastet sind mit den Resultanten aus 3 5; 7 9; 11; 13 15; 17 19. b: Die \downarrow Komponenten der Belastungen werden getragen von den \uparrow Komponenten der Stabkräfte 3; 5 7; 9 11; 13; 15 17; 19. c: Die Stabkräfte des Untergurtes 2 4 8 14 18 20 schließen waagrecht an die Belastungspfeile an.

III. Man gestaltet den Obergurt so, daß er ein Seileck für gleichmäßige Last ist. Dann wird das Eigengewicht nur vom Obergurt getragen. In den Untergurt kommt Zug gleich der Horizontalkomponente (Polabstand) des Seileckkräfteplans, in den dann der Kräfteplan Fig III übergeht. Die Vertikalen bekommen Zug gleich der anhängenden Last. Die Diagonalen werden dann überhaupt nicht beansprucht. — Nach Nr 81 III ist deshalb die Trägerhöhe 3,6 m unterteilt im Verhältnis 1:3:5

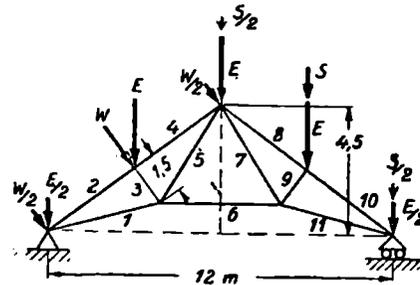
in die Teilhöhen $\frac{1}{9} \cdot 3,6 = 0,4$ $\frac{3}{9} \cdot 3,6 = 1,2$ $\frac{5}{9} \cdot 3,6 = 2,0$ m

185. Aufgabe (Aufgelagertes Fachwerk mit parallelen Gurten). Das Fachwerk Fig 132 ist mit 7 Lasten P belastet. Konstruiere den Kräfteplan. — Für P kann man im Kräfteplan eine beliebige Länge annehmen und dann die Stabkräfte im Verhältnis zu P angeben.



↑ Fig 132. Aufgelagertes Fachwerk mit parallelen Gurten

Fig 133. Polonceaubinder →



186. Aufgabe (Polonceaubinder). Das Dach einer Halle von 12 m Breite ist durch Dachbinder nach Fig 133 in je 5 m Abstand voneinander gestützt. Das Eigengewicht des Daches sei 120 kg/m^2 der Dachfläche, der Winddruck $80 \text{ kg/m}^2 \perp$ Dachfläche. Auf der Leeseite liegt Schnee: 20 kg/m^2 . Berechne die Knotenpunktlasten. Konstruiere den Kräfteplan.

190. Zusammenfassung. Die Resultante zweier Kräfte geht durch ihren Schnittpunkt. Von allgemeinerer Anwendungsfähigkeit und für beliebig viele Kräfte gültig ist die Konstruktion durch das Seileck. Bilden die Kräfte ein geschlossenes Krafteck, so sind sie nicht durch eine Einzelkraft ersetzbar, sondern durch ein Kräftepaar.

Im Gleichgewicht sind Kräfte, wenn Krafteck und Seileck geschlossen sind. Hiernach kann man die Stützkkräfte in statisch bestimmter Weise konstruieren, wenn die Scheibe gestützt ist durch

drei Kräfte mit gegebenen Angriffslinien

oder: ein Gelenk (Kraft von unbekannter Größe und Richtung)

und eine Pendelsäule (oder Halslager oder Rollenlager)

oder: eine Kraft von unbekannter Größe, Richtung und Lage.

Bei Fachwerken wenden wir die Regel vom geschlossenen Krafteck nacheinander auf die einzelnen Knotenpunkte an. Bei bestimmter Reihenfolge des Antragens gelingt es, den Kräfteplan so zu zeichnen, daß jede Stabkraft nur einmal gezeichnet zu werden braucht. Beim aufgelagerten Fachwerk muß man, um anfangen zu können, die Auflagerkräfte vorweg konstruieren, und gewinnt dann zum Schluß eine Kontrolle.

VIII., Gleichgewicht am Körper

191. Brückenträger als Platte. Der Brückenträger Nr 115 Fig 73 kann betrachtet werden als Platte auf 4 Lagern ohne Rücksicht auf die damals berechneten Kräfte zwischen den Quer- und Längsträgern, die dann innere Kräfte sind.

I. Es gelten folgende Momentengleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Achse } AC: & (B + D) \cdot 6 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 & B + D = 16,67 \\ \text{,, } BD: & (A + C) \cdot 6 = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 & A + C = 13,33 \\ \text{,, } AB: & (C + D) \cdot 8 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 2 & C + D = 14,62 \\ \text{,, } CD: & (A + B) \cdot 8 = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 & A + B = 15,38 \end{aligned}$$

und die Komponentengleichung: $A + B + C + D = 30$ to

Die Momente für eine Achse, zB AC , werden gebildet aus den Abständen der Last von der Achse, unabhängig von den Maßen, die parallel zu der betr Achse sind.

Diese Gleichungen reichen aber nicht zur Bestimmung von $A B C D$. Denn die fünfte folgt, indem man die beiden ersten addiert, und die vierte, indem man die dritte von der fünften subtrahiert. Der Brückenträger als Platte ist statisch unbestimmt.

II. Aber der Tisch auf drei Beinen ist statisch bestimmt. Läßt man je eine der 4 Stützen weg, so ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{array}{llll} A_1 = 0 & B_1 = 15,38 & C_1 = 13,33 & D_1 = 1,29 \text{ to} \\ \text{oder: } A_2 = 15,38 & B_2 = 0 & C_2 = -2,05 & D_2 = 16,67 \text{ to} \\ \text{oder: } A_3 = 13,33 & B_3 = 2,05 & C_3 = 0 & D_3 = 14,62 \text{ to} \\ \text{oder: } A_4 = -1,29 & B_4 = 16,67 & C_4 = 14,62 & D_4 = 0 \end{array}$$

Im Fall 2 und 4 würde die Platte überkippen oder sie müßte bei C bzw A verankert werden. — Die Lösung in Nr 115 wurde statisch bestimmt nur dadurch, daß wir annahmen, die Querträger lägen gelenkig auf den Längsträgern. Die „Platte“ aber gilt als steif, ungelenkig.

III. Läßt man alle 4 Stützen bestehen, so gibt es unendlich viele Lösungen wie beim dreiachsigen Wagen Nr 114 je nach der elastischen Formänderung der Platte und der Stützen.

Man denke sich zB die Platte starr, unelastisch und eben, ruhend auf 4 gleichen elastischen Federn, die bei unbelasteter Platte keine Vorspannung haben. Dann stellt sich die belastete Platte schief. (Fig 134: I: Ruhelage; II: belastete Platte; III: Fundament.) Da die Platte starr sein soll, so bleiben gegenüberliegende Seiten einander parallel. Zwischen den Verkürzungen der Federn besteht also die Beziehung

$$\Delta l_b - \Delta l_a = \Delta l_d - \Delta l_c \quad \text{oder} \quad \Delta l_a - \Delta l_c = \Delta l_b - \Delta l_d$$

oder $\left. \begin{array}{l} \text{Senkung} \\ \text{in der Mitte} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Mittel aus je zwei einander} \\ \text{gegenüberliegenden Senkungen} \end{array} \right.$

also $\Delta l_a + \Delta l_d = \Delta l_b + \Delta l_c$

Den Verkürzungen sind die Kräfte proportional. Also ist auch

$$A + D = B + C$$

Dies ist die gesuchte 4-te unabhängige Gleichung neben denen in I.

Auflösung $A = 6,85$ $B = 8,52$ $C = 6,48$ $D = 8,15$ to

wieder anders als in II und in Nr 115.

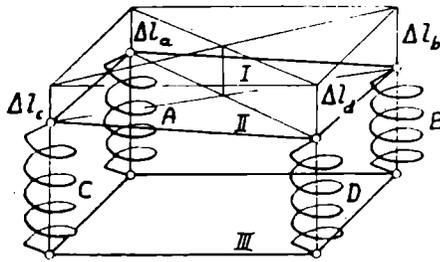


Fig 134. Platte auf 4 elastischen Stützen

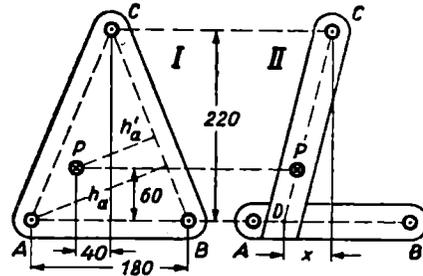


Fig 135. Platte auf 3 Stützen

192. Platte auf 3 Stützen. Die Platte Fig 135 I ist auf 3 Punkten $A B C$ gelagert, also statisch bestimmt, und mit P belastet.

I. C folgt aus den Momenten für Achse AB ; — A für Achse BC :

$$C = P \cdot 60/220 = 0,273 P \quad A = P \cdot h'_a/h_a = P \cdot 97/166 = 0,586 P$$

Ebenso B . Die Hebel h können abgegriffen oder berechnet werden.

II. Einfacher zu berechnen sind die Hebelarme für Achsen

durch $C \parallel AB$: $A + B = P \cdot 160/220 = 0,727 P$ oder $= P - C$

durch $C \perp AB$: $A - B = P \cdot 40/90 = 0,444 P$

Auflösung: $A = 0,586 P$ $B = 0,141 P$

III. Man kann die Platte auch in 2 Hebel auflösen (Fig II):

$$D = P \cdot 160/220 = 0,727 P \quad x = 40 \cdot 220/160 = 55 \text{ mm}$$

$$A = D \cdot 145/180 = 0,586 P \quad B = D \cdot 35/180 = 0,141 P$$

193. Dezimalwaage. Auf der Waage Fig 136 soll die Last Q durch das Gewicht $P = Q/10$ gewogen werden; unabhängig davon, wo Q auf der Brücke steht.

Q verteilt sich auf die 3 Auflager $A B C$ verschieden je nach seiner Stellung. Unabhängig von seiner Stellung ist nur $Q = A + B + C$

Jeder dieser 3 Anteile muß auf den Waagebalken wirken: C unmittelbar, $A + B$ mittels des Hilfshebels durch die Kraft

$$D = \frac{u}{v} (A + B)$$

Aus C und D folgt nun $P = \frac{x}{z} C + \frac{y}{z} D = \frac{x}{z} C + \frac{y}{z} \cdot \frac{u}{v} (A + B)$

Andererseits soll sein $P = \frac{1}{10} Q = \frac{1}{10} C + \frac{1}{10} (A + B)$

Dies wird erreicht, wenn $\frac{x}{z} = \frac{1}{10}$ $\frac{y}{z} \cdot \frac{u}{v} = \frac{1}{10}$

II. Müssen beide Verhältnisse einzeln $= 1/10$ sein? Oder darf vielleicht das eine größer, das andere kleiner sein? — Verschiebt man Q auf der Brücke nach links, so nimmt $A + B$ um einen gewissen Betrag Δ zu, C um ebensoviel ab.

$$P \text{ würde sich dann ändern um } -\frac{x}{z}\Delta + \frac{y}{z} \cdot \frac{u}{v}\Delta$$

Es soll aber unabhängig von der Verschiebung von Q sein.

$$\text{Also muß sein: } \frac{x}{z} = \frac{y}{z} \cdot \frac{u}{v} \quad \text{also jedes einzeln} = \frac{1}{10}$$

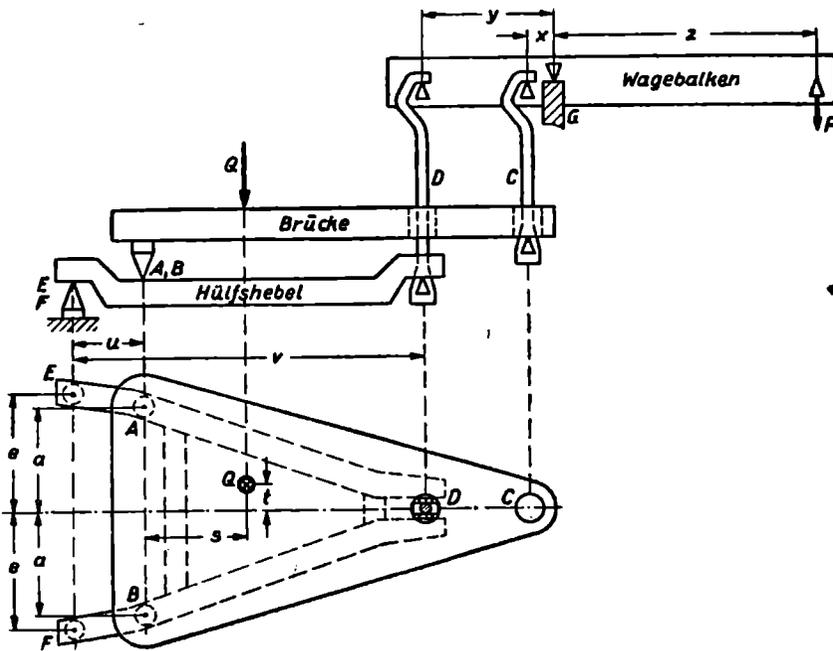


Fig 136. Dezimalwaage

III. Wie man die Verhältnisse y/z und u/v einzeln wählt, ist willkürlich.

$$\text{Üblich ist } \frac{y}{z} = \frac{1}{2} \quad \frac{u}{v} = \frac{1}{5} \quad \text{möglich auch zB } \frac{y}{z} = \frac{2}{5} \quad \frac{u}{v} = \frac{1}{4}$$

194. Bewegungsverhältnisse. In Nr 53; 56 III war festgestellt worden, daß die Hebungen sich umgekehrt wie die Gewichte verhalten. Auch hier ist das der Fall:

$$\text{Senkt man } P \text{ um } s, \text{ so hebt sich } C \text{ um } \frac{x}{z}s = \frac{1}{10}s$$

$$D \text{ um } \frac{y}{z}s \quad \text{also } A \text{ und } B \text{ um } \frac{u}{v} \cdot \frac{y}{z}s = \frac{1}{10}s$$

Alle 3 Ecken der Brücke heben sich also um den gleichen Betrag. Die Brücke macht eine Parallelbewegung. Wo auch Q auf der Brücke stehen mag, es hebt sich immer um $s/10$.

Bei dem Waagebalken liegen die Schneiden des Auflagers und der Belastungen in einer Linie der Stabilität wegen (Nr 121). Ebenso ist auch der Hilfshebel gekröpft. Bei der Brücke selbst kommt es auf die Höhe von Belastung und Auflagerpunkten nicht an. Sie dreht sich ja nicht.

195. Aufgabe (Dezimalwaage). In Fig 136 sei $v = 600$ $z = 250$ $a = 240$ $e = 280$ $s = 170$ $t = 50$ mm $Q = 19$ kg. Ergänze die übrigen Maße und berechne $A B C D E F G P$. — Bestätige ferner, daß man auch die 3 Teile als ein Ganzes betrachten kann, daß also zB $P + Q = E + F + G$ ist und daß auch die Momentengleichungen für diese äußeren Kräfte bestehen, wobei die inneren Kräfte nicht auftreten.

196. Aufgabe (Krämerwaage). Die Waage Fig 137 besteht ebenfalls aus Brücke, Hilfshebel und Waagebalken. Sie wägt aber 1:1. Die Bezeichnungen entsprechen der Dezimalwaage. Zeichne danach den Grundriß. Es gibt auch andere Möglichkeiten für die statisch bestimmte Anordnung der Lager. — I. Welche Beziehungen müssen zwischen den Hebelarmen $x y z u v$ bestehen? — II. Liegt nun zB die Verbindung D rechts von der richtigen Lage, so ist P abhängig von der Stellung von Q . Man bringe nun Q in einer bestimmten Stellung ins Gleichgewicht mit einem (falschen) P und schiebe dann $Q \leftarrow$. Wie schlägt dann die Waage aus?

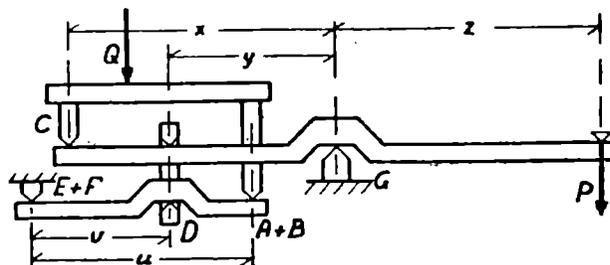


Fig 137. Krämerwaage

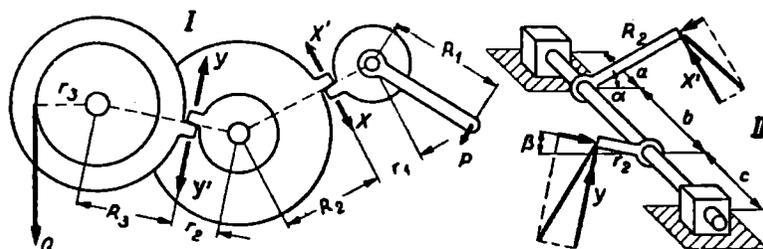


Fig 138. Kräfte an der Winde

197. Winde. An der Trommel (Fig 138 I) hängt eine Last Q . Sie wird vermittels eines Vorgeleges durch die an der Kurbel wirkende Kraft P aufgewunden, gehalten, abgelassen. Die Kraft wird übertragen vermittels der Zahnkräfte XY .

$$\text{Dann ist:} \quad P R_1 = X r_1 \quad X R_2 = Y r_2 \quad Y R_3 = Q r_3$$

unabhängig von der Stellung der Räder auf den Wellen (von den Maßen abc in Fig II) und von der Richtung der Radien der Angriffspunkte ($\alpha\beta$).

— Die Zahnflanke ist im allgemeinen nicht radial. Die Zahnkräfte stehen dann schief zum Umfang. Im allgemeinen Fall sind dann $PXYQ$ die tangentialen Komponenten. — Einsetzen der Zahnkräfte ergibt

$$P = \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} Q = \frac{\text{Produkt der „Lastarme“}}{\text{Produkt der „Kraftarme“}} \cdot Q$$

Im Zähler stehen die Hebelarme, an denen die Last Q bzw die Widerstandskräfte XY wirken; im Nenner die Hebelarme der Kraft P bzw der weitergegebenen Kräfte $X'Y'$.

198. Übersetzungsverhältnis. I. Je größer die R und je kleiner die r , um so kleiner wird P ; um so langsamer hebt sich aber auch Q , denn auch die Verhältnisse der Umlaufzahlen der 3 Wellen, $n_1 n_2 n_3$, hängen von den Radien ab:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{r_1} \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{R_3}{r_2} \quad \text{also} \quad \frac{n_1}{n_3} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} = \frac{R_2 R_3}{r_1 r_2}$$

Das ist, abgesehen von den äußersten Radien R_1 und r_3 , dasselbe Verhältnis, das in der Formel für P vorkommt. Also ist

$$P = \frac{n_3 \cdot r_3}{n_1 R_1} \cdot Q \quad \text{oder} \quad \frac{PR_1}{Q r_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

Die Momente an Kurbelwelle und Trommelwelle verhalten sich umgekehrt wie die Umlaufzahlen.

II. Das sieht man auch daraus, daß die Momente einer Zahnkraft (zB X) für die beiden Wellen, an denen sie wirkt, sich verhalten wie die Radien, also umgekehrt wie die Umlaufzahlen.

Es seien $M_1 M_2 M_3$ die Momente an Welle 1 2 3,

$$\text{dann ist} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{X r_1}{X R_2} = \frac{r_1}{R_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{M_2}{M_3} = \frac{Y r_2}{Y R_3} = \frac{r_2}{R_3} = \frac{n_3}{n_2}$$

$$\text{also} \quad \frac{M_1}{M_3} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{M_2}{M_3} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1} \quad \text{oder} \quad \frac{PR_1}{Q r_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

199. Aufgabe (Zahnradübersetzung). An einer Trommel von 320 mm \varnothing hängt eine Last von 1200 kg. Welches Übersetzungsverhältnis muß gewählt werden, wenn an der Kurbel von 420 mm Länge eine Kraft von etwa 15 kg ausgeübt werden kann? — Das Übersetzungsverhältnis soll dann nach passender Abrundung durch Benutzung einer Zwischenwelle in 2 etwa gleiche Verhältnisse geteilt werden. Die kleinen Räder mögen die Radien $r_1 = 45$ $r_2 = 80$ mm erhalten. Wie groß werden nun die Kräfte? — Man sieht, daß man hier zunächst die Beziehung der Momente zum Übersetzungsverhältnis braucht und erst nachträglich die Kräfte und Hebelarme an den einzelnen Rädern bestimmen kann. — Wie oft muß man die Kurbel drehen, um die Last um 4 m zu heben?

200. Auflagerkräfte an einer Vorgelegewelle. Wir berechnen Auflagerkräfte für Wellen wie die in Fig 138. Zunächst nehmen wir eine

einfachere Lage der Zahnkräfte an. In Fig 139 wirkt $P=1100 \text{ kg}$ \downarrow am waagerechten Radius; $Q \odot$ am senkrechten. $Q=1467 \text{ kg}$.

Die Auflagerkräfte werden jetzt schief. Die Komponenten dieser Stützkräfte gehen \uparrow wegen des \downarrow gerichteten P und nach hinten (\otimes) wegen des nach vorn (\odot) gerichteten Q . Wir berechnen sie, indem wir Achsen durch die Lager \perp Welle annehmen (Fig III):

Achse 1 durch B waagrecht:	$A_y \cdot 840 = P \cdot 210$	$A_y = 275 \text{ kg}$
„ 2 „ A „	$B_y \cdot 840 = P \cdot 630$	$B_y = 825 \text{ kg}$
„ 3 „ B senkrecht:	$A_x \cdot 840 = Q \cdot 570$	$A_x = 995 \text{ kg}$
„ 4 „ A „	$B_x \cdot 840 = Q \cdot 270$	$B_x = 472 \text{ kg}$

Hieraus folgen nun $A = 1032 \text{ kg}$ $B = 950 \text{ kg}$
und ihre Richtungen $\alpha = 15^\circ 27'$ $\beta = 60^\circ 12'$ gegen Waagerechte

Bei dieser Auflagerberechnung kommen die Radien nicht vor: Die Auflagerkräfte sind so groß, als wenn P und Q auf der Welle selbst angriffen; ebenso wie Q unabhängig von den Maßen \parallel Welle war; ebenso wie in den Gleichungen Nr 191 I nur die Maße \perp Achse als Hebelarme auftraten.

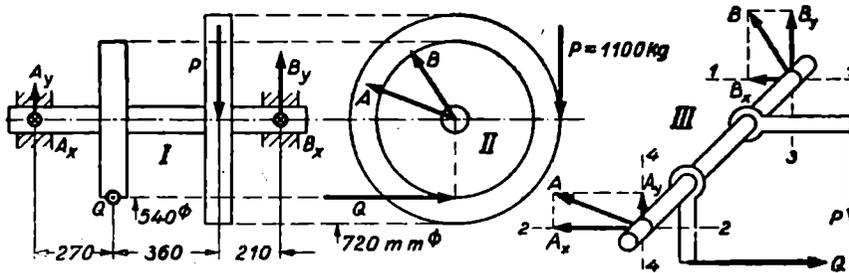


Fig 139. Kräfte an der Vorgelegewelle

201. Riemenscheibe und Zahnrad. An der Welle der kleinen Riemenscheibe in Fig 140 I wirke ein Moment $M=120 \text{ kgm}$ (zB eine Kraft 300 kg am Hebelarm $0,4 \text{ m}$). Im Riemen muß eine gewisse Vorspannung bestehen, damit er nicht gleitet. Wir wählen $V=0,6 U$. V und U sind gezeichnet als Kräfte an der großen Scheibe. Die Zahnkraft Z ist um 15° gegen die Tangente geneigt, weil die Zahnflanke krumm ist.

I. Es ist $U - V = \frac{120}{0,14} = 857 \text{ kg}$ $V = 0,6 U$ also $U = 2143 \text{ kg}$
 $V = 1286 \text{ kg}$

Die tangentielle Komponente von Z folgt aus $U - V$ oder unmittelbar aus dem im Übersetzungsverhältnis vergrößerten Moment M :

$Z_t = 857 \cdot 36/23 = 1342 \text{ kg}$ $Z = Z_t / \cos 15^\circ = 1390 \text{ kg}$
oder $M_1 = 120 \cdot 36/14 = 309 \text{ kgm}$ $Z_t = 30900/23 = 1342 \text{ kg}$

II. Die Auflagerkräfte berechnen wir wie in Nr 200, nachdem wir von $U V Z$ die \downarrow und die \rightarrow Komponenten gebildet haben (Fig II):

Winkel: $\sin \alpha = (36 - 14)/80$ $\alpha = 15^\circ 58'$ $\beta = 50^\circ - 15^\circ = 35^\circ$
Komponenten von Z $\downarrow 1140 \text{ kg}$ $\odot 797 \text{ kg}$
„ von U und V $\downarrow 3300$ $\odot 236$

Das Lager A wird bestimmt von oben und von hinten gedrückt. Die Stützkraften gehen also nach \uparrow und \otimes . Bei B ist es zweifelhaft. U und V einerseits, Z andererseits wirken im entgegengesetzten Sinn. Wir zeichnen sie wie die von A und erwarten das Vorzeichen des Ergebnisses aus den Momentengleichungen:

$$\begin{aligned} \curvearrowright A_y \cdot 70 &= 1140 \cdot 26 + 3300 \cdot 91 \curvearrowleft & A_y &= 4714 \text{ kg} \\ \curvearrowleft B_y \cdot 70 &= 1140 \cdot 44 - 3300 \cdot 21 \curvearrowright & B_y &= -274 \text{ kg} \quad \text{also doch } \downarrow \\ A_x \cdot 70 &= 797 \cdot 26 + 236 \cdot 91 & A_x &= +603 \text{ kg} \\ B_x \cdot 70 &= 797 \cdot 44 - 236 \cdot 21 & B_x &= +430 \text{ kg} \quad \text{bleibt } \otimes \end{aligned}$$

Hieraus $A = 4750 \text{ kg}$ $B = 510 \text{ kg}$ und die Richtungen.

III. Man kann auch die Anteile der Komponenten von UV und von Z an den Stützkraften berechnen und bei jedem Anteil einzeln die Richtung feststellen:

Anteil	an A_y	an B_y	an A_x	an B_x
von Z	424 \uparrow	716 \uparrow	296 \otimes	501 \otimes
von UV	4290 \uparrow	990 \downarrow	307 \otimes	71 \odot
also	$A_y = 4714 \uparrow$	$B_y = 274 \downarrow$	$A_x = 603 \otimes$	$B_x = 430 \otimes$

Die Anteile werden paarweise mit je einer Rechenschiebereinstellung berechnet. Die Richtung der Anteile ergibt sich aus der Anschauung. Ob addiert oder subtrahiert werden muß, und welche Richtung A und B haben, ergibt sich dann von selbst.

202. Aufgabe (Riemenscheibe). Das Zahnrad Fig 141 wird durch eine Riemenscheibe angetrieben. Die Zahnkraft soll $Z = 400 \text{ kg}$ sein und am waagerechten Radius tangential angreifen. Die Riemenzüge sind waagrecht. Die Vorspannung Y sei 55% von X . Berechne die Auflagerkräfte A und B .

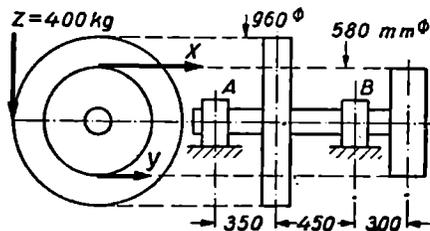


Fig 141. Riemenscheibe und Zahnrad

203. Aufgabe (Vorgelegewelle). Bei der Vorgelegewelle von Nr 197 Fig 138 II sei $a = 280$ $b = 470$ $c = 260 \text{ mm}$ $\alpha = 47^\circ$ $\beta = 18^\circ$. Kräfte und Radien nach Nr 199 und zwar I tangential — II unter 20° gegen den Umfang geneigt. Berechne die Auflagerkräfte:

204. Kurbel und Kupplung. Bei dem Kurbelgetriebe Fig 142 I II sei die Kraft in der Pleuelstange $K = 2100 \text{ kg}$.

I. Dann ist für die gezeichnete Stellung ($\alpha = 58^\circ$ $\beta = 10^\circ 52'$)

$$\text{Kraft in der Pleuelstange} = P = K / \cos \beta = 2138 \text{ kg}$$

Das Moment an der Kurbelwelle folgt aus der tangentialen Komponente

$$M \doteq P_t \cdot r = Pr \sin(\alpha + \beta) = Kr \sin(\alpha + \beta) / \cos \beta = 59800 \text{ kgcm}$$

Es wird durch eine Kupplung mit 6 Bolzen weitergeleitet. Die 6 Kräfte C , eigentlich statisch unbestimmt, nehmen wir als einander gleich an (zB Lederbandkupplung). Dann ist jede Kupplungskraft $C = 498 \text{ kg}$.

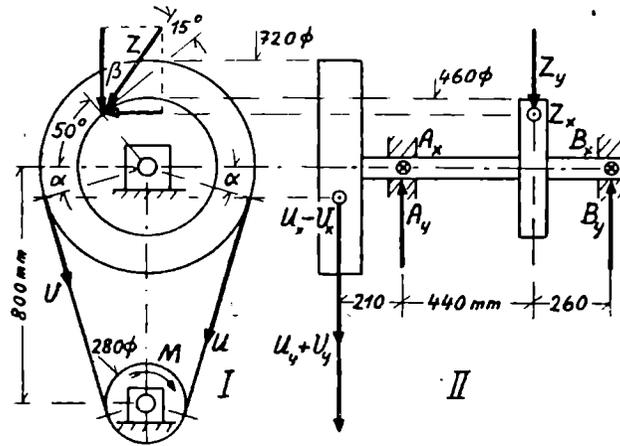


Fig 140.
Riemenscheibe
und Zahnrad

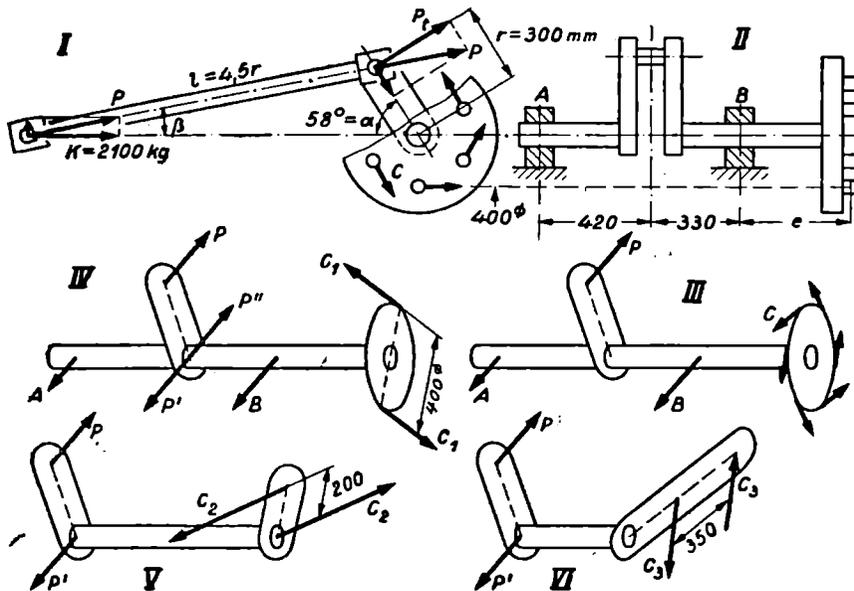


Fig 142. Kurbel und Kupplung, Kräftepaar

II. Die Auflagerkräfte A und B sind unabhängig von den Kupplungskräften, denn deren Momente für Achsen \perp Welle heben einander auf. Es kommt also nicht an auf den Abstand e der Kupplung vom Lager. — A und B sind $\parallel P$, denn für Achsen $\parallel P$ hat P kein Moment. Also gibt es keine Auflagerkraftkomponenten $\perp P$. Aus Achsen $\perp P$ folgt:

$$A = P \cdot 330/750 = 941 \text{ kg} \quad B = P \cdot 420/750 = 1197 \text{ kg}$$

als Stützkkräfte entgegengesetzt (Fig III), als Lagerdrucke $A' B'$ gleichgerichtet mit P . Die Kraft P wird eben auf die Lager verteilt. — Die Zahlen gelten nur für die betr Kurbelstellung. — P kann aber auch eine unveränderliche Zahnkraft sein. Dann ändern sich auch A und B nicht.

III. Die Kupplungskräfte C haben eine Resultante = Null. Sie sind also nach Nr 150 ersetzbar durch ein Kräftepaar, zB durch C_1C_1 (Fig IV), je 1495 kg im Abstand 400 mm voneinander. Die Auflagerkräfte AB haben eine Resultante P' auf der Achse am Ort der Kurbel. Das Paar PP' ist mit dem Paar C_1C_1 im Gleichgewicht. — A und B werden ebensogroß, als wenn P auf der Wellenachse angriffe (P'' in Fig IV). P'' würde dann nur Auflagerkräfte hervorrufen, keine Kupplungskräfte.

Den ganzen Sachverhalt kann man so darstellen (Fig III; IV): PAB und die sechs C sind im Gleichgewicht miteinander. Man ersetzt die sechs C durch das Paar C_1C_1 . Man fügt hinzu $P'P''$, die einander aufheben. Das stört das Gleichgewicht nicht. — Dann hat man die Kraft P ersetzt durch eine Kraft auf der Achse P'' und ein Kräftepaar PP' . Die Kraft P'' verursacht nur die Auflagerkräfte, das Paar PP' nur die Kupplungskräfte. So hat man die Wirkung des P auf die Lager und seine drehende Wirkung voneinander getrennt. (Vergl Nr 157.)

205. Kräftepaar im Raum. Das Gleichgewicht der Paare PP' und C_1C_1 ist unabhängig von dem Abstand der parallelen Ebenen, in denen sie liegen. Denn ihr Moment ist für jede Achse \parallel Welle das gleiche und für jede Achse \perp Welle Null. Diese Eigenschaft der Kräftepaare kommt hinzu zu den schon in Nr 149 ÷ 157 festgestellten Eigenschaften.

Zwei Kräftepaare sind miteinander im Gleichgewicht,
wenn sie in parallelen Ebenen liegen
und entgegengesetzte Momente (Kraft mal Abstand) haben.
Ein Kräftepaar kann gedreht und verzerrt werden.
Es kann verschoben werden nicht nur in seiner Ebene,
sondern auch parallel zu sich beliebig im Raum,
ohne daß das Gleichgewicht mit den andern Paaren gestört wird.

Die sechs Kupplungskräfte C sind also ersetzbar nicht nur durch C_1C_1 , sondern auch durch unendlich viele andre Paare zB C_2C_2 (Fig V), je 2990 kg in 200 mm Abstand voneinander, oder C_3C_3 (Fig VI), je 1709 kg in 350 mm Abstand voneinander, in Ebenen \perp Welle, in beliebigem Abstand von der Ebene der Kurbel, und innerhalb der Ebene in beliebiger Richtung und Lage zur Welle.

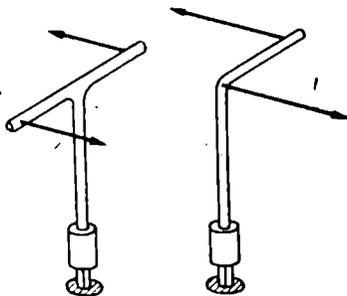


Fig 143. Steckschlüssel

Einen Steckschlüssel (Fig 143), mit dem man einen Hahn im Boden aufdrehen will, muß man drehen mit einem Kräftepaar, das in waagerechter Ebene liegt. Sonst kippt er um. Die Kräfte, die man ausübt, dürfen keine Resultante haben, höchstens auf Mitte Schlüssel \downarrow , und kein Moment für eine waagerechte Achse. Es ist aber auch hier gleichgültig, wie lang der Schlüssel ist, und wie das Paar zur Achse liegt, symmetrisch oder einseitig.

206. Winde. Auch bei mehreren schiefen Kräften kann man das Gleichgewicht betrachten unter dem Gesichtspunkt des Gleichgewichts von Kräftepaaren wie in Nr 204. — An der Trommel der Winde Fig 144 I II wirkt ein Windenzug $W = 1200$ kg. Die Zahnkraft Z ist gegen die Tangente geneigt um 15° .

I. Die Auflagerkräfte sind so groß, als wenn W und Z auf der Achse in W'' und Z'' lägen (Fig III), während die Kräftepaare $W W'$ und $Z Z'$ miteinander im Gleichgewicht sind:

$$\curvearrowleft Z \cdot 46 \cos 15^\circ = W \cdot 32 \curvearrowright \quad Z = 864 \text{ kg}$$

Anteil von W an A	400 kg	an B	800 kg	W
„ „ Z „ A	648 .	„ B	216 .	Z

Aus diesen Anteilen ist in jedem Lager die Resultante zu bilden. Das Gleichgewicht an der „Welle“ ist damit zurückgeführt auf das Gleichgewicht an der „Achse“.

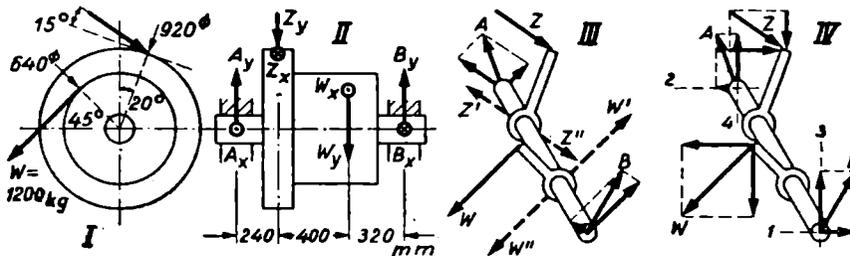


Fig 144. Windentrommel und Zahnrad

II. Einfacher ist es, mit rechtwinkligen Komponenten zu rechnen:

$$W_x = 850 \quad W_y = 850 \quad Z_x = 708 \quad Z_y = 495 \text{ kg}$$

und dann Momentengleichungen hinschreiben für die Achsen 1 2 3 4 (Fig IV), oder besser Anteile zu berechnen:

$$\begin{array}{cccc} 283 \otimes & & 567 \otimes & 283 \uparrow & 567 \uparrow \\ 531 \odot & & 177 \odot & 371 \uparrow & 124 \uparrow \\ A_x = 248 \odot & B_x = 390 \otimes & A_y = 654 \uparrow & B_y = 691 \uparrow & \\ A = 700 \text{ kg} & (69^\circ 14') & B = 794 \text{ kg} & (60^\circ 33' \text{ gegen Waagerechte}) & \end{array}$$

207. Schneckengetriebe. An der Welle des Schneckenrades Fig 145 wirkt eine Last $= 2000$ kg am Trommelradius 12 cm, also ein Moment $M_1 = 24000$ kgcm. Das Rad hat die Zähnezahl $z = 16$. Der „Teilkreis“, der durch die gezeichnete mittlere Eingriffsstelle geht, hat den Durchmesser $D = 384$ mm. Die Schnecke hat den mittleren $\varnothing d = 180$ mm. Sie wird angetrieben durch eine Kupplung, ein Kräftepaar mit dem Moment M_2 , welches also keinen Einfluß auf die Auflagerkräfte hat.

I. Auf jeden Zahn entfällt ein bestimmter Umfangsteil (Zahn + Lücke)

$$\text{die „Teilung“} = t = \frac{\pi D}{z} = \frac{\pi \cdot 384}{16} = 24 \pi = 75,40 \text{ mm}$$

Der Schraubengang, eine aufgewickelte schiefe Ebene, hat
die Ganghöhe = t den mittleren $\varnothing d = 180$ mm

also die „Steigung“ = $tg\alpha = \frac{t}{\pi d} = \frac{24}{180} = 0,1333 \quad \alpha = 7^{\circ}36'$

Die Zahnkraft K steht bei reibungslosem Betrieb \perp Zahnflanke (Fig II). Der Zahn bildet ebenso wie der Schraubengang den Winkel α mit der Richtung $x \perp$ Zeichenebene. Außerdem ist die Zahnflanke geneigt. K hat also 3 Komponenten, Der Winkel β sei 15° . Die Neigung der schieflaufenden Zahnflanke gegen den Radius ist etwas kleiner.

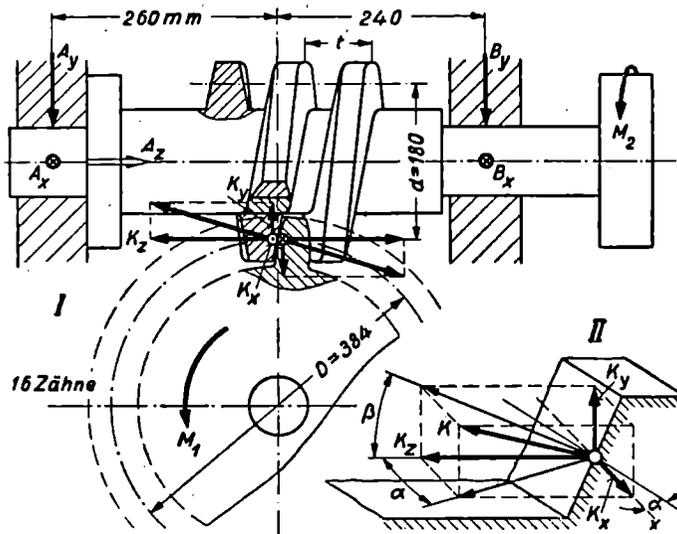


Fig. 145. Schneckengetriebe

II. Wir berechnen aus der Belastung des Zahnrades

die Längskomponente = $K_z = M_1/R = 1250$ kg

die anderen } $K_x = K_z tg\alpha = 167$ kg

Komponenten } $K_y = K_z tg\beta = 335$ kg

das Kupplungsmoment = $M_2 = K_x r = 1500$ kgcm

die Drucklagerkraft } = $A_z = K_z = 1250$ kg

ferner die Komponenten der Lagerdrucke

aus $K_x \odot$ $A_x = 80$ kg \otimes $B_x = 87$ kg \otimes

aus $K_y \uparrow$ 161 \downarrow 174 \downarrow

aus $K_z \leftarrow$ 225 \downarrow 225 \uparrow

also $A_y = 386$ kg \downarrow $B_y = 51$ kg \uparrow

Das Kräftepaar $K_z A_z \curvearrowright$ fordert bei A und B ein \curvearrowleft Kräftepaar! Deshalb geht B_y nicht \downarrow , wie im Hinblick auf K_y gezeichnet, sondern \uparrow . Die Welle liegt nicht oben an, sondern unten. Man sieht das auch daraus, daß die Resultante von K_y und K_z unterhalb des Lagers A vorbeigeht

um $\frac{1}{2} d - 260 tg\beta = 20,4$ mm Also $B_y = 1250 \cdot 20,4/500 = 51$ kg

III. Auch hier, wie in Nr 198, verhalten sich die Momente umgekehrt wie die Umlaufzahlen:

$$\frac{n_2}{n_1} = \text{Zähnezahl} = z \quad \frac{M_2}{M_1} = \frac{K_x r}{K_z R} = \frac{d}{D} \operatorname{tg} \alpha = \frac{d t}{D \pi d} = \frac{1}{z} = \frac{n_1}{n_2}$$

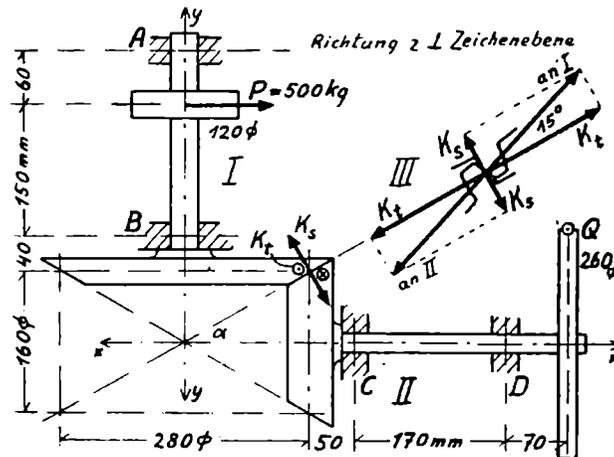


Fig 146. Kegelräder

208. Kegelräder. Die Welle Fig 146 I wird angetrieben durch die Umfangskraft $P = 500 \text{ kg}$. Sie überträgt die Bewegung durch Kegelräder auf die Welle II, die am Umfang des Zahnrades die Kraft Q überwindet. — Man kann auch Q als treibende Kraft, P als Widerstand ansehen. — Die Kraft K zwischen den Kegelrädern sei um 15° gegen die gemeinsame Tangente der sich berührenden Teilkreise geneigt. Sie liegt in einer Ebene \perp Zeichenebene, die in Fig III in die Zeichenebene umgeklappt ist.

Aus P folgt $K_t = 214 \text{ kg}$ $K_s = 57,4 \text{ kg}$

Danach die Komponenten von A und B . Wir nennen die Komponentenrichtungen $x \parallel$ Welle II $y \parallel$ Welle I $z \perp$ Zeichenebene.

Dann ist Drucklagerkraft $= B_x = K_s \cos \alpha = 49,9 \text{ kg} \downarrow$

Anteil von $P \rightarrow$ $357 \leftarrow$ $143 \leftarrow$

„ „ $K_s \sin \alpha \leftarrow$ $5 \leftarrow$ $34 \rightarrow$

„ „ $K_s \cos \alpha \uparrow$ $33 \rightarrow$ $33 \leftarrow$

also $A_x = 329 \leftarrow$ $B_x = 142 \leftarrow$

Allein aus K_t $A_z = 41 \odot$ $B_z = 255 \otimes$

209. Aufgabe (Kegelräder). Berechne ebenso die Kräfte an Welle II.

210. Gartenpforte. Die Pforte Fig 147 ruht auf 2 Angeln. Sie ist durch Eigengewicht $G \downarrow$ und Winddruck $W \odot$ belastet und durch eine schief im Raum liegende Stange S gestützt. Die Mittellinie der Angeln und die Angriffspunkte von S und G liegen in einer Ebene. Die Stützkkräfte zu berechnen.

Für S ist Azimut $= \delta = 40^\circ 55'$ Neigung $= \varepsilon = 35^\circ 12'$ (Nr 97)

Aus dem Winddruck folgt $S_y = 0,600 W$

hieraus $S_x = 0,692 W$ $S_z = 0,646 W$ $S = 1,120 W$

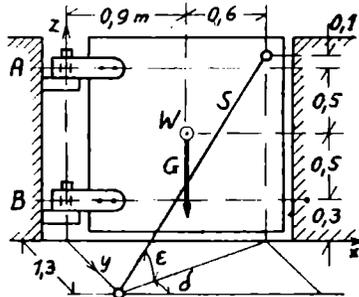
In den Lagern ist $A_z + B_z = G - 0,646 W$ Verteilung statisch unbestimmt. Ist $W > 1,55 G$ so wird die Pforte ausgehoben.

$$\leftarrow A_x = 0,900 G - 0,969 W + 0,761 W$$

$$\rightarrow B_x = 0,900 G - 0,969 W + 0,069 W$$

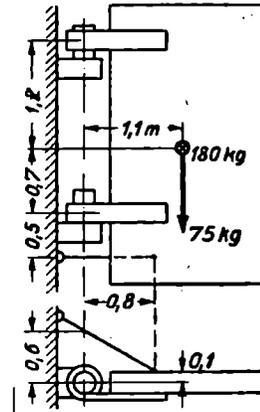
$$\otimes A_y = 0,500 W - 0,660 W \quad \text{also } \odot !$$

$$\otimes B_y = 0,500 W + 0,060 W$$



↑ Fig 147. Gartenpforte

Fig 148. Tür mit Eigengewicht und Winddruck →



211. Aufgabe (Tür). Die Tür Fig 148 ist in 2 Angeln gelagert, von denen nur die untere trägt. Sie ist belastet durch Eigengewicht und Winddruck und gestützt durch einen Haken, der in einer waagerechten Ebene liegt. Sein Angriffspunkt an der Tür liegt nicht in einer Ebene mit Mittellinie Angeln und Eigengewicht. Er kann aber dahin verlegt werden. Berechne die Stützkraft: im Haken H , untere Angel A , obere Angel B . Richtungen: x waagrecht in der Tür; $y \perp$ Tür; z vertikal.

212. Ladebaum räumlich. Der Ladebaum Fig 149 I ist belastet mit Eigengewicht $E = 400 \text{ kg}$ Last $P = 650 \text{ kg}$ Windzug $W = P$. W geht nach rechts hinten am Mast vorbei. Der Baum muß deshalb außer durch die Verspannung V noch gehalten werden durch ein nach links gehendes Seil S . Belastung, Verspannung und Seil greifen an verschiedenen Punkten an. Die Stützkraft im Gelenk G liegt daher nicht mehr in der Ebene Mast/Baum. (Vergl Nr 64; 128.) — Wir nennen die Richtungen: $x =$ Projektion des Baums auf die Horizontalebene, $y =$ Normale dazu in der Horizontalebene, z vertikal. Die Richtungen der Seile sind angegeben durch das Azimut gegen die x -Richtung und die Neigung gegen die z -Richtung (Nr 97).

Zur Berechnung von S dient die Momentengleichung für die z -Achse durch G . Um diese Achse drehen nur die horizontalen Komponenten von S und W . Ihr Hebelarm ist der kürzeste Abstand zwischen Achse und

Angriffslinie, das Lot h_s bzw h_w von G auf die Projektion des Seils.

Dann ist $(S \sin 59^\circ) \cdot 4,1 \sin 51^\circ \sin 31^\circ = (650 \sin 67^\circ) \cdot 5,6 \sin 51^\circ \sin 62^\circ$

$$S = 1634 \text{ kg}$$

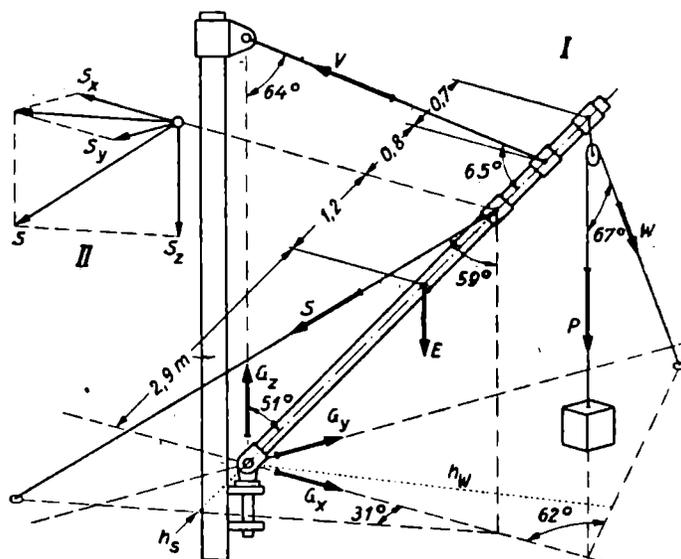


Fig 149. Ladebaum, räumlich

Zur Berechnung von V drehen wir um die y -Achse durch G . Wir schieben dazu S und W an ihren Angriffspunkt am Baum und bilden zuvor ihre Komponenten (Fig II)

$$\begin{array}{lll} S_x = 1200 & S_y = 721 & S_z = 842 \text{ kg} \\ W_x = 281 & W_y = 528 & W_z = 254 \text{ kg} \end{array}$$

$$\begin{aligned} V \cdot 4,9 \sin 65^\circ &= (650 + 254) \cdot 5,6 \sin 51^\circ - 281 \cdot 5,6 \cos 51^\circ && \text{aus } P \text{ W} \\ &+ 842 \cdot 4,1 \sin 51^\circ - 1200 \cdot 4,1 \cos 51^\circ && \text{aus } S \\ &+ 400 \cdot 2,9 \sin 51^\circ && \text{aus } E \end{aligned}$$

$$V = 772 \quad V_x = 694 \quad V_y = 0 \quad V_z = 338 \text{ kg}$$

Schließlich folgen G_x, G_y, G_z aus Komponentengleichungen

$$G_x = 2175 \quad G_y = 193 \quad G_z = 1808 \text{ kg}$$

213. Anzahl der Stützkraften beim Körper. Um einen Körper (Fig 150 I II) gegen beliebige Kräfte im Raum statisch bestimmt zu lagern, legt man zunächst einen Punkt A fest durch

1 Kipplager = 3 Stäbe = 3 Stützkraftkomponenten

Ein zweiter Punkt B darf, weil die Strecke AB bestimmt ist und sich auch ausdehnen könnte, nur noch gestützt werden durch

1 Rollenkipplager = 2 Stäbe = 2 Stützkraftkomponenten

Die Ebene der Stäbe, bzw die Achse der Rollen darf nicht durch A gehen, ist aber sonst beliebig.

Schließlich muß noch die Drehung um AB verhindert werden durch
 1 Doppelrollenkipplager = 1 Stab (Pendelsäule in C) = 1 Stützkraft
 C darf nicht durch die Achse AB gehen, ist aber sonst beliebig.

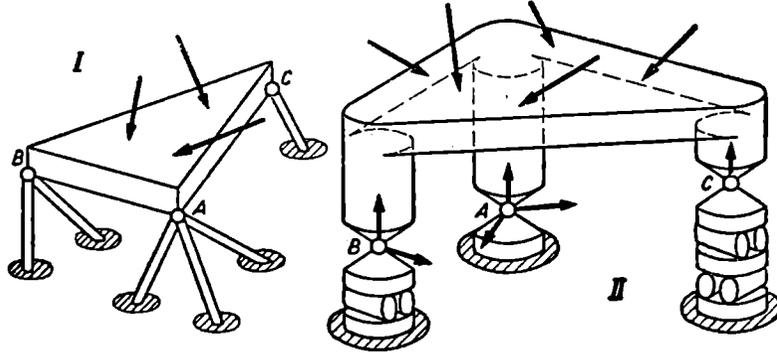


Fig 150. Statisch bestimmte Aufstellung des Körpers

Man braucht also 6 Stäbe, 6 Stützkraftkomponenten. — Der Körper im Raum hat eben 6 „Freiheitsgrade“ (Nr 104; 146): Man kann einen seiner Punkte nach 3 Dimensionen verschieben und man kann ihn außerdem um eine Achse beliebiger Richtung (durch 2 Winkel, Azimut und Neigung; gegeben) um 1 beliebigen Winkel drehen; oder man dreht ihn um 3 aufeinander senkrechte Achsen nacheinander um je 1 beliebigen Winkel.

Bei der Schnecke (Nr 207) entspricht dem Punkt A das Lager A , dem Punkt B das Lager B , dem Punkt C die Kupplung mit dem Moment M_2 , das als 6-te Stützkraft die Drehung verhindert — Bei der Winde (Nr 206) haben wir nur 4 Auflagerkomponenten und 1 Zahnkraft. Es fehlt die Drucklagerkraft, weil nur Kräfte \perp Welle auftreten. — Beim Ladebaum (Nr 212) sind auch nur 5 Unbekannte, weil kein Moment um die Achse des Baums besteht. — Bei den Platten (Nr 191 ÷ 196) sind nur senkrechte Kräfte und demnach nur 3 statisch bestimmte Stützkraften vorhanden.

214. Einseitig belasteter Wagen. Auf einem Schrägaufzug (Fig 151 I II) der Steigung 4:10 wird ein Wagen hochgewunden. Das Zugseil ist \parallel der schiefen Ebene. Auf dem Wagen liegt einseitig eine Last G , um $e=0,4$ m aus der Mitte. Dann werden die Spurkränze an den Rädern A und D beansprucht. — Wir berechnen nur die Anteile von G an den Stützkraften. Für das in der Mittelebene anzunehmende Eigengewicht ist der Wagen ja nur als Scheibe aufzufassen, nicht als Körper.

I. Wir bilden Momenten- und Komponentengleichungen nach Fig III, wo der Körper als Kasten über den Auflagerpunkten gezeichnet ist:

Komponenten von G : $\searrow P=0,371 G$ $\swarrow Q=0,928 G$

Zug im Seil: Komponenten \parallel Ebene: $Z=P=0,371 G$

Kraft S an den Spurkränzen: Achse \perp Ebene im Angriffspunkt von Z :

$$\curvearrowright S \cdot 2,6 = P \cdot 0,4 \quad \curvearrowleft S = 0,057 G$$

Waagerechte Achsen über CD bzw. AB durch Angriffslinie von Z :

$$\curvearrowright (A + B) \cdot 2,6 = Q \cdot 1,4 - P \cdot 0,6 \quad \curvearrowright \quad A + B = 0,414G$$

$$\curvearrowleft (C + D) \cdot 2,6 = Q \cdot 1,2 + P \cdot 0,6 \quad \curvearrowleft \quad C + D = 0,514G$$

Achse in der Angriffslinie von Z :

$$(A + C - B - D) \cdot 0,75 = Q \cdot 0,4 \quad A + C - B - D = 0,495G$$

Die Achsen sind so gewählt, daß Z nicht mehr in den Gleichungen auftritt. Auf die Maße u und r kommt es nicht an. Weitere unabhängige Statik-Gleichungen gibt es nicht. Es fehlt noch eine Gleichung für die 4 Kräfte $A B C D$. Der Wagen auf 4 Rädern ist statisch unbestimmt. (Vgl Nr 191)

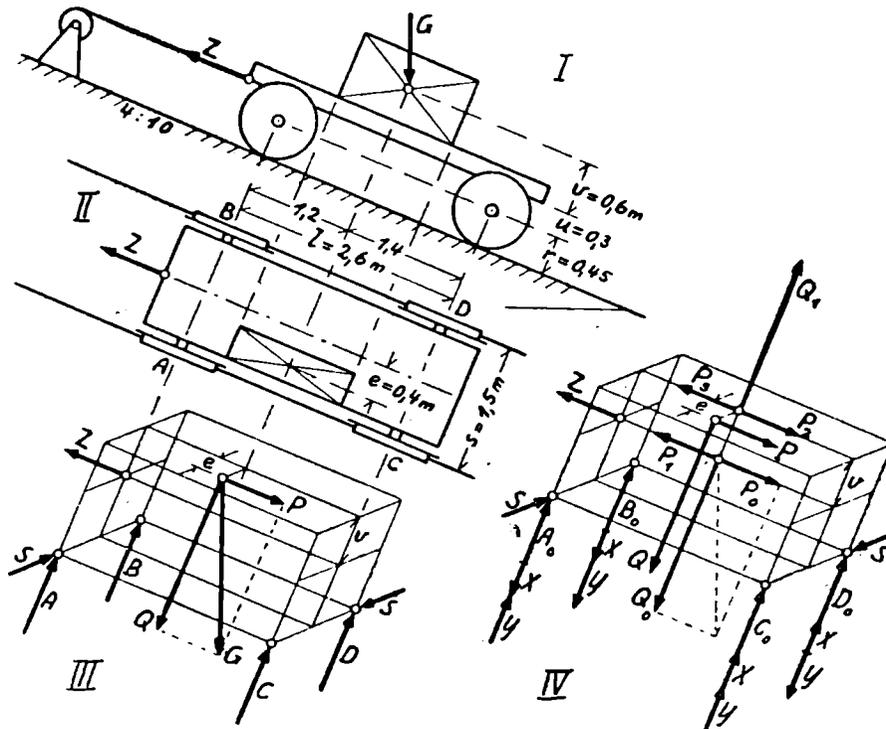


Fig 151. Einseitig belasteter Wagen

II. Der Wagenkasten sei starr. Die Lager liegen genau in einer Ebene. Die Schienen seien gerade. Die Federn, mit denen der Kasten auf den Achsen ruht, seien einander gleich. Sie sind wegen e links mehr zusammengedrückt als rechts. Der Kasten neigt sich vorn und hinten um den gleichen Winkel. Also ist der Unterschied der Verkürzungen der Federn A und B gleich dem Unterschied der Verkürzungen von B und C . Bei gleichen Federn besteht dieselbe Beziehung auch zwischen den Kräften: $\Delta l_a - \Delta l_b = \Delta l_c - \Delta l_d$ $A - B = C - D$ Dies ist die vierte Gleichung!
 Auflösung: $A = 0,331G$ $B = 0,083G$ $C = 0,381G$ $D = 0,133G$
 Kontrolle: $A + B + C + D = |Q = 0,923G$

215. Andere Lösung. I. Man kann die Lösung zurückführen auf den Fall, daß die Last in der Mittelebene des Wagens und zwar in der Angriffslinie von Z liegt. In dieser Lage ($Q_0 P_0$ in Fig IV, Gleichgewicht am „Punkt“) ist nämlich einfach

$$Z = P_0 = 0,371 G \quad A_0 = B_0 = 0,250 G \quad C_0 = D_0 = 0,214 G$$

Um von diesem einfachen Fall auf die vorliegende Aufgabe zu kommen, verlegen wir P nach oben durch Hinzufügung von Kräftepaar $P_1 P_2$

$$\begin{array}{llll} \text{,,} & \text{,,} & P \text{ zur Seite} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{Kräftepaar } P_1 P_2 \\ \text{,,} & \text{,,} & Q \text{ zur Seite} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{Kräftepaar } P_3 P \\ \text{,,} & \text{,,} & & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{Kräftepaar } Q_1 Q \end{array}$$

Damit sind $Q_0 P_0$ aufgehoben und $Q P$ angebracht.

II. Das Paar $P_1 P_2$ entlastet vorn, überlastet hinten um X :

$$\curvearrowleft 2X \cdot 2,6 = P \cdot 0,6 \curvearrowright \quad X = 0,043 G$$

Das Paar $P_3 P$ fordert das Paar SS unabhängig vom Abstand der Ebenen:

$$S \cdot 2,6 = P \cdot 0,4 \quad S = 0,057 G$$

Das Paar $Q Q_1$ entlastet rechts, überlastet links. Die Verteilung auf vorn und hinten ist statisch unbestimmt. Bei gleichen Federn sind die Anteile Y an den Raddrücken vorn und hinten einander gleich (Nr 214 II), trotzdem Q nicht in der Mitte zwischen den Achsen liegt:

$$2Y \cdot 1,5 = Q \cdot 0,4 \quad Y = 0,124 G$$

$$\begin{array}{ll} \text{Also} & A = A_0 - X + Y = 0,331 G \quad C = C_0 + X + Y = 0,381 G \\ & B = B_0 - X - Y = 0,083 G \quad D = D_0 + X - Y = 0,133 G \end{array}$$

Daß wir vorn und hinten die gleichen Y angenommen haben, ist gleichwertig mit der Gleichung $A - B = C - D$ in Nr 214 II.

III. Man kann den Anteil X vermeiden, wenn man G in seiner Angriffslinie verlegt in die Ebene parallel der schiefen Ebene durch Z . Dafür werden $A_0 B_0$ kleiner, $C_0 D_0$ größer.

216. Andere Stützungen. I. Der dreirädrige Wagen ist statisch bestimmt. Wir denken uns nur ein Rad in der Mitte von A und B . Diese Stützkraft nennen wir E . Dann ist $E_0 = 0,500 G$.

