EDITURA DE STAT

LITERATURA ŞTIINŢIFICĂ

MANUALE UNIVERSITARE

AU APĂRUT:

I. F. LADON . . . . Bazele calculului vectorial, vol I şi II

A. S. HINCIN . . . . Opt lecţii de analiză matematică

A. V. DUMANSCHI . . . . Coloizii

VOR APARE:

N. N. LUZIN . . . . Calculul diferenţial

N. N. LUZIN . . . . Calculul integral

A. VLASOV . . . . Curs de matematici superioare, vol. I şi II

N. M. GUNTHER
şi
R. O. CUZMIN . . . . . . Culegere de probleme de matematici superioare, vol. I, II şi III

G. C. SUSLOV . . . . Mecanica raţională

N. D. PAPALEXI . . . . . Curs de fizică

G. S. LANDSBERG . . . . . Optica

O. V. NECRASOV . . . . . Curs de chimie generală

L. B. LEVENSON . . . . . Teoria mecanismelor şi maşinilor

M. F. MIRCINC . . . . . . Geologia petroliferă

ES

PREŢUL LEI 340.—

I. F. LADON

BAZELE CALCULULUI VECTORIAL

VOL. II

EDITURA DE STAT

I. F. LADON

BAZELE
CALCULULUI VECTORIAL

ÎN ROMÂNEȘTE DE
LEONID STRAȘUN

VOL. II.

E D I T U R A D E S T A T

1 9 4 9

Titlul în original:

ЛАДОН И. Ф.

ОСНОВЫ
ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Издание ВЭТА
ЛЕНИНГРАД
1938

Partea a III-a

TEORIA CÂMPURILOR

Capitolul VII

CÂMPUL SCALAR

§ 47. CÂMPUL SCALAR ŞI SUPRAFEŢELE DE NIVEL

Definiţie. Fie un domeniu Ω în spaţiu (vezi fig. 95). Ii atribuim o funcţie *scalară* φ, *având o valoare numerică bine determinată în fiecare punct.* Vom numi o funcţie de acest fel *funcţie de punct* în domeniul considerat, iar domeniul Ω îl vom numi *câmp scalar al funcţiei* φ. Dacă ne vom referi la coordonatele cartesiene, poziţia fiecărui punct va fi determinată de coordonatele lui x, y şi z. Prin urmare, putem caracteriza funcţia φ *drept o funcţie scalară oarecare de coordonate* x, y, z.

$$\varphi(x, y, z) \qquad (1)$$

In cazul general când nu ne vom referi la un anumit sistem de coordonate, vom scrie

$$\varphi(M) \text{ sau } \varphi(\mathbf{r}) \qquad (2)$$

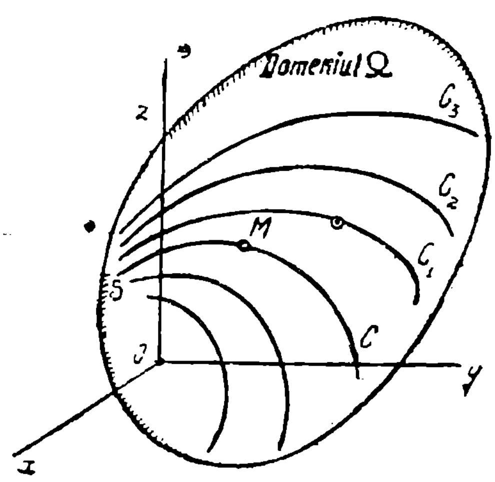


Fig. 95

Acest simbol ne arată că valoarea lui φ depinde de poziţia punctului M.

Domeniul Ω poate ocupa o parte limitată a spaţiului sau întregul spaţiu. In prima ipoteză trebue precizate în fiecare caz concret suprafeţele care-l limitează. In particular, domeniul Ω poate degenera într'un plan (sau într'o porţiune de plan).

Zicem atunci că avem de a face cu „un câmp scalar plan."

Noţiunea câmpului scalar este foarte răspândită în fizică de unde a trecut şi în ştiinţele matematice. Se pot da o mulţime de exemple fizice de câmpuri scalare.

Să considerăm astfel domeniul Ω care reprezintă un volum oarecare ocupat de un corp fizic la un anumit regim termic. Temperatura T are o valoare bine determinată în fiecare punct al corpului

$$T(x, y, z).$$

Ansamblul valorilor lui T în toate punctele volumului considerat constitue *câmpul scalar al temperaturilor*. Dacă vom înţelege prin domeniul Ω volumul unui solid oarecare, putem considera densitatea materiei $\gamma(x, y, z)$. în fiecare punct al solidului. Obţinem punctul scalar al densităţilor ş. a. m. d. [1]).

Să considerăm încă un exemplu din teoria electricităţii. Un câmp electrostatic este produs de sarcina punctiformă q, situată într'un punct oarecare A (§ 44. fig. 89). Fie M punctul considerat al acestui câmp, situat la distanţa r de sarcină. După cum am văzut mai sus, fiecărui punct M îi poate fi atribuită o mărime scalară V egală cu

$$V = \frac{q}{\varepsilon r} \tag{3}$$

O vom numi *potenţialul câmpului electrostatic în punctul dat*. Numeric, această mărime este egală cu travaliul pe care l-ar efectua forţele câmpului deplasând o sarcină unitară $+1$ din acest punct la infinit. Totalitatea valorilor funcţiei V în toate punctele spaţiului constitue un câmp scalar oarecare numit *câmpul scalar al potenţialului*. Dacă acest câmp electrostatic va fi produs de câteva sarcini punctiforme, potenţialul lui într'un punct arbitrar se va exprima, după cum am văzut, prin formula:

$$\frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{q_2}{\varepsilon r_2} + \ldots\ldots + \frac{q_n}{\varepsilon r_n}, \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i},$$

r_i — fiind distanţa punctului considerat M dela sarcina q_i

Problema noastră constă în studiul metodelor de cercetare a câmpurilor scalare.

Prima şi cea mai simplă metodă constă în trasarea aşa

---

1) După cum se ştie din fizică, prin densitatea γ a unui corp într'un punct dat se înţelege $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v}$, adică limita raportului unei mase infinit mici Δm către volumul Δv din jurul punctului, când cel dintâi tinde spre zero, strângându-se în jurul punctului considerat.

numitelor „suprafețe de nivel“ sau „suprafețe izostatice“. Să atribuim scalarului φ o valoare numerică oarecare C

$$\varphi(x, y, z) = C \tag{4}$$

și să găsim *locul geometric al tuturor punctelor regiunii în care funcția primește această valoare dată.* Vom obține, în general, o suprafață S bine determinată, cunoscând din geometria analitică că locul geometric al punctelor ale căror coordonate satisfac o ecuație de forma (4), constitue o suprafață. Această suprafață e numită suprafață izostatică [1]) sau de nivel, iar egalitatea (4) reprezintă ecuația ei în coordonate carteziene.

Atribuind lui C diferite valori numerice

$$C_0;\ C_1 = C_0 + \Delta C_0;\ C_2 = C_1 + \Delta C_1;\ \ldots\ldots, \text{ ș. a. m. d.},$$

vom obține *o familie de suprafețe de nivel.*

In științele aplicate aceste suprafețe poartă nume speciale. In electrostatică li se zice suprafețe *echipotențiale* (adică de potențial constant), în teoria căldurii - izoterme ș. a. m. d.

In cazul particular al unui câmp scalar plan, vom obține linii de nivel definite prin ecuațiile $\varphi(x, y) = C$. De pildă, serviciul meteorologic trasează zilnic, la ore anumite, linii de temperatură constantă („izoterme“) și de presiune constantă („izobare“) pe harta fiecărei țări. Pe cărțile topografice vedem linii „orizontale“, etc.

In practică, liniile sau suprafețele de nivel se trasează la „trepte“ numerice *egale* una de alta, adică

$$\Delta C_0 = \Delta C_1 = \Delta C_2 = \ldots\ldots = \Delta C.$$

Imaginea suprafețelor trasate în câmpul respectiv, clarifică în mare măsură *structura* lui. Această imagine ne ajută în primul rând să ordonăm oarecum concepția noastră despre câmpul în cauză, deoarece permite să judecăm care sunt direcțiile în care funcția crește, care sunt acelea în care ea scade, și în ce locuri își conservă valoarea. Inafară de aceste considerente pur calitative, imaginea suprafețelor de nivel ne permite și unele aprecieri cantitative, cu condiția ca suprafețele să fie trasate la „trepte” numerice ΔC egale. Așa, de pildă, regiunilor în care suprafețele de nivel sunt mai apropiate unele de altele și în care „densitatea“ lor este mare, le corespunde o variație mai rapidă a funcției φ între două puncte vecine. Dimpotrivă, în locurile unde suprafețele de nivel sunt „rare-

---

1) [Dela cuvântul ἴσος : „egal“. Suprafețele izostatice sunt niște *suprafețe de valoare constantă* pentru funcția φ. Presupunem că funcția φ este continuă înăuntrul regiunii considerate, cu excepția unor puncte și linii, unde poate suferi discontinuități.]

fiate", funcția variază mai încet. Deci ne putem face o idee justă despre rapiditatea variației unei funcții după suprafețele lor de nivel. Această idee va fi amănunțit tratată în cele ce urmează.

Să facem următoarea observație: Dacă φ reprezintă o funcție *univocă*, suprafețele de nivel nu se pot întretăia în niciun punct al câmpului. Intr'adevăr, dacă într'un punct oarecare s'ar întretăia două suprafețe de nivel C și C_1 ($C_1 \neq C$), aceasta ar însemna că în punctul de intersecție funcția poate avea *în acelaș timp două valori diferite*, ceeace este imposibil, deoarece am presupus funcția φ, ca fiind univocă.

Exemplul 1. Să se studieze suprafețele echipotențiale ale câmpului electrostatic produs de o sarcină punctiformă q.

Rezolvare. Fie $q > 0$. Egalăm funcția scalară (3) cu constanta C.

$$\frac{q}{\varepsilon r} = C \tag{5}$$

Egalitatea reprezintă ecuația unei suprafețe echipotențiale; s'o scriem sub forma

$$r = \frac{q}{\varepsilon C}$$

Observăm că am obținut ecuația locului geometric al

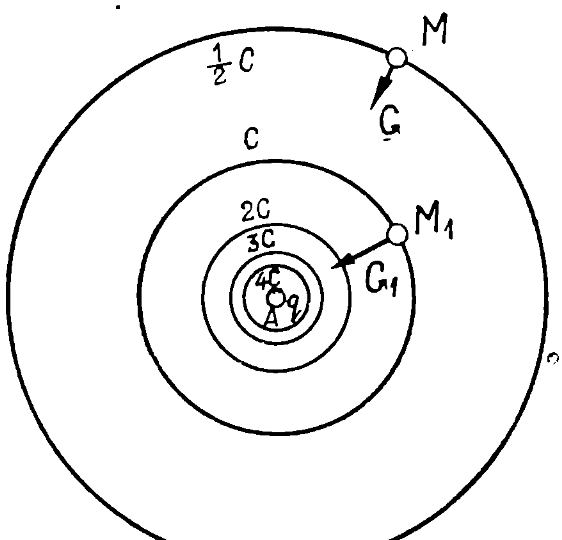


Fig. 96

punctelor egal depărtate de punctul dat A (unde este situată sarcina q) sau cu alte cuvinte — ecuația unei suprafețe sferice cu centrul în A și raza egală cu $\frac{q}{\varepsilon C}$ (vezi fig. 96). Variind parametrul C, obținem o familie de suprafețe sferice concentrice. Raza r descrește pe măsură ce crește C. Prin urmare, funcția noastră crește *pe măsură ce ne apropiem de punctul* A. In fig. 96 sunt reprezentate suprafețele corespunzătoare valorilor consecutive C; $2C$; $3C$; etc. După cum reiese din figură, suprafețele de nivel se „îndeasă" pe măsură ce ne apropiem de punctul A.

Dacă sarcina q care creează câmpul ar fi negativă, suprafețele de nivel ar fi deasemenea sferice, dar în acest caz și valorile lui C ar fi negative așa cum reiese din ecuația (5) Funcția scalară ar crește în acest caz *algebric*, pe măsură ce ne-am *depărta* de punctul A

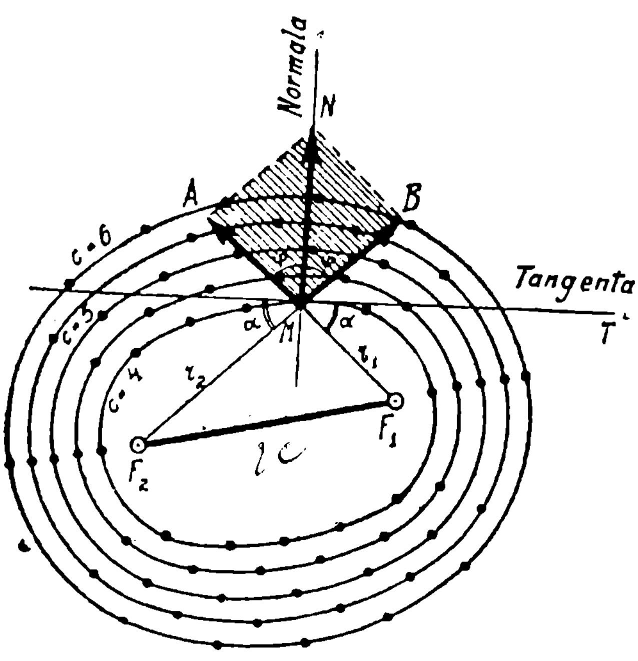


Fig 97

Exemplul 2. In planul xOy sunt date două puncte F_1 și F_2. Distanța dintre ele este egală cu $2c$ (vezi fig. 97). Fiecărui punct M al planului îi atribuim o mărime scalară

$$r_1 + r_2. \tag{6}$$

Valoarea ei numerică este egală cu suma distanțelor dintre punctele date F_1 și F_2. Care sunt liniile de nivel ale funcției

$$r_1 + r_2?$$

Rezolvare. Egalând funcția cu o constantă, obținem:

$$\varphi = r_1 + r_2 = C = const. \qquad (7)$$

Aceasta este ecuația unei familii de elipse homofocale, având focarele comune în F_1 și F_2 (în spațiu am obține o familie de elipsoizi de rotație homofocali linia $F_1 F_2$ ar reprezenta axa de rotație).

Dacă am fi considerat funcția scalară $r_1 - r_2$ liniile de nivel ar fi fost iperbole homofocale $(r_1 - r_2 = const = C)$

§ 48. DERIVATA UNEI FUNCȚII SCALARE ÎN RAPORT CU O DIRECȚIE DATĂ

GRADIENTUL

Pasul următor în studiul câmpului scalar îl constituie crearea noțiunii de derivată a unei funcții scalare în raport cu o direcție dată.

Fie dat câmpul scalar al unei funcții oarecare φ și punctul M în interiorul lui. Valoarea funcției în acest punct va fi $\varphi(M)$. Să ne deplasăm din M într'un punct infinit vecin M_1 situat la distanța Δs de primul, pe o direcție paralelă cu versorul dat **s** (fig. 98). Funcția va lua în punctul M_1 o valoare oarecare $\varphi(M_1)$. Diferența $\varphi(M_1) - \varphi(M) = \Delta\varphi$ constitue creșterea funcției corespunzătoare deplasării Δs. Să facem raportul

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta s}$$

dintre creșterea funcției și deplasarea Δs. Acest raport reprezintă *viteza medie de variație a funcției* pe unitatea de lungime a drumului parcurs în direcția dată. Intr'adevăr, dacă pe distanța Δs funcția a variat cu $\Delta\varphi$, pe o unitate de lungime funcția va varia în medie cu $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Facem pe Δs să tindă către zero. *In tot acest timp segmentul MM_1 trebue să rămână paralel cu versorul* **s.** Punctul M_1 se va apropia nelimitat de M de-a-lungul unei drepte paralele cu **s.** In general, raportul $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ va tinde către o limită determinată. Vom numi această limită:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta s} \qquad (1)$$

derivata φ în punctul M în raport cu direcția **s** și o vom nota prin simbolul $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$.

Astfel, prin definiţie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \qquad (1')$$

Simbolul „∂" accentuează faptul că funcţia poate avea în punctul considerat M o mulţime infinită de derivate în raport cu toate direcţiile care diverg din M. Totuşi derivata se notează adesea şi prin simbolul $\frac{d\varphi}{ds}$.

Să calculăm valoarea acestei derivate în coordonate carteziene. Alegem drept sistem de referinţă al câmpului nostru scalar sistemul de coordonate rectangulare $xOyz$. In acest caz, deplasându-se dela punctul M (x, y, z) până la punctul M_1 $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, funcţia va creşte cu

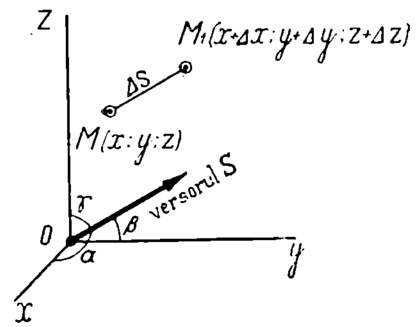


Fig. 98

$$\Delta \varphi = \varphi\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - \varphi\ (x, y, z)$$

Introducem în locul creşterii funcţiei, diferenţiala ei totală

$$\Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

fiind valorile derivatelor parţiale *în punctul* M, iar ε — o mărime infinitezimală de ordin superior lui 1.

In acest caz

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} +$$
$$+ \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta s} \qquad (2)$$

Dar,

$$\Delta x = \Delta s \cos \alpha\ ;\ \Delta y = \Delta s \cos \beta\ ;\ \Delta z = \Delta s \cos \gamma,$$

α, β, γ fiind unghiurile deplasării Δs, sau ale versorului **s** cu axele de coordonate. Deci

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha\ ;\ \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta \ \text{şi}\ \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos \gamma$$

Deoarece tinzând către M, M_1 rămâne mereu pe o dreaptă paralelă lui **s**, unghiurile α, β şi γ rămân tot timpul constante şi deoarece

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha.$$

Acelaş lucru se poate spune şi despre celelalte două unghiuri. In ceeace priveşte raportul $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, el tinde către zero. Din cele spuse reiese că putem scrie egalitatea (2) sub forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \tag{3}$$

Această expresie reprezintă tocmai *valoarea derivatei în coordonate cartesiene* în punctul *M în raport cu direcţia* **s.** Este remarcabilă structura dublă a formulei (3). Pe de o parte $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ depinde de alegerea punctului considerat *M*, deoarece $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ şi $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ depind de coordonatele punctului. Pe de altă parte, în punctul dat, valoarea derivatei depinde de direcţia (α, β, γ) în raport cu care este calculată.

Gradientul unei funcţii scalare. Examinând cu atenţie membrul drept al egalităţii (3) observăm că forma lui este apropiată de cea a proiecţiei unui vector oarecare pe direcţia **s.** Intr'adevăr, dacă **a** reprezintă un vector oarecare, proiecţia lui a_s pe direcţia **s**, caracterizată prin unghiurile α, β şi γ se exprimă prin formula

$$a_s = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma \tag{4}$$

Să construim în punctul M un vector auxiliar **G,** având *proiecţiile pe axele de coordonate respectiv egale cu derivatele parţiale ale funcţiei* φ în raport cu x, y, şi z, adică

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ G_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ G_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{6}$$

In acest caz, din formula (3) reiese *că derivata* $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$

este egală cu proiecția acestui vector **G** *pe direcția* **s** :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = G_s = \mathfrak{G}_s \tag{7}$$

Vectorul **G** *determinat de formulele (5), poartă numele de gradient și se notează prin simbolul grad φ. Prin urmare*

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{8}$$

Egalitatea (7) poate fi transcrisă sub forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \operatorname{grad} \varphi \mathbf{s} = \operatorname{grad}_s \varphi. \tag{9}$$

Din cele spuse obținem teorema: *Intr'un punct dat, derivata unei funcții scalare φ în raport cu o direcție oarecare* **s** *este egală cu proiecția gradientului acestei funcții în punctul considerat pe direcția dată,* valoarea gradientului se determină din formula (8) cu ajutorul expresiei:

$$G = \left| \operatorname{grad} \varphi \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{10}$$

iar unghiurile pe care le formează cu axele de coordonate vor fi:

$$\cos\left(\mathbf{G}, x\right) = \frac{G_x}{G}\ ;\quad \cos\left(\mathbf{G}, y\right) = \frac{G_y}{G}\ ;\quad \cos\left(\mathbf{G}, z\right) = \frac{G_z}{G} \tag{11}$$

Fiecare punct al unui câmp scalar posedă un gradient.

Notă. Atunci când am format derivata (1) am fi putut trasa prin M o curbă oarecare LL' (fig. 99) în locul dreptei MM_1. In locul formulei (1) am fi obținut în acest caz:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\smile MM_1} = \frac{\varphi}{s}, \tag{1''}$$

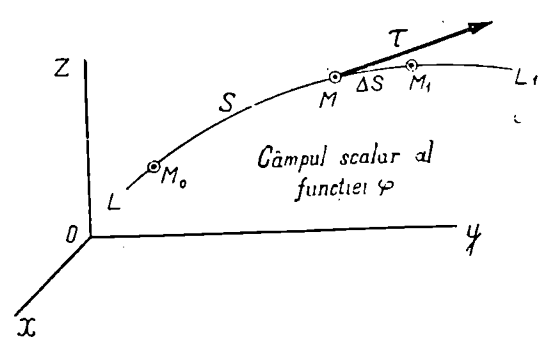


Fig. 99

Δs fiind creșterea arcului s. Limita de mai sus reprezintă tocmai derivata funcției φ *în raport cu arcul s* (deoarece coordonatele punctelor curbei sunt funcții de s). Conform cu regula diferențierii unei funcții compuse putem scrie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds} \tag{1'}$$

dar $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ și $\frac{dz}{ds}$ reprezintă tocmai cosinusurile directoare ale versorului τ tangent la curbă. Obținem deci din (4')

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathbf{G}_\tau = (\text{grad } \varphi)_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau},$$

sau altfel: *derivata unei funcții scalare φ în raport cu o curbă oarecare coincide cu derivata în raport cu direcția τ tangentă în punctul M la curbă.*

Derivatele. Fie în punctul M gradientul MC construit la scară precum și direcția **s**, determinată prin dreapta Ms. (fig. 100).

Să coborîm din C o perpendiculară pe dreapta Ms. Obținem valoarea numerică a derivatei $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, trasată grafic la aceeași scară cu MC și egală cu segmentul MA. Repetăm construcția pentru toate celelalte direcții Ms_1, Ms_2 .... ș. a. m. d. Locul geometric al tuturor extremităților acestor proiecții A, A_1, A_2 ..... reprezintă *o suprafață sferică, construită pe segmentul MC, luat ca diametru.*

Observație. Dacă una din direcțiile Mk, formează un unghiu obtuz cu direcția gradientului, derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}}$ va fi reprezentată geometric printr'un segment egal cu ML, luat însă cu semnul minus. Derivata va fi negativă în raport cu această direcție.

Din fig. 100 reiese că dintre toate direcțiile ce diverg din punctul M se remarcă *aceea care coincide cu direcția însăși a gradientului* și o a doua oarecare perpendiculară pe prima.

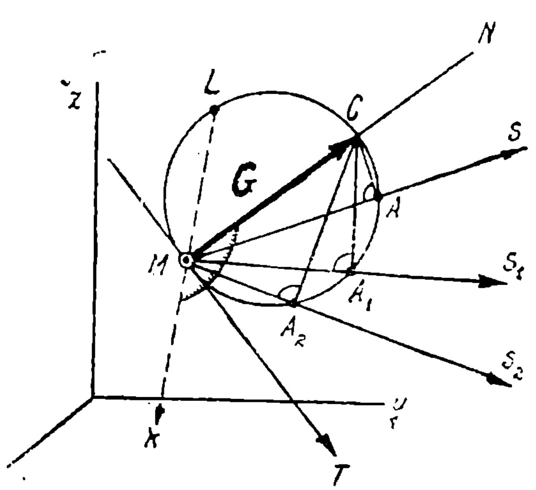


Fig. 100.

Derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ luată în raport cu direcția gradientului *primește valoarea sa maximă*, egală cu $|\text{grad } \varphi|$.

Pentru direcțiile perpendiculare pe aceasta, derivata este nulă.

Faptul acesta ne permite să dăm o definiție definitivă a gradientului, *independentă de sistemul de coordonate* considerat drept sistem de referință, definitiv legată doar de câmp și de proprietățile funcției φ.

Gradientul unei funcții într'un punct oarecare constituie un vector egal în valoare numerică cu maximul vitezei de *variație a funcției φ în punctul considerat și a cărui direcție coincide cu direcția celei mai rapide* dintre variații.

Mărimile independente de sistemul de referințe caracterizând proprietățile de care se bucură în mod *nemijlocit obiectul studiat,* poartă numele de *invarianți ai acestuia.*

De pildă, raza de curbură a unei curbe într'un punct oarecare constitue invariantul ei în punctul considerat. Dimpotrivă, unghiul dintre tangenta la curbă, într'un punct oarecare, și axa x nu va constitui un invariant, deoarece depinde ca mărime de alegerea axei x, adică de alegerea unui anumit sistem de coordonate.

Din cele spuse mai sus reiese că *gradientul unui câmp scalar constitue un invariant al câmpului.* Mărimea și direcția lui depind numai de proprietățile funcției φ, fiind independente de alegerea sistemului de referințe.

Direcția MT, perpediculară pe gradient prezintă o importanță deosebită prin faptul că derivata în raport cu ea este nulă. Prin urmare, funcția φ rămâne constantă de-a-lungul unei translații infinit mici efectuată din punctul M de-a-lungul unei direcții perpendiculare pe gradient.

§ 49. GRADIENTUL ȘI SUPRAFEȚELE DE NIVEL

1⁰ Să considerăm o suprafață de nivel S care trece prin punctul M și satisface ecuația

$$\varphi = C. \tag{1}$$

Să demonstrăm că *gradientul este perpendicular pe această suprafață.* Intr'adevăr, fie MT o direcție oarecare tangentă la suprafața de nivel în punctul considerat (fig. 101) și situată, prin urmare, în planul P tangent la suprafața de nivel ce trece prin punctul nostru. Derivata în raport cu această direcție este nulă, deoarece funcția este constantă pe suprafața de nivel. Pe de altă parte, derivata trebue să fie egală cu proiecția G_t a gradientului pe această direcție. Rezultă că

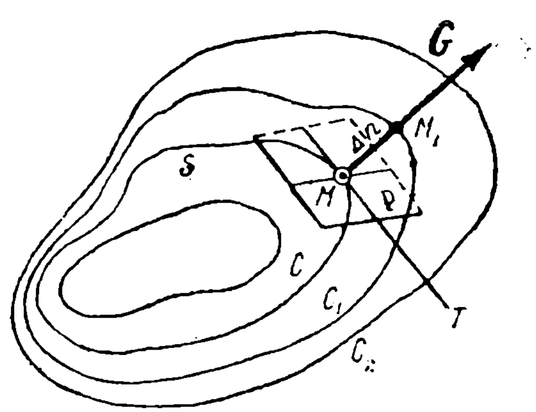


Fig. 101

$$G_t = 0$$

adică gradientul este perpendicular pe orice dreaptă dusă în planul tangent prin punctul M. Prin aceasta gradientul este perpendicular pe planul tangent însuşi. Deci *gradientul este orientat de-a-lungul normalei la suprafaţa de nivel.*

2° Să demonstrăm că *gradientul este îndreptat în sensul creşterii funcţiei.*

Să construim în punctul M (vezi fig. 101) versorul normal **n** pe suprafaţa $\varphi = C$ şi orientat *în sensul creşterii lui* φ. Să considerăm că acest versor se întretaie cu o suprafaţă infinit vecină

$$\varphi = C + \Delta C = C_1 \qquad (\Delta C > 0)$$

în punctul M_1 şi că $MM_1 = \Delta n$. In acest caz

$$\lim \frac{\Delta C}{\Delta n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G \cdot \cos(\mathbf{G}, \mathbf{n}) = G \cdot (\pm 1) \qquad (2)$$

(am pus $\pm$ în faţa cosinusului, deoarece nu ştim încă dacă unghiul dintre **G** şi versorul **n** este egal cu 0° sau 180°).

Membrul stâng al egalităţii (2) este în orice caz pozitiv, deoarece $\Delta C > 0$. Prin urmare, considerăm şi membrul drept ca fiind pozitiv. Acest lucru ne arată că unghiul dintre gradientul **G** şi **n** este nul şi deci gradientul este orientat în sensul creşterii funcţiei. Deci

$$\lim \frac{\Delta C}{\Delta n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G. \qquad (2')$$

Corolar. *Proprietăţile 1° şi 2° ne permit să dăm încă o definiţie a gradientului, importantă în practică. Gradientul unei funcţii scalare* φ *într'un punct oarecare poate fi definit ca vectorul normal la suprafaţă de nivel în punctul considerat, orientat în sensul creşterii funcţiei şi egal în valoare numerică cu derivata ei în raport cu normala pe suprafaţă.*

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}. \qquad (3)$$

Acest lucru ne confirmă din nou faptul că gradientul este nedependent de sistemul de coordonate, adică caracterul lui *invariant.*

Ne folosim de formula (3) în practică pentru calculul aproximativ şi construcţia gradientului, atunci când nu cunoaştem ecuaţia analitică a suprafeţelor sau liniilor de nivel.

Presupunem aproximativ

$$\text{grad } \varphi \approx \frac{\Delta C}{\Delta n} \mathbf{n} \qquad (\Delta C > 0) \qquad (3')$$

Astfel se procedează pentru construirea gradientului pe hărţile meteorologice.

Incheiem capitolul printr'un exercițiu din domeniul electrostaticei.

Exercițiu. Câmpul electrostatic este produs de sarcina punctiformă q situată în punctul A (fig. 96). Să se afle gradientul potențialului

$$V = \frac{q}{\varepsilon r} \tag{4}$$

Rezolvare. Ne vom referi la sistemul de coordonate cartesiene rectangulare cu originea în punctul A. Vom avea în acest caz pentru punctul considerat M (x, y, z)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{5}$$

Găsim proiecțiile gradientului pe axele de coordonate. Pentru G_x, de pildă, obținem

$$G_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\,,$$

din formula (5) însă

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}\,.$$

In mod analog

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \text{ și } \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\,. \tag{6}$$

Astfel

$$G_x = -\frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{x}{r^3}\,;$$

$$G_y = -\frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{y}{r^3}\,;$$

$$G_z = -\frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{z}{r^3}\,.$$

Inmulțind egalitățile obținute respectiv cu **i**, **j** și **k** și adunându-le, găsim

$$\text{grad } V = -\frac{q}{\varepsilon r^3} (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

Expresia din paranteze reprezintă vectorul de poziție **r** al punctului considerat; deaceea

$$\text{grad } V = -\frac{q}{\varepsilon r^3}\,\mathbf{r}\,, \tag{7}$$

In cele ce urmează vom deduce această formulă și pe altă cale.