Wegen $P_1 P_2$ wird E entlastet um $2X = 0,086 G$

Das Paar $Q Q_1$ kann jetzt nur noch durch Kräfte an den Hinterrädern im Gleichgewicht gehalten werden, durch ein Paar $2Y 2Y$ vom Betrag $0,248 G$ unabhängig vom Abstand der Ebenen der beiden Paare.

$$\begin{array}{ll} \text{Also} & E = E_0 - 2X = 0,414 G \quad C = C_0 + X + 2Y = 0,505 G \\ & D = D_0 + X - 2Y = 0,009 G \end{array}$$

II. Der Wagen werde nicht durch ein Zugseil gehalten, sondern durch Bremsen an den Hinterrädern. Dann bestehen dort Reibungskräfte, zusammen = P in Höhe der Schiene. Jetzt kommt es auf $r + u + v$ an. — Diese Reibungskräfte links und rechts können einander gleich sein oder verschieden. Davon hängt die Beanspruchung der Spurkränze ab: Äußerster Fall: Die Bremse links könnte versagen und nur die rechte zufassen. Eine neue statische Unbestimmtheit. Vergl Nr 135.

III. Statt Bremsen anzuziehen, kann man Hemmschuhe unter die Räder legen. Dann greift die an Stelle von Z tretende Stützkraft in der Höhe der Achse an.

IV. Bei einer Bergstütze wie in Nr 142 Fig 96 würde die senkrechte Komponente derselben Anteile an den Raddrücken haben:

V. Die Kräfte S kann man sich auch durch Reibung aufgenommen denken statt durch Spurkränze. Ihre Verteilung auf A und B bzw auf C und D ist dann wieder statisch unbestimmt.

217. Aufgabe (einseitig gestützter Wagen). Der Wagen Nr 142 Fig 96 werde statt durch die Bergstütze gestützt durch einen Stein oder Hemmschuh, den man unter das linke Hinterrad legt. Spurweite 1,5 m. Berechne die Stützkräfte vorn links A_l , rechts A_r , hinten B_l , B_r .

220. Zusammenfassung. Auch im Raum berechnen wir das Gleichgewicht nach Komponenten- und Momentengleichungen. Um eine Achse dreht nur die Komponente der Kraft \perp Achse mit einem Hebelarm gleich dem kürzesten Abstand der Angriffslinie von der Achse. So erhalten wir die 6 statisch bestimmten Stützkräfte von Waagen, Wellen mit Zahnrädern, Schneckenrädern, Wagen u dergl. — Besondere Eigenschaften zeigt wieder das Kräftepaar. Es darf gedreht, verschoben, verzerrt und in parallele Ebenen verlegt werden. Wir benutzen es, um die Wirkung von Kräften auf einfachere Fälle zurückzuführen: Die Verlegung der Kraft von der Wellenachse an den Zahnradumfang, oder aus der Mittelebene des Wagens heraus zur Seite ist zu erfassen durch Hinzufügung von Kräftepaaren.

IX. Mehrere Körper, Fachwerk

221. Lagerträger. In der Mitte eines Schachtes hängt eine Last P in einer losen Rolle nach Fig 152 I. Das Seilende und die feste Rolle sind auf 2 Trägern gelagert. Der Windenzug W ist waagrecht \leftarrow . Der Träger ist links und rechts eingemauert. Das bedeutet zwei \uparrow Auflagerkräfte A B und eine \rightarrow Stützkraft C . Ihr Angriffspunkt ist statisch unbestimmt. Es kommt darauf an, wie sich das Trägerende an das Mauerwerk anlegt. Wir nehmen C auf Mitte Träger an. $C = W = P/2$.

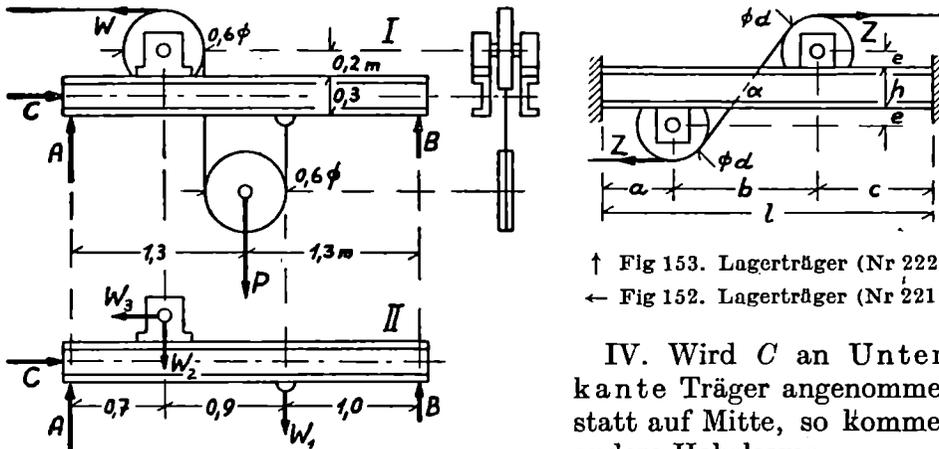
I. P verteilt sich je zur Hälfte auf A und B . Das Kräftepaar WC \curvearrowright überlastet A , entlastet B :

$$A = \frac{1}{2}P + \frac{0,65}{2,60}W = 0,625P \qquad B = \frac{1}{2}P - \frac{0,65}{2,60}W = 0,375P$$

II. Oder: der Träger ist unmittelbar belastet durch Seilende und Lagerdruck (Fig II): $W_1 = W_2 = W_3 = C = P/2$

$$A = \frac{1,0 + 1,9 + 0,35}{2,60}W = 0,625P \qquad B = \frac{1,6 + 0,7 - 0,35}{2,60}W = 0,375P$$

III. Vergleich: Das „Gleichgewicht am Ganzen“ I und das „Gleichgewicht am Träger“ II ergibt dieselben Stützkräfte: Bei I sind $W_1 W_2 W_3$ innere Kräfte. Bei II hat W_3 einen kleineren Hebelarm als W bei I (0,35 statt 0,65). Dafür liegt die Resultante von W_1 und W_2 links von P . — Die Gegenkräfte von $W_1 W_2 W_3$ sind an den Rollen im Gleichgewicht mit P und W . Sie selbst sind also Ersatz für P und W . Sie übertragen nur ihre Wirkung. Sie haben die gleichen Komponenten- und Momentensummen wie diese, ergeben also dieselben $A B C$. — Schon in Nr 127 IV wurde bemerkt, daß man die Stützkräfte des Drehkrans auch aus den Kräften $C D W$ an der Säule berechnen kann. Vergl auch Nr 116.



↑ Fig 153. Lagerträger (Nr 222)

← Fig 152. Lagerträger (Nr 221)

IV. Wird C an Unterkante Träger angenommen statt auf Mitte, so kommen andere Hebelarme.

222. Aufgabe (Lagerträger). Berechne die Stützkräfte für den Träger Fig 153. — I: aus den $\leftarrow Z \rightarrow$ — II: aus den Lagerdrucken.

223. Windengestell. An der Trommel Fig 154 wirkt ein waagerechter Windzug $W = 200$ kg. An der augenblicklich waagrecht stehenden Kurbel wirkt die (nicht notwendig senkrechte) Kraft $K \uparrow$. Um die Aufgabe statisch bestimmt zu machen, nehmen wir an, daß die Winde auf 3 Punkten $A B C$ gelagert ist, und daß nur die Stützkräfte $A_x A_y B_x B_y C_y$ auftreten, nicht C_x , nur 5 Unbekannte, weil Kräfte \parallel Welle fehlen (Nr 213). Wir berechnen sie aus dem Gleichgewicht am Ganzen und auch aus den Lagerdrucken, nachdem wir diese zuvor berechnet haben.

$$\text{I. Aus } W = 200 \text{ kg folgt } Z = 88,9 \text{ kg} \quad K = 21,05 \text{ kg}$$

Das Gleichgewicht am Ganzen ergibt (vergl Nr 192) für Achse AB und für Achsen durch $C \parallel$ und $\perp AB$:

$$\begin{aligned} \curvearrowright C_y \cdot 110 &= W \cdot (52 + 16) + K \cdot (55 + 38) \curvearrowright & C_y &= 141,4 \text{ kg } \downarrow \\ \curvearrowleft (A_y + B_y) \cdot 110 &= W \cdot (52 + 16) - K \cdot (55 - 38) \curvearrowleft \\ \curvearrowleft (B_y - A_y) \cdot 44 &= K \cdot (30 + 28) \curvearrowleft \\ A_y + B_y &= 120,4 \text{ kg } \uparrow \} & A_y &= 46,3 \text{ kg } \uparrow & A_x &= W \cdot 36/88 = 81,8 \text{ kg } \odot \\ B_y - A_y &= 27,8 \text{ kg } \uparrow \} & B_y &= 74,1 \text{ kg } \uparrow & B_x &= W \cdot 52/88 = 118,2 \text{ kg } \odot \end{aligned}$$

II. Stützkräfte DE der Trommel, FG der Kurbelwelle:

$$\begin{aligned} D_x \cdot 60 &= W \cdot 22 - Z_1 \cdot 48 & E_x \cdot 60 &= W \cdot 38 - Z_1 \cdot 12 \\ D_x &= 2,2 \text{ kg} \odot & D_y &= 0 & E_x &= 108,9 \text{ kg} \odot & E_y &= 0 \\ F_x &= Z_2 \cdot 48/60 = 71,1 \text{ kg} \odot & G_x &= Z_2 \cdot 12/60 = 17,8 \text{ kg} \odot \\ F_y &= K \cdot 88/60 = 30,9 \text{ kg} \downarrow & G_y &= K \cdot 28/60 = 9,8 \text{ kg} \uparrow \end{aligned}$$

III. Die Gegenkräfte wirken am Gestell der Winde. Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned} \curvearrowright C_y \cdot 110 &= (D_x + E_x) \cdot 52 + (F_x + G_x) \cdot 97 + (F_y - G_y) \cdot 55 \curvearrowright \\ & & C_y &= 141,4 \text{ kg} \downarrow \\ \curvearrowleft (A_y + B_y) \cdot 110 &= (D_x + E_x) \cdot 52 + (F_x + G_x) \cdot 97 - (F_y - G_y) \cdot 55 \curvearrowleft \\ & & A_y + B_y &= 120,4 \text{ kg} \uparrow \\ \curvearrowleft (B_y - A_y) \cdot 44 &= F_y \cdot 30 + G_y \cdot 30 \curvearrowleft & B_y - A_y &= 27,8 \text{ kg} \uparrow \\ A_x \cdot 88 &= (D_x + F_x) \cdot 74 + (E_x + G_x) \cdot 14 & A_x &= 81,8 \text{ kg} \odot \\ B_x \cdot 88 &= (D_x + F_x) \cdot 14 + (E_x + G_x) \cdot 74 & B_x &= 118,2 \text{ kg} \odot \end{aligned}$$

Dieselben Ergebnisse wie in I! Wie hängt das zusammen?

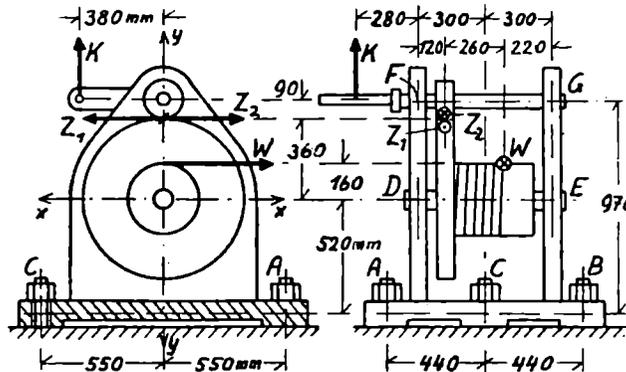


Fig 154. Windengestell

IV. Wir vergleichen zB die Berechnungen von C_y :

$$\begin{aligned} \text{In III war} & C_y \cdot 110 = (D_x + E_x) \cdot 52 + (F_x + G_x) \cdot 97 + (F_y - G_y) \cdot 55 \\ \text{Nach II ist} & D_x + E_x = W - Z_1 \quad F_x + G_x = Z_2 \quad F_y - G_y = K \\ \text{Einsetzen} & C_y \cdot 110 = (W - Z_1) \cdot 52 + Z_2 \cdot 97 + K \cdot 55 \\ \text{Nach I war} & C_y \cdot 110 = W \cdot (52 + 16) + K \cdot (55 + 38) \end{aligned}$$

In III liegen also W und K an den Lagern, in I am Trommel- bzw Kurbelumfang. Dafür treten in III Z_1 und Z_2 auf, die in I innere Kräfte waren. Wir wollen durch Umformung III aus I gewinnen und führen deshalb in I noch ein die inneren Kräfte Z_1 Z_2 , die einander aufheben, in der Höhe $88 = 52 + 36 = 97 - 9$:

$$C_y \cdot 110 = W \cdot (52 + 16) - Z_1 \cdot (36 + 52) + Z_2 \cdot (97 - 9) + K \cdot (38 + 55)$$

Nun sind an Trommel- bzw Kurbelwelle im Gleichgewicht

$$W \cdot 16 = Z_1 \cdot 36 \quad Z_2 \cdot 9 = K \cdot 38$$

$$\text{Also } C_y \cdot 110 = W \cdot 52 - Z_1 \cdot 52 + Z_2 \cdot 97 + K \cdot 55$$

So ist III aus I entstanden: Die Momentenänderungen infolge der Verlegung von W und Z_1 bzw K und Z_2 vom Umfang an die Achse heben einander auf; ebenso Z_1 und Z_2 als innere Kräfte.

V. Ebenso weist man die Übereinstimmung der Gleichungen für $A_y + B_y$ nach.

VI. $B_y - A_y$ wird in I aus K , in III aus F_y und G_y berechnet. K ist im Gleichgewicht mit diesen beiden, weil Z_2 keinen Einfluß auf die y -Komponenten hat. K ist also Resultante der weitergegebenen F_y und G_y ; hat also für jede Achse dasselbe Moment wie diese (Nr 117 I III). — Wäre aber Z_2 nicht waagrecht, so würde Z_1 auch Komponenten D_y und E_y hervorrufen, die dann wieder in III berücksichtigt werden müßten.

VII. A_x und B_x folgen in I nur aus W , in III aus $D_x F_x E_x G_x$. Nun sind $D_x E_x$ gleichwertig mit WZ_1 , $F_x G_x$ gleichwertig mit Z_2 , wenn man von der bei senkrechten Achsen belanglosen Höhenlage absieht. Z_1 und Z_2 heben einander auf. So ergibt sich auch hier das gleiche Moment.

224. Aufgabe (Windengestell): Führe dieselben Berechnungen und Vergleiche durch für den Fall, daß W in Fig 154 senkrecht abwärts \downarrow gerichtet ist, bei sonst gleichen Maßen.

225. Dreigelenkbogen. Der Dachbinder Fig 155 I einer Halle hat 2 Auflagergelenke $A B$, außerdem ein Gelenk bei C . Dadurch wird er trotz unverschieblicher Auflagerpunkte statisch bestimmt. Dieser „Dreigelenkbogen“ ist belastet durch die Eigengewichte $P Q$ der beiden Teile einschließlich Dach und Wand, durch Winddruck W von links, durch Schneelast S auf der anderen Seite.

I. Sind die Eigengewichte allein vorhanden und einander gleich ($P = Q$), so legen sich die Binderteile im Scheitelgelenk mit einem gewissen Druck aneinander und üben waagerechte Kräfte aufeinander aus (Fig II). Man denke sich nämlich 2 gleiche Leitern wie Fig 88 II von links und rechts gegen eine senkrechte Wand gestellt. Dann fordern sie die gleichen Stützkräfte (dort B) \leftarrow bzw \rightarrow . Nimmt man die Wand weg, so stützen sie einander mit diesen waagerechten Kräften. Die Kräfte in den Auflagergelenken zielen zum Schnittpunkt von P bzw Q mit der Waagerechten im Scheitel. — Oder: Man denke sich die Bogenteile hängend und im Scheitel durch einen Faden miteinander verbunden (Fig III; IV), dann wird für $P = Q$ der Faden sich waagrecht stellen, für $P > Q$ aber schief. In diesem Fall ist also die Kraft C im Scheitelgelenk schief. — Ist der Winddruck W allein vorhanden (Fig V), so liegen die Stützkräfte B und C am unbelasteten Teil in einer Linie. A zielt zum Schnittpunkt W/C . — Wie sieht das Bild für S allein aus?

II. Hiernach haben wir also im allgemeinen Fall in jedem Gelenk eine Kraft von unbekannter Richtung und Größe anzunehmen (Fig VI). Die Komponenten C_l und C_r am linken und am rechten Trägerteil sind als Wirkung und Gegenwirkung einander entgegengesetzt und gleich. Ebenso sind in den Fußgelenken die Stützkräfte A bzw B der Bogenteile

entgegengesetzt und gleich den Belastungen A' bzw B' der Fundamente. — Unbekannt sind also 6 Komponenten $A_x A_y B_x B_y C_x C_y$. — Jeder Teil ist unter den an ihm angreifenden Kräften freischwebend im Gleichgewicht (Fig VI). Das ergibt je 3 unabhängige Momenten- und Komponentengleichungen, 6 Gleichungen für 6 Unbekannte:

$$\begin{aligned} \text{am linken Teil} \quad \curvearrowleft C_x \cdot 23 + C_y \cdot 16 &= P \cdot 5 + W \cdot 10 \curvearrowleft \\ \uparrow C_y + A_y &= P \downarrow \\ \rightarrow A_x + W &= C_x \leftarrow, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{am rechten Teil:} \quad \curvearrowright C_x \cdot 23 - C_y \cdot 16 &= Q \cdot 5 + S \cdot 9 \curvearrowright \\ \uparrow B_y &= Q + S + C_y \downarrow \\ \leftarrow B_x &= C_x \rightarrow \end{aligned}$$

Aus der ersten und vierten Gleichung folgt durch Auflösung:

$$46 C_x = 5P + 5Q + 10W + 9S$$

$$32 C_y = 5P - 5Q + 10W - 9S$$

$$\text{Danach} \quad 46 A_x = 5P + 5Q - 36W + 9S$$

$$32 A_y = 27P + 5Q - 10W + 9S$$

$$46 B_x = 5P + 5Q + 10W + 9S$$

$$32 B_y = 5P + 27Q + 10W + 23S$$

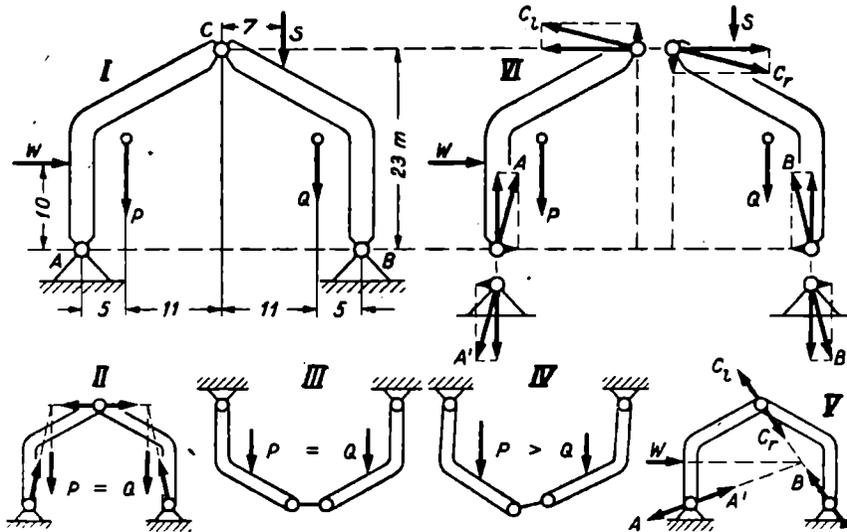


Fig 155. Dreigelenkbogen

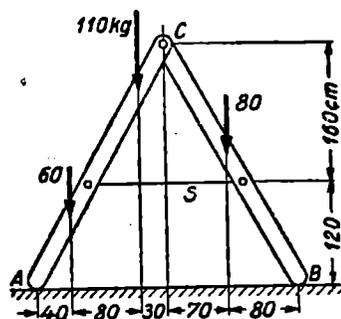
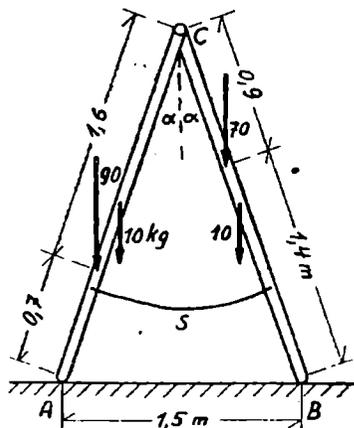
III. Man beachte die Vorzeichen: W entlastet das linke und belastet das rechte Auflager um denselben Betrag. — S hat einen negativen Anteil an C_y : Wenn S allein wirkte, würde C am linken Teil \swarrow , am rechten \nearrow gerichtet sein. — C_y kann überhaupt negativ herauskommen, wenn die Anteile von Q und S überwiegen. Man nimmt es irgendwie an und setzt es dementsprechend in die Gleichungen ein. Die Berechnung entscheidet dann: $+$ = richtig angenommen, $-$ = anders!

IV. Man kann auch das Gleichgewicht des Ganzen betrachten. Dann ist C innere Kraft.

$$\begin{aligned} \curvearrowright A_y \cdot 32 &= P \cdot 27 + Q \cdot 5 + S \cdot 9 - W \cdot 10 \curvearrowleft \\ \curvearrowleft B_y \cdot 32 &= P \cdot 5 + Q \cdot 27 + S \cdot 23 + W \cdot 10 \curvearrowright \\ \uparrow A_y + B_y &= P + Q + S \downarrow \\ \rightarrow A_x + W &= B_x \leftarrow \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen stimmen mit obiger Auflösung überein. Die dritte ist nur Kontrolle, nicht unabhängig. Mit der vierten haben wir nur 1 Gleichung für 2 Unbekannte A_x und B_x . — Aus dem Gleichgewicht des Ganzen allein sind die Auflagerkräfte nicht zu berechnen. Ohne Berücksichtigung des Gelenks ist die Aufgabe statisch unbestimmt.

226. Malerleiter. Die Leiter Fig 156 trägt links und rechts je 1 Last und das Eigengewicht. Die beiden Teile sind in C gelenkig miteinander verbunden, indem zB eine Eisenstange durch Löcher in den Holmen durchgesteckt ist. Ausgleiten wird gewöhnlich durch eine Schnur S verhindert. Wir wollen sie aber als schlaff annehmen. Dann muß am Fußboden genügend große Reibung sein. Zu berechnen die Kräfte $A B C$ und die Mindestreibungszahl. Auf welcher Seite rutscht sie zuerst aus?



↑ Fig 157. Malerleiter mit Schnur

← Fig 156. Malerleiter mit Reibung

Aus dem Gleichgewicht des Ganzen folgt

$$A_y = 10 + 76,3 + 21,3 = 107,6 \text{ kg} \uparrow \quad B_y = 10 + 13,7 + 48,7 = 72,4 \text{ kg} \uparrow$$

Danach berechnen wir aus dem Gleichgewicht des linken Teils die Reibungskomponente A_x mit Achse in C : $\alpha = 19^\circ 2'$.

$$\curvearrowleft A_x \cdot 2,3 \cos \alpha = (A_y \cdot 2,3 - 90 \cdot 1,6 - 10 \cdot 1,15) \sin \alpha \curvearrowright \quad A_x = 13,8 \text{ kg}$$

Ebenso folgt $B_x \leftarrow$ am rechten Teil. Es muß $= A_x$ werden wegen des Gleichgewichts am Ganzen. Die Reibungszahl Leiter/Fußboden muß mindestens $= 0,191$ sein. Da $A_x = B_x$ ist, so gleitet die Leiter zuerst auf der weniger belasteten Seite. Die Resultanten $A B$ sind steiler als Leiter.

C folgt aus Komponentengleichungen am linken oder rechten Teil:

$$\left. \begin{aligned} C_x &= A_x = B_x = 13,8 \text{ kg} \\ C_y &= 107,6 - 90 - 10 = 70 + 10 - 72,4 = 7,6 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{am linken Teil} \swarrow \\ \text{„ rechten „} \searrow \end{array}$$

227. Aufgabe (Malerleiter). Die Leiter Fig 157 trägt links 2, rechts 1 Last. Am Fußboden wird keine Reibung angenommen. Ausgleiten wird durch die Schnur S verhindert. Berechne die 5 Kräfte $A B C_x C_y S$.

228. Hängewerk mit Eigengewicht. Bei dem Hängewerk Nr 62 war Teilstrecke $t=4,4$ m, Durchhang $f=1,5$ m, Knotenpunktslast $G=657$ kg. Berechnet wurden die Stabkräfte $A=2040$ $B=1930$ kg und aus $\sigma=150$ at der Stab $\varnothing=41,6$ mm, erhöht 42 mit $\sigma=147$ at ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Stäbe. Wie groß werden die Kräfte, wenn man das Eigengewicht berücksichtigt? (Fig 158 I.)

Wir berechnen die Eigengewichte $E=48$ kg $F=51$ kg

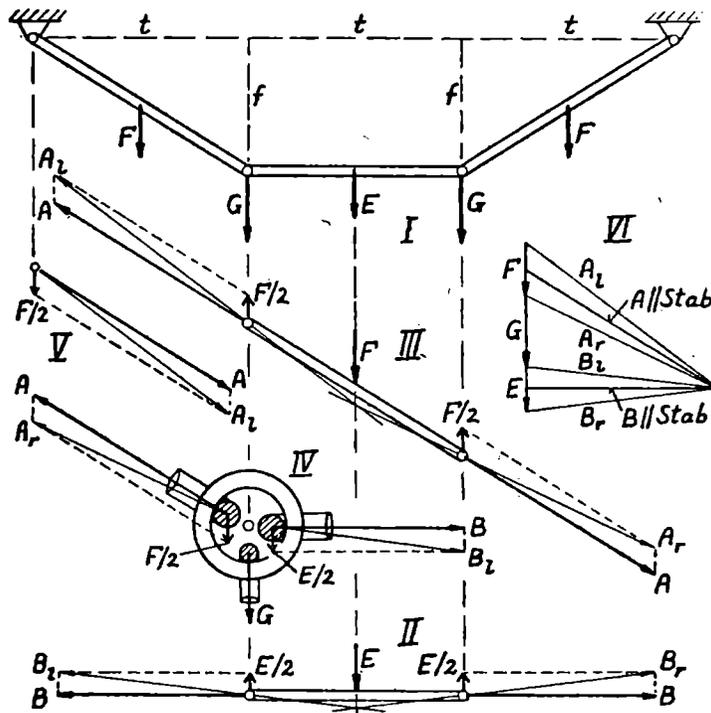


Fig 158. Hängewerk mit Eigengewicht

I. Der waagerechte Stab Fig II, für sich allein betrachtet, wird links und rechts von schiefen Kräften B_1, B_r getragen. Ihre \uparrow Komponente ist je $= E/2$, ihre waagerechte B unbekannt, aus dem Zusammenhang des Ganzen zu berechnen.

Der schräge Stab Fig III ist ohne Längszug im Gleichgewicht, wenn er an jedem Ende mit $F/2 \uparrow$ gestützt wird, unabhängig von seiner Neigung. Dazu kann dann an jedem Ende eine beliebige Kraft $A \parallel$ Stab treten, die das Gleichgewicht mit F nicht stört und aus dem Gleichgewicht mit den andern Stäben zu bestimmen ist. Der schräge Stab wird also getragen durch die Resultanten A_1 und A_r .

II. Am Knotenpunkt Fig IV sind dann die Gegenkräfte A_r und B_l im Gleichgewicht mit G . — Das ist dasselbe, als wenn A und B im Gleichgewicht sind mit $G + F/2 + E/2$!

Man verteilt die Stabgewichte je zur Hälfte auf die Endpunkte und rechnet dann wie mit gewichtslosen Stäben.

Die Stäbe sind in einem Ring eingehakt. Stab A liegt im Ring an in Richtung A_r , hat aber selbst die Richtung A . Stab B ist waagrecht, liegt aber wegen seines Eigengewichts tiefer an in Richtung B_l .

Am Aufhängepunkt Fig V wirkt dann $A_{l\searrow}$, die Resultante aus A und $F/2$. — Fig VI zeigt einen Teil des Kräfteplans.

III. Wir berechnen nun wie in Nr 62

$$G + F/2 + E/2 = 706 \text{ kg} \quad A = 2190 \text{ kg} \quad B = 2070 \text{ kg} \quad \sigma = 158 \text{ at}$$

nur 7% mehr als ohne Eigengewicht. Zu dieser Zugbeanspruchung tritt aber noch Biegebungsbeanspruchung infolge des Eigengewichts, in der Mitte 386 at nach späterer Berechnung. — Man sieht, daß die Wahl einer niedrigen zulässigen Spannung gerechtfertigt ist.

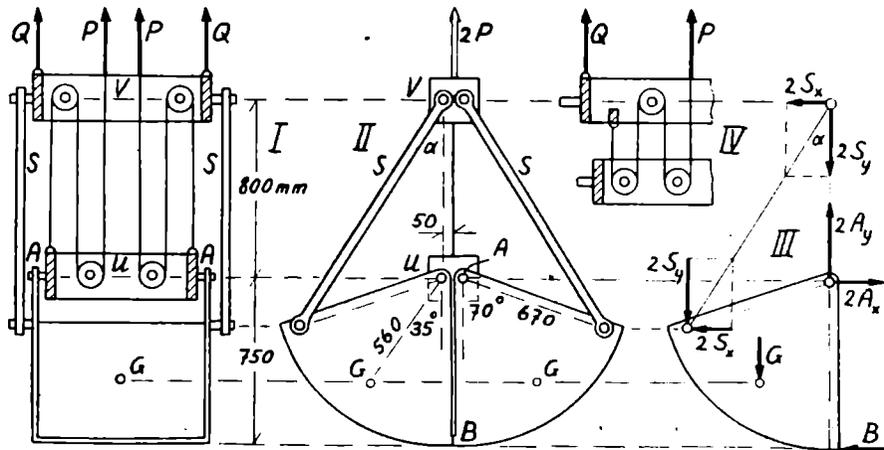


Fig 159. Greifer

229. Greifer. Die Schalen G des Greifers Fig 159 I II sind an dem unteren Querstück U an den Zapfen A gelenkig aufgehängt. Hebt man U , so schließen sich die Schalen und liegen an der Unterkante B mit einem gewissen Druck aneinander. Zur Entleerung des Greifers sind die Schalen mittels der Stangen S an einem oberen Querstück V aufgehängt. Hebt man dieses, so öffnet sich der Greifer. Um den Schließdruck bei B zu verstärken, sind die Drahtseile P mehrfach über Rollen zwischen U und V geführt. Beim Schließen werden also die Seile P angezogen, beim Entleeren die Q . — Gewichte: jede Schale $G = 70 \text{ kg}$, unteres Querstück $U = 36 \text{ kg}$, oberes $V = 44 \text{ kg}$. Das Gewicht der Stangen S kann man sich je zur Hälfte in V und in G enthalten denken (Nr 228). Wie groß ist der Schließdruck B bei leerem Greifer?

I. Der Greifer hängt an den Seilen P (Gleichgewicht am Ganzen):

$$\uparrow 2P = 2G + U + V \downarrow = 220 \text{ kg}$$

Die 4 Stangen erfahren vom Oberstück und den Rollenzügen darin

$$\text{die } \downarrow \text{ Kraft} = 4P + V = 484 \text{ kg} = 4S_y \quad S_y = 121 \text{ kg}$$

Nun ist $\alpha = 31^\circ 30'$ also $S = 142 \text{ kg}$ $S_x = 74 \text{ kg}$

Die einzelne Schale (Fig III) erfährt von den Stangen die Komponenten $2S_y \downarrow$ und $2S_x \leftarrow$. Angehoben wird sie von den Rollenzügen am Unterstück mit

$$\uparrow 2A_y = 3P - \frac{1}{2}U = 312 \text{ kg} = 2S_y + G \downarrow$$

Waagerechte Komponente der Zapfendrucke: $\rightarrow 2A_x = 2S_x + B \leftarrow$

Nun folgt B aus der Momentengleichung für A :

$$\curvearrow B \cdot 750 = 2S_y \cdot 630 - 2S_x \cdot 229 + G \cdot 321 \curvearrow \quad B = 188 \text{ kg}$$

Man kann auch S an den Punkt V verlegen und dort zerlegen. Dann hat $2S_y$ keinen Hebelarm. Dafür dreht $2S_x \curvearrow$ mit großem Hebelarm:

$$\curvearrow B \cdot 750 = 2S_x \cdot 800 + G \cdot 321 \curvearrow \quad B = 188 \text{ kg}$$

II. Bei vollem Greifer wirkt noch das Gewicht der Last (zB Sand). Der Schließdruck B wird größer, weil P und S größer werden. Andererseits ist der Sanddruck \perp Innenfläche Schale. Dadurch fällt das Moment seines Gewichts fort. Die Reibung zwischen Sand und Schale ist sogar nach außen gerichtet, weil sich die Schalen vorher unter dem Sand geschlossen haben. (Vergl Nr 135.) Auch insofern wird B nicht so groß.

230. Aufgabe (Greifer). Berechne den Schließdruck B des leeren Greifers. — I. wenn die Seile P über je 3 Rollen geführt sind (Fig IV) — II. wenn die P unmittelbar am Unterstück angreifen, wenn also keine Rollen vorhanden sind.

231. Differentialgetriebe. Der Antrieb der Hinterachse eines Autos durch die in Längsrichtung verlaufende Motorwelle könnte etwa durch Kegelräder nach Fig 160 I geschehen. Wenn nun aber das Auto durch eine Kurve fährt, so muß sich das äußere Rad schneller drehen als das innere. Die Hinterachse (Fig II) ist deshalb geteilt. Die Teile tragen innen je ein Kegelrad (96 \varnothing). In diese greifen 2 andere Kegelräder (60 \varnothing) ein, die auf einer Achse innerhalb eines drehbaren Körpers sitzen. Dieser Körper erst wird mittels der Kegelräder 70 \varnothing und 315 \varnothing von der Motorwelle angetrieben. — Indem sich nun dieser Körper dreht, nimmt er vermöge der Räder 60 die Räder 96 mit. — Bei gerader Fahrt drehen sich die Räder 60 nicht. Der sie tragende Körper bildet mit seinem Inhalt und den Halbachsen ein unveränderliches Stück wie Fig I. — Bei Kurvenfahrt aber drehen sich die Halbachsen auch gegeneinander, indem die Räder 60 sich auf ihrer Achse drehen.

Das Getriebe ist von einem Gehäuse umschlossen, welches mit den 3 Wellenhosen einen starren Körper bildet und so die unveränderliche gegenseitige Lage der Lager sichert. Auf ihm ruht der Wagen mittels der Federn in AB . Die Halbachsen sind in CD , bezw EF gelagert. Die

Lager $D F$ liegen innerhalb des drehbaren Körpers, der selbst wieder in $G H$ gelagert ist. Die Lager $C E$ sind möglichst in die Mittelebene der hohl gestalteten Räder gerückt, damit der Druck in D und F klein wird.

Der Wagen von 4000 kg Gewicht befahre nun eine Steigung 1:8 (Fig III). Reibung im Getriebe soll nicht berücksichtigt werden. Dann wirkt an jedem Hinterrad eine Umfangskraft = 248 kg. An den 4 Eingriffstellen der Kegelräder 96/60 wirken je 1034 kg. An den Rädern 96 bilden diese je ein Kräftepaar. An den Rädern 60 wirken sie im gleichen Sinn und drücken auf deren Achse mit je 2068 kg. An der Eingriffstelle der Räder 315/70 besteht eine Zahnkraft = 1260 kg, schließlich an der Motorwelle ein Moment = 4410 kgcm.

Das Differentialgetriebe wirkt so, daß die Umfangskräfte an beiden Rädern immer einander gleich sind. Wenn das eine ausgleitet, kann auch das andre nicht treiben.

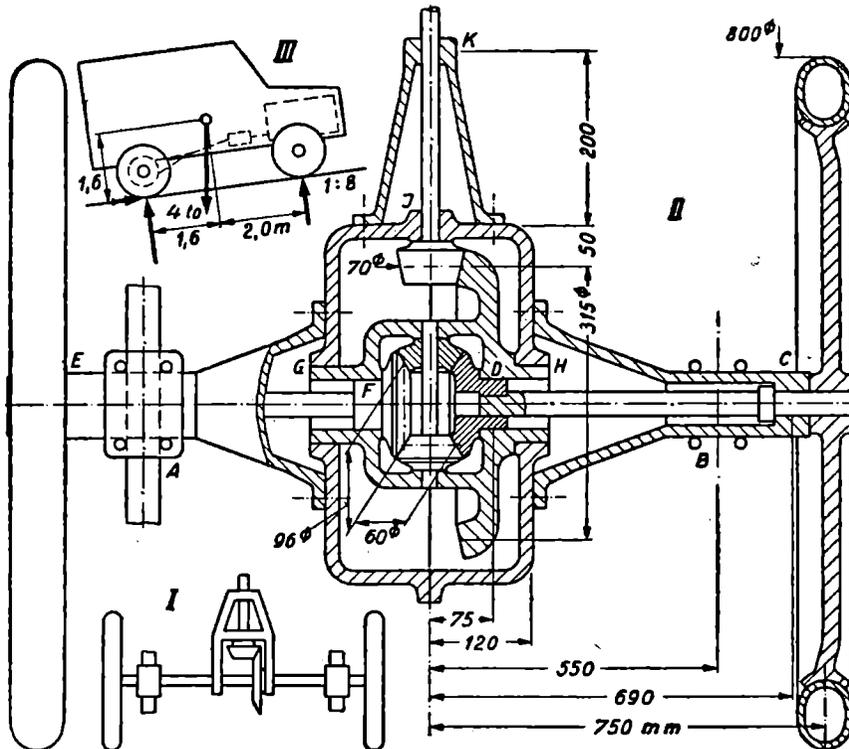


Fig 160. Differentialgetriebe

232. Aufgabe (Differentialgetriebe). Berechne aus den Maßen von Fig 160 II III alle Lagerdrucke. Die Welle $J K$ sei \parallel Erdboden (eigentlich steigt sie etwas nach vorn) und wird von seiten des Motors durch ein Kräftepaar (Kreuzgelenk) angetrieben. Die Zahnkräfte seien tangential. Richtung $x \parallel$ Erdboden, $y \perp$ Erdboden.

233. Fachwerk. Eine Brücke besteht aus 2 Fachwerkträgern wie Fig 161 I, deren obere Knotenpunkte durch Querträger miteinander verbunden sind. (Vergl Nr 115.) Die Querträger sind durch das Gewicht der Fahrbahn und zB durch einen \leftarrow fahrenden bremsenden Zug belastet. Sie belasten selbst die Knotenpunkte. Jede der beiden Fachwerkwände kann dann als ebenes Gebilde (Scheibe) betrachtet werden. Zu berechnen sind die Stabkräfte $S_1 \div S_{17}$.

I. Die Stabkräfte nehmen wir an in der Mittellinie jedes Stabes, betrachten also die Stäbe als gelenkig miteinander verbunden. Die Vernietung an Knotenblechen verwirklicht allerdings diese Annahme nur schlecht. An jedem der 10 Knotenpunkte besteht dann Gleichgewicht zwischen den an ihm angreifenden Kräften. (Vergl Nr 179.) Das gibt 20 Komponentengleichungen für die 17 Stabkräfte und die 3 Auflagerkomponenten. In der Tat stellten wir schon in Nr 183 I fest, daß $2p - 3$ Stabkräfte statisch bestimmt sind. Aber die Auflösung dieser Gleichungen würde schwierig sein, da in jeder Gleichung mehrere Unbekannte vorkommen. Wir können aber die Auflagerkräfte vorweg berechnen aus dem Gleichgewicht am Ganzen (vergl Nr 183 II):

$$A_x = 4,8 \text{ to } \quad A_y = 36,9 \text{ to } \quad B = 26,1 \text{ to}$$

II. Nun können wir am Auflagerpunkt anfangen (Fig II):

$$\downarrow S_1 = A_y \uparrow = 36,9 \text{ to Druck} \quad \leftarrow S_2 = A_x \rightarrow = 4,8 \text{ to Druck}$$

Dann sind am Knotenpunkt darüber nur noch 2 Unbekannte:

$$\downarrow S_3 \sin \alpha = S_1 - 15 \uparrow = 21,9 \quad \alpha = 36^\circ 52' \quad S_3 = 36,5 \text{ to Zug}$$

$$\leftarrow S_4 = S_3 \cos \alpha - 1,6 \rightarrow = 29,2 - 1,6 = 27,6 \text{ to Druck}$$

An den folgenden Knotenpunkten gilt dann

$$\downarrow S_5 = S_3 \sin \alpha \uparrow = 21,9 \text{ to } D \quad \rightarrow S_6 = S_3 \cos \alpha - S_2 \leftarrow = 24,4 \text{ to } Z$$

$$\downarrow S_7 \sin \alpha = S_5 - 15 \uparrow = 6,9 \text{ to } \quad S_7 = 11,5 \text{ to } Z$$

$$\leftarrow S_8 = S_7 \cos \alpha + S_4 - 1,6 \rightarrow = 9,2 + 27,6 - 1,6 = 35,2 \text{ to } D$$

So fortschreitend erhalten wir alle Stabkräfte nacheinander, entsprechend dem Cremonakräfteplan nach Nr 183. — Macht man an einer Stelle einen Fehler, so werden alle folgenden S falsch. Man merkt es aber am andern Auflagerpunkt. (Vergl Nr 184 I.) — Wir wünschen jede Stabkraft unmittelbar aus den gegebenen Belastungen zu berechnen.

234. Berechnung einzelner Stabkräfte. I. Unterbricht man zB Stab 6, so dreht sich der Fachwerkteil T (Fig III) um D gegen den andern Teil des Fachwerks: A_y dreht ihn \curvearrowright , A_x und 15 to \curvearrowleft , S_6 muß die \curvearrowleft Differenz halten mit einem \curvearrowleft Moment, muß also \rightarrow ziehen:

$$\curvearrowleft S_6 \cdot 2,1 = (36,9 - 15) \cdot 2,8 - 4,8 \cdot 2,1 \curvearrowleft \quad S_6 = 24,4 \text{ to } Z$$

Unterbricht man Stab 7 (Fig IV), so wird Teilkörper T' in der Parallelführung 6/8 beweglich: A_y hebt ihn \uparrow , 15 + 15 to senken ihn \downarrow , S_7 hält die \uparrow Differenz mit einer \downarrow Kraftkomponente, muß also \downarrow ziehen:

$$\downarrow S_7 \sin \alpha = 36,9 - 15 - 15 \uparrow = 6,9 \text{ to } \quad S_7 = 11,5 \text{ to } Z$$

Man kann auch sagen, daß der rechts von S_7 liegende Fachwerkteil gegen den links gesenkt wird von $15 + 9 + 9$ to \downarrow und gehoben von $B \uparrow$. Die Gegenkraft zu S_7 stützt die \downarrow Differenz mit einer \uparrow Komponente:

$\uparrow S_7 \sin \alpha = 15 + 9 + 9 - 26,1 \downarrow = 6,9$ to dasselbe wie oben,
 denn $\downarrow 15 + 9 + 9 - 26,1 \uparrow = 36,9 - 15 - 15 \uparrow$
 ist Komponentengleichung am Ganzen

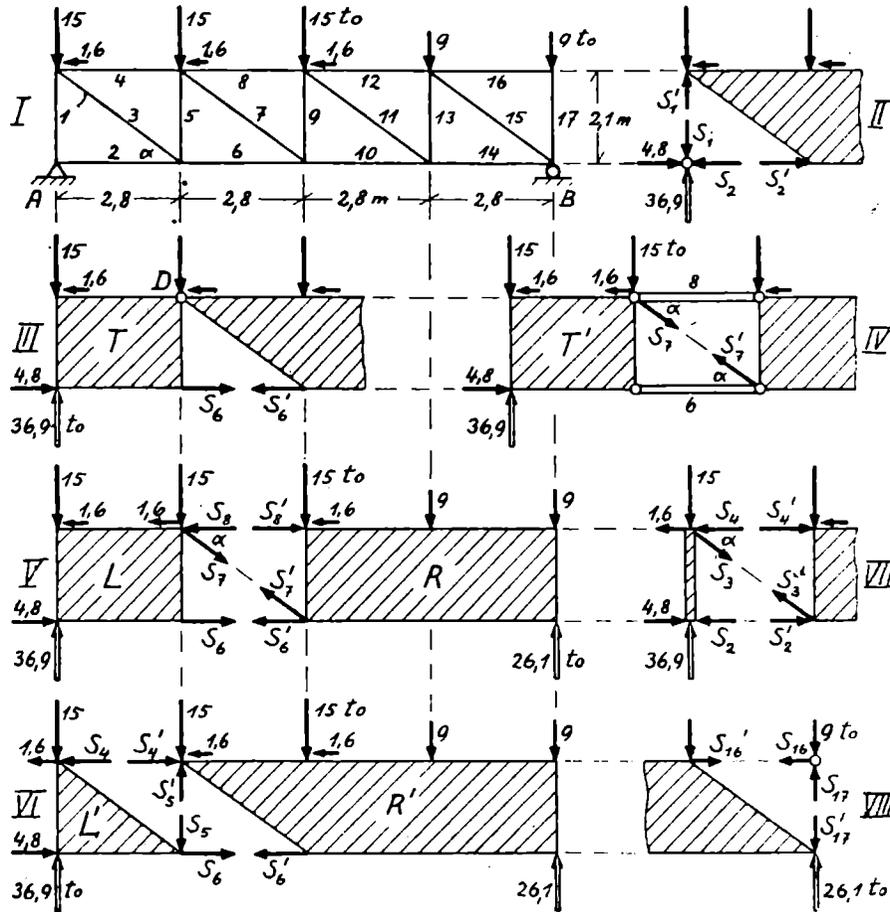


Fig 161. Zur Berechnung der Stabkräfte im Fachwerk

Unterbricht man Stab 8, so bricht das Fachwerk (Fig I) in der Mitte des Untergurts ein. Die linke Hälfte dreht sich gegen die rechte \curvearrowright , die rechte gegen die linke \curvearrowleft . S_8 stützt beide gegeneinander mit einem \curvearrowright bzw \curvearrowleft Moment, drückt also nach außen $\leftarrow \rightarrow$.

$$\curvearrowright S_8 \cdot 2,1 = (36,9 - 15) \cdot 5,6 - 15 \cdot 2,8 - 3,2 \cdot 2,1 \curvearrowright \quad S_8 = 35,2 \text{ to } D$$

$$\curvearrowleft S_8 \cdot 2,1 = (26,1 - 9) \cdot 5,6 - 9 \cdot 2,8 + 1,6 \cdot 2,1 \curvearrowleft \quad S_8 = 35,2 \text{ to } D$$

übereinstimmend miteinander, denn die Momente rechts sind miteinander im Gleichgewicht am Ganzen für den genannten Drehpunkt.

II. Die Berechnung von S_6, S_7, S_8 kommt auch zum Ausdruck in Fig V. Durchschneidet man die Stäbe 6 7 8, so zerfällt das Fachwerk in zwei Teile L und R , die durch S_6, S_7, S_8 und die Gegenkräfte S_6', S_7', S_8' gegeneinander gestützt sind. Diese folgen aus dem Gleichgewicht der Teile wie C und S bei der Malerleiter Nr 227. Für das Ganze sind sie innere Kräfte, an L und R äußere Kräfte, während die Stabkräfte innerhalb L und R hier innere Kräfte bleiben. Die Drehpunkte wählt man zweckmäßig so, daß in jeder Gleichung nur 1 Unbekannte vorkommt: im Schnittpunkt der beiden andern Kräfte (Nr 134 III; 141 V). Sind die beiden andern Kräfte parallel zueinander (hier 6 und 8), so tritt an Stelle der Momentengleichung die Komponentengleichung (Nr 142 V).

Regel: Um eine bestimmte Stabkraft S zu berechnen, teilt man das Fachwerk in 2 Teile durch einen Schnitt, der 3 Stäbe trifft, unter denen sich der gesuchte befindet. Dann folgt S aus dem Gleichgewicht eines der Teilkörper, die je mit einem Teil der gegebenen Kräfte belastet sind, nach zweckmäßig gewählten Komponenten- oder Momentengleichungen (Ritter'sches Verfahren).
 Oder: Die Stabkräfte vermitteln als innere Kräfte das Gleichgewicht zwischen den Belastungen der beiden Teile.
 Oder: sie übertragen die Kräfte vom einen auf den andern Teil.

III. So dient zB zur Berechnung von S_5 der Schnitt 4 5 6 (Fig VI), der die Teile L' und R' bildet. 4 und 6 sind parallel zueinander, also gilt Komponentengleichung:

$$\begin{array}{l} \downarrow S_5 = 36,9 - 15 \uparrow \qquad S_5 = 21,9 \text{ to } D \\ \text{oder } \uparrow S_5' = 15 + 15 + 9 + 9 - 26,1 \downarrow \qquad S_5 = 21,9 \text{ to } D \end{array}$$

S_6 folgt aus Momentengleichung für Schnittpunkt 4/5:

$$\curvearrow S_6 \cdot 2,1 = (36,9 - 15) \cdot 2,8 - 4,8 \cdot 2,1 \curvearrow \qquad S_6 = 24,4 \text{ to } Z$$

Drehpunkt 4/5 ist derselbe wie 7/8 in Fig V. Die 15 to und 1,6 to am zweiten oberen Knotenpunkt belasteten in Fig V den Teilkörper L , hatten aber Hebelarm Null. In Fig VI gehören sie zum Teilkörper R' , aber auch mit Hebelarm Null:

$$\curvearrow S_6 \cdot 2,1 = (26,1 - 9) \cdot 8,4 - 9 \cdot 5,6 - 15 \cdot 2,8 \curvearrow \qquad S_6 = 24,4 \text{ to } Z$$

S_4 folgt aus Momentengleichung für Schnittpunkt 5/6:

$$\curvearrow S_4 \cdot 2,1 = (36,9 - 15) \cdot 2,8 - 1,6 \cdot 2,1 \curvearrow \qquad S_4 = 27,6 \text{ to } D$$

S_4 und S_6 unterscheiden sich um die $(4,8 - 1,6)$ to, die an $L' \rightarrow$ drücken, oder um die $2 \cdot 1,6$ to, die $R' \leftarrow$ schieben: $S_4 = S_6 + 3,2$ Kontrolle!

IV. S_3 folgt nun vermittels des Schnittes 2 3 4 (Fig VII). Dieser trennt den Stab 1 ab, der hier als Teilkörper anzusehen ist.

$$\begin{array}{l} \downarrow S_3 \sin \alpha = 36,9 - 15 \uparrow = 21,9 \qquad S_3 = 36,5 \text{ to } Z \\ \curvearrow S_2 \cdot 2,1 = 4,8 \cdot 2,1 \curvearrow \qquad S_2 = 4,8 \text{ to } D \end{array}$$

V. Schließlich durchschneiden wir 1 2 (nur 2 Stäbe) und schneiden dadurch einen Punkt ab, den Auflagerpunkt, wie bereits in Nr 233 II Fig II:

$$\downarrow S_1 = 36,9 \text{ to } D \uparrow \qquad \leftarrow S_2 = 4,8 \text{ to } D \rightarrow$$

VI. Aus dem Schnitt Fig VIII folgt $S_{16} = 0$ $\uparrow S_{17} = 9$ to $D \downarrow$
 S_{17} folgt hier nicht aus dem Gleichgewicht des Auflagerpunkts, in den ja noch Diagonale 15 hineinläuft. Das Gleichgewicht an ihm würde ergeben

$$\leftarrow S_{14} = S_{15} \cos \alpha \rightarrow \quad \downarrow S_{17} + S_{15} \sin \alpha = 26,1 \text{ to } \uparrow$$

ausrechenbar erst wenn man S_{17} kennt. — Oder: Stab 1 überträgt die Auflagerkraft von unten auf die obere durch die Diagonale 3 gestützte Ecke, Stab 17 überträgt die Last von oben auf den Auflagerpunkt. Das Fachwerk aber belastet diesen unmittelbar durch Diagonale 15.

VII. Ob der Stab Zug oder Druck erhält, wird man im allgemeinen aus Anschauung entscheiden. Im Zweifel zeichnet man den Pfeil in der Figur irgendwie und setzt die Kraft- bzw Momentenrichtung dementsprechend in die Gleichung ein. Kommt dann die Stabkraft negativ heraus, so ist der Pfeil in Wirklichkeit umgekehrt. — Wir nehmen zB an, S_{13} sei Druck, dann ist am rechten Teilkörper

$$\uparrow S_{13} = 9 + 9 - 26,1 \downarrow \quad S_{13} = -8,1 \text{ to } D = +8,1 \text{ to } Z$$

Nehmen wir dagegen S_{13} von vornherein als Zug an, so schreiben wir

$$\downarrow S_{13} = 26,1 - 9 - 9 \uparrow \quad S_{13} = +8,1 \text{ to } Z$$

Man könnte auch schematisch alle Kraftpfeile als Zug eintragen. Negative Ergebnisse bedeuteten dann Druck. Ich möchte das nicht empfehlen, da man dann in vielen Fällen die Pfeile offenbar anschauungswidrig einzutragen hätte.

235. Gekreuzte Diagonalen. I. Im allgemeinen bekommen: der Obergurt Druck; der Untergurt Zug, in der Mitte am meisten, an den Enden weniger (Fig 162); die schrägen Diagonalen Zug, wenn sie nach der Mitte fallen; die Vertikalen dann Druck, an den Enden am meisten, in der Mitte weniger. Die \downarrow Lasten werden durch die Vertikalen und durch die Schrägen von der Mitte nach beiden Seiten zu den Auflagern hin übertragen. Indem aber in den Schrägen zugleich mit den senkrechten Komponenten auch waagerechte fließen, müssen diese durch Obergurt und Untergurt von der einen Seite zur anderen zurückfließen.

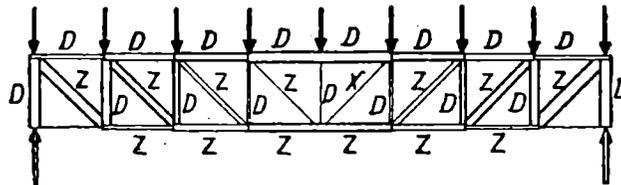


Fig 162. Verteilung der Stabkräfte

Liegen aber rechts größere Lasten, so kann auf Stab X ein geringer Druck fallen. Man ordnet deshalb in den Mittelfeldern gelegentlich gekreuzte Diagonalen an. Dann sind Vorspannungen möglich. Man nimmt aber gewöhnlich diejenige Diagonale, auf die Druck entfallen würde, als schlaff an. (Vergl Nr 100.)

II. Bei dem Fachwerk Fig 163 ist jeder Knotenpunkt belastet mit 5 to Eigengewicht der Fahrbahn. Rechts steht eine Verkehrslast, die 6 Punkte mit je 32 to belastet. Welche Diagonalen sind auf Zug beansprucht?

$$A = 32,5 + 40,0 = 72,5 \text{ to} \quad B = 32,5 + 152,0 = 184,5 \text{ to}$$

$$\begin{aligned} \uparrow S_1 \sin \alpha &= \downarrow 6 \cdot (32 + 5) - \uparrow 184,5 = +37,5 \text{ to} & S_1 \text{ Zug, } S_2 \text{ fällt aus} \\ \uparrow S_3 \sin \alpha &= \downarrow 5 \cdot (32 + 5) - \uparrow 184,5 = +0,5 \text{ to} & S_3 \text{ Zug, } S_4 \text{ fällt aus} \\ \uparrow S_5 \sin \alpha &= \downarrow 4 \cdot (32 + 5) - \uparrow 184,5 = -36,5 \text{ to} & S_5 \text{ Druck, dafür } S_6! \\ \downarrow S_6 \sin \alpha &= \uparrow 184,5 - \downarrow 4 \cdot (32 + 5) = +36,5 \text{ to} & S_6 \text{ Zug, } S_5 \text{ fällt aus} \end{aligned}$$

Es kommt also darauf an, ob rechts von dem betr Schnitt die \downarrow Belastungen oder die \uparrow Auflagerkraft überwiegen.

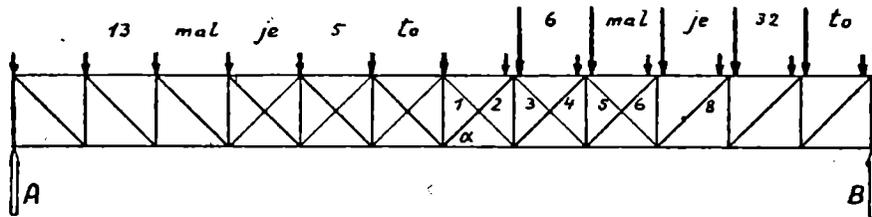


Fig 163. Gekreuzte Diagonalen

III. Ist vielleicht noch eine weitere Gegendiagonale 7 nötig? — Steht die Verkehrslast weiter rechts, so daß nur die 4 letzten Knotenpunkte mit je 32 to belastet sind, außerdem Eigengewicht, so wird

$$\begin{aligned} B = 144,5 \text{ to} \quad \uparrow S_5 \sin \alpha &= +3,5 \text{ to} & S_5 \text{ Zug} & S_6 \text{ fällt aus} \\ \downarrow S_8 \sin \alpha &= +33,5 \text{ to} & S_8 \text{ Zug} & S_7 \text{ unnötig} \end{aligned}$$

Sind die 3 letzten Punkte mit je 5 + 32 to belastet, so wird

$$B = 120,5 \text{ to} \quad \downarrow S_8 \sin \alpha = +9,5 \text{ to} \quad S_8 \text{ Zug} \quad S_7 \text{ unnötig}$$

236. Aufgabe (Fachwerk mit parallelen Gurten). Berechne die übrigen in Nr 234 noch vorkommenden Stabkräfte.

237. Aufgabe (eingespanntes Fachwerk). Berechne die Stabkräfte des Fachwerks Nr 182 Fig 130.

238. Brücke mit gebogenem Obergurt. Die Brückenwand Fig 164 I hat 28,8 m Spannweite, 6,3 m Bogenhöhe. Den Bogen gestalten wir als Seileck für gleichmäßige Last. Daraus folgen nach Nr 81 III die Teilhöhen 0,7 2,1 3,5 m.

I. Bei gleichmäßiger Belastung erfährt der Obergurt Druck entsprechend dem Kräfteplan Nr 81 Fig 46, der Untergurt Zug gleich der Horizontalkomponente des Kräfteplans, die Vertikalen Zug gleich den anhängenden Lasten, die Schrägen keine Beanspruchung.

II. Der so gestaltete Bogen ist nun ungleichmäßig belastet nach Fig I.

$$\text{Dann ist } A = 42,5 \text{ to} \quad \alpha = 36^\circ 6' \quad \beta = 23^\circ 38' \quad \gamma = 8^\circ 18'$$

Neues gegenüber Nr 234 bietet die Berechnung von S_5 und S_6 . Wir schneiden den 4 5 6, betrachten den Teilkörper Fig II. Zuständiger Drehpunkt

für S_6 ist der Schnittpunkt 4/5. Beide Komponenten von S_6 drehen:

$$\curvearrowright (S_6 \sin \beta) \cdot 4,8 + (S_6 \cos \beta) \cdot 3,5 = 42,5 \cdot 9,6 - 15 \cdot 4,8 \curvearrowright \quad S_6 = 65,5 \text{ to } D$$

Besser ist es, S_6 zu verlegen an den Punkt senkrecht über dem Drehpunkt (Fig III). Dann dreht nur seine \leftarrow Komponente, aber mit größerem Hebelarm (Nr 134 II):

$$\curvearrowright (S_6 \cos \beta) \cdot 5,6 = 42,5 \cdot 9,6 - 15 \cdot 4,8 \curvearrowright \quad S_6 = 65,5 \text{ to } D$$

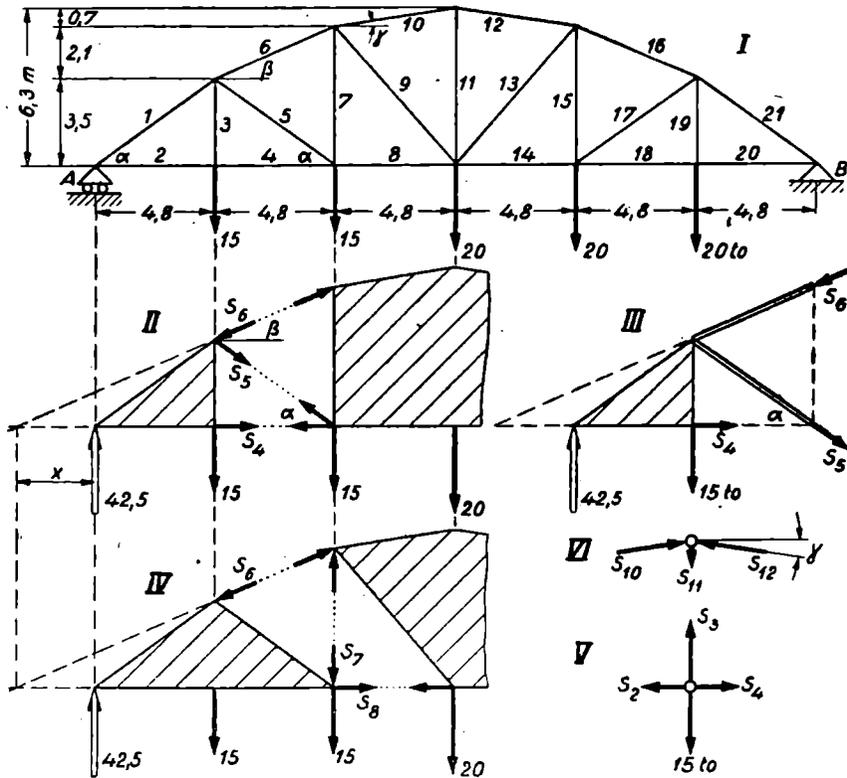


Fig 164. Brücke mit gebogenem Obergurt

III. Zur Berechnung der Schrägen S_5 nehmen wir in Nr 234 die Komponentengleichung, weil die Gurtstäbe beide waagerecht waren. Stellen wir aber hier die Komponentengleichung auf, so tritt neben S_5 auch S_6 auf:

$$\downarrow S_5 \sin \alpha + S_6 \sin \beta = 42,5 - 15 \uparrow \quad S_5 = 2,1 \text{ to } Z$$

Will man für S_5 eine eigene Gleichung haben, unabhängig von anderen, zuvor berechneten Stabkräften, so muß man als Drehpunkt den Schnittpunkt 4/6 wählen. Dieser liegt, nach Proportionen zu berechnen oder aus maßstäblicher Zeichnung abzugreifen, um $x = 3,2$ m links neben dem Auflager. Außerdem verlegen wir S_5 auf die Höhe des Drehpunkts (Fig III). Dann dreht nur seine \downarrow Komponente:

$$\curvearrowright (S_5 \sin \alpha) \cdot 12,8 = 42,5 \cdot 3,2 - 15 \cdot 8,0 \curvearrowright \quad S_5 = 2,1 \text{ to } Z$$

IV. Für S_7 gilt Teilkörper Fig IV und derselbe Drehpunkt. Der Pfeil ist eingetragen in der Annahme, daß S_7 Druck sei:

$$\curvearrowright S_7 \cdot 12,8 = 42,5 \cdot 3,2 - 15 \cdot 8,0 - 15 \cdot 12,8 \curvearrowleft \quad S_7 = -13,8 \text{ to } D$$

Richtung falsch angenommen! Also $S_7 = +13,8 \text{ to } Z$

V. S_3 trägt den Knotenpunkt Fig V $\uparrow S_3 = 15 \downarrow \quad S_3 = 15 \text{ to } Z$
Zugleich sieht man daraus, daß $\leftarrow S_2 = S_4 \rightarrow$ ist. Sie werden ja auch aus demselben Drehpunkt mit denselben Kräften berechnet.

VI. Wir wollen S_{11} berechnen. — Der Schnitt 10 11 13 14 schneidet 4 Stäbe. 1 Unbekannte zu viel. — Der Schnitt 10 11 12 schneidet nur einen Punkt ab, keine Scheibe. Auch 1 Unbekannte zu viel. — Für diesen Punkt ist (Fig VI): $\rightarrow S_{10} = S_{12} \leftarrow \quad \downarrow S_{11} = (S_{10} + S_{12}) \sin \gamma \uparrow$
 S_{11} folgt also erst nach Berechnung von S_{10} .

239. Polonceaubinder. Der Dachbinder Fig 165 I (vergl. Nr 186) ist pro Knotenpunkt belastet mit dem Dachgewicht G . Dann ist $A = 2G$. Die nachher vorkommenden Winkel und Maße, trigonometrisch zu berechnen oder aus maßstäblicher Zeichnung abzugreifen, sind hier zusammengestellt:

$$\begin{array}{llll} \alpha = 41^\circ 11' & \text{Stablänge} = s_4 = 5,32 \text{ m} & \beta = 21^\circ 33' \\ \gamma = 27^\circ 16' & s_5 = 5,72 \text{ m} & u = 5,38 \text{ m} & v = 1,383 \text{ m} \\ w = 5,08 \text{ m} & x = 2,835 \text{ m} & y = 2,194 \text{ m} & z = 1,806 \text{ m} \end{array}$$

I. Gleichgewicht am Auflagerpunkt (Fig II):

$$\begin{array}{ll} \text{Komponenten } \perp S_2: & \searrow S_1 \sin \beta = (A - G/2) \cos \alpha \curvearrowleft \quad S_1 = 3,073 G \\ \text{„} \quad \perp S_1: & \searrow S_2 \sin \beta = (A - G/2) \cos (\alpha - \beta) \curvearrowleft \quad S_2 = 3,846 G \\ \text{oder} & \curvearrowright S_2 \cdot 2,1 = (A - G/2) \cdot 5,38 \curvearrowleft \quad S_2 = 3,846 G \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{II. Aus Fig III:} & \curvearrowright S_3 = G \cos \alpha \curvearrowleft \quad S_3 = 0,753 G \\ \text{und} & \swarrow S_4 = S_2 - G \sin \alpha \nearrow \quad S_4 = 3,187 G \end{array}$$

III. Aus dem Gleichgewicht am Teilkörper Fig IV folgen $S_4 S_5 S_6$ jede aus einer Momentengleichung für den Schnittpunkt der beiden andern Kräfte:

$$\begin{array}{ll} \curvearrowright S_4 \cdot 2,1 = (A - G/2) \cdot 5,38 - G \cdot 1,383 \curvearrowleft & S_4 = 3,187 G \\ \curvearrowright S_5 \cdot 2,835 = (A - G/2) \cdot 2,194 + G \cdot 1,806 \curvearrowleft & S_5 = 1,798 G \\ \curvearrowright S_6 \cdot 5,08 = (A - G/2) \cdot 8,0 - G \cdot 4,0 \curvearrowleft & S_6 = 1,575 G \end{array}$$

IV. Kontrolle: senkrechte Komponenten am obersten Knotenpunkt:

$$\uparrow 2S_4 \sin \alpha - 2S_5 \cos \gamma = 4,20 G - 3,20 G = G \downarrow$$

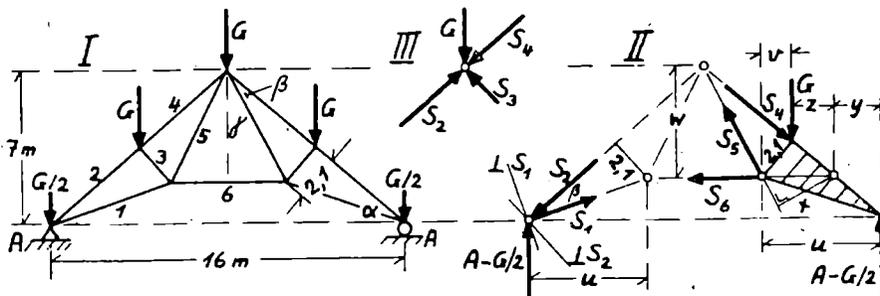


Fig 165. Polonceaubinder Am äußersten rechten Figurenteil fehlt die Zahl IV.

240. Aufgabe (gebogener Obergurt). Berechne die übrigen in Nr 238 noch vorkommenden Stabkräfte.

241. Aufgabe (Bahnhofsdach). Berechne die Stabkräfte des Bahnhofsdoms Nr 181 Fig 129.

242. Kranbrücke mit Eigengewicht. Die Wand einer Kranbrücke Fig 166 I ist links auf einem festen Lager A , rechts auf einer Pendelsäule B statisch bestimmt gelagert. Sie trägt einen Laufkran, der in der gezeichneten Stellung 2 Punkte je mit P belastet. Das Eigengewicht sei:
 Gurtstab = G Diagonale = D Fußstab = F

I. Zur Berechnung der Auflagerkräfte vereinigen wir die Stabgewichte ohne die F zu einer Resultante $11G + 12D$.

Dann ist $A = \frac{33G + 36D + 4P}{7} + 2F$ $B = \frac{44G + 48D + 10P}{7}$

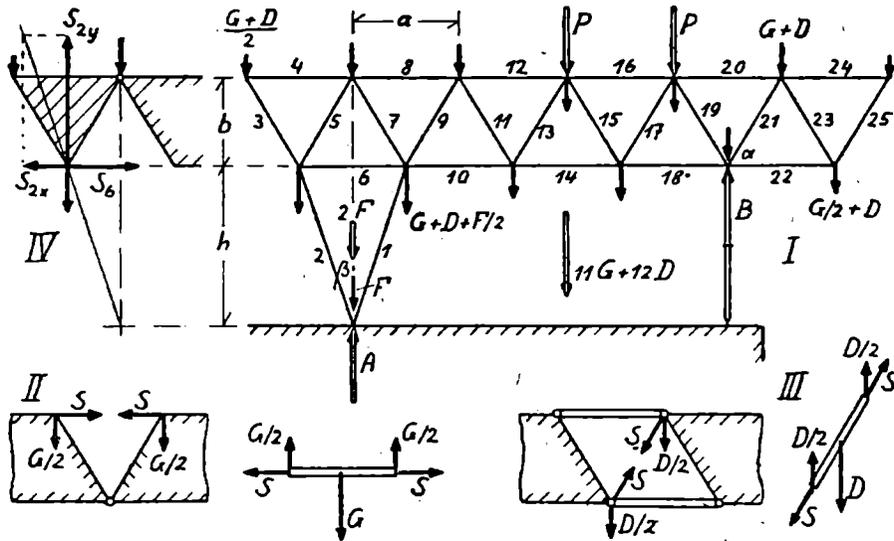


Fig 166. Kranbrücke mit Eigengewicht

II. Wir denken uns einen Gurtstab zwischen den beiden Teilkörpern herausgenommen (Fig II). Dann wird sein Gewicht $\downarrow G$ getragen durch $\uparrow G/2$ an jeder Seite. Außerdem wirkt $\rightarrow S \leftarrow$. Umgekehrt wirken an den Teilkörpern je $\downarrow G/2$ und $\leftarrow S \rightarrow$. S ist vom Standpunkt des Gleichgewichts des Stabes unbestimmt. Es folgt aus dem Gleichgewicht der Teilkörper, die der betr. Stab verbindet. (Vergl Nr 228.)

Die Knotenpunkte werden belastet je mit dem halben Gewicht der in sie hineinlaufenden Stäbe. Danach werden die Stabkräfte berechnet wie bei gewichtslosen Stäben.

Dasselbe zeigt Fig III für eine Diagonale. (Vergl Nr 228.) Hiernach sind also die Knotenpunkte in Fig I belastet mit

$G + D$ $\frac{1}{2}(G + D)$ $\frac{1}{2}G + D$ $G + D + \frac{1}{2}F$ usw

III. Im rechten Teil des Fachwerks interessiert, von wo an B zu berücksichtigen ist.

$$\uparrow S_{21} \sin \alpha = 2G + 2,5D \downarrow \quad \text{aber} \quad \downarrow S_{19} \sin \alpha = B - 3G - 3,5D \uparrow$$

$$S_{20} = \frac{a}{2b} \left(7G + \frac{9}{2}D \right) \quad \text{aber} \quad S_{18} = \frac{a}{2b} \left(B - \frac{13}{2}G - 8D \right)$$

S_{21} S_{19} beide Druck; S_{20} Zug; S_{18} Zug angenommen, aber ohne P , welches in B enthalten ist, negativ.

IV. Wir wollen S_6 berechnen. Ein Schnitt durch 6 trifft aber mehr als 3 Stäbe. (Vergl Nr 238 VI.) Trotzdem ist das Fachwerk mit 14 Punkten und $2 \cdot 14 - 3 = 25$ Stäben statisch bestimmt. S_6 dürfte nicht etwa fortfallen. — Wir berechnen zuvor S_2 :

$$S_2 \cos \beta = S_{2y} = \frac{1}{2}(A - F) \quad S_{2x} = S_{2y} \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2h} S_{2y} = \frac{a}{4h}(A - F)$$

Danach folgt aus Fig IV:

$$\curvearrowright S_6 \cdot b = S_{2y} \cdot \frac{a}{2} - \frac{G+D}{2} \cdot a - \frac{G+2D+F}{2} \cdot \frac{a}{2} + S_{2x} \cdot b \curvearrowleft$$

$$S_6 = \frac{a}{4b} (A - 3G - 4D - 2F) + \frac{a}{4h} (A - F)$$

S_6 hängt ab von P vermittelt A , vom Eigengewicht der Stäbe auch vermittelt A und dann noch besonders von den links von ihm liegenden Stäben. F fällt nach Einsetzen von A in der ersten Klammer fort, bleibt aber in der zweiten stehen.

V. Auch S_5 wird vermittelt S_2 berechnet:

$$\downarrow S_5 \sin \alpha = S_{2y} - \frac{1}{2}(G+D) - \frac{1}{2}(G+2D+F) \uparrow$$

$$S_5 \sin \alpha = \frac{1}{2}(A - 2G - 3D - 2F)$$

243. Gittermast. Der Leitungsmast Fig 167 I, der Einfachheit halber mit nur 2 Stockwerken, im Grundriß quadratisch, trägt eine Querstange, an der Starkstromleitungen hängen. Als ungünstigsten Belastungsfall nehmen wir an, daß die Leitungen vorn links und hinten rechts gerissen sind, so daß an der Stange das Kräftepaar HH angreift; außerdem eine kleine \downarrow Komponente (Nr 83) die wir vernachlässigen wollen.

I. Wir fragen zunächst nach der Anzahl der statisch bestimmten Stäbe. Jeder Knotenpunkt muß durch 3 Stäbe gegen das Fundament oder gegen andere Punkte gestützt sein:

Knotenpunkt	1	2	3	4
durch die Stäbe	1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12 usw

also: Anzahl der Punkte ohne die am Fundament = $p = 8$

Anzahl der statisch bestimmten Stäbe = $s = 3p = 24$

Bei dem Tragwerk eines Doppeldeck-Flugzeugs bestehen die Diagonalen aus Drähten. Dann sind gekreuzte Diagonalen angeordnet, verschiedenen Belastungsfällen entsprechend. Bei genügender Vorspannung, wenn die Gegendiagonalen nicht schlaff werden, ist das statisch unbestimmt.

Auch Diagonalverbindungen der Punkte 1 mit 3; 2 mit 4; 5 mit 7; 6 mit 8 (Tiefenkreuze) machen das Fachwerk statisch unbestimmt.

II. Der Querträger belastet die Knotenpunkte 5 8 je mit $P = H \cdot 3,9/1,5$. Sie werden von der rechten bezw von der linken Wand gestützt (Fig II). Das kann nach Cremona konstruiert, nach Ritter berechnet werden. Die Diagonalen der vorderen und der hinteren Wand sind dann nicht beansprucht. — Das erscheint unglaublich, wenn man sich vorstellt, daß der Mast durch das Kräftepaar HH verdreht wird, daß die Wände links und rechts sich verbiegen infolge der elastischen Längenänderungen der Stäbe, und daß dann auch die Abstände von links nach rechts sich ändern, daß zB Stab 18 gedehnt, Stab 13 gestaucht werden müßte. — Aber die Stäbe gelten ja als gelenkig miteinander verbunden. Dann aber bleiben die Wände nicht eben, sondern werden um kleine Beträge in sich gebrochen derart, daß die Abstände der Knotenpunkte von links nach rechts erhalten bleiben. — Jedenfalls ist P durch die Wand II allein gestützt.

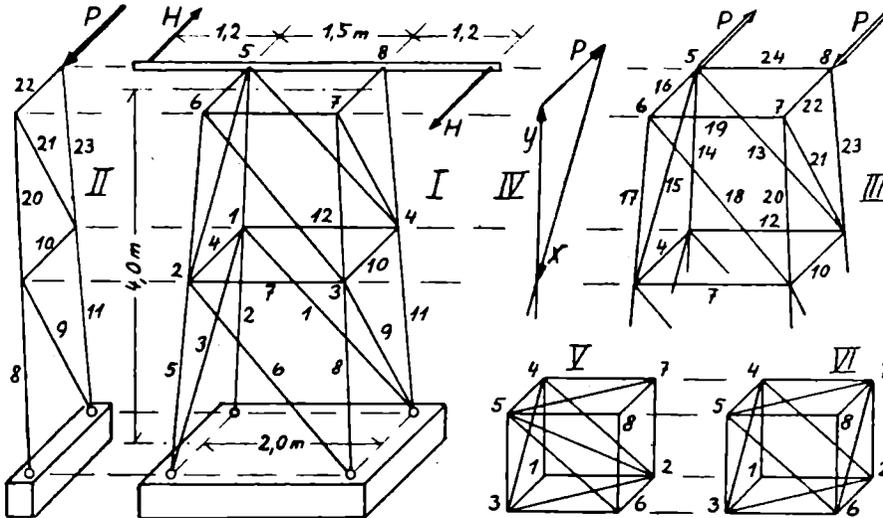


Fig 167. Gittermast

III. Das ergibt sich auch, wenn man das Gleichgewicht an den Knotenpunkten einzeln betrachtet (Fig III, Kräfteck Fig IV, vergl. Nr 233). — Wir berechnen zuvor Maße. Die Stockwerke seien einander ähnlich. Dann ist Obere Stockwerkhöhe = 1,856 m Stablängen: $s_4 = 1,732$
 $s_{14} = 1,864$ $s_{15} = 2,464$ m Danach folgt aus dem Gleichgewicht an

Punkt 5:	$S_{13} = 0$	$S_{14} = 1,076 P$ (Druck)	$S_{15} = 1,423 P$ (Zug)
„ 6:	$S_{16} = 0$	$S_{17} = 0$	$S_{18} = 0$
„ 8:	$S_{24} = 0$	$S_{23} = 0$	$S_{22} = P$ (Druck)
„ 7:	$S_{19} = 0$	$S_{20} = 1,076 P$ (Druck)	$S_{21} = 1,423 P$ (Zug)

IV. Man könnte auch daran denken, das Gleichgewicht von Teilkörpern nach Ritter zu betrachten (Nr 234). Aber der Körper Fig III würde nicht

in sich unbeweglich sein. Er würde unter der Belastung durch das Paar PP zusammenklappen wie der äußere Teil einer Streichholzsachtel. Auch könnten die Wände noch in sich längs der Diagonale einbrechen. Damit hängt zusammen, daß er als Ganzes von 8 Stäben gestützt wird, während am Körper nur 6 Stützkräfte statisch bestimmt sind. Wir können also hier im allgemeinen nicht, wie beim ebenen Fachwerk die Stabkräfte als Kräfte an einem in sich starren Körper bestimmen.

244. Aufgelagertes Raumfachwerk. Die Überlegung Nr 243 IV führt auf die Frage nach der Anzahl der statisch bestimmten Stäbe im aufgelagerten, in sich unbeweglichen Raumfachwerk.

I. In Fig 167 V sind die ersten drei Punkte 1 2 3 durch 3 Stäbe unbeweglich miteinander verbunden. Punkt 4 braucht weitere 3 Stäbe. So entsteht das erste räumliche Gebilde, das Tetraeder 1 2 3 4 mit 4 Punkten 6 Stäben. Jeder weitere Punkt braucht weitere 3 Stäbe. Also:

$$\text{Punktzahl} = p \quad \text{Stabzahl} = s = 3 + 3(p - 3) = 6 + 3(p - 4) = 3p - 6$$

So entsteht mit $p = 8$ $s = 18$ das Raumfachwerk Fig V mit 12 Seiten, 5 Seitendiagonalen, 1 Raumdiagonale. Ohne die letztere könnte man das Fachwerk zusammenklappen, indem jede Seitenfläche längs der Diagonale einbricht. Die Raumdiagonale kann aber ersetzt werden durch die letzte noch fehlende Seitendiagonale (Fig VI).

II. Wenn dieses in sich unbewegliche freischwebende Fachwerk gegen ein Fundament gestützt werden soll, so braucht man dazu 6 Stäbe, 6 äußere Kräfte (Nr 213). Im Ganzen müssen es $3p$ Stäbe sein (Nr 243), also im Fachwerk selbst $s = 3p - 6$ wie in I.

Wir stellen zusammen, was in Nr 104; 146; 179; 183; 213; 233; 243 gesagt wurde über die Mindestzahl der zur geometrischen und statischen Festlegung von Punkten und Körpern erforderlichen Längenangaben bezw Stäbe:

Punkt in der Ebene:	2 Freiheitsgrade	2 Stützkräfte	
Punkt im Raum:	3	„ „	3 „ „
Scheibe in der Ebene:	3	„ „	3 „ „
Körper im Raum:	6	„ „	6 „ „
Also Stabzahl des eingespannten ebenen Fachwerks			$s = 2p$
Beim aufgelagerten Fachwerk sind 3 davon äußere Stützen			
also Stabzahl des aufgelagerten ebenen Fachwerks			$s = 2p - 3$
Stabzahl des eingespannten Raumfachwerks			$s = 3p$
Beim aufgelagerten Fachwerk sind 6 davon äußere Stützen			
also Stabzahl des aufgelagerten Raumfachwerks			$s = 3p - 6$

245. Zusammenhänge zwischen den Lösungsverfahren der Statik. Die Aufgaben der Statik lösten wir nach verschiedenen Verfahren: Die Stützkräfte des Windengestells (Nr 223), des Dreigelenkbogens (Nr 225) berechneten wir aus dem Gleichgewicht des Ganzen oder aus dem der Teile. Die Stabkräfte des Fachwerks ergaben sich aus

Momentengleichungen an den verschiedenen Teilkörpern (Nr 234) oder aus Komponentengleichungen an den einzelnen Knotenpunkten (Nr 233) oder zeichnerisch nach Cremona (Nr 179). Auf allen Wegen kam dasselbe Ergebnis heraus. Das wurde schon in Einzelfällen begründet.

I. Man muß sich allgemein die kritische Frage stellen, inwiefern die verschiedenen Verfahren zum selben Ziel führen, miteinander vereinbar, voneinander abhängig sind, so daß sich keine Widersprüche ergeben. Man muß beweisen, daß die Komponenten- und Momentengleichungen für das Ganze gelten, wenn sie an den Teilen desselben gelten. Als „Teile“ können wir uns die Knotenpunkte des Fachwerks vorstellen. Aber auch ein ungegliederter Körper besteht aus Teilen, Punkten, Molekülen, die aufeinander Kräfte ausüben. Man muß also die Komponenten- und Momentengleichungen des Ganzen ableiten aus den Komponentengleichungen am Punkt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Ebene: 2 Komponentengleichungen für jeden Punkt hatten wir als unabhängig und als ausreichend erkannt (Nr. 70). Diese nehmen wir als experimentell bestätigte Grundlage, als Axiom an:

$$\Sigma K_x = 0 \quad \Sigma K_y = 0 \quad (\text{algebraische Summe! Vorzeichen!})$$

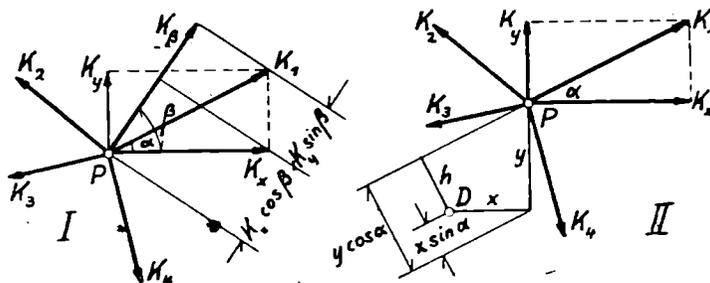


Fig 168. Zum Gleichgewicht am Punkt

II. Aus ihnen folgen die Komponentengleichungen am Punkt für beliebige andere Richtungen: Am Punkt P (Fig 168 I) greifen mehrere Kräfte $K_1 K_2 K_3 \dots$ an. Sie sind zerlegt in rechtwinklige Komponenten

$$K_x = K \cos \alpha \quad K_y = K \sin \alpha \quad (\text{nur für } K_1 \text{ gezeichnet})$$

Dann ist die Komponente von K in Richtung β

$$K_\beta = K \cos(\beta - \alpha) = K \cos \beta \cos \alpha + K \sin \beta \sin \alpha = K_x \cos \beta + K_y \sin \beta$$

Das folgt auch aus den gezeichneten Hilfslinien.

Für alle Kräfte an P ist also $\Sigma K_\beta = \Sigma K_x \cdot \cos \beta + \Sigma K_y \cdot \sin \beta$

Alle Summenglieder haben denselben Faktor $\cos \beta$ bzw. $\sin \beta$.

Aus $\Sigma K_x = 0$ und $\Sigma K_y = 0$ folgt also $\Sigma K_\beta = 0$

Schon in Nr 70 III wurde dies und zugleich die Vereinbarkeit mit der Regel vom geschlossenen Krafteck bewiesen. — Auch schon in Nr 58 Fig 26 IV wurde das schiefe Parallelogramm der Kräfte abgeleitet aus der Zerlegung in rechtwinklige Komponenten.

III. Bilden viele Punkte einen Körper, so greifen an jedem Punkt innere und äußere Kräfte an. Jede innere Kraft, die zwischen 2 Punkten wirkt, ist am einen \leftarrow , am andern \rightarrow gerichtet („Axiom“). Addiert man die Komponentengleichungen für alle Teilchen, so fallen die Komponenten der inneren Kräfte heraus. Es entsteht die Komponentengleichung für die äußeren Kräfte am Ganzen.

Derselbe Gedanke kommt zum Ausdruck in Nr 173 IV und in jedem Cremonaplan, wo die äußeren Kräfte auch für sich ein geschlossenes Krafteck bilden, weil die inneren jede zu 2 Kraftecken gehören und im einen \leftarrow , im andern \rightarrow durchlaufen werden. Geschlossene Wege aneinandergesetzt ergeben wieder einen geschlossenen Weg für alle Strecken, die nur einmal durchlaufen worden sind.

IV. Am Punkt gilt mit den Komponentengleichungen auch die Momentengleichung: Punkt P in Fig 168 II hat für den beliebigen Drehpunkt D die Koordinaten xy . Dann ist das Moment von K für D

$$\begin{aligned} M &= Kh = K(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = K_x y - K_y x \\ &= \text{Summe der Momente der Komponenten} \end{aligned}$$

Für alle Kräfte ist also $\Sigma M = \Sigma K_x \cdot y - \Sigma K_y \cdot x$

Am Punkt haben alle Summenglieder denselben Faktor y bezw x .

Aus $\Sigma K_x = 0$ und $\Sigma K_y = 0$ folgt also $\Sigma M = 0$

V. Die Kräfte, die zwischen 2 Teilchen eines Körpers wirken, sind einander entgegengesetzt und gleich und liegen in einer Linie. Auch dies ist als experimentell gesichertes Axiom anzusehen. Ihre Momente Kh sind also für jeden Drehpunkt einander entgegengesetzt und gleich, unabhängig von der Verschiebung der Kraft auf ihrer Angriffslinie. Addiert man die Momentengleichungen für alle Teilchen, so fallen die Momente der inneren Kräfte heraus. Es entsteht die Momentengleichung für die äußeren Kräfte am Ganzen aus der Momentengleichung für die Kräfte am Punkt. (Vergl auch die Momente der inneren Kräfte Z in Nr 223 IV.)

Schon in Nr 178 wurde geometrisch bewiesen, daß das Moment einer am Schnittpunkt zweier Kräfte gebildeten Resultante gleich der Summe der Momente der Komponenten ist. Schnittpunktsatz und „Resultante = Null“ ist also vereinbar mit $\Sigma M = 0$. Ebenfalls die Seileckkonstruktionen, die ja nur auf Schnittpunktsatz und Krafteck beruhen. — Schon in Nr 113, 146 wurde erkannt, daß die Momentengleichung für jeden Drehpunkt gilt, wenn Komponenten- und Momentengleichungen für einen Drehpunkt gelten. — Auch am Fachwerk sahen wir, daß die Stabkräfte allein aus Komponentengleichungen berechnet werden können (Nr 233), daß also die Momentengleichungen (Nr 234) nicht unabhängig davon sind.

VI. Damit ist die Widerspruchslosigkeit aller Gleichgewichtsbedingungen, der zeichnerischen und der rechnerischen bewiesen durch ihre Ableitung aus 2 unabhängigen Gleichungen für jeden Punkt. — Das Gebäude der Mechanik ruhte bisher gewissermaßen auf zu vielen Stützen: Kraft-

Durch den Wagenkasten kehrt das Moment zum Motor zurück. — Eine Dampfmaschine, die in einem Schiff steht und zB \curvearrowright läuft, übt auf den Propeller vermittels der Welle ein \curvearrowright Moment aus. Umgekehrt der Propeller auf die Maschine ein \curvearrowleft . Dieses Moment muß schließlich am Schiff wirken und es um einen bestimmten Winkel \curvearrowleft neigen. In der Tat ist es der Gleitbahndruck, der am Kreuzkopf \rightarrow , am Rahmen und damit aufs Schiff \leftarrow wirkt (Fig 169). Das stimmt auch mit der Größe der Momente:

$$\begin{aligned} \text{Kraft am Kolben} &= K && \text{in der Pleuelstange} = P = K/\cos\beta \\ \text{Moment an der Welle} &= M = Ph_P = Pr \sin(\alpha + \beta) = Kr \sin(\alpha + \beta)/\cos\beta \\ \text{Andererseits Gleitbahndruck} &= F = K \operatorname{tg}\beta \\ \text{Moment an der Welle} &= M = F h_F = K \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{r \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} = \frac{Kr \sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta} \end{aligned}$$

250. Zusammenfassung. Die Teile, aus denen eine Maschine, ein Bauwerk besteht, üben in den Lagern, Gelenken, Knotenpunkten Kräfte aufeinander aus, die einander gleich und entgegengerichtet sind, Wirkung und Gegenwirkung. Ihre Richtung und Größe ergibt sich aus Komponenten- und Momentengleichungen für das Ganze oder für den Teil mit beliebigen, aber zweckmäßig zu wählenden Komponentenrichtungen bzw Drehpunkten. Über eine gewisse Anzahl von unbekanntem Stützkraften hinaus ist die Aufgabe statisch nicht zu lösen. Dann sind elastische Formänderungen mit zu berücksichtigen.

Die Stabkräfte von Fachwerken berechnet man aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte oder unabhängig voneinander aus dem Gleichgewicht von Teilkörpern, die durch 3 Stäbe gestützt sind. Zweckmäßig ist für jeden Stab die Momentengleichung für den Schnittpunkt der beiden andern Stäbe bzw eine entsprechende Komponentengleichung. Diese Berechnung jeder Stabkraft unabhängig von den andern ist allerdings auch im statisch bestimmten Fall nicht immer möglich.

Immer aber gibt es unendlich viele Möglichkeiten, die Kräfte zu berechnen. Die Vereinbarkeit der verschiedenen Verfahren wird durch ihre Ableitung aus der geringsten Anzahl unabhängiger Gleichungen sichergestellt.

X. Arbeit

251. Differentialflaschenzug. Bei den Flaschenzügen (Nr 53) stellten wir fest, daß die Hebungen bzw Senkungen sich umgekehrt verhalten wie die Kräfte. Ebenso bei der schiefen Ebene (Nr 56 III), bei der Dezimalwaage (Nr 194), und zB beim Differentialflaschenzug (Fig 170):

I. Über zwei fest miteinander verbundene Kettenräder geht eine endlose Kette, die unten in einer losen Rolle die Last Q trägt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gleichgewicht der} \\ \text{Momente am Kettenrad} \end{array} \right\} \quad \curvearrowright PR = \frac{Q}{2} R - \frac{Q}{2} r \quad \curvearrowleft \quad P = \frac{R-r}{2R} Q$$

Dasselbe folgt auch aus dem Gleichgewicht am Ganzen: Q hat für die obere Achse den Hebelarm $(R-r)/2$!

II. Je kleiner der Unterschied der Radien, um so kleiner darf P sein, — um so langsamer steigt aber auch Q : Eine Last $Q = 300 \text{ kg}$ soll zB gehoben werden um $h_Q = 4 \text{ m}$ mittels einer Kraft $P = 25 \text{ kg}$. Nach dem Grundsatz vom Bewegungsverhältnis muß man dann den mit P gezogenen Kettenstrang

$$\text{herausziehen um } h_P = \frac{Q h_Q}{P} = \frac{300 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m}}{25 \text{ kg}} = 48 \text{ m}$$

$$\text{Dazu muß sein } \frac{R-r}{2R} = \frac{P}{Q} = \frac{25}{300} \quad \text{also } R = 1,2 r$$

Dasselbe erreicht man mit $P = 30 \text{ kg}$ $h_P = 40 \text{ m}$ $R = 1,25 r$ usw
Immer muß sein $P h_P = Q h_Q = 300 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m} = 1200 \text{ kgm}$

Dies Produkt, das von der Wahl von P unabhängig ist, nennt man „Arbeit“ = Gewicht mal Hebung bzw Senkung

Dann ist aufgewendete Arbeit = $P h_P$ = gewonnene Arbeit = $Q h_Q$

III. Wir bestätigen diesen Zusammenhang durch unmittelbare Berechnung der Bewegungen: Zieht man den P -Strang um h_P heraus, so steigt das linke Tragseil um h_P . Das rechte sinkt um $h_P r/R$. Die untere Rolle wird gehoben durch den linken, gesenkt durch den rechten Strang je um die Hälfte ihrer Bewegungen:

$$\text{Also } h_Q = \frac{h_P}{2} - \frac{h_P r}{2R} = \frac{R-r}{2R} h_P \quad \frac{h_Q}{h_P} = \frac{R-r}{2R} = \frac{P}{Q}!$$

In der Tat verhalten sich also die Bewegungen umgekehrt wie die Kräfte oder: die Arbeitsbeträge sind einander gleich: $P h_P = Q h_Q$

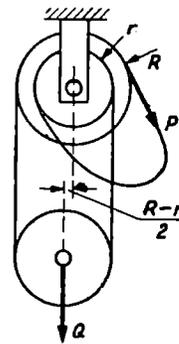


Fig 170. Differentialflaschenzug

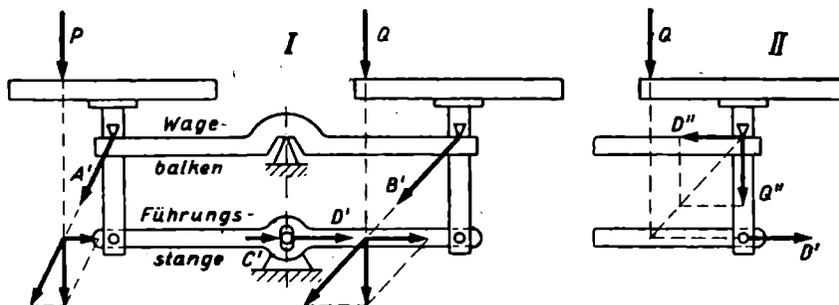


Fig 171. Tafelwaage

252. Tafelwaage. Bei der Waage Fig 171 I soll $P = Q$ sein, und zwar unabhängig von der Stellung der Lasten auf den Tafeln: Senkt man P um h_P , so muß Q steigen um $h_Q = h_P$, wo es auch steht. Das wird erreicht durch die gezeichnete Parallelführung.

Das folgt auch aus dem Gleichgewicht der Tafeln: P übt am Waagebalken die schiefe Kraft A' aus und auf die Führungsstange den Druck C' (Nr 126 Fig 86 IV). Ebenso Q die Kraft B' und Zug D' . Nun sind die \downarrow Komponenten von A' und B' gleich P bzw Q . Das Gleichgewicht am Waagebalken ergibt also immer $P=Q$.

Dasselbe ergibt sich, wenn man (Fig II) Q ersetzt durch eine an den Endpunkt des Waagebalkens verlegte Kraft Q'' und ein Kräftepaar $D' D''$ (Nr 157). — Wäre dagegen die Führungsstange nicht \parallel Waagebalken so, müßten $D' D'' \parallel$ Stange werden. Am Waagebalken würde D' dann ein Moment haben.

Ist zB die Führungsstange gegen den Waagebalken nach rechts abwärts geneigt, so macht die rechte Tafel rechts größere Bewegungen als links. Steht also Q rechts, so muß es kleiner sein, als wenn es links steht. Es wäre also abhängig von seiner Stellung auf der Tafel. So schließt man nach dem Arbeitssatz von den Bewegungen auf die Kräfte.

Auch bei einer Briefwaage ist die Schale parallel geführt.

253. Arbeitssatz bei vielen Kräften. An der Welle Fig 172 hängen 4 Gewichte. Wir wollen X berechnen als Summe von Anteilen, die wir einzeln aus den Hebevverhältnissen berechnen. Es werde

$P_1 = 30 \text{ kg}$	gehoben um	$h_1 = 13 \text{ cm}$
$P_2 = 80 \text{ kg}$	gehoben um	$h_2 = 9 \text{ cm}$
$P_3 = 20 \text{ kg}$	gesenkt um	$h_3 = 11 \text{ cm}$

(Die Radien r verhalten sich wie 13:9:11!)
Dann ist $X = \Sigma \text{ Last} \cdot \text{Hebevverhältnis}$

$$X = \frac{P_1 h_1}{h_x} + \frac{P_2 h_2}{h_x} - \frac{P_3 h_3}{h_x} = \frac{30 \cdot 13 + 80 \cdot 9 - 20 \cdot 11}{h_x} = \frac{890 \text{ kgcm}}{h_x}$$

Das kann man nun in verschiedener Weise erreichen:

mit $X = 50 \text{ kg}$	welches um	$h_x = 17,80 \text{ cm}$	sinkt
„ $X = 60 \text{ kg}$	„ „	$h_x = 14,83 \text{ cm}$	„ usw

wobei der Radius r_x entsprechend zu bemessen ist.

Immer muß sein $X h_x + P_3 h_3 = P_1 h_1 + P_2 h_2$

Σ aufgewendete Arbeit = Σ gewonnene Arbeit

Dieser Satz gilt für alle Mechanismen. Das soll an einigen Beispielen bestätigt und dann allgemein bewiesen werden.

254. Ladebaum. An dem Ladebaum Fig 173 I hängt die Last P , gehalten durch die Verspannkraft V ; diese durch ein Gewicht dargestellt. Sinkt V um h_V , so steigt P um h_P schräg aufwärts. Wir denken uns eine

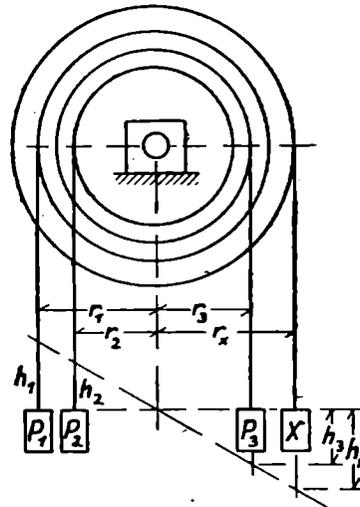


Fig 172. Arbeitssatz bei mehreren Kräften

kleine Verschiebung s des Angriffspunkts der Kräfte; — klein! Sonst würden sich die Winkel $\alpha \beta$ wesentlich ändern. Die Gewichte $V P$ wären dann nicht mehr im Gleichgewicht miteinander. — In Fig II sind die

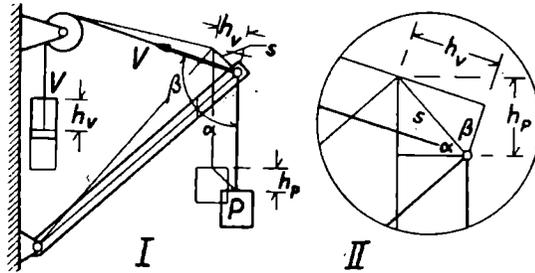


Fig 173. Arbeitssatz am Ladebaum

kleine Verschiebung s und die dadurch bedingten Längenänderungen der Seile vergrößert herausgezeichnet. Dabei ist h_v die Differenz der alten und der neuen Länge der Verspannung. Die Kreisbögen sind angenähert als gerade behandelt, die kleinen Winkeländerungen vernachlässigt.

Dann ist Senkung $= h_v = s \sin \beta$ Hebung $= h_p = s \sin \alpha$
 aufgewendete Arbeit $= V h_v =$ gewonnene Arbeit $= P h_p$
 eingesetzt: $V s \sin \beta = P s \sin \alpha$

Das stimmt überein mit der Komponentengleichung (Nr 72)

$$\sphericalangle V \sin \beta = P \sin \alpha \sphericalangle$$

255. Drehkran. Der Drehkran Fig 174 I ist mit P belastet. Um die Stützkraft B zu berechnen, denken wir uns den Kran \curvearrowright geneigt um den kleinen Winkel ϵ . Dann verschiebt sich der Angriffspunkt von $B \rightarrow$ um $s_B = b \text{ arc } \epsilon$. Ein Gewicht, das die Kraft B ausübt, würde um $h_B = s_B$ gehoben werden. Der Angriffspunkt von P bewegt sich \sphericalangle um $s_P = r \text{ arc } \epsilon$.

Die Last sinkt also \downarrow um $h_P = s_P \cos \alpha = r \text{ arc } \epsilon \cos \alpha = a \text{ arc } \epsilon$
 gewonnene Arbeit $= B h_B =$ aufgewendete Arbeit $= P h_P$

eingesetzt: $B s_B = P s_P \cos \alpha$ oder $B b \text{ arc } \epsilon = P a \text{ arc } \epsilon$

Das stimmt überein mit der Momentengleichung $\curvearrowright B b = P a \curvearrowleft$

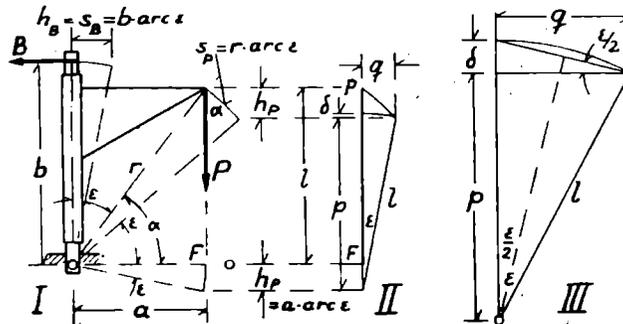


Fig 174. Arbeitssatz am Drehkran

256. Zur Berechnung der kleinen Verschiebungen. I. Die Senkung $h_P = a \text{ arc } \epsilon$ ist hiernach ebensogroß wie die Senkung des End-

punkts F des Hebelarms a , des Lotes vom Drehpunkt auf die Angriffslinie von P ; wenn man sich F mit dem Kran fest verbunden denkt. Dann bleibt nämlich (Fig II) der senkrechte Abstand l zwischen F und P unverändert. — Allerdings neigt er sich um ε . Danach sinkt also P um etwas mehr als F : um den kleinen Unterschied δ zwischen der schrägen Länge l und ihrer Projektion p auf die ursprüngliche Richtung. — Wir untersuchen das am Zahlenbeispiel:

$$\text{Es sei } r = 5 \text{ m} \quad a = 3 \text{ m} \quad \alpha = 53^{\circ} 8' \quad l = 4 \text{ m} \quad \varepsilon = 2^{\circ}$$

$$\text{Dann ist } s_P = r \operatorname{arc} \varepsilon = 174,5 \text{ mm} \quad h_P = a \operatorname{arc} \varepsilon = 104,7 \text{ mm}$$

Ferner ist Seitenverschiebung von P

= Projektion des schrägen l auf die Waagerechte

= Projektion von s_P auf die Waagerechte = $q = l \operatorname{arc} \varepsilon = 139,6 \text{ mm}$

Also Unterschied der schrägen Länge und ihrer Projektion = $\delta = l - p$

$$= l - \sqrt{l^2 - q^2} = 4000 - \sqrt{4000^2 - 139,6^2} = 4000 - 3997,562 = 2,438 \text{ mm}$$

Hiernach ist δ klein im Vergleich zu den andern Verschiebungen.

II. δ war mühsam zu berechnen. Die Wurzel mußte auf 7 Stellen genau berechnet werden. Wir gewinnen es einfacher aus Fig III, in der δ und q größer gezeichnet sind. Die schräge Sehne q bildet mit der Waagerechten den Winkel $\varepsilon/2$, denn sie steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden von ε .

$$\text{Dann ist } q = l \operatorname{arc} \varepsilon = 139,6 \text{ mm} \quad \delta = q \cdot \operatorname{arc} \varepsilon / 2$$

$$\text{also } \delta = l \operatorname{arc} \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{arc} \varepsilon}{2} = \frac{l}{2} \operatorname{arc}^2 \varepsilon = \frac{4000}{2} \cdot \left[\frac{2}{57,3} \right]^2 = 2,437 \text{ mm}$$

$$\text{oder } \delta = \frac{q \cdot q}{2l} = \frac{q^2}{2l} = \frac{139,6^2}{2 \cdot 4000} = 2,437 \text{ mm}$$

δ ist also im Verhältnis zu q und den andern Verschiebungen um so kleiner, je kleiner ε ist:

$$\delta : q = q : 2l = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \varepsilon$$

Nun sollen die Bewegungen klein sein. Sonst kommt man zu Stellungen, denen andere Kräfte entsprechen. Das Verhältnis der Kräfte ist das umgekehrte Verhältnis der kleinen Bewegungen, die aus der untersuchten Stellung heraus eintreten, der Grenzwert des Verhältnisses der Bewegungen. Deshalb gelten hier nur die „Größen erster Ordnung“, die zu $\operatorname{arc} \varepsilon$ proportional sind, nicht aber die „Größen zweiter Ordnung“, die wie δ proportional sind zu $\operatorname{arc}^2 \varepsilon$. Diese verschwinden im Verhältnis zu den andern, wenn man $\operatorname{arc} \varepsilon$ immer kleiner werden läßt. Man kann sie also fortlassen, wenn es nur auf den Grenzwert ankommt.

257. Aufgabe (Kniehebel). Berechne bei dem Kniehebel Nr 76 Fig 44 das Verhältnis D/K aus dem Verhältnis der Bewegungen des Gelenks K und des Kolbens.

258. Aufgabe (Winkelhebel). Berechne bei dem Winkelhebel Nr 119 Fig 76 I das Verhältnis A/B . — Man denkt sich A und B durch Gewichte ausgeübt und berechnet ihre Hebung bzw Senkung bei einer kleinen Drehung des Winkelhebels.

259. Fachwerk. I. Bei dem Fachwerk Fig 175 I denken wir uns zB den Stab 10 gelöst und lassen den bisher durch 10 angeschlossenen Fachwerkteil eine kleine Drehung ε ausführen (Fig II). Dann leisten die Belastungen, soweit sie sich dabei senken, Arbeit. S_{10} nimmt Arbeit auf.

Der Angriffspunkt von S_{10} verschiebt sich um $s = b \operatorname{arcc} \varepsilon \rightarrow$. Zugleich senkt er sich um $\delta = s^2/2b = \frac{1}{2} b \operatorname{arcc}^2 \varepsilon$ (Fig III). Nach Nr 256 II ist δ als klein im Verhältnis zu s fortzulassen. P_2 leistet also hier keine Arbeit.

Die Verschiebung von P_4 ist $s_4 = r_4 \operatorname{arcc} \varepsilon \rightarrow$
also die Senkung, die Verschiebungskomponente:

$$h_4 = s_4 \cos \gamma = r_4 \cos \gamma \operatorname{arcc} \varepsilon = 2a \operatorname{arcc} \varepsilon$$

Bei P_8 sind Senkung und Verschiebung einander gleich:

$$h_8 = s_8 = 2a \operatorname{arcc} \varepsilon$$

Die senkrechten Verschiebungskomponenten übereinanderliegender Punkte sind einander gleich; nur abhängig von dem waagerechten Abstand vom Drehpunkt. Denn der senkrechte Stab I hat unveränderte Länge. Der senkrechte Abstand seiner beiden Endpunkte ändert sich nur infolge der Neigung des Stabes um die Größe zweiter Ordnung δ .

Hiernach heißt der Arbeitssatz:

$$S_{10} \cdot b \operatorname{arcc} \varepsilon = (P_4 + P_8) \cdot 2a \operatorname{arcc} \varepsilon + (P_3 + P_7) \cdot a \operatorname{arcc} \varepsilon$$

Das ist aber die Momentengleichung nach Nr 234.

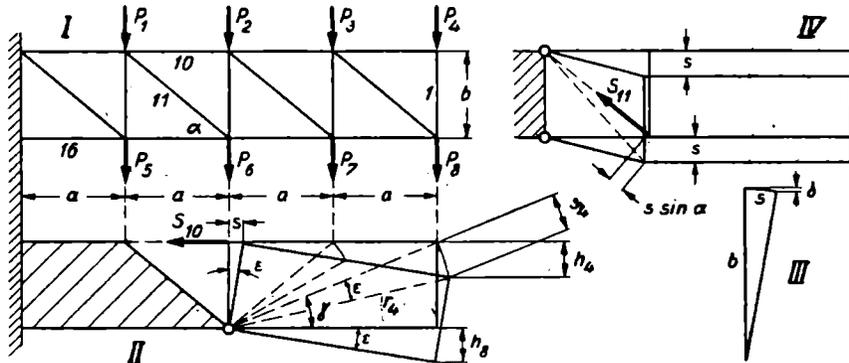


Fig 175. Arbeitssatz am Fachwerk

II. Die Unterbrechung von Stab 11 hat eine Parallelverschiebung des angeschlossenen Fachwerkteils zur Folge (Fig IV). Stab 11 verlängert sich dabei um $s \sin \alpha$. Ein Gewicht, durch das die Kraft S_{11} ausgeübt wird, würde sich also um $s \sin \alpha$ heben.

Also aufgenommene Arbeit = Σ abgegebene Arbeiten

$$S_{11} \cdot s \sin \alpha = (P_2 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7 + P_8) \cdot s$$

Das ist aber die Komponentengleichung nach Nr 234.

Daß es hier nur auf die Summe der P ankommt ohne Rücksicht auf ihre Stellung, erklärt der Arbeitssatz so, daß bei Unterbrechung von S_{11} alle dieselbe Senkung ausführen. Bei Unterbrechung von S_{10} dagegen

findet eine Drehung statt, bei der $P_4 P_8$ größere Bewegungen ausführen als $P_3 P_7$. Deshalb haben sie auch größeren Einfluß auf S_{10} . — Man beurteilt die Arbeitsleistung einer Hebevorrichtung eben nicht nur nach der Größe der Last, sondern auch nach der Höhe, auf die gefördert wird. Beim bloßen Halten einer Last (P_2) wird noch keine Arbeit geleistet.

260. Aufgabe (Fachwerk). Berechne die senkrechte Stabkraft S_9 .

261. Leiter. Will man bei der Leiter Nr 141 Fig 95 die Kraft C berechnen, so stellt man sich die kleine Bewegung vor, die eintritt, wenn man das Seil C etwas nachläßt. Dann gleitet die Leiter an Wand und Boden. A und B leisten keine Arbeit. Die Leiter dreht sich um F . Die Angriffspunkte von P und C bewegen sich dabei \perp auf den Verbindungslinien nach F . P sinkt, leistet Arbeit. Der Angriffspunkt von C bewegt sich im Sinne einer Verlängerung des Seils. Das Seil wird also gezogen. Die Stützkraft C verhindert die Bewegung, nimmt die von P geleistete Arbeit auf.

Zieht das Seil auf den Drehpunkt F , so steht die Verschiebung des Angriffspunkts \perp Seil. C kann dann die Arbeit nicht aufnehmen. Es ist kein Gleichgewicht möglich. (Vergl Nr 146 III.)

Man schließt also nach dem Arbeitssatz aus kleinen Bewegungen, wirklichen oder gedachten, auf die Kräfte. Die Bewegung denkt man sich so, daß die zu berechnende Stützkraft Arbeit leistet oder aufnimmt, die andern Stützkräfte nicht. Es muß dann dasselbe herauskommen, wie aus Komponenten- und Momentengleichungen. Das kann man auch allgemein beweisen.

262. Beweis des Arbeitssatzes. An der Scheibe Fig 176 I sind eine Reihe von Kräften miteinander im Gleichgewicht nach dem Kräfteplan II. Wir beschränken uns auf den Beweis für die Ebene. (Vergl Nr 245.)

I. Bewegt man die Scheibe parallel zu sich um $s \rightarrow$, so leisten $K_1 K_4$ Arbeit, $K_2 K_3$ nehmen Arbeit auf. Die Arbeit einer Kraft K , zB K_1 , folgt aus der Senkung des Gewichts, durch die die Kraft ausgeübt wird.

$$\text{Senkung} = h = s \cos \alpha$$

= Projektion der Verschiebung auf die Krafrichtung

$$\text{Arbeit} = Kh = K \cdot (s \cos \alpha) = (K \cos \alpha) \cdot s$$

= Kraft mal Verschiebungskomponente in Krafrichtung

= Kraftkomponente in Verschiebungsrichtung mal Verschiebung

Und nun: aufgenommene Arbeit = abgegebene Arbeit

$$\Sigma \leftarrow \text{Komponenten mal } s = \Sigma \rightarrow \text{Komponenten mal } s$$

$$K_2 s \cos \alpha_2 + K_3 s \cos \alpha_3 = K_1 s \cos \alpha_1 + K_4 s \cos \alpha_4$$

$$\text{oder} \quad \leftarrow K_2 \cos \alpha_2 + K_3 \cos \alpha_3 = K_1 \cos \alpha_1 + K_4 \cos \alpha_4 \rightarrow$$

eine Ableitung der Komponentengleichung aus dem Arbeitssatz, ein Beweis der Vereinbarkeit beider. (Vergl Nr 254; 259 II.)

II. Dreht man die Scheibe um den Punkt D (Fig III) um den kleinen Winkel ε , so werden $K_1 K_2$ Arbeit abgeben, $K_3 K_4$ Arbeit aufnehmen je nach dem Winkel β zwischen Kraft K und Verschiebung s .

Die seitliche Bewegung der beiden Anschlußpunkte 2 und 4 von D sei $s_2 = s_4$. Der Angriffspunkt von P bewegt sich schräg. Seine Senkung h_P ist so groß wie die des senkrecht unter ihm liegenden Punkts, den man sich mit der Leiter verbunden denken muß (Nr 255; 256 I).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } h_P = 1,9 \operatorname{arc} \varepsilon \\ \quad \quad s_2 = 5,8 \operatorname{arc} \varepsilon \end{array} \right\} \text{ oder } h_P = \frac{1,9}{5,8} s_2$$

Die Anschlußpunkte von C bewegen sich \rightarrow

$$\text{um } s_3 = \frac{3,2}{5,8} s_2 \quad \text{und} \quad s_1 = \frac{5,8}{3,2} s_4 = \frac{5,8}{3,2} s_2$$

$$\text{Also Verkürzung von Stab } C = s_1 \cos \alpha - s_3 \cos \alpha = \left(\frac{5,8}{3,2} - \frac{3,2}{5,8} \right) s_2 \cos \alpha$$

Und nun Arbeitsaufnahme von $C = \text{Arbeitsabgabe von } P$

$$C \cdot \left(\frac{5,8}{3,2} - \frac{3,2}{5,8} \right) s_2 \cos \alpha = P \frac{1,9}{5,8} s_2$$

$$C = 0,344 P \quad \text{Druck}$$

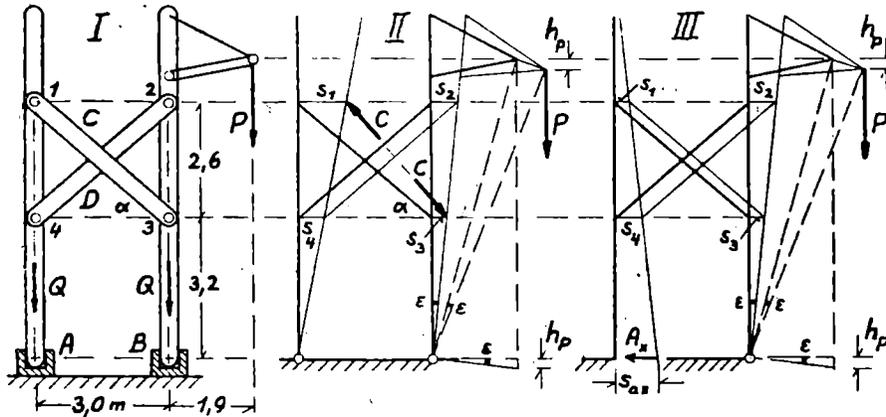


Fig 177. Arbeitssatz am Baugerüst

II. Will man A_x bestimmen, so betrachte man die Bewegung Fig III, die eintritt, wenn man bei bestehender Kreuzverbindung das untere Leiterende seitlich verschiebbar macht. Es gleitet dann nach rechts, indem P sinkt. Die Stützkraft A_x muß also nach links gerichtet sein.

Aus der Senkung von P folgt wie in I

$$\operatorname{arc} \varepsilon = h_P / 1,9 \quad s_3 = 3,2 \operatorname{arc} \varepsilon = s_1 \quad s_2 = 5,8 \operatorname{arc} \varepsilon = s_4$$

$$s_{ax} = s_1 + \frac{5,8}{2,6} (s_4 - s_1) = \frac{5,8 s_4 - 3,2 s_1}{2,6} = \frac{5,8^2 - 3,2^2}{2,6} \frac{h_P}{1,9}$$

Aus dem Arbeitssatz $A_x s_{ax} = P h_P$

$$\text{folgt dann } A_x = \frac{2,6 \cdot 1,9}{5,8^2 - 3,2^2} P = 0,211 P$$

III. Dasselbe folgt aus Komponenten- und Momentengleichungen

$$\text{an der linken Leiter} \quad \curvearrowright D \cos \alpha \cdot 3,2 = C \cos \alpha \cdot 5,8 \curvearrowleft$$

$$\text{,, ,, rechten ,,} \quad \curvearrowleft D \cos \alpha \cdot 5,8 = C \cos \alpha \cdot 3,2 + P \cdot 1,9 \curvearrowright$$

$$\text{aufgelöst} \quad D = 0,623 P \quad C = 0,344 P$$

$$\text{Ferner} \quad \leftarrow A_x = D \cos \alpha - C \cos \alpha \rightarrow = 0,211 P$$

Das Gerüst ist gleich einem Dreigelenkbogen (Nr 225) mit dem Scheitelenk im Schnittpunkt der Latten. — Die Statik ist rechnerisch einfacher. Die Verschiebungen aber geben ein gutes Urteil über Zug oder Druck.

264. Aufgabe (Baugerüst). Berechne $D A_y B_x B_y$ nach dem Arbeitssatz und nach Komponenten- und Momentengleichungen. — Man wählt die Bewegung jedesmal so, daß nur die zu berechnende Kraft Arbeit leistet.

265. Winde. Eine Winde soll eine Last $P = 1200 \text{ kg}$ mit einer Geschwindigkeit $v = 0,8 \text{ m/sk}$ heben. Der dazu zu verwendende Motor hat eine Umlaufzahl $n = 800/\text{Min}$. Um das Moment an der Motorwelle zu berechnen, müßten wir zunächst das Getriebe mit Rücksicht auf v und n entwerfen und dann die Kräfte und Momente im Getriebe durchrechnen. Das kann in sehr verschiedener Weise geschehen: Hängt man die Last an einen Flaschenzug, so braucht man in der Winde nur eine kleine Übersetzung. Läßt man aber das Tragseil unmittelbar auf die Trommel laufen, so braucht man dafür vielleicht eine Vorgelegewelle mehr.

I. Unabhängig von der Ausführung des Getriebes ist
 aufgewendete Arbeit am Motor } = { gewonnene Arbeit am Gewicht
 pro Zeiteinheit } { pro Zeiteinheit

$$\begin{aligned} \text{Die rechte Seite ist} &= \text{Gewicht mal Hebung pro Zeiteinheit} \\ &= \text{Gewicht mal Geschwindigkeit} \\ &= P v = 1200 \text{ kg} \cdot 0,8 \text{ m/sk} = 960 \text{ kgm/sk} \end{aligned}$$

An der Motorwelle wird Arbeit übertragen von den tangentialen Komponenten K_t der Kupplungskräfte oder von den inneren Spannungen in der Welle selbst. K_t am Radius r leistet bei 1 Umlauf

$$\text{Kraft mal Verschiebung} = K_t \cdot 2\pi r$$

Bei mehreren Kräften an beliebig verschiedenen Radien ist

$$\text{Arbeit pro Umlauf} = 2\pi \sum K_t r = 2\pi \cdot \text{Moment} = 2\pi M$$

Bei einer Umlaufzahl $n = 800/\text{Min} = 800/60 \text{ sk} = 13,33/\text{sk}$ ist dann

$$\left. \begin{array}{l} \text{übertragene Arbeit} \\ \text{pro Zeiteinheit} \end{array} \right\} = 2\pi M n = 2\pi M \frac{800}{\text{Min}} = 2\pi M \frac{800}{60 \text{ sk}}$$

$$\text{Und nun (aufgewendet)} \quad M \cdot \frac{2\pi 800}{60 \text{ sk}} = 960 \frac{\text{kgm}}{\text{sk}} \quad (\text{gewonnen})$$

$$M = 11,46 \text{ kgm} = 1146 \text{ kgcm}$$

Wir haben hier auf Grund des Arbeitssatzes die Stärke des Motors vorweg berechnet, ohne das Getriebe konstruiert zu haben. — Wegen der Reibungswiderstände muß das Moment natürlich noch größer werden.

II. Macht der Motor nur 700 Uml/Min, so wird $M = 13,10 \text{ kgm}$.
Immer aber ist

$M \cdot 2\pi n = 960 \text{ kgm/sk}$ unabhängig von der Wahl der Umlaufzahl.

Diese „Arbeit pro Zeiteinheit“, genannt „Leistung“ $= N = 960 \text{ kgm/sk}$ ist also die für Winde und Motor maßgebende Zahl.

III. Sie gilt auch für die Kräfte und Momente innerhalb des Getriebes:
Die Last hänge in einem Flaschenzug von 2 Rollen. Dann läuft das Windenseil mit 1,6 m/sk

also Leistung im Seil $= 600 \text{ kg} \cdot 1,6 \text{ m/sk} = 960 \text{ kgm/sk}$

Die Trommel habe 500 mm \varnothing , macht also 1,02 Uml/sk;

also Moment an der Trommel $= \frac{N}{2\pi n} = \frac{960 \text{ kgm/sk}}{2\pi \cdot 1,02/\text{sk}} = 150 \text{ kgm}$

übereinstimmend mit Windenzug mal Trommelradius $= 600 \text{ kg} \cdot 0,25 \text{ m}$
An der Motorwelle ist die Umlaufzahl größer, das Moment kleiner. Auch nach der Arbeitsgleichung verhalten sich also die Momente umgekehrt wie die Umlaufzahlen (Nr 198).

266. Bezeichnungen und Formeln. Man nennt also

	Leistung $= N =$ Arbeit pro Zeiteinheit
Es war	Arbeit $=$ Gewicht mal Hebung
	$=$ Kraftkomponente mal Weg
	$=$ Kraft mal Wegkomponente
	$=$ Moment mal Arcus des Drehwinkels
	Leistung $=$ Gewicht mal Hebungsgeschwindigkeit
	$=$ Kraftkomponente mal Geschwindigkeit
	$=$ Moment mal $2\pi \cdot$ Umlaufzahl

Die Formeln für geradlinige Bewegung und die für Drehung entsprechen einander. Dem Weg bei Verschiebung entspricht der Arcus bei Drehung.

So wie Geschwindigkeit $=$ Weg pro Zeiteinheit

so ist auch $2\pi \cdot$ Umlaufzahl $=$ Arcus pro Zeiteinheit

Denn die Einheit des Arcus ist $180^\circ/\pi = 57,3^\circ$.

Auf 1 Umlauf kommen 2π solcher Arcuseinheiten.

Eine Welle, die $n = 800 \text{ Uml/Min} = 13,33 \text{ Uml/sk}$ macht,
dreht sich also um $2\pi n = 2\pi \cdot 13,33 = 83,8 \text{ Arcuseinheiten/sk}$.

Man nennt diese Größe auch „Winkelgeschwindigkeit“.