Dacă sarcina $q > 0$, gradientul este orientat în sens contrar cu vectorul $\mathbf{r}$. Dacă însă $q < 0$, orientările lor coincid.

Corolar 1. Comparând (7) cu formula cunoscută:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\,\mathbf{r},$$

găsim următoarea relație importantă.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{8}$$

Intr'un câmp electrostatic vectorul intensitate **E** *este egal în valoare numerică cu gradientul potențialului V și este orientat în partea opusă acestui gradient.* După cum vom vedea ulterior, expresia rămâne valabilă nu numai în cazul câmpului produs de o singură sarcină, ci și în cazul unui câmp electrostatic arbitrar.

Corolar 2. Egalitatea vectorială (8) se descompune în trei egalități analitice:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{și} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{8'}$$

Intr'un câmp electrosatic proiecțiile vectorului **E** *pe axele sistemului rectangular de coordonate sunt egale respectiv cu derivatele parțiale ale funcției V în raport cu x, y și z, luate cu semnul schimbat.*

§ 50. EXPRIMAREA SIMBOLICĂ A GRADIENTULUI OPERATORUL LUI HAMILTON

Să considerăm formula gradientului unei funcții în coordonate cartesiene:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Să-l scoatem pe φ în mod convențional din paranteză în membrul drept, considerându-l ca factor:

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\varphi, \tag{1}$$

Vom nota prescurtat operația $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$, care constă din trei diferențieri succesive în raport cu x, y, z, apoi dintr'o multiplicare prin vectorii fundamentali respectivi şi dintr'o adunare, prin simbolul ∇, adică:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2}$$

Putem acum să transcriem egalitatea (1) sub forma:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi \tag{3}$$

Simbolul ∇ se numeşte „operatorul lui Hamilton“ sau pe scurt „nabla“. După cum vom vedea mai jos, acest operator joacă un rol foarte important în calculul vectorial, analog în multe privinţe cu rolul derivatei din calculul diferenţial.

Formula (3) se enunţă astfel: „Gradientul funcţiei este egal cu nabla φ“, sau mai pe larg: „pentru a găsi gradientul funcţiei φ trebue să-i aplicăm operatorul nabla“. Formula (3) poartă denumirea de expresie simbolică a gradientului.

Să rezolvăm câteva probleme din care să reiasă unele proprietăţi ale operatorului lui Hamilton, aplicat funcţiilor scalare.

Problema 1. Să se găsească gradientul sumei $\varphi+\psi$ a două funcţii scalare.

Rezolvare. Găsim

$$\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial(\varphi+\Psi)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial(\varphi+\Psi)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Inmulţind respectiv cu **i**, **j** şi **k** şi adunând, obţinem

$$\operatorname{grad}(\varphi+\Psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\Psi, \tag{4}$$

sau încă

$$\nabla(\varphi+\Psi) = \nabla\varphi + \nabla\Psi. \tag{4'}$$

Problema 2. Să se găsească gradientul produsului $(\varphi\Psi)$ a două funcţii scalare.

Rezolvare. Găsim

$$\frac{\partial(\varphi.\Psi)}{\partial x} = \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(\varphi.\Psi)}{\partial y} = \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\varphi.\Psi)}{\partial z} = \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Inmulţind cu versorii fundamentali **i**, **j** şi **k** şi adunând pe coloane, obţinem

$$\operatorname{grad}(\varphi.\Psi) = \varphi\operatorname{grad}\Psi + \Psi\operatorname{grad}\varphi \tag{5}$$

sau încă

$$\nabla (\varphi . \Psi) = \varphi \nabla \Psi + \Psi \nabla \varphi . \quad (5')$$

Problema 3. Să se găsească gradientul unei funcţii scalare compuse.

Rezolvare. Fiind dată o funcţie oarecare $F(u)$, care depinde de u, iar u la rândul său este o funcţie de x, y, z adică

$$u = \varphi (x, y, z)$$

In acest caz

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Inmulţind cu **i**, **j** şi **k** şi adunând, obţinem

$$\text{grad } F(u) = F'(u) \text{ grad } u, \quad (6)$$

sau altfel

$$\nabla F(u) = F'(u) \nabla u . \quad (6')$$

Problema 4. Să se găsească gradientul lui r, r fiind distanţa punctului considerat M dela un punct oarecare A ales drept origină (fig. 102).

Rezolvare. Alegem drept sistem de referinţă al funcţiei r un sistem de coordonate rectangulare cartesiene cu originea într'un punct arbitrar O, diferit de A.

Funcţia noastră va fi de forma

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

De unde găsim

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}.$$

In mod analog

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} \text{ şi } \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r}.$$

Inmulţind cu **i**, **j** şi **k** şi adunând, obţinem

$$\text{grad } r = \frac{1}{r}\left\{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}\right\}$$

Expresia din paranteză reprezintă tocmai *vectorul de poziție al punctului considerat M în raport cu originea A.*

Avem deci

$$\text{grad}\ r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^0 \tag{7}$$

sau sub forma simbolică

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^0 . \tag{7'}$$

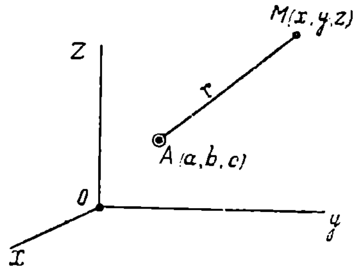


Fig. 102

Problema 5. Să se găsească gradientul unei funcții arbitrare de forma F (r).

Rezolvare. Aplicăm mai întâiu formula (6) pentru o funcție de funcție

$$\text{grad}\ F(r) = F'(r)\ \text{grad}\ r .$$

De unde, în baza lui (7)

$$\text{grad}\, F(r) = F'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = F'(r)\,\mathbf{r}^0 \tag{8}$$

sau sub formă simbolică

$$\nabla F(r) = F'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = F'(r)\mathbf{r}^0 . \tag{8a'}$$

Observație. Cu toate că demonstrațiile au fost făcute cu ajutorul sistemului cartesian de coordonate, rezultatele definitive nu depind de alegerea unui sistem de coordonate, ele fiind invariante.

§ 51. EXERCIȚII

Să terminăm capitolul prin rezolvarea unor exerciții.

Exercițiul 1. Câmpul electrostatic este produs de câteva sarcini punctiforme q_1, q_2, ..., q_n. Să se găsească gradientul funcției

$$V = \frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{q_2}{\varepsilon r_2} + \ldots\ldots + \frac{q_n}{\varepsilon r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i},$$

r_i fiind distanțele dintre punctul considerat M și punctele A_i în care sunt situate sarcinile.

Rezolvare. Folosindu-ne de formulele paragrafului precedent, obținem cu ușurință

$$\text{grad}\ V = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon}\ \text{grad}\frac{1}{r_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i^3}\mathbf{r}_i .$$

Corolar. Comparând cele de mai sus cu expresia vectorului **E** găsim

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} V, \tag{1}$$

adică acelaş rezultat ca şi în cazul unei singure sarcini punctiforme.

Exerciţiul 2. Să se demonstreze că normala la elipsă, într'un punct arbitrar ales, împarte în două părţi egale unghiul dintre vectorii de poziţie ai acestui punct.

Rezolvare. Să ne amintim de câmpul scalar al funcţiei $\varphi = r_1 + r_2$ pe care l-am studiat în § 47. Liniile de nivel ale acestei funcţii sunt nişte elipse. Să calculăm gradientul funcţiei de mai sus într'un punct oarecare M situat pe una din elipse. In conformitate cu formulele paragrafului precedent

$$\operatorname{grad}(r_1+r_2) = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \tag{2}$$

Reiese că gradientul este egal cu diagonala rombului construit pe versorii vectorilor de poziţie duşi din focarele elipsei la punctul M (fig 97). Normala împarte deci în două părţi egale unghiul dintre vectorii de poziţie. Din acelaş desen reiese că tangenta la elipsă are aceeaşi înclinare faţă de vectorii de poziţie, duşi în punctul de tangenţă.

Dacă am fi considerat funcţia $\varphi = r_1 - r_2$ am fi putut demonstra în mod analog că tangenta la iperbolă este bisectoarea unghiului dintre vectorii de poziţie.

Acest lucru ne arată că fiecare curbă din familia elipselor homofocale intersectează curbele familiei de iperbole homofocale sub un unghiu drept. Aceste două familii se numesc *reciproc-ortogonale*.

Exerciţiul 3. Se ştie că potenţialul V al câmpului exterior produs de un cilindru de lungime infinită având sarcina uniform repartizată este egal cu

$$V = C - 2\lambda \ln \rho, \tag{3}$$

λ — fiind sarcina pe unitatea de lungime, ρ — distanţa dintre punctul considerat şi axa cilindrului, iar C — o constantă arbitrară a cărei valoare depinde de alegerea suprafeţei iniţiale, astfel încât valoarea potenţialului ei să fie egală cu aceea a potenţialului iniţial V_0.

Să se determine suprafeţele echipotenţiale ale câmpului produs de doi conductori paraleli, purtând sarcini diferite şi având raza secţiunii transversale neglijabilă în raport cu distanţa $2c$ dintre axele conductorilor (aceasta însemnează că putem socoti conductorii noştri, într'o primă aproximaţie, drept *linii drepte lungi şi infinite, fără grosime).*

Rezolvare. Fie axele conductorilor perpendiculare pe planul desenului. Notăm punctele de intersecţie cu planul nostru prin A_1 şi A_2 (fig. 103). Alegem axele de coordonate ca în figură. Fie M punctul considerat. Distanţa lui dela A_1 şi A_2 o notăm respectiv cu ρ_1 şi ρ_2. Câmpul va fi, evident, acelaş în toate planele perpendiculare pe axele conductorilor. Ne putem, deci, mărgini la studiul câmpului doar în planul xOy. Pentru a preciza, socotim conductorul din dreapta ca fiind încărcat pozitiv, λ fiind valoarea sarcinii pe unitatea de lungime. Potenţialul produs de conductor în punctul M va fi

$$V_1 = C - 2\lambda \ln \rho_1 .$$

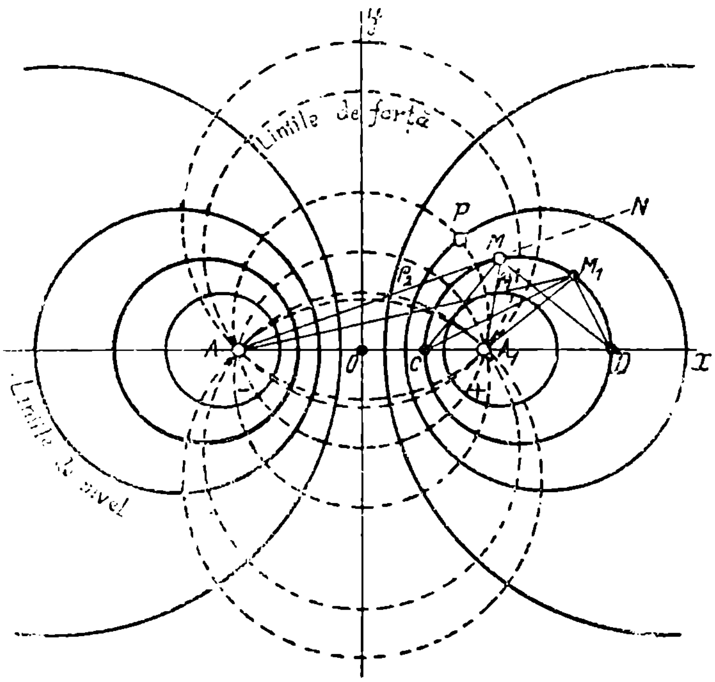


Fig. 103

In mod analog, potenţialul produs de cel de al doilea conductor în acelaş punct M va fi

$$V_2 = C + 2\lambda \ln \rho_2$$

In acest caz valoarea totală a potenţialului va fi

$$V = V_1 + V_2 = 2C + 2\lambda(\ln \rho_2 - \ln \rho_1) = 2C + 2\lambda \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4)$$

Trebue să găsim suprafeţele echipotenţiale ale câmpului scalarcorespunzător funcţiei V.

Vom obţine ecuaţia unei suprafeţe oarecare egalând V cu o constantă

$$2C + 2\lambda \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}$$

de unde

$$\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}$$

sau astfel

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const} = k\,. \qquad (5)$$

Această ecuaţie exprimă principala proprietate a suprafeţei echipotenţiale.

In planul xOy ecuaţia va determina o linie oarecare CMD, care posedă proprietatea că *raportul distanţelor unui punct arbitrar M dela punctele date A_1 şi A_2 reprezintă o mărime constantă* egală cu un număr oarecare k.

Trecând la coordonatele carlesiene, scriem ecuaţia (5) după cum urmează

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} = k\,,$$

sau încă

$$(x+c)^2+y^2 = k^2\,\{(x-c)^2+y^2\}\,.$$

Efectuând parantezele, obţinem

$$x^2(1-k^2) + 2\,c\,(1+k^2)\,x + y^2\,(1-k^2) = c^2\,(k^2-1) \qquad (6)$$

sau încă

$$x^2 + y^2 - 2\,c\,\frac{1+k^2}{k^2-1}\,x = -\,c^2\,. \qquad (6')$$

In planul xOy, ecuaţia reprezintă un cerc, deoarece coeficienţii lui x^2 şi y^2 sunt egali şi nu conţin niciun termen în xy. Parametrul k fiind variabil, vom obţine o familie de cercuri. In spaţiu, acestei familii îi vor corespunde nişte cilindri. Cercurile noastre vor constitui directoarele acestor cilindri. Axele cilindrilor sunt paralele cu axele conductorilor.

Deci, *suprafeţele echipotenţiale reprezintă o familie de cilindri drepţi circulari ale căror axe sunt paralele cu axele conductorilor.*

Să determinăm raza r şi coordonatele α şi β ale centrului cercului. Adăugăm în acest scop ambilor membri ai ecuaţiei (6') mărimea $c^2\left(\dfrac{1+k^2}{k^2-1}\right)^2$. Făcând simplificările necesare obţinem :

$$\left(x - c\,\frac{1+k^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = c^2\frac{4\,k^2}{(k^2-1)^2}$$

De unde

$$\left.\begin{array}{l} r = c\,\dfrac{2k}{|k^2-1|}, \\ \alpha = c\,\dfrac{k^2+1}{k^2-1} \quad \text{şi } \beta = 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Reiese că centrele cercurilor sunt situate pe axa x. Dând diferite valori parametrului k din formula (7) putem construi o infinitate de cercuri ale acestei familii. In figură ele sunt reprezentate prin linii continui. Cercurile înconjoară fiecare conductor. In cazul particular $k = 1$, obţinem $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$ şi ecuaţia (6) ia forma $4cx = 0$, sau $x = 0$. Este ecuaţia axei y care constitue cazul — limită al cercurilor.

In acest din urmă caz $r = \infty$ şi $\alpha = \infty$. In spaţiu îi corespunde un plan de simetrie ce trece prin axa y. Dacă considerăm potenţialul planului ca fiind egal cu V_0 obţinem din nou cu ecuaţia (4).

$$V_0 = 2\,C,$$

de unde putem determina constanta arbitrară C. Prin urmare, ecuaţia (4) poate fi scrisă sub forma

$$V = V_0 + 2\lambda \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{4'}$$

Trasarea liniilor de nivel. Putem trasa uşor liniile de nivel, bazându-ne pe considerente geometrice, fără a ne folosi de formulele (7) şi plecând dela proprietatea $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const.}$ Să construim în triunghiul A_2MA_1 bisectoarele unghiului interior şi exterior în punctul M. Aceste bisectoare vor intersecta axa x în două puncte oarecare C şi D. In acest caz, *cercul construit pe segmentul CD* ca diametru va fi tocmai linia de nivel căutată ce trece prin punctul considerat M.

Intr'adevăr, folosindu-ne de proprietatea bine cunoscută a bisectoarei, obţinem :

$$\frac{A_2C}{A_1C} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{şi} \quad \frac{A_2D}{A_1D} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Prin urmare punctele C şi D trebue să se afle pe cercul $\frac{\rho_2}{\rho_1} = k$, care trece prin M. Trei puncte C, D şi M determină complect cercul şi-l putem construi. Segmentul CD reprezintă diametrul acestuia, deoarece unghiul dintre bisectoarele MC

şi *MD* este drept. Cercul care satisface ecuaţia $\frac{\rho_2}{\rho_1} = const$ poartă numele de „cercul lui Apolonius"[1]

Luând în consideraţie diferite puncte *M* în plan, putem construi o infinitate de cercuri.

Notă. Dacă cilindrii noştri ar fi fost încărcaţi cu sarcini ***de acelaş semn*** am fi obţinut în locul ecuaţiei (4) o alta analoagă:

$$V = 2\,C - (2\lambda\,\ln \rho_2 + \ln \rho_1) = 2\,C - 2\,\lambda\,\ln\,(\rho_2\,\rho_1).$$

Rezultă că liniile de nivel ar fi fost determinate de relaţia

$$\rho_2\,\rho_1 = const = k,$$

care reprezintă ecuaţia aşa numitelor „ovale ale lui Cassini" printre care există ca un caz particular şi lemniscata lui Bernoulli.

Gradientul. Să calculăm gradientul *V*, plecând dela formula (4)

$$\text{grad } V = \text{grad}\,2\lambda\,(\ln\rho_2 - \ln\rho_1) = 2\lambda\,(\text{grad}\ln\rho_2 - \text{grad}\ln\rho_1)$$

Conform formulei gradientului unei funcţii compuse:

$$\text{grad } V = 2\lambda\,\left(\frac{1}{\rho_2}\,\text{grad}\,\rho_2 - \frac{1}{\rho_1}\,\text{grad}\,\rho_1\right),$$

$$\text{grad } V = 2\lambda\left(\frac{1}{\rho_2}\,\frac{\rho_2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\,\frac{\rho_1}{\rho_1}\right) = 2\lambda\left(\frac{1}{\rho_2{}^2}\,\rho_2 - \frac{1}{\rho_1{}^2}\,\rho_1\right)$$

Deoarece $\mathbf{E} = -\,\text{grad } V$

$$\mathbf{E} = 2\,\lambda\,\left(\frac{1}{\rho_1{}^2}\,\rho_1 - \frac{1}{\rho_2{}^2}\,\rho_2\right) \tag{8}$$

Această expresie reprezintă câmpul vectorului — intensitate. Descompunând pe ρ_1 şi ρ_2 în componente, obţinem

$$\rho_1 = (x-c)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$
$$\rho_2 = (x+c)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

Rezultă că proiecţiile vectorului **E** pe axele de coordonate vor fi

$$\begin{aligned} E_x &= 2\,\lambda\,\left(\frac{x-c}{\rho_1{}^2} - \frac{x+c}{\rho_2{}^2}\right); \\ E_y &= 2\,\lambda\,\left(\frac{y}{\rho_1{}^2} - \frac{y}{\rho_2{}^2}\right); \\ E_z &= 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

---

1) Vezi deasemenea exerciţiul 8 din § 19, unde am întâlnit sfera lui Apolonius.

Capitolul VIII

CÂMPUL VECTORIAL

§ 52. DEFINIȚIA CÂMPULUI. LINIILE VECTORIALE

Să considerăm în spațiu un domeniu Ω (fig. 104). Fiecărui punct M îi vom atribui un vector **a** cu o valoare numerică și o orientare bine determinată. Vom numi pe **a** — *funcție vectorială de punct în domeniul considerat,* adică

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}\,(M). \tag{1}$$

Vom numi, în continuare, domeniul Ω — *câmpul vectorial* al vectorului **a**. Dacă dorim să definim un câmp vectorial, trebuie să indicăm legea conform căreia putem determina în orice punct M al domeniului considerat atât mărimea cât și orientarea vectorului. In coordonate carteziene, unde

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

trebue date cele trei proiecții ale vectorului

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_x\;(x, y, z),\\ a_y &= a_y\;(x, y, z),\\ a_z &= a_z\;(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sub forma a trei funcții scalare de coordonatele x, y și z ale punctului M.

Putem da numeroase exemple de câmpuri vectoriale, mai ales în fizică. Astfel sunt: câmpul electrostatic al unor sarcini punctiforme, câmpul magnetic al unui conductor rectiliniu parcurs de curent, câmpul gradientului unei funcții scalare oarecare φ.

In mecanică există câmpurile vectoriale ale vitezelor și accelerațiilor unui solid într'un moment oarecare, *fiecărui punct* al solidului în mișcare fiindu-i atribuite un vector-viteză și un vector — accelerație, etc.

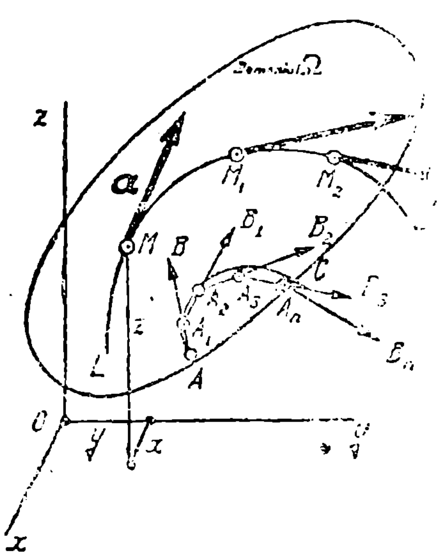


Fig. 104

Vom vorbi în cele ce urmează despre câmpul vectorial în general. In cazul particular când vectorul reprezintă o forță, avem de a face cu un *câmp de forțe.* Problema noastră constă în crearea unor metode matematice generale, adaptate studiului câmpurilor vectoriale. Aceste metode s'au format cu încetul în diferitele științe aplicate cum sunt: teoria electricității, magnetismul, mecanica (în special mecanica fluidelor, teoria potențialului, teoria elasticității, ş. a, m. d.) In procesul de creare al calculului vectorial, aceste metode au fost analizate, scoase din cadrul fenomenelor concrete şi desvoltate. Ansamblul lor constitue conținutul teoriei generale a câmpurilor. Să observăm că domeniul Ω poate ocupa o parte mărginită a spațiului sau întregul spațiu nemărginit.

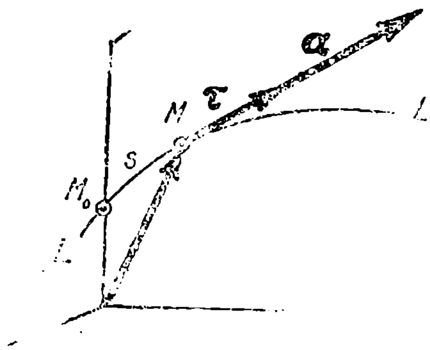


Fig. 105

Liniile vectoriale. Prima metodă de studiu a câmpurilor vectoriale constă în trasarea aşa numitelor *linii vectoriale*. *Vectorul — câmp este tangent la linia vectorială* în fiecare punct al ei (fig. 104). In cazul particular al câmpurilor de forță, liniile vectoriale sunt numite *linii de forță*, în mecanica fluidelor ele sunt numite *linii de curent*, ş. a. m. d.

Linia de forță a unui câmp electrostatic reprezintă linia de-a-lungul căreia s'ar mişca o sarcină liberă $+1$, fără viteză inițială, ea fiind doar sub acțiunea forțelor câmpului.

Să deducem ecuația diferențială a liniei vectoriale. Fie în fig. 105 vectorul de poziție **r** al punctului curent M, aparținând acestei linii, satisfăcâd relația

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(s)$$

care reprezintă ecuația liniei sub formă vectorială. Punem condiția ca vectorul — câmp **a** să coincidă in fiecare punct M cu versorul tangent $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Este suficient să punem condiția ca τ şi **a** să fie paraleli, deoarece au un punct comun — M.

Obținem

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\mathbf{a}\right] = 0. \qquad (\omega)$$

Relația reprezintă tocmai ecuația căutată. Pentru a o transpune într'o formă analitică, să ne aducem aminte că proiecțiile vectorilor paraleli sunt proporționale între ele (paragraful 21). Obținem

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{a_x} = \frac{\frac{dy}{ds}}{a_y} = \frac{\frac{dz}{ds}}{a_z},$$

sau

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)} \tag{4}$$

Am obţinut un sistem de două ecuaţii diferenţiale scrise sub formă de proporţii. Prin urmare, *problema găsirii liniilor vectoriale se reduce la integrarea unui sistem de două ecuaţii diferenţiale de forma* (4).

Să presupunem că am reuşit să găsim două integrale independente ale sistemului

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= C_1 \\ f_2(x,y,z) &= C_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ansamblul celor două ecuaţii va determina linia vectorială, aceasta constituind intersecţia a două suprafeţe. Variind arbitrar parametrii C_1 şi C_2, vom obţine o familie de linii vectoriale depinzând de doi parametri (cu două grade de libertate). In cazul general, integrarea sistemului (4) poate fi anevoioasă. Din această cauză se obişnueşte, în practică, mai ales în cazul câmpurilor plane şi paralele, să se traseze aceste linii prin metode grafice *aproximative* (fig. 104). Luăm un punct arbitrar A şi ducem prin el vectorul-câmp respectiv $\overline{AB}$. Ne deplasăm din punctul A de-a-lungul lui $\overline{AB}$ într'un punct oarecare foarte apropiat A_1, în care construim din nou vectorul-câmp $\overline{A_1B_1}$, corespunzător. Din punctul A_1 ne deplasăm acum până în punctul vecin A_2 şi aşa mai departe.

Obţinem un fel de linie frântă $A\,A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ ale cărei laturi coincid ca orientare cu vectorii câmpului. Alegând laturile îndeajuns de mici, linia frântă va reprezenta aproximativ tocmai linia vectorială ce trece prin A. Dacă am mări la infinit numărul laturilor liniei frânte şi dacă fiecare latură ar tinde către zero, la limită, linia frântă s'ar transforma în linia curbă AC care ar reprezenta tocmai linia vectorială căutată. In ştiinţele experimentale există şi unele metode fizice pentru a obţine liniile vectoriale şi pentru a le fotografia (astfel, liniile de forţă ale câmpurilor magnetice ce se evidenţiază cu ajutorul piliturii de fier, liniile de curent ale câmpurilor hidrodinamice — prin culoarea vinelor de lichid, etc.).

Să convenim a înţelege prin *sensul şi direcţia* liniei vectoriale sensul şi direcţia vectorului-câmp **a** în punctul considerat.

Densitatea liniilor vectoriale. Deoarece putem lua drept punct iniţial orice punct A, pentru trasarea liniei vectoriale, înseamnă că numărul liniilor este infinit de mare şi, din punct de vedere teoretic, ele pot acoperi întregul domeniu Ω

Totuşi, după exemplul fizicei, s'a convenit să se atribue liniilor vectoriale o densitate anumită şi anume se atribue unei suprafeţe de 1 cm² situată în punctul A perpendiculară pe vectorul-câmp (fig. 106) „un număr de N linii" *egal cu mărimea vectorului în acel punct.*

Avem deci relaţia $N = a$. Dacă suprafaţa în cauză are o valoare oarecare Δs diferită de 1 cm², dar rămâne perpendiculară liniilor vectoriale, i se atribue

$$\Delta N = a.\Delta s$$

linii.

Datorită acestui fapt, câmpul vectorial are o densitate diferită a liniilor vectoriale în diferitele sale puncte: densitatea este mai mare acolo unde a este mai mare şi viceversa. Dacă vectorul **a** are aceeaşi mărime, orientare şi sens, în toate punctele unui domeniu oarecare, liniile vectoriale vor umple câmpul în mod uniform. Câmpul se va numi *uniform*.

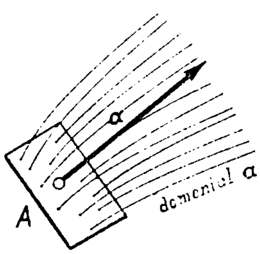


Fig. 106

Prin urmare, ne putem face o idee despre valoarea vectorului, având în faţă reprezentarea câmpului. Câmpul devine intuitiv.

Să considerăm câteva exemple de determinare a liniilor vectoriale.

Exerciţiul 1. Intensitatea **H** a câmpului magnetic produs de un conductor infinit lung şi rectiliniu în punctele exterioare, se determină prin formulele (§ 22, fig. 64).

$$H_x = -2I.\frac{y}{\rho}\,;\; H_y = 2I.\frac{x}{\rho} \text{ şi } H_z = 0$$

unde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Să se determine ecuaţiile liniilor vectoriale şi forma lor.

Rezolvare. Scriem sistemul de ecuaţii diferenţiale (4)

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}. \tag{6}$$

Deducem că $dz = 0$, deoarece numai în acest caz ultimul raport $\frac{0}{0}$ poate fi egal cu primele două.

Reiese că

$$z = \text{const} = C_1 \tag{7}$$

Ecuaţia reprezintă o familie de plane, paralele cu planul $x0y$, situate la distanţe corespunzătoare diferitelor valori pe care le ia C_1.

Din primele două relaţii obţinem

$$xdx + ydy = 0,$$

sau încă

$$\frac{1}{2} d (x^2 + y^2) = 0,$$

de unde

$$x^2 + y^2 = \text{const} = C_2^2. \tag{8}$$

Am obţinut o familie de cilindri circulari drepţi. Axele lor coincid cu axa z, iar razele sunt determinate de C_2. Ansamblul ecuaţiilor (7) şi (8) determină liniile vectoriale ca fiind intersecţia familiei de plane cu familia de suprafeţe cilindrice. Liniile reprezintă nişte cercuri cu centrele situate pe axa z. Cercurile se află în plane perpendiculare pe axa conductorului.

Dacă am fi studiat proiecţiile câmpului magnetic interior

$$H_x = -2\pi uy \;;\; H_y = +2\pi ux \text{ şi } H_z = 0,$$

am fi obţinut un sistem de ecuaţii diferenţiale, analog cu (6).

Prin urmare, şi liniile vectoriale ale câmpului interior reprezintă nişte cercuri.

Exerciţiul 2. Să se determine liniile de forţă ale câmpului electrostatic produs de doi conductori paraleli, având sarcini de semn diferit, identici cu cei consideraţi în figura 103 a paragrafului precedent.

Rezolvare. Utilizăm formulele (9) ale paragrafului precedent, simplificându-le în prealabil:

$$E_x = 2\lambda \frac{\rho_2^2 (x-c) - \rho_1^2 (x+c)}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} =$$

$$= 2\lambda \frac{[(x+c)^2 + y^2] (x-c) - [(x-c)^2 + y^2] (x+c)}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2},$$

sau

$$E_x = 2\lambda \frac{(x+c)(x-c)(x+c-x+c) + y^2 (x-c-x-c)}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} =$$

$$= 4\lambda c \frac{x^2 - c^2 - y^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Analog

$$E_y = 2\lambda y \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} = 2\lambda y \frac{(x+c)^2 + y^2 - [(x-c)^2 - y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} = 8\lambda c \frac{x\, y}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}.$$

In acest caz, sistemul de ecuații diferențiale (4) ia forma de mai jos:

$$\frac{d\,x}{x^2 - c^2 - y^2} = \frac{d\,y}{2\,x\,y} = \frac{d\,z}{0} \tag{9}$$

Prima familie de suprafețe va fi, ca și în exercițiul precedent, o *familie de plane:*

$$z = \text{const} = C_1\,. \tag{10}$$

Pentru a obține cea de a doua integrală a sistemului, înmulțim prima relație sus și jos cu x, cea de a doua — cu y și utilizăm teorema șirului de raporturi egale. Avem

$$\frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{x\,(x^2 - c^2 - y^2) + 2\,x\,y^2} = \frac{d\,y}{2\,x\,y},$$

sau după simplificare

$$\frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{x^2 - c^2 + y^2} = \frac{d\,y}{2\,y}.$$

Numărătorul membrului stâng poate fi scris sub forma

$$\frac{1}{2}\,d\,(x^2 + y^2 - c^2)\,.$$

Prin urmare

$$\frac{d(x^2 + y^2 - c^2)}{x^2 + y^2 - c^2} = \frac{dy}{y}\,.$$

Relația se integrează fără greutate. Obținem

$$\ln\,(x^2 + y^2 - c^2) = \ln y + \ln 2\,C_2\,,$$

$2\,C_2$ fiind o constantă arbitrară (factorul 2 este luat pentru comoditate).