Dann ist Leistung $=$ Moment mal Winkelgeschwindigkeit

267. Einheiten. Man pflegt die Leistung in „Pferdestärken“ auszudrücken, eine Einheit, die längst überflüssig geworden ist, oder in „Kilowatt“, eine Einheit, die einem andern Maßsystem angehört:

1 PS $= 75 \text{ kgm/sk}$ 1 KW $= 102 \text{ kgm/sk}$

Dann ist die Leistung der Winde

$N = 1200 \text{ kg} \cdot 0,8 \text{ m/sk} = 960 \text{ kgm/sk} = 12,8 \text{ PS} = 9,4 \text{ KW}$

Man macht dann auch die Formel $N = M \cdot 2\pi n$ so zurecht, daß N in PS , M in kgcm , n pro Minute angegeben wird. Es seien N_{PS} , M_{kgcm} , n_{Min} die Maßzahlen im Gegensatz zu den Größen. (Vergl Nr 3 III; 8 III.)

$$\text{Dann ist } M = \frac{N}{2\pi n} = \frac{N_{PS} \cdot 7500 \text{ kgcm/sk}}{2\pi n_{\text{Min}}/60 \text{ sk}} = \frac{60 \cdot 7500 \text{ kgcm}}{2\pi} \cdot \frac{N_{PS}}{n_{\text{Min}}}$$

$$M_{\text{kgcm}} = 71620 \frac{N_{PS}}{n_{\text{Min}}} \quad \text{im Beispiel} \quad = 71620 \cdot \frac{12,8}{800} = 1146$$

Wird N in KW angegeben, so ist die Umrechnungszahl 97340.

268. Riemenscheibe und Zahnrad. Bei der Aufgabe Nr 201 Fig 140 war die kleine Riemenscheibe von $280\varnothing$ angetrieben durch ein Moment $= 120 \text{ kgm}$. Sie laufe mit 340 Uml/Min , die große von $720\varnothing$ also mit 132 Uml/Min . Dann wird durch das Getriebe übertragen die

$$\text{Leistung} = N = M \cdot 2\pi n = 120 \cdot 2\pi \cdot 340/60 = 4270 \text{ kgm/sk}$$

$$\text{oder} \quad N = 12000 \cdot 340/71620 = 57 \text{ PS}$$

$$\text{Ferner} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Moment in der} \\ \text{oberen Welle} \end{array} \right\} = \frac{4270 \text{ kgm/sk}}{2\pi \cdot 132/60 \text{ sk}} = 309 \text{ kgm}$$

Das Zahnrad von $460\varnothing$ hat eine Umfangsgeschwindigkeit $= 3,18 \text{ m/sk}$
Also tangentielle Komponente der Zahnkraft $= 4270/3,18 = 1342 \text{ kg}$
Alles in Übereinstimmung mit Nr 201.

Die Riemengeschwindigkeit ist $= 4,99 \text{ m/sk}$

Durch jeden der beiden Riemenstränge fließt Arbeit:

durch den mit $U = 2143 \text{ kg}$ gezogenen 10680 kgm/sk nach oben

„ „ „ $V = 1286$ „ „ 6410 „ / „ „ unten

die Differenz von Welle zu Welle: 4270 „ / „

269. Aufgabe (Leistung einer Pumpe). Eine Pumpe soll Wasser heben: $290 \text{ dm}^3/\text{Min}$ auf 32 m Höhe. Wie groß ist die Leistung und damit das Moment an der Motorwelle für 900 Uml/Min ?

$$\text{Leistung} = \text{Gewicht pro Zeiteinheit mal Hebung!}$$

270. Aufgabe (Eisenbahnzug). Ein Zug besteht aus 9 Wagen von je 45 to und 1 Lokomotive von 110 to . Die zur Überwindung der Widerstände erforderliche Zugkraft nimmt man an mit 8 kg/to . (8 kg Widerstand pro to des Zuggewichts.) — I. Der Zug fährt auf waagerechter Strecke mit 80 km/St. — II. Der Zug fährt auf einer Steigung $1:120$ mit 60 km/St. — Berechne jedesmal Widerstand W und Leistung N .

271. Aufgabe (Kegelräder). Bei den Kegelrädern Nr 208 Fig 146 habe die obere Scheibe ($120\varnothing$) die Umfangsgeschwindigkeit $1,8 \text{ m/sk}$. Berechne die Leistung; die Umfangsgeschwindigkeiten der Kegelräder und des Q -Rades; die Drehzahlen der Wellen; hieraus und aus der Leistung die Zahnkräfte und Momente. — Es ist zweckmäßig, die Drehzahlen pro Sekunde zu berechnen, und die Formel $N = M \cdot 2\pi n$ zu benutzen, statt in PS und mit der Umrechnungszahl zu rechnen.

272. Leistungsmessung. Um die Leistung einer Dampfmaschine zu messen, setzt man zB auf die Welle 2 Bremsbacken (Fig 178), die durch Flügelmuttern nach Bedarf angezogen werden können (Prony'scher Zaum). Gemessen wird die Umlaufzahl $n = 170/\text{Min}$, die Kraft $P = 132 \text{ kg}$ im Abstand $a = 620 \text{ mm}$, indem zB das Ende des Hebels auf die Brücke einer Dezimalwaage drückt.

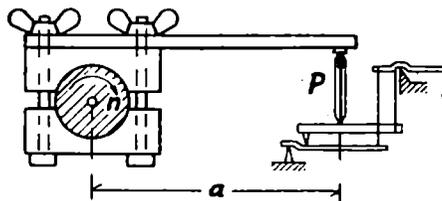


Fig 178. Leistungsmessung

Dann ist $N = 132 \text{ kg} \cdot 0,62 \text{ m} \cdot 2\pi \cdot 170/60 \text{ sk} = 1457 \text{ kgm/sk}$

Es muß dafür gesorgt werden, daß die Einstellung stabil ist: Wird der Zaum zufällig von der Welle \curvearrowright etwas mitgenommen, so kommt P an einen größeren Hebelarm. Das \curvearrowleft widerstehende Moment wird also größer und führt den Zaum in die Gleichgewichtslage zurück. Wäre die Querstange an der unteren Bremsbacke angebracht, so wäre der Zaum labil.

273. Perpetuum mobile. I. Das Ziel mancher Erfinder ist, eine Maschine zu bauen, die an einer Welle dauernd ein Moment im Sinne der Drehung ausübt und dadurch andere Vorrichtungen treiben kann, — ohne daß im Innern der Maschine dauernde Veränderungen auftreten, ohne daß sie „abläuft“. Gewichte, die vorübergehend sinken, um die Welle zu treiben, sollen auch wieder gehoben werden; und der Erfinder spekuliert darauf, daß trotzdem ein Momentenüberschuß an der Welle bleibt, wenn er das Gewicht auf anderem Wege heben läßt, als auf dem es gesunken war: wenn er es etwa durch einen Flaschenzug hebt und eine schiefe Ebene abwärts laufen läßt; wenn das Gewicht am kleinen Hebelarm steigt, am großen sinkt; u dergl.

II. Dieses „Perpetuum mobile“ wird nun durch den Arbeitssatz unmöglich: Wo ein Gewicht gehoben wird, muß ein anderes um eine entsprechende Strecke sinken. Um dieses wieder zu heben, wenn auch auf einem anderen Weg, muß ein drittes , schließlich das erste wieder um dieselbe Höhe sinken, um die es vorher gestiegen war.

Jedes Gewicht im Innern der Maschine hat einen

„Arbeitsvorrat“ = Gewicht mal Höhe,

der durch Hebung um die gewonnene Arbeit = Gewicht mal Hebung vermehrt, durch Senkung vermindert wird. Die Höhe kann dabei etwa vom tiefsten Punkt der Maschine aus gemessen werden.

Die Gleichung Σ gewonnene Arbeit = Σ abgegebene Arbeit

bedeutet nun, daß die Änderungen der Arbeitsvorräte aller beteiligten Gewichte einander aufheben. Es ist also

Σ Arbeitsvorräte = Σ Gewichte mal Höhe = konstant.

Soll aber die Welle dauernd ein Moment im Sinne der Drehung ausüben, so wird dort dauernd Arbeit nach außen an ein anderes Gewicht

abgegeben. Dann muß sich der Arbeitsvorrat im Innern der Maschine vermindern. Die Gewichte müssen an Höhe verlieren, bis sie in der tiefst möglichen Stellung angelangt sind. Die Maschine kann also nicht „dauernd laufen“.

274. Beispiel. Da der Arbeitssatz mit Komponenten- und Momentengleichungen vereinbar ist, so wird es auch immer gelingen, bei einem angeblichen Perpetuum mobile den Fehler in der Berechnung der Kräfte und Momente nachzuweisen.

I. Ein Rad mit 8 Speichen (Fig 179 I) trägt auf jeder Speiche ein verschiebbares Gewicht, geführt durch einen exzentrischen Kreis. Die Meinung ist, daß das \curvearrowright Moment von Gewicht 1 am größeren Hebelarm immer das \curvearrowright Moment von Gewicht 5 überwindet, daß daher das Rad sich dauernd \curvearrowright drehen wird. — Aber dafür haben die Gewichte 3 und 7, auf dem schrägen Teil der Führung aufliegend, noch \curvearrowright Momente. Der Sinn

des Moments wechselt erst im Scheitel S des Führungskreises.

II. Und wenn der Erfinder, um diesem nach seiner Meinung zufälligen Umstand Rechnung zu tragen, die Führung umgestaltet wie Fig II, so haben zwar 3 und 7 kein \curvearrowright Moment mehr; aber

die Gewichte 2 und 8 ruhen dafür auf dem flachen Teil der Führung. Ihre \curvearrowright Momente sind also kleiner als die \curvearrowright Momente von 4 und 6.

III. Es ist nicht ausgeschlossen, daß für bestimmte Stellungen des Rades sich ein \curvearrowright Momentüberschuß ergibt, daß bei \curvearrowright Drehung der Schwerpunkt der Gewichte sinkt. Dann aber muß er für andere Stellungen wieder steigen; es muß dann ein entgegengesetztes Moment auftreten. Das Rad würde dann bestimmten Gleichgewichtslagen zustreben, aber nicht dauernd im gleichen Sinn unter Arbeitsabgabe laufen.

IV. Wie weit dieser Satz vom ausgeschlossenen Perpetuum mobile bestehen bleibt, wenn auch Beschleunigungen, Wärmevergänge und sonstige Erscheinungen verwertet werden, wird anderweitig erörtert werden.

280. Zusammenfassung. Der Arbeitssatz stellt den Zusammenhang her zwischen Bewegungen und Kräften. Das ist technisch wichtig. Es ist ja die Absicht beim Bau von Maschinen, Bewegungen gegen Widerstände zu erzielen. Es ist Σ gewonnene Arbeit = Σ aufgewendete Arbeit wobei Arbeit = Kraftkomponente \cdot Weg = Moment \cdot Arcus

Daraus werden Kräfte und Momente berechnet. Daraus folgt die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile.

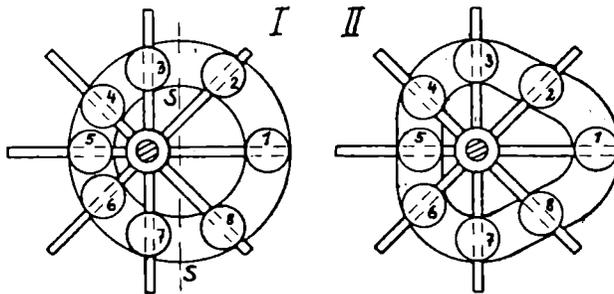


Fig 179. Perpetuum mobile

Bei Maschinen, die dauernde Bewegungen ausführen, wobei die Kräfte konstant bleiben (Seilzüge, Zahnkräfte), berechnen wir die

$$\begin{aligned} \text{Leistung} &= \text{Arbeit pro Zeiteinheit} \\ &= \text{Kraftkomponente mal Geschwindigkeit} \\ &= \text{Moment mal Winkelgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Man berechnet hiernach hauptsächlich Kräfte und Momente bei gleichmäßiger Drehung. Sind aber die Kräfte veränderlich mit der Einstellung des Körpers, so betrachtet man kleine Bewegungen, von denen nur die Größen erster Ordnung, die Differentiale berechnet werden.

XI. Schwerpunkt Stabilität

281. Schwerpunkt eines Fachwerks. Die Gewichte der Teile des Fachwerks Fig 180 I kann man sich — zwecks Berechnung von Stützkraften, die in den Lagern *A B* wirken, — zu einer Resultante vereinigt denken. Resultante und Angriffslinie können konstruiert werden durch ein Seileck (Nr 162) oder berechnet werden nach dem Grundsatz, daß ihre Größe gleich der Summe der Einzelgewichte, ihr Moment gleich der Summe der Momente der Einzelgewichte sein muß (Nr 117; 147), um nämlich die gleichen Stützkraften zu ergeben.

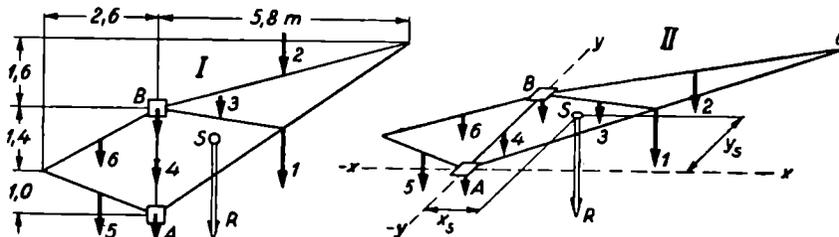


Fig 180. Schwerpunkt des Fachwerks

Stab	G/l	l	G	x	y	Gx	Gy
—	kg/m	m	kg	m		kgm	
1	90	7,05	635	2,90	2,00	1840	1270
2	40	6,01	241	2,90	3,20	699	771
3	40	2,93	117	1,45	2,20	170	257
4	40	2,40	96	—	1,20	—	115
5	90	2,78	250	-1,30	0,50	-325	125
6	40	2,95	118	-1,30	1,70	-154	201
A	—	—	110	—	—	—	—
B	—	—	120	—	2,40	—	288
Σ	—	—	1687	—	—	2230	3027

Dreht man das Fachwerk, — oder denkt man sich die Schwerkrachtrichtung gegen die Zeichnung gedreht, so dreht sich mit den Einzelkräften auch die Resultante. Die Angriffslinien dieser Resultanten gehen alle durch einen Punkt, den „Schwerpunkt“ des Fachwerks; zu konstruieren aus 2 Seilecken, etwa für \downarrow und für \rightarrow Schwerkrachtrichtung.

Zur Berechnung denken wir uns das Fachwerk in der Lage Fig II, in der die Schwerkraft \perp Ebene wirkt. Gegeben sind (Tabelle) die Gewichte der Lager $A B$ und die Stabgewichte pro Längeneinheit, berechnet die Stablängen, die Gewichte und die Koordinaten der Stabmitten von A aus.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist Gesamtgewicht} \quad R &= \Sigma G = 1687 \text{ kg} \\ \left. \begin{array}{l} \Sigma \text{ Momente} \\ \text{für } y\text{-Achse} \end{array} \right\} R x_s &= \Sigma G x \quad x_s = \frac{\Sigma G x}{\Sigma G} = \frac{2230 \text{ kgm}}{1687 \text{ kg}} = 1,32 \text{ m} \\ \left. \begin{array}{l} \Sigma \text{ Momente} \\ \text{für } x\text{-Achse} \end{array} \right\} R y_s &= \Sigma G y \quad y_s = \frac{\Sigma G y}{\Sigma G} = \frac{3027 \text{ kgm}}{1687 \text{ kg}} = 1,80 \text{ m} \end{aligned}$$

Schwerpunktskoordinate = Σ Momente / Σ Gewichte
gemessen von der Achse aus, für die die Momente gebildet sind.

282. Aufgabe (Fachwerk). Berechne I. die Stützkräfte, wenn man das liegende Fachwerk (Fig II) in den Punkten $A B C$ unterstützt, — II. die Stützkräfte $A B$ für die Stellung Fig I, — III. für die in der Ebene von Fig I um 90° gedrehte Stellung.

283. Druckmittelpunkt beim Stanzen. Ein Stück Blech (1,2 mm dick) nach den Maßen von Fig 181 soll ausgestanzt werden (Bruchspannung = $\tau_B = 4000$ at). In welcher Stellung unter dem Stempel muß die Matrize befestigt werden: Wie groß ist der Abstand x_s der Mitte des Druckstempels von der linken Kante?

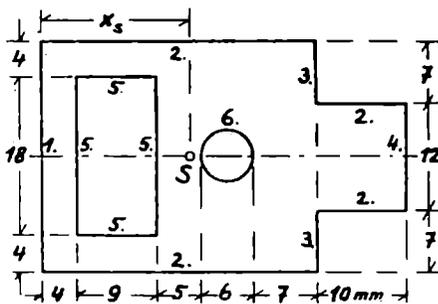


Fig 181. Druckmittelpunkt beim Stanzen

Teil	l	x	lx
Nr	mm	mm	mm ²
1.	26	0	0
2.	82	20,5	1681
3.	14	31	434
4.	12	41	492
5.	54	8,5	459
6.	18,85	21	396
Σ	206,85	—	3462

Durch S geht die Resultante der an den Kanten ausgeübten Kräfte. Die Kraft pro Längeneinheit ist an allen Kanten dieselbe (48 kg/mm), für die Lage der Resultante belanglos. S ist also der Kantenschwerpunkt:

$$x_s = \frac{\Sigma \text{ Momente der Kanten}}{\Sigma \text{ Kanten}} = \frac{\Sigma lx}{\Sigma l} = \frac{3462 \text{ mm}^2}{206,85 \text{ mm}} = 16,73 \text{ mm}$$

284. Dreieck und Trapez. I. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt bekanntlich im Schnittpunkt der Mittellinien, in der Höhe $\frac{1}{3} h$ über der Grundlinie. Teilt man nämlich das Dreieck in Streifen \parallel Grundlinie, so liegt der Teilschwerpunkt jedes Streifens auf der betr. Mittellinie.

II. Der Schwerpunkt eines Trapezes (Fig 182) liegt auf der Verbindungslinie der Mitten der Grundlinien; und auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Dreiecke, in die das Trapez zerlegt werden kann.

III. Wir berechnen die Höhe s des Trapezschwerpunkts über Grundlinie. Statt der Dreiecksgewichte können wir die Flächen einsetzen; auf Dicke und spez. Gewicht der Platte kommt es nicht an.

$$s = \frac{\Sigma \text{ Momente der Dreiecke}}{\Sigma \text{ Dreiecke}} = \frac{\frac{1}{2} a h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} b h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} a h + \frac{1}{2} b h} = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$$

IV. Ebenso folgt der Abstand s_1 des Trapezschwerpunkts von der Mittellinie aus den für diese Achse gebildeten Momenten:

$$s_1 = \frac{\frac{1}{2} a h \cdot \frac{1}{6} h - \frac{1}{2} b h \cdot \frac{1}{6} h}{\frac{1}{2} a h + \frac{1}{2} b h} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \frac{h}{6}$$

Für $a = 29$ $b = 12$ mm ist zB $s = 0,431 h$ $s_1 = 0,0691 h$ letzteres rechnerisch genauer. Also $s = 0,4309 h$

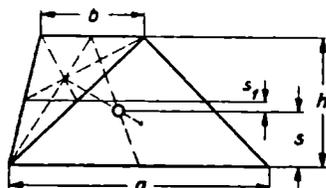


Fig 182. Schwerpunkt Trapez

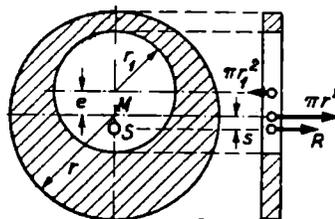


Fig 183. Lochscheibe

285. Negative Flächenteile. In die Kreisscheibe Fig 183 vom Radius $r = 12$ mm ist exzentrisch ein Kreisloch vom Radius $r_1 = 7$ mm geschnitten. $e = 2,5$ mm. Dann liegt der Schwerpunkt der Scheibe tiefer als M . (Vergl Nr 149 I, wo auch die Resultante außerhalb der Angriffspunkte entgegengesetzt gerichteter Kräfte lag.)

Sein Abstand von M ist $s = \frac{0 + \pi r_1^2 e}{\pi r^2 - \pi r_1^2} = \frac{r_1^2}{r^2 - r_1^2} \cdot e = \frac{49}{95} e = 1,29$ mm

Das Moment der großen Kreisfläche ist Null, weil die „Achse“ durch ihre Mitte geht. Das \curvearrowright Moment der Resultante ist also gleich dem \curvearrowright Moment der kleinen Kreisfläche.

286. Aufgabe (Dreiecksumfang). Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Grundlinie 24 cm, die Höhe 28 cm. Wie hoch liegt der Schwerpunkt des (etwa aus einem Draht gebildeten) Umfangs?

287. Aufgabe (Flächenschwerpunkt). Die Form Fig 181 soll nicht ausgestanzt, sondern aufgeprägt werden. Berechne dafür den Flächenschwerpunkt. — Die Löcher 5. 6. sind negative Flächenteile.

288. Kreisbogen. Wir denken uns den Kreisbogen Fig 184 in unendlich viele Bogenteile b geteilt. Dann ist

$$\text{Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt} = s = \frac{\Sigma b x}{\Sigma b}$$

x ist der Hebelarm des Bogenteils für die durch den Mittelpunkt gehende Achse. — Jeder Bogenteil ist mit einem andern x multipliziert. — Man kann trotzdem zur Berechnung von $\Sigma b x$ gelangen: Das Dreieck rx ist nämlich ähnlich dem herausgezeichneten Dreieck aus b und seiner Projektion p auf die Sehne.

$$\text{Also ist } \frac{b}{p} = \frac{r}{x} \quad \text{oder} \quad b x = r p \quad \text{also} \quad s = \frac{\Sigma r p}{\Sigma b} = \frac{r \cdot \Sigma p}{\Sigma b}$$

Jedes p hat denselben Faktor r ! Man kann diesen ausklammern. Dann ist die Summe berechenbar: $\Sigma p = \text{Sehne}$ $\Sigma b = \text{Bogen}$

$$\text{Also Schwerpunktstaband} = \frac{\text{Radius mal Sehne}}{\text{Bogen}}$$

$$\text{für Halbkreisbogen:} \quad s = \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 r$$

$$\text{für Viertelkreisbogen:} \quad s = \frac{r \cdot \sqrt{2}r}{\pi r/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r = 0,9003 r$$

$$\text{für Zentriwinkel } 280^\circ: \quad s = \frac{r \cdot 1,286 r}{4,89 r} = 0,263 r$$

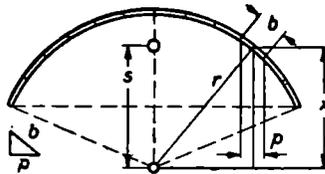


Fig 184. Kreisbogen

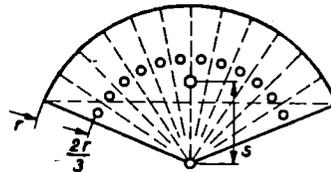


Fig 185. Kreissektor

289. Kreissektorfläche. Wir teilen die Sektorfläche Fig 185 in unendlich viele schmale Sektoren, die wir als Dreiecke ansehen können. Ihre Teilschwerpunkte erfüllen einen Bogen vom Radius $\frac{2}{3}r$. Der gesuchte Schwerpunkt des Sektors ist der Schwerpunkt dieses Bogens:

$$\text{Schwerpunktsabstand} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{Radius mal Sehne}}{\text{Bogen}}$$

$$\text{für Halbkreisfläche:} \quad s = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 r$$

$$\text{für Viertelkreisfläche:} \quad s = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} = 0,6002 r$$

$$\text{für Zentriwinkel } 280^\circ: \quad s = \quad = 0,175 r$$

290. Drucklagerbügel. Eine Schiffswelle muß den Druck des Propellers auf das Schiff übertragen. Sie trägt zu diesem Zweck an einer bestimmten Stelle eine Anzahl Ringe. Diese stützen sich gegen ebensoviele Bügel (Fig 186), die links und rechts der Welle an Stangen aufgereiht sind. Die Bügel sind unten offen, damit sie eingesetzt werden können. So entsteht die schraffierte Berührungsfläche. Sie soll gleichmäßigen Druck erfahren. Dann geht die Resultante der Drucke durch den Schwerpunkt der Berührungsfläche. In dieser Höhe müssen auch die Löcher liegen, durch die die Stangen gesteckt werden.

Der Wellenradius sei r , der äußere Radius der Ringe = $R = 1,8 r$. Dann ist $\alpha = 33^{\circ}45'$ und die Berührungsfläche

$$\begin{aligned}
 F &= \text{großer Kreis} - \text{Halbkreis} - 2 \text{Dreiecke} - \text{Sektor} \\
 &= \pi R^2 - \frac{\pi}{2} r^2 - r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{R^2 \alpha}{57,3^{\circ}} \\
 &= r^2 (10,18 - 1,57 - 1,50 - 1,91) = 5,20 r^2
 \end{aligned}$$

Die Momente der Flächenteile für den Kreismittelpunkt sind
 großer Kreis: $0 = 0$

Halbkreis: $-\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = -\frac{2}{3} r^3$

Dreiecke: $+ r \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{R^2 - r^2} = +\frac{1}{3} r (R^2 - r^2)$

Sektor: $+\frac{R^2 \alpha}{57,3^{\circ}} \cdot \frac{2}{3} \frac{R \cdot 2r}{2 R \alpha / 57,3^{\circ}} = +\frac{2}{3} R^2 r$

zusammen: Moment der Berührungsfläche = $r(R^2 - r^2)$

Nun folgt der Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt ($R = 1,8 r$):

$$s = \frac{\text{Moment}}{\text{Fläche}} = \frac{r(R^2 - r^2)}{F} = \frac{\text{Radius} \cdot \text{Ringfläche}}{\pi \cdot \text{Bügelfläche}} = \frac{r \cdot 2,24 r^2}{5,20 r^2} = 0,431 r$$

291. Aufgabe (Kreisabschnitt). Welchen Abstand hat der Schwerpunkt eines Kreisabschnitts (Segment = Sektor - Dreieck) vom Radius r und vom Zentriwinkel 80° vom Kreismittelpunkt (s) und von der Sehne des Segments (s_1)?

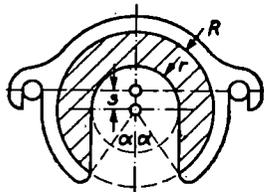


Fig 186. Drucklagerbügel

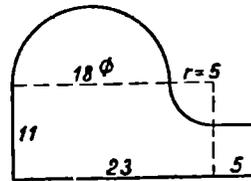


Fig 187. Zusammengesetzte Fläche

292. Aufgabe (unsymmetrische Fläche). Berechne die \rightarrow und \uparrow Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche Fig 187. Konstruiere sie mittels zweier Seilecke.

293. Pyramide. Der Schwerpunkt S einer dreiseitigen Pyramide Fig 188 liegt im Schnittpunkt der „Mittellinien“ AF und BG , die von den Ecken nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Flächen gehen. Diese Mittellinien liegen beide in der Ebene ABE und schneiden daher einander. Es bestehen folgende

Proportionen: $EG:GA = 1:2$
 also $EG:EA = 1:3$
 also $GF:AB = 1:3$
 ($GF \parallel AB$ nicht ausgezogen!)
 also $FS:SA = 1:3$
 also $FS:FA = 1:4$
 also $s:h = 1:4$

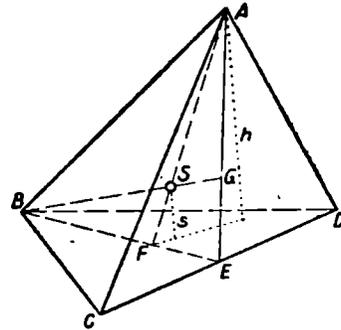
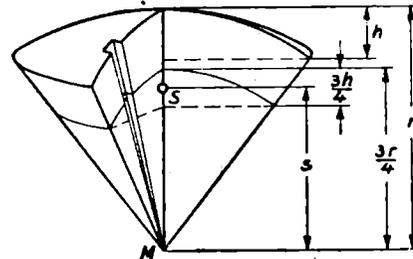
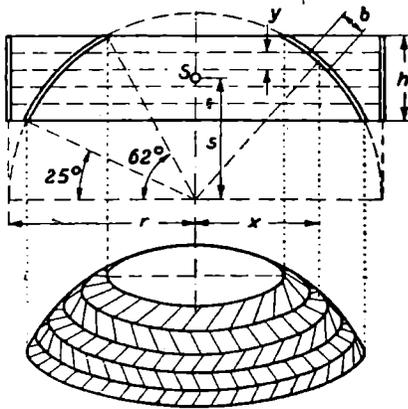


Fig 188. Schwerpunkt Pyramide

Schwerpunkthöhe über Grundfläche = $\frac{1}{4}$ Pyramidenhöhe

Eine mehrseitige Pyramide zerlegt man in dreiseitige. Die Teilschwerpunkte liegen alle in $\frac{1}{4}$ der Höhe, also auch der Gesamtschwerpunkt. Das gilt auch für den Kegel.



↑ Fig 190. Schwerpunkt Kugelsektor

← Fig 189. Schwerpunkt Kugelzone

294. Kugelzone. Die Zone Fig 189 von der Höhe h auf der Kugel vom Radius r teilen wir in Streifen von gleicher Höhe y . Dann ist die Fläche eines Streifens $= 2\pi x b$. Die oberen Streifen haben kleineren Radius x , aber größere Breite b .

Es verhält sich $b:y=r:x$ also ist $x b = r y$ (vergl Nr 288)

Es sind also alle Streifen $= 2\pi r y$, — untereinander gleich und ebenso groß wie die Streifen gleicher Höhe auf dem der ganzen Kugel umschriebenen Zylinder. Deshalb ist auch

Zonenfläche gleich dem Zylinder gleicher Höhe $= 2\pi r h$

Außerdem liegen die Teilschwerpunkte der gleichen Streifen gleichmäßig verteilt auf der Höhe.

Der Gesamtschwerpunkt der Zone liegt also auf der Mitte der Höhe h .

Wird die Zone zB von den Breitenkreisen 25° und 62° begrenzt, so liegt der Schwerpunkt S über dem Kugelmittelpunkt um $s = 0,653 r$
 Für die Halbkugeloberfläche ist $s = 0,500 r$

295. Kugelsektor. Der Sektor Fig 190 ist durch eine Kappe von der Höhe h und durch eine Kegelfläche mit der Spitze in M begrenzt. Er ist aufgeschnitten gezeichnet. Wir zerlegen ihn in unendlich kleine Pyramiden, deren Grundflächen in der Kappe und deren Spitzen in M liegen. Ihre Teilschwerpunkte erfüllen eine Kappe des Radius $\frac{3}{4}r$ und der Höhe $\frac{3}{4}h$. Auf der Mitte dieser Höhe liegt nach Nr 294 der Sektorschwerpunkt. Also Schwerpunkt Abstand vom Mittelpunkt $= s = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$
 für das Halbkugelvolumen: $\frac{3}{8}r$ von der Mitte $\frac{5}{8}r$ vom Scheitel

296. Aufgabe (Kugelabschnitt). Welchen Abstand hat der Schwerpunkt eines Kugelabschnitts (Segment = Sektor — Kegel) vom Radius r und vom Zentriwinkel 80° vom Kugelmittelpunkt (s) und von der Ebene des Breitenkreises (s_1)? — Wird dieser Schwerpunkt in größerem oder kleinerem Abstand vom Kreismittelpunkt liegen als der von Nr 291?

297. Stabilität. Bei der Scheibe Nr 121 Fig 81 wurde gefragt, ob bei einer kleinen Drehung der Scheibe Momente auftreten, die die Scheibe in die Gleichgewichtslage zurückdrehen oder aus ihr entfernen. Es kommt an auf den Schwerpunkt der in den Aufhängepunkten wirkenden Gewichte:

Das Gleichgewicht eines um eine Achse drehbaren Körpers ist stabil — indifferent — labil,

wenn der Schwerpunkt unter — in — über dem Drehpunkt liegt.

Auch bei der Scheibe Nr 122 Fig 82 gab es eine stabile und eine labile Gleichgewichtslage. — Bei der Dezimalwaage Nr 193 und bei der Krämerwaage Nr 196 sind die Waagebalken gekröpft. Sonst wäre die Einstellung labil. — Auch beim Prony'schen Zaum Nr 272 muß man für eine stabile Einstellung sorgen, wenn eine Messung zustande kommen soll.

298. Empfindlichkeit einer Waage. Für die Stabilität eines Waagebalkens (Fig 191 I) kommt es an auf die Tiefe der Aufhängepunkte der Schalen P unter dem Stützpunkt D und auf die Lage des Schwerpunkts des Waagebalkens selbst. — Je geringer die Stabilität, um so „empfindlicher“ ist die Waage: um so größer ist der Ausschlag α , den ein Übergewicht ΔP , auf die eine Seite gelegt, hervorruft.

Es sei (Fig II) Armlänge $a = 190$ mm
 Belastung beiderseits je $P = 480$ gr
 angreifend unter D um $b = 0,4$ mm
 Gewicht des Waagebalkens $G = 300$ gr
 angreifend unter D um $c = 0,7$ mm
 Wie groß ist die „Empfindlichkeit“ der Waage, — der „Ausschlagwinkel pro Einheit des Übergewichts“?

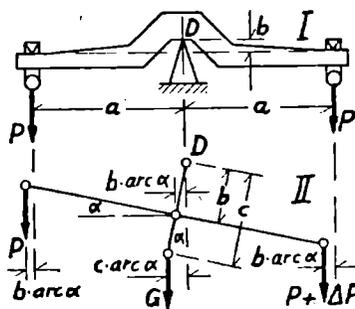


Fig 191. Waagebalken

Wir berechnen α , indem wir uns die beiden P in der Mitte der Verbindungslinie ihrer Auflagerpunkte vereinigt denken. Dann haben sie dort den Hebelarm $b \operatorname{arc} \alpha$. Oder: Bei der Drehung des Waagebalkens (Fig II) bewegen sich die Auflagerpunkte der P ebenso wie die Mitte ihrer Verbindungslinie um $b \operatorname{arc} \alpha$ nach links. Die Unterschiede sind nur Größen zweiter Ordnung (Nr 256 II).

Dann ist auslenkendes Moment = rückdrehende Momente

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Delta P \cdot a &= 2P \cdot b \operatorname{arc} \alpha + G \cdot c \operatorname{arc} \alpha \curvearrowleft \\ \Delta P \cdot 190 &= 960 \cdot 0,4 \cdot \operatorname{arc} \alpha + 300 \cdot 0,7 \cdot \operatorname{arc} \alpha \\ \frac{\operatorname{arc} \alpha}{\Delta P} &= \frac{a}{2Pb + Gc} = \frac{190 \text{ mm}}{594 \text{ gr mm}} = \frac{0,3200}{\text{gr}} \end{aligned}$$

$$\text{Oder: Empfindlichkeit} = \frac{\alpha}{\Delta P} = \frac{190 \cdot 57,3^\circ}{594 \text{ gr}} = 18,3^\circ/\text{gr}$$

Ist jedes $P = 600 \text{ gr}$, so ist die Empfindlichkeit = $15,8^\circ/\text{gr}$.

Liegen die 3 Schneiden genau in einer Linie ($b = 0$), so ist die Empfindlichkeit unabhängig von der Belastung P . Nur das Eigengewicht wirkt dann stabilisierend, rückdrehend.

299. Aufgabe (Empfindlichkeit). Es sei $a = 190 \text{ mm}$ $b = 0$ $G = 300 \text{ gr}$. Die Waage hat einen Zeiger von 270 mm Länge. Die Zeigerspitze soll bei einem Übergewicht von $0,05 \text{ gr}$ um 6 mm ausschlagen. Wie tief muß der Schwerpunkt des Waagebalkens unter D liegen? — Man braucht nicht erst den Winkel in Grad zu berechnen. $\operatorname{arc} \alpha$ folgt unmittelbar aus dem Ausschlag des Zeigers.

300. Stabilität schaukelnder Körper. I. Ein Körper (Fig 192 I) liegt mit einer gewölbten Fläche auf einer ebenen Unterlage. Dann kann er in stabilem Gleichgewicht sein, trotzdem sein Schwerpunkt S über dem Stützpunkt F liegt (Tintenlöscher, Stehaufmännchen). Neigt man nämlich den Körper (Fig II) durch eine kleine Kraft K um den Winkel α \curvearrowright , so rückt die Stützkraft \rightarrow in einen neuen Stützpunkt F' senkrecht unter M . Das Gewicht $\downarrow G$ in S und der Stützkraftanteil $\uparrow G$ in F' bilden ein \curvearrowleft aufrichtendes Kräftepaar, solange S tiefer als M liegt.

II. Der Körper bestehe aus einer Halbkugel vom Radius r und einem daraufgesetzten Zylinder der Höhe $h = 0,2 r$. Dann liegt der Schwerpunkt in der Höhe $s = 0,735 r$. Der Körper ist also stabil.

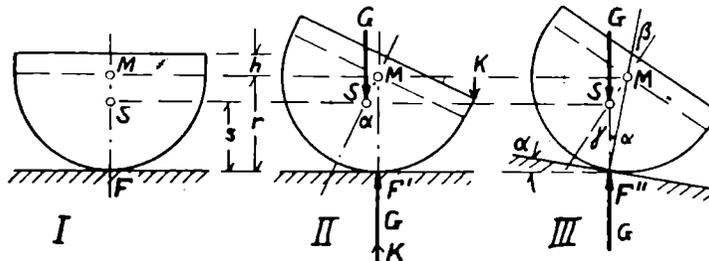


Fig 192. Stabilität schaukelnder Körper

III. Neigt man die Ebene, auf der der Körper steht, um $\alpha = 10^\circ$ (Fig III), so neigt sich der Körper um einen Winkel γ , der größer ist als α , um so größer, je weniger stabil der Körper ist, je höher S liegt.

S muß senkrecht über dem neuen Berührungspunkt F'' liegen.

Im Dreieck SMF'' ist $\sin \gamma : \sin \alpha = 1 : 0,265$

Neigung des Körpers gegen die Vertikale $\gamma = 40^\circ 50'$
 „ „ „ „ „ Ebene $\beta = 30^\circ 50'$

301. Aufgabe (Indifferentes Gleichgewicht). Wie hoch darf der Zylinder Fig 192 im Verhältnis zur Kugel werden, ehe der Körper umfällt?

302. Kipplore. Die Mulde der Lore Fig 193 I ruht mit 2 geraden Leisten auf gekrümmten Bügeln vom Radius r , Mittelpunkt O . Sie soll sich leicht kippen lassen, soll nur wenig stabil sein. Der Schwerpunkt S muß deshalb höher liegen als der Stützpunkt F .

I. Neigt man die Mulde um α (in Fig II vergrößert gezeichnet), so rückt der Stützpunkt nach F' . Der alte Berührungspunkt bewegt sich nur wenig. Das ist in erster Ordnung zu vernachlässigen (Nr 302). Die Linie FS geht über in $FS' \parallel OF'$. Der Schwerpunkt verschiebt sich also nach S' . Es kommt nun darauf an, ob der Stützpunkt oder der Schwerpunkt weiter rückt, ob das Kräftepaar Gewicht/Stützkraft aufrichtend oder kippend ist. Stabil ist die Mulde, wenn S' tiefer liegt als der Schnittpunkt M der Stützkraft F' mit FS' . Die Höhe x dieses Punktes folgt daraus, daß $OF' MF$ in erster Näherung ein Parallelogramm ist. Also ist $x = r$. Der Schwerpunkt darf bis $h = r$ über der Leiste liegen, ehe das Gleichgewicht labil wird.

Dies gilt für kleine Neigungen.

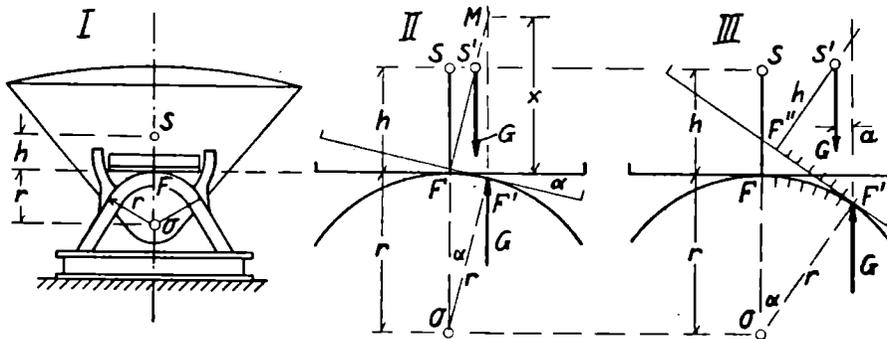


Fig 193. Stabilität der Kipplore

II. Wir wollen jetzt größere Ausschläge untersuchen. Dann dürfen wir die Verschiebung des ursprünglichen Berührungspunkts F nicht mehr vernachlässigen. Er bewegt sich nach F'' (Fig III), so daß

$$\text{Strecke } F''F = \text{Bogen } FF' = r \text{ arc } \alpha.$$

Dann ist der Hebelarm des rückdrehenden Kräftepaars GG

$$a = r \text{ arc } \alpha \cos \alpha - h \sin \alpha.$$

Die Grenze der Stabilität liegt bei $a = 0$, also bei $\frac{h}{r} = \frac{\text{arc } \alpha}{\text{tg } \alpha}$ (Tabelle)

Je kleiner α wird, um so mehr nähert man sich dem Fall I, dem Fall der „Anfangsstabilität“ $\text{arc } \alpha \sim \text{tg } \alpha$ $h = r$

Soll aber die Mulde erst nach einer Neigung von 30° von selbst weiterkippen, so muß $h = 0,907 r$ sein.

III. Das Moment, mit dem man dann kippen muß, ist in der Ruhelage Null, bei $\alpha = 30^\circ$ wieder Null. Dazwischen muß es also zunehmen und wieder abnehmen.

Es ist $M = Ga = G(r \text{ arc } \alpha \cos \alpha - h \sin \alpha)$

Mit $h = 0,907 r$ und zB für $\alpha = 15^\circ$
wird $a = 0,0182 r$ $M = 0,0182 Gr = 0,0200 Gh$

α	h/r
0°	1,000
15°	0,977
30°	0,907
45°	0,785
60°	0,605
75°	0,351
90°	0,000

Das braucht noch nicht das Maximum von M zu sein.

303. Stabilität vom Standpunkt des Arbeitssatzes. Liegt eine Kugel in einer Mulde, so ist ihr Gleichgewicht stabil. Will man nämlich die Kugel aus dem tiefsten Punkt entfernen, so muß die bewegende Kraft Arbeit leisten, um die Kugel zu heben, muß also im Sinne der Bewegung wirken. Die Kugel widersteht der Bewegung mit einer zur Gleichgewichtslage zurückziehenden Kraft. — Ein Gleichgewicht ist also stabil, wenn bei einer Bewegung aus der Gleichgewichtslage heraus der Schwerpunkt gehoben wird. — Bei der Lore Nr 302 wird der Schwerpunkt gehoben, insofern sich der alte Stützpunkt F bis F'' hebt; gesenkt, insofern sich h schiefe stellt.

Hebung von $F = OF'' - OF = OF'' - r = OF'' - OF'$

Dies ist der Unterschied einer schrägen Länge und ihrer Projektion.

Also nach Nr 256 II Hebung von $F = \frac{(r \text{ arc } \alpha)^2}{2r} = \frac{r}{2} \text{ arc}^2 \alpha$

Also Hebung von $S =$ Hebung von $F -$ Senkung wegen h
 $= \frac{1}{2} r \text{ arc}^2 \alpha - \frac{1}{2} h \text{ arc}^2 \alpha$

Ist $h < r$, so wird S gehoben, das Gleichgewicht ist stabil.

Diese Hebung ist übrigens klein im Vergleich zu den Seitenverschiebungen, klein von „zweiter Ordnung“, so daß sie in Fig 193 nicht zum Ausdruck kommt. — Die Berechnung nach Nr 302 ist einfacher.

304. Wölbung auf Wölbung. Wir verallgemeinern Nr 300 und 302. Auf einer gewölbten Unterlage $r_1 = 230$ mm (Fig 194 I) ruht ein Körper mit gewölbter Auflagerfläche $r_2 = 110$ mm. Der Schwerpunkt liegt 45 mm über dem Stützpunkt. Steht der Körper stabil?

Wir denken uns den Körper \curvearrowright gekippt (Fig II). Dann liegt der neue Stützpunkt F' auf der Verbindungslinie $O_1 O_2'$. Der alte Stützpunkt hebt sich um einen in erster Ordnung zu vernachlässigenden Betrag. Das Kräftepaar Gewicht/Stützkraft ist aufrichtend \curvearrowleft , solange S tiefer liegt als der Schnittpunkt M der Vertikalen durch F' mit der Mittellinie FO_2'

des gekippten Körpers. Die Höhe MF folgt aus Proportionen (Fig III):

$$\frac{x}{r_1} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 74,4 \text{ mm} > 45 \text{ mm} \quad \begin{array}{l} \text{Das Gleichgewicht} \\ \text{ist also stabil.} \end{array}$$

Erst wenn r_1 kleiner als 76,2 mm ist, kippt der Körper um.

- Mit $r_1 = 0$ wird $x = 0$ (fester Drehpunkt Nr 297)
- „ $r_1 = \infty$ „ $x = r_2$ (Wölbung auf Ebene Nr 300)
- „ $r_2 = \infty$ „ $x = r_1$ (Lorenmulde Nr 302)

r_1 und r_2 sind miteinander vertauschbar.
Sie können auch negative Werte annehmen.

305. Aufgabe (Wölbung auf Wölbung). Wo liegt der Schwerpunkt des Körpers Fig 195 (Segment und Zylinder)? — Auf welcher Wölbung, bezw in welcher Mulde steht er in indifferentem Gleichgewicht?

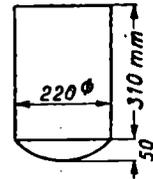
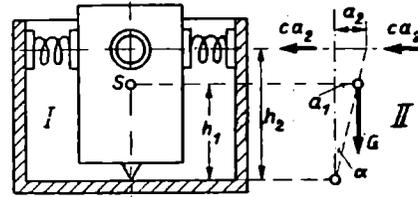
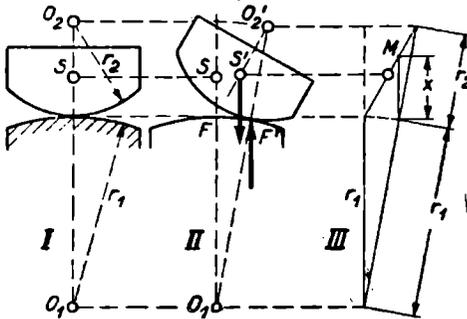


Fig 195.



↑ Fig 196. Seismograph
← Fig 194. Stabilität auf gewölbter Fläche

306. Seismograph. Auf Erdbebenwarten werden kleine Erderschütterungen in großem Maßstab auf einem abrollenden Papierstreifen aufgeschrieben. Zu diesem Zweck wird ein Gewicht (Fig 196) in einem Gestell aufgestellt. Das Gestell nimmt an den Erdbewegungen teil. Das Gewicht sucht möglichst stehen zu bleiben. Die relative Bewegung wird aufgeschrieben. Das Gewicht muß in nahezu indifferentem Gleichgewicht aufgestellt werden, damit es große Bewegungen bei kleinen Kräften macht. Es muß schwer sein, damit die Reibung im Schreibwerk (nicht mitgezeichnet) trotz großer Übersetzung überwunden wird.

I. Man stellt ein Gewicht $G = 3,2 \text{ to}$ auf einer Spitze mit der Schwerpunkthöhe $h_1 = 1100 \text{ mm}$ auf. Das ist labil. In der Höhe $h_2 = 1500 \text{ mm}$ ist es durch 4 Federn gestützt, stabilisiert! Je steifer die Federn, um so stabiler wird die Lage. Neigt sich das Gewicht \curvearrowright , so erhält G den Hebelarm $a_1 = h_1 \text{ arc } \alpha$. Andererseits treten 2 Federkräfte auf, proportional zu $a_2 = h_2 \text{ arc } \alpha$ mit dem Hebelarm h_2 . Die „Federkonstante“, das Verhältnis Kraft/Verlängerung sei c (Nr 44 II). Indifferentes Gleichgewicht besteht, wenn

$$G \cdot h_1 \text{ arc } \alpha = 2 c h_2 \cdot h_2 \text{ arc } \alpha$$

Also Mindestwert: $c = \frac{G h_1}{2 h_2^2} = 0,782 \frac{\text{kg}}{\text{mm}}$

310. Zusammenfassung. Schwerpunkt ist der Punkt, durch den in jeder Lage des Körpers die Resultante der Gewichte geht:

$$\text{Schwerpunktskoordinate} = \Sigma \text{ Momente} / \Sigma \text{ Gewichte.}$$

Bei Linien, Flächen, Körpern treten die Längen, Flächen, Räume an Stelle der Gewichte.

Das Gleichgewicht von Körpern ist stabil oder labil, je nachdem bei einer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage Kräfte oder Momente auftreten; die den Körper zurückführen bzw weiter aus der Ruhelage entfernen; je nachdem der Schwerpunkt gehoben oder gesenkt wird. — Die Lage ist bei festem Drehpunkt stabil, wenn der Schwerpunkt unter dem Drehpunkt liegt. Bei gewölbten Berührungsflächen darf der Schwerpunkt bis zu einer gewissen Höhe auch über dem Stützpunkt liegen, ehe Instabilität eintritt. Auch durch Federn u dergl kann man stabilisieren.

XII. Reibung

Die Grundlagen der Reibungslehre sind in Nr 87 ÷ 95 dargestellt, einige weitere Aufgaben gelegentlich behandelt (Nr 55; 135 ÷ 137; 226). Wir stellen hier Aufgaben zusammen über Bremsen, Lagerreibung, Hubschrauben, Walzen, Kugellager.

311. Hebelbremse. An einer Trommel von 620 mm \varnothing hängen 1000 kg. Durch ein einfaches oder mehrfaches Vorgelege mit dem Übersetzungsverhältnis 1:18 ist die Trommel mit der Kurbelwelle verbunden, auf der eine Bremsscheibe vom Radius $r = 160$ mm sitzt (Fig 198). Mit welcher Kraft K muß man den Bremshebel niederdrücken, damit die Last unbeschleunigt sinkt ?

I. Man setzt die Bremsscheibe auf die Kurbelwelle, weil dort das abzubremsende Moment kleiner als an der Trommel ist: $M = 17,22$ kgm. — Der Bremsklotz sei ein Keil mit $\alpha = 50^\circ$ $\mu = 0,15$. Die Keilnut wirkt nach Nr 88 wie eine schlichte Fläche mit erhöhter Reibungszahl

$$\mu' = 0,15 / \sin 25^\circ = 0,355$$

α darf nicht zu klein sein, damit bei stehender Scheibe der Klotz nicht stecken bleibt. Nach Nr 93 II muß dann sein $\alpha > 2\varrho = 17^\circ 4'$

Der Bremshebel ist gekröpft, damit man die Bremswirkung mit einem kleinen K ausüben kann: Die Reibungsschubkraft S nämlich, mit der die \curvearrowright Scheibe den Hebel mitnimmt, wirkt am Hebelarm c \curvearrowright und hilft so den Hebel anzudrücken.

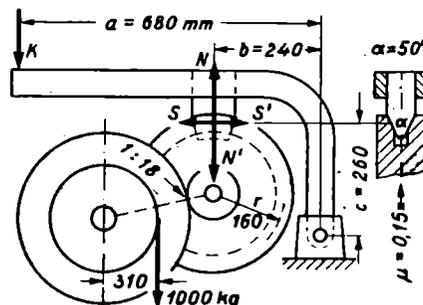


Fig 198. Hebelbremse

II. S' übt das Bremsmoment an der Scheibe aus:

$$Sr = M \qquad S = 108 \text{ kg}$$

Das Reibungsgesetz fordert im Fall des Gleitens:

$$S = \mu' N \qquad N = 303 \text{ kg}$$

Das Gleichgewicht am Bremshebel fordert:

$$\curvearrow Ka = Nb - Sc \curvearrow \qquad K = 107 - 41 = 66 \text{ kg}$$

Einsetzen ergibt Formel zwischen K und M :

$$K = \frac{M}{r} \cdot \frac{b - \mu' c}{\mu' a} \qquad K = 66 \text{ kg}$$

III. Bei diesem Wert von K wird die Last unbeschleunigt sinken. Drückt man den Hebel noch fester an, zB mit $K = 90 \text{ kg}$, so steht das Getriebe still. Welchen Wert haben jetzt N und S ?

S' übt wie in II das Bremsmoment an der Scheibe aus: $S = 108 \text{ kg}$

N folgt jetzt aus dem Gleichgewicht am Bremshebel:

$$\curvearrow Ka = Nb - Sc \curvearrow \qquad N = 372 \text{ kg}$$

Das Verhältnis $S/N = 0,289$ ist jetzt kleiner als die Reibungszahl $\mu' = 0,355$. Die Reibung ist nicht voll ausgenutzt, nur zu 81%.

IV. Je größer c , um so kleiner wird K in II. Wird $c > b/\mu' = 676 \text{ mm}$, so wird K negativ. Der Bremshebel muß dann gelüftet werden, wenn die Last sinken soll. Die Resultante von N und S liegt dann \curvearrow über dem Drehpunkt des Hebels. Die Bremse ist dann „selbsthemmend“.

312. Klemmgesperre. Dieser Fall liegt vor bei dem Klemmgesperre Fig 199. Im Gegensatz zu einer Sperrklinke bringt dieses das Rad in jeder Stellung zum Stehen. An der Berührungsstelle (Keilnut) sei wieder $\mu' = 0,355$, dann ist $c = 80 > b/\mu' = 65$.

Das Bremsmoment sei $M = 5 \text{ kgm}$, also Reibungskraft $S = 45,5 \text{ kg}$. Die Normalkraft folgt aus der Momentengleichung an der Sperrklinke oder daraus, daß die Resultante von N und S durch den Drehpunkt der Klinke geht: $N = cS/b = 158 \text{ kg}$.

Wie in Nr 311 III ist die Reibung nicht voll ausgenutzt: $S < \mu' N$. Nur im Fall des Gleitens setzt man den Bewegungswiderstand $S = \mu' N$ ein. — Im Fall des Stillstands ist $\mu' N$ nur eine obere Grenze für die Ausnutzbarkeit der Reibung S , — bezw S/μ' eine untere Grenze für die erforderliche Andrückkraft N . — Die

tatsächlichen Werte von N und S sind in solchem Fall nur so groß, wie sie als Stützkkräfte zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts nötig sind. (Vergl Nr 91 III V Fig 55 IV; Nr 95; 135; 136.) — Man kann auch sagen: Damit die Stützkkräfte bestehen können, muß sein $\mu' > S/N = b/c = 0,288$. Das ist der Fall.

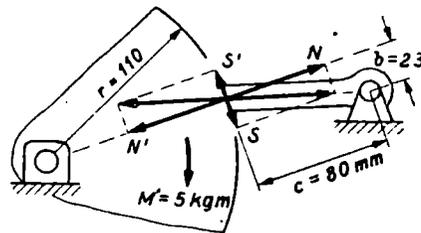


Fig 199. Klemmgesperre

313. Aufgabe (Hebelbremse). In Nr 311 Fig 198 wird das Gewicht an die linke Seite der Trommel gehängt. — I. Wie groß muß K sein, wenn das Gewicht unbeschleunigt sinken soll? — II. Wie groß werden N und S , wenn der Hebel mit $K = 180$ kg angedrückt wird?

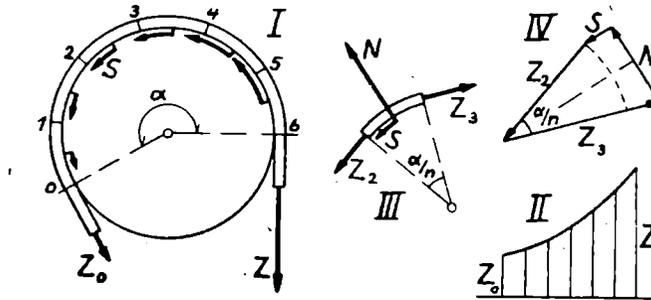


Fig 200. Seilreibung

314. Seilreibung. Um ein Schiff an einer Landungsbrücke anzuhalten, wird ein Seil um einen Pfahl geschlungen (Fig 200 I). Zieht man am freien Ende mit der Kraft Z_0 , so wird das Schiff gestoppt durch

$$Z = Z_0 + \text{Reibungskräfte} = Z_0 + \sum S$$

Z ist im Verhältnis zu Z_0 um so größer, je größer die Reibungszahl und der Umschlingungswinkel sind. Es sei $\mu = 0,33$ $\alpha = 210^\circ$

I. Die Reibungskraft ist längs des Umfangs veränderlich, denn der Zug im Seil nimmt zu von Z_0 bis Z , damit auch der Anpressungsdruck N , damit auch die Reibung S . Je größer die Reibung, um so schneller nimmt der Seilzug zu. Er wächst also nicht gleichmäßig, sondern nach einer Kurve wie Fig II. — Wir denken uns das Seil in eine Anzahl Teilchen geteilt, $n = 6$ in Fig I, später unendlich viele. Die Zugkräfte in den Teilpunkten nennen wir Z_0, Z_1, Z_2, \dots bis $Z_n = Z$. An jedem Seilteilchen (Fig III) sind 2 aufeinanderfolgende Werte des Seilzugs zB Z_2 und Z_3 im Gleichgewicht mit Reibung S und Anpressungsdruck N (Fig IV). Diese sind auf jedem Teilchen als gleichmäßig angenommen.

$$\text{Dann ist } S = (Z_3 - Z_2) \cos \frac{\alpha}{2n} \quad N = (Z_3 + Z_2) \sin \frac{\alpha}{2n} \quad S = \mu N$$

$$\text{Auflösung: } Z_3 = Z_2 \frac{1 + \mu \operatorname{tg}(\alpha/2n)}{1 - \mu \operatorname{tg}(\alpha/2n)} = Z_2 \cdot 1,232$$

II. Jedes folgende Z ist also um 23,2% größer als das vorhergehende, das 1,232fache des vorigen. (Vergl geometrische Reihe, Kapital auf Zinseszins, Fig II.) Um $Z = Z_6$ aus Z_0 zu erhalten, muß man 6 mal mit diesem Faktor multiplizieren $Z = Z_0 \cdot 1,232^6 = 3,50 Z_0$

Zieht man mit $Z_0 = 25$ kg, so bremst man das Schiff mit $Z = 87,5$ kg.

315. Berechnung für den Grenzfall. I. Da n groß werden soll, schließlich unendlich, so dürfen wir zunächst die Berechnung verein-

fachen, indem wir uns auf die Glieder erster Ordnung beschränken. Bei kleinem Winkel α/n ist

$$\text{Reibung} = S = \text{Differenz der Zugkräfte} = Z_3 - Z_2 = \mu N$$

$$\text{Anpreßdruck} = N = \text{gestrichelter Bogen im Krafteck} = Z_2 \text{ arc } \alpha/n$$

$$\text{Also } Z_3 = Z_2 + \mu N = Z_2(1 + \mu \text{ arc } \alpha/n) = Z_2(1 + 0,202)$$

$$Z = Z_0(1 + \mu \text{ arc } \alpha/n)^n = Z_0 \cdot 1,202^6 = 3,03 Z_0$$

II. Wie groß wird nun das Verhältnis Z/Z_0 , wenn man n ohne Ende wachsen läßt? Wie groß wird

$$\frac{Z}{Z_0} = \left(1 + \frac{\mu \text{ arc } \alpha}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{0,1210}{n}\right)^n \quad \text{für } n = \infty ?$$

Aus der Algebra ist bekannt } $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718$ genannt „e“
der Grenzwert für $n = \infty$ }

Man findet ihn auch angenähert durch Einengen

zwischen	$(1 + 0,1)^{10} = 2,594$	$(1 + 0,01)^{100} = 2,705$...
und	$(1 - 0,1)^{-10} = 2,867$	$(1 - 0,01)^{-100} = 2,732$...
Mittel:	2,730	2,718	...

Hierauf läßt sich Z/Z_0 zurückführen, indem man setzt

$$\frac{\mu \text{ arc } \alpha}{n} = \frac{0,1210}{n} = \frac{1}{m} \quad n = m \cdot \mu \text{ arc } \alpha = m \cdot 0,1210$$

$$\text{Dann ist } \frac{Z}{Z_0} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m \cdot \mu \text{ arc } \alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ wird mit } n \text{ unendlich,} \\ \text{also ist auch } (1 + 1/m)^m = e. \end{array} \right.$$

$$\text{Also } \frac{Z}{Z_0} = e^{\mu \text{ arc } \alpha} = 2,718^{0,1210} = 3,35 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit Logarithmen} \\ \text{zu berechnen:} \end{array} \right.$$

$$\log \frac{Z}{Z_0} = \mu \text{ arc } \alpha \cdot \log e = 0,33 \cdot \frac{210^0}{57,3^0} \cdot 0,434 = 0,525$$

Zieht man mit $Z_0 = 25 \text{ kg}$, so wirkt am Schiff $Z = 83,8 \text{ kg}$.

III. Der Radius der Stange erscheint in der Formel nicht. Bei kleinerem Radius ist die Länge, auf der die Reibung stattfindet, kleiner als bei größerem; die Krümmung aber und damit der Anpreßungsdruck und die Reibung pro Längeneinheit ist größer. — Das gilt aber nur, so lange μ unabhängig vom Druck ist (Nr 87).

316. Spill. Um ein Schiff ans Ufer zu verholen, schlingt man ein Tau um eine Trommel (Fig 201), die von einem Motor gedreht wird, und zieht das Tau am freien Ende stramm. Das Schiff soll herangeholt werden mit $v = 0,4 \text{ m/sk}$. Dazu sei erforderlich $Z = 1500 \text{ kg}$. Das Seil werde $2\frac{1}{4}$ mal um das Spill geschlungen. Es sei $\mu = 0,3$. Mit welcher Kraft Z_0 muß man das Seil

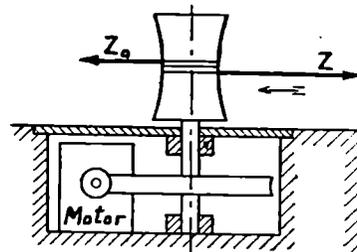


Fig 201. Spill

mindestens abziehen, damit es vom Spill gefaßt, mitgenommen wird, damit das Spill nicht unter ihm gleitet?

$$\begin{aligned} Z/Z_0 &= e^{\mu \text{arc} \alpha} & \log(Z/Z_0) &= 0,3 \cdot 2,25 \cdot 2\pi \cdot 0,434 = 1,840 \\ Z/Z_0 &= 69,2 & Z_0 &= Z/e^{\mu \text{arc} \alpha} = 1500/69,2 = 21,7 \text{ kg} \end{aligned}$$

Dabei wird Arbeit geleistet am Schiff: $Zv = 600,0 \text{ kgm/sk}$
 von dem abziehenden Mann: $Z_0v = 8,7 \text{ .. / .}$
 vom Spill: $(Z - Z_0)v = 591,3 \text{ .. / .}$

Am Motor, bei 600 Uml/Min, besteht dann das Moment = 9,43 kgm.

317. Aufgabe (Seilreibung). Über eine waagerechte Stange ist eine Schnur gelegt. Beide Enden hängen senkrecht herunter. Am einen Ende hängt ein Gewicht $G = 3 \text{ kg}$. Am andern Ende übt man eine Kraft K aus mittels einer Federwaage. Dann gibt es eine kleinste Kraft K_1 , bei der G sinkt, eine größte K_2 , bei der G steigt. Für zwischenliegende Werte von K geschieht nichts. Gemessen wird $K_1 = 1,4 \text{ kg}$. Wie groß ist μ ? Wie groß ist K_2 , wenn μ in beiden Fällen denselben Wert hat?

318. Bandbremse. Um die Brems Scheibe Fig 202 ist ein Stahlband geschlungen, welches durch Herunterdrücken des Bremshebels angezogen werden soll. Dazu muß $b > c$ sein.

Es sei an der Scheibe $r = 110 \text{ mm}$ $\alpha = 230^\circ$ $\mu = 0,15$
 abzubremsendes Moment wie in Nr 311: $M = 17,22 \text{ kgm} \curvearrow !$
 am Bremshebel $a = 210 \text{ mm}$ $b = 50 \text{ mm}$ $c = 20 \text{ mm}$

Dann ist $\curvearrow M = (Q - P)r \curvearrow$ $Q - P = M/r = 156,5 \text{ kg}$
 $Q = P \cdot e^{\mu \text{arc} \alpha} = P \cdot 1,825$
 aufgelöst $P = 189,7 \text{ kg}$ $Q = 346,2 \text{ kg}$

Q am Hebelarm c hilft bremsen:

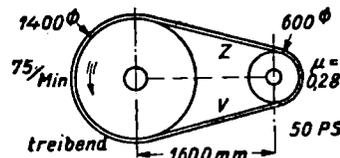
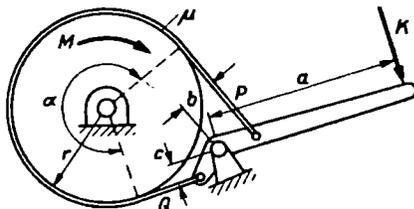
$$\curvearrow Ka = Pb - Qc \curvearrow \quad K = 45,1 - 33,0 = 12,1 \text{ kg}$$

Buchstabenrechnung ergibt

$$K = \frac{M}{ra} \cdot \frac{b - ce^{\mu \text{arc} \alpha}}{e^{\mu \text{arc} \alpha} - 1}$$

Damit die Bremse nicht selbsthemmend ist, muß sein

$$b > ce^{\mu \text{arc} \alpha} \quad \text{oder mit} \quad b = 50 \text{ mm} \quad c < 27,4 \text{ mm}$$



↑ Fig 203. Treibriemen
 ← Fig 202. Bandbremse

319. Aufgabe (Treibriemen). Der Riemen Fig 203 soll 50 PS mit $n = 75/\text{Min}$ von der linken Scheibe auf die rechte übertragen. Damit der Riemen nicht gleitet, muß im schlaffen Strang eine Vorspannung V bestehen, im gezogenen Strang ein um so größerer Zug Z . Maßgebend ist

der Umschlingungswinkel an der kleineren Scheibe. Es sei $\mu = 0,28$. Das Moment an der Scheibe folgt aus Leistung und Umlaufzahl nach Nr 265 ÷ 267. — Berechne die Mindestwerte von Z und V ?

Jedes Riementeilchen ist abwechselnd den Kräften Z und V unterworfen. Es verkürzt sich in Berührung mit der treibenden Scheibe und verlängert sich auf der getriebenen Scheibe. Der Riemen kriecht also auf beiden Scheiben. An den Auflaufstellen hat er die Geschwindigkeit der Scheibe. Auf der treibenden Scheibe bleibt er zurück, auf der getriebenen gleitet er vor. Dadurch wird die Umlaufzahl der getriebenen Scheibe etwas kleiner, als dem Radienverhältnis entspricht.

320. Lagerreibung. Ein Gewicht $G = 80$ kg wird an einem über eine Rolle laufenden Seil hochgezogen (Fig 204 I). Wegen Lagerreibung muß die Kraft $K > G$ sein: $\text{Überschuß} = U = K - G$ $K = G + U$

Rollenradius = $R = 120$ mm Zapfenradius = $r = 15$ mm $\mu = 0,06$

I. K ist nicht viel größer als G . Also ist angenähert

Lagerbelastung = $N = 2G = 160$ kg Reibung = $S = 2G\mu = 9,6$ kg

↪ Moment Kraftüberschuß = Moment Lagerreibung ↪

$$(K - G)R = U \cdot R = Sr = 2G\mu r = 14,4 \text{ kgcm}$$

$$K - G = U = 2G\mu r / R = 0,015 G = 1,200 \text{ kg}$$

$$K = 81,20 \text{ kg für Hochziehen} \quad K = 78,70 \text{ kg für Ablassen}$$

Wir berechneten erst U und nicht gleich $K = G(1 \pm 2\mu r/R)$ weil so der kleine Überschuß U genauer herauskommt.

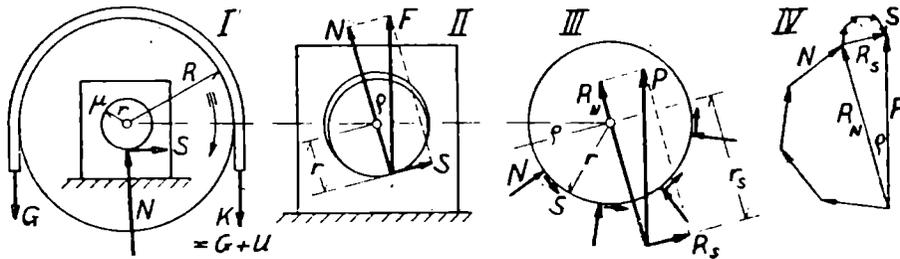


Fig 204. Lagerreibung, Berührung in Linie, in Halbzylinder

II. Dies ist nur angenähert: Beim Hochziehen ist die Lagerbelastung größer als $2G$, damit auch die Reibung, damit auch U . Außerdem wird der Zapfen durch die an ihm angreifende Kraft S nach rechts geschoben. Er klettert im Lager (Fig II), bis die Resultante F von N und S senkrecht geworden ist. Der Berührungspunkt ist also um den Reibungswinkel ϱ (Nr 89; 90) gegen den tiefsten Punkt verschoben. Dann trägt aber außer N auch S , jedes mit seiner \uparrow Komponente. Genau ist also

$$\uparrow F = G + K = 2G + U \quad \downarrow S = F \sin \varrho \quad \curvearrow UR = Sr \quad \curvearrow \text{tg } \varrho = \mu$$

$$\text{aufgelöst: } U = \frac{2Gr \sin \varrho / R}{1 - r \sin \varrho / R} = G \cdot 0,01511 = 1,209 \text{ kg}$$

$$\text{Ebenso für Ablassen } U' = G \cdot 0,01489 = 1,191 \text{ kg}$$

nur unerheblich anders als in I. Die Näherung I hat den Vorteil, daß wir nicht auflösen brauchen, nur einzusetzen.

III. Will man mit μ statt mit ϱ rechnen,

$$\text{so gilt } \left. \begin{array}{l} S = \mu N \\ F = \sqrt{N^2 + S^2} = \sqrt{1 + \mu^2} N \end{array} \right\} \text{ also } S = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} F$$

An Stelle von $\sin \varrho$ tritt also $\mu/\sqrt{1 + \mu^2} = 0,0599 \sim \mu$

IV. Man kann auch sagen, daß G und K an einem Hebel wirken, dessen Drehpunkt im Angriffspunkt von F liegt. Dann ist für Hochziehen:

$$\curvearrowright (G + U)(R - r \sin \varrho) = G(R + r \sin \varrho) \curvearrowleft \quad \text{Auflösung wie in II.}^\dagger$$

321. Einfluß der Druckverteilung im Lager. I. In Nr 320 war angenommen, daß der Zapfen im Lager nur in einer Linie berührt. Tatsächlich berührt er in einer Fläche. Die Druckverteilung ist statisch unbestimmt. Üblicherweise wird angenommen, daß der Druck N und mit ihm die Reibung S über den halben Zylindermantel gleichmäßig verteilt sei (Fig III). Dann ist das Reibungsmoment größer als in Nr 320, denn der Zapfen drückt sich in das Lager hinein, wie der Keil in die Keilnut von Nr 88 Fig 52. Es trägt nur die Resultante der Kräfte, reibend aber wirkt die Summe der Schubkräfte.

II. Die Stützkraft P des Lagers ist die Resultante der N und der S . Diese bilden im Kräfteplan Fig IV je einen Halbkreis. Die Resultante R_N der N allein geht durch Mitte Zapfen (Fig III). Die Resultante R_S der S liegt außerhalb des Zapfens im Abstand r_s von der Achse. Denn alle S drehen mit dem Hebelarm r . Ihre Resultante ist aber kleiner als ihre Summe, muß also den größeren Hebelarm haben: $\curvearrowleft R_S r_s = \sum S r \curvearrowright$

$$\frac{r_s}{r} = \frac{\sum S}{R_S} = \frac{\text{Summe}}{\text{Resultante}} = \frac{\text{Halbkreis}}{\text{Durchmesser}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{also } r_s = \frac{\pi}{2} r = 1,57 r$$

Mit $S = \mu N$ ist auch $R_S = \mu R_N$. Die Stützkraft P des Lagers bildet also mit R_N den Winkel ϱ . Bei senkrechter Lagerbelastung $\downarrow G + K = P \uparrow$ ist also der Durchmesser, der den belasteten Teil des Lagers begrenzt, um ϱ gegen die Waagerechte geneigt.

III. Für die Rolle ist nun wie in Nr 320 I II

$$\begin{array}{lll} \uparrow P = 2G + U \downarrow & \text{angenähert} & P = 2G \\ R_S = P \sin \varrho & \text{,,} & R_S = \mu P \end{array}$$

Moment Kraftüberschuß = Moment Lagerreibung

$$\curvearrowleft UR = \sum S r = R_S r_s = R_S r \pi/2$$

Angenähert $U = G\pi\mu r/R = 0,0236 G = 1,89 \text{ kg}$

Was wir vernachlässigt haben, ist nach Nr 320 I II nicht so wesentlich, wie der Einfluß der Druckverteilung, der U im Verhältnis $\pi/2$ erhöht.

IV. Die Kraft im rechten Strang $K = G + U$ ist also

$$\begin{array}{ll} \text{für Hochziehen} & K = 1,0236 G = 81,89 \text{ kg} \\ \text{für Ablassen} & K = 0,9764 G = 78,11 \text{ kg} \end{array}$$

Die Kraft im ablaufenden Strang ist also um 2,4% größer als im auflaufenden. Beim Flaschenzug Nr 55 nahmen wir 5% an. Davon wäre also etwa die Hälfte auf Lagerreibung zurückzuführen, die andere Hälfte durch Seilsteifigkeit zu erklären.

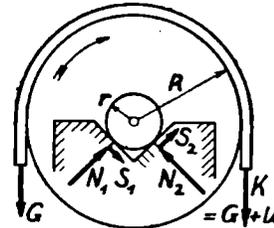
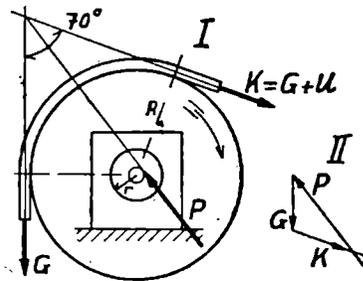
322. Andere Lagerbelastung. Bei derselben Rolle sei der ablaufende Strang um 70° gegen die Vertikale geneigt (Fig 205). Dann ist die Lagerbelastung kleiner als $2G$ und schieb.

I. Angenähert, ohne Rücksicht auf die Belastung durch U , und wenn die Berührung nur in einer Linie erfolgt wie in Nr 320, ist

$$\text{Lagerbelastung} = P = 2G \cos 35^\circ = 131 \text{ kg} \quad S = \mu P$$

$$\text{Moment Kraftüberschuß} = \text{Moment Lagerreibung}$$

$$UR = \mu Pr = 0,06 Pr \quad U = 0,98 \text{ kg}$$



↑ Fig 206. Lagerreibung, Berührung in 2 Linien

← Fig 205. Rolle mit schiebem Seilzug

II. Hiervon weicht der wirkliche Wert ab:

- 1) weil U den Lagerdruck ändert (Nr 320 II)
- 2) weil auch die Schubkräfte am Zapfen mittragen (Nr 320; 321)
- 3) weil die Druckverteilung statisch unbestimmt ist (Nr 321)

Jedenfalls ist auch hier das Moment M der Lagerreibung proportional der Lagerbelastung P und dem Zapfenradius r wie in Fig 204 III, die hier nur gedreht zu denken ist:

$$M = \sum S r = R_S r_s \quad R_S = P \sin \varrho \quad r_s = r \pi / 2$$

$$M = \frac{\pi}{2} \sin \varrho \cdot Pr = 0,0940 Pr$$

Der Zahlenfaktor ist größer als μ , abhängig von der Annahme über die Druckverteilung. Man schreibt

$$M = \mu' Pr \quad \text{erhöhte Reibungszahl} = \mu' = \frac{\pi}{2} \sin \varrho = 0,0940$$

Die Druckverteilung ist statisch unbestimmt, abhängig vom Passen des Zapfens, von seiner Abnutzung. Man bestimmt deshalb μ' durch Versuche am Zapfen selbst, nicht aus dem auf der schlichten Ebene gemessenen μ bzw ϱ . Es bleibt die Regel:

Mit einem Lagerdruck P ist verbunden ein
Moment der Lagerreibung = $M = \mu' Pr$

Hiermit ist 2) und 3) berücksichtigt. Nur 3) ist wesentlich. Mit Vernachlässigung von 1) ist nun $P = 2G \cos 35^\circ = 131 \text{ kg}$

$$\begin{aligned} \curvearrowright UR = \mu' Pr \curvearrowleft \quad U = 0,0118 P = 1,54 \text{ kg} \\ K = 81,54 \text{ kg für Hochziehen} \quad 78,46 \text{ kg für Ablassen} \end{aligned}$$

III. Die Formel $M = \mu' Pr$ kann man auch so deuten, daß die Lagerbelastung P für die Achse der Rolle den Hebelarm $\mu' r$ hat, daß sie

$$\text{an der Achse vorbeigeht im Abstand} = \mu' r = 0,0940 r$$

Die noch unbekannt Richtung von P folgt dann so, daß man vom Schnittpunkt von G und K die Tangente legt an den „Reibungskreis“ mit dem Radius $\mu' r$ (Fig 205). Danach folgt K aus dem Kräfteplan. Damit würde man auch den Einfluß 1) mit berücksichtigen. Praktisch kommt dabei aber U als kleine Differenz auch nicht genau heraus.

323. Aufgabe (Andere Druckverteilung). In dem Lager Fig 206 liegt der Zapfen statisch bestimmt an an zwei unter 45° geneigten Flächen. (Vergl Keilnut Nr 88; 321.) Dann treten die Stützkraftkomponenten $N_1 S_1 N_2 S_2$ auf. $N_2 S_2$ sind die größeren, da die S den Zapfen \rightarrow drängen. $R r \mu G$ haben dieselben Werte wie bisher. Berechne $N_1 S_1 N_2 S_2 U$. In welchem Verhältnis ist jetzt μ' größer als μ ?

324. Lagerreibung an einer Welle. Die Welle der Trommel Nr 206 Fig 144 habe $86 \text{ mm } \varnothing$ und $\mu' = 0,06$. Ohne Reibung war Zahnkraft $Z = 864 \text{ kg}$ Auflagerkräfte $A = 700 \text{ kg}$ $B = 794 \text{ kg}$. Der Überschuß U der Zahnkraft, der das Moment der Reibungskräfte überwindet, folgt dann aus

$$\curvearrowleft U \cos 15^\circ \cdot 46 \text{ cm} = \mu' (A + B)r = 385 \text{ kgcm} \curvearrowright \quad U = 8,7 \text{ kg}$$

Die Zahnkraft ist also $Z = 864 + 8,7 = 873 \text{ kg}$. Beim Ablassen nur 855 kg . Daß aus dieser veränderten Zahnkraft eigentlich auch andere Auflagerkräfte folgen, kann nach Nr 320 ÷ 322 vernachlässigt werden.

Bei einer Umlaufzahl von 35/Min überträgt die Winde

$$1200 \cdot 0,32 \cdot 2\pi \frac{35}{60} = 1410 \frac{\text{kgm}}{\text{sk}} \quad \text{oder} \quad \frac{1200 \cdot 32 \cdot 35}{71620} = 18,8 \text{ PS}$$

Durch Reibung werden in den Trommellagern verzehrt:

$$3,85 \cdot 2\pi \frac{35}{60} = 14 \frac{\text{kgm}}{\text{sk}} \quad \text{oder} \quad \frac{385 \cdot 35}{71620} = 0,19 \text{ PS}$$

Bei schnellaufenden Wellen befolgt die Reibung wesentlich andere Gesetze. Sie ist dann infolge der inneren Reibung des Schmiermittels weniger vom Druck, als von der Geschwindigkeit abhängig.

325. Aufgabe (Vorgelegewelle). Berechne in gleicher Weise die Zahnkraft Y bei der Vorgelegewelle von Nr 197 Fig 138 II mit $a = 240$ $b = 360$ $c = 320$ $R = 420$ $r = 140$ Zapfen $\varnothing = 50 \text{ mm}$ $\mu' = 0,07$ $\alpha = 62^\circ$ $\beta = 28^\circ$ $X = 110 \text{ kg}$ — I wenn Y treibt — II wenn Y getrieben wird. X und Y sollen tangential angreifen.

326. Exzenter. Bei einer Stanze (Fig 207 I) soll durch ein Kurbelgetriebe eine Kraft $K = 12$ to ausgeübt werden. Um die Kurbelwelle W nicht unterbrechen zu müssen, ordnet man ein Exzenter an, dh man macht den Kurbelzapfen so dick, daß er die Welle umfaßt.

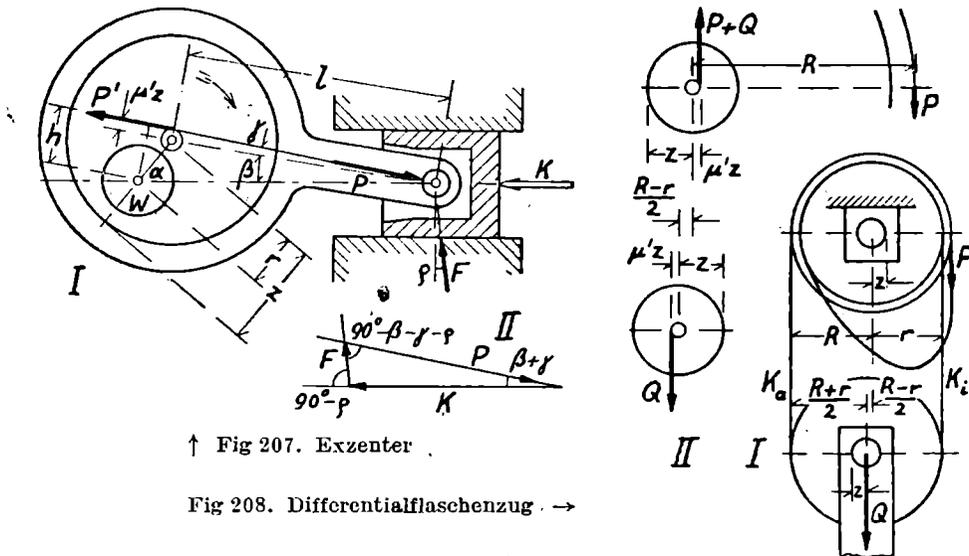
Es sei Kurbelradius $= r = 60$ mm Pleuelstange $= l = 5r = 300$ mm
Kurbelstellung $= \alpha = 50^\circ$ Zapfenradius $= z = 120$ mm $\mu' = 0,10$

Infolge des großen Zapfenradius wird das Moment der Lagerreibung an diesem nicht unbeträchtlich. Außerdem wollen wir noch Reibung an der Gleitbahn des Kreuzkopfs berücksichtigen: $\mu = 0,05$. Dagegen nicht Reibung an den Lagern der Welle und an dem kleinen Bolzen im Kreuzkopf.

I. Ohne Reibung ist mit $\alpha = 50^\circ$ $\beta = 8^\circ 49'$ $K = 12$ to

$$P_0 = K / \cos \beta = 12,14 \text{ to} \quad F_0 = K \tan \beta = 1,862 \text{ to}$$

$$\text{Moment an der Welle} = M_0 = P_0 r \sin(\alpha + \beta) = 623 \text{ kgm}$$



↑ Fig 207. Exzenter

Fig 208. Differentialflaschenzug →

II. Infolge Reibung bildet F den Winkel $\varrho = 2^\circ 52'$ mit der Normale. Die Kraft P berührt den Reibungskreis des Exzenter. Sein Radius ist $\mu' z = 12$ mm. P ist also jetzt steiler als β um $\gamma = 2^\circ 18'$ (aus $\sin \gamma = \mu' z / l$). Hierdurch kommt zum Ausdruck die Vergrößerung des Moments an der Welle infolge der Zapfenreibung. Man kann auch sagen, daß der Exzentering auf der Scheibe \curvearrowright gedreht werden muß gegen die Zapfenreibung. Dazu braucht man eine \curvearrowright drehende Kraftkomponente, die auch ein größeres F fordert. Im Kräfteplan Fig II bestimmen wir die Winkel und berechnen:

$$P = \frac{K \cos \varrho}{\cos(\beta + \gamma + \varrho)} = 12,35 \text{ to} \quad F = \frac{K \sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma + \varrho)} = 2,38 \text{ to}$$

$$\begin{aligned} \text{Moment an der Welle} &= M = Ph = P[r \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \mu' z] \\ &= 12,35 \text{ to} [52,6 + 12] \text{ mm} = 798 \text{ kgm} \end{aligned}$$

III. Wir wollen das Moment der Lagerreibung angenähert aus dem P_0 (ohne Reibung I) berechnen, ähnlich wie in Nr 324.

Dann ist $M_{\text{Reibung}} = \mu' P z = 12,14 \cdot 12 = 146 \text{ kgm}$

Dies zu M_0 zugezählt gibt $623 + 146 = 769 \text{ kgm}$ statt 797

Den Haupteinfluß erfaßt man also auch so. Der Unterschied besteht in der Reibung am Kreuzkopf und in den Gliedern zweiter Ordnung.

IV. Wollte man das Exzenter benutzen, um umgekehrt durch den Druck $K \leftarrow$ die Welle \curvearrowright zu treiben, so würde das Getriebe bis zu einem bestimmten Winkel α selbsthemmend sein, darüber hinaus Momente kleiner als M_0 ergeben. P würde dann am Reibungskreis unten berühren.

Grenze des Selbsthemmens: $\beta = \gamma = 2^\circ 18'$ $\alpha = 11^\circ 37'$

Für $\alpha = 50^\circ$ $K = 12 \text{ to}$ ergibt ein entsprechendes Kraftdreieck

$$P = 12,01 \text{ to} \quad F = 1,365 \text{ to} \quad M = 456 \text{ kgm} \quad 73 \% \text{ von } M_0$$

327. Differentialflaschenzug. Bei dem Differentialflaschenzug Fig 208 I sei $R:r = 9:8$ $Q = 360 \text{ kg}$.

Dann ist ohne Reibung (Nr 251) $P = \frac{R-r}{2R} Q = \frac{Q}{18} = 20 \text{ kg}$

An der oberen und an der unteren Achse sei Zapfenradius $= z = 0,2 R$
Reibungszahl $= \mu' = 0,15$ also Radius des Reibungskreises $= \mu' z = 0,03 R$

I. Beim Aufwärtsgang ist der Kettzug außen größer als $Q/2$, innen kleiner:

$$K_a = \frac{1}{2} Q + U \quad K_i = \frac{1}{2} Q - U$$

Das Kräftepaar UU überwindet die Lagerreibung an der unteren Rolle:

$$\curvearrowright U(R+r) = \mu' Q z \curvearrowleft$$

An den oberen Rädern ist dann

$$\curvearrowleft P R = (\frac{1}{2} Q + U) R - (\frac{1}{2} Q - U) r + \mu' (P + Q) z \curvearrowright$$

geordnet $P(R - \mu' z) = \frac{1}{2} Q(R - r) + U(R + r) + \mu' Q z$

eingesetzt $P(R - \mu' z) = Q[\frac{1}{2}(R - r) + 2\mu' z]$

Im Beispiel: $P \cdot 0,97 R = Q \cdot [0,0556 + 0,06] R$

$$P = 0,1191 Q = 42,9 \text{ kg}$$

Soll die Last um 1 m steigen, so muß man das P -Seil um 18 m herausziehen (vergl Kraftverhältnis ohne Reibung).

$$\text{Also Wirkungsgrad} = \frac{Q \cdot 1}{P \cdot 18} = \frac{1}{0,1191 \cdot 18} = 0,466 = 46,6\%$$

II. Man kann das Gleichgewicht noch besser übersehen vermittels der Reibungskreise. In Fig II sind die Zapfen vergrößert gezeichnet, die Rollen fortgelassen. Unten greift Q nicht auf Mitte Zapfen an, sondern links am Umfang des Reibungskreises mit dem Radius $\mu' z$. Oben berührt die Tragkraft $P + Q$ den Reibungskreis rechts. P wirkt in großem Abstand am Radius R . Die Momentengleichung für den Angriffspunkt von $P + Q$ ergibt dann sofort $\curvearrowleft P(R - \mu' z) = Q[\frac{1}{2}(R - r) + 2\mu' z] \curvearrowright$

Man sieht, daß die Reibungskreise neben dem kleinen Unterschied der Radien großen Einfluß haben.

III. Beim Abwärtsgang ändert die Reibung ihr Vorzeichen:

$$P(R + \mu'z) = Q \left[\frac{1}{2}(R - r) - 2\mu'z \right]$$

Im Beispiel wird P negativ, der Flaschenzug ist selbsthemmend. Q greift rechts an seinem Reibungskreis an, $P + Q$ links. Im Beispiel liegt dann Q rechts von $P + Q$!

IV. Die Grenze des Selbsthemmens liegt bei $2\mu'z = \frac{1}{2}(R - r)$. In diesem Fall ist für den Aufwärtsgang

$$P(R - \mu'z) = 2 \cdot Q \cdot \frac{1}{2}(R - r)$$

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{R - r}{2R} = \frac{R - \mu'z}{2R} = \frac{1 - 0,03}{2} = 48,5\%$$

Im Fall des Selbsthemmens ist der Wirkungsgrad also kleiner als 50% auch im Grenzfall nicht = 50%.

328. Spurlagerreibung. Der Spurzapfen Fig 209 ist mit $\downarrow P$ belastet und im Spurlager gestützt durch \uparrow Kräfte = P , die wir als gleichmäßig über den Kreis verteilt annehmen. Auch die Schubkräfte sind dann gleichmäßig verteilt. Ihr durchschnittlicher Hebelarm ergibt sich, wenn man den Kreis in unendlich schmale Sektoren teilt. Dann kann man die Schubkräfte je im Dreiecksschwerpunkt vereinigt denken.

$$\text{Also Reibungsmoment} = M = \mu P \cdot \frac{2r}{3}$$

Am Umfang, wo die größte Geschwindigkeit besteht, ist auch die Abnutzung am größten. Der Zapfen wird also unten ballig werden und der Druck wird in der Mitte größer. Dadurch sinkt der durchschnittliche Hebelarm. — Um zu vermeiden, daß dabei der Druck in der Mitte zu groß wird, ordnet man dort eine Aussparung an. Als Hebelarm der Reibung kann dann angenähert der mittlere Radius der Kreisringfläche gelten; eigentlich ein Trapezschwerpunkt.

329. Hubschraube. Die Hubschraube Fig 210 I hat den mittleren $\varnothing d_m = 64$ mm, die Ganghöhe $h = 36$ mm. Die Reibungszahl an den Gängen ist $\mu = 0,12$, die Belastung $P = 2000$ kg. Die Schraubenspindel wird gedreht durch ein Kräftepaar KK mit dem Hebelarm $a = 900$ mm.

I. Die Hubschraube wirkt wie eine schiefe Ebene (Fig II), auf der P durch eine waagerechte Kraft Z hinaufgezogen wird: (Vergl Nr 91.)

$$\begin{array}{ll} \text{Neigung der schiefen Ebene aus } h = \pi d_m \operatorname{tg} \alpha & \alpha = 10^\circ 10' \\ \text{Winkel der Stützkraft } F \text{ gegen die Normale (} \operatorname{tg} \varrho = \mu \text{)} & \varrho = 6^\circ 50' \\ \text{,, ,, Vertikale} & \alpha + \varrho = 17^\circ 0' \end{array}$$

Nach dem Kraftdreieck III ist dann $Z = P \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$

Das drehende Kräftepaar muß nun dasselbe Moment haben, wie Z am Hebelarm r_m :

$$\text{Moment} = Ka = P r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = 1957 \text{ kgcm!} \quad K = 21,8 \text{ kg}$$

II. Oder: Die Stützkräfte F , die auf den Gängen verteilt sind (Fig IV), bilden mit der Vertikale den Winkel $\alpha + \varrho$.

Die \uparrow Komponenten tragen die Last:

Die \leftarrow Komponenten fordern das Moment:

Verhältnis der Komponenten:

Also Moment:

$$\downarrow P = \sum F_y \uparrow$$

$$K a = \sum F_x r_m$$

$$F_x = F_y \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

$$M = K a = \sum F_y \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) \cdot r_m = P r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

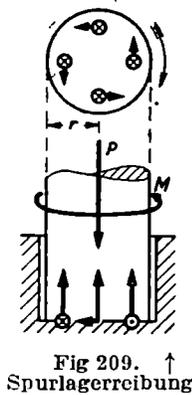
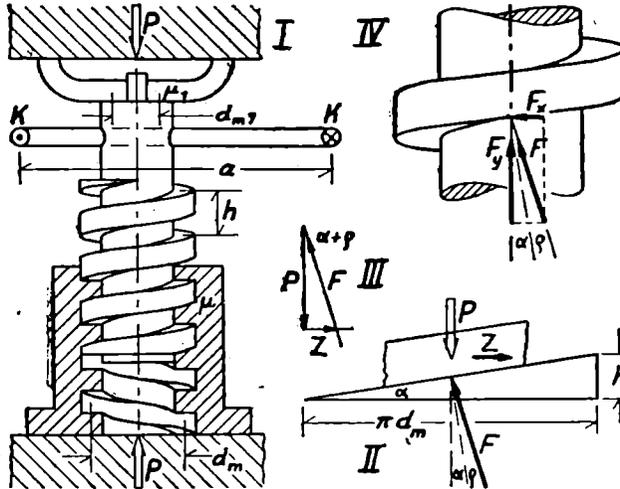


Fig 210. → Hubschraube



III. Das Verhältnis der beim Heben gewonnenen zu der durch das Moment geleisteten Arbeit (Nr 265 I), berechnet etwa für 1 Umdrehung, ist

$$\text{Wirkungsgrad} = \eta = \frac{P h}{M \cdot 2\pi} = \frac{72 \text{ kgm}}{122,8 \text{ kgm}} = 0,586 = 58,6\%$$

M eingesetzt:
$$\eta = \frac{P h}{P r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) \cdot 2\pi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} = 0,586$$

330. Fortsetzung. I. Beim Abwärtsgang liegt F um ϱ links der Normale und, da hier $\varrho < \alpha$ ist, um $\alpha - \varrho$ rechts der Vertikale. Also

stützendes Moment $= M = P r_m \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) = 373 \text{ kgcm}$ $K = 4,1 \text{ kg}$
(Vergl Nr 91.) Für $\varrho > \alpha$ dagegen ist die Schraube selbsthemmend. Ihr Wirkungsgrad für Aufwärtsgang (Nr 329 III) ist dann $< 0,5$.

II. Bisher wurde die Reibung an der Stirnfläche vernachlässigt. — Der mittlere \varnothing der Berührungsfläche der Klaue sei $d_{m1} = 42 \text{ mm}$, die Reibungszahl dort $\mu_1 = 0,15$. Dann brauchen wir nach Nr 328

$$M = P r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) + \mu_1 P r_{m1} = 1957 + 630 = 2587 \text{ kgcm}$$

$$K = 28,7 \text{ kg} \quad \eta = 0,443$$

III. Für Abwärtsgang ist jetzt das stützende Moment

$$M = P r_m \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) - \mu_1 P r_{m1} = 373 - 630 = -257 \text{ kgcm} \quad K = -2,9 \text{ kg}$$

Die Schraube unseres Beispiels ist also doch selbsthemmend.

Grenze des Selbsthemmens: $\operatorname{tg}(\alpha - \varrho) = \mu_1 r_{m1} / r_m = 0,0984 \quad \alpha = 12^\circ 28'$

331. Schneckenrad. Das Schneckenrad Nr 207 Fig 145 kann als Hubschraube behandelt werden. Es besteht Reibung an den Schraubengängen wie bei der Hubschraube (Nr 329), im Drucklager wie an der Klaue der Hubschraube (Nr 330), in den Traglagern wie bei der Winde (Nr 324). Es gelten die Maße von Fig 145; nur wollen wir absehen von der Neigung der Zahnflanke ($\beta = 0$ $K_y = 0$). Es sei überall $\mu = 0,05$, im Drucklager $d_{m1} = 140$ mm, in den Traglagern $d_2 = 80$ mm. M_1 am Zahnrad bleibe 24000 kgcm. Wie groß wird M_2 an der Kupplung und der Wirkungsgrad?

$$\text{Längskomponente} = K_z = M_1/R = 1250 \text{ kg}$$

$$\text{Querkomponente} = K_x = K_z \operatorname{tg}(\alpha + \rho) = 231$$

$$\text{Drucklagerkraft} = A_z = K_z = 1250$$

$$\text{Auflagerkräfte: } \begin{array}{lll} A_x = 111 & A_y = 225 & A = 251 \text{ kg} \\ B_x = 120 & B_y = 225 & B = 255 \end{array}$$

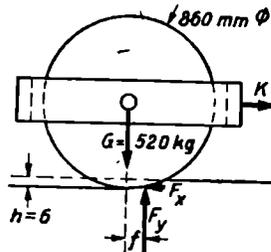
Moment Kupplung = Momente an Gang, Drucklager, Traglagern

$$\begin{aligned} M_2 &= K_x r + \mu A_z r_{m1} + \mu (A + B) r_2 \\ &= 2079 + 438 + 101 = 2618 \text{ kgcm} \end{aligned}$$

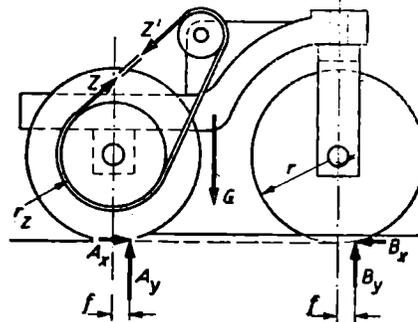
In $K_x r = K_z r \operatorname{tg}(\alpha + \rho)$ ist die Reibung an den Gängen enthalten. Ohne Reibung wären es 1500 kgcm.

$$\text{Wirkungsgrad} = \eta = \frac{M_1}{16 M_2} = 0,573$$

332. Aufgabe (Schneckenrad). I. Berechne für dasselbe Rad M_2 für Abwärtsgang. — II. Kann die Schneckenwelle vom Rad angetrieben werden? Wie groß ist dann der Wirkungsgrad?



↑ Fig 211. Walze, Antrieb von außen
Fig 212. Walze, Antrieb von innen →



333. Walze. Die Walze Fig 211 von 520 kg Gewicht, 860 mm \varnothing wälzt den Boden um $h = 6$ mm tiefer. Dadurch kommt es, daß die Stützkraft F vor dem senkrechten Durchmesser angreift. Wir nehmen an, dies geschehe etwa auf der Mitte des Bogens,

$$\text{also im Abstand } f = \frac{1}{2} \sqrt{(d-h)h} = \frac{1}{2} \sqrt{854 \cdot 6} = 36 \text{ mm}$$

Die Stützkraft muß durch Mitte Walze gehen. Sie hat also neben der \uparrow Komponente F_y eine \leftarrow Komponente $F_x = F_y \cdot 36/430$.

$$\text{Oder: } \left(\curvearrowright F_x r = F_y f \left(\curvearrowleft \uparrow F_y = G \downarrow \left(\leftarrow F_x = K \rightarrow \right. \right.$$

$$\text{also } \text{Zugkraft} = K = G f / r = 43,5 \text{ kg}$$

Auch diese Art des Bewegungswiderstandes an der Grenze zweier sich aufeinander abwälzender Körper nennt man „Reibung“. Das Maß f , um welches die Stützkraft gegen den geometrischen Berührungspunkt der beiden Körper versetzt ist, heißt „Hebelarm der rollenden Reibung.“

334. Dampfwalze. Bei der Dampfwalze Fig 212 werden die Hinterwalzen angetrieben, die Vorderwalze nicht. Dann besteht bei der Vorderwalze wie in Nr 333 eine \leftarrow Komponente $B_x = B_y \cdot f/r$

An den Hinterwalzen aber ist A_x nach vorn gerichtet und $= B_x$. Denn am Ganzen wirkt sonst keine \rightarrow äußere Kraft. Die Dampfwalze stößt sich vermittelt der Hinterwalzen von der Erde ab. Durch den Kettenzug Z (innere Kraft) werden dann beide Momente an der Hinterachse, das von A_x und das von A_y , überwunden:

$$Z r_z = A_y f + A_x r = A_y f + B_x r = (A_y + B_y) f = G f$$

Das Moment von Z überwindet also die rollende Reibung für die ganze auf die beiden Achsen verteilte Last G . Durch $A_x = B_x$ und den entsprechenden Druck im Rahmen wird die Kraft auf die Vorderwalze übertragen. — A_x und eine gewisse Komponente von A_y ist Schubkraft, Gleitreibung. Die Hinterwalzen könnten ja ausrutschen.

335. Untergelegte Walzen. In Fig 213 wird die Last G auf untergelegten Walzen befördert. — Am unteren und am oberen Berührungspunkt sind die y -Komponenten der Kräfte gegen den senkrechten Durchmesser entgegen der Drehrichtung um f_o bzw f_u verschoben. Die x -Komponenten, die oben und unten an der Walze wirken, bilden ein Kräftepaar:

$$\curvearrowright A_x d = A_y (f_o + f_u) \curvearrowleft \quad \text{ebenso } B_x$$

Zum Ziehen oder Schieben der Last ist also erforderlich die Kraft

$$K = A_x + B_x = \frac{f_o + f_u}{d} (A_y + B_y) = \frac{f_o + f_u}{d} G$$

Oder: Die Kräfte an den beiden Berührungsstellen liegen in einer Linie, die gegen die Vertikale um $(f_o + f_u)/d$ geneigt ist und die übrigens im allgemeinen am Mittelpunkt der Walze vorbeigeht. Die Last wird gewissermaßen durch schiefe nach hinten geneigte Stützen getragen. Durch diese Stützen wird die Kraft K von der Last auf die Erde übertragen. Die Gegenkraft wird von den Menschen, die die Last ziehen oder schieben, auf die Erde ausgeübt, (Vergl Nr 246 I).

Man rechnet für Eisen auf Eisen etwa $f = 0,05$ mm, für Holz auf Holz etwa $f = 0,5$ mm. Es liegen aber nicht viele Angaben dafür vor.

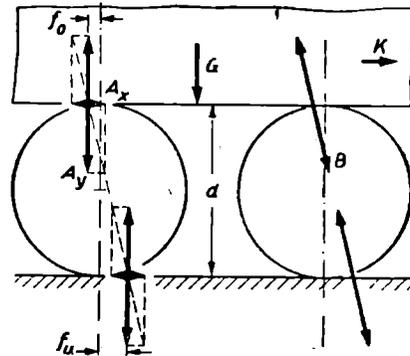


Fig 213. Untergelegte Walzen

336. Aufgabe (Walzen). Eine Last $G = 280 \text{ kg}$ wird auf 2 Walzen von $110 \text{ mm } \varnothing$ befördert, die selbst je 15 kg wiegen. Es sei $f_0 = 0,08$ $f_u = 1,5 \text{ mm}$. Berechne die Kraft K .

337. Wagenrad. I. Die Räder eines Lastwagens (Fig 214) drehen sich auf festen Achsen im Gegensatz zu Eisenbahnwagenachsen, die in Lagern laufen. Ihrer \curvearrowright Drehung wirken entgegen die \curvearrowleft Momente von Lagerreibung und rollender Reibung (an den Hinterrädern gezeichnet). Diese werden überwunden durch Momente von Kräften am Umfang $A_x B_x$. Diese bremsen zugleich den Wagen als Ganzes und fordern dort die Zugkraft K .

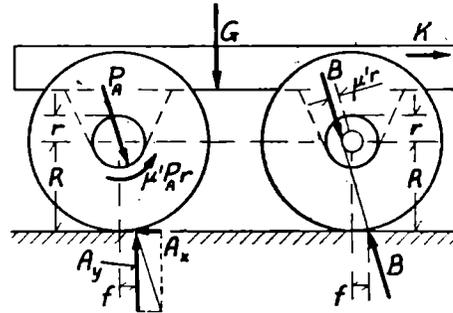


Fig 214. Wagenrad

Momente am Rad $\curvearrowleft A_x R = \mu' P_A r + A_y f \curvearrowright$

$$\text{Lagerbelastung} = P_A = A = \sqrt{A_y^2 + A_x^2} \sim A_y$$

Eingesetzt: $A_x = \frac{\mu' r + f}{R} A_y$ ebenso B_x

$$\text{Zugkraft} = \rightarrow K = 2 A_x + 2 B_x \leftarrow \quad \text{Gewicht} = \downarrow G = 2 A_y + 2 B_y \uparrow$$

$$\text{Eingesetzt:} \quad K = \frac{\mu' r + f}{R} (2 A_y + 2 B_y) = \frac{\mu' r + f}{R} G$$

Mit $\mu' = 0,06$ $r = 45 \text{ mm}$ $R = 400 \text{ mm}$ $f = 1,5 \text{ mm}$

ist $K/G = 0,0105 = 10,5 \text{ kg/to}$ (10,5 kg pro to des Wagengewichts)

II. Man kann auch sagen, daß die durch das Rad übertragene Kraft am Radumfang um das Maß f vor dem geometrischen Berührungspunkt angreift (an den Vorderrädern gezeichnet) und im Lager am Reibungskreis berührt. Die Kraft B in der Achse und das Moment $\mu' B r$ sind ja gleichwertig mit dem um $\mu' r$ verschobenen B (Nr 155). Dann ist angenähert

$$\frac{B_x}{B_y} = \text{tg } \alpha = \frac{\mu' r + f}{R} \quad K = 2 A_x + 2 B_x = (2 A_y + 2 B_y) \text{tg } \alpha$$

$$K = \frac{\mu' r + f}{R} G \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{proportional zum Gewicht wie bei Gleitreibung} \\ \text{aber mit herabgesetzter Reibungszahl} \end{array} \right.$$

Also $K = \mu'' G$ mit der Reibungszahl $\mu'' = \frac{\mu' r + f}{R}$

Darin besteht ja die Erfindung des Wagenrades, daß das Gleiten verlegt ist von den Kufen an den kleinen Zapfenradius. μ' ist verkleinert im Verhältnis r/R . Allerdings kommt f hinzu. Am Radumfang besteht nur soviel Reibung, wie nötig ist, um das Rad zu drehen.

III. Es gibt Angaben über Fahrwiderstände auf Straßen verschiedener Art. Aus ihnen wollen wir auf den Hebelarm f der rollenden Reibung schließen. Es sei $\mu' = 0,05$ $r = 40$ $R = 400 \text{ mm}$

Dann ist Anteil der Lagerreibung an μ'' $\mu' r/R = 0,005 = 5 \text{ kg/to}$
 Die Widerstandszahl μ'' gibt man an für
 Asphaltstraße $K/G = \mu'' = 10 \text{ kg/to}$ dann ist $f = 2 \text{ mm}$
 gut gebaute Landstraße $25 \cdot / \cdot$ „ „ $8 \cdot$
 guten ungebauten Erdweg $80 \cdot / \cdot$ „ „ $30 \cdot$

338. Eisenbahnzug. Die Lokomotive zieht den Zug vermittelt Reibung an den Triebrädern. Der Widerstand ist Reibung an den Wagenrädern. Diese aber ist nach Nr 337 nur sehr wenig ausgenutzt, nur soweit nötig, um das Rad gegen Lagerreibung und rollende Reibung zu drehen. Die Triebräder dagegen können bei einem schweren Zug gelegentlich ausgleiten. Welches Zuggewicht kann die Lokomotive höchstens ziehen?

I. Es sei Belastung der Triebräder der Lokomotive = L
 Zuggewicht = G einschließlich Lokomotive (vergl Nr 334)
 Widerstandszahl = $\mu'' = 7 \text{ kg/to}$
 Reibungszahl Rad/Schiene = $\mu = 0,15$

Dann muß sein Widerstand = $\mu'' G < \text{mögliche Zugkraft} = \mu L$
 Also $G < L\mu/\mu'' = 21,4 L$

II. Soll aber der Zug auf einer Steigung 1:300 mit $b = 0,05 \text{ m/sk}^2$ beschleunigt werden, zB bei der Ausfahrt aus einem Bahnhof,

so muß sein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Schwerkraftskomponente} \\ + \text{Widerstand} + \text{Trägheitskraft} \end{array} \right\} < \text{mögliche Zugkraft}$

$$G(1/300 + 0,007 + 0,05/9,81) < 0,15 L \quad G < 6,5 L$$

339. Aufgabe (Wagen). Ein Möbelwagen von 2500 kg soll auf waagerechter Landstraße mit 8 km/St fahren. $\mu'' = 0,05$ Rad $\varnothing = 600 \text{ mm}$ Zapfen $\varnothing = 90 \text{ mm}$ $f = 8 \text{ mm}$. Berechne die erforderliche Leistung.

340. Kugellager. I. Das Kugellager Fig 215 I enthalte 10 Kugeln vom $\varnothing d = 8 \text{ mm}$. Ihr gegenseitiger Abstand soll mindestens 1 mm sein.

Dann muß sein: mittlerer $\varnothing = d_m = 30 \text{ mm}$
 Zapfen $\varnothing = d_i = 22 \text{ mm}$ Ring $\varnothing = d_a = 38 \text{ mm}$

Der Hebelarm der rollenden Reibung sei $f = 0,01 \text{ mm}$

Der Zapfen drehe sich \curvearrowright oder der Ring \curvearrowleft . Lagerbelastung P .

Wie groß ist das Moment M der Lagerreibung?

II. An einer einzelnen Kugel (Fig II) greifen die Kräfte A um f neben dem geometrischen Berührungspunkt an. Die Komponente $A_r \parallel$ Berührungsradius ist die Belastung der Kugel, die tangentiale A_t ist nötig, um sie gegen die rollende Reibung \curvearrowleft zu drehen: $\curvearrowleft A_t d = 2 A_r f \curvearrowright$

Aus allen belasteten Kugeln folgt:

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \text{Moment am Zapfen} &= M_i = \Sigma (A_t r_i + A_r f) \\ \curvearrowright \text{Moment am Ring} &= M_a = \Sigma (A_t r_a - A_r f) \end{aligned}$$

Beide sind natürlich einander gleich (Nr 246 II).

Einsetzen von $A_r f = A_t d/2$ ergibt $M = \Sigma A_t r_m$

Das sieht man auch unmittelbar, wenn man A auf seiner Angriffslinie an den Kugelmittelpunkt verlegt.

Einsetzen von $A_t = \frac{2A_r f}{d}$ ergibt $M = \frac{2f}{d} \cdot \Sigma A_r \cdot r_m$

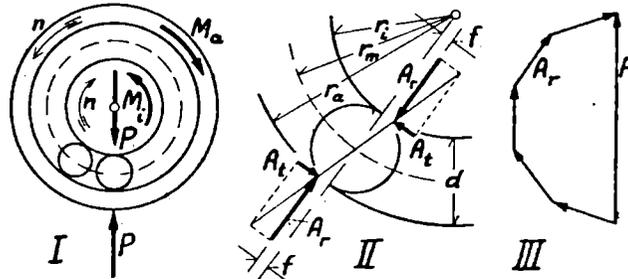


Fig 215. Kugellager

III. Die Verteilung des Lagerdrucks P auf die Kugeln ist statisch unbestimmt. Jedenfalls ist $\Sigma A_r > P$. Nehmen wir an, daß die Kugeln auf dem Halbzylinder mit gleicher Kraft anliegen (Nr 321 Fig 204 III IV), so ist nach Fig III angenähert

$$\Sigma A_r = \frac{n}{2} A_r = \frac{\pi}{2} P \quad \text{also} \quad A_r = \frac{\pi}{n} P$$

Die einzelne Kugel ist so belastet, als ob $\sim \frac{1}{3}$ aller n Kugeln gleichmäßig trüge, im Beispiel ~ 3 Kugeln.

IV. Das Moment der Lagerreibung ist dann

$$M = \frac{2f}{d} \cdot \frac{\pi}{2} P \cdot r_m = \frac{\pi f}{d} P r_m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{proportional zu } P \text{ und } r_m \\ \text{wie bei einem Gleitlager} \end{array} \right.$$

Also $M = \mu' P r_m$ mit der Lagerreibungszahl $\mu' = \pi f/d = 0,0039$

341. Aufgabe (Kugellager). Eine wie Nr 321 Fig 204 belastete Rolle ist mit Kugellagern versehen. Last = $G = 80$ kg Rollenradius = $R = 120$ mm Zapfenradius = $r_i = 15$ mm $f = 0,01$ mm. Es sollen 12 Kugeln angeordnet werden mit mindestens 1 mm gegenseitigem Abstand. Welchen \varnothing erhalten die Kugeln, abgerundet auf ganze mm? Wie groß wird der Kraftüberschuß U ?

342. Blockzange. Die Zange Fig 216 I ist vermittlems zweier Seile, die in einem Knotenpunkt (0) zusammenlaufen, an einem Kran aufgehängt. Sie faßt mit ihren Armen (1) (2) einen Block (3). Die Kraft, mit der sie infolge ihrer Aufhängungsart zusammengedrückt wird, muß so stark sein, daß der Block durch Reibung getragen wird.

In den Seilen wirken die Kräfte $A B$. Die Arme üben aufeinander eine waagerechte Kraft C aus. (Vergl Nr 225.) An den Backen bilden Druck und Reibung die Resultanten $D E$. An den Zangenarmen sind $A_1 C_1 D_1$ bzw $B_2 C_2 E_2$ im Gleichgewicht. Deshalb müssen sich diese Kräfte je in einem Punkt schneiden. So ergibt sich der Neigungswinkel α der Kräfte

an den Backen. α muß kleiner als ϱ sein. Die Größe der Kräfte folgt aus dem Kräfteplan II. Die Seitenfläche des Blocks darf bis $\varrho - \alpha$ gegen die Vertikale geneigt sein (Fig III), ehe der Block der Zange entgleitet.

343. Rohrzanze. Auch die Rohrzanze Fig 217 ist eine selbsthemmende Vorrichtung. Die 2 Kräfte am Bügel liegen in einer Linie. Die 3 Kräfte an der Stange gehen durch einen Punkt. Infolge des flachen Schnittes von A und B ergeben sich große Andrückkräfte.

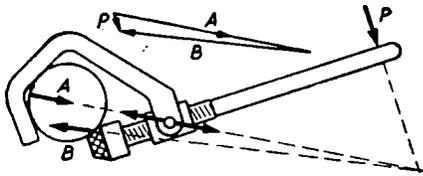


Fig 217. Rohrzanze

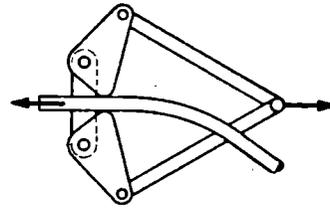


Fig 218. Froschklemme

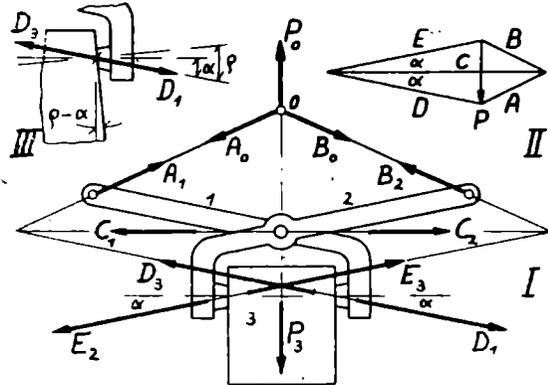


Fig 216. Blockzanze

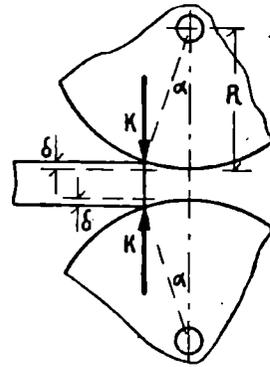


Fig 219. Zufassen von Walzen

344. Aufgabe (Froschklemme). Die „Froschklemme“ Fig 218 dient zum Strammziehen von Drähten. Untersuche die Bedingung des Zufassens und entwirf den Kräfteplan.

345. Zufassen von Walzen. Zwischen 2 Walzen vom Radius R (Fig 219) soll eine glühende Stahlstange durchlaufen, so daß ihre Dicke um 2δ abnimmt. Die Walzen können nur dann zufassen, wenn die Kraft K an der Berührungsstelle keine Komponente entgegen der Bewegungsrichtung hat. Es muß also sein:

$$\alpha < \varrho \quad \delta < R(1 - \cos \varrho) \quad \text{mit } \mu = 0,1: \quad \delta < \frac{1}{2,00} R \quad R > 200 \delta$$

346. Reibungskräfte in 2 Richtungen. Wenn man einen Korken mit der Hand aus einem Flaschenhals ziehen will, so dreht man ihn. Man schneidet mit einem Messer, indem man es auch in der Längsrichtung durchzieht. Wenn die Reibung in einer Richtung überwunden ist, so kann sie auch in der andern Richtung nicht mehr bestehen.

Auf einer waagerechten Ebene liege ein Gewicht von 40 kg. Es sei $\mu_0 = 0,15$. Die zur Überwindung der Reibung erforderliche Zugkraft ist also 6 kg. Es werde nun \parallel Ebene in irgendeiner Richtung mit $K_x = 5$ kg gezogen. Die Reibung ist dann noch nicht voll ausgenutzt. Mit welcher Kraft K_y kann man dann \parallel Ebene $\perp K_x$ ziehen, ehe Bewegung eintritt? — Die Resultante von K_x und K_y muß 6 kg sein, also ist $K_y = 3,32$ kg. Die Bewegung erfolgt in Richtung der Resultante.

350. Zusammenfassung. Zwei Gruppen von Reibungsaufgaben gibt es: Solche, bei denen der gleitende Körper sich bewegt, so daß die Reibung als Bewegungswiderstand wirkt, und solche, bei denen keine Bewegung eintritt, wo die Reibung eine Stützkraft ist.

Im ersten Fall ist $S = \mu N$ und die Resultante von S und N bildet den Winkel ϱ mit der Normalen. Im zweiten Fall ergibt sich das Verhältnis S/N aus dem Gleichgewicht. Soll dieses Gleichgewicht bestehen können, so muß $S < \mu N$, der Resultantenwinkel $< \varrho$, bzw. $\mu > S/N$ sein. Im allgemeinen ist dann die Reibung nicht voll ausgenutzt.

So lösten wir Aufgaben über Bremsen, Seilreibung, Lagerreibung, Hubschrauben, Fahrwiderstand von Wagen und über das Gleichgewicht an Vorrichtungen, die auf der Erscheinung des Selbsthemmens bei Reibung beruhen: bei denen in demselben Maß, wie das Gleichgewicht die Reibungskraft fordert, auch der Anpreßdruck wächst.

XIII. Graphische Statik Sonderausführungen

351. Gewölbe. In Nr 86 Fig 49 lernten wir das Gewölbe als Stützlinie kennen. Es ist (Fig 220 I) aus Steinen mit trapezförmiger Ansichtsfläche gebaut. Auf der Rückseite der Steine wirken Erdlast und Verkehrslast.

I. Bei jedem Stein (Fig II) schneiden sich Belastung und Fugendrucke in einem Punkt. So bildet sich die Stützlinie (Fig I), zu der der Kräfteplan III gehört. Die äußersten Seilstrahlen sind die Fundamentdrucke AB . Die Stützlinie soll möglichst durch die Mitte jeder Fuge gehen. Dann ist die Druckverteilung auf diesen gleichmäßig. Nimmt man nun die Belastung \perp Rückseite der Steine an, so werden alle Fugendrucke einander gleich. Nimmt man außerdem gleichmäßige Belastung an, so wird das Gewölbe ein Kreisbogen. Ist aber die Belastung außen größer wegen der höheren Überschüttung, so muß das Gewölbe dort krummer werden als im Scheitel. Die Stützlinie ist statisch unbestimmt: Es kommt darauf an, wie genau die zugeschnittenen Steine zwischen die Widerlager passen. Sind sie zB zu schief zugeschnitten, so liegen sie oben mit stärkerem Druck aneinander als unten. Die Stützlinie verläuft dann mehr oben.

II. Wird der Bogen ungleichmäßig belastet, etwa mit 2 Einzellasten, so müßte er, vom Eigengewicht abgesehen, aus 3 geraden Stücken bestehen. Aber auch der krumme Bogen kann unter 2 Einzellasten im

Gleichgewicht sein, wenn er so dick ist, daß man eine Stützlinie für sie innerhalb des Bogens zeichnen kann (Fig IV). Da wo diese der unteren Begrenzung nahe kommt, ist der Fugendruck unten stärker als oben; und umgekehrt. Sie darf nur dem Rand nicht so nahe kommen, daß der Höchstwert der ungleichmäßigen Druckspannung die zulässige Grenze überschreitet. — Wo die Stützlinie die Fuge schief schneidet, wird eine Reibungsschubkraft gefordert. Der Winkel Stützlinie/Fugennormale muß $< \varrho$ sein, wenn kein Abgleiten eintreten soll.

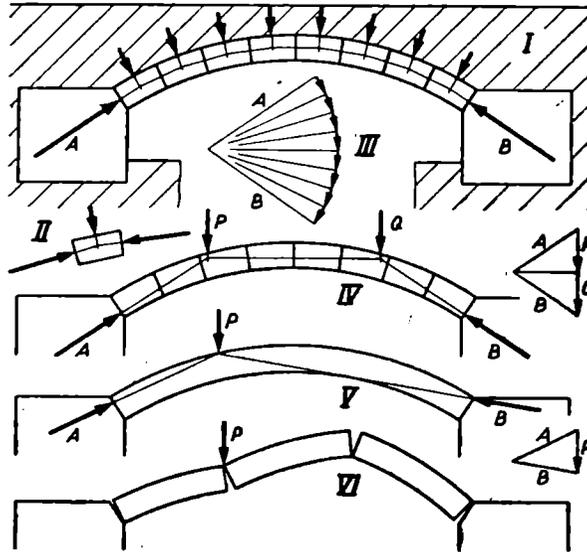


Fig 220. Stützlinien im Gewölbe

III. Unmöglich wird das Gleichgewicht zB in Fig V: Der Bogen ist mit der Einzellast P belastet. Die rechte Stützlinie schneidet den äußeren Bogenrand bei P und bei B und berührt dazwischen den inneren. Dann klappt der Bogen bei P und bei B am unteren Rand; in der Mitte zwischen P und B am oberen Rand. Auch bei A rückt dann infolge der eintretenden Drehungen die Stützlinie zum unteren Rand hin, und der Bogen klappt oben. Es bilden sich also 4 Gelenke (Fig VI). Die Teile drehen sich gegeneinander. Der Bogen stürzt zusammen.

352. Dreigelenkbogen. Statisch bestimmt ist der Dreigelenkbogen Fig 221 I. PQR belasten den linken, STU den rechten Teil. Die Gelenkdrücke, berechnet in Nr 225, sind zu konstruieren.

Nach Nr 169 bestimmt man Auflagerkräfte, indem man die Belastungen durch ein Seileck zusammenfaßt, das im festen Lager beginnt und auf der Angriffslinie der anderen Stützkraft einschneidet. Das läßt sich hier unmittelbar nicht anwenden, da von allen 3 Stützkraften die Richtungen unbekannt sind. Denkt man sich aber nur den linken Teil belastet, den rechten unbelastet, so liegen die Gelenkdrücke B und C in Richtung BC .

Wir fassen dann PQR durch ein Seileck I zusammen, welches in A beginnt und auf BC einschneidet. Die Schlußlinie I, in den Kräfteplan II übertragen, liefert die Anteile an den Auflagerkräften: A_1 und $B_1 = C_1$, wobei die Pfeilrichtung C_1 die am linken Teil wirkende Kraft bedeutet. Ebenso erhalten wir aus STU die Anteile B_2 und $A_2 = C_2$ (Kraft am rechten Teil). Nun bilden wir im Kräfteplan die Auflagerkräfte als Resultanten: A aus A_1 und C_2 C am linken Teil aus C_1 und $-C_2$
 B aus B_2 und C_1 C am rechten Teil aus C_2 und $-C_1$

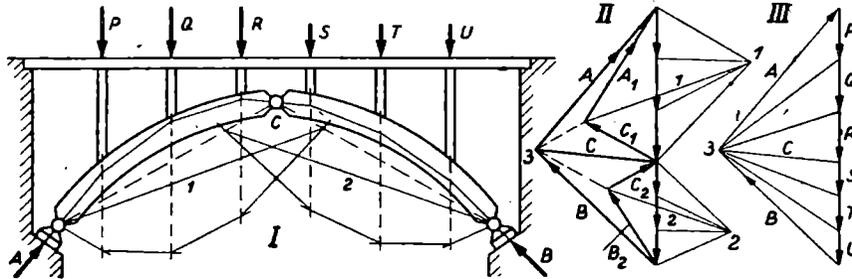


Fig 221. Stützlinien im Dreigelenkbogen

353. Druck im Bogen. Der Bogenteil zwischen A und P ist durch die Auflagerkraft A belastet. Auf den Teil zwischen P und Q — man denke sich dort eine „Fuge“ wie in Nr 351, einen „Schnitt“, wie beim Ritter'schen Verfahren (Nr 234) — wirkt die Resultante von A und P , konstruiert im Kräfteplan III, gelegt durch den Schnittpunkt von A und P in I. Ebenso wird der Abschnitt zwischen Q und R durch die Resultante aus A P Q , der nächste durch die Resultante aus A P Q R , das ist C , belastet.

So entsteht ein Seileck mit dem Pol 3, das die 6 gegebenen Kräfte umfaßt und durch die 3 Gelenke geht. Jeder Seilstrahl bedeutet den Druck in dem betr Bogenteil; wie bei den Hängewerken Nr 81; 86 und beim Gewölbe Nr 351. Liegt der Seilstrang in der Mitte des betr Bogenteiles, so erfährt dieser gleichmäßigen Druck. Liegt er aber näher dem oberen Rand, zB zwischen Q und R , so ist oben der Druck größer, unten kleiner, vielleicht sogar Zug. Dies wird in der „Festigkeitslehre“ berechnet.