Pe baza celor de mai sus

$$x^2 + y^2 - 2C_2 y = c^2\,. \tag{11}$$

Aceasta este cea de-a doua integrală a sistemului.

Ea reprezintă în planul xOy o *familie de cercuri*, în funcție de un parametru arbitrar C_2. In spațiu obținem o familie de cilindri circulari drepți cu generatoarele paralele axei z.

Cercurile de mai sus constitue directoarele cilindrilor. Intretăierea planelor (10) cu cilindrii (11) ne dă o familie de cercuri.

Prin urmare, liniile de forță ale câmpului considerat reprezintă cercuri situate în plane perpendiculare pe axele conductorilor.

Să studiem aceste cercuri în planul xOy. Pentru aceasta transcriem (11) sub forma

$$x^2 + (y - C_2)^2 = c^2 + C_2^2.$$

Reiese de aici că centrele lor sunt situate pe axa y, deoarece coordonatele centrului sunt

$$\alpha = 0 \text{ și } \beta = C_2.$$

Este lesne de observat din (11) că toate cercurile *trec prin punctele A_1 $(c, 0)$ și A_2 $(-c, 0)$.*

Segmentul $A_2 A_1$ constitue, prin urmare, coarda comună a fascicolului de cercuri trasate în fig. 103 punctat. Deoarece liniile de forță ale vectorului **E** sunt în acelaş timp linii ale gradientului, fiindcă $\mathbf{E} = -grad\ V$, urmează că ele se vor întretăia cu sistemul de linii echipotențiale sub un unghiu drept. Cele două familii de curbe din fig. 103 sunt *reciproc ortogonale*.

§ 53. CÂMPURILE SCALAR ŞI VECTORIAL PRIVITE CA O NOȚIUNE GENERALIZATĂ A DEPENDENȚEI FUNCȚIONALE

Poziția unui punct în spațiu poate fi determinată în două feluri: prin precizarea a trei numere scalare x, y şi z, adică a celor trei coordonate din sistemul rectangular, sau prin caracterizarea vectorului de poziție **r** al punctului considerat, în raport cu un punct oarecare O luat drept origină. Prima metodă este în spiritul analizei scalare, cea de a doua este tipică analizei vectoriale.

Când am definit câmpurile scalar şi vectorial, am numit funcția φ și vectorul **a** funcții de punct, înțelegând prin aceasta faptul că aceste mărimi sunt legate de punctul M, adică sunt funcții de coordonatele punctului.

Să ținem seama de faptul că fiecărui punct din spațiu îi corespunde un vector de poziție **r**. Putem afirma că φ și **a** sunt funcții oarecare de **r**, adică

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) \text{ și } \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Această notație este caracteristică analizei vectoriale şi se bucură de o răspândire foarte largă. Prin urmare, putem spune că în teoria câmpurilor operăm cu mărimi care sunt funcții de vectorul **r**, scalare sau vectoriale, dela caz la caz.

Noțiunea funcției de argument vectorial constitue o generalizare a noțiunii elementare de dependență funcțională. Vectorul joacă aici rolul de argument, în timp ce în calculul diferențial rolul de argument aparține mărimilor scalare.

Un șir întreg de exemple ne demonstrează cât de utilă este această generalizare a noțiunii de dependență funcțională.

De pildă, vectorul **E** al câmpului unei sarcini electrice punctiforme nu numai că poate fi imaginat, dar poate fi chiar *scris* sub forma unei funcții de **r** :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\, \mathbf{r}, \text{ sau } \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{(\sqrt{\mathbf{r}^2})^3}. \qquad (2)$$

Putem da și un exemplu de funcție scalară. Mărimea

$$y = \mathbf{cr} \qquad (3)$$

reprezintă o funcție scalară de **r**, iar ansamblul valorilor ei constitue un câmp scalar oarecare (**c** fiind un vector oarecare constant, iar **r** vectorul de poziție corespunzător fiecărui punct).

In multe probleme din cadrul analizei vectoriale este mult mai comod să se opereze direct cu $\varphi(\mathbf{r})$ și $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ sub forma lor vectorială, fără a recurge la coordonate luate drept argumente scalare.

Generalizând și mai departe, putem introduce noțiunea funcțiilor de un *vector variabil arbitrar* sau chiar de mai mulți vectori variabili;

$$\varphi = \varphi\ (\mathbf{m}, \mathbf{n} \ldots\ldots) \text{ și } \mathbf{a} = \mathbf{a}\ (\mathbf{m}, \mathbf{n} \ldots\ldots)$$

fără a ne limita numai la *vectorul de poziție* considerat drept variabilă independentă.

Din acest punct de vedere, produsul mixt, sau dublu vectorial

$$V = \mathbf{m}\ [\mathbf{np}] \text{ și } \mathbf{A} = [\mathbf{m}\ [\mathbf{np}]\ ]$$

reprezintă funcții de trei vectori din membrul drept.

Să menționăm, în încheere, că numim *staționar* câmpul care nu variază în timp. Dacă însă valoarea intensității lui variază cu timpul, numim câmpul *variabil*. „Câmpul variabil electromagnetic“ care joacă un rol extrem de important în tehnică ne poate servi de exemplu pentru câmpurile variabile.

Forma simbolică a câmpului variabil este următoarea

$$\varphi = \varphi\ (\mathbf{r}, t) \quad \text{și} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}\ (\mathbf{r}, t), \qquad (4)$$

argumentul scalar t reprezentând timpul.

§ 54. FLUXUL UNUI VECTOR PRINTR'O SUPRAFAȚĂ

După noțiunea de linii vectoriale, urmează o altă noțiune importantă, *fluxul vectorului*. Fluxul vectorului joacă un rol primordial în studiul câmpurilor vectoriale. La început, această noțiune s'a desvoltat în domeniul mecanicei fluidelor. Gauss a aplicat-o în teoria câmpurilor gravitaționale și apoi în domeniul electricității și magnetismului.

Noua noțiune și-a găsit multiple aplicații în diferite științe fizice, devenind în cele din urmă principalul instrument al analizei vectoriale.

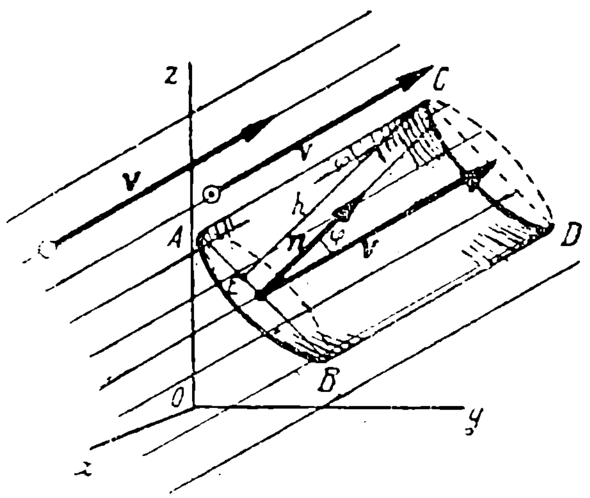


Fig. 107

Să începem cu un exemplu din mecanica fluidelor.

Să considerăm *câmpul de viteze* al unui lichid în mișcare permanentă. Pentru simplitate, presupunem câmpul uniform, adică admitem că vectorul viteză **v** are aceeași mărime și direcție în toate punctele câmpului (fig. 107).

Alegem un element arbitrar de suprafață *AB* cu aria *S* și ducem versorul normal în sensul mișcării lichidului.

Să determinăm acum volumul de lichid ce străbate acest element de suprafață în unitatea de timp.

Este evident că el va fi egal cu volumul cilindrului *ABCD*, având drept bază elementul nostru de suprafață și drept generatoare pe *AC*, egală cu mărimea vitezei *v*.

Intr'adevăr dacă *în momentul inițial* un strat de lichid ocupa suprafața *AB*, el va ocupa *peste o secundă*, după ce a efectuat o mișcare de translație, poziția *CD*, la o distanță egală cu *v* de *AB*, iar toate straturile care-l urmează vor umple volumul cilindrului. Să notăm volumul cilindrului prin *N*. Volumul este egal cu produsul bazei prin înălțime, adică

$$N = S \cdot h$$

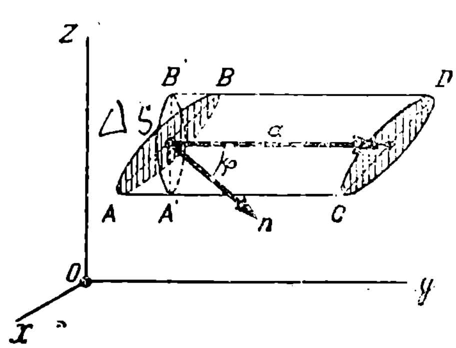


Fig. 108

Din triunghiul dreptunghic *ACE* găsim

$$h = v \cdot \cos \varphi,$$

φ — fiind unghiul dintre vectorul **v** și direcția normalei **n**. Prin urmare

$$N = v \cdot S \cdot \cos \varphi = \mathbf{vn} \cdot S \qquad (1)$$

Să creăm, prin analogie, noţiunea de flux a unui *vector arbitrar* **a** printr'un element de suprafaţă situat într'un câmp vectorial oarecare.

Definiţie. Să considerăm câmpul unui *vector oarecare* **a** şi înăuntrul lui un element de suprafaţă infinit mic ΔS cu versorul normal **n** (fig. 108), *având un sens bine determinat.* Considerăm elementul de suprafaţă suficient de mic pentru a putea afirma că vectorul **a** este aproximativ constant în mărime şi direcţie în toate punctele lui.

Să convenim a numi flux elementar ΔN *al vectorului* **a** *prin elementul de suprafaţă* ΔS *„în sensul normalei* **n**" *mărimea scalară determinată de egalitatea:*

$$\Delta N = a \cdot \Delta S \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \mathbf{an} \cdot \Delta S = a_n \cdot \Delta S. \qquad (2)$$

Dacă unghiul $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{n})$ este ascuţit, vom socoti ca fiind pozitiv fluxul „în direcţia acelei normale", conform formulei (2); dacă însă unghiul φ este obtuz, vom socoti fluxul ca fiind negativ.

Prin urmare, vom considera fluxul printr'una şi aceeaşi suprafaţă drept *o mărime algebrică putând avea un semn sau altul* în funcţie de sensul normalei în raport cu care este calculat.

Să demonstrăm următoarea propoziţie: *putem presupune prin convenţie mărimea absolută* $|\Delta N|$ *ca fiind egală cu numărul liniilor vectoriale ce traversează elementul de suprafaţă* ΔS.

Intr'adevăr, să ducem prin punctul M un element de suprafaţă auxiliar $A'B'$ ortogonal vectorului **a** şi să notăm aria lui cu $\Delta S'$. Acest element de suprafaţă reprezintă proiecţia elementului ΔS şi deaceea

$$\Delta S\,|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})| = \Delta S'.$$

Prin urmare

$$|\Delta N| = a \cdot \Delta S |\cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})| = a\Delta S', \quad (2a)$$

ceeace, conform paragrafului 52, reprezintă tocmai numărul de linii vectoriale ce traversează elementul de suprafaţă $\Delta S'$ sau, ceeace este acelaş lucru, elementul de suprafaţă ΔS.

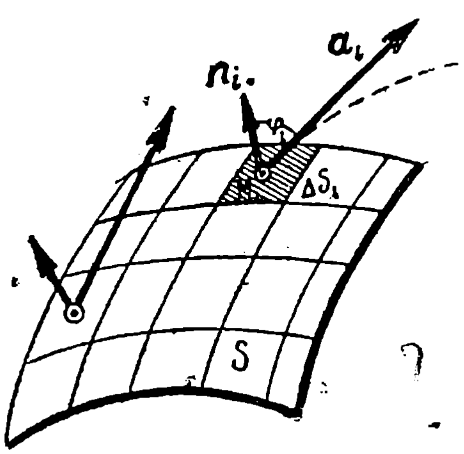


Fig. 109

Fluxul printr'o suprafaţă arbitrară. Să generalizăm definiţia noastră. Considerăm o suprafaţă curbă oarecare S de dimensiuni finite (fig. 109). O vom diviza într'un număr m

foarte mare de suprafețe elementare ΔS_i îndeajuns de mici pentru a putea socoti, în primă aproximație, fiecare dintre ele ca fiind plană.

Să fixăm pe fiecare element de suprafață ΔS_i un punct arbitrar M_i și să construim în acel punct versorul normal $\mathbf{n}_i$ (având un sens bine determinat) și vectorul — câmp $\mathbf{a}_i$.

Conform celor spuse mai sus, fluxul elementar ΔN_i prin fiecare element de suprafață va fi egal cu

$$\Delta N_i = \mathbf{a}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i.$$

Vom numi *limita* către care tinde suma

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i,$$

fluxul total N prin *întreaga* suprafață S. In procesul de tindere la limită, numărul m al elementelor de suprafață tinde către infinit, iar fiecare element ΔS_i devine infinit mic, convergând înspre punctul M_i, adică

$$N = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i = \iint_{(s)} \mathbf{an}\, dS \cdot \qquad (3)$$

Calculul lui N se reduce la efectuarea integralei duble din expresia

$$\mathbf{an} = a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z),$$

extinsă la toată suprafața S:

$$N = \iint_{(s)} \mathbf{an}\, dS = \iint_{(s)} [a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)]\, dS \quad (3')$$

Metodele de efectuare a integralelor de acest tip sunt indicate în cursurile de calcul integral.

Fluxul printr'o suprafață închisă. In sfârșit, dacă suprafața S va fi *închisă* (fig. 109 a) o vom diviza deasemenea în elemente ΔS_i și vom conveni să considerăm *întotdeauna* normala *exterioară*. In acest caz, vom numi expresia

$$N = \oiint_{(s)} \mathbf{an}\, dS \qquad (4)$$

fluxul vectorului „din interiorul suprafeței închise S *în exterior“* (cerculețul care cuprinde semnul integralei duble arată că suprafața este închisă, iar termenul „din interiorul suprafeței închise în exterior“ este convențional, indicându-ne faptul că în cursul efectuării integralei (4) am adoptat normala exterioară ca fiind pozitivă).

Observație. Pentru a prescurta calculele, în cele ce urmează vom scrie în locul integralei duble

$$\oint\limits_{(S)} \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS$$

considerând că simbolul dS indică îndeajuns de clar faptul că avem de a face cu o integrală dublă extinsă la suprafață.

Proprietățile integralei (4). Admitem că am reușit să efectuăm această integrală. Să vedem ce concluzie putem trage asupra câmpului din interiorul suprafeței S, studiind valoarea ei. Să menționăm că diferiții termeni

$\mathbf{a}_i\, \mathbf{n}_i\, \Delta S_i = a_i\, \Delta S_i \cos \varphi_i$

ai integralei pot fi de semne contrarii în diferitele puncte ale suprafeții. In punctele unde vectorul **a** este orientat în *interiorul suprafeței* (punctul M_i) unghiul φ_i dintre direcția lui și direcția normalei exterioare (având în vedere sensurile respective) va fi obtuz și $\cos \varphi_i$ — negativ.

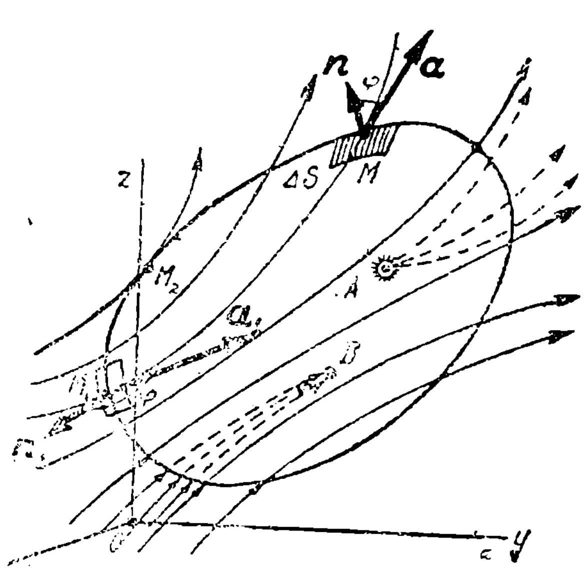


Fig. 109 a

Prin urmare, și fluxul elementar prin ΔS_i va fi negativ în astfel de puncte. Menționăm că în aceste puncte liniile vectoriale *intră* în interiorul suprafeței.

Dimpotrivă, în celelalte puncte, ca de pildă în M, vectorul este orientat în *exteriorul* suprafeței, iar liniile de forță *ies din volumul* mărginit de aceasta.

In aceste puncte, fluxul elementar este pozitiv, deoarece $\cos \varphi_i > 0$. In sfârșit, în punctele în care liniile vectoriale *sunt tangente* la suprafață (de pildă M_2), fluxul este nul, deoarece unghiul φ_i este drept.

Deoarece diferitele elemente ale integralei (11) sunt de semne diferite, însăși integrala

$$N = \oint \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS, \tag{4}$$

care reprezintă suma lor algebrică poate fi mai mică, mai mare sau egală cu zero.

Să considerăm mai întâi că vectorul **a** reprezintă viteza unei particule într'o scurgere permanentă, iar câmpul **a** un câmp de viteze. In primul caz, adică $N > 0$, observăm că din interiorul volumului V iese mai mult lichid decât intră.

Cu alte cuvinte, înăuntrul volumului V există puncte în care lichidul este produs. Aceste puncte (sau locuri) se numesc „sursele" câmpului. Mărimea N indică tocmai cantitatea de lichid pe care aceste surse o revarsă prin suprafaţa S în unitatea de timp. In acest sens, mărimea N poate fi privită ca o măsură a productivităţii acestor surse în unitatea de timp. Dacă $N < 0$, însemnează că volumul lichidului ce intră în interiorul lui V este mai mare decât volumul lichidului ce iese.

Prin urmare, în interiorul lui V există puncte sau locuri în care lichidul este „distrus" sau „absorbit",

Vom numi aceste puncte „puţuri". In acest caz, N va reprezenta măsura productivităţii negative a acestor puţuri.

In sfârşit, dacă $N = 0$, însemnează că volumul lichidului ce iese dintr'un domeniu este egal cu volumul lichidului ce intră (în unitatea de timp). Prin urmare, în interiorul suprafeţei S ori nu există nici surse nici puţuri, ori există şi unele şi altele, dar acţiunea lor se anulează, productivitatea fiind aceeaşi.

Vom numi, pe viitor, puţurile, surse negative. In acest caz, se poate spune că *mărimea* $N = \oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS$ *serveşte totdeauna drept o măsură a productivităţii surselor conţinute în interiorul suprafeţei S.*

Să considerăm acum cazul general când **a** nu mai reprezintă viteza, ci este un vector oarecare, iar câmpul lui este un câmp vectorial arbitrar. Adesea, considerăm şi aici câmpul ca fiind câmpul de viteze al unui lichid imaginar, iar pe N ca fiind o măsură a „surselor" lui. Putem socoti, deasemenea mărimea N drept „numărul" liniilor vectoriale „apărute" sau „dispărute" în interiorul suprafeţei S, deoarece, după cum am menţionat mai sus, putem considera fiecare flux elementar $a_i \Delta S_i \cos \varphi_i$ drept numărul liniilor ce traversează suprafaţa elementară ΔS_i.

In acest caz, punctele din care *apar* liniile vectoriale (punctul A din fig. 109 a) le vom denumi surse de linii vectoriale.

Celelalte puncte, ca de pildă punctul B, în care liniile vectoriale dispar, se vor numi puţuri. Intr'un câmp electrostatic sarcinile pozitive joacă rolul surselor, iar cele negative, rolul „puţurilor".

Prin urmare, mărimea

$$N = \oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS$$

ne permite să determinăm natura părţii câmpului vectorial *din interiorul suprafeței S. Ne dăm imediat seama despre existența unor surse sau puțuri și putem aprecia productivitatea lor.*

In paragraful următor vom desvolta această noțiune aplicând-o unui punct și unui volum întreg V, ca până acum. Să considerăm pentru aceasta un exemplu.

Exemplu. Câmpul este definit de ecuația $\mathbf{a} = \mathbf{r}$. Să se găsească fluxul printr'o suprafață sferică cu centrul în originea sistemului de coordonate și de rază R (fig. 110).

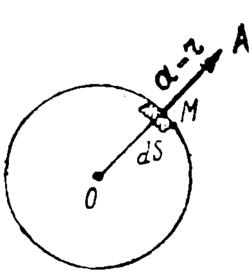


Fig 110

Rezolvare. Se consideră pe suprafața sferei un punct arbitrar M $(\mathbf{r})$ și o suprafață elementară dS în jurul acestuia. Vom avea

$$\mathbf{a} = \mathbf{r} = R\,\mathbf{r}^0,$$

$\mathbf{r}^0$ fiind versorul vectorului $\mathbf{r}$. Se știe că normala exterioară la sferă are acelaș sens cu $\mathbf{r}$ adică

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{r}^0.$$

Fluxul elementar va fi

$$dN = \mathbf{an}\, dS = R\,\mathbf{n}^2\, dS = RdS.$$

Fluxul total prin suprafața sferei va fi

$$N = \oint_S R\,dS = R\oint_S d\,S = R\,S.$$

Deoarece suprafața sferei este egală cu $4\pi R^2$ însemnează că în definitiv

$$N = 4\pi\, R^3.$$

Prin urmare, câmpul considerat prezintă surse în interiorul sferei. Acest lucru reiese din aceea că fluxul din interiorul suprafeței spre exterior este pozitiv.

§ 55. DIVERGENȚA CÂMPULUI

Noțiunea de flux al unui vector printr'o suprafață a dus la crearea altei noțiuni extrem de importante — divergența câmpului. Aceasta din urmă ne permite să caracterizăm câmpul mai complect și mai exact și anume : cu ajutorul divergenței putem caracteriza *câmpul* din punct de vedere cantitativ *în fiecare punct aparte* (și nu în întregul volum, cum o făceam cu ajutorul noțiunii integrale de flux printr'o suprafață închisă).

Să considerăm un punct oarecare M (fig. 111) și să-l înconjurăm cu o suprafață *S de formă arbitrară*, astfel aleasă încât toate punctele ei să se afle la distanțe foarte mici de M. Insemnăm volumul elementar, mărginit de suprafața noastră, prin ΔV. Să calculăm fluxul $N = \oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\,dS$ al vectorulu **a** prin suprafaţa S. Să facem raportul acestui flux N către valoarea ΔV a volumului

$$\frac{\oint_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,dS}{\Delta V} \tag{1}$$

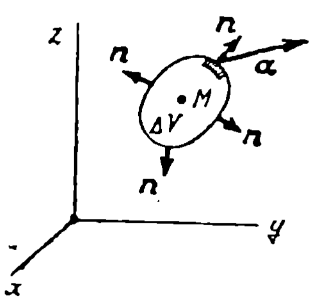


Fig. 111

Numărătorul reprezentând productivitatea surselor din interiorul întregului volum ΔV, este evident că raportul (1) va defini *productivitatea medie* a unităţii de volum. Să facem acum suprafaţa S să conveargă simultan din toate direcţiile înspre punctul M, iar volumul ΔV să tindă către zero. In acest caz, după cum vom vedea mai jos, raportul (1) va tinde către o limită anumită. *S'a convenit a se numi această limită divergenţa câmpului în punctul M şi a se nota astfel:*

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}. \tag{2}$$

Divergenţa este o mărime scalară, deoarece atât numitorul, cât şi numărătorul sunt mărimi scalare. *Valoarea ei caracterizează productivitatea surselor câmpului dintr'un element infinitezimal de volum care înconjoară punctul dat, valoarea aceasta fiind raportată la unitatea de volum.*

Dacă divergenţa este pozitivă, rezultă că în punctul M şi în vecinătatea lui imediată există surse ; dacă însă divergenţa este negativă, rezultă că în vecinătatea punctului M şi în însuşi punctul M liniile vectoriale sunt absorbite.

In cazul divergenţei nule, punctul M şi vecinătatea lui nu au nici surse, nici puţuri. Uneori, în loc de a spune divergenţa câmpului, spunem *divergenţa vectorului* **a**.

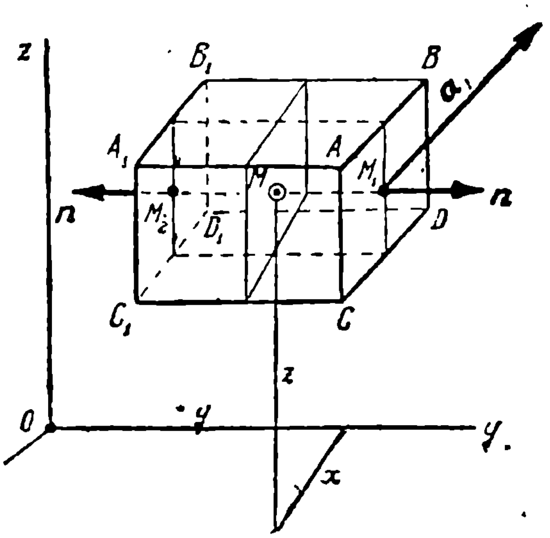


Fig. 112

Calculul divergenței în coordonate cartesiene. Se poate demonstra în cazul unor condiții foarte generale pentru funcția vectorială **a** (x, y, z) și derivatele ei, că raportul (2) posedă o limită bine determinată și nu depinde de forma suprafeței S care înconjoară punctul considerat. Să înconjurăm, prin urmare, punctul M (fig. 112) cu un paralelipiped infinitezimal, având laturile paralele cu axele de coordonate, astfel încât punctul M (x, y, z) să se afle tocmai în centrul lui de simetrie. Considerăm vectorul — câmp sub forma

$$\mathbf{a} = a_x\, \mathbf{i} + a_y\, \mathbf{j} + a_z\, \mathbf{k}, \tag{3}$$

a_x, a_y și a_z fiind niște funcții scalare oarecare, de coordonatele x, y și z ale punctului M. Presupunem că funcțiile a_x, a_y, a_z sunt uniforme și continui în domeniul nostru, împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi.

Să calculăm fluxul

$$N = \oint_S \mathbf{a}\, \mathbf{n}\, dS \tag{4}$$

prin suprafața paralelipipedului nostru. Să notăm dimensiunile paralelipipedului prin Δx, Δy și Δz.

Avem astfel

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y\, \Delta z.$$

Să calculăm fluxul ΔN_1, prin suprafața $ABCD$ perpendiculară pe axa y. Să notăm valoarea vectorului în centrul M_1 al suprafeței prin $\mathbf{a}_1$. Din cele trei componente ale vectorului $\mathbf{a}_1$, paralele cu axele de coordonate, numai $a_{1y}\, \mathbf{j}$, paralelă cu axa y, ne dă un flux diferit de zero: celelalte două, fiind tangente, dau fluxuri nule.

Prin urmare

$$\Delta N_1 = a_{1y}\, \mathbf{j}\, \mathbf{n}_1\, \Delta S_1 = a_{1y}\, \mathbf{j} \mathbf{n}_1\, \Delta x\, \Delta z.$$

Dar $\mathbf{j}\, \mathbf{n}_1 = \mathbf{j}^2 = 1$, deoarece normala exterioară $\mathbf{n}_1$ la suprafața $ABCD$ coincide cu versorul $\mathbf{j}$. Avem, deci

$$\Delta N_1 = a_{1y} \cdot \Delta x\, \Delta z. \tag{5}$$

In formulă am notat prin a_{1y} — valoarea proecției a_y *în punctul* M_1, adică

$$a_{1y} = a_y \left(x, y + \frac{1}{2}\, \Delta y, z\right), \tag{6}$$

deoarece, deplasându-ne dela M către punctul M_1, doar coordonata y își schimbă valoarea cu $\frac{1}{2} \Delta y$, iar x și z au rămas neschimbate.

Să scriem creșterea parțială a funcției a_y

$$\Delta a_y = a_y \left(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z\right) - a_y (x, y, z)$$

sub forma diferențialei ei parțiale

$$\Delta a_y = \frac{\partial a_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \alpha_1,$$

α_1 fiind un infinit mic de ordin superior, în raport cu Δy. Atunci

$$a_y \left(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z\right) = a_y (x, y, z) + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta y + \alpha_1$$

sau pe scurt

$$a_{1y} = a_y + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta y + \alpha_1.$$

Introducând aceste valori în formula (5) obținem

$$\Delta N_1 = a_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \varepsilon_1, \qquad (6')$$

$\varepsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta x \cdot \Delta z$ fiind un infinit mic de ordin superior lui trei.

Să calculăm acum fluxul ΔN_2 prin cea de a doua suprafață $A_1B_1C_1D_1$, simetrică cu prima. Mersul calculului este acelaș, cu singura deosebire că de data aceasta $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ deoarece este orientată în sens contrar axei y. In afară de aceasta, creșterea $+\frac{\Delta y}{2}$ o vom înlocui prin $-\frac{\Delta y}{2}$. De aci

$$\Delta N_2 = -a_{2y} \cdot \Delta S = -\left(a_y - \frac{\partial a_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \alpha_2\right) \Delta S$$

sau încă

$$\Delta N_2 = -a_y \Delta x \cdot \Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \varepsilon_2, \qquad (6'')$$

ε_2 fiind deasemenea un infinit mic de ordin superior lui trei. Adunând (6′) și (6″) găsim suma fluxurilor care ies prin ambele suprafețe perpendiculare pe axa y

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 = \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \varepsilon_3 = \frac{\partial a_y}{\partial y} \cdot \Delta V + \varepsilon_3, \qquad (8)$$

unde $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. In mod cu totul analog putem găsi suma fluxurilor prin suprafețele perpendiculare pe axa x. Deosebirea va consta doar în aceea că fluxul este dat de componenta a_x orientată după axa x și că diferențierea se efectuează în raport cu x şi nu în raport cu y, aşa cum am făcut-o anterior. Vom obţine

$$\Delta N_3 + \Delta N_4 = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V + \varepsilon_4. \qquad (8')$$

In sfârşit, suma fluxurilor prin cea de a treia pereche de suprafeţe perpendiculare pe axa z va fi egală cu

$$\Delta N_5 + \Delta N_6 = \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta V + \varepsilon_5. \qquad (8'')$$

Adunând expresiile (8), (8') şi (8'') vom afla fluxul total prin întreaga suprafaţă a paralelipipedului

$$N = \oint_S \mathbf{an}\, dS = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V + \varepsilon_6 \qquad (9)$$

ε_6 fiind suma mărimilor $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5$, el reprezentând deasemenea un infinit mic de ordin superior, în raport cu creşterile Δx, Δy şi Δz pe care le presupunem infiniţi mici de ordinul trei.

Impărţind ambii membri ai relaţiei (9) prin ΔV şi trecând la limită pentru $\Delta V \to 0$, obţinem

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{an}\, dS}{\Delta V} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

deoarece $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\varepsilon_6}{\Delta V} = 0$, ca fiind limita raportului dintre un infinit mic de ordin superior şi un infinit mic de ordin inferior.

Definitiv deci:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (10)$$

Această relaţie reprezintă *expresia divergenţei în coordonate carteziene.*

Exerciţiul 1. Să se găsească divergenţa câmpului $\mathbf{a} = \mathbf{r}$

Rezolvare. In cazul nostru

$$\mathbf{a} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

adică

$$a_x = x, \ a_y = y \quad \text{şi} \quad a_z = z$$

Prin urmare

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3.$$

Deci câmpul $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ are o divergenţă constantă şi egală cu 3 în toate punctele sale. Acest rezultat complectează pe cel obţinut în exemplul 1° din paragraful precedent.

Exerciţiul 2. Să se determine divergenţa câmpului electrostatic produs de o singură sarcină punctiformă situată în punctul A (a, b, c)

Rezolvare. In acest caz

$$E_x = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{x-a}{r^3}, \; E_y = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{y-b}{r^3} \text{ şi } E_z = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{z-c}{r^3}$$

De aici

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x-a}{r^5}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r^3} - 3\frac{(x-a)^2}{r^5}\right].$$

In mod analog

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r^3} - 3\frac{(y-b)^2}{r^5}\right] \text{ şi } \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r^3} - 3\frac{(z-c)^2}{r^5}\right].$$

Adunând obţinem

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{3}{r^3} - 3\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^5}\right].$$

Se observă însă imediat că numărătorul celei de a doua fracţii reprezintă tocmai r^2. Prin urmare

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right] = 0. \tag{11}$$

Razultatul este valabil pentru orice punct al spaţiului, cu excepţia punctului A, în care este situată sarcina punctiformă. Deducţiile noastre din paragraful prezent sunt inaplicabile punctului A, aceasta fiind un *punct singular*, în care mărimea

$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{\varepsilon r^3}$ şi proiecţiile E_x, E_y şi E_z îşi pierd sensul.

Prin urmare, divergenţa câmpului unei singure sarcini electrostatice este nulă în toate punctele acestuia.

Ne vom convinge în cele ce urmează, că teorema este valabilă pentru orice număr *finit* de sarcini punctiforme.

Exercițiul 3. Să se găsească divergența câmpului magnetic al unui conductor rectiliniu infinit lung.

Rezolvare. Utilizând formulele (10) și (13) din paragraful 22 și făcând un calcul analog cu cel din exercițiul 2° vom găsi

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{ext}} = 0 \text{ și } \operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{int}} = 0. \tag{12}$$

Divergența ca invariant al câmpului. Din definiția divergenței

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{an}\, dS}{\Delta V}$$

rezultă că toate mărimile ce o compun depind doar de câmp și nu depind deloc de sistemul de referință. Deci, *divergența oricărui punct este un invariant al câmpului,* caracterizând proprietățile interne ale acestuia și depinzând de structura lui, dar nu și de alegerea sistemului de coordonate.

§ 56. EXPRIMAREA DIVERGENȚEI SUB FORMĂ SIMBOLICĂ CU AJUTORUL OPERATORULUI LUI HAMILTON

Să scriem formula divergenței în coordonate cartesiene

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1}$$

și alături de ea formulele ce reprezintă operatorul lui Hamilton ∇ și vectorul **a**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k};$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \tag{2}$$

Să convenim a considera pe ∇ ca pe un „vector simbolic" și să-l supunem formal operațiilor de înmulțire și împărțire după aceleași regule pe care le urmează vectorii reali în algebră.

Observăm-comparând formulele (2) și (1) că putem considera formal expresia divergenței drept un „produs" scalar al „vectorului simbolic" nabla prin vectorul **a** adică

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a}, \tag{3}$$

înțelegând aci prin „înmulțirea" $\frac{\partial}{\partial x}$ cu a_x derivata $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ și analog pentru $\frac{\partial}{\partial y} a_y$ și $\frac{\partial}{\partial z} a_z$.

Formula (3) poartă numele de expresie simbolică a divergenţei prin operatorul nabla. O putem enunţa astfel : *pentru a găsi divergenţa unui vector oarecare* **a** *trebue să „înmulţim“ scalar* ~~*operatorul nabla prin* **a**.~~

Să exemplificăm utilizarea divergenţei şi a operatorului nabla.

Exerciţiul 1. Să se demonstreze că

$$\operatorname{div}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{div}\,\mathbf{a} + \operatorname{div}\,\mathbf{b}$$

sau că

$$\nabla\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \nabla\mathbf{a} + \nabla\mathbf{b}. \tag{4}$$

Rezolvare. Dacă adunăm geometric doi vectori, proiecţiile lor se vor aduna algebric. Prin urmare

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})_x = a_x + b_x$$

şi

$$\frac{\partial\,(a_x + b_x)}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}.$$

In mod analog

$$\frac{\partial\,(a_y + b_y)}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y}$$

şi

$$\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z}.$$

Adunând, obţinem

$$\operatorname{div}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{div}\,\mathbf{a} + \operatorname{div}\,\mathbf{b}.$$

Am fi putut obţine, de altfel, acest rezultat şi pe cale directă din definiţia divergenţei : expresia $\oint_S (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{n}\,dS$ *reprezintă fluxul sumar al vectorului* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *printr'o suprafaţă oarecare S, flux ce este egal cu suma algebrică a fluxurilor celor doi vectori componenţi prin aceeaşi suprafaţă, deoarece, conform proprietăţii produsului scalar,*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{n}\,dS = \mathbf{a}\mathbf{n}\,dS + \mathbf{b}\mathbf{n}\,dS,$$

de unde

$$\oint_S (\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{n}\,dS = \oint_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,dS + \oint_S \mathbf{b}\,\mathbf{n}\,dS$$

Observaţie. S'a convenit să se numească câmpul $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ „suma“ sau „suprapunerea“ a două câmpuri separate **a** şi **b**.

Prin urmare, din (4) reiese că divergența unui câmp care reprezintă suma a două câmpuri separate este egală cu suma algebrică a divergențelor fiecăruia din câmpurile componente. Teorema poate fi extinsă asupra sumei oricărui număr finit de termeni:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2 + \ldots + \operatorname{div} \mathbf{a}_n .$$

Să considerăm drept aplicație câmpul electrostatic produs de câteva sarcini punctiforme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i .$$

De aici rezultă

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \mathbf{E}_i = 0. \tag{5}$$

Formula este valabilă pentru toate punctele spațiului, cu excepția punctelor A_i în care sunt situate sarcinile q_i.

Exercițiul 2. Să se demonstreze că

$$\operatorname{div} \varphi \mathbf{a} = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi \tag{6}$$

sau altfel

$$\nabla(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \varphi$$

unde φ este o funcție scalară oarecare, iar $\mathbf{a}$ este o funcție vectorială de punct.

Rezolvare. Dacă se înmulțește un vector printr'un scalar φ, fiecare proiecție a lui se va multiplica prin acelaș factor. De aici rezultă

$$\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x} = \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y} = \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z} = \varphi \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Adunând pe coloane, obținem

$$\operatorname{div} \varphi \mathbf{a} = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \left(a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

Expresia din paranteze reprezintă însă tocmai produsul scalar dintre vectorul $\mathbf{a}$ și gradientul funcției scalare φ. Prin urmare, formula (6) este demonstrată.

Observaţie. Din problemele 1° şi 2° tragem concluzia că operatorul nabla posedă pe de o parte unele însuşiri vectoriale, deoarece se supune legii distributivităţii, acţionând asupra sumei $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, iar pe de altă parte, că acest operator posedă unele însuşiri diferenţiale, deoarece sileşte membrul drept (div φ **a**) să se descompună în doi termeni, asemănători în multe privinţe cu termenii rezultaţi în urma diferenţierii unui produs din analiza obişnuită.

Exerciţiul 3. Să se găsească div (f (r) **a**), f (r) fiind o funcţie scalară de r, iar **a** un vector variabil.

Rezolvare. Conform problemei precedente

$$\operatorname{div} (f(r)\ \mathbf{a}) = f(r) \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} f(r)$$

Dar

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f'(r)\mathbf{r}^0,$$

şi deci

$$\operatorname{div} (f(r)\mathbf{a}) = f(r)\operatorname{div} \mathbf{a} + \frac{f'(r)}{r}\ \mathbf{ar}. \tag{7}$$

Exerciţiul 4. Să se găsească div (φ **r**), **r** fiind vectorul de poziţie al punctului, iar φ — o funcţie scalară arbitrară

Rezolvare. Conform problemei 2° obţinem

$$\operatorname{div} (\varphi\, \mathbf{r}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \operatorname{grad} \varphi.$$

Dar div **r** = 3 şi prin urmare

$$\operatorname{div} (\varphi\, \mathbf{r}) = 3\, \varphi + \mathbf{r} \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Exerciţiul 5. Să se găsească div **c**, **c** fiind un vector constant.

Rezolvare. Deoarece c_x c_y şi c_z sunt deasemenea mărimi constante, vom avea

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} = \frac{\partial c_y}{\partial y} = \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0$$

şi deci

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0 \tag{9}$$

sau încă

$$\nabla\, \mathbf{c} = 0 \tag{10}$$

Exerciţiul 6. Să se găsească div [**c r**], **c** fiind un vector constant, iar $\mathbf{r}$ — vectorul de poziţie al punctului în raport cu originea.

Rezolvare. Deoarece

$$[\mathbf{c}\,\mathbf{r}] = (c_y z - c_z y)\,\mathbf{i} + (c_z x - c_x z)\,\mathbf{j} + \\ + (c_x y - c_y x)\,\mathbf{k}.$$

avem

$$\frac{\partial\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}]_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(c_y z - c_z y) = 0$$

Analog

$$\frac{\partial\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}]_y}{\partial y} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}]_z}{\partial z} = 0$$

Rezultă deci

$$\operatorname{div}\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}] = 0. \tag{11}$$

Exerciţiul 7. Am văzut că pentru un câmp de forţe supus legii lui Coulomb (câmp coulombian)

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon\, r^3}\,\mathbf{r}, \tag{12}$$

divergenţa este nulă în orice punct al câmpului (înafară de punctul $\mathbf{r} = 0$, care nu face parte din câmp). Există oare şi alte forţe de forma

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{r}, \qquad (12)$$

a căror divergenţă să fie nulă în orice punct ?

Rezolvare. Să presupunem că $f(r)$ este o funcţie oarecare necunoscută de r. Trebue să o alegem astfel încât divergenţa câmpului (12) să fie nulă. Conform problemei 4° scriem

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3\,f(r) + \mathbf{r}\,\operatorname{grad} f(r) = 3\,f(r) + \frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r}^2 = \\ = 3\,f(r) + f'(r)\,.\,r$$

Egalând expresia cu zero, obţinem pentru $f(r)$ o ecuaţie diferenţială

$$f'(r)\cdot r + 3\,f(r) = 0.$$

Separăm variabilele

$$\frac{df}{f} = -\frac{3\,dr}{r}.$$

Integrând, obţinem

$$\ln f = -3\ln r + \ln C, \text{ sau } f(r) = \frac{C}{r^3}$$

Introducând rezultatul în formula (12) obținem

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^3}\,\mathbf{r}, \tag{13}$$

C fiind o constantă arbitrară. Prin urmare, din toate forțele $f(r)\,.\,\mathbf{r}$, numai cele de forma $\frac{C}{r^3}\,\mathbf{r}$ produc un câmp de divergență nulă în toate punctele (afară de punctul $r = 0$).

Fizica cunoaște două câmpuri de acest fel: câmpul coulombian în electricitate și magnetism și câmpul newtonian în teoria elementară a gravitației.

§ 57 TEOREMA LUI GAUSS

Intreaga importanță a noțiunii de divergență reiese din așa numita teoremă a lui Gauss, demonstrată de acesta mai întâi sub formă scalară. O vom expune în limbajul mărimilor vectoriale.

Să considerăm în câmpul vectorului **a** o suprafață închisă arbitrară S (fig, 113) care mărginește volumul V. Se cere să calculăm fluxul vectorului **a** din interiorul acestei suprafețe, adică integrala dublă

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS,$$

definită pe suprafață.

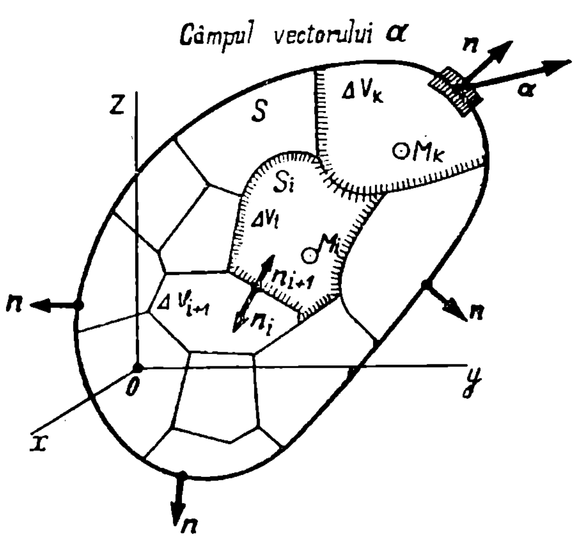


Fig. 113

Teorema lui Gauss afirmă că putem înlocui această integrală cu una triplă de div **a**, extinsă la volumul V, adică

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV \tag{1}$$

Teorema se enunță astfel: *fluxul vectorului* **a** *din interiorul unei suprafețe închise oarecare S situată oriunde în câmp este egal cu integrala divergenței acestui vector extinsă la volumul V mărginit de această suprafață.*

Demonstrație. Să divizăm volumul V într'un număr foarte mare de volume elementare $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_m$, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta V_i = V,$$

și să considerăm unul din aceste volume elementare — ΔV_i. Notăm suprafețele închise care mărginesc volumele ΔV_i prin literele $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Toate volumele elementare ΔV_i pot fi împărțite în două grupe. Unele, cum este de pildă ΔV_k în figura 113, sunt astfel situate încât o parte din suprafața ce le delimitează aparține elementelor *învelișului exterior* S, iar o parte este constituită din elementele unor suprafețe *ajutătoare*, duse în interiorul volumului V. Alte volume, ca de pildă ΔV_i în figura noastră, sunt astfel situate în interiorul volumului V încât suprafața care le delimitează este *în întregime* constituită *numai* din elementele suprafețelor ajutătoare.

Să alegem în interiorul fiecărui volum ΔV_i un punct arbitrar M_i și să scriem valoarea divergenței în acel punct.

Prin definiție

$$(\operatorname{div} \mathbf{a})_{M_i} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\oint_{S_i} \mathbf{a}_n \, dS_i}{\Delta V_i}. \tag{2}$$

Conform definiției limitei, din egalitatea (2), reiese

$$\frac{\oint_{S_i} \mathbf{a}_n \, dS_i}{\Delta V_i} = (\operatorname{div} \mathbf{a})_{M_i} + \varepsilon_i,$$

ε_i fiind un infinit mic oarecare.

De aici

$$\oint_{S_i} \mathbf{a}_n \, dS_i = (\operatorname{div} \mathbf{a})_{M_i} \Delta V_i + \varepsilon_i \Delta V_i, \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Dacă scriem egalități de acest fel pentru *fiecare* dintre volumele ΔV_i și le adunăm, vom obține

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} \oint_{S_i} \mathbf{a}_n dS_i} = \sum_{i=1}^{m} (\operatorname{div} \mathbf{a})_{M_i} \Delta V_i + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \Delta V_i. \tag{3}$$

Afirmăm că suma tuturor integralelor de suprafață din membrul stâng este egală tocmai cu integrala căutată $\oint_S \mathbf{a}_n \, dS$ extinsă doar la *suprafața exterioară* S.

Intr'adevăr, acele părți ale integralelor de suprafață care sunt extinse *la suprafețele ajutătoare se vor anula reciproc*, prin însumare, rămânând doar părţile extinse la elementele *suprafeţei exterioare* S. Suma lor va constitui integrala $\oint_S \mathbf{an}\, dS$ extinsă la întregul înveliş exterior S.

Anularea reciprocă a integralelor extinse la suprafeţele ajutătoare se va produce din cauză că *fiecare element* ΔS_i al acestor suprafeţe aparţine, în acelaş timp, ambelor *volume vecine* şi va fi considerat de două ori în calculele noastre. Deoarece normalele $\mathbf{n}_i$ şi $\mathbf{n}_{i+1}$, exterioare în raport cu cele două volume vecine ΔV_i şi ΔV_{i+1}, sunt de sens contrar (vezi figura), elementele $\mathbf{an}\,\Delta S_i$ ale integralelor luate pe aceste suprafeţe ajutătoare vor fi egale în valoare absolută şi de semn contrar. Rezultă că ele se vor anula prin însumare, în timp ce elementele integralelor extinse la învelişul exterior S vor da

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \sum_{i=1}^{m} (\operatorname{div}\mathbf{a})_{M_i}\, \Delta V_i + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\, \Delta V_i \tag{4}$$

Să facem acum numărul volumelor elementare ΔV_i să crească spre infinit, fiecare dintre ele tinzând în acelaş timp cu celelalte către zero. Ce înfăţişare va avea expresia (4) la limită? Membrul stâng rămâne constant, oricare ar fi schimbările suferite de m şi deci limita lui este egală cu el însuşi. In ceeace priveşte limita primei sume din membrul drept

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (\operatorname{div}\mathbf{a})\, M_i\ \Delta V_i$$

ea reprezintă prin definiţie tocmai integrala triplă

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV,$$

extinsă la volumul V. Să demonstrăm acum că

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\, \Delta V_i = 0. \tag{5}$$

Intr'adevăr, să calculăm această sumă. Scriem mai întâi

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\, \Delta V_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_i|\, \Delta V_i.$$

Inlocuind toţi termenii $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots\ldots, |\varepsilon_m|$ prin cel mai mare dintre ei, pe care-l vom nota prin $|\varepsilon|$ nu vom face decât să întărim inegalitatea, unde

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\, \Delta V_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon|\ \Delta V_i = |\varepsilon| \sum_{i=1}^{m} \Delta V_i = |\varepsilon| \cdot V.$$

Atunci când m va tinde spre infinit, toţi $|\varepsilon_i|$ şi *printre ei* şi cel mai mare dintre ei $|\varepsilon|$ vor tinde către zero. In acelaş timp, factorul V rămâne constant şi finit. Prin urmare

$$\lim_{m \to \infty} |\varepsilon| \cdot V = 0,$$

iar egalitatea (5) este valabilă. Egalitatea (4) ia, deci, la limită, forma

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV$$

sau mai simplu

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \tag{6}$$

Teorema este astfel demonstrată.

Demonstraţie directă. Formula (6) este aproape evidentă. Intr'adevăr, în membrul stâng căutăm numărul liniilor apărute sau absorbite în interiorul volumului V în care scop calculăm integrala extinsă pe suprafaţa care mărgineşte acel volum. Membrul drept ne spune că putem pătrunde în interiorul volumului V, îl putem diviza în elemente dV, putem calcula productivitatea fiecărui element cu formula div $\mathbf{a} \cdot dV$ şi însuma rezultatele pentru întregul volum Este evident că vom obţine acelaş număr de linii ca şi în primul caz.

Expresia analitică a teoremei lui Gauss. Să exprimăm produsul **an** în coordonate cartesiene

$$\mathbf{an} = a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z).$$

Egalitatea (6) ia forma

$$\oint_S \{a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)\}\, dS =$$

$$= \int_V \left\{ \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right\} dV. \tag{7}$$

Aceasta este forma sub care teorema este dedusă în cursurile de calcul integral. Aici înţelegem prin a_x, a_y şi a_z nu numai proiecţiile vectorului, ci trei funcţii scalare oarecare de variabilele x, y şi z care să satisfacă în interiorul volumului V şi pe suprafaţa S condiţiile de uniformitate şi continuitate, atât pentru funcţii, cât şi pentru derivatele lor de ordinul întâi, precum şi pentru valoarea finită a derivatelor de ordinul doi.

Observație. Trebue luat în seamă faptul remarcabil că în membrul stâng al teoremei lui Gauss

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV$$

se află o integrală care depinde numai de valorile funcției **a** *pe suprafața sau învelișul S* (adică depinde numai de proprietățile „locale" ale câmpului pe suprafață) pe când în membrul drept se află o integrală ce depinde de *întregul ansamblu* al valorilor lui **a** *în întreg volumul* V. Faptul că aceste integrale sunt egale, dovedește că derivabilitatea și continuitatea funcției **a** împreună cu continuitatea primelor derivate, adică condițiile pe care le satisface câmpul, stabilesc o legătură strânsă între valorile funcției în unele puncte ale câmpului și valorile ei în alte puncte vecine sau, ceeace constitue acelaș lucru, între proprietățile câmpului într'un punct oarecare și cele din punctele vecine. Fără aceste condiții, egalitatea nu ar putea avea loc. Trebue să avem în vedere observații identice referitoare la teoremele lui *Stokes* și *Green*.

Importanța teoremei lui Gauss constă în faptul că ea permite transformarea unei integrale duble de tipul $\oint_S \mathbf{an}\, dS$, extinsă la o suprafață închisă, într'o integrală triplă de forma $\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV$ extinsă la volumul mărginit de această suprafață și reciproc. In acest sens o putem numi *formula de transformare a integralelor* și o putem folosi atât dela dreapta la stânga, cât și vice-versa, în funcție de ușurința efectuării integralelor în fiecare caz aparte. Se poate întâmpla ca volumul *V* să fie mărginit nu de o singură suprafață *S*, ci de mai multe, cum se vede de exemplu în figura 114. In acest caz, formula (6) suferă o schimbare, întrucât integrala de suprafață din membrul stâng se va diviza într'un șir de integrale

$$\oint_{S_1} \mathbf{an}\, dS_1 + \oint_{S_2} \mathbf{an}\, dS_2 + \ldots\ldots \text{ș. a. m. d.}$$

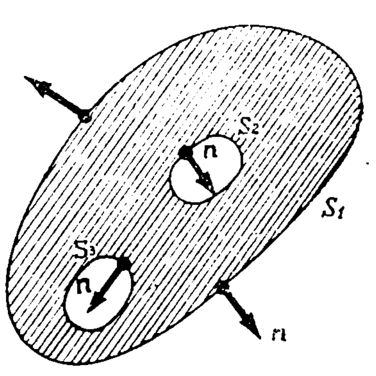


Fig. 114

Trebue să menționăm că normala **n** trebue dusă întotdeauna astfel încât să fie *exterioară în raport cu volumul* (vezi fig.).

Exercițiu. Să considerăm un câmp vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{r}$. Să se aplice teorema lui Gauss la volumul *V* al unei sfere descrise din origine cu o rază arbitrară *R*.

Rezolvare. Conform formulei (6) scriem

$$\oint_S \mathbf{rn}\, dS = \int_V div\ \mathbf{r} \cdot dV.$$

Pe suprafaţa sferei avem însă $\mathbf{rn} = R\, \mathbf{r}^0\, \mathbf{r}^0 = R$. Prin urmare, membrul stâng va lua forma $\oint_S R\, dS = R \oint_S dS = RS$, unde S reprezintă suprafaţa sferei.

In ceeace priveşte div $\mathbf{r}$, ea este constantă în toate punctele volumului, fiind egală cu 3 unităţi. Deaceea, în membrul drept vom avea $3 \int_V dV = 3V$. Egalitatea ia forma

$$R \cdot S = 3\, V \tag{8}$$

şi reprezintă relaţia dintre suprafaţa S a sferei şi volumul ei V. Dacă ne este cunoscută una din aceste mărimi, o putem calcula şi pe cealaltă. De pildă, dacă ştim că

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

putem cu ajutorul lui (8) să obţinem

$$S = 4\, \pi\, R^2$$

şi vice-versa.

§ 58. APLICAŢIILE TEOREMEI LUI GAUSS LA CÂMPURILE ELECTROSTATICE

Să studiem un şir de exerciţii consecutive, care ne vor permite să facem câteva constatări extrem de importante în ceeace priveşte câmpurile electrostatice.

Exerciţiul 1. Sarcina punctiformă q, situată într'un punct oarecare A este înconjurată de o suprafaţă sferică S de rază arbitrară R, sfera fiind descrisă chiar din punctul A. Să se găsească fluxul vectorului $\mathbf{E}$ prin suprafaţa sferică (vezi fig. 115).

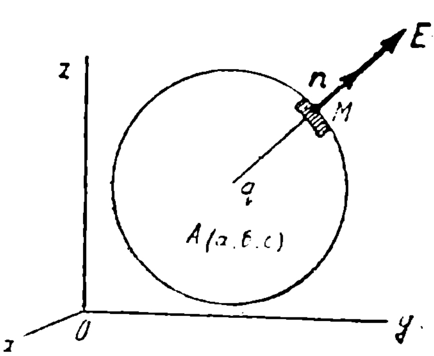


Fig. 115

Rezolvare. Fie M ($\mathbf{r}$) un punct arbitrar de pe suprafaţa sferei şi dS — elementul de suprafaţă pe care i-l atribuim. Pentru punctul M versorul normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}^0$, iar vectorul de poziţie va fi $\mathbf{r} = R\, \mathbf{r}^0$. Să scriem expresia vectorului $\mathbf{E}$ pe suprafaţă

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r} = \frac{q}{\varepsilon R^3} R\, \mathbf{r}^0 = \frac{q}{\varepsilon R^2}\mathbf{r}^0.$$

Fluxul elementar prin suprafaţa dS va fi

$$dN = \mathbf{En}\, dS = \frac{q}{\varepsilon R^2} (\mathbf{r}^0)^2 \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon R^2} dS.$$

Fluxul prin întreaga suprafaţă este

$$N = \oint_S \frac{q}{\varepsilon R^2} dS = \frac{q}{\varepsilon R^2} \oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon R^2} 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Rezultă că fluxul nu depinde de dimensiunile suprafeţei sferei şi este egal cu o mărime constantă $\frac{4\pi q}{\varepsilon}$. Semnul fluxului depinde de semnul lui q. Dacă sarcina q este pozitivă, vom avea şi un flux $N > 0$. Pentru $q < 0$ şi $N < 0$.

Exerciţiul 2. Să considerăm aceeaşi sarcină q înconjurată din toate părţile de o suprafaţă S de formă *arbitrară*. Să demonstrăm că şi în acest caz *fluxul nu depinde de suprafaţă* şi este egal tot cu $\frac{4\pi q}{\varepsilon}$ (fig. 116).

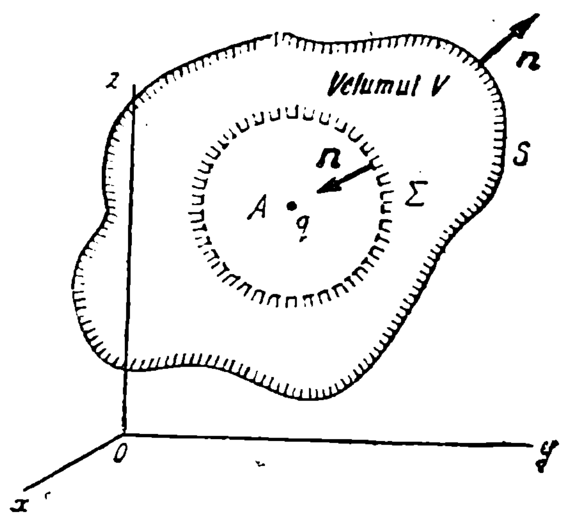


Fig. 116

Rezolvare. Calculul nemijlocit al integralei $\oint_S \mathbf{En}\, dS$ este dificil, suprafaţa fiind de formă arbitrară. Să recurgem la un artificiu de calcul. Vom descrie din A o sferă auxiliară Σ de rază arbitrară, dar destul de mică R, încât toată suprafaţa ei *să încapă în interiorul* lui S, ceeace este întotdeauna posibil. Să utilizăm teorema lui Gauss, aplicând-o volumului V' dintre suprafeţele Σ şi S. Conform observaţiei din § 57, membrul stâng al teoremei lui Gauss se descompune în două integrale şi formula ia forma

$$\oint_S \mathbf{En}\, dS + \oint_\Sigma \mathbf{En}\, d\Sigma = \int_{V'} \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV'. \qquad (2)$$

Observăm, însă, că integrala din membrul drept este nulă, deoarece div **E** este indentic nulă în toate punctele volumului V'. In membrul stâng, prima integrală este cea căutată, iar cea de a doua este egală cu mărimea $\frac{4\pi q}{\varepsilon}$ *luată cu semnul minus*, dat fiind că în exercițiul 1°, normala **n** era orientată în exterior, *în raport cu volumul sferei*, iar în cazul nostru ea va fi orientată *în interiorul* sferei Σ, fiind o normală *exterioară în raport cu volulmul* V'. Egalitatea (2) se va scrie deci

$$\oint_S \mathbf{En}\, dS - \frac{4\pi q}{\varepsilon} = 0,$$

De aici obținem

$$N = \oint_S \mathbf{En}\, dS = \frac{4\pi q}{\varepsilon}.$$

Exercițiul 3. Câmpul electrostatic este produs de câteva sarcini punctiforme $q_1, q_2, \ldots, q_n$. O suprafață S de formă arbitrară cuprinde *toate* sarcinile. Să se demonstreze că

$$\oint_S \mathbf{En}\, dS = \frac{4\pi}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

$\sum_{i=1}^{n} q_i$ fiind suma algebrică a tuturor sarcinilor aflate *în interiorul* lui S.

Rezolvare. Deoarece în cazul nostru

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i.$$

fluxul total va fi egal, conform celor demonstrate în § 56, cu suma algebrică a fluxurilor parțiale produse de fiecare dintre vectorii $\mathbf{E}_i$ adică

$$\oint_S \mathbf{En}\, dS = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n = \frac{4\pi}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Exercițiul 4. Câmpul este produs de niște sarcini punctiforme ca și în cazul precedent, dar suprafața S de formă arbitrară nu cuprinde *niciuna dintre sarcini*. Să se demonstreze că în acest caz fluxul vectorului **E** printr'o astfel de suprafață este nul.