Unter allen unendlich vielen Seilecken, die zu den Belastungen gezeichnet werden können, ist das durch die 3 Gelenke gehende dasjenige, welches die Beanspruchung des Bogens zum Ausdruck bringt. So entsteht die Aufgabe: Ein Seileck durch 3 gegebene Punkte zu legen. Wir lösten sie in Nr 352, indem wir die Teile einzeln behandelten. Es geht auch ohne solche Zerlegung.

354. Vergleich verschiedener Seilecke. Wir studieren zuvor die Beziehungen zwischen verschiedenen Seilecken desselben Kraftsystems: In Fig 222 sind zu den Kräften $P_1 P_2 P_3$ zwei Seilecke „S“ und „T“ mit den Bezeichnungen von Nr 81; 86 gezeichnet. — Man bemerkt, daß die Schnittpunkte entsprechender Seilstränge auf einer Geraden „Z“ liegen.

I. Nach dem Kräfteplan ist jeder Seilstrahl T Resultante des entsprechenden S und einer Kraft Z , die gleich der Verbindungslinie der Pole ist. Das gilt nicht nur der Größe, sondern auch der Lage nach: Im Lageplan sind nämlich die Seilstränge konstruiert als Angriffslinien der Kräfte nach dem Schnittpunktsatz:

Es ist S_{34} Resultante von $S_{01} P_1 P_2 P_3$
 T_{34} „ „ $T_{01} P_1 P_2 P_3$
 Nun ist T_{01} „ „ S_{01} und der Kraft Z in der Linie Z
 Also ist T_{34} „ „ $Z S_{01} P_1 P_2 P_3$ also von Z und S_{34}

Also geht T_{34} auch durch den Schnittpunkt von Z und S_{34}

Entsprechende Seilstränge zweier zu gleichen Kräften gehörender Seilecke schneiden einander auf einer Linie, die der Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist.

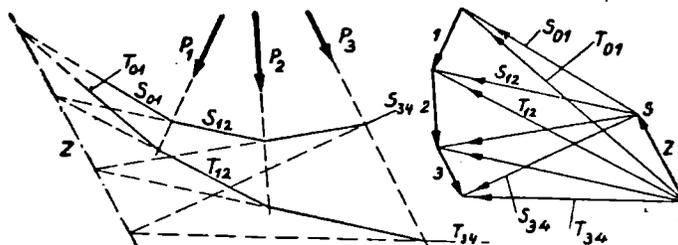


Fig 222. Beziehung zwischen 2 Seilecken

II. Liegt ein Seileck gezeichnet vor, so kann man hiernach ein anderes zeichnen, ohne erst die neuen Seilstrahlen im Kräfteplan und die Parallelen zu ziehen: Man wählt eine Linie Z im Lageplan, bringt die alten Seilstränge mit ihr zum Schnitt und zieht von diesen Schnittpunkten aus die neuen Seilstränge: einen beliebig, die andern nach den entsprechenden Schnittpunkten auf den Angriffslinien der gegebenen Kräfte.

355. Seileck durch 3 Punkte. Zu den Kräften P und Q in Fig 223 soll ein Seileck gezeichnet werden, welches durch A , über P , durch C , über Q , durch B geht.

Man zeichnet zuerst ein beliebiges Seileck S , das durch A geht. An C und B wird es dann noch vorbeigehen. Dann zeichnet man ein zweites Seileck T nach Nr 354 mittels einer Schnittpunktlinie I durch A . Dann kann man erreichen, daß es auch durch C geht. Nun nimmt man AC als Schnittpunktlinie II , so daß also A und C festliegen, und zeichnet ein drittes Seileck U , nun auch durch B .

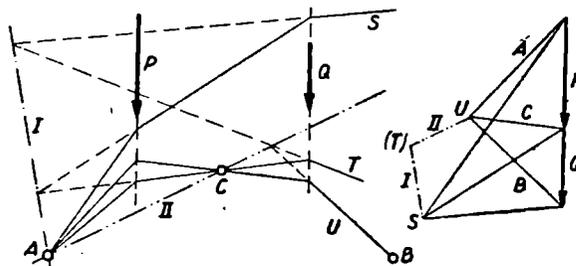


Fig 223. Seileck durch 3 Punkte

Für das Seileck T braucht man den Kräfteplan nicht zu zeichnen. Nur zur Erläuterung ist in der Figur der Pol T in seiner Lage zu S und U gezeichnet. Erst zum Schluß bildet man die zum Seileck U gehörenden Seilstrahlen im Kräfteplan, um ABC zu erhalten.

356. Aufgabe (Dreigelenkbogen). Bei dem Dreigelenkbogen Nr 352 Fig 221 sei $P=Q=R=12$ $S=T=U=8$ to Spannweite = 15,0 Pfeilhöhe = 4,2 Abstände der Lasten voneinander = 2,4 m. Zeichne die Stützlinie nach Nr 353 und nach Nr 355. Berechne ABC nach Nr 225.

357. Kreuzgewölbe. Zwei „Tonnengewölbe“, die einander senkrecht überschneiden, ergeben ein „Kreuzgewölbe“ (Fig 224), mit dem zB ein Keller überwölbt ist. Die Ecken $ABCD$ stehen auf Säulen. Das Gewölbe sei mit Erde überschüttet. Die Stützlinien, in der Figur dünn eingezeichnet, verlaufen in jeder der 4 Gewölbeschalen wie in dem Gewölbe Nr 351. Sie treffen einander auf den Schnittlinien AMC bzw BMD und vereinigen dort ihre Kräfte zu einer Resultante. Die Gewölberippen bilden dann wieder eine Stützlinie für diese Resultanten und übertragen so die Kräfte auf die Säulen.

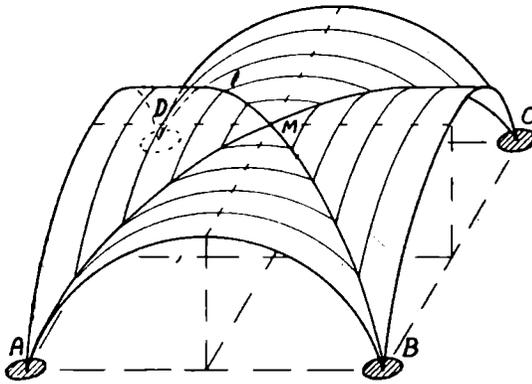


Fig 224. Kreuzgewölbe

Die Kreisform der Stützlinien ist angemessen, wenn der Erddruck gleichmäßig und \perp Gewölbe wirkt. Bei vertikaler Belastung dagegen, zB Eigengewicht des Gewölbes, müßte die Stützlinie eine Parabel oder eine ähnliche Kurve sein. Die Endtangentialen müssen dann schief

stehen. Das Gewölbe übt einen Seitenschub aus: die Horizontalkomponente H im Kräfteplan Fig 46. Bei den mitten im Raum stehenden Säulen heben diese Horizontalkräfte einander auf. Außen bleiben sie bestehen. Wenn hohe Hallen überwölbt werden, so muß dieser Seitenschub durch Strebepfeiler aufgenommen werden.

Je größer die Pfeilhöhe im Vergleich zur Spannweite, um so kleiner ist der Seitenschub; beim Spitzbogen kleiner als beim Rundbogen. Daß man in der Gotik statt einer Parabel 2 Kreisbögen nahm, die eine Ecke miteinander bilden, ist statisch nicht begründet. Der Ecke der Stützlinie müßte eine Einzellast entsprechen im Gegensatz zur verteilten Last über der Krümmung. Aber dieser Fehler schadet auch nicht viel, denn das Hallengewölbe trägt ja nur sein Eigengewicht, das Dach wird durch einen besonderen Dachstuhl getragen. Das Gewölbe ist nur eine feuersichere Schale zwischen Hallenraum und Dachstuhl. Bei Brücken, die große Lasten zu tragen haben, wäre ein Spitzbogen unmöglich (Fig 220 VI).

358. Kuppel. Die Kuppel Fig 225 (I Aufriß II Grundriß) ist als Fachwerk ausgebildet (Schwedlersche Kuppel).

I. Sie hat 24 Knotenpunkte, die nicht im Fundament (Mauerring) liegen; braucht also $3n = 72$ Stäbe (Nr 243): 24 Umfangsstäbe U , ohne die im Fundament liegenden U_0 , 24 Seitenstäbe S , 24 Diagonalen D . Die Kuppel ist also statisch bestimmt. Innerhalb des oberen Ringes brauchen also keine Stäbe zu liegen. (Vergl Gittermast Nr 243.)

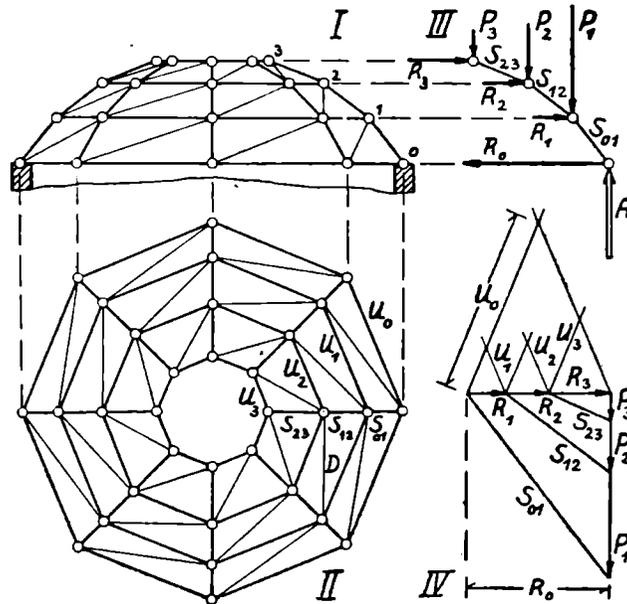


Fig 225.
Kuppel

II. Die Belastung sei rundum gleichmäßig: auf allen Punkten des unteren Ringes je P_1 , des zweiten P_2 , des dritten P_3 . Dann sind die Diagonalen nicht beansprucht. Es genügt dann, einen Meridianschnitt (Fig III) zu untersuchen. Die waagerechten Umfangsstäbe U haben an jedem Knotenpunkt eine waagerechte Resultante R , nach außen wenn Druck. Die Belastung P eines Knotenpunkts ist im Gleichgewicht mit dieser Resultante und den angrenzenden Seitenstabkräften S (Fig IV):

Am Punkt 3 sind im Gleichgewicht $P_3 \downarrow R_3 \rightarrow S_{23} \nearrow$

Die Stäbe des oberen Ringes erfahren also Druck.

Am Punkt 2 sind im Gleichgewicht $P_2 \downarrow R_2 \rightarrow S_{23} \searrow S_{12} \nearrow$

„ „ 1 „ „ „ $P_1 \downarrow R_1 \rightarrow S_{12} \searrow S_{01} \nearrow$

III. Hiernach wird der Kräfteplan IV konstruiert: Man trägt die P untereinander an, zieht durch die Pfeilspitzen Parallele zu den S . Diese schneiden die R ab auf der Waagerechten durch den Anfangspunkt von P_3 . Jedes R wird dann zerlegt in zwei Kräfte U , die je mit R den Winkel $67^\circ 30'$ bilden. (Vergl Nr 96 I.) Dieser Teil des Kräfteplans ist im Grundriß zu denken, die P und S im Aufriß.

Ob die U Zug oder Druck erhalten, hängt von der Größe der P ab. Die S können einander auch kreuzen, ehe sie die Waagerechte erreichen. S_{01} wirkt auf den Mauerring \searrow . Liegen in diesem Stäbe U_0 , so erhalten sie Zug; und die Mauer trägt nur die \downarrow Last $P_1 + P_2 + P_3$. Andernfalls wird auf die Mauer ein Seitenschub nach außen ausgeübt.

IV. Die Form des Meridianschnitts ist beliebig; im Gegensatz zum Tonnengewölbe (Nr 351), welches der Lastverteilung entsprechen mußte. (Vergl Nr 81.) Das liegt an den Umfangsstäben. Beim Seileck müssen $P_2 S_{23} S_{12}$ miteinander im Gleichgewicht sein. Hier dagegen nimmt die Resultante R den Unterschied auf: Sie schließt das Kraffleck mit Zug oder Druck je nach der Größe der P und der Richtung der S : je nach der Belastung und der Gestalt des Meridians.

359. Bewegliche Last. Während der Überfahrt eines Eisenbahnzuges über eine Brücke oder einer Krankatze über einen Laufkran ändert sich die Beanspruchung jedes einzelnen Stabes. Fig 226 zeigt einen Normalzug, der der Berechnung von Eisenbahnbrücken zu Grunde gelegt wird. Die angegebenen Achsdrucke sind in Abständen von je 1,5 m oder einem Vielfachen davon angenommen. Zwei solche Lokomotiven und Tender und beliebig viele

Wagen dahinter muß man in allen möglichen Stellungen auf der Brücke annehmen, muß jedesmal die Auflagerkräfte und die Stabkräfte konstruieren oder berechnen und so für jeden Stab

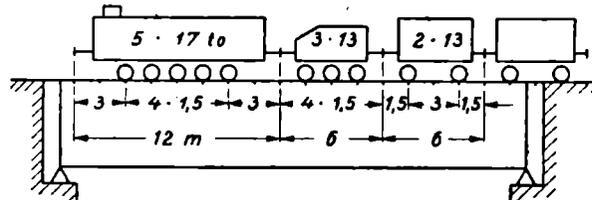


Fig 226. Normalzug

die größte Beanspruchung herausfinden. Diese wird für jeden Stab bei einer anderen Laststellung eintreten. Eine umfangreiche Aufgabe! Es kommt darauf an, wie man sich diese Arbeit einteilt.

Der Wert einer Stabkraft ist eine Summe von Anteilen der einzelnen Lasten. Man nimmt deshalb zunächst nur eine Last P auf der Brücke an und trägt die Stabkräfte im Verhältnis zu P abhängig von der Stellung der Last auf. Am Verlauf dieser Kurven übersieht man den Einfluß jeder irgendwo stehenden Last auf die betr Stabkraft. Man kann die Anteile der Lasten abgreifen und addieren. Man gewinnt ein Urteil, bei welcher Stellung des Zuges diese Summen am größten werden.

360. Brücke mit parallelen Gurten, Auflagerkräfte. Eine Brücke bestehe aus 2 Fachwerkwänden wie Fig 227. Über die Brücke führt eine eingleisige Eisenbahn. Man wird dann zunächst die Stabkräfte für die festen Lasten, Eigengewicht und Oberbau, vermittels eines Kräfteplans feststellen. — Als bewegliche Last nehmen wir der Einfachheit halber nur die Lokomotive von Fig 226 an. Jeder Träger ist dann mit der Hälfte der Achsdrucke: 5 mal 8,5 to in je 1,5 m Abstand belastet.

Nun stehe eine Last P in der Entfernung x von A ; x' von B . Dann sind die Auflagerkräfte $A = \frac{Px'}{l}$ $B = \frac{Px}{l}$ Sie sind proportional P .

Die Faktoren von P sind die Auflagerkräfte pro Einheit der Last

$$\text{zB für } \left. \begin{array}{l} x = 21 \text{ m} \\ x' = 9 \text{ m} \end{array} \right\} \frac{A}{P} = \eta_A = \frac{x'}{l} = 0,30 \frac{\text{to}}{\text{to}} \quad \frac{B}{P} = \eta_B = \frac{x}{l} = 0,70 \frac{\text{to}}{\text{to}}$$

Wir tragen sie auf abhängig von der Laststellung (Fig 227). Sie sind gerade Linien und ergänzen einander an jeder Stelle zu 1. Man sieht: je weiter die Last vom Auflager entfernt steht, um so kleiner ist ihr Einfluß auf diese Auflagerkraft. Für den ganzen Lastzug erhält man die Auflagerkraft, indem man unter jeder Last den Wert η , die „Einflußzahl“ abgreift, mit der Last multipliziert und die Produkte addiert.

$$A = \Sigma P \eta_A \quad B = \Sigma P \eta_B$$

Das größte A ergibt sich, wenn die erste Last gerade über dem Auflager steht, ehe sie die Brücke verläßt.

$$A_{max} = 8,5 \text{ to} (1 + 0,95 + 0,90 + 0,85 + 0,80) \text{ to/to} = 38,25 \text{ to}$$

Dazu den Anteil der festen Lasten.

361. Stabkraft 6. Für die eine Last P ist

wenn P rechts von D steht: wenn P links von C steht:

$$S_6 = \frac{A x_6}{h} = \frac{P x' x_6}{lh} \quad S_6 = \frac{B x_6'}{h} = \frac{P x x_6'}{lh}$$

Der Faktor von P , die Stabkraft pro Einheit der Last, die Stabkraft für $P = 1$ to, wird unter der Laststellung aufgetragen (Fig 227):

$$\text{rechts von } D: \quad \eta_6 = \frac{x_6 x'}{hl} \quad \text{links von } C: \quad \eta_6 = \frac{x_6' x}{hl}$$

Diese Einflußzahl ist proportional zu x' bzw x , weil A und B zu diesen proportional sind. Es genügt, von jeder Geraden einen Punkt auszurechnen, am einfachsten

$$\text{für } x' = l: \quad \text{Endwert der rechten Geraden} = x_6/h = 1,667 \text{ to/to}$$

$$\text{für } x = l: \quad \text{Endwert der linken Geraden} = x_6'/h = 3,889 \text{ to/to}$$

übrigens außerhalb des Gültigkeitsbereichs der betr Geraden. Die Geraden schneiden einander unter dem zur Berechnung von P benutzten Gelenk ($\eta = 1,167$). Denn wenn P dieses Gelenk belastet, so ist es gleichgültig, zu welchem Teilkörper P gerechnet wird.

Steht die Last zwischen den Punkten C und D , so belastet sie vermittels des Gleises die Querträger C und D und damit beide Knotenpunkte je zum Teil. Solange P noch rechts von D liegt, ist (von links berechnet) $S_6 = A x_6/h$, entsprechend der rechten Geraden von Fig 227. Rückt P nun auf die Zwischenstrecke, so muß von $A x_6$ das Moment des auf C fallenden Lastanteils abgezogen werden. Dieser ist proportional zum Abstand des P von D . S_6 wird also eine anschließende, schwächer geneigte

Gerade. Dasselbe gilt für den Anschluß bei C . Für die Strecke CD ist η_6 also die Verbindungsgerade der beiden Anschlußpunkte. Der Einfluß von P auf S_6 ist also am größten, wenn P in D steht.

Für den ganzen Lastzug ist als Summe der Anteile $S_6 = \Sigma P \eta_6$.

Man muß nun den Lastzug, im Beispiel die Lokomotive so über diese „Einflußlinie“ stellen, daß $\Sigma P \eta_6$ möglichst groß wird. — Ein Maximum ist nur bei solcher Laststellung zu erwarten, wo einer der Raddrucke über einer Ecke der η -Linie steht. So lange das nämlich nicht der Fall ist, nehmen die η -Zahlen einzeln proportional zur Verschiebung des Zuges zu oder ab. Auch $\Sigma P \eta$ nimmt also geradlinig zu oder ab. Der Wert kann nur dann vom Steigen zum Fallen übergehen, wenn einer der benutzten η -Werte auf ein anderes Geradenstück übergeht. Es kommen also praktisch nur wenige Laststellungen in der Nähe der größten η -Werte in Betracht. Das Maximum tritt ein, wenn die dritte oder die vierte Last auf D über dem rechten Knick der Einflußlinie steht.

Dann wird zB für die erste Last abgemessen $\eta_6 = 0,833$ to/to

$$S_{6max} = 8,5(0,833 + 0,889 + 0,944 + 1,000 + 0,917) = 39,0 \text{ to } Z$$

362. Stabkräfte 7 und 8. Stabkraft 7 ist nach Fig 228 aus Komponentengleichungen zu berechnen (+Zug; — Druck):

wenn P rechts von D steht:

wenn P links von C steht:

$$S_7 = \frac{A}{\sin \alpha} = \frac{P x'}{l \sin \alpha}$$

$$S_7 = \frac{-B}{\sin \alpha} = \frac{-P x}{l \sin \alpha}$$

$\alpha = 60^\circ 57'$ Einflußzahlen und Endwerte sind also (Fig 228)

rechts von D : $\eta_7 = \frac{x'}{l \sin \alpha}$

links von C : $\eta_7 = \frac{-x}{l \sin \alpha}$

für $x' = l$: $1/\sin \alpha = 1,144$

für $x = l$: $-1/\sin \alpha = -1,144$

Für Stellungen zwischen C und D gilt wieder eine Übergangsgerade.

Der größte Zug in 7 entsteht bei der Stellung der Lasten, die über der Einflußlinie gezeichnet ist:

$$S_{7max} = 8,5 \cdot (0,458 + 0,686 + 0,629 + 0,572 + 0,515) = 24,3 \text{ to } Z$$

der größte Druck bei der darunter gezeichneten Stellung:

$$S_{7max}' = 8,5 \cdot (0,057 + 0,114 + 0,172 + 0,229 + 0) = 4,9 \text{ to } D$$

Für die Druckkraft S_8 ist die Einflußlinie nach unten aufgetragen (Fig 228). Wie bei S_6 sind die beiden Geraden aus ihren Endwerten gezeichnet. Eine Übergangslinie besteht hier nicht, da P beim Überschreiten des für S_8 gültigen Gelenks unmittelbar vom einen auf den anderen Teilkörper übergeht.

$$S_{8max} = 8,5 \cdot (1,000 + 1,167 + 1,333 + 1,222 + 1,111) = 49,6 \text{ to } D$$

Liegt die Fahrbahn oberhalb der Brücke, sind also die Querträger an den Knotenpunkten des Obergurts befestigt, so hat η_8 eine Übergangslinie und η_6 nicht.

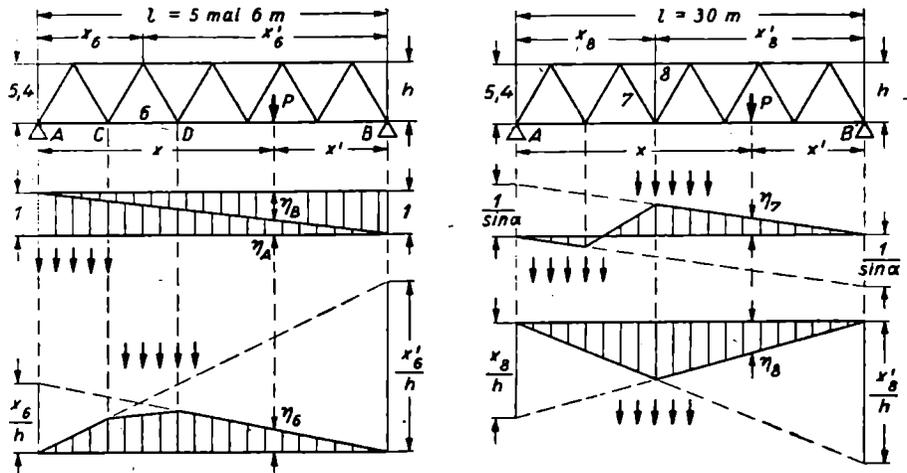


Fig 227 228. Verlauf der Stabkräfte bei wandernder Last

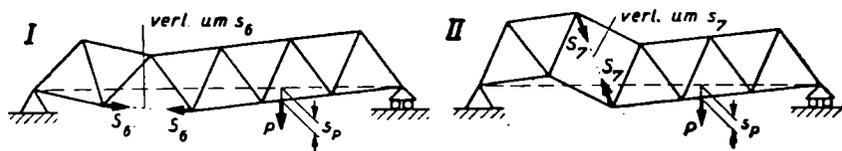


Fig 229. Einflußlinie aus Arbeitssatz

363. Begründung vom Standpunkt des Arbeitssatzes. Den Einfluß der Last P auf eine Stabkraft kann man nach Nr 259 auch aus dem Arbeitssatz berechnen: Man denkt sich (Fig 229 I) den Stab 6 um einen kleinen Betrag s_6 verlängert. Dann knickt das Fachwerk in dem gegenüberliegenden Gelenk ein und P sinkt um s_P . Dann ist nach dem Arbeitssatz:

$$\text{Stabkraft} = S_6 = \frac{P s_P}{s_6} \quad \text{Einflußzahl} = \eta_6 = \frac{s_P}{s_6}$$

Man sieht, daß der Wert von s_P für verschiedene Stellungen von P der Einflußlinie von Fig 227 entspricht; einschließlich der Übergangslinie. Die Berechnung von s_P/s_6 müßte nun aus geometrischen Betrachtungen über die kleinen Verschiebungen erfolgen (Nr 254 ÷ 264). Einfacher bleibt die statische Berechnung der Stabkräfte. Der Arbeitssatz gibt eine Anschauung über Verlauf und Vorzeichen der Kräfte eher als eine Methode zur Berechnung derselben. (Vergl Nr 263; 302.)

Denkt man sich in gleicher Weise den Stab 7 um s_7 verlängert, so wird das Fachwerk wie Fig 229 II verzerrt. Da Stab 7 Parallelogrammdiagonale ist, so bleiben die Untergurttteile parallel zueinander. Der linke Teil hebt sich, der rechte sinkt. Dazwischen besteht eine Übergangslinie. Alles entsprechend der η_7 -Linie von Fig 228.

Denkt man sich ebenso Stab 8 verlängert, wobei die Druckkraft S_8 Arbeit leistet, so hebt sich das Fachwerk. Es entsteht aber keine Übergangslinie in der Bahn der Last auf dem Untergurt.

364. Konstruktion der Endwerte der Einflußlinien. In Nr 361; 362 hatten wir die Endwerte der verlängerten Geraden berechnet. Es war zB für Stabkraft 6) rechts von D) $\eta_6 = \frac{x_6 x'}{hl}$ für $x' = l$: Endwert links = $\frac{x_6}{h}$

außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Geraden. $x' = l$ hieße ja, daß P , den rechten Teilkörper belastend, bei A liegt. — Das ist aber doch nicht unmöglich (Fig 230 I): P , unter A liegend, kann den rechten Teil vermittels eines Hilfsauslegers belasten. Dann ist $A = P$. Der „Endwert links“ ist also der Wert von S_6 für $A = P = 1$ to, ohne weitere Belastung des linken Teils. Der Hilfsausleger ist in Fig 230 I so weit rechts angebracht, damit die Vorstellung auch für die weiteren Stäbe gilt.

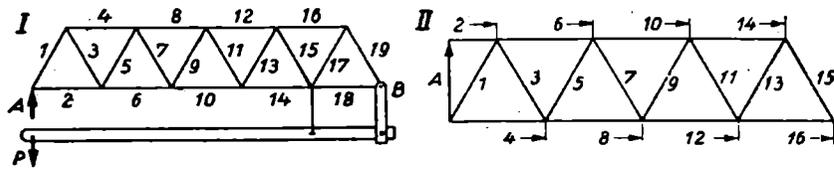
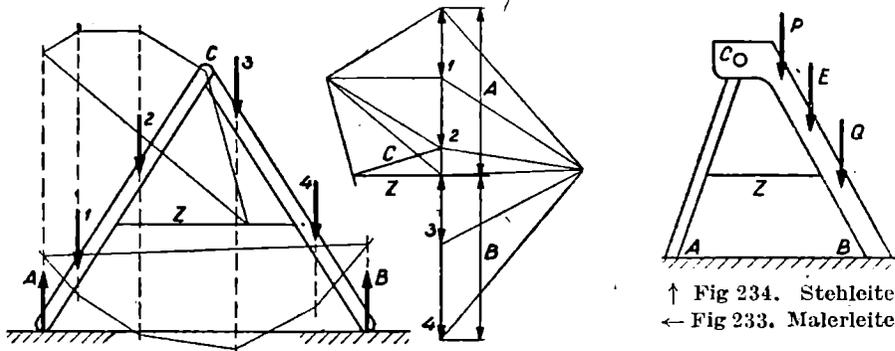


Fig 230. Konstruktion der Endwerte

Wir denken uns also das Fachwerk links mit $A = P = 1$ to belastet, rechts festgehalten, „eingespannt“. Dazu konstruieren wir den Cremona-plan Fig II. Die Stabkräfte dieses Plans sind dann die linken Endordinaten der rechten Geradenstücke; übrigens im doppelten Maßstab der Auftragungen Fig 227; 228. — Die Stabkräfte 17 18 19, die von der Art der Einspannung abhängen, braucht man nicht mehr. Für diese kommen rechts nur noch Übergangskurven in Frage.

Ebenso konstruiert man, mit $B = P = 1$ to beginnend, die rechten Endwerte der linken Kurvenzweige. Der Plan ist, bis auf die Stabnummern, gleich dem A -Plan.

365. Brücke mit gebogenem Obergurt. Für das Fachwerk Fig 231 sollen $\eta_3 \eta_7 \eta_8$ gezeichnet werden. Die wandernde Last P mit den Koordinaten x von links, x' von rechts ist nicht mehr mitgezeichnet.



↑ Fig 234. Stehleiter
← Fig 233. Malerleiter

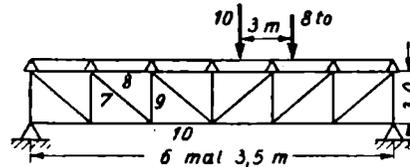
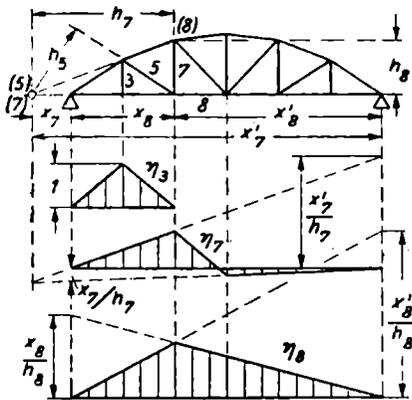
Stab 3 wird nur belastet, solange P in den Abschnitten neben 3 steht. Der Größtwert von S_3/P ist $\eta_3 = 1$

Stab 7 wird nach Nr 238 berechnet aus der Momentengleichung für Gelenk (7). Nach Berechnung der Auflagerkräfte ergibt sich

rechts von Stab 8: $\eta_7 = \frac{-x_7 x'}{h_7 l}$ links von Stab 8: $\eta_7 = \frac{x_7' x}{h_7 l}$

Diese Geraden schneiden einander unter dem Gelenk (7). Die Übergangslinie liegt unter Stab 8, denn der „Schnitt“, aus dem S_7 berechnet wird, schneidet Stab 8.

Bei Stab 8 fällt die Übergangslinie in die Verlängerung der rechten Geraden, weil das Gelenk (8) und damit der Schnittpunkt der beiden äußeren Geraden über dem linken Stabende liegt. Oder: Wenn P zwischen den Endpunkten von Stab 8 steht, so hat der Belastungsanteil des linken Querträgers keinen Einfluß auf die Berechnung der Stabkraft.



↑ Fig 232. Kranträger

← Fig 231. Brücke mit gebogenem Obergurt, Einflußlinien

366. Aufgabe (Brücke mit gebogenem Obergurt). Die Brücke Fig 231 habe Spannweite = $6 \cdot 3,0$ m Höhe = $3,6$ m. I. Berechne die Einflußlinie für Stab 5. — II. Konstruiere den Kräfteplan für die Endwerte nach Nr 364.

367. Aufgabe (Kranträger). Auf der Brücke Fig 232] fährt ein Kran, der die Schiene mit Raddrücken von 10 to und 8 to in 3 m Abstand voneinander belastet. — I. Zeichne die Einflußlinien und berechne danach die größten Werte der Stabkräfte 7 8 9 10, abgesehen vom Einfluß des Eigengewichts des Trägers. — II. Berechne auch den Anteil des Eigengewichts an diesen Stabkräften nach Nr 242. Die Gurtstäbe wiegen je 40 kg/m , die Diagonalen je 30 kg/m . Die Fahrbahn belastet die Knotenpunkte des Obergurts mit je 200 kg .

368. Malerleiter. Die Leiter Fig 233 ist mit 4 Personen belastet und auf reibungslosem Boden durch A und B gestützt. Die beiden Teile stützen einander mit den Kräften C im Gelenk, Z in der Verbindungsschnur. In Nr 226/227 wurden solche Aufgaben berechnet aus dem Gleichgewicht des Ganzen und dem der Teile.

Wir konstruieren hier zunächst A und B mittels des unteren Seilecks für alle Lasten. C und Z sind dabei innere Kräfte. — Danach betrachten wir einen Teil, zB den linken, als mit A 1 2 belastet, durch C und Z gestützt. Wir bilden ein neues Seileck, welches diese Kräfte in der Reihenfolge C 2 1 A Z umfaßt. Im Kräfteplan schließt also C an 2 und Z an A an. Z in bekannter Richtung, C ganz unbekannt. Das Seileck muß also (Nr 169) im „festen Lager“ C beginnen und auf der Angriffslinie von Z enden. Von hier geht die Schlußlinie nach C zurück. Durch die Parallele zur Schlußlinie wird Z auf der Linie bekannter Richtung ausgeschnitten. C schließt das Krafteck. — Ein drittes Seileck für den rechten Teil muß dasselbe C und Z ergeben.

369. Aufgabe (Stehleiter). Die Stehleiter Fig 234 ist durch PQ und E (Eigengewicht) belastet. Konstruiere die Stützkkräfte A B C Z . — Man kann wie in Nr 368 mit A B beginnen. — Man kann auch zunächst nur die Richtung von C festlegen (Schnittpunktsatz am linken unbelasteten Teil). Dann ist der rechte gestützt durch 3 Kräfte von bekannten Angriffslinien (Nr 174).

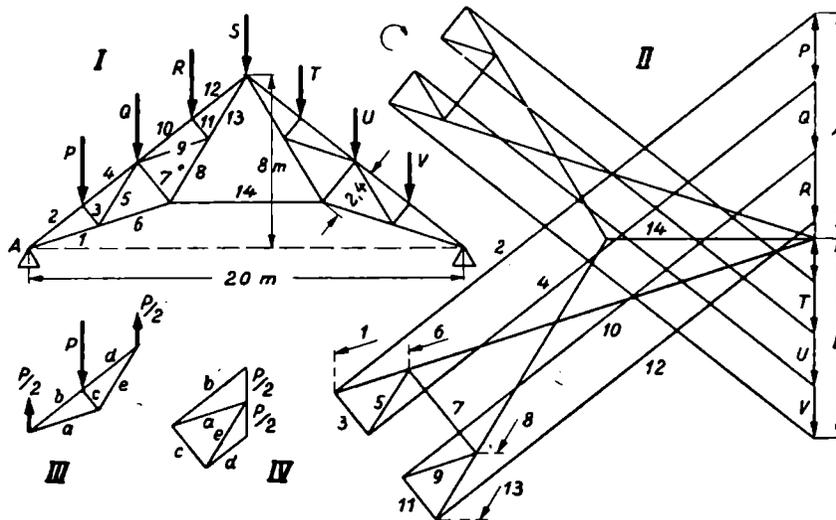


Fig 235. Doppelter Polonceaubinder

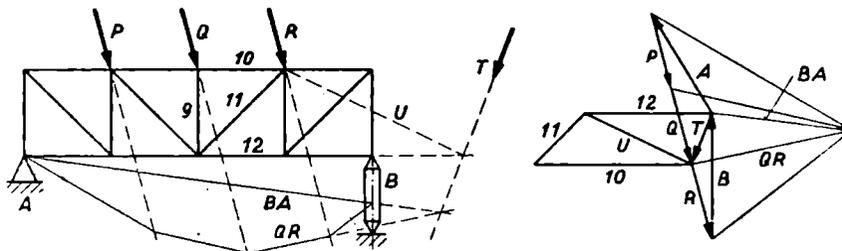


Fig 236. Konstruktion einer bestimmten Stabkraft

370. Doppelter Polonceaubinder. In Nr 186 sollte der Cremona-plan des Dachbinders Fig 133 konstruiert werden. — Bei größeren Spannweiten braucht man mehr Knotenpunkte in der Dachfläche zur Auflagerung der Längsträger (Pfetten). So entsteht der „doppelte Polonceaubinder“ Fig 235. Seine Gestalt ist gegeben durch Spannweite = 20 m Höhe = 8 m Mittellot auf der Seitenfläche = 2,4 m. Er trage links größere Lasten (Schneelast) als rechts: $P = Q = R = 4 \text{ to}$ $S = 3,5 \text{ to}$ $T = U = V = 3 \text{ to}$. Wir wollen den Cremona-plan konstruieren.

Nach Konstruktion von $A B$ mittels eines nicht mitgezeichneten Seilecks beginnen wir den Plan II bei \curvearrowright Umlaufsinn mit den Kraftecken $A 2 1 2 P 4 3 1 3 5 6$. Dann aber können wir nicht weiter fortfahren, da in den Kraftecken $5 4 Q 10 9 7$ und $6 7 8 14$ je 3 Unbekannte auftreten. — Man konstruiert dann S_{14} , welches die beiden dreieckigen Scheiben zusammenhält, durch ein besonderes Seileck wie Nr 368 (in Fig 235 weggelassen). Dann kann man weiterkonstruieren. Die Kontrolle, die der Vorwegnahme der Konstruktion von S_{14} entspricht, kommt beim Entwurf der Kraftecke $10 R 12 11$ oder $8 9 11 13$, je nachdem, welches von den beiden man zuletzt zeichnet (Nr 184 I). — Beim vorletzten Krafteck des ganzen Planes kommt dann eine zweite Kontrolle, weil man A und B vorweg konstruiert hat.

Man kann die Sonderkonstruktion von S_{14} vermeiden, wenn man nach Konstruktion von $1 2 3 4 5 6$ die Stabkraft 7 so lang zeichnet, daß sie bis zur Mitte der Linien 10 und 12 reicht.

371. Hilfstragwerk. Man kann die Behandlung des doppelten Polonceaubinders auf die des einfachen (Nr 186) zurückführen: Man denkt sich Fig 235 I durch Wegnahme der Stäbe $3 5 9 11$ usw zu einem einfachen Polonceaubinder umgestaltet. Dafür unterstützt man $P R T V$ je durch ein „Hilfstragwerk“ wie Fig III, denkt sich dieses auf den entsprechenden Knotenpunkten des einfachen Polonceaubinders aufgelagert und dort mit je $\frac{1}{2} P \uparrow$ gestützt. Dann belastet es diese umgekehrt mit je $\frac{1}{2} P \downarrow$. Die Lasten $P R T V$ werden also je zur Hälfte auf die angrenzenden Knotenpunkte des einfachen Polonceaubinders „verteilt“. (Vergl Nr 242.)

Nun kann für diesen ein Kräfteplan wie in Nr 186 gezeichnet werden, eine Vorwegnahme der Konstruktion von S_{14} (dort S_6). Die Stabkräfte des Hilfstragwerks ergeben sich aus Plan IV. Wo Stäbe des Haupttragwerks und des Hilfstragwerks zusammenfallen, werden die Kraftanteile addiert bzw subtrahiert.

372. Aufgabe (Doppelter Polonceaubinder). Zeichne den Kräfteplan Fig 235 maßstäblich, einschließlich der Konstruktionen von $A B$ und S_{14} . Berechne S_{14} und vergleiche mit der Konstruktion.

373. Konstruktion einer bestimmten Stabkraft. Nach Cremona bestimmt man die Stabkräfte nacheinander, von einem Ende beginnend. Will man nur eine bestimmte Stabkraft konstruieren, zB S_{12} in Fig 236, so denkt man sich das Fachwerk aus 2 Teilen bestehend, die

durch die Stäbe 10 11 12 miteinander verbunden sind. (Vergl Ritter'sches Verfahren Nr 234.) Der linke Teil ist dann durch $A P Q$, der rechte durch $R B$ belastet. Sie stützen einander durch $S_{10} S_{11} S_{12}$. Diese 3 Stützkkräfte sind dann zu bestimmen wie in Nr 141 oder 174 (Culmann).

I. Wir konstruieren zunächst A und B durch ein Seileck. Dann suchen wir die Resultante T von $A P Q$ bzw $R B$. Richtung und Größe ergibt sich im Kräfteplan. Die Angriffslinie geht durch den Schnittpunkt der Seilstränge $Q R$ und $B A$. Dies sind nämlich die „äußersten Stränge“ eines Seilecks, welches nach Nr 162 die Kräfte $A P Q$ zusammenfaßt. — Irgend 2 Seilstrahlen eines Seilecks ergeben durch ihren Schnittpunkt die Angriffslinie der Resultante der zwischen ihnen liegenden Kräfte. — Die so gewonnene Angriffslinie von T schneiden wir mit S_{12} . Dorthin zielt die Kraft U im Gelenk 10/11. Nun ergeben sich die Größen von S_{12} und U im Kräfteplan anschließend an T . U ist dann noch in S_{10} und S_{11} zerlegt.

II. Liegen die zu benutzenden Schnittpunkte zu weit weg, so muß man auf die Bildung der Resultante T verzichten. Man faßt dann $A P Q$ bzw $R B$ durch ein besonderes Seileck zusammen, welches von dem Schnittpunkt 10/11 ausgeht und auf S_{12} einschneidet. (Vergl auch Nr 368; 370.) — Man kann auch die Seilkräfte $B A$ und $Q R$ als Ersatz für $A P Q$ betrachten und über sie ein neues Seileck erstrecken. — Das Verfahren ist nicht für alle Stäbe durchführbar. (S_0 !)

374. Aufgabe (bestimmte Stabkraft). Konstruiere hiernach einige Stabkräfte des Fachwerks Nr 179 Fig 128 und vergleiche das Ergebnis mit dem Cremona'plan. — Ebenso die Stabkräfte 7 8 9 10 mit den Maßen und Kräften aus Nr 183 Fig 131.

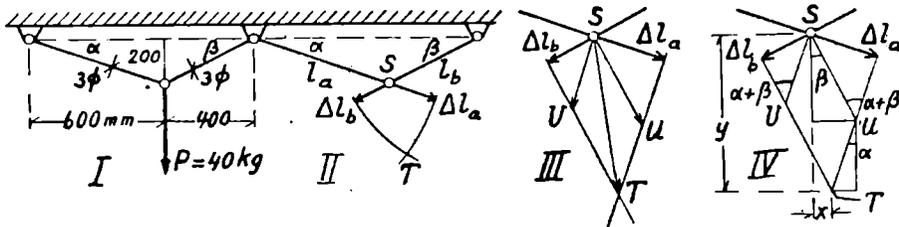


Fig 237. Verschiebung eines Knotenpunkts

375. Verschiebung eines Knotenpunkts. In Nr 105 berechneten wir die Senkung eines Knotenpunkts bei symmetrischer Aufhängung an 2 Stahldrähten. Bei unsymmetrischer Aufhängung (Fig 31) tritt auch noch eine seitliche Verschiebung auf. Wir berechnen zunächst:

die Winkel	$\alpha = 18^{\circ}26'$	$\beta = 26^{\circ}33'$
die Drahtlängen	$l_a = 632 \text{ mm}$	$l_b = 447 \text{ mm}$
die Kräfte	$A = \frac{P \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 50,6 \text{ kg}$	$B = \frac{P \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 53,7 \text{ kg}$
die Verlängerungen	$\Delta l_a = 0,216 \text{ mm}$	$\Delta l_b = 0,162 \text{ mm}$

I. Die neue Lage des Knotenpunkts S (Fig II) ergibt sich als Schnittpunkt T zweier Kreisbögen mit den Längen $l_a + \Delta l_a$ bzw $l_b + \Delta l_b$ um die Aufhängepunkte. Die Berechnung des Dreiecks mit diesen Längen müßte sehr genau geschehen, um die in Wirklichkeit kleinen Unterschiede festzustellen. Wir rechnen wie in Nr 105 II mit den Änderungen selbst, indem wir die Kreisbogenstücke als gerade und $\perp \Delta l$ betrachten (Fig III). Die Verschiebung des Knotenpunkts ist dann Diagonale eines Vierecks mit 2 rechten Winkeln — nicht etwa Resultante von Δl_a und Δl_b . — Besteht nämlich Δl_a allein, Δl_b nicht, so verschiebt sich S nach dem Schnittpunkt der Kreisbögen mit $l_a + \Delta l_a$ und $l_b + 0$ um die Aufhängepunkte, also nach U in Fig III. Besteht Δl_b allein, so verschiebt sich S nach V . Von diesen Verschiebungen SU und SV ist ST Resultante.

II. Wir berechnen die Senkung $\downarrow y$ und die Seitenverschiebung $\rightarrow x$, also die „Komponenten“ der Verschiebung ST nach Fig IV:

$$\begin{aligned} y &= SU \cos \beta + UT \cos \alpha & x &= SU \sin \beta - UT \sin \alpha \\ SU &= \Delta l_a / \sin(\alpha + \beta) & UT &= SV = \Delta l_b / \sin(\alpha + \beta) \\ y &= \frac{\Delta l_a \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{\Delta l_b \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} & x &= \frac{\Delta l_a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{\Delta l_b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ &= 0,2734 + 0,2174 & &= 0,1363 - 0,0724 \\ &= 0,491 \text{ mm} & &= 0,064 \text{ mm} \end{aligned}$$

III. Beachte, daß die Faktoren von Δl_a und Δl_b bei y dieselben sind, wie die Faktoren von P in den Formeln für A und B . Das ist Folge des Arbeitssatzes: Die Verschiebungen verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte. \downarrow Komponente $y: \Delta l_a = A:P$

376. Aufgabe (Verschiebung einer Auslegerspitze). Der Ausleger Fig 238 ist mit $P=3 \text{ to}$ \downarrow belastet. Der Druckstab besteht aus 2 \square Eisen Nr 8 mit $F=2 \cdot 11,0 \text{ cm}^2$, der Zugstab aus Flacheisen mit $F=12,0 \text{ cm}^2$. Der Druckstab sei gelenkig an der Mauer befestigt, nicht etwa eingespannt. Berechne die \leftarrow und die \downarrow Verschiebung der Auslegerspitze.

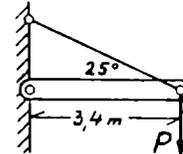


Fig 238. Verschiebung der Auslegerspitze

377. Durchbiegung eines Fachwerks. Das Fachwerk Fig 239 I ist am Knotenpunkt A belastet mit $\rightarrow P=1250 \text{ kg}$. Die Gurtstäbe haben einen Querschnitt je 10 cm^2 , Diagonalen und Waagerechte je 6 cm^2 . Wir berechnen die Stabkräfte S und die Längenänderungen Δl in der Tabelle. $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ at}$. Aus diesen muß die Durchbiegung des Fachwerks folgen.

I. Die neue Lage F' von F ist der Schnittpunkt der Kreisbögen mit $l_{11} + \Delta l_{11}$ um G und mit $l_{12} - \Delta l_{12}$ um H (Fig II, aus I vergrößert herausgezeichnet). Wie in Nr 375 zeichnen wir statt dessen von einem Nullpunkt N aus (Fig III) die Verlängerung $\Delta l_{11} \nearrow$ in Richtung von Stab 11 und die Verkürzung $\Delta l_{12} \downarrow$ entgegen der Richtung von Stab 12.

$$\text{Maßstab} = \text{Zeichnung} : \text{Natur} = 1 \text{ mm} : 0,050 \text{ mm} = 20 : 1$$

Durch die Pfeilspitzen der Verlängerungen ziehen wir statt der Kreisbögen Gerade \perp Stab, die sich in F schneiden. Dann ist NF die \searrow Verschiebung von F . Es sind nur Größen zweiter Ordnung (Nr 256 II), die in Fig III gegen Fig II unterdrückt werden.

II. Die neue Lage E' von E ist der Schnittpunkt (Fig IV)

des Kreisbogens mit $l_{10} + \Delta l_{10}$ um G und des Kreisbogens mit $l_9 - \Delta l_9$ um den verschobenen Punkt F' .

Es muß also angetragen werden an E die Verschiebung $\Delta l_{10} \uparrow$ und ebenfalls an E zunächst die Verschiebung $EF'' = FF' \searrow$ und anschließend $\Delta l_9 \rightarrow$.

Dies ist vergrößert in Fig III von N aus gezeichnet, indem $\Delta l_{10} \uparrow$ an N und $\Delta l_9 \rightarrow$ an F angetragen ist.

Durch die Pfeilspitzen ziehen wir statt der Kreisbögen Gerade \perp Stab, die sich in E schneiden. Dann ist $NE \nearrow$ die Verschiebung von E .

Stab	S	—	Δl	$x \rightarrow$
Nr	kg	—	10^{-3} mm	
1	1250	D	99	99
2	0	—	0	0
3	1950	Z	242	378
4	1500	D	86	103
5	1250	D	99	99
6	1500	Z	86	103
7	1950	Z	242	378
8	3000	D	171	410
9	1250	D	99	99
10	3000	Z	171	410
11	1950	Z	242	378
12	4500	D	257	925
Σ	—	—	—	3382

III. Ebenso ergibt sich die Verschiebung von D : Man zeichnet $\Delta l_7 \nearrow$ anschließend an NE und $\Delta l_8 \downarrow$ anschließend an NF und zieht die Senkrechten dazu bis zu ihrem Schnittpunkt D . Usw. Zuletzt kommt $NA \nearrow$ anschließend an B mit $\Delta l_1 \rightarrow$ und an C mit $\Delta l_2 = 0$. So entsteht der „Verschiebungsplan“, in dem wir die Verschiebungskomponenten von A im Maßstab 20:1 abmessen: $\rightarrow x_A = 3,38$ mm $\uparrow y_A = 0,26$ mm

378. Berechnung der Durchbiegung. Jeder Stab hat einen Anteil an der Verschiebung x des Angriffspunkts A von P :

I. Stab 1 verkürzt sich um $99 \cdot 10^{-3}$ mm. Um diesen Betrag verschiebt sich $A \rightarrow$, wenn das Fachwerk sonst starr ist. — Stab 5 verkürzt sich um $99 \cdot 10^{-3}$ mm. Dadurch findet eine Parallelverschiebung des Dreiecks ABC um denselben Betrag \rightarrow statt. Sein Anteil an x ist also $99 \cdot 10^{-3}$ mm. — Ebenso der von Stab 9 (Tabelle).

II. Stab 7 verlängert sich um $\Delta l_7 = 242 \cdot 10^{-3}$ mm. Dadurch findet eine Parallelverschiebung des Fachwerkteils $ABCD \rightarrow$ statt. Das entspricht der Verschiebung s in Fig 175 IV. Dort war Stabverlängerung $= s \sin \alpha$. Also ist hier

$$\text{Verschiebungsanteil} = \frac{\Delta l_7}{\sin \alpha} = \frac{242 \cdot 10^{-3}}{\sin 39^{\circ} 49'} = 378 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Ebensogroß sind die Anteile von Stab 3 und Stab 11.

Oder: die Verschiebungen verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte:

$$\frac{\text{Verschiebungsanteil}}{\Delta l_7} = \frac{S_7}{P} = \frac{1950}{1250} = \frac{1}{\sin \alpha}!$$

III. Die Verkürzung von Stab 8 hat eine Drehung des durch ihn ange-
schlossenen Teilkörpers um E zur Folge. Nach Fig 175 II verhalten sich
die Verschiebungen wie die Abstände vom Drehpunkt — oder umgekehrt
wie die Kräfte! Die Abstände vom Drehpunkt sind ja die Hebelarme.

$$\frac{\text{Verschiebungsanteil}}{\Delta l_8} = \frac{2,4 \text{ m}}{1,0 \text{ m}} = \frac{3000 \text{ kg}}{1250 \text{ kg}}$$

$$\text{Verschiebungsanteil} = \frac{2,4}{1,0} \cdot 171 \cdot 10^{-3} = \frac{3000}{1250} \cdot 171 \cdot 10^{-3} = 410 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

IV. Ebenso folgt der Anteil von Δl_{10} aus der Drehung um F . Punkt A
bewegt sich dann $\nearrow \perp FA$. Die \rightarrow Verschiebungskomponente ist ebenso-
groß wie die Verschiebung von B (Nr 256 I). Die Drehung von AB änd-
ert die Projektion nur um eine Größe zweiter Ordnung. Der Anteil von
 Δl_{10} ist also ebenso groß wie der von Δl_8 . Auch die Kräfte sind ja die-
selben. — Usw (Tabelle). — Nun ist $x = \Sigma$ Anteile = 3,382 mm

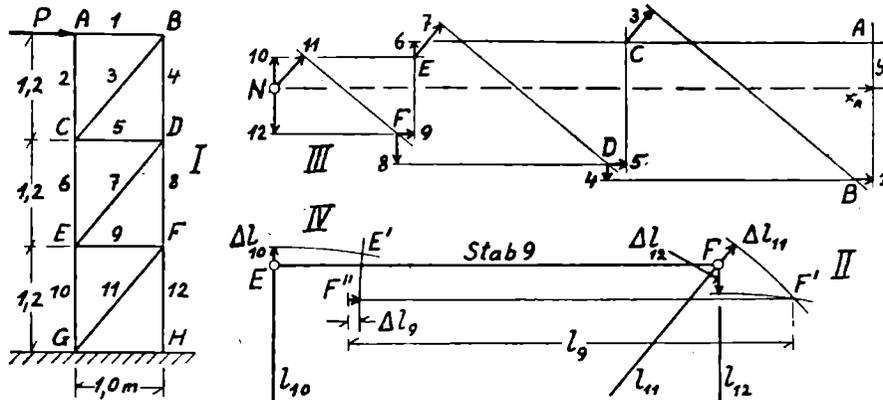


Fig 239. Verschiebungsplan des eingespannten Fachwerks

V. An der \uparrow Bewegungskomponente y von A haben die Stäbe 1 5 9 3 7 11
keinen Anteil. Sie verschieben nur \rightarrow . Auch nicht die Stäbe 4 8 12. Sie
drehen um $C E G$. Nur 6 und 10, die um D und F drehen, haben Anteil.
— Auch ohne die Vorstellung von der Drehung sieht man:

$$\text{Hebung von } A = y_A = \Delta l_6 + \Delta l_{10} = 0,257 \text{ mm} \quad \Delta l_2 = 0!$$

übereinstimmend mit Fig 239 III. Daß die Stäbe 2 6 10 sich etwas schie-
stellen, bringt ja nur Größen zweiter Ordnung.

379. Aufgabe (Knotenpunktverschiebung). Berechne die Ver-
schiebung der Knotenpunkte D und C und aus dem Unterschied ihrer
 \uparrow Komponenten die \curvearrowright Drehung von Stab 5.

380. Aufgelagertes Fachwerk. Das Fachwerk Fig 240 I ist in C
mit $P = 5 \text{ to}$, in E mit $Q = 2 \text{ to}$ unsymmetrisch belastet. A ist festes
Lager, G Rollenlager. Die Querschnitte der Stäbe sind je 12 cm^2 , ihr

Elastizitätsmaß $2,1 \cdot 10^6$ at. Wir berechnen die Stabkräfte S und die Längenänderungen Δl (Tabelle). Die Durchbiegung dieses aufgelagerten Fachwerks soll nun konstruiert werden aus den Δl und aus den Bedingungen, daß A fest bleibt, G sich nur waagrecht bewegt.

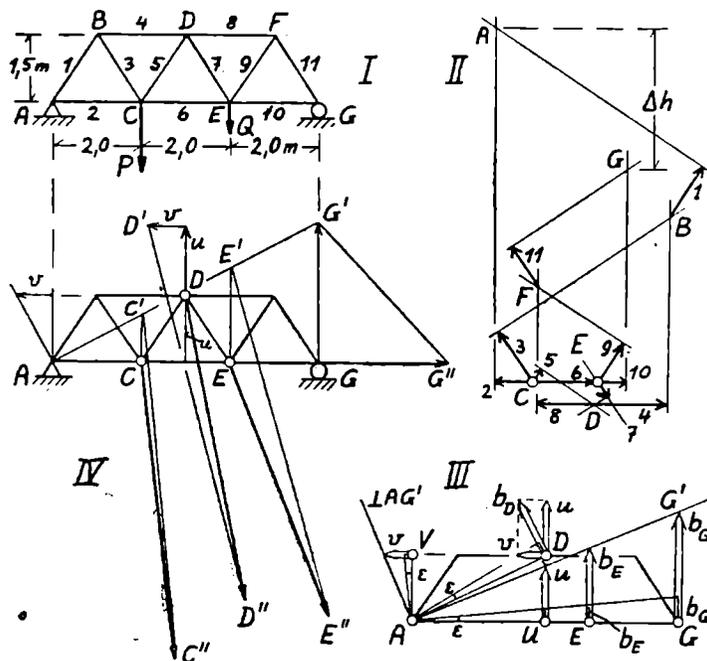


Fig. 240. Verschiebungsplan des aufgelagerten Fachwerks

I. Versuchen wir den Verschiebungsplan in A zu beginnen und die Verschiebung von B (oder von C) zu konstruieren, so werden wir zuerst $\Delta l_1 = 0,344$ mm \sphericalangle hinlegen. Dann aber fehlt uns die Drehung von Stab 1. — Sie folgt erst aus der Bedingung für G . Diese aber können wir nicht sofort mit berücksichtigen. — Wir lassen sie deshalb zunächst fallen und nehmen dafür zB an, daß die Richtung von Stab 1 unverändert bleibt. Dann kann der Verschiebungsplan nach Nr 377 gezeichnet werden so, als ob das Fachwerk links eingespannt wäre und sich rechts hebt; nämlich infolge des überwiegenden Einflusses der Auflagerkraft G . — Diese Hebung müssen wir dann in einem zweiten Teil des Verfahrens rückgängig machen, indem wir das Fachwerk \sphericalangle drehen, bis G wieder in die Höhe von A kommt. So wird sich die endgültige Verschiebung jedes Knotenpunkts aus 2 Anteilen, Komponenten, zusammensetzen.

Nr	S		Δl
—	kg		10^{-3} mm
1	4808	D	344
2	2667	Z	212
3	4808	Z	344
4	5333	D	423
5	1202	Z	86
6	4667	Z	370
7	1202	D	86
8	4000	D	318
9	3606	Z	258
10	2000	Z	159
11	3606	D	258

Es ist nicht nötig, in A zu beginnen. Wir kommen dem endgültigen Ergebnis schon mit dem ersten Schritt näher, wenn wir zB C als fest annehmen und Stab 6 als waagrecht. Bei symmetrischer Belastung dreht sich 6 ja tatsächlich nicht.

II. So ist der Verschiebungsplan Fig II entstanden:

$$\text{Maßstab} = \text{Zeichnung} : \text{Natur} = 1 \text{ mm} : 0,050 \text{ mm} = 20 : 1$$

An C wird $\Delta l_6 \rightarrow$ angetragen. Das gibt die Verschiebung von E gegen C , wenn Stab 6 waagrecht bleibt. An C und E anschließend konstruieren wir die Verschiebung von D aus Δl_5 und Δl_7 , wie in Nr 377 II. Dann schreiten wir fort: einerseits nach B und A , andererseits nach F und G . Die beiden Hälften des Fachwerks biegen sich also gegen die Strecke CE nach oben durch, die linke mehr als die rechte. — Wie groß sind nun die Verschiebungen gegen A ?

III. Die Strecke CA im Verschiebungsplan ist die \searrow Verschiebung von A gegen C . Umgekehrt ist $AC \swarrow$ die Verschiebung von C , wenn man A festhält, und $AG \swarrow$ die Verschiebung von G gegen A ; — immer aber bei waagrecht bleibenden Stab 6. — Man sieht, daß G unter dieser Voraussetzung um $\Delta h = 0,79 \text{ mm}$ tiefer als A liegen würde. Um das rückgängig zu machen, muß man nun das Fachwerk \curvearrowright drehen.

381. Fortsetzung: Drehung des Fachwerks. I. Dreht man eine Scheibe (Fig III) um den Punkt $A \curvearrowleft$ um den kleinen Winkel ε , so beschreibt jeder Punkt einen kleinen Kreisbogen

$$b = \text{Abstand von } A \text{ mal } \text{arc } \varepsilon \quad \perp \text{ Abstand}$$

Im vorliegenden Fall muß sein

$$\text{der Bogen, den } G \text{ beschreibt,} = b_G = \Delta h = 0,79 \text{ mm}$$

$$\text{der Drehwinkel} = \text{arc } \varepsilon = 0,79/6000, \text{ sehr klein!}$$

Dann ist der Bogen, den E beschreibt, $= b_E = \frac{2}{3} b_G$

Will man nicht rechnen, sondern zeichnen, so trägt man b_G vergrößert in $G \uparrow$ auf, verbindet den Endpunkt G' mit A und zeichnet in E einen \uparrow Pfeil bis zur Verbindungslinie AG' . Das ist das vergrößerte b_E .

II. Das ist in Fig IV ausgeführt für C und für E mit dem aus Plan II abgegriffenen $GG' = b_G = \Delta h$. Von den so erreichten Punkten $C'E'$ ist dann der Verschiebungsanteil AC bzw AE aus Plan II \searrow abgetragen. Dann ist die Resultante CC'' bzw EE'' die tatsächliche Verschiebung, vergrößert 20:1. — Bei G führt diese Konstruktion auf G'' in gleicher Höhe wie G , bedingungsgemäß! G bewegt sich also nur waagrecht \rightarrow um die Summe der Verlängerungen $= \Delta l_2 + \Delta l_6 + \Delta l_{10} = 0,74 \text{ mm}$. Die Schiefstellung der Stäbe, die Durchbiegung des Untergurts trägt zur \rightarrow Verschiebung von G nur Größen II Ordnung bei. Die Rolle dreht sich also bei Belastung des Fachwerks \curvearrowleft .

III. Punkt D beschreibt bei der Drehung (Fig III) den Bogen $b_D \perp AD$. Dieser Bogen hat die Komponenten $u \uparrow$ und $v \leftarrow$, vergrößert gezeichnet. u ist gleich der \uparrow Verschiebung des unter D in der Höhe von A liegen-

den Punktes U (Nr 256 I). Ebenso ist v gleich der \leftarrow Verschiebung des in der Höhe von D über A liegenden Punktes V . Das vergrößerte u wird also durch die Verbindungslinie AG' abgeschnitten. Ebenso folgt das vergrößerte v aus einer Senkrechten zu AG' . Das ist in Fig IV maßstäblich ausgeführt. Von Punkt D aus ist dann angetragen $u\uparrow$, daran $v\leftarrow$ und von diesem Punkt D' aus der Verschiebungsanteil $AD \searrow$ aus Plan II. Dann ist DD'' die Verschiebung von D im Maßstab 20:1.

IV. Abmessen ergibt die \downarrow Komponenten der Durchbiegungen
 von C 1,72 mm von E 1,46 mm von D 1,72 mm

382. Aufgabe (Verschiebungsplan). Das Fachwerk Fig 240 sei in C und E belastet mit gleichen Lasten $P=Q=3$ to. Dann gibt schon Plan II die endgültigen Durchbiegungen, weil Stab 6 sich jetzt nicht dreht. Konstruiere die Senkungen der Lasten gegen die Auflager.