Rezolvare. Aplicăm volumului V, mărginit de suprafața noastră, teorema lui Gauss (fig. 117).

$$\oint_S \mathbf{En}\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV.$$

Observăm imediat că membrul drept este evident nul, deoarece divergența lui **E** este identic nulă în toate punctele volumului V. Prin urmare și membrul stâng va fi nul, *q. e. d.*

Observație. Din exercițiile 3° și 4° rezultă următoarea teoremă: *Fluxul vectorului unui câmp electrostatic prin orice suprafață închisă dusă în câmp nu depinde de forma ei, și este egal cu produsul dintre* $\frac{4\pi}{\varepsilon}$ *și suma algebrică a tuturor sarcinilor, aflate în interiorul volumului mărginit de această suprafață. Fluxul sarcinilor situate înafara volumului considerat este nul.*

Din acestea se vede că teorema poate fi ușor extinsă la cazul unor sarcini spațiale (sau superficiale) considerate drept caz limită al unui ansamblu de sarcini punctiforme, când numărul acestora din urmă tinde către infinit.

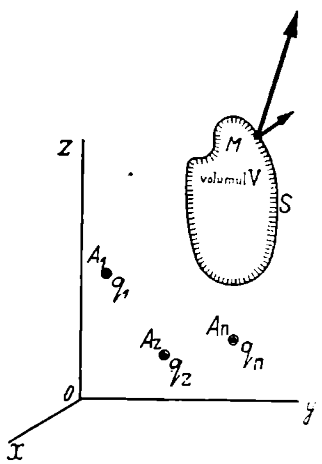


Fig. 117

Această teoremă importantă a electrostaticei este deseori denumită *a doua teoremă a lui Gauss*. Deosebirea ei esențială de cea dintâi constă în următoarele : **în timp ce prima este** *generală* și poate fi aplicată *oricărui câmp vectorial*, cea dea doua prezintă un caracter mai *restrâns* și poate fi aplicată doar câmpurilor coulombiene, adică celor de forma $\frac{C}{r^3}\,\mathbf{r}$. Acest fapt trebue luat în considerație în diversele aplicații.

Importanța celei de a doua teoreme constă în facilitarea considerabilă a determinării fluxului într'un câmp coulombian, determinare ce se reduce la însumarea sarcinilor aflate în interiorul suprafeței. Acest lucru explică însemnătatea ei practică în electrostatică. Exercițiile de mai jos o vor demonstra.

Exercițiul 5. Să se determine divergența unui câmp produs de o sarcină electrostatică *spațială*.

Rezolvare. Până acum am studiat doar *sarcinile punctiforme*. Să considerăm și un câmp produs de o sarcină *spațială* distribuită într'un volum oarecare W, având densitatea ρ. La rândul său ρ este o funcție de punctul A al volumului. Pentru a reduce problema la cazul sarcinilor punctiforme, să divizăm volumul W în elementele

$$dW = da \cdot db \cdot dc$$

și să considerăm sarcina elementară $dq = \rho \cdot dW$ drept o sarcină punctiformă (fig. 118). In acest caz, obținem următoarea expresie pentru a-l determina pe **E** într'un punct oarecare M (x, y, z) după formula (1) § 4:

$$\mathbf{E} = \lim_{W} \Sigma \frac{dq}{\varepsilon r^3} \mathbf{r} = \iiint_W \frac{\rho\,(a,b,c)\, da\,.\,db\,.\,dc}{\varepsilon\, r^3}\, \mathbf{r},$$

sau în proiecţii

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \iiint_W \frac{\rho\,(a,\,b,\,c)}{\varepsilon}\,.\,\frac{x-a}{r^3}\, da\cdot db\cdot dc,\\ E_y &= \iiint_W \frac{\rho(a,\,b,\,c)}{\varepsilon}\,.\,\frac{y-b}{r^3}\, da\cdot db\cdot dc\\ \text{şi}\quad E_z &= \iiint_W \frac{\rho\,(a,\,b,\,c)}{\varepsilon}\,.\,\frac{z-c}{r^3}\, da\cdot db\cdot dc \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Integrarea se efectuează în interiorul volumului W, cu coordonatele a,b şi c, r fiind egal cu$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ Coordonatele x, y şi z ale punctului *considerat* M, rămân *neschimbate în procesul integrării* şi constitue parametri ai funcţiei de sub integrală. Prin urmare, după efectuarea integrării proiecţiile E_x, E_y şi E_z reprezintă nişte funcţii de x, y *şi* z.

Mai putem demonstra că potenţialul V al câmpului este egal (conform teoremei despre însumarea algebrică a potenţialilor datoriţi diferitelor sarcini punctiforme) cu mărimea

$$V = \lim_{W} \Sigma \frac{dq}{\varepsilon r} = \iiint_W \frac{\rho\,(a,\,b,\,c)}{\varepsilon\, r}\cdot da\cdot db\cdot dc \qquad (3')$$

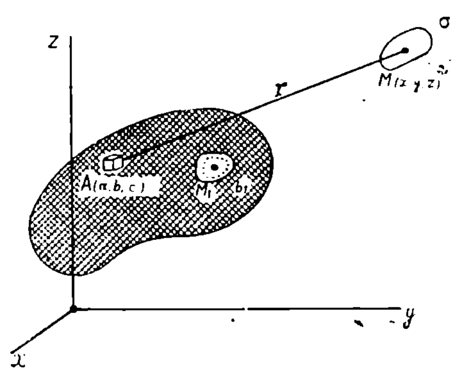


Fig. 118

Ne putem convinge de aceasta şi altfel, demonstrând că mărimea (3′) satisface egalităţilor

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

şi $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$.

Aceste relaţii rezultă imediat dacă derivăm integrala (3′) în raport cu parametrii x, y şi z.

Integralele (3) și (3') sunt convergente și reprezintă funcții de x, y și z finite, continui și bine determinate, *nu numai în cazul* când punctul M este situat *înafara volumului W*, dar chiar și în cazul când punctul considerat se află *în interiorul lui* (punctul M_1 din figură).

Prin urmare, în cazul unei sarcini spațiale putem vorbi atât despre câmpul exterior **E**, *cât și despre cel interior, dinăuntrul volumului W*[1]).

Deoarece nu avem posibilitatea de a demonstra aici convergența integralelor, demonstrație destul de dificilă (vezi [1]) ne mărginim la o simplă menționare aici și trecem la studiul proprietăților câmpurilor.

Vom considera două cazuri:

Cazul 1. *Punctul* M *este situat înafara volumului* W. Să-l înconjurăm cu o suprafață arbitrară, suficient de mică pentru ca volumul $\Delta\omega$, pe care-l mărginește, să nu aibă puncte comune cu W.

In acest caz, conform celei de a doua teoremă a lui Gauss, fluxul vectorului **E** prin această suprafață este nul, deoarece toate sarcinile sunt situate *înafara* acestei suprafețe, adică

$$\oint_\sigma \mathbf{En}\, d\sigma = 0.$$

Impărțind ambii membri ai egalității prin $\Delta\omega$ și făcându-l pe $\Delta\omega$ să tindă către zero, găsim

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\int_\sigma \mathbf{En}\, d\sigma}{\Delta\omega} = 0.$$

Prin definiție, însă, membrul stâng al acestei relații reprezintă tocmai div $\mathbf{E}_{ext}$ în punctul M și deci

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{ext} = 0. \tag{4}$$

Cazul 2. *Să considerăm un punct* M *situat în interiorul volumului* W. Să-l înconjurăm cu o suprafață σ_1 arbitrar de mică, având volumul $\Delta\omega_1$. In acest caz, sarcina întregului volum W va fi împărțită în două părți: una mai mică, pe

---

1) Vezi lucrarea prof. V. I. Smirnov „Curs de matematici superioare" vol. II, ed. 1931, pag. 259—263. Problema convergenței este extrem de importantă din următoarele considerente: Dacă punctul M_1 (x, y, z) se află în interiorul volumului W, funcția de sub integralele (3) și (3') devine infinită la integrarea în raport cu a, b și c pentru $a=x$, $b=y$ și $c=z$.

care o vom numi ΔQ_1 şi care va fi cuprinsă *în interiorul* lui $\Delta\omega_1$ şi alta mai mare — *înafara* lui. Conform celei de a doua teoreme a lui Gauss, fluxul prin suprafaţa σ_1 va fi determinat doar de prima parte, adică de cea interioară şi deci

$$\int_{\sigma_1} \mathbf{En}\, d6_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon} \Delta Q_1.$$

Impărţind prin $\Delta\omega_1$ şi făcându-l pe $\Delta\omega_1$ să tindă către zero, vom găsi

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \lim \frac{\Delta Q_1}{\Delta\omega_1}.$$

Dar limita raportului $\frac{\Delta Q_1}{\Delta\omega_1}$ pentru $\Delta\omega_1 \to 0$ reprezintă tocmai densitatea spaţială S în punctul M_1 şi prin urmare

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Am obţinut teorema: *Divergenţa unui câmp electrostatic de sarcini spaţiale este nulă în punctele în care nu există sarcinile spaţiale şi este egală cu* $\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ *în punctele unde există o densitate* ρ *de sarcini spaţiale.*

Această teoremă a fost transpusă de Maxwell sub formă de postulat în domeniul câmpurilor electromagnetice, unde joacă un rol important.

Corolar. Să scriem teorema sub formă analitică

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{6}$$

ude $\rho = 0$ în punctele exterioare (în raport cu volumul W) ale câmpului şi diferit de zero în cele interioare. Introducând în locul proiecţiilor E_x, E_y şi E_z o funcţie potenţială V, conform formulelor

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,; \; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ şi } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

transformăm ecuaţia (6) în

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{7}$$

In cazul $\rho = 0$ ecuaţia se numeşte a lui Laplace, iar în cazul $\rho \neq 0$ a lui Poisson. Obţinem astfel teorema: *funcţia potenţială V satisface într'un câmp electrostatic ecuaţia lui Laplace în* *punctele fără sarcini spațiale, și ecuația lui Poisson cu membrul drept* $-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ *în punctele unde există o densitate spațială* ρ.

Teorema este extrem de importantă pentru electrostatică. Ea ne arată că problema găsirii funcției potențiale poate fi redusă la integrarea ecuației lui Laplace-Poisson. Astfel, problema intră în categoria generală a „Ecuațiilor fizicei matematice“ unde este studiată în mod amănunțit.

Să exemplificăm utilizarea celei de a doua teoreme a lui Gauss.

Exercițiul 6. Să se determine câmpul unei sarcini spațiale sferice de rază a, sarcinile fiind uniform distribuite.

Rezolvare. Să considerăm o sarcină spațială Q de formă sferică, având raza a (fig. 119).

Vom avea relația

$$\rho = \frac{Q}{W} = \frac{3Q}{4\pi a^3}.$$

Să considerăm acum un punct M în exteriorul sferei la distanța r de centrul sarcinii sferice ($r > a$). In virtutea simetriei, în raport cu punctul O, vectorul căutat $\mathbf{E}$ va fi orientat de-a-lungul dreptei OM, iar valoarea lui numerică va depinde doar de distanța r, adică:

$$\mathbf{E} = f(r)\,\mathbf{r}^0, \tag{8}$$

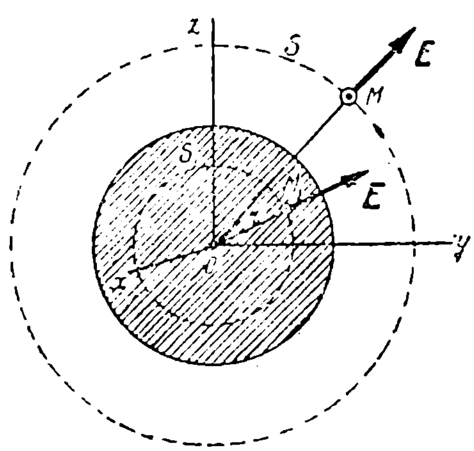


Fig. 119

$f(r)$ fiind o funcție necunoscută oarecare de r.

Pentru a o determina, să descriem din O o sferă auxiliară S de rază r, astfel încât ea să treacă prin M și să găsim fluxul vectorului $\mathbf{E}$ prin această suprafață S. Conform definiției fluxului

$$N = \oint_S \mathbf{En}\, dS = \oint_S f(r)\,(\mathbf{r}^0)^2 \cdot dS = f(r) \cdot \oint_S dS = f(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Pe de altă parte, conform celei de a doua teoreme a lui Gauss, fluxul este egal cu $\frac{4\pi Q}{\varepsilon}$. Egalând cele două expresii, obținem

$$f(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q}{\varepsilon} \tag{9}$$

De unde găsim $f(r) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot r^2}$. In acest caz, conform formulei (8), expresia vectorului câmp va fi

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon r^2}\mathbf{r}^0 = \frac{Q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}. \tag{10}$$

Rezultă că sarcina spațială sferică acționează asupra punctului exterior M *ca și când ar fi concentrată în centrul sferei și ar acționa după legea lui Coulomb.*

Să presupunem acum că punctul M_1 se găsește în interiorul sferei, adică $r_1 < a$. Vom descrie, ca și mai sus, sfera S, de rază r_1, ce trece prin M_1. In acest caz, relația (8) pentru cazul considerat se scrie analog, iar fluxul vectorului $\mathbf{E}$ prin suprafața S_1, va fi $f(r_1)4\pi r_1^2$.

Pe de altă parte, după cea de a doua teoremă a lui Gauss, el va fi egal cu $\frac{4\pi Q_1}{\varepsilon}$, unde prin Q_1 înțelegem numai acea parte a sarcinii totale Q, care se află în interiorul sferei S_1, pentrucă partea exterioară, în raport cu ea, a stratului sferic, va produce un flux nul, prin S_1. Astfel

$$f(r_1)4\pi r_1^2 = \frac{4\pi Q_1}{\varepsilon}.$$

Dar

$$Q_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3.$$

Inlocuind aceasta în egalitatea precedentă, obținem după simplificare

$$f(r_1) = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon} r_1.$$

De aici, din formula (8) pentru câmpul interior, obținem

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho r_1 \mathbf{r}^0 = \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho \mathbf{r}_1. \tag{11}$$

După cum se vede, câmpul interior se supune *legii proporționalității directe* în raport cu distanța r_1, în timp ce câmpul exterior este invers proporțional cu pătratul distanței. Proiecțiile câmpului interior vor fi

$$E_x = \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho x, \quad E_y = \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho y, \quad E_z = \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho z.$$

Observație. Este ușor de verificat în acest exemplu teorema care spune că divergența câmpului interior este egală cu $\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$. Intr'adevăr,

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{int} = \frac{4}{3\varepsilon} \pi\rho \operatorname{div} \mathbf{r}_1 = \frac{4}{3\varepsilon} \pi\rho \cdot 3 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Capitolul IX
ROTORUL CAMPULUI

§ 59. INTEGRALA DE LINIE A VECTORULUI

O altă noțiune importantă pentru studiul câmpurilor vectoriale o constitue noțiunea de integrală de linie a vectorului.

Să presupunem că în câmpul vectorial **a** am trasat o linie arbitrară pe care am luat două puncte oarecare A și B (fig. 120). Vom împărți segmentul de linie cuprins între A și B într'un număr foarte mare n de părți, notând punctele de diviziune prin M_1, M_2, ..., M_{n-1}. Fixăm direcția de parcurgere a liniei dela A la B. Porțiunile de linie astfel obținute le presupunem suficient de mici pentru ca într'o primă aproximație, fiecare element $M_i M_{i+1}$ să poată fi considerat drept rectiliniu; vom asimila aceste elemente cu niște vectori, notându-le prin simbolul

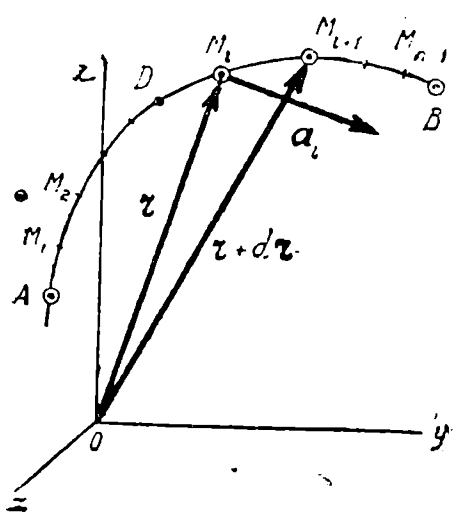


Fig. 120

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \Delta \mathbf{l}_i .$$

Pentru generalizare, vom însemna punctele inițial și final A și B prin M_0 și M_n. Să construim acum în fiecare punct M_i câte un vector $\mathbf{a}_i$ al câmpului nostru și să alcătuim suma produselor de forma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}_i \, \Delta \mathbf{l}_i, \tag{1}$$

luată de-a-lungul acestei linii.

Să facem acum numărul n de diviziuni să tindă spre infinit, iar elementele $\Delta \mathbf{l}_i$ să tindă *simultan* spre zero. In acest caz, după cum vom vedea mai departe, *suma (1) va tinde, în general, odată cu creșterea nelimitată a numărului de elemente* $\Delta \mathbf{l}_i$ *și cu restrângerea simultană a tuturor aces-*

tora către dimensiuni punctiforme, spre o limită oarecare bine definită.

Această limită o vom numi, prin definiție, integrala de linie a vectorului **a** *de-a-lungul liniei AB,* notând-o prin simbolul

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}_i \, \Delta \, \mathbf{l}_i = \int_{AB} \mathbf{a} \, d\,\mathbf{l}. \tag{2}$$

In cazul particular când linia AB este închisă, adică atunci când punctul final B coincide cu cel inițial A, ea poartă numele de contur și se notează prin litera C, iar integrala (2) se numește circulația vectorului **a** de-a-lungul conturului C, notându-se prin simbolul

$$\oint_{C} \mathbf{a} \, d\,\mathbf{l}. \tag{2'}$$

Se poate da o interpretare fizică integralei (2) *în cazul când vectorul* **a** *reprezintă o forță,* iar câmpul nostru este un *câmp de forțe.* In acest caz produsul $\mathbf{a}\,d\mathbf{l}$ reprezintă travaliul forței **a** de-a-lungul elementului de drum $d\mathbf{l}$, iar toată integrala, ca limită a sumei, reprezintă *travaliul forței de-a-lungul drumului străbătut* AB. In cazul general, însă, noi nu vom da integralei o interpretare oarecare, ci o vom numi simplu integrală de linie după cum s'a menționat mai sus.

Să raportăm curba noastră la o origină oarecare O; se vede în acest caz din figură că elementul de drum $d\mathbf{l}$ este egal cu creșterea $d\mathbf{r}$ a vectorului de poziție corespunzător punctului M, sau

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r},$$

de unde integrala (2) poate fi scrisă sub forma

$$\int_{AB} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$$

Să descompunem vectorul **a** și elementul $d\mathbf{r}$ după versorii fundamentali ai unui sistem rectangular de coordonate cartesiene

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k} \cdot$$

In acest caz

$$\mathbf{a}\,d\mathbf{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

și

$$\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_{AB} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z dz \tag{3}$$

Reiese de aici că *efectuarea integralei (2) în coordonate cartesiene se reduce la calculul integralei curbilinii (3)*

Modul de calcul al acestei integrale este expus în cursurile obişnuite de calcul integral. De exemplu, o metodă foarte bună pentru rezolvare constă adesea în reprezentarea ecuaţiei dreptei sub formă parametrică, dar sunt posibile şi alte metode. Am calculat în § 44, din capitolul VI, travaliul vectorului **E** de-a-lungul unei traiectorii oarecare, în câmpul electrostatic. Să mai aducem aici încă un exemplu.

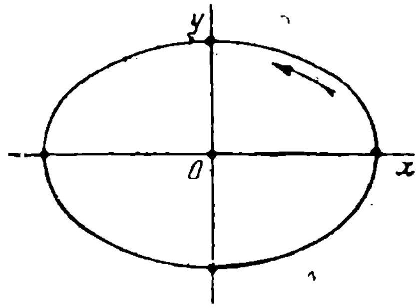


Fig. 121

Exemplu. Să se calculeze integrala de linie a vectorului

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} y \mathbf{i} + \frac{1}{2} x \mathbf{j}$$

de a-lungul elipsei din fig. 121, în direcţia arătată de săgeată.

Rezolvare. Integrala ia, în cazul nostru, forma

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy).$$

Considerând ecuaţia elipsei sub formă parametrică $x = a \operatorname{Cos} t$ şi $y = b \sin t$, ajungem la următoarea expresie sub integrală

$$-y dx + x dy = ab\ (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = ab\ dt.$$

In acest caz

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint_0^{2\pi} ab \cdot dt = \pi\, ab.$$

Să considerăm aici unele proprietăţi ale integralei de linie a unui vector. Dacă schimbăm direcţia de integrare *de-a-lungul aceleiaşi linii* AB, integrala îşi schimbă semnul, fără a-şi schimba valoarea, adică

$$\int_{BA} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = -\int_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} \qquad (4)$$

Intr'adevăr, odată cu schimbarea direcţiei dela B la A, toţi factorii $\Delta \mathbf{l}_i$ îşi schimbă semnul, în timp ce factorii $\mathbf{a}_i$ rămân neschimbaţi, de unde rezultă tocmai valabilitatea lui (4). Mai departe, dacă punctul D va fi situat între A şi B este evident că

$$\int_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_{AD} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int_{DB} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{5}$$

Această teoremă rămâne valabilă şi în cazul când punctul D este situat *înafara segmentului de integrare* AB. Intr'adevăr, din fig. 122 reiese că, parcurgând de două ori segmentul DB, în două direcţii contrarii, integralele $\int_{BD} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ şi $\int_{DB} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ se anulează reciproc prin adunare.

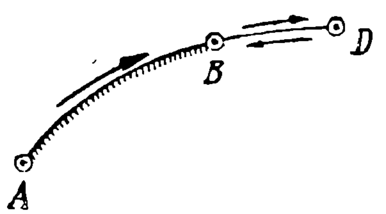


Fig. 122

Observăm, în sfârşit, că din însăşi definiţia integralei de linie rezultă, în general, că *valoarea acestei integrale depinde efectiv de forma traiectoriei, precum şi de alegerea punctului iniţial şi final pe aceasta.* Intr'adevăr, dacă în fig. 120 am fi considerat o altă linie între aceleaşi puncte A şi B, ea ar fi trecut prin alte porţiuni ale câmpului şi deci în egalitatea (3) s'ar fi schimbat expresia de sub integrală

$$a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz,$$

deoarece s'ar fi schimbat valorile numerice ale funcţiilor a_x, a_y şi a_z, atunci când am fi parcurs noua linie, precum şi expresiile dx, dy şi dz, definite prin noua ecuaţie a dreptei.

Există, totuşi, asemenea cazuri particulare ale câmpurilor vectoriale (aceste cazuri joacă, de altfel, un rol important în practică) în care această integrală nu depinde de natura traiectoriei, ci numai de poziţia punctelor iniţial şi final.[1])

Vom examina mai departe aceste tipuri de câmpuri, în mod amănunţit.

§ 60. CIRCULAŢIA UNUI VECTOR DE-A-LUNGUL CONTURULUI UNUI ELEMENT INFINITESIMAL. ROTORUL UNUI VECTOR.

Să rezolvăm următoarea problemă. Fie M punctul considerat într'un câmp vectorial oarecare **a** (fig. 123), punct prin care ducem un element plan infinitesimal de suprafaţă ΔS, de formă arbitrară şi mărginit de un contur C. Să pre-

1) De exemplu, câmpul forţelor electrostatice din § 44, câmpul gravitaţional, şi altele.

supunem că pe contur este dat un anumit sens de parcurgere, indicat de o săgeată. Să parcurgem conturul C în direcţia arătată şi să calculăm circulaţia vectorului **a** de-a-lungul acestui contur, adică integrala $\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$. După cum vom vedea, rezolvarea acestei probleme ne va conduce la o noţiune nouă, la aşa numitul „vector — vârtej" sau „rotorul câmpului" în punctul M.

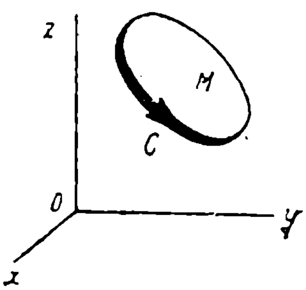


Fig. 123

Să presupunem mai întâi, pentru simplitate, că originea coordonatelor coincide cu punctul considerat M. Prin aceasta nu limităm caracterul general al raţionamentului nostru, deoarece din însăşi tipul integralei reiese clar că valoarea ei nu depinde de alegerea coordonatelor ci numai de natura câmpului în vecinătatea M, de natura conturului şi de sensul de parcurgere. Fie astfel, elementul de suprafaţă luat ca în figura 124, iar câmpul definit prin relaţiile

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

în care

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_x(x, y, z) \\ a_y &= a_y(x, y, z) \\ a_z &= a_z(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Vom presupune dimensiunile elementului de suprafaţă drept infinitesimale în orice direcţie, ieşind din punctul M sau O (fig. 124) astfel încât la parcurgerea conturului, coordonatele x, y, z ale unui punct oarecare de pe acesta să difere de zero printr'o cantitate infinitesimală.

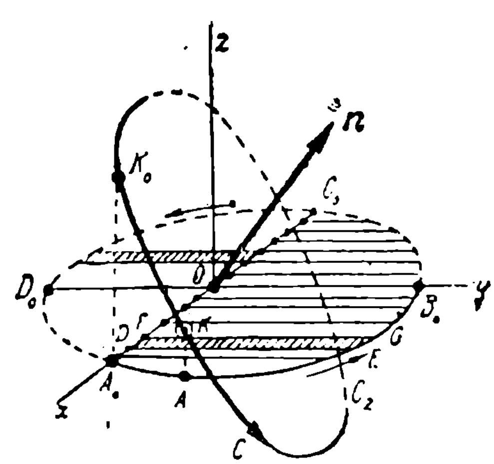


Fig. 124

Integrala pe care ne-o propunem să o rezolvăm este de forma

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \oint_C a_x\, dx + \oint_C a_y\, dy + \oint_C a_z\, dz \qquad (2)$$

Să calculăm termenul

$$\oint_C a_x\, dx.$$

Fie $K\ (x, y, z)$ un punct curent de pe contur. Să stabilim diferența

$$\Delta a_x = a_x\,(x, y, z) - a_x\,(0, 0, 0),$$

adică creşterea funcției a_x, odată cu deplasarea din punctul considerat M (0, 0, 0) din origină până în punctul curent K(x, y, z) de pe contur. Dacă funcția a_x este continuă în punctul M şi în vecinătatea lui, având derivate parțiale de ordinul întâi, deasemenea continui, creşterea Δa_x poate fi înlocuită printr'o diferențială complectă după formula

$$\Delta a_x = da_x + \alpha, \tag{3}$$

sau

$$a_x\,(x, y, z) - (a_x)_0 = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \cdot z + \alpha, \tag{3'}$$

în care am notat prin $\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0$, $(a_x)_0$, valorile funcției şi ale primelor ei derivate în raport cu x, y, z, *calculate în punctul considerat M (0, 0, 0)* ; valorile x, y, z reprezintă creşterile coordonatelor la trecerea dela M la K, iar α un infinit mic de ordin superior în raport cu x, y, z. In acest caz obținem din (3')

$$a_x\,(x, y, z) = (a_x)_0 + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \cdot z + \alpha,$$

Prin urmare

$$\oint_C a_x\, dx = (a_x)_0 \oint_C dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 \oint_C x\, dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \oint_C y\, dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \oint_C z\, dx + \oint_C \alpha\, dx. \tag{4}$$

Să efectuăm separat fiecare integrală din membrul drept. Vom arăta aici că primele două dintre ele sunt nule.

Să alegem pentru aceasta, drept origină, un punct oarecare K_0 pe conturul C şi să împărțim acest contur într'un număr foarte mare n de părți cu ajutorul punctelor K_0, K_1, K_2,.., K_n astfel încât ultimul punct K_n să coincidă cu primul K_0. In acest caz pe axa x vor corespunde o serie de abscise x_0, x_1, x_2.., x_n de unde $x_n = x_0$. Avem, după definiția integralei

$$\oint_C dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i, \tag{5}$$

dar

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) =$$
$$= x_n - x_0 = 0,$$

căci $x_n = x_0$.

Rezultă de aci că şi integrala (5) este nulă.

Pentru efectuarea celei de a doua integrale o vom scrie de două ori sub forma următoare

$$\oint_C x\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i \quad \text{şi} \quad \oint_C = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta x_i .$$

De aici, obţinem prin adunare

$$2 \oint_C x\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+i} + x_i) \Delta x_i . \tag{6}$$

Dar

$$(x_{i+1} + x_i) \Delta x_i = (x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) = x_{i+1}^2 - x_i^2 .$$

Rezultă că

$$\sum_{(c)} (x_{i+1} + x_i) \Delta x_i = (x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \dots$$
$$\dots + (x_n^2 - x_{n-1}^2) = x_n^2 - x_0^2 = 0,$$

căci $x_n = x_0$. Se vede deci că şi integrala (6) este nulă.

Să efectuăm acum pe $\oint_C y\, dx$. Pentru aceasta să proiectăm conturul C pe planul xOy, perpendicular pe axa z şi să însemnăm conturul astfel obţinut prin C_z, iar suprafaţa, limitată de el, pe planul xOy — prin ΔS_z. Să demonstrăm că

$$\oint_C y dx = - \Delta S_z .$$

Este evident că în locul integrării de-a-lungul conturului C putem introduce integrarea de-a-lungul *conturului* C_z, adică

$$\oint_C y\, dx = \oint_{C_z} y\, dx,$$

pentrucă orice punct A al conturului C_z are aceleaşi coordonante y şi x ca şi punctul K care-i corespunde pe conturul C, iar în expresia de sub integrală intră numai mărimile x

şi y, fără coordonata z. Vom integra deci de-a-lungul conturului C_z. Dar, prin definiţie

$$\oint_{C_z} y\, dx = \lim \sum_{C_z} y_i \Delta x_i$$

Elementul $y_i\ \Delta x_i$ din această integrală este egal cu suprafaţa fâşiei infinitesimale $DEFG$ luate cu semnul minus, fâşie a cărei bază este DF $= |\Delta x_i|$, iar înălţimea $DE = |y_i|$. Parcurgând conturul C_z în sensul arătat de săgeată, toate suprafeţele fâşiilor vor căpăta semnul minus şi se vor aduna aritmetic, dând suprafaţa figurii $A_0B_0C_0D_0A_0$, cu semnul minus.

Intr'adevăr, deplasându-ne pe curba $A_0B_0C_0$, în primul şi al doilea cadran al planului xOy, toţi factorii y_i vor fi pozitivi (vezi figura) iar toţi factorii Δx_i vor fi negativi, pentrucă abscisa x_i descreşte mereu. Invers, deplasându-ne pe curba $C_0D_0A_0$ în cadranele trei şi patru, factorii y_i vor deveni negativi, iar toţi Δx_i pozitivi. Şi astfel

$$\oint_C y\, dx = \oint_{C_z} y\, dx = \lim \sum_{(C_z)} y_i \Delta x_i = -\Delta S_z. \tag{7}$$

Demonstrăm în mod analog că

$$\oint_C z\, dx = \oint_{C_y} z\, dx = \lim \sum_{(C_y)} z_i \Delta x_i = +\Delta S_y, \tag{8}$$

unde C_y — reprezintă proiecţia conturului C pe planul xOz, perpendicular pe axa y, iar ΔS_y — proiecţia corespunzătoare a elementului de suprafaţă ΔS pe acelaş plan.