383. Statisch unbestimmtes Fachwerk. Das Fachwerk Fig 241 I mit den „gekreuzten Diagonalen“ 5 und 6 ist mit 10 Stäben statt 9 statisch unbestimmt (Nr 235; 244). Man kann den Kräfteplan II ohne S_6 und den Plan III ohne S_5 zeichnen. — Zug S_5 und Druck S_6 werden übrigens um so größer, je mehr P und Q voneinander verschieden sind. — Man könnte auch Stab 3 oder 4 oder 7 oder 8 fortlassen.

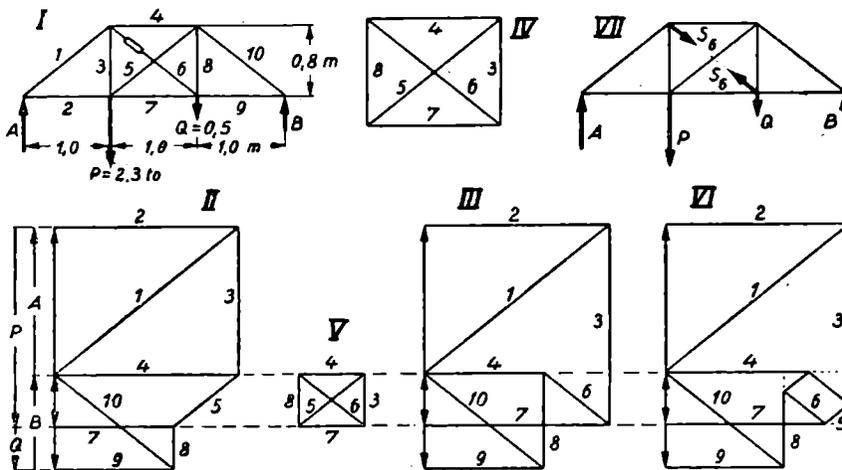


Fig 241. Statisch unbestimmtes Fachwerk

I. Die Pläne unterscheiden sich in der Größe der Stabkräfte 3 4 5 6 7 8. Dies Rechteck ist der statisch unbestimmte Teil des Fachwerks. In diesem Teil können schon vor Aufbringung der Belastung „Vorspannungen“ bestehen. Zieht man zB in Stab 6 ein Spannschloß an, so kommt Zug in 5 6, Druck in 3 4 7 8 gemäß Plan IV. — Besteht im Fachwerk I zur Zeit die Kräfteverteilung II mit $S_6 = 0$, so kann man durch Aufdrehen des Spannschlusses erreichen, daß sie in III übergeht, vorausgesetzt, daß S_6 , welches dabei Druck bekommt, nicht knickt. Die Stabkräfte ändern sich dabei

um die Beträge des Plans V, die zu denen von IV proportional sind. Während des Übergangs von II in III gilt ein Plan wie Fig VI, in dem zB S_6 beliebig angenommen werden kann. Hiernach läßt sich jede Stabkraft aus 2 Anteilen zusammensetzen: Der eine „ T “, hängt von den äußeren Kräften, der andere, „ U “, von S_6 ab.

II. Wir denken uns nach Fig VII statt des Stabes 6 zwei Kräfte S_6 an den Endpunkten der Strecke 6 wirkend. Dann folgt der Anteil T durch Abmessen aus Plan II oder durch Berechnung. Die Tabelle enthält die Werte. Zug soll als positive Kraft gelten, Druck als negative. — Der zweite Anteil U ist proportional zu dem noch unbekanntem S_6 . Sein Verhältnis zu S_6 folgt aus Plan IV, der zunächst für beliebiges S_6 gezeichnet wird. Wir nennen dies Verhältnis

$u = U/S_6 =$ Anteil pro Einheit von S_6 , kurz „für $S_6 = 1$ “ (Tabelle)!

Dann ist also für jeden andern Stab $S = T + U = T + uS_6$

S_6 , abhängig vom Anziehen des Spannschlusses, muß nun bestimmt werden.

III. Welche von allen diesen statisch möglichen Spannungsverteilungen sich wirklich einstellt, hängt davon ab, ob der letzte Stab beim Aufbau des Fachwerks mit oder ohne Vorspannung eingesetzt wurde; ob die Stablängen genau zueinander paßten oder nicht (Nr 104). — Sind 5 und 6 als Flacheisen ausgebildet, so wird das Fachwerk schon dadurch statisch bestimmt, daß der Stab, der Druck bekommen würde, hier 6, ausknickt und deshalb nur eine bestimmte, sehr kleine Kraft ausübt (Nr 235). — Wir wollen aber hier annehmen, daß das unbelastete Fachwerk keine Vorspannung hat, daß also alle Stablängen, geometrisch richtig gebohrt, zueinander passen; daß auch alle Stäbe genügend knicksteif sind. — Die Querschnitte seien: für 1 2 4 7 9 10 je 2 Winkelleisen 40/40/4, für 3 und 8 je 1 Winkel 40/40/4, für 5 und 6 je 1 Winkel 30/30/4.

IV. Dann folgt die Gleichung für das unbekanntem S_6 durch Betrachtung der Verformung des Fachwerks: Jeder Stab (Nummer k) verlängert sich unter dem Einfluß der ihn treffenden Stabkraft um Δl_k . (Verkürzung gilt als negative Verlängerung.) Jedes Δl_k hat eine Bewegung des Fachwerks VII und dadurch eine Längenänderung der Strecke 6 zur Folge. Andererseits folgt die Verlängerung des Stabes 6 nach dem Hookeschen Gesetz aus der Stabkraft S_6 . Das gibt die Gleichung für S_6 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{elastische Verlängerung} \\ \text{des Stabes 6} \\ \text{infolge der Stabkraft } S_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{geometrische Verlängerung} \\ \text{der Strecke 6} \\ \text{infolge der } \Delta l_k \text{ der andern Stäbe} \end{array} \right.$$

384. Ausführung der Berechnung. I. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Anteilen der andern Stäbe des statisch unbestimmten Fachwerkteils. Für jeden Stab (Nummer k) stellen wir Länge l und Querschnitt F fest (Tabelle). Dann ist seine

$$\text{Verlängerung} = \Delta l_k = \frac{S_k l_k}{F_k E} = \frac{\text{Stabkraft}}{\text{Federkonstante}} = \frac{S_k}{c_k}$$

ZB für Stab 5 ist (vergl Nr 44 II; 306)

$$\text{Federkonstante} = \text{Kraft/Verlängerung} = S_k/\Delta l_k$$

$$c_5 = \frac{EF_5}{l_5} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot \text{at} \cdot 2,27 \text{ cm}^2}{128 \text{ cm}} = 37200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} = 3,72 \frac{\text{to}}{\text{mm}}$$

II. Welchen Einfluß die Verlängerung Δl_k jedes Stabes auf die Länge der Strecke 6 hat, müßte man durch geometrische Untersuchung der Verschiebung der Knotenpunkte feststellen. Hier hilft der Arbeitssatz: Die Kraft S_6 bewirkt in dem andern Stab k eine Stabkraft U_k nach Plan IV. Die Verlängerung Δl_k bewirkt einen Verlängerungsanteil der Länge 6. Wir nennen ihn Δl_{6k} . Dann muß sein:

$$\text{abgegebene Arbeit} = S_6 \Delta l_{6k} = \text{gewonnene Arbeit} = -U_k \Delta l_k$$

oder: die Bewegungen verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte:

$$\frac{\text{Verlängerungsanteil von 6}}{\text{Verlängerung von } k} = \frac{\Delta l_{6k}}{\Delta l_k} = -\frac{U_k}{S_6} = -u_k$$

Dieselbe Größe u mißt sowohl die Kraftübersetzung wie die Bewegungsübersetzung! (Vergl Nr 375 III; 378 II III.)

III. Nun setzen wir ein in die Gleichung Nr 383 IV:

elastische Verlängerung = Σ Verlängerungsanteile

$$\frac{S_6 l_6}{F_6 E} = \frac{S_6}{c_6} = \Sigma \Delta l_{6k} = -\Sigma u_k \Delta l_k = -\Sigma \frac{u_k S_k}{c_k}$$

wobei die S nach Nr 383 noch selbst von S_6 abhängen.

$$\text{Also} \quad \frac{S_6}{c_6} = -\Sigma \frac{u_k (T_k + u_k S_6)}{c_k}$$

$$\text{aufgelöst:} \quad S_6 \left[\frac{1}{c_k} + \Sigma \frac{u_k^2}{c_k} \right] = -\Sigma \frac{u_k T_k}{c_k}$$

Die Summen sind über die andern Stäbe zu erstrecken. Jedoch kann man $1/c_6$ auch als Anteil des Stabes 6 an der ersten Summe betrachten, weil $u_6 = 1$ gesetzt werden kann, während $T_6 = 0$ ist. Nur der statisch unbestimmte Teil des Fachwerks liefert Anteile in die Summen. Aus den in der Tabelle ausgerechneten Summen folgt:

$$S_6 = -\frac{13,33 \cdot 10^{-3}}{72,88 \cdot 10^{-6}} = -183 \text{ kg } Z \sim 183 \text{ kg } D$$

IV. Danach ist jede andere Stabkraft = $S_k = T_k + u_k S_6$ (Tabelle) entsprechend Plan VI. — Auf das Elastizitätsmaß E , das allen Stäben gemeinsam ist, kommt es nicht an. Es hätte gekürzt werden können.

390. Zusammenfassung. Beim Gewölbe und beim Dreigelenkbogen ermittelt man die Fugendrucke bzw die Gelenkdrucke und den Druck im Bogen vermittels des Seilecks. Das Gewölbe ist statisch unbestimmt. Beim Dreigelenkbogen kommt es darauf an, das Seileck durch die Gelenke zu legen.

Nr	T	u	l	F	c	uT/c	u^2/c	uS_6	S
—	kg	kg/kg	cm	cm ²	10 ³ $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$	10 ⁻³ cm	10 ⁻⁶ $\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	kg	kg
1	- 2720	—	—	—	—	—	—	—	-2720
2	+ 2124	—	—	—	—	—	—	—	+2124
3	+ 1700	-0,625	80	3,08	80,9	-13,14	4,83	+ 114	+1814
4	- 2124	-0,781	100	6,16	129,3	+12,82	4,71	+ 143	-1981
5	+ 960	+1,000	128	2,27	37,2	+25,82	26,90	-183	+ 777
6	—	+1,000	128	2,27	37,2	—	26,90	-183	- 183
7	+ 1377	-0,781	100	6,16	129,3	- 8,30	4,71	+ 143	+1520
8	+ 500	-0,625	80	3,08	80,9	- 3,87	4,83	+ 114	+ 614
9	+ 1377	—	—	—	—	—	—	—	+1377
10	- 1760	—	—	—	—	—	—	—	-1760
Σ	—	—	—	—	—	+13,33	72,88	—	—

Zur Untersuchung der Veränderung der Stabkräfte unter dem Einfluß bewegter Lasten trägt man für jeden Stab den Einfluß einer einzelnen Last abhängig vom Lastort auf. Aus dieser Einflußlinie kann man den Wert der Stabkraft für jede Stellung des Lastsystems abgreifen. Stellt man die Lasten zu den größten Ordinaten der Einflußlinie, so ergibt sich die größte Stabkraft.

Beim Entwerfen des Cremona'plans kann man nicht immer zu einem Punkt fortschreiten, an dem nur noch zwei unbekannte Stabkräfte wirken. Man muß dann einzelne Stabkräfte mit Hilfe von Seilecken vorweg bestimmen, wie es schon mit den Auflagerkräften geschah. Man kann überhaupt Stabkräfte außer der Reihe konstruieren, sofern sie in einem Schnitt liegen, der nur 3 Stäbe trifft.

Die Durchbiegung eines Fachwerks konstruiert man aus den Längenänderungen der einzelnen Stäbe: Man findet die Verschiebung jedes einzelnen Knotenpunkts als Kreisbogenschnitt unter Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung. Man kann die Durchbiegung auch berechnen als Summe von Anteilen der Längenänderungen der einzelnen Stäbe.

Beim statisch unbestimmten Fachwerk sind die Stabkräfte außer von den äußeren Kräften noch abhängig von der Kraft im überzähligen Stab. Man bestimmt diese durch Betrachtung der elastischen Längenänderungen. Die Bewegungsverhältnisse ergeben sich dabei aus den Kraftverhältnissen nach dem Arbeitssatz.

XIV. Vermischte Aufgaben

391. Längeneinheiten. Die Messung von Längen, Zeiten, Kräften setzt voraus, daß „Einheiten“ bestehen, irgendwelche, zweckmäßig ausgewählte Größen, mit denen die zu messenden Größen verglichen werden. Die Welle wird nur dann in die Lagerbohrung passen, wenn die Schublehre, die Rachenlehre, der Lehrdorn alle nach demselben, genau bestimmten Urmaß geeicht sind. Gutes Messen erspart das Anprobieren. — Die Lasten, mit denen man das Fachwerk belastet, müssen gewogen werden auf einer Waage, die mit derselben Einheit geeicht ist, wie die Zerreißmaschine, mit der die Festigkeit des Werkstoffs gemessen wird. Dann ist die geforderte Sicherheit des Bauwerks vorhanden. — Die Einheiten sind die Vermittler zwischen den Größen, die später zueinander passen sollen. Jede Größe ist eben ein Produkt aus Maßzahl und Einheit. Und in den Gleichungen zwischen diesen Größen fallen die Einheiten wieder heraus. — Im täglichen Leben benutzt man Maßstäbe, Uhren, Gewichtssätze meist ohne Kritik. Wir fragen jetzt, wie sie hergestellt sind.

Die Längeneinheit nahm man früher vom menschlichen Körper: Elle, Fuß, Schritt, 1 römische „Meile“ = 1000 Doppelschritt \sim 1600 m. Da mußte man an Markttagen am Rathaus die gültige „Elle“ aufhängen. Später nahm man das Maß von der Erde:

1 Semeile = 1 Winkelminute auf dem Meridian

1 „Meter“ = 10^{-7} des Meridianquadranten

Dazu mußte man die Größe der Erde messen.

Für 2 Orte $A B$ auf gleicher geographischer Länge (Fig 242) mißt man zB die Entfernung und den Unterschied der Sonnenhöhen am Mittag:

$$AB = 2,55 \cdot 10^6 \text{ Fuß} \quad \beta - \alpha = 7^\circ$$

Dann ist Meridianquadrant = $AB \cdot 90/7 = 32,8 \cdot 10^6 \text{ Fuß} = 10^7 \text{ m}$

Man machte also den Meterstab = 3,28 Fuß. — In dieser Weise maß schon Eratosthenes (\sim 200 vor Null) die Erdabmessungen.

Um nicht bei jeder neuen Gradmessung die Einheit ändern zu müssen, gilt nun der damals hergestellte Stab als Längeneinheit. Hiermit sind wieder andere Stäbe verglichen, mit diesen die gebräuchlichen Maßstäbe.

Umgekehrt ist 1 Fuß = 0,305 m 1 Zoll = Fuß/12 = 25,4 mm

Erdradius = 6370 km Meridiangrad = 111,1 km Semeile = 1852 m

392. Zeiteinheiten. Als Zeiteinheit gilt

$$1 \text{ Sekunde} = \text{Minute}/60 = \text{Stunde}/3600 = \text{Tag}/86400$$

1 Tag ist die Zeit von Mittag bis Mittag. Man braucht also ein Gerät, mit dem man feststellt, wann die Sonne genau im Süden steht: ein Fernrohr, das in der Meridianebene in irgend einer Neigung eingestellt werden kann, das also um eine Ost-West Achse drehbar ist. Und man braucht eine

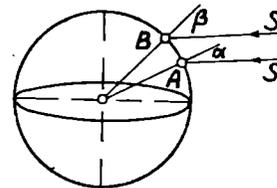


Fig 242. Gradmessung

Normaluhr, deren Gang nach den am Meridianinstrument beobachteten Meridiandurchgängen der Sonne kontrolliert wird.

Die Zeit von Mittag bis Mittag ist übrigens nicht an allen Tagen dieselbe. Zwar die Erde dreht sich immer gleich schnell um ihre Achse. Aber, damit die Sonne am nächsten Tag wieder im Meridian steht, muß sich die Erde nicht nur um 360° gedreht haben, sondern auch noch um den Winkel α (Fig 243), um den sie inzwischen auf ihrer elliptischen Bahn um die Sonne fortgeschritten ist. Dieser Winkel aber ist verschieden je nach der Entfernung der Erde von der Sonne; verschieden auch deswegen, weil man mit dem Meridianinstrument die Projektion des Sonnenlaufs auf den Äquator verfolgt, während er in der Ebene der Erdbahn, der Ekliptik, stattfindet. So ist es zu verstehen, wenn man definiert:

1 sk = 1/86400 des „mittleren Sonnentages“

Diese Zeitausgleichung muß bei der Kontrolle der Normaluhr berücksichtigt werden.

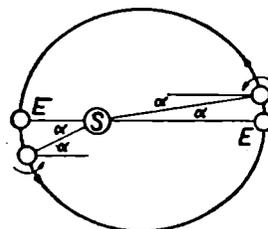


Fig 243. Erdbahn

393. Gewichtseinheiten. I. 1 Gramm ist das Gewicht von 1 cm³ Wasser und zwar bei 4^o C, bei welcher Temperatur es seine größte Dichte hat. Ein Kilogrammgewicht, nach dieser Verabredung möglichst genau hergestellt, dient nun als Urmaß des Gewichts. Hiermit sind wieder andere Gewichtstücke an der Hebelwaage verglichen, mit diesen jeder gebräuchliche Gewichtsatz.

II. Das „Gewicht“ dient zur Angabe vom Stoffmengen und zur Angabe von Kräften (Schwerkraft). Beides ist tatsächlich immer miteinander verbunden, läßt sich aber getrennt denken. Wir wollen unterscheiden

das Maß der Stoffmenge = 1 „fg“ der Kraft = 1 „kg“

Wenn man 1 Zentner = 50 fg Kohlen kauft, so ist man am Heizwert interessiert. Daß sie außerdem mit 50 kg zur Erde streben, ist sogar lästig. Wenn eine Dampfmaschine 5 fg Dampf pro Pferdekraftstunde verbraucht, so kommt es hier nur auf die Arbeitsfähigkeit an. Seine Schwerkraft 5 kg kommt nirgends in Betracht.

III. Ob die „Stoffmenge“ durch das Gewicht erfaßt wird, auch bei verschiedener Stoffart, kann man bezweifeln. Je 1 fg verschiedener Stoffe haben die gleiche Schwerkraft. So werden sie ja gemessen. Sie haben aber verschiedene Volumen, verschiedene Heizwerte. Aber in der Chemie gilt das Gesetz von der Erhaltung der Masse, der Stoffmenge:

8 fg Sauerstoff verbinden sich mit 1 fg Wasserstoff zu 9 fg Wasser während das Volumen nicht unverändert bleibt. Gleiche Gewichte verschiedener Stoffe haben auch gleiche Trägheit (Nr 14); sie fordern für die gleiche Beschleunigung die gleiche Kraft. Wegen des Gesetzes von der Erhaltung der Masse und weil Schwerkraft und Trägheit übereinstimmend nur vom Gewicht abhängen, ist die Benutzung dieser Größe zur Angabe der Stoffmenge gerechtfertigt.

IV. Die Stoffmenge wird gemessen auf der Waage mittels der Schwerkraft. Das scheint so selbstverständlich, daß man es kaum anders denken kann. Und doch ist es nicht notwendig. Man kann sich die Schwerkraft ausgeschaltet denken. Man kann sich auf einem Planeten, in einem Raum befindlich denken, wo es keine Schwerkraft gibt. Dann müßte man die Stoffmenge etwa mittels eines Beschleunigungsversuchs messen: Der zu untersuchende Körper wird einer bekannten Kraft (Federkraft) ausgesetzt, und die Beschleunigung gemessen. Praktisch würde man das vielleicht so ausführen, daß man ihn an einer Normalfeder in Schwingungen versetzt und die Schwingungszeit bestimmt.

V. Was ist überhaupt „Schwerkraft“? Eine Anziehungskraft zwischen der Erde und den auf ihr befindlichen Körpern; überhaupt die Anziehung zwischen irgend zwei Körpern: Auf einer Waage seien die Schwerkraften zweier Gewichtstücke von je 1 fg miteinander im Gleichgewicht. Nun bringt man unter das eine Gewicht eine Bleikugel von 6 to. Der Abstand der Mittelpunkte sei 55 cm. Dann sinkt das angezogene Gewicht. Man muß auf der andern Seite eine Kraft von 0,135 mg ausüben, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Diese Anziehungskraft ist proportional den Stoffmengen, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung:

Zwei Gewichte von je 1000 fg in 1 m Entfernung
ziehen einander an mit $6,8 \cdot 10^{-6}$ kg

Eine sehr merkwürdige Naturerscheinung, keineswegs selbstverständlich. Auch diese allgemeine Eigenschaft des Stoffes ist vom „Gewicht“ abhängig; ein weiterer Grund, das Gewicht zum Maß der Stoffmenge zu nehmen (III).

VI. Diese Anziehungskraft ist überhaupt auf der Erde verschieden. Am Pol erteilt sie einem Körper die Beschleunigung 983 cm/sk^2 , am Äquator 978 cm/sk^2 . Derselbe Normalzug (Nr 359 Fig 226) würde in höheren Breiten eine stärkere Brücke fordern, als am Äquator. Daß der Unterschied nur gering ist, ist zufällig. — Ein Körper werde gewogen auf einer Hebelwaage an einem Ort, wo die Schwerebeschleunigung $= g = 979 \text{ cm/sk}^2$ ist. Sein „Gewicht“ sei $= 200 \text{ fg}$. Das ist ohne weiteres brauchbar als Maß der Stoffmenge. An jedem andern Ort ergibt sich dieselbe Maßzahl. Will man es aber als Maß der Kraft benutzen, so muß man umrechnen auf einen Normalort, der zB dadurch definiert sei, daß an ihm $g = 981 \text{ cm/sk}^2$ ist.

Dann ist $\left. \begin{array}{l} \text{Schwerkraft des} \\ \text{Gewichts am Versuchsort} \end{array} \right\} = 200 \cdot \frac{979}{981} = 199,592 \text{ Normalkilo}$

so groß wie die Anziehungskraft der Erde auf $199,592 \text{ fg}$ am Normalort. Dagegen ist die zur Beschleunigung auf zB $0,7 \text{ m/sk}^2$ erforderliche Kraft K an allen Orten dieselbe

$$K = 200 \cdot \frac{70}{981} = 14,28 \text{ Normalkilo} = \begin{cases} 14,28 \text{ mal so groß wie die Schwer-} \\ \text{kraft von 1 fg am Normalort} \end{cases}$$

394. Krafteinheiten. I. Das Gewicht als Krafteinheit muß man also mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Schwerkraft definieren als

$$1 \text{ kg} = \begin{cases} \text{Schwerkraft auf ein Kilogramm, } 1 \text{ kg, } 1 \text{ dm}^3 \text{ Wasser,} \\ \text{am Normalort, an dem } g = 981 \text{ cm/sk}^2 \text{ ist} \end{cases}$$

Das muß man beachten, wenn zB eine zur Kraftmessung bestimmte Federwaage geeicht werden soll an einem Ort, wo $g = 979 \text{ cm/sk}^2$ ist. Der Teilstrich „10 kg“ soll angebracht werden. Dann muß man die Waage belasten mit einem Gewicht von $10 \cdot 981 / 979 = 10,0204 \text{ kg}$

II. Als Einheit, die unabhängig vom Ort ist, definiert man

$$1 \text{ dyn} = \begin{cases} \text{Kraft, die einem Grammgewicht, } 1 \text{ gr, } 1 \text{ cm}^3 \text{ Wasser,} \\ \text{die Beschleunigung } 1 \text{ cm/sk}^2 \text{ erteilt} \end{cases}$$

Die Kraft K , die 200 gr die Beschleunigung 70 cm/sk^2 erteilt, ist dann 200 mal 70 mal so groß, 14000 dyn:

$$K = 200 \text{ gr} \cdot 70 \text{ cm/sk}^2 = 14000 \text{ gr cm/sk}^2 \quad 1 \text{ dyn} = 1 \text{ gr cm/sk}^2!$$

Kraft = Trägheit mal Beschleunigung = Masse mal Beschleunigung

Die Einheit der Stoffmenge, der „Masse“, wird in diesem „wissenschaftlichen Maßsystem“ zur Einheit der Trägheit. Es war nämlich (Nr 14):

Trägheit = Kraft pro Einheit der Beschleunigung

$$= \frac{14000 \text{ dyn}}{70 \text{ cm/sk}^2} = 200 \frac{\text{dyn}}{\text{cm/sk}^2} \quad 1 \text{ gr} = 1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm/sk}^2}!$$

Im wissenschaftlichen Maßsystem stimmen überein die Maßzahlen für Trägheit und Stoffmenge, im technischen die für Schwerkraft und Stoffmenge. Beidemale ist es die Zahl, die wir als „Gewicht“ messen.

III. Wie berechnet man die Schwerkraft in diesem Maßsystem? — In Nr 17 wurden zwei Gewichte $700 \text{ gr} + 40 \text{ gr}$ beschleunigt durch die Schwerkraft des Gewichts von 40 gr . Am Versuchsort sei $g = 979 \text{ cm/sk}^2$.

Die Schwerkraft erteilt den 40 gr die Beschleunigung 979 cm/sk^2 . Also ist die beschleunigende Kraft

$$K = 40 \text{ gr} \cdot 979 \text{ cm/sk}^2 = 39160 \text{ gr cm/sk}^2 = 39160 \text{ dyn}$$

Schwerkraft = Masse mal Schwerebeschleunigung

$$\text{Dann ist in } \left. \begin{array}{l} \\ \text{der Aufgabe} \end{array} \right\} b = \frac{K}{M} = \frac{39160 \text{ gr cm/sk}^2}{(700 + 40) \text{ gr}} = 52,92 \frac{\text{cm}}{\text{sk}^2}$$

Am Normalort dagegen ist $K = 39240 \text{ dyn}$ $b = 53,03 \text{ cm/sk}^2$

IV. Um Angaben in der technischen Krafteinheit 1 kg umzurechnen auf die wissenschaftliche Krafteinheit 1 dyn , geht man aus von

$$1 \text{ kg} = \text{Schwerkraft auf } 1 \text{ kg am Normalort} = 1000 \text{ gr} \cdot 981 \text{ cm/sk}^2$$

also $1 \text{ kg} = 981000 \text{ dyn}$ $1 \text{ dyn} = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 1,02 \text{ mgr}$

Hiernach wird zB das Elastizitätsmaß von Stahl umgerechnet:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 = 2,06 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$$

V. Die Leistungseinheit 1 Kilowatt ist definiert als $10^{10} \text{ dyn cm/sk}$

$$\text{also } 1 \text{ KW} = 10^{10} \cdot \frac{\text{kg}}{981000} \cdot \frac{\text{m}}{100} \cdot \frac{1}{\text{sk}} = 102 \frac{\text{kgm}}{\text{sk}} \quad (\text{Nr } 267)$$

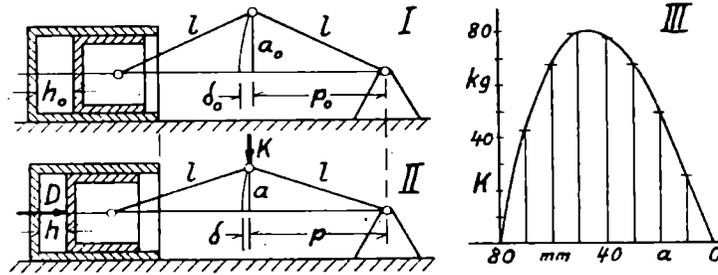
396. Verlauf der Kraft bei Bewegung des Kniehebels. Bei dem Kniehebel Nr 76 Fig 44 berechneten wir das Verhältnis des Drucks im Preßzylinder zur Kraft am Gelenk abhängig von der Stellung:

$$D = pK/2a = 7,48 K \quad \text{für } l = 900 \text{ mm} \quad a = 60 \text{ mm}$$

Wenn D unverändert bleibt (Saftpresse), so wird bei Annäherung an die gestreckte Stellung K bis Null abnehmen. Ist aber der Zylinderinhalt elastisch, so steigt D proportional zur Zusammendrückung. K kann dann mit zunehmen, kann aber auch trotz des steigenden D abnehmen.

Der Preßzylinder habe 250 mm \varnothing . Der darin befindliche Stoff habe die Elastizität von Gummi: $E = 50 \text{ kg/cm}^2$ und bei losem Aufsetzen des Kolbens die Höhe $h_0 = 150 \text{ mm}$ (Fig 245 I). In dieser Anfangsstellung sei der Abstand des Gelenks von der Mittellinie $a_0 = 80 \text{ mm}$. Hier ist D und damit auch $K = 0$. Wird $a < a_0$ (Fig II), so wächst K zunächst mit D , wird aber in der gestreckten Lage wieder = 0. Dazwischen muß K ein Maximum haben.

Fig 245.
Verlauf der Kraft
beim Kniehebel



I. K folgt statisch aus D , wobei $p \sim l$: $K = 2aD/l$

D folgt aus der elastischen Zusammendrückung des Stoffs $\Delta h = h_0 - h$

$$D = E F \frac{\Delta h}{h_0} = 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 491 \text{ cm}^2 \cdot \frac{\Delta h}{150 \text{ mm}} = 164 \frac{\text{kg}}{\text{mm}} \cdot \Delta h = c \Delta h$$

Der Faktor von Δh ist die Kraft pro Einheit der Verkürzung (Nr 44), die „Federkonstante“ $= c = D/\Delta h = E F/h_0 = 164 \text{ kg pro mm}$

Die Verkürzung Δh folgt geometrisch aus a . Je kleiner a , um so größer wird nämlich die Projektion p von l (Fig II):

$$\text{für } a_0 = 80 \text{ mm: } p_0 = \sqrt{l^2 - a_0^2} = 896,4374$$

$$\text{,, } a = 60 \text{ mm: } p = \sqrt{l^2 - a^2} = 897,9978$$

$$h - h_0 = \Delta h = 2(p - p_0) = 2 \cdot 1,5604 = 3,121 \text{ mm}$$

Hieraus folgt nun $D = 512 \text{ kg} \quad K = 68,2 \text{ kg}$

II. Bei der Berechnung von c ist vorausgesetzt, daß der Stoff sich seitlich frei ausdehnen kann. Ist er aber fest in den Zylinder eingepaßt, so ist $E \varepsilon_{\text{quer}} = \sigma_{\text{quer}} - \nu \sigma_{\text{längs}} - \nu \sigma_{\text{quer}} = 0 \quad \sigma_q = \sigma_l \nu / (1 - \nu) \quad \nu = 0,3$

$$E \varepsilon_l = \sigma_l - 2 \nu \sigma_q = \sigma_l [1 - 2 \nu^2 / (1 - \nu)] = \sigma_l \cdot 0,743$$

vergrößertes Elastizitätsmaß $= E' = E / [1 - 2 \nu^2 / (1 - \nu)]$

vergrößerte Federkonstante $= c' = E' F / h_0 = 220 \text{ kg/mm}$

III. $\Delta h = 2(p - p_0)$ war eine kleine Differenz großer Zahlen. p und p_0 mußten 7-stellig berechnet werden, um Δh 4-stellig zu liefern. Wir berechnen Δh besser aus einer Näherung für den kleinen Unterschied zwischen der schrägen Länge l und ihrer Projektion p . Wir schreiben $p = l - \delta$ (Fig II). Dann ist nach Pythagoras

$$(l - \delta)^2 = l^2 - a^2 \quad \text{oder} \quad l^2 - 2l\delta + \delta^2 = l^2 - a^2$$

l^2 fällt heraus, δ^2 ist klein neben $2l\delta$ und wird vernachlässigt. Dann bleibt

$$\delta = \frac{a^2}{2l} \quad \text{und hiermit} \quad \Delta h = 2(p - p_0) = 2(\delta_0 - \delta) = \frac{a_0^2 - a^2}{l}$$

als Näherung für kleines a/l . Im Beispiel (I): $\Delta h = (80^2 - 60^2)/900 = 3,111 \text{ mm}$ statt 3,121

IV. Nach diesen Formeln sind in der Tabelle für eine Reihe von Werten a , beginnend mit $a_0 = 80 \text{ mm}$, der Reihe nach Δh , D , K berechnet. K erreicht sein Maximum zwischen 40 und 50 mm (Fig III). Man fühlt dieses Maximum, wenn zB eine Fensterklappe durch einen Kniehebel betätigt wird: Die Klappe wird mit steigendem Druck an den Rahmen gepreßt. Andererseits wirkt der Kniehebel immer günstiger und schnappt schließlich ein. (Vergl auch Nr 124.)

a	Δh	D	K
mm	mm	kg	kg
80	0	0	0
70	1,667	273	42,5
60	3,111	510	68,0
50	4,333	710	78,9
40	5,333	875	77,8
30	6,111	1002	66,8
20	6,667	1093	48,6
10	7,000	1148	25,5
0	7,111	1166	0

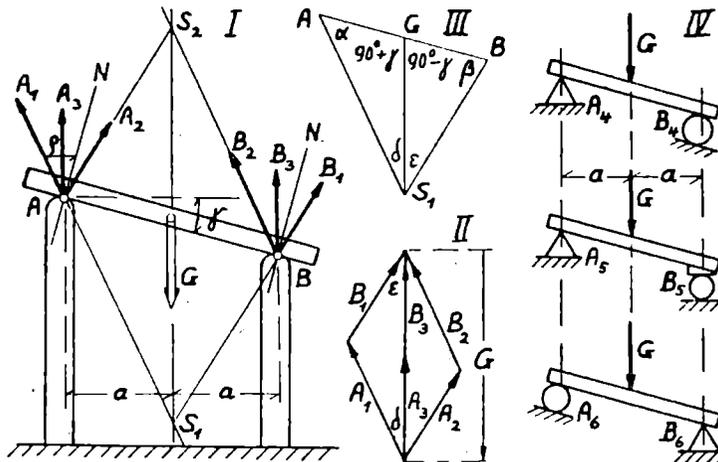


Fig 246. Balken auf verschieden hohen Auflagern

397. Balken auf verschieden hohen Auflagern. Zwei Männer von verschiedener Größe tragen einen Balken auf der Schulter (Fig 246 I). Sie mögen \rightarrow gehen, der Große A hinten, der Kleine B vorn. Die Neigung des Balkens sei $\gamma = 15^\circ$. Das Gewicht G liege in der Mitte zwischen den Auflagerpunkten. Sind die Männer gleich belastet?

I. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt. Denn da der Balken schief liegt, so darf man von Reibung nicht absehen. Der Reibungswinkel muß größer als γ sein. Er sei $\varrho = 40^\circ$. Die Auflagerkräfte müssen innerhalb der Reibungswinkel liegen und müssen sich auf G schneiden. (Vergl Nr 135.) Das ist auf unendliche viele Arten möglich.

II. Wenn der Vordermann es eilig hat, so zieht er am Balken vermittels seiner Schulter. Die Kräfte sind dann A_1 und B_1 . Die Kraft A kommt zuerst an die Grenze des Reibungswinkels. Die Reibung bei B ist dann noch nicht voll ausgenutzt. Es folgt also der Schnittpunkt S_1 aus der Richtung von A_1 , danach die Richtung von B_1 , danach das Kraftdreieck (Fig II linke Hälfte). Wir berechnen also zuerst die Winkel in dem Dreieck AGS_1 (Fig III), danach das Dreieck BGS_1 , danach das Kraftdreieck:

$$\delta = 25^\circ \quad \alpha = 50^\circ \quad AG = 0,551 \cdot GS_1 = BG \quad \varepsilon = 31^\circ 50' \quad \beta = 73^\circ 10'$$

$$A_1 = 0,630 G \quad B_1 = 0,505 G$$

III. Wenn der Hintermann drängt, so gelten die Kräfte A_2 und B_2 . Jetzt erfährt der Vordermann die größere Kraft.

IV. Erstrebenswert ist, daß die Kräfte senkrecht sind.

Dann ist $A_3 = B_3 = \frac{1}{2} G$ beide gleich belastet!

Auf beiden Schultern ist dann die Reibung nicht voll beansprucht.

V. Will der Kleine weniger belastet sein, so muß er als Vordermann ziehen, als Hintermann bremsen. Der Große wird versuchen, zu drücken. Der Meister wird gut tun, den Kleinen als Vordermann zu stellen. Dann beeilen sich Beide.

VI. Vergleiche eine schiefe Brücke, etwa im Zuge einer Zahnradbahn, unter 15° geneigt (Fig IV), links festes Lager, rechts Rollenlager. Ist die Rollenbahn geneigt, wie die Brücke, so ist $B_4 \perp$ Brücke, A_4 zum Schnittpunkt gerichtet. $A_4 = 0,548 G$ $B_4 = 0,482 G$

Liegt die Rollenbahn aber waagerecht, so ist $A_5 = B_5 = 0,5 G$

Liegt die Rolle links, Rollenbahn \parallel Brücke, so sind A_6 und B_6 nach innen geneigt. — Vergleiche auch den Wagen Nr 173 I Fig 120.

398. Fahrbarer Drehkran, Standsicherheit. Auf einem vier-rädrigen Wagen (Fig 247 I II) steht in der Mitte eine Säule. Auf ihr ruht der Drehkran, ausgeschwenkt um α . Die Winde sei im Kranfachwerk eingebaut. Der Windenzug ist deshalb als innere Kraft nicht mitgezeichnet. Maße und Gewichte sind neben Fig 247 angegeben.

Gegengewicht G und Eigengewicht E des Wagens sollen verhindern, daß der Kran umkippt. Also muß bei $\alpha = 90^\circ$ sein

mit Last: $\curvearrowright G(c + s/2) + E s/2 \geq P(a - s/2) + F(b - s/2) \curvearrowleft$

ohne Last: $\curvearrowright E s/2 \geq G(c - s/2) - F(b + s/2) \curvearrowleft$

Wir berechnen zunächst die Mindestwerte von G und E und erhöhen dann nur E , welches Standsicherheit in beiden Richtungen gewährleistet.

Gleichungen addiert: $(G + E + F) \cdot s = P(a - s/2) \quad , \quad G + E = 6,1 \frac{P}{s}$

„ subtrahiert: $2Gc = P(a - s/2) + 2Fb = 13,49 \frac{P}{s}$

Gewählt $c = 1,6 \text{ m}$ danach $G = 4,22$ $E_{\min} = 1,88$ erhöht $E = 2,5 \text{ to}$
 Dann sind die Raddrucke auf der entlasteten Seite immer noch in jedem Fall je 155 kg , infolge des Überschusses in E .

399. Drehkran, Raddrucke. Der Kran sei nun ausgeschwenkt um $\alpha = 65^\circ$ mit voller Last. Wir berechnen die Raddrucke $A B C D$.

I. Das Gleichgewicht des ganzen Krans fordert:

$$\uparrow A + B + C + D = P + F + G + E \downarrow = 13,12 \text{ to}$$

Wir könnten nun Momentengleichungen für die Achsen $AB CD AC BD$ aufstellen (Nr 191). Wir wählen aber besser Achsen durch Mitte Kran:

$$\text{Achse } \parallel s: \quad (A + B - C - D) l/2 = (Pa + Fb - Gc) \cos \alpha$$

$$A + B - C - D = 3,30 \text{ to}$$

$$\text{Achse } \parallel l: \quad (B + D - A - C) s/2 = (Pa + Fb - Gc) \sin \alpha$$

$$B + D - A - C = 11,32 \text{ to}$$

II. Andere Statikgleichungen sind nicht mehr unabhängig. Die statische Unbestimmtheit (3 Gleichungen für 4 Unbekannte) wird ergänzt durch die Annahme gleicher Federn. Das führt wie in Nr 191 III auf

$$A - C = B - D \quad \text{also} \quad A - C = B - D = 1,65 \text{ to}$$

$$\text{oder} \quad A - B = C - D \quad \text{also} \quad B - A = D - C = 5,66 \text{ to}$$

$$\text{oder} \quad A + D = B + C \quad \text{also} \quad A + D = B + C = 6,56 \text{ to}$$

$$\text{Auflösung} \quad A = 1,27 \quad B = 6,94 \quad C = -0,38 \quad D = 5,29 \text{ to}$$

III. C wird negativ! — Das bedeutet nicht etwa, daß der Kran trotz Nr 398 kippt. Aber C berührt die Schiene nicht mehr. Die Voraussetzungen für die Lösung II würden nur dann bestehen bleiben, wenn Rad C an der Schiene verankert wäre, und dadurch seine Federung Zug bekäme. Eine neue Lösung mit $C = 0$ muß gesucht werden aus den Statikgleichungen I allein. Der Fall ist jetzt statisch bestimmt.

$$\text{Auflösung} \quad A = 0,90 \quad B = 7,31 \quad C = 0 \quad D = 4,91 \text{ to}$$

400. Drehkran, Andere Lösung. Man kann auch zuerst die Belastung der Säule berechnen, Lagerabstand $= h = 1,8 \text{ m}$, aus dieser die Stützkräfte des Wagens (Nr 118; 127 III; 221; 223), zusammengesetzt aus Anteilen infolge der \downarrow Belastung und der kippenden Momente.

I. Belastung der Säule (Fig III): $\downarrow V = P + F + G = 10,62 \text{ to}$
 waagerechtes Kräftepaar: $H = (Pa + Fb - Gc)/h = 5,21 \text{ to}$

$$\text{Längskomponente} = L = 2,20 \quad \text{Seitenkomponente} = S = 4,72 \text{ to}$$

II. Aus $V + E$ folgen 4 gleiche Anteile $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 3,28 \text{ to}$

Aus dem Kräftepaar LL folgen die 2 Paare XX $X = 0,825 \text{ to}$

„ „ „ SS „ „ „ „ YY $Y = 2,83 \text{ to}$

Hieraus durch Zusammensetzen der Anteile (Fig III)

$$A = 1,27 \quad B = 6,94 \quad C = -0,38 \quad D = 5,29 \text{ to} \quad \text{wie Nr 399 II}$$

Der Annahme gleicher Federn entspricht hier die Annahme gleicher Paare XX links und rechts, gleicher Paare YY vorn und hinten.

III. Tatsächlich fällt C aus. — Dann legen wir $V + E$ nur auf A und D :

$$A_0 = D_0 = 6,56 \text{ to} \quad B_0 = C_0 = 0$$

Auch die Kräftepaare stützen wir so, daß C frei bleibt:

das Paar LL durch ein Paar $2X$ $2X$ am rechten Radpaar $2X = 1,65 \text{ to}$

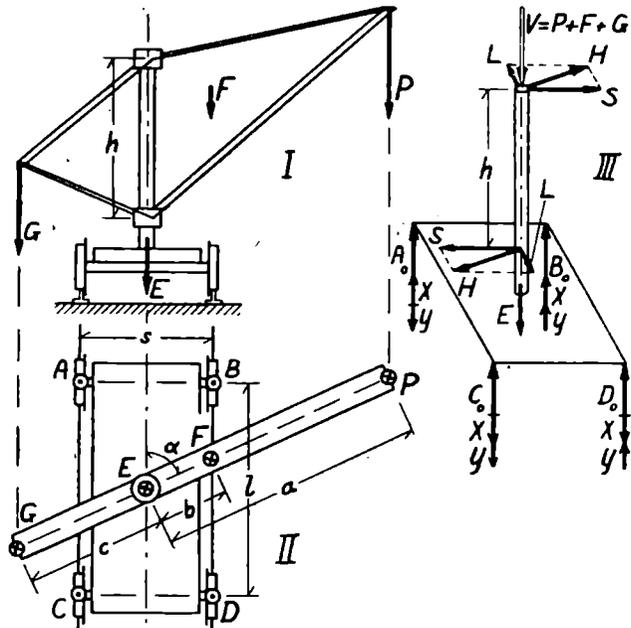
„ „ SS „ „ „ $2Y$ $2Y$ „ vorderen „ $2Y = 5,66 \text{ to}$

Also $A = 0,90$ $B = 7,31$ $C = 0$ $D = 4,91 \text{ to}$ wie Nr 399 III

Entgegengesetzt gleiche Paare in parallelen Ebenen sind miteinander im Gleichgewicht (Nr 205)!

Fig 247.
Fahrbarer Drehkran

Maße und Gewichte:
Höchstlast = $P = 5 \text{ to}$
Ausladung = $a = 3 \text{ m}$
Eigengewicht des
Kranfachwerks
mit Winde = $F = 1,4 \text{ to}$
im Schwerpunkts-
abstand = $b = 0,8 \text{ m}$
Spurweite = $s = 1,5 \text{ m}$
Radstand = $l = 2,4 \text{ m}$



401. Zweiradkran. In engen Gängen befördert man Lasten durch einen Kran wie Fig 248. Er fährt auf 2 mit Spurkränzen versehenen Rädern AB auf einer Schiene. Der Ausleger ruht auf der Kransäule vermittels zweier Lager CD . D ist Spurlager. Oben stützt sich der Kran vermittels einer am Ausleger (nicht an der Säule) befestigten Rolle gegen eine der beiden an der Decke befestigten Schienen. Die Winde ist im Ausleger eingebaut. Der Kran sei mit $P = 1000 \text{ kg}$ bei 5 m Ausladung belastet. Das Eigengewicht des Auslegers einschließlich Winde sei $E = 600 \text{ kg}$, angreifend im Schwerpunkt, $0,7 \text{ m}$ vor der Mittellinie.

I. Gegengewicht G und Mindestgewicht Q_{min} des Wagens folgen aus der Forderung der Standsicherheit: Steht der Ausleger in Fahrtrichtung, so darf der Kran mit Belastung nicht um die Vorderachse, ohne Belastung nicht um die Hinterachse kippen:

$$\curvearrowright P \cdot 3,9 = E \cdot 0,4 + Q_{min} \cdot 1,1 + G \cdot 3,4 \curvearrowleft$$

$$\curvearrowleft G \cdot 1,2 = E \cdot 1,8 + Q_{min} \cdot 1,1 \curvearrowright$$

Hieraus folgt $G = 1030$ $Q_{min} = 143$ gewählt $Q = 400 \text{ kg}$

Dann ist die Standsicherheit für beide Kipprichtungen die gleiche. Der Windenzug ist innere Kraft im Ausleger und deshalb nicht mitgezeichnet.

II. Der Kran sei nun um 40° gegen die Fahrtrichtung ausgeschwenkt. Die Belastungen $P E G Q$ werden durch senkrechte Komponenten $A_y B_y$ aufgenommen. Ihr Moment um die Schienenoberkante wird durch das Moment der Stützkraft K im Gleichgewicht gehalten. Diese wieder fordert waagerechte Komponenten $A_x B_x$ an den Spurkränzen.

III. Die senkrechten Raddrucke sind so groß, als wenn die Belastungen auf die Ebene der Fahrtrichtung projiziert wären, unabhängig von ihrem Abstand von dieser Ebene. Dazu kommt nun die kippende Wirkung. Man kann nach Nr 206 I beide Einflüsse trennen, indem man in den Projektionen der Kräfte auf die Fahrtebene je 2 entgegengesetzte Kräfte $P_1 E_1 G_1 \downarrow P_2 E_2 G_2 \uparrow$ annimmt. Dann bewirken $P_1 E_1 G_1 Q$ die Auflagerkräfte A_y und B_y , drehen aber nicht. Die Paare $PP_2 EE_2 GG_2$ dagegen werden gestützt durch das aus K und der Resultante von A_x und B_x gebildete Paar. Diese Resultante liegt deshalb auch senkrecht unter K .

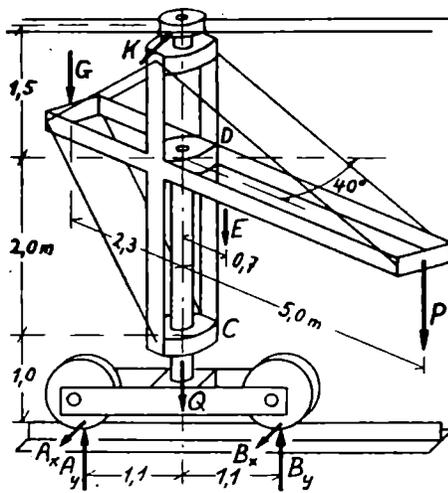


Fig 248. Zweiradkran

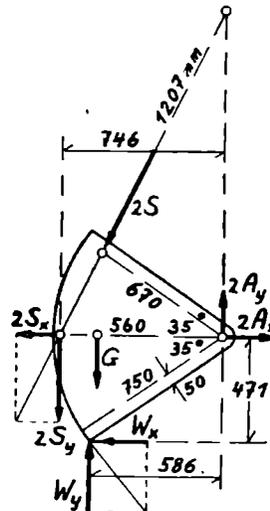


Fig 249. Greifer beim Zufassen

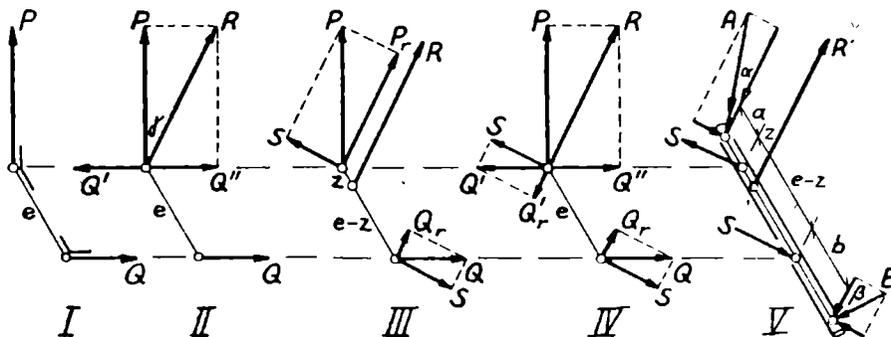


Fig 250. Resultante im Raum

A_x und B_x sind einander gleich, im Gegensatz zu A_y und B_y . Bei dem Gleichgewicht der Kräftepaare der Belastungen und der Stützkräfte kommt es auf den Abstand ihrer Ebenen in Fahrtrichtung nicht an.

402. Aufgabe (Zweiradkran). Berechne nach den Maßen von Fig 248 die Stützkkräfte; auch die in den Lagern C und D . Man betrachtet zunächst das Gleichgewicht am Ganzen, dann das Gleichgewicht am Ausleger oder an dem mit der Säule versehenen Wagen. (Vergl Nr 126; 127; 400.)

403. Zufassen des Greifers. In Nr 229 Fig 159 wurde der Schließdruck des Greifers berechnet. Wir untersuchen jetzt, mit welcher Kraft der geöffnete Greifer in das Fördergut eindringt. Wir denken ihn uns in der Stellung Fig 249, in der der Schwerpunkt G in der Höhe des Gelenks A liegt. An der eindringenden Kante sind zwei Widerstandskomponenten W_x W_y anzunehmen. Ihre Resultante dürfte eher flacher sein als die Richtung der eindringenden Kante.

Die Kräfte $2P$ in den Trageseilen berechneten wir in Nr 229 aus dem Gewicht des Ganzen. Jetzt sind sie kleiner um $2W_y$.

$$\uparrow 2P = 2G + U + V - 2W_y \downarrow$$

Die \downarrow Komponenten der Stangenkräfte folgen wieder aus den Rollenzügen und dem Gewicht des Oberstücks.

$$2S_y = 2P + \frac{1}{2}V = 2G + U + \frac{3}{2}V - 2W_y$$

Um nun an der Schale die Momentengleichung für A aufzustellen, verlegen wir S bis in die Höhe von A . Dann brauchen wir S_x nicht erst auszudrücken. Die Hebelarme werden berechnet oder aus maßstäblicher Zeichnung abgegriffen nach den aus Fig 159 übernommenen Maßen:

$$\curvearrow W_y \cdot 586 + W_x \cdot 471 = 2S_y \cdot 746 + G \cdot 560 \curvearrow$$

Einsetzen von S_y , welches selbst noch von W_y abhängt, ergibt

$$W_y \cdot (586 + 2 \cdot 746) + W_x \cdot 471 = (2G + U + \frac{3}{2}V) \cdot 746 + G \cdot 560$$

Es war $G = 70$ $U = 36$ $V = 44$ kg wir nehmen an $W_x = 0,8 W_y$
dann ist $W_y = 89,5$ $W_x = 71,6$ $W = 114,6$ $2P = 41$ $2S_y = 63$ kg

Es kommt nun darauf an, ob die Kraft W groß genug ist, um die Kante in das Fördergut hineinzudrücken.

404. Resultante im Raum. In Nr 147 ersetzten wir mehrere Kräfte in der Ebene durch eine einzige Kraft, ihre Resultante, die dieselben Stützkkräfte fordert. Das war im allgemeinen möglich, nur dann nicht, wenn die Komponentensummen Null werden (Nr 150). Dann war der Ersatz ein Kräftepaar mit konstantem Moment für alle Drehpunkte. — Wie kann man Kräfte im Raum zusammenfassen, wenn sie nicht in einer Ebene liegen, sondern windschief zueinander sind? — In Fig 250 I sei $P = 50$ kg \uparrow $Q = 25$ kg \rightarrow Abstand der Angriffspunkte $= e = 30$ cm nach vorn gerichtet, \perp zu beiden Kräften.

I. Um eine Resultante bilden zu können, denken wir uns Q an den Ort von P verlegt, dh (Fig II) wir fügen Q' und Q'' hinzu, um das Gleich-

gewicht nicht zu stören (Nr 157). Wir ersetzen also Q durch die Kraft Q'' und das Paar QQ' . Wir fassen P und Q'' zusammen zu R . Dann sind P und Q ersetzt durch eine Einzelkraft $R = 55,9 \text{ kg}$ in der Richtung $\gamma = 26^\circ 34'$ am Ort von P und durch ein Kräftepaar QQ' mit dem Moment 750 kgcm in der waagerechten Ebene.

Verlegt man P an den Ort von Q , so kommt dort eine Resultante gleicher Richtung und Größe und ein Kräftepaar in senkrechter Ebene.

II. Besser ist es wohl, die Resultante zwischen P und Q zu legen, im Abstand z von P (Fig III). Man kann dann R auffassen als Resultante der Komponenten P_r und Q_r , die $\parallel R$ sind.

$$P_r = P \cos \gamma = 44,7 \quad Q_r = Q \sin \gamma = 11,2 \quad R = P_r + Q_r = 55,9 \text{ kg!}$$

$$\text{Dann ist } z = e \cdot 11,2 / 55,9 = 6,0 \quad e - z = e \cdot 44,7 / 55,9 = 24,0 \text{ mm}$$

Damit sind aber P und Q noch nicht ersetzt. Es bestehen noch die Komponenten $\perp R$ $S = P \sin \gamma = Q \cos \gamma = 22,4 \text{ kg}$ einander gleich! P und Q sind also jetzt ersetzt durch die Einzelkraft R zwischen ihnen und das Paar SS mit dem Moment 672 kgcm in der Ebene $\perp R$.

III. Der Ersatz I und der Ersatz II müssen einander gleichwertig sein: Um das zu zeigen, geht man aus von Ersatz I (Fig II) und zerlegt (Fig IV) Q in Q_r und S ; Q' in Q_r' und S . Damit ist das Paar QQ' zerlegt in 2 Paare \parallel und $\perp R$. Q_r und Q_r' mit R zusammengesetzt ergeben das um z verschobene R . Daneben bleibt dann in der Tat das Paar SS in der Ebene $\perp R$. Dieses läßt sich in keiner Weise mit R zusammensetzen. Verschiebung von R ergibt ja immer nur Paare in Ebenen durch R .

IV. Im Fall windschiefer Kräfte ist also eine einzige Resultante im allgemeinen unmöglich. Es gibt im allgemeinen keine Achsen, für die das Moment der Kräfte Null wird. Man kann aber ein Kraftsystem ersetzen durch eine Einzelkraft an beliebigem Ort und ein Kräftepaar. Legt man die Kraft an einen bestimmten Ort, so kann man erreichen, daß das Kräftepaar in der Ebene $\perp R$ liegt. Kraft und Kräftepaar in der Ebene $\perp R$ nennt man eine Kraftschraube. Das Moment des Kraftsystems hat dann also für alle Achsen $\parallel R$ den gleichen Wert. Für Achsen $\perp R$ wird es proportional ihrem Abstand von R . — Übrigens ist die Bildung von R in diesem einfachen Fall kaum eine Vereinfachung, nur eine Vorüberlegung, um die Möglichkeiten im allgemeinen Fall zu übersehen.

405. Aufgabe (Stützkkräfte). Um zu zeigen, daß der in Nr 404 gefundene Ersatz mit P und Q gleichwertig ist, denken wir uns P und Q , oder R und SS angreifend an einer Stange (Fig V), die durch A und B gestützt ist. $a = 10 \text{ cm}$ $b = 20 \text{ cm}$ — Berechne A und B aus P und Q , — aus R bei P und dem Paar QQ' , — aus R in z und dem Paar SS . — Man bildet A und B dabei entweder aus \downarrow und \leftarrow Komponenten vermittels der Momente für waagerechte und senkrechte Achsen, oder aus Komponenten \parallel und $\perp R$, berechnet aus Momenten für Achsen \perp und $\parallel R$. Der Ersatz für P und Q muß eben für Achsen beliebiger Richtung gelten.

106. Moment um schiefe Achsen. Gleichwertige Kraftsysteme sollen gleiche Momente haben für alle beliebig gerichteten Achsen. — Wie bildet man das Moment einer Kraft für eine räumlich schiefe Achse?

In Fig 251 I sei D ein Drehpunkt, P eine Kraft, h ihr Hebelarm. Wir nennen die Richtung der Kraft x , die Richtung des dazu senkrechten Hebelarms y , die zu beiden senkrechte Richtung z .

Um diese z -Achse ist das Moment von P am größten: $M_z = Ph$

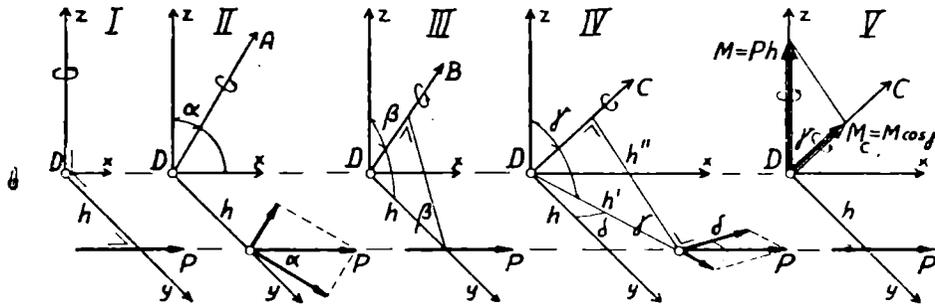


Fig 251. Momente für schiefe Achsen

Achse A (Fig II) liege in der xz -Ebene unter α gegen z .

Um sie dreht P mit der Komponente $P \cos \alpha$. Also $M_A = Ph \cos \alpha$

Achse B (Fig III) liege in der yz -Ebene unter β gegen z .

Für sie hat P den Hebelarm $h \cos \beta$. Also $M_B = Ph \cos \beta$

Achse C (Fig IV) liege in einer durch z gehenden Vertikalebene vom Azimut δ unter γ gegen z . Dann verlegen wir P auf seiner Angriffslinie bis zum Schnittpunkt mit der Ebene zC .

Dann ist drehende Komponente $= P \cos \delta$ $h' = h / \cos \delta$ $h'' = h' \cos \gamma$

Also Moment für C : $M_C = P \cos \delta \cdot h \cos \gamma / \cos \delta = Ph \cos \gamma$

Das Moment ist also unabhängig vom Azimut δ der Achse, nur abhängig von ihrer Neigung γ gegen die Achse größten Momentes.

Trägt man $M = Ph$ auf der Achse $\perp P$ und $\perp h$ auf (Fig V),

so ist das Moment für jede andere Achse Projektion,

„Komponente“ von M nach der Richtung dieser Achse.

Um auch das Vorzeichen, den Drehsinn, darzustellen,

trägt man den Momentenpfeil in der Richtung auf,

von der aus gesehen der Drehsinn \curvearrowright erscheint.

Gerichtete Größen, Kräfte, Geschwindigkeiten, Momente, die durch Pfeile dargestellt werden können, deren Projektionen (Komponenten) physikalische Bedeutung haben, nennt man Vektoren. Zum Unterschied davon nennt man Größen, die durch nur eine Zahl angebar sind, Gewicht, Volumen, Masse, Arbeit, Elastizitätsmaß — Skalare.

407. Berechnung der Achse größten Momentes. Der Angriffspunkt einer Kraft P sei in Bezug auf einen Drehpunkt D (Fig 252) durch Koordinaten gegeben. Die Kraft selbst liege schief im Raum, gegeben

durch Komponenten. Dann kann man zunächst die Momente für die Koordinatenachsen berechnen. Diese sind Komponenten, Projektionen des größten Momentes. Aus ihnen folgt also umgekehrt das größte Moment M als Resultante, als Raumdiagonale der Komponenten.

Es seien die Koordinaten $x=5$ $y=3$ $z=4$ cm
 die Kraftkomponenten $P_x=-9$ $P_y=8$ $P_z=6$ kg

Dann berechnen wir die Momente für die Koordinatenachsen und zwar so, daß sie $+$ herauskommen, wenn sie aus der Achsenrichtung gesehen sind:

$$M_x = P_z y - P_y z = +6 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = -14 \text{ kgcm}$$

$$M_y = P_x z - P_z x = -9 \cdot 4 - 6 \cdot 5 = -66 \text{ kgcm}$$

$$M_z = P_y x - P_x y = +8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 = +67 \text{ kgcm}$$

M_x M_y M_z tragen wir auf den Achsen auf und berechnen nach Nr 102
 Azimut $= \delta = 120^\circ$ Neigung $= \varepsilon = 45^\circ 10'$ Resultante $= M = 95$ kgcm

Hieraus können nun wieder Momente für andere Achsen gebildet werden. — Mit der Berechnung von δ und ε ist auch die geometrische Aufgabe gelöst, die Richtung $\perp P$ und $\perp r$ zu bestimmen. — Auch der Abstand r des Punktes von D ist ein Vektor, seine Komponenten die Koordinaten.