Inlocuind în formula (4) rezultatele (5)—(8) obţinem

$$\oint_C a_x\, dx = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \Delta S_z + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \Delta S_y + \oint_C \alpha d_x \tag{9}$$

Să efectuăm, în sfârşit, ultima integrală $\oint_C \alpha\, dx$ şi să demonstrăm că valoarea ei reprezintă un infinit mic de ordin superior, în raport cu primii doi termeni din membrul drept.

Intr'adevăr

$$\oint_C \alpha dx = \lim \sum_{(C)} \alpha_i \Delta x_i\ ,$$

Dar

$$\left|\sum_{(C)} \alpha_i \Delta x_i\right| \leqslant \sum_{(C)} |\alpha_i|\, |\Delta x_i| \leqslant |\alpha|_{max} \cdot \sum_{(C)} |\Delta x_i| =$$

$$= |\alpha|_{max}\ 2\, |A_0 C_0| = 2\, |\alpha|_{max} \cdot \delta,$$

unde prin δ am notat prescurtat mărimea segmentului A_0C_0. Deoarece α reprezintă o mărime de ordin superior ordinului întâi, $2|\alpha|_{max}\,\delta$ va fi de un ordin superior *ordinului doi;* să o notăm prin ε_1. Astfel

$$\oint_C a_x\, dx = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 \Delta S_z + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 \Delta S_y + \varepsilon_1. \qquad (10)$$

Analog, prin permutarea ciclică a lui x, y, z, obținem

$$\oint_C a_y\, dy = -\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0 \Delta S_x + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 \Delta S_z + \varepsilon_2.$$

$$\oint_C a_z\, dz = -\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0 \Delta S_y + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0 \Delta S_x + \varepsilon_3$$

Adunând termen cu termen aceste egalități, obținem circulația căutată, sau

$$\oint_C \mathbf{n}\, d\mathbf{l} = \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0\right] \Delta S_x + \left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0\right] \Delta S_y +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0\right] \Delta S_z + \varepsilon, \qquad (11)$$

în care $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ reprezintă un infinit mic de ordin *superior lui doi.*

Să introducem acum versorul normal $\mathbf{n}$ la elementul de suprafață Δs, „acordându-l" cu sensul de parcurgere al conturului C după regula sistemului dextrotors. In acest caz, după teorema proiecției unei suprafețe

$$\Delta S_x = \Delta S \,.\, \cos(\mathbf{n}\,,\, x),$$

$$\Delta S_y = \Delta S \,.\, \cos(\mathbf{n}\,,\, y),$$

$$\Delta S_z = \Delta S \,.\, \cos(\mathbf{n}\,,\, z).$$

Vom conveni, de asemenea, pentru simplitate, ca în cele ce urmează să nu mai întrebuințăm simbolul $(\ )_0$, ci să subînțelegem că derivatele $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ .... ș. a. m. d. sunt calculate pentru punctul *considerat M.* Formula (11) poate fi scrisă și astfel

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \left\{ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \cos(\mathbf{n},x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \cos(\mathbf{n},y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \cos(\mathbf{n},z) \right\} \Delta S + \varepsilon. \qquad (12)$$

Aceasta constitue tocmai soluția problemei propuse.

Vectorul rotor. Introducem în punctul M un vector auxiliar **W** astfel încât *proiecțiile lui pe axele de coordonate să fie egale cu valorile corespunzătoare cuprinse în parantezele simple ale egalității (12)* adică

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ W_y &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ W_z &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

iar

$$\mathbf{W} = W_x \mathbf{i} + W_y \mathbf{j} + W_z \mathbf{k}. \qquad (14)$$

Vectorul **W** este complect determinat în mărime și direcție prin aceste egalități. Il vom numi „vectorul rotor al câmpului" în punctul M, sau simplu „rotorul" vectorului **a** și-l vom nota convențional prin simbolul rot **a** astfel că

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \mathbf{k}. \qquad (15)$$

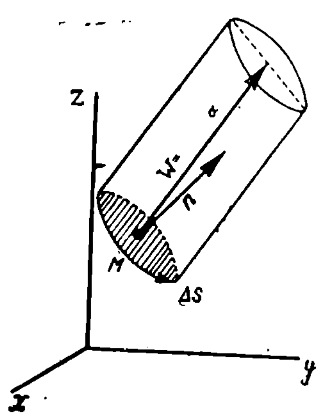


Fig. 125

In afara denumirii latine de „rotor" se mai întrebuințează și denumirea englezească de „curl" (citește keurl) care înseamnă „buclă".

Egalitatea (12) poate fi atunci scrisă prescurtat

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \mathbf{W}\, \mathbf{n}\, \Delta S + \varepsilon = W_n \cdot \Delta S + \varepsilon, \qquad (16)$$

sau

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = rot_n\, \mathbf{a} \cdot \Delta S + \varepsilon \qquad (16')$$

și ne arată că *circulația vectorului de-a-lungul conturului elementului infinitesimal de suprafață* S *dus prin punctul considerat poate fi exprimat cu aproximația unui infinit mic de ordin superior, prin fluxul vectorului — rotor* **W** *prin acest element de suprafață, în direcția normalei* **n** *legată de direcția de parcurgere a conturului, prin legea sistemului dextrotors* (fig. 125). Formulele (13), (14) și (15) servesc la calcularea lui rot **a** într'un sistem de coordonate cartesiene.

Rotorul ca invariant al câmpului. Rotorul **W** este determinat de formulele(13)—(15) prin intermediul sistemului cartesian de coordonate. Să-i dăm acum o altă definiție, independentă de alegerea sistemului de coordonate. Să dividem ambii membri ai formulei (16') prin ΔS și să trecem la limită făcându-l pe ΔS să tindă spre zero, iar elementul de suprafață să conveargă către punctul M. In acest caz, deoarece

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta S} = 0,$$

obținem

$$\text{rot}_n\, \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l}^{1)}}{\Delta S} \tag{17}.$$

Această egalitate poate fi considerată drept definiția rotorului, exprimând-o astfel:

Rotorul vectorului **a** *într'un punct oarecare* M *este un vector, a cărui proiecție pe o direcție oarecare* **n** *este egală cu limita raportului dintre circulația vectorului* **a** *de-a-lungul conturului elementului infinitezimal de suprafață* ΔS, *ortogonal pe* **n** *și mărimea acestui element de suprafață, atunci când acesta din urmă tinde spre zero, reducându-se la punctul* M *și rămânând incontinuu ortogonal pe* **n**. *In tot timpul procesului sensul de parcurgere al conturului este legat de orientarea lui* **n** *prin regula sistemului dextrotors.* Reiese de aici că rot **a** este un invariant al câmpului.

§ 61. EXEMPLE DE ROTORI ÎNTÂLNITE IN CÂMPURILE FIZICE

Exemplul 1. *Câmpul vitezelor unui solid în rotație.* Fie un solid ce se rotește în jurul unei axe imobile l cu viteza unghiulară ω. Putem suprapune axa l peste axa z fără ca prin aceasta să se restrângă caracterul general al raționamentului (fig. 126).

Fie, deasemenea, M (**r**) punctul considerat al câmpului, astfel ca

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Vectorul ω se exprimă în figura noastră astfel

$$\omega = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + \omega \cdot \mathbf{k} \cdot = \omega \cdot \mathbf{k}.$$

1) Expresia $\dfrac{\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S}$ este uneori denumită „densitatea circulației" unui vector.

In acest caz, vectorul **v** care reprezintă viteza liniară a punctului M se exprimă după formula (16) § 22 sub forma

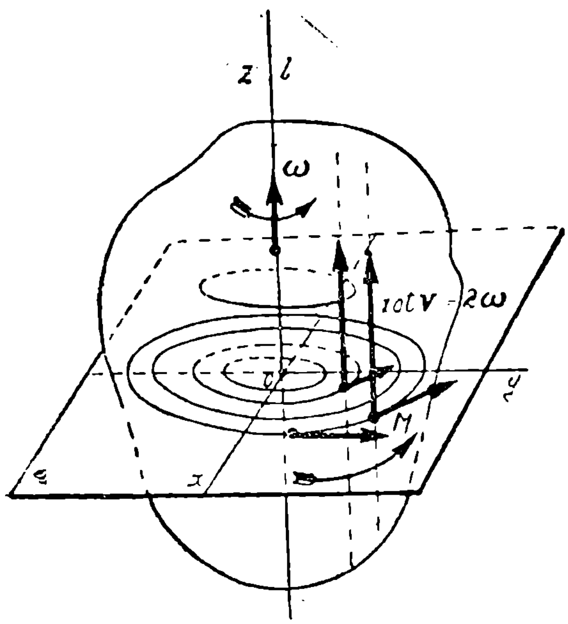


Fig. 126

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

sau

$$\mathbf{v} = -\omega \cdot y \cdot \mathbf{i} + \omega \cdot x \cdot \mathbf{j} + 0 . \mathbf{k},$$

de unde

$$v_x = -\omega . y, v_y = \omega \cdot x, v_z = 0,$$

Să găsim acum rotorul vectorului **v**. După formula (15) din paragraful precedent, obținem

$$W_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$

$$W_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$W_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega + \omega = 2\omega.$$

Prin urmare

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{k} = 2\omega, \qquad (1)$$

adică *rotorul câmpului vitezelor unui solid în rotație este acelaş în toate punctele câmpului, paralel cu axa de rotație şi egal în mărime cu dublul vitezei unghiulare de rotație.* Exemplul considerat reprezintă cazul cel mai simplu de câmp fizic, având un vector-rotor în fiecare punct al său. Dacă considerăm un corp lichid ce se roteşte în jurul unei axe ca un tot, această imagine a rotației este legată în reprezentarea obişnuită de noțiunea de rotor. De aici a şi apărut, prin analogie, denumirea de rotor.

Exemplul 2. *Câmpul magnetic al unui conductor rectiliniu infinit lung.*

Am studiat în amănunt acest câmp în § 22 unde am dat şi reprezentarea lui, la care ne vom referi şi în cazul de față. Să examinăm două cazuri:

Cazul 1. *Câmpul exterior.* Avem relațiile

$$H_x = -2I\frac{y}{\rho^2}, \; H_y = 2I\frac{x}{\rho^2}, \; H_z = 0,$$

unde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Calculând proiecțiile rotorului pe axele de coordonate

$$\mathrm{rot}_x\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_y\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_z\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 2I\left(\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{x^2}{\rho^4}\right) + 2I\left(\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{y^2}{\rho^4}\right),$$

sau

$$\mathrm{rot}_z\, \mathbf{H} = 2I\left(\frac{2}{\rho^2} - 2\frac{x^2 + y^2}{\rho^4}\right) = 0.$$

Prin urmare

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H}_{\mathrm{ext}} = 0\,. \tag{2}$$

Vedem deci că în câmpul magnetic exterior nu există rotori. Acesta este un câmp potențial.

Cazul 2. *Câmpul interior.* Avem relațiile

$$H_x = -2\pi u y,\ H_y = 2\pi u x \text{ și } H_z = 0,$$

în care u reprezintă densitatea de curent. De unde

$$\mathrm{rot}_x\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_y\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_z\, \mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 2\pi u + 2\pi u = 4\pi u.$$

Astfel

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H}_{\mathrm{int}} = 4\pi u \cdot \mathbf{k} = 4\pi \mathbf{u}, \tag{3}$$

în care $\mathbf{u}$ reprezintă vectorul densitate de curent. In câmpul magnetic interior al curentului poate exista deci un rotor. După cum se vede, el este acelaş în toate punctele din interiorul conductorului, este paralel cu sensul curentului și egal cu $4\pi u$. In teoria generală a câmpurilor magnetice se demonstrează că această formulă este valabilă nu numai pentru un conductor rectiliniu, ci și în cazul general.

Exemplul 3. *Câmpul electrostatic.* Să luăm pentru simplificare, câmpul unei singure sarcini punctiforme

$$E_x = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{x-a}{r^3},\ E_y = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{y-b}{r^3},\ E_z = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{z-c}{r^3}.$$

De aici

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -3\frac{q}{\varepsilon}\frac{(z-c)(y-b)}{r^5} + 3\frac{q}{\varepsilon}\frac{(y-b)(z-c)}{r^5} = 0.$$

Găsim analog că și celelalte două proiecții sunt nule. Astfel

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

adică un câmp electrostatic produs de o singură sarcină punctiformă este lipsit de rotor. Se poate demonstra ușor pe aceeași cale că această teoremă este valabilă pentru orice câmp electrostatic, printre care și pentru un câmp produs de sarcini spațiale, în toate punctele acestuia.

§ 62. CÂMP ROTORIC

Fie un câmp oarecare **a**. Construind rotorul lui în fiecare punct, obținem un nou câmp vectorial oarecare, care poartă numele de câmp rotoric al câmpului dat. Liniile vectoriale ale câmpului rotoric se numesc linii rotorice. Așa, de exemplu, pentru câmpul magnetic interior al curentului, liniile lui rotorice vor fi chiar liniile de curent, pentrucă conform formulei $\operatorname{rot} \mathbf{H}_{int} = 4\pi \mathbf{u}$, rot **H** fiind orientat după liniile de curent; în cazul câmpului vitezelor unui solid în rotație, liniile lui rotorice vor fi niște drepte, paralele cu axa de rotație și așa mai departe.

Câmpul rotoric posedă o proprietate caracteristică, anume *divergența lui este identic nulă în toate punctele*, adică

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \tag{1}$$

Această teoremă poate fi verificată ușor pe cale directă. Intr'adevăr

$$\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{a} = W_x \mathbf{i} + W_y \mathbf{j} + W_z \mathbf{k}.$$

De aici

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}.$$

Calculând, se obține

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}.$$

Prin adunare, toți termenii se simplifică unii cu alții, teorema fiind astfel demonstrată.

Vom studia amănunţit în cele ce urmează, proprietăţile câmpurilor de acest fel. Divergenţa fiind nulă în toate punctele câmpului rotoric, acesta din urmă poartă numele de „câmp fără surse".

§ 63. TEOREMA LUI STOKES

Importanţa noţiunii de rotor reiese din următoarea teoremă descoperită de fizicianul şi matematicianul Stokes, sub formă scalară şi apoi transpusă în calculul vectorial, unde şi-a găsit o interpretare specifică. Să expunem conţinutul ei folosindu-ne de limbajul mărimilor vectoriale.

Fie în câmpul vectorial **a** un contur arbitrar C de dimensiuni finite, pe care am ales un sens de parcurgere bine determinat (fig. 127).

Se cere să se calculeze integrala

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l}.$$

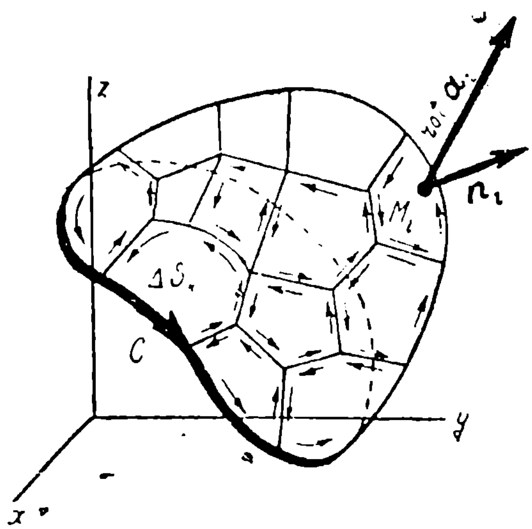


Fig. 127.

Teorema lui Stokes afirmă că se poate lua o suprafaţă arbitrară S care să se sprijine pe conturul dat, astfel ca în loc să se calculeze circulaţia vectorului **a** de-a-lungul conturului, să se găsească fluxul rotorului **a** prin această suprafaţă în direcţia normalei **n**, luată în concordanţă cu sensul de parcurgere, după regula sistemului dextrotors.

Cu alte cuvinte

$$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{a}\, dS = \int_S \mathrm{rot}_n\, \mathbf{a}\, dS. \tag{1}$$

sau, enunţând: *circulaţia vectorului* **a** *de-a-lungul unui contur oarecare este egală cu fluxul rotorului acestui vector printr'o suprafaţă arbitrară sprijinită pe conturul dat; normala* **n** *la această suprafaţă este în concordanţă cu sensul de parcurgere al conturului după regula sistemului dextrotors*

Demonstraţie. Presupunem funcţiile a_x, a_y şi a_z ca fiind uniforme şi continue împreună cu primele lor derivate parţiale calculate în orice punct al domeniului de câmp considerat. Impărţim suprafaţa S într'un număr foarte mare m de suprafețe elementare ΔS_i, suficient de mici pentru ca fiecare din ele într'o primă aproximație să poată fi considerată drept plană. Pe fiecare din ele alegem un punct arbitrar M_i și construim în punctele alese versorul normal $\mathbf{n}_i$. Contururile elementare care limitează elementele de suprafață ΔS_i să le notăm prin C_i și stabilim pentru fiecare din ele sensul de parcurgere în raport cu normala $\mathbf{n}_i$ și cu sensul general pe conturul de bază C (vezi figura). Trebue să notăm că unele dintre aceste contururi (de pildă conturul C_k, sunt compuse, în parte, din elementele *conturului de bază* C și în parte din elemente de legătură sau linii auxiliare; alte contururi, însă, cum ar fi, de pildă, conturul C_i, se compun *numai* din elementele liniilor de legătură.

In fiecare punct M_i construim vectorul rotor al câmpului $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})\,M_i$, sau $\mathbf{W}_i$ și-i aplicăm definiția fundamentală (17) din **§ 60**.

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\oint\limits_{C_i} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i = (W_n)_{M_i}.$$

De aici, conform definiției limitei, rezultă

$$\frac{\oint\limits_{C_i} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i + \varepsilon_i ,$$

sau încă

$$\oint\limits_{C_i} \mathbf{a}\, d\,\mathbf{l}_i = \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i\,\Delta S_i + \varepsilon_i\,\Delta S_i\,, \quad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

în care ε_i este o cantitate oarecare infinit mică. Adunând toate egalitățile (2) membru cu membru vom obține:

$$\sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{C_i} \mathbf{a}\, d\,\mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i\,\Delta S_i + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\,\Delta S_i\,. \tag{3}$$

Afirmăm că

$$\sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{C_i} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}_i = \oint\limits_{C} \mathbf{a}\, d\,\mathbf{l},$$

sau: suma din membrul stâng al egalității (3) este egală cu circulația căutată de-a-lungul conturului C, deoarece integralele luate de-a-lungul elementelor liniilor de legătură se anulează reciproc prin însumare.

Intr'adevăr, din figură reiese că fiecare dintre liniile de legătură este parcursă de câte două ori în sensuri contrare;

deaceea, acea parte a integralelor curbilinii ce se referă la ele, va intra de două ori în sumă cu semne contrarii.

Astfel

$$\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i\,\Delta S_i + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon\,\Delta S_i\,. \qquad (4)$$

Să facem numărul m de suprafețe elementare să tindă către infinit, în timp ce toate ΔS_i tind simultan către zero. Atunci este evident că

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i\,\mathbf{n}_i\,\Delta S_i = \int_S \mathbf{W}\mathbf{n}\,dS = \int_S \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}dS \qquad (5)$$

In ceeace privește cea de a doua sumă, la limită ea este nulă, adică

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\,\Delta S_i = 0.$$

Intr'adevăr, apreciind-o în mod analog celui în care procedam la deducerea teoremei lui Gauss, obținem

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i\,\Delta S_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left|\varepsilon_i\right| \Delta S_i \leqslant \left|\varepsilon\right|_{max} \sum_{i=1}^{m} \Delta S_i = \left|\varepsilon\right|_{max} . S,$$

în care S este valoarea întregei noastre suprafețe (pe care o presupunem finită). De aici

$$\lim_{m \to \infty} \left|\varepsilon\right|_{max} \cdot S = 0.$$

Deaceea, egalitatea (4) va deveni

$$\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\,dS \qquad (6)$$

demonstrând astfel teorema lui Stokes.

Dacă exprimăm analitic pe $\mathbf{a}d\mathbf{l}$ și $\mathbf{n}$ rot $\mathbf{a}$ în coordonate cartesiene, atunci teorema lui Stokes va căpăta forma

$$\oint_C a_x\,dx + a_y\,d_y + a_z\,dz = \int_S \left\{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\,(\mathbf{n}\ x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\,(\mathbf{n}, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\,(\mathbf{n}, z)\right\} dS \quad (7),$$

Sub această formă, teorema apare în cursurile de calcul integral în care a_x, a_y și a_z pot fi presupuse ca fiind trei funcții scalare oarecare de x, y și z.

Importanța teoremei lui Stokes constă în aceea că ea mite să se înlocuiască integrala curbilinie de tipul $\oint\limits_C \mathbf{a}\, dl$ prin calculul integralei duble de tipul $\int\limits_S \mathbf{n}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{a}\, dS$ extinsă la suprafața limitată de acest contur.

In acest sens, ea reprezintă *teorema sau formula transformării integralelor* [1].

Caz particular. Să luăm drept contur C o curbă închisă plană oarecare situată în planul xOy și drept suprafață S acea parte a planului xOy care este limitată de această curbă (fig. 128). Sensul de parcurgere pe curbă să-l stabilim astfel încât în timpul deplasării de-a-lungul conturului C, suprafața pe care o înconjurăm și care este limitată de C să rămână în stânga noastră.

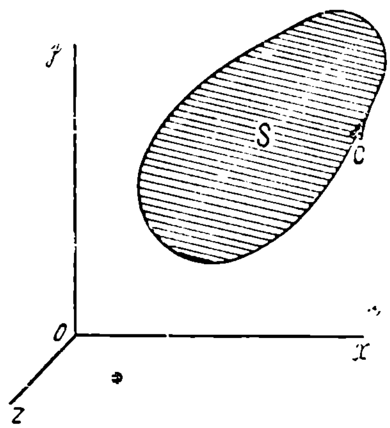


Fig. 128

Atunci versorul normal $\mathbf{n}$ la suprafața S este paralel cu axa z și deaceea

$$\cos(\mathbf{n}, z) = 1 \quad \text{și} \quad \cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\mathbf{n}, y) = 0$$

Ca funcții a_x și a_y să luăm funcțiile arbitrare scalare de 2 variabile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ continue în tot cuprinsul domeniului S cuprinzând și conturul C, având ca derivate parțiale continue de ordinul întâi $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Funcția a_z o considerăm nulă. Atunci egalitatea (7) va forma

$$\oint\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (8)$$

în care avem în membrul drept o integrală dublă, extinsă la domeniul S. Egalitatea (8) exprimă formula cunoscută din

---

1) Și aici este binevenită observația făcută referitor la teorema lui Gauss (vezi nota pentru § 57). In membrul stâng al formulei avem o integrală ce depinde numai de proprietățile locale ale câmpului de pe conturul C, iar în cel drept se află o integrală ce depinde de *totalitatea valorilor* funcțiilor de pe suprafața S, limitată de contur.

Continuitatea primelor derivate parțiale poate fi înlocuită și aici printr'o exigență mai redusă în ceeace privește continuitatea lor „pe anumite porțiuni", cu alte cuvinte, prin admiterea de salturi finite de pe liniile de discontinuitate ce se găsesc pe suprafață.

calculul integral sub numele de teorema lui Green-Riemann, în plan. Ea transformă integrala curbilinie luată de-a-lungul unei curbe plane într'o integrală dublă extinsă la domeniul limitat de această curbă.

Să studiem un exemplu pentru aplicarea teoremei lui Stokes.

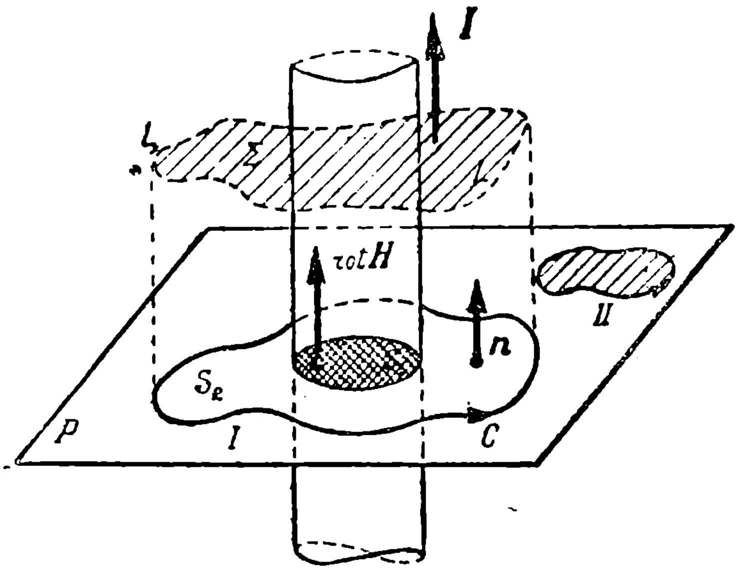


Fig. 129

Exemplu. *Travaliul forțelor unui câmp magnetic de-a-lungul unui contur ce înconioară curentul.*

Fie, în fig. 129 un conductor electric rectiliniu infinit lung, de formă cilindrică, prin care trece curentul I. Să luăm în planul P, perpendicular pe el, un contur arbitrar C și să găsim $\oint_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l}$, deci travaliul forțelor câmpului magnetic efectuat de-a-lungul conturului C, într'un sens legat de sensul curentului electric după regula lui Maxwell.

Deoarece calculul direct al integralei curbilinii este dificil, conturul C fiind arbitrar, vom aplica teorema lui Stokes[1]).

Să presupunem că în primul caz conturul *nu cuprinde conductorul* străbătut de curent (vezi figura). Să alegem drept

---

1) Condițiile de aplicare ale teoremei lui Stokes sunt îndeplinite în cazul de față, deoarece funcțiile H_x, H_y și H_z sunt continue în toate punctele câmpului, atât celui interior cât și celui exterior, cuprinzând și suprafața conductorului. In ceeace privește primele lor derivate, ele sunt continue peste tot, înafară de suprafața conductorului, dar discontinuitatea ce o capătă la trecerea prin suprafață este finită. La intersecția suprafeței conductorului cu planul P vom obține linia de discontinuitate de pe suprafața noastră S (vezi nota de pe pagina precedentă).

suprafață S partea din plan cuprinsă în interiorul conturului. Versorul normal $\mathbf{n}$ este paralel cu curentul I în toate punctele de pe această suprafață, fiind legat de sensul de parcurgere al conturului. După teorema lui Stokes

$$\oint_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H} dS$$

Prima parte a egalității este, însă, identic nulă, deoarece în câmpul magnetic exterior rotorul este nul. Rezultă că și membrul stâng este deasemenea nul, adică

$$\oint_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = 0. \tag{9}$$

Astfel, *travaliul forțelor unui câmp magnetic de-a-lungul unui contur arbitrar ce nu înconjoară curentul, este nul.*

Să luăm acum un contur ce *înconjoară curentul;* și aici drept suprafață S pentru teorema lui Stokes, să luăm partea din plan limitată de conturul nostru. Să divizăm pe S în două părți

$$S = S_1 + S_2,$$

în care S_1 este partea interioară egală cu suprafața secțiunii transversale a conductorului, iar S_2 este partea exterioară, inelară. Atunci

$$\oint_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H}\, dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H}\, dS_2 \tag{10}$$

Integrala a doua din membrul drept este, însă, nulă, deoarece în aceste puncte rotorul este nul. In ceeace privește punctele de pe S_2, în ele rotorul este egal cu $4\pi\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ fiind densitatea de curent. Deaceea, expresia de sub prima integrală devine

$$\mathbf{n} \cdot 4\pi \mathbf{u}\, dS_1 = 4\pi u\, dS_1.$$

De aici

$$\oint_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} 4\pi u\, dS_1 = 4\pi u \int_{S_1} dS_1 = 4\pi u S_1 = 4\pi I,$$

deoarece produsul uS_1 va da întreaga intensitate a curentului I ce trece prin secțiunea transversală a conductorului. Astfel

$$\oint_c \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = 4\pi I, \tag{11}$$

adică, *travaliul forțelor unui câmp magnetic efectuat de-a-lungul unui contur oarecare parcurs în sens pozitiv, contur ce* *înconjoară curentul, nu depinde de forma acestuia și este egal cu* $4\pi I$.

Până acum, raționamentele noastre le-am făcut pentru planul P și am cercetat doar contururi plane. Teorema, însă, poate fi demonstrată pentru contururi oarecare în spațiu. Se poate demonstra, deasemenea, că ea este justă nu numai pentru un curent rectiliniu, [1]) ci și pentru un curent oarecare închis, ce trece printr'un conductor de formă arbitrară (vezi mai departe Cap. XIV, § 91).

Analog cu expresia $\oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$, care se numește „forța electromotoare“, expresia $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l}$ se numește „forța magnetomotoare“ din conturul C.

§ 64. EXPRESIA ROTORULUI SUB FORMĂ SIMBOLICĂ CU AJUTORUL OPERATORULUI LUI HAMILTON

Să scriem formula rotorului în coordonate cartesiene

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

și împreună cu aceasta, expresiile operatorului ∇ și vectorului $\mathbf{a}$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Prin comparație, observăm că rot **a** poate fi privit convențional ca un „produs“ vectorial între vectorul simbolic nabla și vectorul **a**, adică

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla\, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k}, \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x, & a_y, & a_z \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Intr'adevăr desvoltând determinantul după regulele cunoscute și considerând „produsele“ $\frac{\partial}{\partial y} a_z$; $\frac{\partial}{\partial z} a_y$; etc. ca pe niște derivate $\frac{\partial a_z}{\partial y}$; $\frac{\partial a_y}{\partial z}$ . . . obținem formula (1).

---

1) In genere, curentul rectiliniu infinit lung se consideră ca un caz particular al curentului închis, atunci când cea de a doua jumătate a conturului se îndepărtează spre infinit.

Expresia $[\nabla \mathbf{a}]$ poartă numele de expresia simbolică a rotorului cu ajutorul operatorului lui Hamilton.

Să dăm câteva exemple pentru calculul rotorului

Exemplul 1. Să se demonstreze că

$$\text{rot}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{rot}\,\mathbf{a} + \text{rot}\,\mathbf{b} \tag{4}$$

Rezolvare. Relația (4) este evidentă, deoarece prin adunarea geometrică a vectorilor, proeicțiile lor se însumează algebric; deaceea, în formula (1) fiecare dintre derivatele parțiale se descompune într'o sumă de derivate ale fiecărui termen în parte. După grupare vom obține relația dorită.

Sub formă simbolică acest rezultat este de forma

$$[\nabla\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})] = [\nabla\,\mathbf{a}] + [\nabla\,\mathbf{b}], \tag{5}$$

cu alte cuvinte, operatorul nabla se supune legii distributivității față de înmulțirea „vectorială".

Exemplul 2. Să se găsească rot $(\varphi\mathbf{a})$ în care φ este o mărime scalară, iar $\mathbf{a}$ este o funcție vectorială de punct.

Rezolvare.

$$\text{rot}_x\,(\varphi\mathbf{a}) = \frac{\partial\varphi a_z}{\partial y} - \frac{\partial\varphi a_y}{\partial z} = \varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right).$$

In mod analog

$$\text{rot}_y\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z\right),$$

$$\text{rot}_z\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}a_x\right).$$

Inmulțind aceste egalități, membru cu membru prin $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ și $\mathbf{k}$ și adunând, obținem

$$\text{rot}\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\text{rot}\,\mathbf{a} - \left\{\left(a_y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - a_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \right.$$
$$\left. + \left(a_z\frac{\partial\varphi}{\partial x} - a_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(a_x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - a_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right\}$$

Observăm că expresia din paranteza mare nu estealtceva decât un produs vectorial $[\mathbf{a}\ \text{grad}\ \varphi]$. Deaceea

$$\text{rot}\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\text{rot}\,\mathbf{a} - [\mathbf{a}\ \text{grad}\ \varphi]. \tag{6}$$

Intr'o formă simbolică, această egalitate va fi exprimată astfel:

$$[\nabla\,(\varphi\,\mathbf{a})] = \varphi\,[\nabla\mathbf{a}] - [\mathbf{a}\,\nabla\,\varphi]. \tag{7}$$

Exemplul 3. Să se găsească rot $\mathbf{r}$ în care $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului în raport cu originea coordonatelor.

Rezolvare. Deoarece

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathrm{rot}_x \mathbf{r} = \frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z} = 0, \ \mathrm{rot}_y \mathbf{r} = 0 \ \text{şi} \ \mathrm{rot}_z \mathbf{r} = 0 \tag{8}$$

Deaceea

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{r} = 0.$$

Egalitatea (8) rămâne valabilă şi atunci când vectorul de poziţie se ia în raport cu oricare punct A (a, b, c) deoarece în acest caz

$$\mathbf{r} = (x-a)\,\mathbf{i} + (y-b)\,\mathbf{j} + (z-c)\,\mathbf{k}.$$

De altfel, aceasta reiese direct şi din invariabilitatea rotorului faţă de alegerea sistemului de referinţă (sistemul de coordonate).

Această observaţie este valabilă şi pentru exemplele următoare

Exemplul 4. Să se găsească $\mathrm{rot}\ (f\ (r)\ \mathbf{a})$

Rezolvare. După formula (6) scriem

$$\mathrm{rot}\,(f\,(r)\,\mathbf{a}) = f\,(r)\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} - [\mathbf{a}\ \mathrm{grad}\ f\,(r)] =$$

$$= f\,(r)\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} - \frac{f'(r)}{r}\,[\mathbf{a}\,\mathbf{r}]. \tag{9}$$

Exemplul 5. Să se găsească $\mathrm{rot}\ (f\ (r)\ \mathbf{r})$.

Rezolvare. Această problemă este un caz particular al problemei anterioare. Deaceea, după formula (9) avem:

$$\mathrm{rot}\ (f\,(r)\,\mathbf{r}) = f\,(r)\ \mathrm{rot}\,\mathbf{r} - \frac{f'(r)}{r}\,[\mathbf{r}\mathbf{r}] = 0 - 0 = 0. \tag{10}$$

Exemplul 6. Să se găsească $\mathrm{rot}\ [\mathbf{c}\mathbf{r}]$, în care $\mathbf{c}$ este un vector constant, iar $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al punctului în raport cu originea.

Rezolvare. Desvoltăm mai întâi produsul vectorial

$$[\mathbf{c}\mathbf{r}] = (c_y z - c_z y)\,\mathbf{i} + (c_z x - c_x z)\,\mathbf{j} + (c_x y - c_y x)\,\mathbf{k},$$

după aceea

$$\mathrm{rot}_x\,[\mathbf{c}\mathbf{r}] = \frac{\partial}{\partial y}\,(c_x y - c_y x) - \frac{\partial}{\partial z}\,(c_z x - c_x z) = c_x + c_x = 2\,c_x$$

In mod analog

$$\mathrm{rot}_y\,[\mathbf{c}\mathbf{r}] = 2\,c_y \ \text{şi} \ \mathrm{rot}_z\,[\mathbf{c}\mathbf{r}] = 2\,c_z\,.$$

Inmulţind cu versori şi adunând, găsim

$$\text{rot }[\mathbf{cr}] = 2\,(c_x\,\mathbf{i} + c_y\,\mathbf{j} + c_z\,\mathbf{k}) = 2\,\mathbf{c}. \tag{11}$$

Exemplul 7. Se ştie că vectorul **a** este gradientul unei funcţii scalare oarecare. Să se demonstreze că în câmpul unui asemenea vector rotorul este identic egal cu zero pentru toate punctele câmpului.

Rezolvare. Din condiţiile problemei

$$\mathbf{a} = \text{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Deaceea

$$\text{rot}_x\,\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

In mod analog găsim

$$\text{rot}_y\,\mathbf{a} = 0 \text{ şi } \text{rot}_z\,\mathbf{a} = 0.$$

Astfel

$$\text{rot grad }\varphi = 0 \tag{12}$$

sau simbolic

$$[\nabla\,\nabla\,\varphi] = 0.$$

Exemplul 8. Să ne folosim de noţiunea de rotor pentru ca să rezolvăm problema următoare; să se găsească div [**a b**], în care **a** şi **b** sunt funcţii vectoriale de punct.

Rezolvare. In primul rând

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}.$$

După aceea

$$\text{div }[\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Derivând şi grupând apoi, obţinem

$$\text{div }[\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) -$$

$$- a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) - a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right).$$

Observăm că expresia aflată în rândul întâi nu este altceva decât produsul scalar dintre vectorul **b** și rotorul **a**. In mod analog cel de al doilea rând ne va da produsul scalar dintre **a** și rotorul **b** luat însă cu semn invers.

Astfel

$$\operatorname{div} [\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} \tag{13}$$

sau

$$\nabla [\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = \mathbf{b}\, [\nabla\, \mathbf{a}] - \mathbf{a}\, [\nabla\, \mathbf{b}]. \tag{14}$$

§ 65. DERIVATA VECTORULUI IN RAPORT CU O DIRECȚIE DATĂ

In încheiere, vom studia o chestiune analoagă aceleia considerate la câmpurile scalare și anume problema derivatei funcției vectoriale **a (r)** în raport cu o direcție dată. Aceasta ne va duce la o operație nouă care se efectuează cu ajutorul simbolului nabla.

Ca introducere, să ne întoarcem la câmpul scalar al funcției φ. Am văzut că dacă **s** este versorul unei direcții oarecare, atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{1}$$

în care α, β *și* γ sunt unghiurile dintre direcția dată și axele de coordonate. Convenim să introducem operația $\mathbf{s}\,\nabla$ în care **s** este versorul unitar; prin aceasta înțelegem următoarele

$$\mathbf{s}\,\nabla = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

Atunci formula (1) se poate pune sub o formă simbolică

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathbf{s}\,\nabla \cdot \varphi \tag{3}$$

Se poate crea, deci, o noțiune despre o operație mai generală decât $\mathbf{s}\,\nabla$. Și anume, fie **v** un vector oarecare având proiecțiile v_x, v_y și v_z. Să introducem operația $\mathbf{v}\,\nabla$ prin care convenim să înțelegem următoarele

$$\mathbf{v}\,\nabla = v_x \frac{\partial}{\partial_x} + v_y \frac{\partial}{\partial_y} + v_z \frac{\partial}{\partial_z}, \tag{4}$$

astfel încât

$$\mathbf{v}\,\nabla \cdot \varphi = v_x \frac{\partial \varphi}{\partial_x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial_y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial_z}, \tag{5}$$

Este evident că operația (2) constitue un caz particular al lui (4) şi anume atunci când **v** se transformă în versorul **s**.

Să ne referim acum la câmpul vectorial. Să considerăm în câmpul vectorial **a** (**r**) un punct M (**r**) şi un versor oarecare **s** (fig. 130). Să ne deplasăm într'un punct infinit vecin M_1 situat la distanța Δs, *pe o direcție paralelă cu* **s** astfel încât

$$\Delta \mathbf{r} = \overline{MM_1} = \mathbf{s}\, \Delta s.$$

Atunci vectorul **a** în acest punct va căpăta o nouă valoare **a** (**r** + Δ **r**). Facem raportul

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\Delta s}, \tag{6}$$

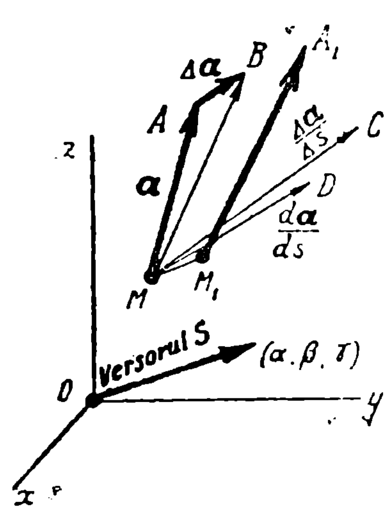


Fig. 130

adică raportul dintre creşterea funcției vectoriale şi mărimea deplasării Δs după direcția dată. Să facem pe Δs să tindă către zero, astfel încât $\overline{MM_1}$ să rămână tot timpul *paralel cu versorul* **s**. Vom numi atunci limita raportului (6) *derivata vectorului* **a** *în raport cu direcția dată* **s** notând-o astfel:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta s} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} \tag{7}$$

Se vede că aceasta reprezintă un vector oarecare $\overline{MD}$ care va fi limita vectorului $\overline{MC}$ egal cu $\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta s}$ (vezi fig.)

Dacă notăm

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

atunci

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k}.$$

Deaceea

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta a_x}{\Delta s} \mathbf{i} + \lim \frac{\Delta a_y}{\Delta s} \mathbf{j} + \lim \frac{\Delta a_z}{\Delta s} \mathbf{k}$$

sau încă

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \frac{\partial a_x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s} \mathbf{k}. \tag{8}$$

Dar a_x, a_y şi a_z sunt nişte funcţii scalare oarecare de x, y şi z.

Deaceea, putem scrie conform formulei (3)

$$\frac{\partial a_x}{\partial s} = \mathbf{s}\nabla \cdot a_x\,; \quad \frac{\partial a_y}{\partial s} = \mathbf{s}\nabla \cdot a_y \quad \text{şi} \quad \frac{\partial a_z}{\partial s} = \mathbf{s}\nabla \cdot a_z\,.$$

Expresia (8) o putem scrie, deci, astfel

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = (\mathbf{s}\,\nabla \cdot a_x)\,\mathbf{i} + (\mathbf{s}\,\nabla \cdot a_y)\,\mathbf{j} + $$
$$+ (\mathbf{s}\,\nabla \cdot a_z)\,\mathbf{k} = \mathbf{s}\,\nabla \cdot (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

sau, pe scurt

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \mathbf{s}\,\nabla \cdot \mathbf{a}. \tag{9}$$

Astfel, *dacă operaţia* **s** ∇ *efectuată asupra scalarului* φ *ne dădea derivata lui* φ *în raport cu direcţia* **s**, *atunci tot ea, aplicată vectorului* **a** *ne dă derivata lui* **a** *în raport cu direcţia* **s**.

In acest sens, simbolul **s** ∇ poate fi numit simbolul derivării în raport cu direcţia dată; acest simbol este valabil atât pentru funcţiile scalare, cât şi pentru cele vectoriale.

Expresia analitică. Dacă în formula (8) vom efectua toate derivatele $\frac{\partial a_x}{\partial s}$, $\frac{\partial a_y}{\partial s}$ şi $\frac{\partial a_z}{\partial s}$ obţinem :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial s} &= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial a_x}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial a_x}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial a_y}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial a_y}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial a_z}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial a_z}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

în care α, β şi γ reprezintă unghiurile pe cari le face versorul **s** cu axele de corordonate. Regrupând după coloane, putem scrie

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial s} &= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{k}\right)\cos\alpha + \\ &+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{k}\right)\cos\beta + \\ &+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

De aici

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \cos\alpha \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}. \tag{12}$$

De altfel, ultima formulă se putea obţine direct din (9) efectuând operaţia $\mathbf{s}\nabla$.

Prin analogie cu egalităţile (4) şi (5) operaţia mai generală $\mathbf{v}\,\nabla$ asupra vectorului $\mathbf{a}$ o vom defini astfel

$$\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{a} = v_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \tag{13}$$

Operaţia $\mathbf{v}\,\nabla$ se numeşte uneori derivata (scalarului φ sau vectorului $\mathbf{a}$) *în raport cu un vector dat* $\mathbf{v}$, spre deosebire de operaţia $\mathbf{s}\,\nabla$ pe care noi am numit-o derivata *în raport cu o direcţie dată* $\mathbf{s}$. Intre ele se poate stabili uşor o legătură, dacă ne amintim că

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{v}^0$$

De unde

$$\mathbf{v}\,\nabla\cdot\varphi = v\,(\mathbf{v}^0\,\nabla\cdot\varphi)$$

şi

$$\mathbf{v}\,\nabla\cdot\mathbf{a} = v\,(\mathbf{v}^9\,\nabla\cdot\mathbf{a}),$$

Aici $\mathbf{v}^0$ este versorul vectorului $\mathbf{v}$,

Să observăm încă o proprietate evidentă a operaţiei $\mathbf{s}\,\Delta$ aplicată scalarului φ.

$$\mathbf{s}\,\nabla\cdot\varphi = \mathbf{s}.\,\nabla\,\varphi.$$

NOTĂ. Am văzut că totalitatea valorilor scalare ale derivatei $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ a scalarului φ într'un punct oarecare M, exprimată prin trei valori fundamentale $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ în formula

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \cos\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

ne-a definit în mod analitic un *vector oarecare* (pe care l-am numit gradient In acelaş fel, totalitatea valorilor vectoriale $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$ în punctul M al câmpului vectorial $\mathbf{a}$ exprimate cu ajutorul celor trei vectori fundamentali $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$ $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$ prin formula analoagă

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \cos\alpha\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

ne determină o ***noţiune*** nouă ***mai complexă***, care poartă numele de ***tensor*** (mai precis — tensor ortogonal afinorial de rangul doi). Tensorii se mai cheamă „afinori“. Vectorul este determinat prin cei trei scalari şi anume prin cele trei proiecţii ale lui pe axele de coordonate în timp ce afinorul este determinat prin trei vectori, adică nouă scalari. Studiul proprietăţilor afinorilor şi al operaţiilor ce se efectuează asupra lor, constitue obiectul unei ştiinţe aparte ce poartă numele de *calcul tensorial sau afinorial (sau diadic)*.

Analiza tensorială este o consecinţă şi o desvoltare naturală a analizei vectoriale, la fel cum analiza scalară este o generalizare şi o desvoltare a calculului scalar obişnuit (vezi de ex. Gibbs-Wilson „Vector analysis „Braunshweig. 1914; I. H. Schouten „Grundlagen der Vector und Affinoranalysis „Leipzig, 1914; în limba rusă: Lagalli „Calculul vectorial“ ONTI 1936 (traducere), Kocin „Calculul vectorial şi elemente de calcul tensorial „ONTI 1934). Actualmente, calculul tensorial este din ce in ce mai răspândit în fizica teoretică (în special în legătură cu desvoltarea teoriei relativităţii) şi-şi găseşte şi în tehnică aplicări multiple.

Capitolul X.

METODA SIMBOLICĂ ŞI OPERAŢIILE DIFERENŢIALE DE ORDINUL DOI

§ 66. BAZELE METODEI SIMBOLICE.

Am văzut, într'un întreg şir de exemple, că operatorul nabla, înafară de însuşirile sale diferenţiale proprii, posedă şi proprietăţi vectoriale, specifice, care-i permit să fie conceput în mod convenţional ca un vector „simbolic“ oarecare, care se supune legii distributivităţii în operaţiile de înmulţire scalară şi vectorială. Aşa de pildă, în capitolul referitor la câmpurile scalare am găsit

$$\text{grad}\,(\varphi\,\psi) = \varphi\,\text{grad}\,\psi + \psi\,\text{grad}\,\varphi$$

şi

$$\text{grad}\,F\,(u) = F'\,(u)\cdot\text{grad}\,u$$

sau sub formă simbolică

$$\nabla\,(\varphi\,\psi) = \varphi\cdot\nabla\,\psi + \psi\cdot\nabla\,\varphi \tag{1}$$

şi

$$\nabla\,F\,(u) = F'\,(u)\cdot\nabla u.$$

In aceste formule apar proprietăţile diferenţiale ale operatorului nabla, proprietăţi analoage într'un anumit sens proprietăţilor simbolului *d* din analiza obişnuită. Este evident deasemenea şi faptul că

$$\nabla\,(m\,\varphi) = m\cdot\,\nabla\varphi \tag{2}$$

şi

$$\nabla\,c = 0,$$

în care m şi c sunt constante scalare. In capitolul despre divergenţă şi rotor am văzut că

$$\text{div}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{div}\,\mathbf{a} + \text{div}\,\mathbf{b} \quad \text{şi} \quad \text{rot}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{rot}\,\mathbf{a} + \text{rot}\,\mathbf{b}$$

sau

$$\nabla\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \nabla\mathbf{a} + \nabla\mathbf{b} \;\text{şi}\; [\nabla\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})] = [\nabla\,\mathbf{a}] + [\nabla\mathbf{b}] \tag{3}$$

Aceste formule evidenţiază, pe de o parte, proprietăţile diferenţiale ale operatorului nabla, (acţiunea lui asupra sumei), iar pe de altă parte dau la iveală şi proprietăţile lui vectoriale: cele ale unui vector oarecare convenţional care se supune legii distributivităţii, în ceeace priveşte operaţiile de „înmulţire" scalară şi vectorială cu vectorii reali. In acelaş sens putem înţelege şi formula

$$\text{grad}\,(\varphi+\psi) = \text{grad}\,\varphi + \text{grad}\,\psi$$

sau

$$\nabla(\varphi+\psi) = \nabla\,\varphi + \nabla\,\psi$$

care se referă la cazul înmulţirii operatorului nabla prin suma a doi scalari.

In sfârşit, din formulele

$$\text{div}\,(\varphi\,\mathbf{a}) = \varphi\cdot\text{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\;\text{grad}\,\varphi$$

şi

$$\text{rot}\,(\varphi\,\mathbf{a}) = \varphi\cdot\text{rot}\,\mathbf{a} - [\mathbf{a}\;\;\text{grad}\,\varphi]$$

sau încă

$$\nabla\,(\varphi\,\mathbf{a}) = \varphi\cdot\nabla\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\nabla\,\varphi,$$

$$[\nabla\,(\varphi\,\mathbf{a})] = \varphi\,[\nabla\,\mathbf{a}] + [(\nabla\,\varphi)\,\mathbf{a}]^{1)} \tag{4}$$

reiese din nou o evidenţiere a proprietăţilor diferenţiale ale operatorului nabla aplicat produsului $\varphi\,\mathbf{a}$. Să amintim şi alte formule evidente

$$\left.\begin{array}{l} \text{div}\,\mathbf{c} = 0 \;\text{şi}\; \text{rot}\,\mathbf{c} = 0 \\ \text{sau} \\ \nabla\,\mathbf{c} = 0 \;\text{şi}\; [\nabla\,\mathbf{c}] = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

atunci când $\mathbf{c}$ este un vector constant.

Totalitatea proprietăţilor şi regulilor de acest fel care au fost observate la început, în mod practic, într'un şir de

1) Paranteza rotundă din simbolul $[(\nabla\,\varphi)\,\mathbf{a}]$ ne arată că operatorul nabla acţionează numai asupra lui φ. Uneori se utilizează în acest scop virgula şi anume $[\nabla\,\varphi,\mathbf{a}]$,

exemple, a dus — în analiza vectorială — la apariția unei metode prescurtate „sui generis" pentru obținerea rapidă a formulelor cu ajutorul operatorului nabla, metodă care astăzi poate fi numită simbolică. Şi anume, convenim să socotim operatorul nabla ca fiind un vector simbolic oarecare și să efectuăm asupra lui operațiile de înmulțire vectorială și scalară după aceleaşi reguli ca și asupra vectorilor reali, ținând seama, acolo unde este necesar, de proprietățile lui diferențiale. Pentru aceasta, ne folosim de următoarele reguli:

1° Dacă operatorul ∇ acționează asupra unui produs oarecare, se ține seama — în primul rând — de proprietățile lui diferențiale și abia apoi se utilizează cele vectoriale.

2° Toți vectorii sau scalarii asupra cărora operatorul nabla nu acționează trebue — în rezultatul final — puși în fața operatorului nabla (adică în stânga lui)[1]; reciproc, mărimile asupra cărora operatorul ∇ acționează, se așează în dreapta lui.

3° In sfârşit, deoarece ∇ este un operator şi nu un vector real, el nu trebue să fie aşezat singur la sfârşitul vreunei formule, adică nu trebue să fie așezat astfel încât după el să nu mai urmeze vreo mărime asupra căreia ar trebui să acționeze.

Afară de cele amintite, mai există un şir întreg de reguli mai mărunte pe care cititorul şi le va nota atunci când va rezolva exemple concrete.

Astfel, pentru a sublinia faptul că operatorul nabla nu acționează asupra vreunei valori variabile oarecare, ce intră într'o formulă complicată, sub această mărime se pune semnul „c" dela cuvântul constant, care apoi, după utilizare, poate fi înlăturat. De pildă, la rezolvarea problemei

$$\operatorname{div}(\varphi\,\mathbf{a}) = \nabla(\varphi\,\mathbf{a})$$

scriem mai întâi, ținând seama de proprietățile diferențiale ale operatorului nabla

$$\nabla(\varphi\,\mathbf{a}) = \nabla\varphi_c\,\mathbf{a} + \nabla\varphi\,\mathbf{a}_c,$$

şi apoi

$$\nabla(\varphi\,\mathbf{a}) = \varphi_c\cdot\nabla\,\mathbf{a} + \mathbf{a}_c\nabla\varphi = \varphi.\nabla\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\nabla\varphi = \varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi.$$

In mod analog, în problema determinării lui rot $(\varphi\,\mathbf{a})$ scriem mai întâi

$$\operatorname{rot}(\varphi\,\mathbf{a}) = [\nabla\,\varphi\mathbf{a}] = [\nabla\,\varphi_c\,\mathbf{a}] + [\nabla\,\varphi\,\mathbf{a}_c].$$

Apoi, în membrul întâi, scoatem factorul scalar φ_c înafara produsului vectorial; în cel de al doilea membru îl trecem pe

1) Sau despărțiți de el prin paranteză rotundă, virgulă sau prin oricare alt semn.

φ la operatorul nabla și schimbăm ordinea factorilor, pentru ca simbolul $\mathbf{a}_c$ asupra căruia operatorul nabla nu acționează, să se găsească înaintea semnului ∇. Astfel,

$$\text{rot}\ (\varphi\ \mathbf{a}) = \varphi[\nabla\ \mathbf{a}) - [\mathbf{a}\ \nabla\ \varphi] = \varphi\,\text{rot}\ \mathbf{a} - [\mathbf{a}\ \text{grad}\ \varphi].$$

Notă. Se mai aplică și un alt sistem de notație. De pildă

$$\nabla(\varphi\,\mathbf{a}) = \nabla_a\,(\varphi\ \mathbf{a}) + \nabla_\varphi\,(\varphi\ \mathbf{a}).$$

Semnul ∇_a arată că în membrul întâi operatorul ∇ acționează doar asupra factorului $\mathbf{a}$, iar ∇_φ acționează doar asupra lui φ.

Să arătăm acum modul de aplicare al metodei simbolice în probleme mai complicate.

Exemplul 1. Să se găsească prin metoda simbolică div $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$.

Rezolvare. Scriem mai întâi

$$\text{div}\ [\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \nabla\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \nabla\,[\mathbf{a}_c\,\mathbf{b}] + \nabla\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}_c\,].$$

In fiecare dintre produsele mixte rezultate, efectuăm o permutare ciclică a factorilor, în așa fel încât $\mathbf{a}_c$ și $\mathbf{b}_c$ să apară în fața simbolului nabla

$$\text{div}\ [\mathbf{ab}] = \mathbf{a}_c\,[\mathbf{b}\nabla] + \mathbf{b}_c\,[\nabla\ \mathbf{a}].$$

In sfârșit, înlăturăm semnul „c" și schimbăm, în plus, ordinea factorilor în membrul întâi $[\mathbf{b}\nabla]$ astfel încât ∇ să stea înaintea lui $\mathbf{b}$.

Obținem

$$\text{div}\ [\mathbf{ab}] = -\,\mathbf{a}\,[\nabla\,\mathbf{b}] + \mathbf{b}\,[\nabla\ \mathbf{a}].$$

In încheiere, să trecem dela notațiile simbolice la cele obișnuite, înlocuind $[\nabla\mathbf{b}]$ și $[\nabla\mathbf{a}]$ prin rot $\mathbf{b}$ și ·rot $\mathbf{a}$. Obținem astfel forma finală

$$\text{div}\ [\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\ \text{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{a}\ \text{rot}\ \mathbf{b}. \tag{6}$$

Acest rezultat a fost obținut în mod analitic în § 64 din Cap. IX exercițiul Nr. 8.

Exemplul 2. Să se găsească prin metoda simbolică rot $[\mathbf{ab}]$.

Rezolvare. Scriem mai întâi

$$\text{rot}\ [\mathbf{ab}] = \Big[\nabla[\mathbf{ab}]\Big] = \Big[\nabla\,[\mathbf{a}_c\ \mathbf{b}]\Big] + \Big[\nabla\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}_c]\Big]. \tag{7}$$

Am obținut astfel produse dublu vectoriale. Efectuăm pe fiecare dintre ele după regula cunoscută (vezi formula (7). § 26) De exemplu,

$$\Big[\nabla\,[\mathbf{a}_c\ \mathbf{b}]\Big] = \nabla\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_c - \mathbf{a}_c\,\nabla\cdot\mathbf{b}.$$

Să observăm că în membrul doi am pus în mod voit simbolul $\mathbf{a}_c$ înaintea lui ∇, deoarece ∇ nu acționează asupra lui $\mathbf{a}$. Făcând aceeași mutare şi în membrul întâi, obținem

$$\left[\nabla\ [\mathbf{a}_c \mathbf{b}]\right] = \mathbf{a}_c \cdot \nabla\ \mathbf{b} - \mathbf{a}_c \nabla \cdot \mathbf{b}$$

sau, definitiv

$$\left[\nabla\ [\mathbf{a}_c \mathbf{b}]\right] = \mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b}. \qquad (8)$$

După cum vedem, în membrul al doilea a apărut operația $\mathbf{a}\nabla$ asupra vectorului $\mathbf{b}$.

In mod analog

$$\left[\nabla\ [\mathbf{a}\,\mathbf{b}_c]\right] = \mathbf{b}_c \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c = \mathbf{b}\,\nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}. \qquad (9)$$

Introducând rezultatele (8) şi (9) în egalitatea (7) obținem forma definitivă

$$\operatorname{rot}\ [\mathbf{ab}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{b}\,\nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}\,\nabla \cdot \mathbf{b} \qquad (10)$$

Exemplul 3. Să se găsească grad $(\mathbf{ab})$.

Rezolvare. Scriem mai întâi

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = \nabla\ (\mathbf{ab}) = \nabla\ (\mathbf{a}_c \mathbf{b}) + \nabla\ (\mathbf{a}\mathbf{b}_c). \qquad (11)$$

Pentru efectuarea primului membru, plecăm dela problema următoare: să se găsească

$$\left[\mathbf{a}_c\,[\nabla\,\mathbf{b}]\right] \text{ sau } [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}]\ .$$

Desvoltând produsele dublu vectoriale, obținem

$$\left[\mathbf{a}_c\,[\nabla\,\mathbf{b}]\right] = \mathbf{a}_c \mathbf{b} \cdot \nabla - \mathbf{a}_c \nabla \cdot \mathbf{b}. \qquad (12)$$

In membrul întâi, în fața lui ∇ se află factorul scalar $\mathbf{a}_c\,\mathbf{b}$ iar ultimul loc îl ocupă operatorul ∇. Să schimbăm locurile lor, deoarece ∇ nu trebue să fie situat la sfârşit; atunci obținem $\nabla\ (\mathbf{a}_c \mathbf{b})$. Al doilea membru reprezintă pur şi simplu operația $\mathbf{a}\,\nabla$ asupra lui $\mathbf{b}$. Astfel (12) devine

$$[\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] = \nabla\ (\mathbf{a}_c \mathbf{b}) - \mathbf{a}\,\nabla \cdot \mathbf{b}.$$

De aici găsim

$$\nabla\ (\mathbf{a}_c \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + \mathbf{a}\,\nabla \cdot \mathbf{b}. \qquad (13)$$

Aceasta reprezintă tocmai expresia căutată pentru membrul întâi al lui (11). Schimbând aici rolurile între $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ putem obține, în mod analog

$$\nabla\ (\mathbf{a}\mathbf{b}_c) = [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + \mathbf{b}\,\nabla \cdot \mathbf{a}. \qquad (14)$$

Introducând (14) și (13) în egalitatea (11) obținem rezultatul definitiv

$$\text{grad }(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a}] + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a}. \qquad (15)$$

Caz particular. Dacă $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, atunci în membrul stâng obținem grad a^2, iar în membrul drept termenii asemenea se adună. Rezultă că

$$\text{grad } a^2 = 2 \{ [\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{a}] + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{a} \} \qquad (16)$$

Observație. Avantajul metodei simbolice constă în concizia notațiilor care înlocuesc prin simboluri scurte transformări analitice foarte complicate, de unde reiese rapiditatea obținerii rezultatului final. Pe de altă parte, însă, trebue să efectuăm cu multă atenție diferitele transformări formale cu simbolul nabla, deoarece din cauza lipsei de atenție la utilizarea simbolului, pot surveni greșeli grosolane. Deaceea, se recomandă ca în cazul unei nesiguranțe în ceeace privește rezultatul, acesta să fie verificat prin metoda analitică; în acest caz, rezultatele aflate prin soluția simbolică servesc drept indicație utilă pentru stabilirea sensului în care este util să se transforme expresiile analitice complicate.

Vom considera, în cele ce urmează, bazele teoretice ale metodei simbolice.

§ 67. FORMULE SIMBOLICE CARE CONȚIN VECTORUL DE POZIȚIE

In încheiere, pentru o mai bună utilizare a metodei simbolice, vom da un tabel conținând cele mai importante formule pentru r și $\mathbf{r}$ pe care le-am obținut mai înainte

1. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sau $\mathbf{r} = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}$.
2. $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ (pentru ambele cazuri la fel).
3. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ (pentru cazul întâi)

sau

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r}$ (pentru cazul doi)

Formulele ulterioare vor fi aceleași pentru ambele cazuri ale vectorului de poziție $\mathbf{r}$. Le vom scrie atât sub formă obișnuită cât și în cea simbolică și anume:

	Notație obișnuită	*Notație simbolică*
4.	grad $f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f'(r)\mathbf{r}^0$	$\nabla f(r) = f'(r) \cdot \nabla r = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$.
5.	grad $r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^0$	$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^0$.
6.	grad$(\mathbf{cr}) = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ vector constant)	$\nabla(\mathbf{cr}) = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$-vector constant)
7.	div $\mathbf{r} = 3$	$\nabla\mathbf{r} = 3$.
8.	rot $\mathbf{r} = 0$	$[\nabla\mathbf{r}] = 0$.