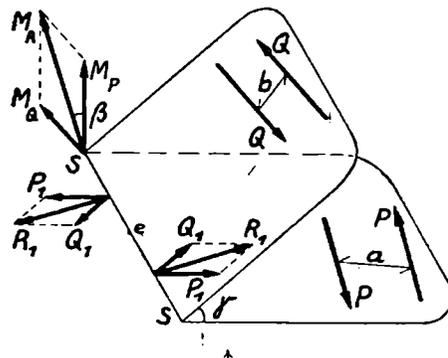
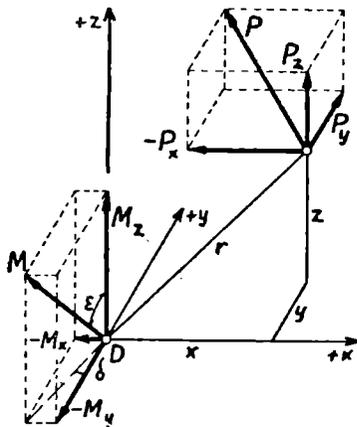


Fig 253. Zusammensetzung von Kräftepaaren

← Fig 252. Momente einer schiefen Kraft

408. Zusammensetzung von Momenten. Daß Momente wie Kräfte zusammengesetzt werden können, ergibt sich auch aus folgender Überlegung: In 2 Ebenen (Fig 253) mit der Schnittlinie SS , die unter $\gamma = 41^\circ$ gegeneinander geneigt sind, liegen 2 Kräftepaare

$$PP \text{ mit dem Moment } M_P = Pa = 70 \text{ kgcm}$$

$$QQ \text{ ,, ,, ,, } M_Q = Qb = 50 \text{ ,,}$$

Wir verschieben, drehen und verzerren (Nr 149) sie so, daß die Kräfte auf SS senkrecht stehen und den gleichen Hebelarm e haben: zB 10 cm. Dann ist $P_1 = 7$ $Q_1 = 5$ kg. Dann kann man P_1 und Q_1 zusammensetzen zu einer Resultante R_1 . Damit ist das resultierende Kräftepaar $M_R = R_1 e$ gebildet. Es kann nun selbst wieder in seiner Ebene verschoben, gedreht und verzerrt werden.

Tragen wir M_P und M_Q in der Achse größten Momentes, also senkrecht zu ihren Ebenen auf, so ist die Parallelogrammdiagonale M_R das resultierende Moment. $M_P M_Q M_R$ sind ja den $P_1 Q_1 R_1$ proportional. Das Parallelogramm der Momente muß also ähnlich sein dem Parallelogramm der Kräfte.

Wir berechnen $M_R = 112,4 \text{ kgcm}$ unter $\beta = 16^\circ 5'$ gegen M_P

409. Die 6-Komponenten-waage. Um Auftrieb und Widerstand eines Flügels zu untersuchen, hängt man ihn im Windkanal an Drähten auf, die je auf eine Waage wirken, und mißt den Zug in den Drähten abhängig von der Geschwindigkeit des Luftstroms, vom Anstellwinkel usw.

I. Um einen Körper statisch bestimmt zu stützen, braucht man 6 Stützen, den 6 Freiheitsgraden entsprechend (Nr 213). Man hängt also den Flügel an 6 Drähten auf (Fig 254 I): $A B C$ messen den Auftrieb, $D E$ den Widerstand, F die seitliche Kraft. Bei geradem Flug wird $A = B$ $D = E$ $F = 0$ sein. Die Kräfte haben dann eine Resultante \nearrow in der Mittelebene hinter der Vorderkante. Wird aber der Flügel vom Luftstrom schräg getroffen, oder ist die Verwindung verstellt, so tritt der allgemeine Fall ein. Wie können jetzt die 6 Komponenten zusammengefaßt werden?

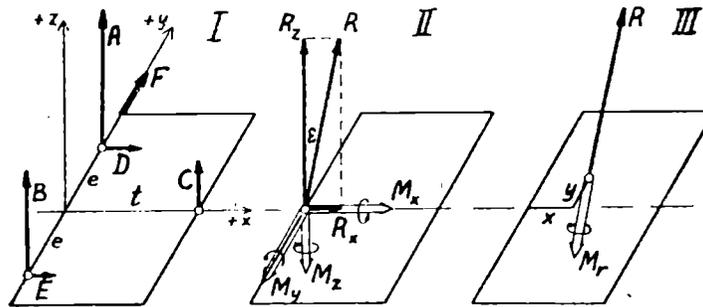


Fig 254. Sechs-komponenten-waage

II. Wir wählen zunächst einen Drehpunkt, zB Mitte Vorderkante, und bilden die Komponenten der Resultante und die Komponenten des Momentes für die durch diesen Punkt gehenden Achsen: Längsachse x nach hinten, Querachse y nach rechts, Hochachse z nach oben. Dann sind die 6 Komponenten ersetzt durch eine Resultante an gegebenem Ort und ein Moment (Kräftepaar). Aus den Komponenten des Momentes, soweit sie mit R in einer Ebene liegen, kann man dann noch eine Verschiebung von R berechnen. Ein Moment in der Ebene $\perp R$ aber bleibt im allgemeinen bestehen (Nr 404 IV).

III. Es sei $A = 1,6$ $B = 1,2$ $C = 0,6$ $D = 0,3$ $E = 0,2 \text{ kg}$ $F = 0$
 $e = 25$ $t = 30 \text{ cm}$ Dann ist (Fig II)

$$\begin{array}{ll} R_x = 0,5 \text{ kg} & M_x = 10 \text{ kgcm aufzutragen nach } +x \\ R_y = 0 \text{ kg} & M_y = 18 \text{ „ „ „ „ } -y \\ R_z = 3,4 \text{ kg} & M_z = 2,5 \text{ „ „ „ „ } -z \end{array}$$

IV. M_y verlegt die Resultante nach hinten in $+x$ -Richtung
so daß $R_z x = M_y \quad x = M_y / R_z = 18/3,4 = 5,30 \text{ cm}$

Nun müssen wir R noch nach rechts in $+y$ -Richtung verlegen mittels der Komponente von M , die $\perp R$ ist:

Es ist $R = 3,44 \text{ kg}$ unter $\varepsilon = 8^\circ 22'$ gegen $+z$

Die Komponenten von M sind

$$\parallel R \quad M_r = 10 \sin \varepsilon - 2,5 \cos \varepsilon = 1,45 - 2,47 = -1,02 \text{ kgcm}$$

$$\perp R \quad M_s = 10 \cos \varepsilon + 2,5 \sin \varepsilon = 9,89 + 0,36 = 10,25 \text{ kgcm}$$

M_s verlegt R nach rechts in $+y$ -Richtung

so daß $R_z y = M_s \quad y = M_s / R_z = 10,25/3,4 = 3,02 \text{ cm}$

Die 6 Komponenten sind also ersetzt durch (Fig III)

Resultante $R = 3,44 \text{ kg}$ unter $\varepsilon = 8^\circ 22'$ gegen Vertikale

5,30 cm hinter Vorderkante, 3,02 cm rechts der Mitte

und Kräftepaar $M_r = 1,02 \text{ kgcm}$ rechtsdrehend um R

V. Es ist also immer möglich, das gegebene Kraftsystem zu ersetzen durch eine Kraftschraube an bestimmtem Ort. — Eine andere Frage ist, ob man von diesem Ersatz Gebrauch machen will, oder ob man zwecks Berechnung der Steuerflächen besser bei der Zusammenfassung Absatz III Fig II bleibt.

410. Schwerpunkt der Parabelfläche. Schwerpunkte krummer Linien und krummlinig begrenzter Flächen berechnet man, indem man das Gebilde in unendlich viele kleine Teile zerlegt. In Nr 288 gelang es, die Summen durch Umformung zu berechnen. Gelingt dies nicht, so muß man sie angenähert ausrechnen, zB bei der Parabelfläche Fig 255.

I. Wir berechnen die Fläche unter der Parabel, indem wir sie zerlegen in 5 Streifen der Breite $a/5$. Dann ist angenähert

$$\text{Streifenfläche} = f = \text{mittlere Ordinate mal Breite} = y \cdot a/5$$

Die Parabelordinaten verhalten sich wie die Quadrate der Abscissen. Für den dritten Streifen zB ist also

$$x_3 = \frac{5}{10} a \quad \frac{y_3}{b} = \frac{x_3^2}{a^2} = \left[\frac{5}{10} \right]^2 \quad y_3 = \frac{25}{100} b$$

$$\text{Fläche} = \Sigma \text{Streifen} = \Sigma y \cdot a/5$$

$$F = 1,65 b \cdot a/5 = 0,330 ab$$

Nr	x	y	xy	y^2
1	0,1 a	0,01 b	0,001 ab	0,0001 b^2
2	0,3 a	0,09 b	0,027 ab	0,0081 b^2
3	0,5 a	0,25 b	0,125 ab	0,0625 b^2
4	0,7 a	0,49 b	0,343 ab	0,2401 b^2
5	0,9 a	0,81 b	0,729 ab	0,6561 b^2
Σ	—	1,65 b	1,225 ab	0,9669 b^2

(Tabelle)

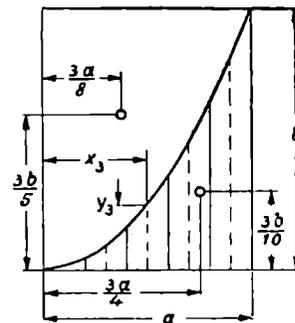


Fig 255. Schwerpunkt der Parabelfläche

II. Die Schwerpunktskoordinaten dieser Fläche $x_s \rightarrow y_s \uparrow$ sind nach Nr 281 f zu berechnen als $\Sigma \text{ Momente} / \Sigma \text{ Streifen}$. Der Streifenschwerpunkt wird auf der Mitte der Mittellinie angenommen. Seine Koordinaten sind also $x \rightarrow y/2 \uparrow$. Die vorkommenden Summen sind in der Tabelle berechnet.

$$\text{Dann ist } x_s = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{\Sigma y x \cdot a/5}{\Sigma y \cdot a/5} = \frac{1,225 ab}{1,65 b} = 0,742 a$$

$$y_s = \frac{\Sigma f y/2}{\Sigma f} = \frac{\Sigma y^2 \cdot a/5}{2 \cdot \Sigma y \cdot a/5} = \frac{0,9669 b^2}{2 \cdot 1,65 b} = 0,293 b$$

Mit kleinerer Streifeneinteilung erreicht man genauere Werte. Mathematische Umformung ergibt die genauen Werte

$$F = \frac{1}{3} ab \quad x_s = \frac{2}{3} a \quad y_s = \frac{3}{10} b$$

Man erreicht also schon mit 5 Streifen eine gute Näherung.

Die Parabel teilt also das umschriebene Rechteck im Verhältnis 1:2. — Fläche und Schwerpunkt des andern Rechteckteils oberhalb der Parabel erhält man entweder durch erneute Streifeneinteilung oder indem man den zweiten Teil als Differenz von Rechteck und erstem Teil betrachtet. Das Ergebnis ist angeschrieben.

411. Lastdruckbremse. Bei einer Winde ist das Getriebe gegen unbeabsichtigten Ablauf der Last gesperrt oder gebremst. Soll die Last sinken, so muß die Bremse so weit gelüftet werden, daß die Last unbeschleunigt sinkt. Je nach der Größe der Last muß dabei das Bremsmoment größer oder kleiner sein. — Die Lastdruckbremse Fig 256 macht deshalb das Bremsmoment von der Last selbst abhängig. Das Ritzel A überträgt die Kraft von der Kurbel auf das Getriebe vermittels der Zahnkraft Z . Es sitzt aber nicht unmittelbar auf der Kurbelwelle, sondern auf einer Schraube B . Die Zahnkraft Z drückt daher die Bremscheibe C gegen die Scheibe D mit einer Kraft proportional der Last! D ist durch Sperrklinken (Fig II) gegen Senken gesperrt. Es sitzt lose auf der Welle und stützt sich gegen E , welches selbst wieder auf der Kurbelwelle fest sitzt. Dann verhütet die Reibung von C und E an D das Sinken der Last. Soll nun die Last sinken, so muß man durch Drehen der Kurbel den Überschuß der Reibung über das Lastmoment überwinden. Man muß also die Last herabhaspeln. Beim Heben dreht sich $A B C D E$ als Ganzes unter den Sperrklinken fort. Hierbei ist also die Reibung ausgeschaltet.

Es seien die Radien: r_z der Zahnkraft Z , r_g des Gewindes, r_s der Bremscheibe, r_k der Kurbel. Ferner sei N die Normalkraft, mit der die Scheiben $C D E$ aneinandergedreßt werden, μN die Reibungsschubkraft, eine Umfangskraft am Radius r_s , α der Steigungswinkel der Schraube. An ihr wollen wir keine Reibung annehmen. Diese ist nicht wesentlich und muß jedenfalls so klein wie möglich sein, damit sich C auch wirklich an D anlegt. Sonst wird durch das Lastmoment eher die Lagerreibung, als die Reibung am Schraubengang überwunden und die Last läuft doch ab.

412. Berechnung des Herabhaspeln. Die Andrückkraft N steht mit dem Moment am Ritzel nach Nr 329 in Zusammenhang: Die schiefe Kraft F an den Gängen (Fig 210 IV) hat nämlich eine Längskomponente $= N$, also eine Umfangskomponente $= N \operatorname{tg} \alpha$, die am Hebelarm r_g wirkt. Am Ritzel sind also im Gleichgewicht:

$$\text{Moment Schnecke} = \text{Lastmoment} - \text{Reibungsmoment an } C \\ \curvearrowright N r_g \operatorname{tg} \alpha = Z r_z - \mu N r_s \curvearrowleft \quad (\curvearrowleft \curvearrowright \text{ von links gesehen})$$

An der Kurbelwelle sind im Gleichgewicht:

$$\text{Moment Kurbel} = \text{Reibungsmoment an } E - \text{Moment Schnecke} \\ \curvearrowleft K r_k = \mu N r_s - N r_g \operatorname{tg} \alpha \curvearrowright$$

Oder am Ganzen: Lastmoment und Kurbelmoment, im gleichen Sinne drehend, überwinden die Reibung an beiden Bremscheiben:

$$\curvearrowleft K r_k + Z r_z = 2 \mu N r_s \curvearrowright$$

natürlich abhängig von den beiden andern Gleichungen.

Bei gegebenen Abmessungen kann man nun N eliminieren.

$$\text{Dann ist} \quad K r_k = \frac{\mu r_s - r_g \operatorname{tg} \alpha}{\mu r_s + r_g \operatorname{tg} \alpha} \cdot Z r_z$$

413. Bestimmung der Abmessungen. Die Reibung an den Scheiben muß ausreichen, um die Last selbsthemmend zu halten. Andererseits soll die zum Herabhaspeln erforderliche Kraft nicht zu groß sein.

Dafür wählen wir Moment Kurbel $= \frac{1}{3}$ Moment Last

$$K r_k = \frac{1}{3} Z r_z$$

Dann ist Moment Reibung $= 2 \mu N r_s = \frac{4}{3} Z r_z$

$$\text{Moment Schnecke} = N r_g \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} Z r_z$$

Elimination von $Z r_z / N$ ergibt: $\mu r_s = 2 r_g \operatorname{tg} \alpha$

Mit $\mu = 0,13$ $\alpha = 10^\circ$ $\operatorname{tg} \alpha = 0,176$ ist dann $r_s = 2,70 r_g$

Ist zB $Z = 90 \text{ kg}$ $r_z = 100$ $r_k = 400 \text{ mm}$

so ist zum Heben erforderlich $K = 22,5 \text{ kg}$

Zum Herabhaspeln genügt dann $K = 7,5 \text{ kg}$

Wählt man $r_g = 50 \text{ mm}$, so wird $r_s = 135 \text{ mm}$

Dann ist Andrückkraft $= N = 342 \text{ kg}$

Reibungsschubkraft $= \mu N = 44,5 \text{ kg}$ an jeder Scheibe

Wird aber nicht an der Kurbel gedreht, $K = 0$, so steht das Getriebe selbsthemmend still. An den Bremscheiben wirkt dann eine Reibung

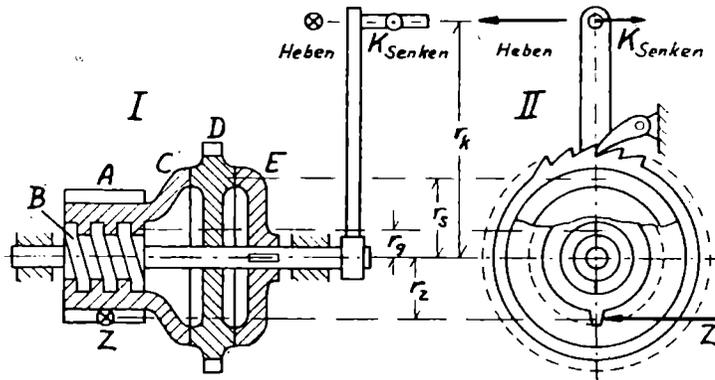
$S < \mu N$, so daß am Ganzen $Z r_z = 2 S r_s$, also $S = 33,3 \text{ kg}$

am Ritzel: $N r_g \operatorname{tg} \alpha = Z r_z - S r_s = S r_s$, also $N = 512 \text{ kg}$

Also $S/N = r_g \operatorname{tg} \alpha / r_s = \frac{1}{2} \mu$

Die Reibung an den Scheiben ist also beim Stillstand nur halb ausgenutzt. Deshalb mußte hier auch mit S gerechnet werden. μN darf dafür nur gesetzt werden, wenn die reibenden Flächen wirklich aufeinander gleiten. (Vergl Nr 311; 312.)

Fig 256.
Lastdruckbremse



414. Vereinfachung der Aufgabe. Wir denken uns jede der Kräfte $Z, K, \mu N$, die an den Hebelarmen r_z, r_k, r_s wirken, ersetzt durch je eine gleichwertige Kraft am Gewinderadius r_g , also durch

$$Zr_z/r_g, Kr_k/r_g, \mu Nr_s/r_g$$

Dann liegen alle Kräfte mit der Kraft $F \perp$ Gewindegang

am selben Hebelarm. Man kann sich dann das Gewinde zur schiefen Ebene abgewickelt denken. Das Gleichgewicht der Momente wird dann zum Gleichgewicht der Kräfte (Fig 257 I). Ein Keil (das Ritzel) liegt an mit der Seite A an einer Fläche B (dem Gewinde) und mit der Seite C (Reibscheibe) an einer festgehaltenen Stange D (der Sperrscheibe). B ist außerdem verbunden mit der Fläche E (der Stützscheibe), die ebenfalls an D anliegt. AC , durch $Zr_z/r_g \downarrow$ gezogen, steckt zwischen B und D selbsthemmend fest, und zwar wegen der Reibung von C und E an D , selbst wenn bei AB keine Reibung besteht. Wird aber BE durch $Kr_k/r_g \downarrow$ gezogen, so gleitet AC nach, solange man BE bewegt.

Der Kräfteplan Fig II zeigt das Gleichgewicht an AC durch das untere Viereck, das Gleichgewicht an BE durch das obere. Das Gleichgewicht am Ganzen fordert

$$\frac{Kr_k}{r_g} + \frac{Zr_z}{r_g} = \frac{2\mu Nr_s}{r_g} \quad \text{wie in Nr 412.}$$

Konstruktion des Kräfteplans: Man zeichnet $Zr_z/r_g = 180 \text{ kg}$ und $Kr_k/r_g = \frac{1}{3} Zr_z/r_g = 60 \text{ kg}$. Dann zieht man die beiden N waagrecht und F unter dem Winkel $\alpha = 10^\circ$ so weit, bis F die Mitte zwischen den N erreicht hat. Durch diesen Endpunkt von F zieht man senkrecht die beiden $\mu Nr_s/r_g$ und mißt ab $N = 342 \text{ kg}$.

Für den Stillstand der Winde, $K = 0$, gilt der Kräfteplan Fig III, aus dem sich $N = 512 \text{ kg}$ ergibt.

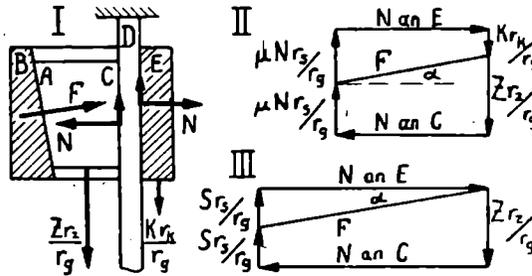


Fig 257. Lastdruckbremse abgewickelt

415. Andere Lastdruckbremse. Hat die Winde ein Schneckenrad, welches selbsthemmend ist, so ist dieses schon selbst eine Lastdruckbremse. Es hat dann aber einen schlechten Wirkungsgrad (Nr 330). Ist es nicht selbsthemmend, so kann man das Drucklager als Lastdruckbremse

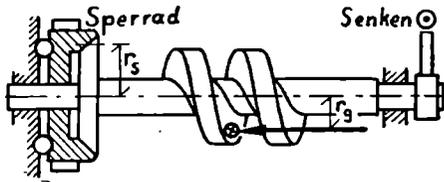


Fig 258. Drucklager als Lastdruckbremse

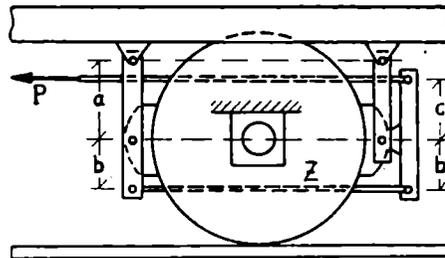
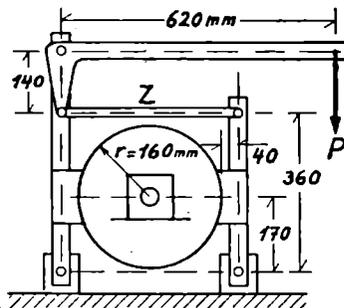
ausbauen (Fig 258). Die Schraubenspindel stützt sich dann reibend gegen eine Scheibe, die gegen Drehung im Sinne des Senkens gesperrt ist, während sie sich beim Heben mit der Spindel leicht dreht, etwa auf Kugellager. — Auch hier muß r_s groß genug sein, so daß Selbsthemmen

eintritt. Andererseits darf auch die Kraft zum Herabhaspeln nicht zu groß werden. — Sind die Reibflächen kegelig gestaltet, so ist mit einer erhöhten Reibungszahl μ' (Nr 88; 311) zu rechnen. — Vergleiche auch Nr 330 II, wo die Hubschraube durch die Reibung an der Stirnfläche selbsthemmend wurde.

416. Doppelbremse. Eine einfache Bremse (Nr 311) belastet die Achse des Rades mit Andrückkraft und Reibungskraft. Man ordnet deshalb 2 Bremsen einander gegenüber an (Fig 259). Sie werden vermittels eines Winkelhebels durch die Kraft P gleichzeitig angedrückt, indem die Kraft in der Zugstange die Hebel zusammenzieht: $Z = 4,43 P$

Am rechten Hebel wirkt $Z \leftarrow$ am Hebelarm 360 mm. Am linken tritt Z als waagerechte \rightarrow Komponente des Gelenkdrucks auf, also am Hebelarm 500 mm. Die senkrechte \downarrow Komponente des Gelenkdrucks am linken Hebel dreht nicht. Man kann auch sagen: Am linken Hebel wirkt

$$\curvearrow \text{Moment} = Z \cdot 360 + P \cdot 620 \quad \text{in der Tat} \quad = Z \cdot 500!$$



↑ Fig 260. Eisenbahnbremse

← Fig 259. Doppelbremse

Aus diesen Momenten folgen die Andrückkräfte N und die Schubkräfte S an den Bremsflächen abhängig vom Drehsinn, aus den beiden S das Bremsmoment M . Ist M gegeben, so drücken wir zunächst alles durch P aus und berechnen zuletzt P aus M . Es sei wie in Nr 311

$$\text{Bremsmoment} = M = 17,22 \text{ kgm} \quad r = 160 \text{ mm} \quad \mu' = 0,355$$

Dann berechnen wir wie in Nr 311 für verschiedene Drehrichtungen

I. Bremsscheibe ↻:	links:	$N = 12,02 P$	$S = 4,26 P$
	rechts:	$N = 10,23 P$	$S = 3,64 P$
	Bremsmoment ↻ =	$M = 7,90 P r$	$P = 13,6 \text{ kg}$
II. Bremsscheibe ↻:	links:	$N = 14,22 P$	$S = 5,05 P$
	rechts:	$N = 8,65 P$	$S = 3,07 P$
	Bremsmoment ↻ =	$M = 8,12 P r$	$P = 13,3 \text{ kg}$

Im Falle II, wo der stärker angeordnete Hebel zugleich günstiger wirkt, ist M ein wenig größer, also P kleiner. Dafür ist hier aber auch die Achsbelastung größer, die Resultante aus der Differenz der N und der Differenz der S . Sie ist im Fall I: $1,90 P \searrow$ im Fall II: $5,91 P \nearrow$

417. Eisenbahnbremse. Beim Eisenbahnwagen werden die Klötze durch ein Gestänge wie Fig 260 angedrückt.

Gewünscht wird Andrückkraft links = Andrückkraft rechts

$$P \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} = P \cdot \frac{c+b}{b}$$

Also $c(a+b) = a(c+b)$ oder $a = c$

Die Zugstange muß also in Höhe der Drehpunkte der Bremshebel liegen, wenn kein Druck auf die Achse entstehen soll.

Man kann die Andrückkräfte auch aus der Zugkraft Z ableiten:

$$Z \frac{a+b}{a} = Z \frac{c+b}{c} \quad \text{also} \quad a = c$$

XV. Zusammenfassung über Statik

Die „Statik“ handelt von den Bedingungen, unter denen die Körper im Gleichgewicht bzw in unbeschleunigter Bewegung sich befinden. Diese Bedingungen haben die Form des Gleichgewichtes von „Kräften“. Kräfte sind Gewichte und alles, was sich mit Gewichten ins Gleichgewicht setzen läßt; Federkräfte, Reibungskräfte. Das Gewicht, die Schwerkraft, ist dem Körper in Beziehung zur Erde eigentümlich, die Federkräfte hängen ab von den elastischen Formänderungen, die Reibungskräfte von der Oberflächenbeschaffenheit. — Der Grundbegriff der Statik wäre also so zu definieren: „Kräfte“ sind Zahlengrößen, die vom Zustand der Körper abhängen, sind diejenigen Zustandsfunktionen, die in den Gleichungen des Gleichgewichtszustands auftreten.

Die abgeleiteten Begriffe: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Spannung, Dehnung, Elastizitätsmaß, Federkonstante, Moment, Arbeit bilden wir auf Grund von Proportionalitätsgesetzen. Wenn eine Größe zu einer anderen proportional oder umgekehrt proportional ist, so ist der konstante Faktor der Wert der einen Größe für die Einheit der andern.

Beim Rechnen mit diesen Größen folgt man den Regeln des Rechnens mit Benennungen.

Die Gleichgewichtsbedingungen können mannigfaltige Formen annehmen: Zeichnerisch: die Regel vom Krafteck, vom Kräfteplan und vom Schnittpunktsatz; ausgestaltet zur Gleichgewichtsbedingung vom geschlossenen Vieleck und Seileck. Damit gleichwertig die Komponenten- und Momentengleichungen für beliebige, zweckmäßig zu wählende Richtungen und Achsen.

Bei 2 Körpern, die miteinander in Berührung stehen, wirkt dieselbe Kraft als Wirkung und Gegenwirkung, Belastung und Widerstand, Stützkraft und weitergegebene Kraft in entgegengesetzten Richtungen. An einem aus mehreren Körpern bestehenden Ganzen sind darum die äußeren Kräfte miteinander im Gleichgewicht, während die inneren herausfallen. Umgekehrt berechnet man die inneren Kräfte aus dem Gleichgewicht der Teile. Bei jedem Bauwerk, jeder Maschine müssen die Kräfte und Momente zum Ausgangspunkt (zur Erde) zurückfließen.

Man kann zwecks Vereinfachung der Rechnungen Kräfte zu Ersatzkräften, Resultanten zusammenfassen, bei Gewichten die Schwerpunkte berechnen. Man darf Kräfte auf ihrer Angriffslinie verlegen, ohne das Gleichgewicht zu stören. Besonders einfache Eigenschaften stellt man bei 2 einander entgegengesetzt gleichen Kräften fest. Man kann ein solches Kräftepaar in seiner Ebene drehen, im Raum verschieben und verzerren, wenn nur sein Moment unverändert bleibt. Dieses ist dann für alle parallelen Achsen das gleiche. Dadurch vereinfacht sich manche Überlegung.

Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen geschieht nach den üblichen mathematischen Methoden. Man kann auch in bestimmten Fällen durch geschickte Zusammenfassung und Zerlegung der Kräfte, durch Verschiebung von Kräften und Paaren die gegebenen Kräfte unmittelbar in die weitergegebenen umformen. Gleichgewicht der Kräfte am Körper bedeutet Gleichwertigkeit der weitergegebenen Kräfte mit den Belastungen. Eine synthetische Lösungsmethode im Gegensatz zur analytischen.

Es gibt in jedem Fall eine bestimmte Mindestzahl von Stützen, die nötig sind, um die beteiligten Punkte, Scheiben und Körper (einschließlich des Rahmens, der Erde) gegeneinander unbeweglich festzulegen. Sind weniger Stützen vorhanden, so besteht Gleichgewicht, stabiles oder labiles, nur bei bestimmter Kraftverteilung bzw bestimmter Lage des Körpers. Sind mehr Stützen vorhanden, so hängt das Gleichgewicht auch noch von der Elastizität der Körper und von dem Passen der Teile ab. Es ist dann statisch unbestimmt.

Eine besondere Beziehung besteht zwischen den Kräften und den Bewegungen, die bei einer Veränderung der Stützen eintreten. 2 Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die Bewegungen, 2 Momente umgekehrt wie die Drehwinkel. Die Stützkkräfte sind den eintretenden Bewegungen entgegengerichtet. Bei mehreren Kräften wird diese Beziehung ausge-

baut zum Arbeitssatz, der unabhängig von der Art der inneren Verbindungen gilt. Auch dieser Satz führt zur Berechnung von Kräften und Momenten. Aus ihm folgt die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile.

So berechnen wir die Stützkkräfte in Maschinen und Bauwerken, Kurbel- und Zahnradgetrieben, Bremsen, Hängewerken, Fachwerken u dergl zu dem Zweck, die Stützen und Stäbe stark genug zu machen.

Wie man aus den Kräften und den Stababmessungen auf die Zug-, Druck- oder Schubbeanspruchungen schließt, ist, soweit es über die einfache Zug- und Druckbeanspruchung hinausgeht, Sache der folgenden Abschnitte, der Festigkeitslehre.

Lösungen der Aufgaben

I. Grundbegriffe der Mechanik

4. Triebräder 1724 mm \varnothing Wagenräder 375 Uml/Min
 5. Übersetzung 1:4,71 = 0,212 Ritzel 106 mm \varnothing ● 7. 0,768 mm \varnothing
 9. $p = \gamma s = 26,7 \text{ kg/m}^2$ $p (\text{kg/m}^2) = \gamma (\text{kg/dm}^3) \cdot s (\text{mm})$ ● 11. 918 mm \varnothing
 16. I $v = 31,4 \text{ m/sk}$ $s = 50,2 \text{ m}$ II $v = 24,2 \text{ m/sk}$ $t = 2,47 \text{ sk}$
 III $t = 1,836 \text{ sk}$ $s = 16,52 \text{ m}$
 17. $b = 0,530 \text{ m/sk}^2$ $t = 2,215 \text{ sk}$ $v = 1,175 \text{ m/sk}$

II. Festigkeit und Elastizität

23. $d_a = 201$ $d_i = 153$ $D = 476$ $a = 1070$ $b = 2000 \text{ mm}$
 Druckerhöhung durch Eigengewicht um 0,14 auf 2,14 kg/cm²
 25. Querschnitte 0,288 0,331 0,380 cm² Ersparnis 19%
 28. Wandstärke = 10,4 mm Kraft auf Kessel = 14,4 to
 31. $\sigma_1 = 1,21$ σ_2 $\sigma_3 = 2,68$ σ_2 $\tau_4 = 0,89$ σ_2
 32. I $d = 20,6$ $d_1 = 18,4$ $c = 7,2$ $a = 17,4$ $b = 27,8$ $s = 12,1 \text{ mm}$
 II $d = 20,6$ $d_1 = 24,7$ $c = 5,4$ $a = 23,2$ $b = 37,0 \text{ mm}$ $\tau = 418 \text{ at}$
 36. I 172 II 320 III 57,1 + 63,6 + 69,3 = 190,0 mm
 43. I $\alpha = 114'$ = 1°54' II $\tau = 314 \text{ at}$
 46. $X = 400 + \frac{3}{5}P = 760$ $Y = 400 - \frac{2}{5}P = 160 \text{ kg}$

III. Gleichgewicht am Punkt, Grundlagen

54. I $P = Q/5$ $R = 4Q/5$ $S = 2Q/5$
 II In den äußeren Strängen $H = Q/2$, in den inneren nichts
 III Seilgeschwindigkeiten 0 3 \uparrow 3 \downarrow 6 \uparrow 6 m/sk \downarrow
 Umlaufzahlen der Rollen 95,5 191 286,5 382/Min
 61. I.

γ	-40°	-20°	0°	+20°	+40°
Kraft Z	40	37,6 Min!	40	49	75 kg
Kraft W	90	103,3	117	135	169 kg

 II. $R = 1,64 W$ unter 15° gegen Vertikale
 62. $G = 657$ $A = 2040$ $B = 1930 \text{ kg}$ Stab $\varnothing = 42 \text{ mm}$ am Pfeiler 3G
 63. Zeichne das Krafteck mit $\downarrow C$ Ziehe die Seile $\parallel A$ und B
 65. $Z = 7080$ $D = 9030 \text{ kg}$ ● 68. Boden 260 Keil 145 kg
 69. Krafteck folgt aus $Q \downarrow$, Richtung von F , Größe von P . Dann Seil $\parallel P$
 73. $A = 970$ $B = 280 \text{ kg}$ ● 74. $Z = 440$ $D = 1950 \text{ kg}$
 77. Zeichne 3 Kraftdreiecke für K wie Nr 66 H wie Nr 75 S wie Nr 66

IV. Hängewerk, Reibung, Raumpunkt, Vorspannung

84. $f = 217 \text{ mm}$ über $\sigma = 917 \text{ at}$ oder über $Q = 6,94 \text{ kg}$
 85. $G = 340$ $H = 3Gt/f = 1530$ $S_{01} = 1674 \text{ kg}$ $u = f/3 = 667 \text{ mm}$
 90. $\varrho = 1507'$ $K = G \sin \varrho / \cos(\alpha - \varrho) = 8,00 \text{ kg}$ Min $\alpha = \varrho$ $K = 7,80 \text{ kg}$
 92. $K_0 = 42,3$ $K_1 = 57,2$ $K_2 = 25,5$ $K_3 = 24,9 \text{ kg}$

94. I $\varrho = 4^{\circ}35'$ $C = 214$ $B = 749$ $A = 720$ $K = 271$ kg
 II $4^{\circ}35'$ $90,3$ 699 695 $34,6$ bis $\mu = 0,105$
 III $6^{\circ}51'$ $62,9$ 695 697 $20,4$ bis $\mu = 0,213$
 IV $13^{\circ}30'$ $18,7$ links 696 716 $185,2$
 98. Anteil von P : 141 von W : 51 $A = B = 192$ $C = 141$ kg
 99. $A = 7,74$ $B = 7,38$ $C = 8,32$ to
 103. Spitzenzug $\downarrow 100 \rightarrow 556$ $A = 1018$ $D = 712$ $M = 1646$ kg
 108. $B = 0,400P$ $A = C = 0,346P$

V. Gleichgewicht an der Scheibe, Grundlagen

115. $A = 6,292$ $B = 9,083$ $C = 7,042$ $D = 7,583$ to
 116. $C = 0,4P$ $D = 0,6P$ $A = 0,522P$ $B = 0,478P$
 118. $R = 1290$ kg $1,993$ m von A $1,207$ m von B
 122. Hebelarm = $69,5$ mm $\alpha = 37^{\circ}7'$ stabil $116^{\circ}3'$ labil
 Lagerdruck = $247,1$ gr $41^{\circ}35'$ gegen Waagerechte
 124. $P \sin \alpha = Q \sin \beta$ $\alpha + \beta = 90^{\circ} + \gamma = 130^{\circ}$
 $\beta = 105^{\circ}$ 90° 75° 60° 45° 30° 15° 0° -15°
 $P/Q = 1,738$ $1,182$ $0,896$ $0,700$ $0,539$ $0,386$ $0,217$ 0 $-0,343$
 $Q/P = 0,575$ $0,845$ $1,117$ $1,427$ $1,852$ $2,592$ $4,61$ ∞ $-2,916$
 129. $V = 545$ $G_x = 1607$ $G_y = 249$ $G = 1628$ kg $8^{\circ}48'$ steiler als Baum
 131. I $B = 47,7 \rightarrow$ $A = 220$ kg $12^{\circ}32'$ gegen Vertikale
 II $B = 102,3 \uparrow$ $A = 112,7 \uparrow$
 133. $G_x = 7,4$ $G_y = 17,9$ $C = 21,0$ $A_x = 18,5$ $A_y = 22,0$ $B = 52,1$ to
 137. Dreieck ABC wie in Fig 92. Bei C rechter Winkel C über Mitte
 Brett. Gleichschenklige Dreiecke $\alpha = 2\varrho = 2 \cdot 14^{\circ}$

VI. 3 Stützkkräfte, Resultante, Kräftepaar

143. $Z = 0,394P$ $H = 1,144P$ $L = 1,135P$ Z klein, weil Hebelarm
 von P für Schnittpunkt HL kleiner als für H . $Z = 0$ wenn P über HL
 144. $C = 1,414G = 56,6$ kg $A = 0,333G = 13,3$ kg $B = 0,667G = 26,7$ kg
 beide links anliegend A bzw $B = 0$, wenn G durch Schnittpunkt BC
 bzw AC geht.
 145. I $B_p = 471$ am Umfang der Hinterräder $A_s = 1257$ $B_s = 2517$ kg
 II Dasselbe, nur $A_p = 471$ kg $B_p = 0$
 III $B_p = 471$ kg an der Achse $A_s = 1316$ $B_s = 2458$ kg
 148. $R = 9$ kg und Lager $66,7$ mm links von A $A = 11,45$ $B = -2,45$ kg
 151. $B \uparrow = A \downarrow = 33,8$ kg Maß 170 mm belanglos
 154. Leiter angelehnt: $D = 4,28$ kg \leftarrow $B_n = 43,4 = A_{xn}$ $A_{yn} = 215$ kg
 Hakenleiter: $D = 9,17$ kg senkrecht $B_n = 93,1$ $A_n = 121,9$ kg

VII. Graphische Statik, Seileck, Fachwerk

163. Resultante von PEQ nach Nr 162. Schnittpunkt mit dem \nearrow bzw
 $\rightarrow B$ gibt Richtung von A . Danach Kräfteck. Abmessen!
 164. Resultante nach Nr 162. Auflager 150 mm links der ersten Last.
 168. Fig 70: Seileck von A nach 800 , nach 90 , über B hinweg nach 400 ,
 zurück nach B Schlußlinie von da nach A .
 Fig 69: Seileck $Y 50 70 60 X$. Schlußlinie zurück nach Y .
 Fig 88 III: Seileck $AP EQ B$ unabhängig von der Neigung der Leiter.
 170. Seileck von B aus nach links bis zum Schnitt mit der Vertikale in A .
 172. Das feste Lager liegt im Berührungspunkt des gebremsten Radpaares
 mit dem Boden, — aber in der Achse, wenn Keile untergelegt sind.
 175. Seileck beginnt in D , umfaßt die 5 Lasten und G , schneidet ein auf $\nearrow A$.
 D wird dann zerlegt in B und C .
 177. $B \downarrow$ und $A \uparrow$ liegen im Kräfteplan aufeinander, ebenso wie die beiden P .
 Seileck nicht notwendig durch A , da Richtung bekannt.
 182. (+ Zug, — Druck) Stab 1: —2,0 2: 0 3: +6,2 4: —4,8 5: —6,0
 6: +4,8 7: +12,4 8: —14,3 9: —10,0 10: +14,3 11: +18,6
 12: —28,6 13: —14,0 14: +28,6 15: +24,8 16: —47,6 to

185. $A = B = 3,5P$ 1: $-1,414P$ 2: $+P$ 3: $-2,5P$ 4: $-P$ 5: $+2,121P$
 6: $-0,5P$ 7: $-1,5P$ 8: $+0,5P$ 9: $+0,707P$ 10: $-P$ 11: $-P$
 186. $E = 2250$ $W = 1500$ $S = 375$ $A_y = 6150$ $A_x = 1800$ $B = 6000$
 $S_6 = 5870$ kg

VIII. Gleichgewicht am Körper

195. $A = 8,70$ $B = 4,73$ $C = 5,57$ $D = 2,69$
 $E = 7,07$ $F = 3,67$ $P = 1,90$ $G = 10,16$ kg
 196. $x = z$ $u/v = z/y$ Liegt D zu weit rechts, so wird der Einfluß der
 $A + B$ auf P zu klein. Verschiebt man nun Q nach C hin, so wächst
 sein Einfluß. Die Brücke sinkt.
 199. $n_1:n_3 = 30,5$ rund 30 geteilt in $n_1:n_2 = 6$ $n_2:n_3 = 5$
 $R_2 = 270$ $R_3 = 400$ mm $P = 15,25$ $X = 142$ $Y = 480$ kg
 Für 4 m Hebung 119,4 Kurbelumdrehungen
 202. $X - Y = 662$ $X = 1471$ $Y = 809$ $A_x = 855$ $B_x = 3135$
 $A_y = 225$ $B_y = 175$ $A = 884$ $B = 3140$ kg
 $\alpha = 14^\circ 44'$ $\beta = 3^\circ 12'$ gegen Waagerechte
 203. I $A_x = 37$ $B_x = 81$ $A_y = 188$ $B_y = 366$ kg
 II 20 195 147 315
 Bei II behalten die tangentialen Komponenten die Werte 142
 bezw 480 kg, weil die Momente dieselben sind.
 209. $Q = 132$ $C_x = 28,5$ $C_y = 51$ $C_z = 332$ $D_y = 1$ $D_z = 249$ kg
 211. $H = 389$ $A_x = 374$ $A_y = 146$ $A_z = 75$ $B_x = 44$ $B_y = 120$ kg
 217. Hinterachse links: 471 kg aufwärts \parallel Straße Am Rad \perp Fahrtrichtung
 vorn rechts, hinten links je $S = 110$ kg \perp Straße: $A_l = A_r = 658$
 $B_l = B_r = 1229$ kg Die einseitige Stützkraft wird durch das Paar SS
 in die Mittelebene verlegt Danach wie Nr 145 III

IX. Mehrere Körper, Fachwerk

222. $A \downarrow = B \uparrow = Z(h + 2e + d)/l$ unabhängig von $abc\alpha$
 224. $A_x = B_x = 0$ $A_y = 30,9$ $B_y = 95,0$ $C_y = 53,1$
 $D_x = 71,1$ $E_x = 17,8$ $D_y = 73,3$ $E_y = 126,7$
 $F_x = 71,1$ $G_x = 17,8$ $F_y = 30,9$ $G_y = 9,8$ kg
 227. $A = 139,3$ $B = 110,7$ $C_x = S = 68,8$ $C_y = 30,7$ kg
 230. I $B = 260$ II $B = 44$ kg
 232. Raddrucke hinten \parallel Erdboden je 248 \perp Erdboden je 1213 kg
 $A_x = B_x = 248$ $A_y = 1253$ $B_y = 1173$ beachte Motormoment
 $C_x = E_x = 272$ $C_y = E_y = 1331$ } nur aus den Raddrucken
 $D_x = F_x = 24,2$ $D_y = F_y = 118$ } Kräfte an Rad 96 ohne Einfluß
 $G_x = H_x = 24,2$ $G_y = 564$ $H_y = 932$ aus DF und Kraft am großen
 Kegelrad $J_y = 1575$ $K_y = 315$ kg
 236. Stabkraft 9: $-6,9$ 10: $+33,6$ 11: $-13,5$ 12: $-22,8$ 13: $+8,1$
 14: $+22,8$ 15: $-28,5$ to ● 237. siehe Nr 182
 240. Stabkraft 1: $-72,1$ 2: $+58,3$ 3: $+15,0$ 4: $+58,3$ 8: $+60,0$
 9: $+4,5$ 10: $-63,6$ 11: $+18,3$ 12: $-63,6$ 13: $-2,2$ 14: $+64,3$
 15: $+20,6$ 16: $-70,2$ 17: $-1,1$ 18: $+65,1$ 19: $+20,0$
 20: $+65,1$ 21: $-80,6$ to
 241. Stabkraft 1: $+1070$ 2: -990 3: -810 4: $+1070$ 5: $+1280$
 6: -1980 7: -1215 8: $+2140$ 9: $+1570$ 10: -2960
 11: -1620 12: $+3200$ 13: $+1900$ 14: -3950 $Z = 5110$ kg

X. Arbeit

257. Dreht sich Stab B um ϵ , so bewegt sich K \swarrow um $l \arccos \epsilon$ \downarrow um $p \arccos \epsilon$
 \leftarrow um $a \arccos \epsilon$ Kolben \leftarrow um $2a \arccos \epsilon$ Also $D:K = p:2a$
 258. Verschiebung des Angriffspunkts A bei Drehung um ϵ \swarrow um $a \arccos \epsilon$
 Senkung des Gewichts A um $a \arccos \epsilon \cos \alpha = h_a \arccos \epsilon$ Ebenso bei B
 Also $A:B = b \cos \beta : a \cos \alpha = h_b : h_a$

260. Der durch S_9 angeschlossene Fachwerkteil senkt sich in der Parallelführung $8/10$ um s Also $S_9 \cdot s = (P_2 + P_3 + P_4 + P_7 + P_8) \cdot s$
 264. $D = 0,623 P$ Zug $B_x = 0,211 P \rightarrow A_y = Q - 0,633 P$ $B_y = Q + 1,633 P$
 269. $N = 9280 \text{ kgm/Min} = 155 \text{ kgm/sk} = 2,06 \text{ PS} = 1,52 \text{ KW}$ $M = 1,64 \text{ kgm}$
 270. I $W = 4120 \text{ kg}$ $N = 91600 \text{ kgm/sk} = 1222 \text{ PS}$
 II $W = (4120 + 4290) \text{ kg}$ $N = 140200 \text{ kgm/sk} = 1870 \text{ PS}$
 271. $N = 900 \text{ kgm/sk}$ Umfangsgeschwindigkeiten $4,2$ $6,825 \text{ m/sk}$
 Drehzahlen $4,77/\text{sk}$ $8,36/\text{sk}$ Zahnkräfte $K_t = 214$ $Q = 132 \text{ kg}$
 Momente $30,0$ $17,14 \text{ kgm}$

XI. Schwerpunkt, Stabilität

282. I $A = 678$ $B = 625$ $C = 384 \text{ kg}$
 II $A_y = 1687$ $A_x = B = 928 \text{ kg}$ III $A = 422$ $B = 1265 \text{ kg}$
 286. $s = 0,359h = 10,04 \text{ cm}$ über Grundlinie ● 287. $s = 20,2 \text{ mm}$
 291. $s = 0,861r$ $s_1 = 0,0946r$ Hierbei Fläche mal Schwerpunktsabstand
 des Kreissektors = Moment = $r^2 \cdot \text{Sehne}/3$
 292. von der Ecke links unten $\rightarrow 11,29$ $\uparrow 8,17 \text{ mm}$ genauer von Mitte
 des großen Rechtecks $\leftarrow 0,210$ $\uparrow 2,666 \text{ mm}$
 296. $s = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h} = 0,846r$ $s_1 = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r-h}{3r-h} = 0,0796r$
 299. $\text{arc } \alpha = 6/270$ $c = 1,425 \text{ mm}$
 301. $h = r/\sqrt{2} = 0,707r$ Die Momente für M gleichsetzen!
 305. $r_2 = 146,0$ $x = 191,3 > r_2$ $r_1 = -617 \text{ mm}$ (Mulde!)

XII. Reibung

313. I $K = 148$ II $S = 107,6$ $N = 393 \text{ kg}$ $S/N = 0,274$
 317. $\mu = 0,243$ $K_2 = 6,43 \text{ kg}$
 319. $\alpha = 151^\circ$ $Z/V = 2,09$ $Z - V = 682$ $V = 626$ $Z = 1308 \text{ kg}$
 323. $M = \frac{\sqrt{2}\mu Pr}{1 + \mu^2}$ μ' um 41% größer als μ $N_1 = 1,325 G$ $S_1 = 0,0795 G$
 $U = 0,0212 G = 1,69 \text{ kg}$ $N_2 = 1,494 G$ $S_2 = 0,0896 G$
 325. $Y_0 = 330$ $A = 152$ $B = 222$ $U = 4,7$ I $Y = 334,7$ II $Y = 325,3 \text{ kg}$
 332. $K_x = 103,2$ $A = 230$ $B = 232 \text{ kg}$ $M_2 = 929 - 438 - 92 = 399 \text{ kgem}$
 stützend Die Welle kann also angetrieben werden $\eta = 26,6\%$
 336. Kraft = $4,43 \text{ kg}$ ● 339. $K = 85,5 \text{ kg}$ $N = 190 \text{ kgm/sk} = 2,54 \text{ PS}$
 341. $d = 9 \text{ mm}$ $\mu' = 0,0035$ $U = 0,091 \text{ kg}$
 344. Kraft am Berührungspunkt Draht/Klemmstück zielt zum Schnittpunkt
 Zugstange/Verbindungsflasche Neigung gegen Normale $< \varrho$

XIII. Graphische Statik, Sonderausführungen

356. $A_x = B_x = C_x = 27,86$ $C_y = 3,12$ $A_y = 32,88$ $B_y = 27,12 \text{ to}$
 366. I Endwert links $+0,451$ rechts $-4,507$ Knick links $-0,751$
 rechts $+0,300$ to/to II Cremonaplan für $P = 1$ to am linken Auf-
 lager, rechts eingespannt, oder umgekehrt
 367. I $S_7 \text{ max} = 16,68$ $S_7 \text{ min} = -2,41$ $-S_8 = S_{10} = 25,34$ $S_9 \text{ max} = +1,57$
 $S_9 \text{ min} = -10,86$ to II $S_7 = 1,63$ $-S_8 = S_{10} = 3,31$ $S_9 = -0,85$ to
 369. Seileck von Schnittpunkt A/Z über PEQ zur Vertikale B Schlußlinie
 A zerlegen in C und Z
 372. $A = 13,0$ $B = 11,5$ $S_{14} = 11,92 \text{ to}$
 374. $S_7 = +19,7$ $S_8 = +77,0$ $S_9 = +16,0$ $S_{10} = -135 \text{ to}$
 376. $x = 0,473 \leftarrow$ $y = 3,515 \text{ mm} \downarrow$
 379. $x_D = 1,88 \rightarrow$ $y_D = 0,43 \downarrow$ $x_C = 1,98 \rightarrow$ $y_C = 0,26 \text{ mm} \uparrow$
 $\beta_5 = 690 \cdot 10^{-6} = 2,4'$
 382. Senkung der Lastpunkte = $1,36 \text{ mm}$

XIV. Vermischte Aufgaben

402. $K = 436$ $A_x = B_x = 218$ $A_y = 455$ $B_y = 2575 \text{ kg}$ $D_y = 2630$
 $C_x = 653$ $D_x = 217$ $C_z = D_z = 1170 \text{ kg}$ in Fahrtrichtung
 405. $A = 42,5$ $B = 18,6 \text{ kg}$ $\alpha = 15^\circ 16'$ $\beta = 36^\circ 50'$

Namen- und Sachregister

Die Zahlen bedeuten Nummern, nicht Seiten.

- Abziehen einer Last 60
 äußere Kräfte 126f .
 d'Alembert 262
 Anfangsstabilität 303
 Angriffspunkt exzentrisch 134
 Angriffslinie 119
 Anheben 51
 Anzahl d Stützkkräfte 104 146 179
 183 213 233 243f 358
 Anziehungskraft 393
 Arbeit 251f 262 303 363 384
 Aufhängung 58 59
 Auflagerkräfte 112 132 167f 360 200
 Ausleger 65 97 127 134
 Axiom 245
 Azimut 97 210 212 406f
- Balken, verschieden hohe Auflager
 Bahnhofsdach 181 241 [397
 Bandbremse 318
 Baugerüst 263f
 Befestigungskeil 95
 Benennungen 2f
 Bergstütze 142 216
 Beschleunigung 12f
 Bewegliche Last 359f
 Bewegungskeil 93f
 Bewegungsverhältnisse 53 194 198
 251f 383
 Beweis 178 245 262
 Blockzange 342
 Bock dreibeinig 96f
 Bogenschwerpunkt 288
 Bolzenverbindung 32
 Bremsen 311f 318 411f 416f
 Bremshebel 124
 Brett angelehnt 137
 Briefwaage 123
 Bruchspannung 21 29 37
 Brücke 115 132f 167f 179f 191 233f
 360f
- Culmann 141 174f 373
 Cremona 180 370
- Dampfwalze 334
 Dehnung 33f
 Dezimalwaage 193f
 Diagonale 58 235
 Differentialflaschenzug 251 327
 Differentialgetriebe 231f
- Doppelbremse 416
 Draht Eigengewicht 24f
 Drahtseil 38f
 Drahtspannung 83f
 Drahtspeichen 107
 Dreieckschwerpunkt 284 286
 Dreigelenkbogen 225 263 352f
 Drei Stützkkräfte 141f 174
 Drehkran 126 156f 255 398f
 Drehpunkt 113 125 134 141f 146
 Drehung 381f
 Druck Fundament 23
 Drucklager 207f 331 415
 Drucklagerbügel 290
 Druckmittelpunkt 283
 Druckverteilung 321f
 Durchbiegung Fachwerk 377f
 Durchflußmenge 10f
 Durchhang 57 81f
- Eigengewicht 24f 228 242
 Einflußlinie 360f
 Einheit 2 391f
 Einstellung 63 69 122
 Eisenbahnbremse 417
 Eisenbahnzug 4 12f 270 338 359
 Elastizität 33f 42 395
 Elastizitätsmaß 34f
 Elastizitätsgrenze 37
 Empfindlichkeit 298f
 Exzenter 326
- Fachwerk Arbeitssatz 259f 383f
 — Cremona 179f 370 Culmann 373
 — Durchbiegung 377f
 — Einflußlinien 360f Raum 243f
 — Ritter 233f Schwerpunkt 281
 — statisch unbestimmt 383f
 Fahrwiderstand 337
 Fall 16
 Federkonstante 44 306 384 396
 Flaschenzug 51f
 Fließen 37
 Fundament 23
 Freiheitsgrad 104 146 244 213
 Froschklemme 344
- Galgen 125
 Gartenpforte 210
 gebogener Obergurt 183 238f 365
 gekreuzte Diagonalen 235

Die Zahlen bedeuten Nummern, nicht Seiten.

- Gerberträger 133
 Geschwindigkeit 1
 Gestängeschloß 30
 Gewicht der Längeneinheit 8f
 Gewichtseinheiten 393
 Gewölbe 351f
 Gittermast 243
 Gleichgewichtsbedingungen 70 166
 Gleitmaß 42
 Gleitstück 136
 Gradmessung 391
 Greifer 229f 403
 Größe 2

 Hängewerk 62 81f 86 228
 Halslager 126
 Hebelarm 119
 Hebelbremse 311f
 Hebelgesetz 111f 156f
 Hilfstragwerk 371
 Hooke 34f
 Hubschraube 329f

 indifferent siehe Stabilität
 innere Kräfte 116 126f

 Kahn Stabilität 307
 Keil 93f
 Keilverbindung 30
 Keilnut 88 311 323
 Kegelräder 208f 271
 Kessel 26f 41
 Kette 22
 Kilowatt 267
 Kipplore 302
 Klemmgesperre 312
 Kniehebel 76 257 396
 Komponente 58
 Komponentengleichungen 59 67 70f
 97f 113 146 245
 Kräftepaar 149f 156f 165 176f 205
 Kräfteplan 75 81 180f [408
 Kräftezug 70 86
 Krämerwaage 196 252
 Krafteinheiten 394
 Krafteck 70 101 166
 Kraftschraube 404f
 Kranbrücke 242 367
 Kreisteile Schwerpunkt 288f
 Kreuzgewölbe 357
 Kreuzkopf 66 89 136
 Kritik 245
 Kugelkessel 27
 Kugellager 340f

 Kugelteile Schwerpunkt 294f
 Kuppel 358
 Kurbel und Kupplung 204

 labil siehe Stabilität
 Ladebaum Punkt 64 74 254
 — Ebene 128f 134 156f Raum 212
 Längeneinheiten 391
 Lageplan 86 161
 Lagerdruck 119
 Lagerreibung 320f
 Lagerträger 221f
 Lastdruckbremse 411f
 Leistung 265f 324 339
 Leiter 130f 135 141 153f 163 174 261
 Leitungsdraht 83f
 Lore 302

 Magirusleiter 171f
 Malerleiter 226f 368
 Markise 143
 Maßsysteme 394
 Maßverhältnisse 31
 Maßzahl 2f 267
 Masse 14
 Mast verspannt 75 100f 106
 Meile 391
 Moment 111f 406f
 Momentengleichung 113 146 245

 Neigung 97 210 212 406f
 Nietpresse 77
 Normalspannung 39
 Normalzug 359

 Parabelschwerpunkt 410
 parallele Gurte 182 233f 360f 377f
 Parallelführung 144 194 234 252
 Parallelogramm der Kräfte 58
 Perpetuum mobile 273f
 Pferdegeschirr 114
 Pferdestärke 267
 Platte 191f
 Pol siehe Seileck
 Polonceaubinder 186 239 370f
 Prony'scher Zaum 272
 Proportionalitätsgrenze 37
 Pumpenleistung 269
 Pyramidenschwerpunkt 293

 Querkürzung 40

 Raumaufgaben 96f 191f 243f 398f
 Raumelastizität 395

Die Zahlen bedeuten Nummern, nicht Seiten.

- Reibung Widerstand 55 87f 93 311
 338
 — Stützkraft 91 95 135 312 338 342f
 — rollende 333f Seilreibung 314
 Reibungskreis 322f 326f
 Reibungswinkel 89f 135
 Reißlänge 24
 Resultante Punkt 58 70f 102
 — Ebene 117f 147f 161f 155 178
 — Raum 404f
 Riemenscheibe 3 201f 268
 Ritter 234
 Rohr 28
 Rohrzange 343
 Rolle 51f 120

 Schaukel 120 300
 Scheibe 119f 144
 schiefe Ebene 56 67f 91f
 Schneckenrad 207 331f 415
 Schnitt (Ritter) 234
 Schnittpunktsatz 119f 141 174
 Schraube 329f
 Schraubzwinge 136
 Schubspannung 29f
 Schwedler 358
 Schwerebeschleunigung 13
 Schwerpunkt 281f 410
 Schwimmkran 99
 Sechskomponentenwaage 409
 Segmentschwerpunkt 291 296
 Seileck 86 162f 166f 174f 183f 351f
 Seilreibung 314f [355
 Seismograph 306
 Sektorschwerpunkt 289 295
 selbsthemmend 311f 342f 329f 318
 326 411f
 Senkung Knotenpunkt 105 375f
 Skalar 406
 Spannung 21f
 spez Gewicht 6
 Sonntag mittlerer 392
 Spiegelablesung 35 42
 Spill 316
 Spitzbogen 357
 Sprengwerk 86
 spröde 37
 Spurlager 126 328
 Stabilität 121f 194 272 297f
 Stabkraft siehe Fachwerk
 Standsicherheit 398 401
 statisch bestimmt 104f 114 120 132
 135 179 191 214 235 244 383
 Steckschlüssel 205

 Stehauf 300
 Steigung 207
 Stehleiter 369
 Stevinsche Kette 56
 Stoffmenge 393
 Straße Widerstand 337
 Streckgrenze 37
 Stützlinie s Seileck
 Stützkraft 56 64

 Tafelwaage 196 252
 Teilung 207
 Träger 115 132f 167f 179f 191 221f
 Trägheit 14f [233f
 Trapezschwerpunkt 284
 Treibriemen 3 319 201f 268
 Tür 120 211

 Übersetzung 3 5 198
 Übertragung Kräfte Momente 246
 Umlaufzahl 3f

 Vektor 406f
 Verlegung von Kräften 119 132 134
 157
 Verschiebungen 256 262 375
 Verschiebung von Lasten 152f 157
 Verschiebungsplan 377f
 Vorgelege 197 200f
 Vorspannung 44f 100 104f 201f

 Waage 123 193f 252 298 409
 Wagen beschleunigt 14f
 — dreiachsig 114
 — schiefe Ebene 142 145 214f
 Wagenrad 4 337f
 Walze 333f 345
 Wasserdruckprobe 41
 Wasser Elastizität 395
 Winde 197f 206 265
 Windengestell 223f
 Winkeländerung 42
 Winkelhebel 119 156f 173 258
 Wirkung und Gegenwirkung 52
 Wölbung 300 304f
 Winkelgeschwindigkeit 266

 Zahnrad 197f 201 268
 Zeiteinheiten 392
 Zone Schwerpunkt 294
 Zufassen von Walzen 345
 Zusammenhänge d Gleichungen 245
 Zweiradkran 401f
 Zylinderdeckel 44f

Urteile über die übrigen Werke des Verfassers:

„Das in zweiter Auflage erschienene Buch ist eine Festigkeitslehre von ausgesprochener Eigenart . . . So ungewohnt die heuristische Methode für ein Lehrbuch dieser Art erst anmutet, muß man bestätigen, daß der Gedanke, konsequent durchgeführt, durchaus erfolgreich ist . . . Der pädagogisch außerordentlich gelungene Aufbau des Buches verrät neben der sprachlich knappen Darstellung den erfahrenen Lehrer . . . Unter bewußtem Verzicht auf eine ‚elegante‘ Ableitung der Formeln ist der Verf. bestrebt, mit einfachsten mathematischen Mitteln auszukommen.“

„Optik“, Zeitschrift f. d. ges. Gebiet d. wiss.
u. angew. Optik, Band I Heft 6/1946.

„Die Aufgaben sind sämtlich mit großer Sorgfalt durchgearbeitet. Die Vielseitigkeit der technischen Anwendungsgebiete, aus denen sie stammen, gibt den Büchern eine große Lebendigkeit. Dabei ist überall das Bestreben erkennbar, die Lösung mit den denkbar einfachsten Mitteln zu erreichen . . .“

Zeitschrift des VDI. über Bd. 3:
„Kinematik, Dynamik, Hydraulik“.

„. . . in einer Braunschweiger Bücherei das Buch ‚Wärmelehre‘ in die Hand. Je mehr ich in den Inhalt hineinkam, umso mehr wurde ich durch die Fülle des Dargebotenen, die Klarheit des Ausdrucks beeindruckt . . . Das Buch war wie eine Offenbarung und die volle Schönheit von Wissen und Erkenntnis kommt einleuchtend zum Ausdruck . . .“

„. . . besonders hervorheben, daß der Verfasser weder ein Kochrezept noch etwa gar eine fertige Mahlzeit anbietet, sondern tatsächlich durch sparsamste Verwendung von Worten zum Nachdenken zwingt, immer wieder zwingt zur Überprüfung, und auf diese Weise Schritt für Schritt die Gedankenarbeit bewirkt, die notwendig ist, um klare Vorstellungen der Probleme zu bekommen.“

Dipl. Ing. Reinhold Bues, Braunschweig.