9. $\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{r} = \mathbf{a}\cdot\nabla r = \mathbf{a}\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}\mathbf{r}^0.$

10. $\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{r} = (a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z})\,\mathbf{r} = \mathbf{a}.$

Din aceste formule fundamentale putem obține un șir întreg de alte formule care prezintă o mare importanță în științele aplicate

11. $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{r}^0\Big\}$ [conform formulei (4)]

12. $\text{grad}\ (r^n) = n\,r^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-1}\mathbf{r}^0$

13. $\text{div}\ (f(r)\mathbf{r}) = f(r)\ \text{div}\ \mathbf{r} + \mathbf{r}\ \text{grad}\ f(r) = 3f(r) + rf'(r).$

14. $\text{div}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\right) = \frac{3}{r^3} + r\left(\frac{1}{r^3}\right)' = 0$ (din formula precedentă).

15. $\text{rot}\ (f\ (r)\ \mathbf{r}) = f\ (r)\ \text{rot}\,\mathbf{r} - \left[\mathbf{r}\ \text{grad}\ f(\mathbf{r})\right] =$

$$= 0 - \frac{1}{r}f'\ (r)\ [\mathbf{r}\ \mathbf{r}] = 0$$

16. $\text{rot}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\right) = 0$ (din formula precedentă).

Pentru deducerea formulelor (13) și (15) ne-am folosit de formulele cunoscute din paragraful precedent pentru div $(\varphi\,\mathbf{a})$ și rot $(\varphi\,\mathbf{a})$

Să rezolvăm acum câteva exemple mai complicate.

Exemplul 1. Să să găsească div $r\ [\mathbf{a}\,\mathbf{r}]$, în care $\mathbf{a}$ este un vector constant, $\mathbf{r}$ fiind vector de poziție variabil.

Rezolvare. Conform formulei ce dă div $(\varphi\,\mathbf{a})$ scriem

$$\text{div}\ r\ [\mathbf{a}\,\mathbf{r}] = r\ \text{div}\ [\mathbf{a}\,\mathbf{r}] + [\mathbf{a}\,\mathbf{r}]\ \text{grad}\ r.$$

Dar div $[\mathbf{a}\,\mathbf{r}]$ conform formulei (6) din paragraful precedent este egal cu

$$\mathbf{r}\ \text{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{a}\ \text{rot}\ \mathbf{r} = 0.$$

Deaceea

$$\text{div}\ r\left[\mathbf{a}\,\mathbf{r}\right] = \left[\mathbf{a}\,\mathbf{r}\right]\text{grad}\ r = \frac{1}{r}\,\mathbf{r}\ \left[\mathbf{a}\mathbf{r}\right] = 0,$$

deoarece produsul mixt $\mathbf{r}\ [\mathbf{a}\,\mathbf{r}]$ este nul, ca având doi factori egali.

Exemplul 2. Să se găsească $\operatorname{rot}\left[\mathbf{r}\,[\mathbf{a}\,\mathbf{r}]\right]$ în care $\mathbf{a}$ este un vector constant, iar $\mathbf{r}$ un vector de poziţie variabil.

Rezolvare. Intâi desvoltăm produsul dublu vectorial.

$$\left[\mathbf{r}\,[\mathbf{a}\,\mathbf{r}]\right] = r^2\,\mathbf{a} - \mathbf{r}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$$

Deaceea

$$\operatorname{rot}\left[\mathbf{r}\,[\mathbf{a}\,\mathbf{r}]\right] = \operatorname{rot}\,(r^2\,\mathbf{a}) - \operatorname{rot}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}). \qquad (17)$$

Dar conform formulei pentru rot $(\varphi\,\mathbf{a})$ se poate scrie

$$\operatorname{rot}\,(r^2\,\mathbf{a}) = r^2 \operatorname{rot}\,\mathbf{a} - \left[\mathbf{a}\ \operatorname{grad}\,r^2\right] = 0 - 2r\left[\mathbf{a}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\right] = 2\,[\mathbf{r}\mathbf{a}]. \qquad (18)$$

La fel

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\,(\mathbf{r}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= (\mathbf{r}\mathbf{a})\cdot\operatorname{rot}\cdot\mathbf{r} - [\mathbf{r}\ \operatorname{grad}\,(\mathbf{r}\mathbf{a})] = \\ &= 0 - [\mathbf{r}\mathbf{a}] = -\,[\mathbf{r}\mathbf{a}]\end{aligned} \qquad (19)$$

Introducând rezultatele (18) şi (19) în formula (17) obţinem

$$\operatorname{rot}\left[\mathbf{r}\,[\mathbf{a}\mathbf{r}]\right] = 3\,[\mathbf{r}\mathbf{a}].$$

Exemplul 3. Să se găsească rot $[\mathbf{c}\mathbf{r}]$ în care $\mathbf{c}$ este un vector constant.

Rezolvare. După formula (10) din paragraful precedent scriem

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{c}\mathbf{r}] = \mathbf{c}\ \operatorname{div}\,\mathbf{r} - \mathbf{r}\ \operatorname{div}\,\mathbf{c} + \mathbf{r}\,\nabla\cdot\mathbf{c} - \mathbf{c}\,\nabla\cdot\mathbf{r}.$$

Insă termenul al doilea şi al treilea dispar din membrul drept, deoarece $\mathbf{c}$ este un vector constant. Rezultă că

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}] = \mathbf{c}\ \operatorname{div}\,\mathbf{r} - \mathbf{c}\,\nabla\cdot\mathbf{r}.$$

După formulele (7) şi (10) din acest paragraf obţinem

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{c}\,\mathbf{r}] = 3\,\mathbf{c} - \mathbf{c} = 2\,\mathbf{c}.$$

Acest rezultat s'a obţinut în paragraful 64 pe cale analitică.

Exemplul 4. Un corp solid se roteşte împrejurul unei axe oarecare l cu o viteză unghiulară ω. Să se găsească rotorul câmpului de viteze.

Rezolvare. Viteza $\mathbf{v}$ într'un punct oarecare M $(\mathbf{r})$ se reprezintă prin formula

$$\mathbf{v} = [\omega\, \mathbf{r}],$$

în care $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului considerat în raport cu un punct oarecare O de pe axa de rotaţie, luat drept origină.

Atunci

$$\text{rot}\ \mathbf{v} = \text{rot}\ [\omega\, \mathbf{r}],$$

Dar ω nu depinde de coordonatele x,y şi z ale punctului M (ω poate varia doar în funcţie de timpul t). Deaceea, pentru aflarea rotorului, putem aplica rezultatele exemplului 3° studiat mai sus, obţinând astfel imediat.

$$\text{rot}\ \mathbf{v} = \text{rot}\ [\omega\, \mathbf{r}] = 2\,\omega,$$

cu alte cuvinte, rotorul câmpului de viteze al solidului în rotaţie este egal cu dublul vitezei unghiulare de rotaţie. Acest rezultat l-am obţinut pe cale analitică în paragraful 61.

§ 68 OPERAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL DOI

Operaţiile grad φ, div $\mathbf{a}$, rot $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}\nabla \cdot \varphi$ şi $\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{a}$ se numesc operaţii diferenţiale de ordinul întâi, deoarece simbolul ∇ apare în ele o singură dată. Prin analogie cu acestea, s'a convenit a se numi operaţii diferenţiale de ordinul doi acele operaţii în care operatorul ∇ apare de două ori. Să studiem pe acelea dintre ele care sunt cele mai importante şi mai uzitate.

1°. Fie un câmp scalar oarecare φ. Admitem că în fiecare punct al lui s'a calculat şi construit grad φ. Vom obţine atunci un câmp nou oarecare şi anume *câmpul gradienţilor funcţiei* φ. Aceasta va fi un câmp vectorial. Aci, ca şi în oricare alt câmp vectorial putem considera noţiunile de divergenţă şi rotor. Apar, astfel, următoarele operaţii diferenţiale de ordinul doi :

$$\text{I)}\ \text{div grad}\ \varphi = \nabla\ (\nabla\ \varphi),$$

$$\text{II)}\ \text{rot grad}\ \varphi = [\nabla\ \nabla\ \varphi].$$

2° Fie dat câmpul vectorial $\mathbf{a}$. Dacă în fiecare punct al lui calculăm divergenţa, obţinem un câmp scalar oarecare — câmpul divergenţelor. Intr'însul ca şi în oricare alt câmp scalar, poate fi găsit gradientul lui. Deci

$$\text{III)}\ \text{grad div}\ \mathbf{a} = \nabla\ (\nabla\ \mathbf{a}).$$

3° In acelaş câmp vectorial **a** înafara divergenţei, putem considera şi rotorul, adică rot **a** în fiecare punct. Aceasta ne va conduce la un nou câmp şi anume la *câmpul rotaţional.*

$$\text{IV)}\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\,[\nabla\,\mathbf{a}],$$

$$\text{V)}\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\,[\nabla\,\mathbf{a}]].$$

Am obţinut, deci, cinci operaţii fundamentale de ordinul doi. Inafara lor mai sunt posibile şi alte operaţii cu operatorul **v** ∇, dar nu ne vom ocupa de ele, deoarece se aplică în cazuri relativ rare.

Să studiem operaţiile I-V. Ne vom folosi, în special, de metoda simbolică, în unele cazuri, însă, urmând să folosim şi pe cea analitică.

I. Efectuând simbolic operaţia I putem scrie

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\,(\nabla\,\varphi) = (\nabla\,\nabla)\,\varphi = \nabla^2\,\varphi.$$

Deoarece însă

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

găsim, conform regulei înmulţirii scalare, că

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

de unde

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi.$$

S'a convenit să se numească operatorul ∇^2 exprimat prin formula (1) *operatorul lui Laplace,* sau pe scurt, *laplacian,* notându-l prin simbolul $\triangle$.

Astfel

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \triangle\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{2}$$

în care

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3}$$

Astfel, *operaţia* div grad φ dă laplacianul funcţiei φ. Aceeaş deducţie se poate face şi pe cale analitică. Intr'adevăr:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

de unde, conform regulei determinării divergenţelor, obţinem

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Observaţie. Mai departe vom utiliza laplacianul funcţiei **a**, determinându-l după cum urmează

$$\triangle \mathbf{a} = \triangle (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \mathbf{i} \cdot \triangle a_x + \mathbf{j} \cdot \triangle a_y + \mathbf{k} \cdot \triangle a_z. \quad (4)$$

Sau, desvoltând

$$\triangle \mathbf{a} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right).$$

II. Să studiem acum rot grad φ. Să demonstrăm că

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (5)$$

adică să arătăm că în câmpul gradienţilor, rotorul este identic nul în toate punctele.

Demonstraţie. Exprimat sub forma simbolică, acest lucru este evident, deoarece

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla \nabla \varphi].$$

Dacă vom scoate din paranteză factorul scalar φ, vom obţine $[\nabla\nabla]\varphi$, termen nul, deoarece în interiorul parantezei pătrate se află un produs de doi factori egali. Analitic, egalitatea (5) a fost demonstrată în paragraful 64 din cap. IX (vezi exemplul Nr. 7).

III. A treia dintre operaţiile noastre

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla (\nabla \mathbf{a})$$

prezentată analitic are următoarea formă

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Derivând şi regrupând, obţinem

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

Ulterior vom vedea legătura dintre această operaţie şi operaţia V.

IV. A patra dintre operaţiile noastre este de forma div rot **a**.

In paragraful 62 am demonstrat în mod analitic că

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0, \tag{6}$$

adică am arătat că divergenţa unui câmp rotaţional este identic nulă.

Simbolic, lucrul acesta reiese imediat, deoarece

$$\text{div rot } \mathbf{a} = \nabla [\nabla \mathbf{a}].$$

Dar produsul mixt a trei vectori este nul când doi dintre factori sunt egali; în cazul nostru există doi „factori" egali ∇.

V. Să studiem, în fine, rot rot **a**. Forma simbolică este

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla [\nabla \mathbf{a}]]$$

Desvoltăm produsul dublu vectorial din membrul drept

$$[\nabla [\nabla \mathbf{a}]] = \nabla \mathbf{a} \,.\, \nabla - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

In membrul întâi mutăm factorul scalar $\nabla \mathbf{a}$ în locul factorului vectorial ∇, pentru ca operatorul să nu se afle la sfârşit. In membrul al doilea operaţia $\nabla^2 \mathbf{a}$ ne dă $\triangle \mathbf{a}$ adică laplacianul funcţiei vectoriale **a**. Rezultă că

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla (\nabla \mathbf{a}) - \triangle \mathbf{a}.$$

Operaţiunea $\nabla (\nabla \mathbf{a})$ nu reprezintă însă altceva decât grad div **a**. Deaceea, avem definitiv

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \triangle \mathbf{a}. \tag{7}$$

Corolar. După cum vedem, există o legătură între rezultatele operaţiilor III şi V. Din (7) se poate obţine

$$\text{grad div } \mathbf{a} = \text{rot rot } \mathbf{a} + \triangle \mathbf{a}. \tag{8}$$

Deducerea analitică a formulei (7). Dacă notăm prescurtat rot **a** prin **b** avem:

$$b_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \; b_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \; b_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

Efectuând acum rot **b**, să calculăm proiecţiile lui:

$$\text{rot}_x \mathbf{b} = \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

Luând derivatele şi grupând termenii, obţinem

$$\mathrm{rot}_x\,\mathbf{b} = \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right).$$

Să adăugăm la ultima paranteză termenul $-\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$, iar la prima $\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$ cu semnul plus.

Observăm atunci că se poate scrie

$$\mathrm{rot}_x\,\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right).$$

Expresia din prima paranteză reprezintă tocmai div **a**, iar cea din a doua, laplacianul $\triangle a_x$ al funcţiei scalare a_x. Rezultă

$$\mathrm{rot}_x\,\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial x}\ (\mathrm{div}\ \mathbf{a}) - \triangle a_x.$$

In mod analog

$$\mathrm{rot}_y\,\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial y}\ (\mathrm{div}\ \mathbf{a}) - \triangle a_y,$$

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial z}\ (\mathrm{div}\ \mathbf{a}) - \triangle a_z.$$

Inmulţind cu **i** ambii membri ai primei egalităţi, şi respectiv cu **j** şi **k** membrii celei de a doua şi a treia, şi adunând obţinem:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{b} = \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\ \mathbf{a}) - \triangle \mathbf{a},$$

expresie care reprezintă tocmai formula (7).

Operaţiile diferenţiale de ordinul doi se întâlnesc adesea în teoria câmpurilor electromagnetice, din care s'ar putea cita un mare număr de exemple concrete. Nu le vom da aici, deoarece ele sunt prea complicate şi chestiunile pe care le cuprind au un caracter special. Unele dintre ele vor fi tratate în ultima parte a lucrării. Ne vom limita aici la examinarea unui exemplu din teoria dipolului lui Hertz.

Exemplu. Să se găsească laplacianul vectorului $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \frac{1}{r} h(r)$, în care $\mathbf{Z}_0$ este un vector constant oarecare, iar $h(r)$ o funcţie scalară oarecare de variabilă r (problemă din domeniul propagării undelor sferice).

Rezolvare. Este evident că deoarece $\mathbf{Z}_0$ este constant

$$\triangle \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \triangle \left(\frac{1}{r}\ h\ (r)\ \right). \tag{9}$$

Deaceea, problema se reduce la găsirea laplacianului funcției $\varphi = \frac{1}{r} h(r)$. Ținând seama de faptul că $\triangle \varphi$ nu este altceva decât div grad φ, scriem

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} h = \frac{1}{r} \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} h' . \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{r^2} h . \frac{\mathbf{r}}{r},$$

sau

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} h = \left(\frac{1}{r^2} h' - \frac{1}{r^3} h \right) \mathbf{r}.$$

Pentru găsirea divergenței acestei expresii, luăm formula (13) din § 67

$$\operatorname{div} f(r)\, \mathbf{r} = 3 f(r) + r f'(r).$$

In cazul nostru

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} h' - \frac{1}{r^3} h \right) \mathbf{r} = 3\left(\frac{1}{r^2} h' - \frac{1}{r^3} h \right) + r \left(- \frac{2}{r^3} h' + \frac{1}{r^2} h'' + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{r^4} h - \frac{1}{r^3} h' \right)$$

sau

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} h' - \frac{1}{r^3} h \right) = \frac{1}{r} h''.$$

Rezultă că

$$\triangle \left(\frac{1}{r} h \right) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} h \right) = \frac{1}{r} h''$$

Revenind la formula (9) găsim

$$\triangle \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \frac{1}{r} h''(r).$$

§ 69. FORMULELE LUI GREEN

Pentru a exemplifica operațiile de ordinul doi, să deducem așa numitele formule ale lui Green, care joacă un rol important în teoria potențialului și, în particular, în teoria câmpurilor electrostatice.

Sub denumirea de teorema sau formula lui Green ne sunt cunoscute un șir de formule integrale, care permit transformarea unor integrale de suprafață în integrale de volum și reciproc.

Fie, într'un domeniu oarecare Ω, două funcții scalare, $\varphi(x, y, z)$ și $\psi(x, y, z)$ continue în toate punctele acestui domeniu împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi (acelea care vor figura în formulele noastre) și derivatele lor de ordinul doi[1] fiind finite.

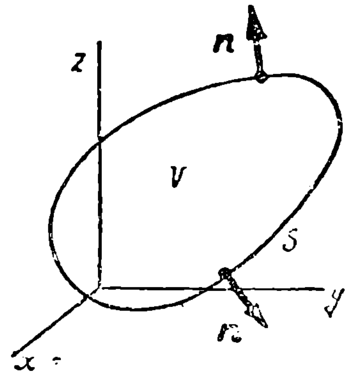


Fig. 131

Să construim câmpul vectorului

$$\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \Psi$$

și să-i aplicăm teorema fundamentală a lui Gauss:

$$\oint_S \mathbf{an}\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV, \qquad (1)$$

în care V reprezintă un volum arbitrar situat în interiorul câmpului (fig. 131), iar S suprafața care-l limitează. Funcția de sub integrala din stânga este de forma

$$\mathbf{an} = \varphi\, \mathbf{n} \operatorname{grad} \Psi ,$$

Insă produsul $\mathbf{n} \operatorname{grad} \Psi$ nu este altceva decât proiecția gradientului Ψ pe direcția $\mathbf{n}$. Conform proprietății fundamentale a gradientului, ea este egală cu derivata $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ a funcției, în raport cu direcția dată. Rezultă, deci, că partea stângă a egalității (1) o putem prezenta sub forma $\oint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d S$ în care integrala este extinsă la suprafața S, care limitează volumul V, iar $\mathbf{n}$ este versorul normalei exterioare la această suprafață. Să transformăm acum membrul drept. Funcția de sub integrală este de forma

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \Psi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi.$$

Dar div grad Ψ nu este altceva decât laplacianul $\triangle\psi$ și deaceea

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \varphi\triangle\psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi.$$

De unde egalitatea (1) ia forma

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \int_V \left\{ \varphi\triangle\Psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi \right\} dV \qquad (2)$$

---

[1]) Derivatele de ordinul doi trebue să fie, în general, continui, dar pot admite salturi finite sau discontinuități pe unele suprafețe din interiorul domeniului considerat.

Aceasta constitue *prima formulă a lui Green.* Sub formă analitică ea poate fi scrisă :

$$\oint_S \varphi \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos (\mathbf{n}, x) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos (\mathbf{n}, y) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos (\mathbf{n}, z) \right\} d S =$$

$$= \int_V \left\{ \varphi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} d V.$$

Dacă într'un caz particular $\Psi = \varphi$ formula (2) devine

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V \left\{ \varphi \triangle \varphi + (\text{grad } \varphi)^2 \right\} d V. \tag{3}$$

In sfârşit, dacă funcţia φ satisface relaţia lui Laplace în domeniul Ω

$$\triangle \varphi = 0,$$

formula (3) devine

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V (\text{grad } \varphi)^2 \, d V. \tag{3'}$$

Dacă $\varphi = 1$, formula (2) devine

$$\oint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} d S = \int_V \triangle \psi \, d V. \tag{4}$$

Din formula (2) se poate deduce cea de a doua formulă a lui Green. Şi anume să schimbăm pentru aceasta în egalitatea (2) rolurile funcţiilor φ şi ψ. Putem scrie atunci

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d S = \int_V \left\{ \psi \triangle \varphi + \text{grad } \psi \text{ grad } \varphi \right\} d V. \tag{5}$$

Scăzând pe (5) din (2), obţinem

$$\oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS = \int_V \left\{ \varphi \triangle \psi - \psi \triangle \varphi \right\} d V. \tag{6}$$

Aceasta constitue cea de a doua formulă a lui Green.

Să considerăm acum un exemplu din teoria câmpurilor electrostatice, în care formula lui Green îşi găseşte una dintre aplicaţiile ei.

Exemplu. *Energia câmpului electrostatic.* In câmpul electrostatic produs de o sarcină q_1 (fig. 132) introducem o altă sarcină electrostatică q_2. Presupunem că sarcina q_2 este adusă dela infinit (sau din regiuni îndeajuns de depărtate de q_1, astfel încât câmpul $\mathbf{E}_1$, produs de aceasta, poate fi socotit, practic, nul), într'un punct oarecare A_2 care se găseşte la distanţa r_{12} de A_1. Pentru aceasta, *trebue să efectuăm* un travaliu egal cu

$$A_{12} = V_1 q_2 = \frac{q_2}{\varepsilon r_{12}} q_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \quad (7)$$

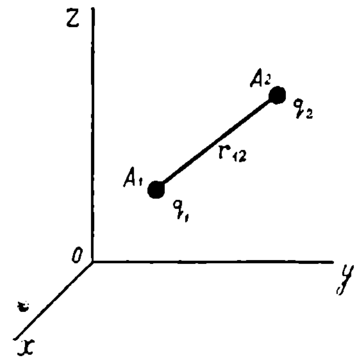


Fig. 132

în care V_1 este potenţialul produs de q_1 în punctul A_2. Acest travaliu efectuat de noi, din exterior, pentru producerea noului câmp al sarcinilor q_1 şi q_2 se numeşte *energia potenţială a unui sistem de două sarcini* q_1 şi q_2. Nu este greu de observat că această energie este aceeaşi ca şi când am fi avut iniţial sarcina q_2 în punctul A_2 şi apoi am fi adus din exterior sarcina q_1 în câmpul acesteia, situând-o în punctul A_1.

Formula (7) ne va permite să rezolvăm problema energiei potenţiale a unui număr oarecare de sarcini $q_1, q_2, \ldots, q_m$ situate în punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ (fig. 133).

Este evident că energia va fi egală cu

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{m} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}, \quad (8)$$

suma cuprinzând *toate combinaţiile pare* posibile ale *indicilor i şi k*, valori care variază dela 1 la m (combinaţiile de felul $q_i q_i$ sau $q_k q_k$ etc. se exclud). Factorul $\frac{1}{2}$ l'am introdus deoarece fiecare pereche de sarcini intră de două ori datorită modului în care s'a alcătuit suma.

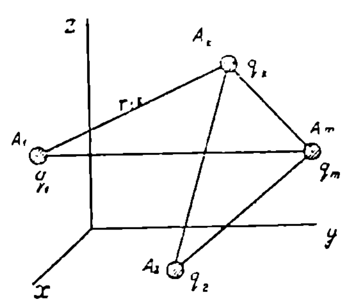


Fig. 133

Expresia (8) poate fi transformată astfel

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} q_k \sum_{i=1}^{m(*)} \frac{q_i}{\varepsilon r_{ik}}; \quad (8')$$

semnul (*) din cea de a doua sumă arătând că la însumarea indicelui i dela 1 la m valoarea $i=k$ se omite. Dar expresia

$$\sum_{k=1}^{m(*)} \frac{q_i}{\varepsilon r} = V_k$$

reprezintă tocmai potenţialul V_k produs în punctul A_k, de toate celelalte sarcini, afară de q_k. Deaceea (8') se poate scrie astfel

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} V_k \, q_k . \tag{9}$$

în care suma se extinde asupra tuturor sarcinilor $q_1, q_2, \ldots, q_m$. *Aceasta este energia sistemului de m sarcini punctiforme separate* $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$.

Să considerăm acum o *sarcină spațială* repartizată într'un volum oarecare Ω (fig. 134). Divizând volumul în sarcini elementare $d_q = \rho \, d\,\Omega$, în care $\rho\,(x, y, z)$ reprezintă densitatea volumetrică, vom reduce problema determinării energiei unui asemenea câmp produs de o sarcină spațială, la problema precedentă.

In acest caz, suma din membrul drept al egalității (9) se va transforma într'o integrală triplă extinsă la volumul Ω ocupat de sarcina noastră, adică

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Omega} V \rho \, d\,\Omega \tag{10}$$

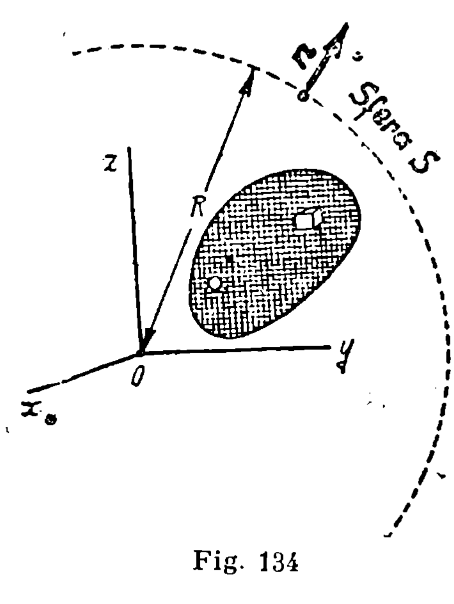


Fig. 134

Să transformăm expresia (10). Deoarece în interiorul volumului Ω potențialul V satisface relația lui Poisson (vezi paragraful 58) adică

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

sau

$$\triangle V = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

atunci îl putem înlocui pe ρ în integrala (10) prin expresia lui din laplacianul $\triangle V$.

Atunci

$$A = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{\Omega} V \triangle V \, d\,\Omega. \tag{11}$$

Să înconjurăm volumul Ω cu o suprafață S a unei sfere, descrisă din origină cu o rază arbitrară R suficient de mare pentru ca întregul volum Ω să fie conținut în volumul v al acestei sfere. Aceasta este posibil întotdeauna în cazul când volumul Ω este finit, condiție pe care o presupunem îndeplinită. Atunci integrala triplă din formula (11) poate fi extinsă la *întregul volum al sferei S*, deoarece laplacianul $\triangle V$ este nul în toate punctele exterioare lui Ω. Astfel, formula (5) o putem scrie sub forma

$$A = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\int_{v} V \triangle V \, d v. \tag{11'}$$

Să aplicăm acum la integrala triplă formula (3) a lui Green luând funcţia $\varphi = V$. Atunci

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int_{v} (\text{grad } V)^2 \, d v - \frac{\varepsilon}{8\pi}\oint_{S} V \frac{\partial V}{\partial n} d S. \tag{12}$$

Prima integrală din membrul drept este extinsă asupra volumului v al sferei noastre auxiliare, iar cea de a doua integrală asupra suprafeţei ei S.

Să facem acum ca raza R a sferei să tindă către infinit. Atunci, prima dintre integrale va deveni

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\int_{\infty} (\text{grad } V)^2 \, d v,$$

adică va fi extinsă la *întregul spaţiu nemărginit*. A doua integrală, însă, va fi nulă la limită. Intr'adevăr, din formulele (3') şi (3) § 58 se poate uşor demonstra că potenţialul V al câmpului sarcinilor spaţiale scade spre infinit, întocmai ca un infinit mic de ordinul $\frac{1}{R}$, iar derivata lui $\frac{\partial V}{\partial n}$ scade ca o mărime de ordinul $\frac{1}{R^2}$. Cu alte cuvinte, pentru o rază R suficient de mare au loc inegalităţile

$$|V| < \frac{C_1}{R} \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| < \frac{C_2}{R^2}$$

în care C_1 şi C_2 sunt constante oarecari. Atunci

$$\left|\oint_{S} V \frac{\partial V}{\partial n} dS\right| \leqslant \oint_{S} |V| \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| dS < \frac{C_1 C_2}{R^3}\oint_{S} d S =$$

$$= \frac{C_1 C_2}{R^3} 4 \pi R^2 = \frac{4 \pi C_1 C_2}{R}.$$

De aci rezultă că pentru $R \to \infty$ a doua integrală devine nulă la limită. Astfel, energia înmagazinată într'un câmp electrostatic produs de o sarcină spațială, poate fi exprimată print'o integrală de forma

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\limits_{\infty} (\text{grad } V)^2 \, dv. \tag{13}$$

extinsă *la întregul spațiu nemărginit.* Se știe, de altfel, că în toate punctele câmpului are loc egalitatea

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V.$$

Deaceea, integrala (13) poate fi exprimată prin vectorul câmp **E**

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\limits_{\infty} \mathbf{E}^2 \, dv = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\limits_{\infty} E^2 \, dv. \tag{14}$$

Expresiile (13) și (14) ne permit să considerăm energia drept o mărime fizică, *repartizată* în întregul spațiu nemărginit în așa fel încât fiecare element dv al volumului să conțină o cantitate de energie egală cu $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 dv$, iar fiecare unitate de volum,

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{15}$$

Această cantitate o putem numi *densitatea energiei electrostatice a câmpului raportată la unitatea de volum.*

Vom considera încă o aplicație importantă a formulelor lui Green, la rezolvarea problemei determinării câmpului atunci când se cunoaște divergența și rotorul lui.

CAPITOLUL XI

Principalele tipuri de câmpuri vectoriale

§ 70. OBSERVAȚII GENERALE

Divergența și rotorul pot fi considerate ca două caracteristice diferențiale ale câmpului vectorial, cu alte cuvinte, ca două mărimi evidențiind proprietățile câmpului în fiecare punct al acestuia. Divergența este o mărime scalară legată de prezența surselor și puțurilor, iar rotorul este o mărime vectorială legată de noțiunea de integrală lineară sau de circulația vectorului. Importanța acestor caracteristice va fi și mai evidentă atunci când ne vom da seama că ele pot fi puse la baza clasificării câmpurilor și că din proprietățile lor se pot deduce cele mai importante proprietăți ale câmpurilor însăși.

Să convenim următoarele :

1° Câmpurile (sau domeniile câmpurilor) în care rotorul este identic nul, iar divergenţa este o funcţie oarecare ρ (x, y, z) le vom numi irotaţionale sau potenţiale.[1]

Astfel, pentru aceste câmpuri,

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\ \mathbf{a} &\equiv 0, \\ \text{div}\ \mathbf{a} &= \rho\ (x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Mărimea ρ în unele puncte ale câmpului sau chiar în unele regiuni izolate poate fi nulă într'un caz particular; în general, însă, este diferită de zero şi reprezintă o funcţie oarecare scalară de punct.

2° Câmpurile (sau domeniile câmpurilor) pentru care:

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\ \mathbf{a} &\equiv 0, \\ \text{rot}\ \mathbf{a} &= \omega\ (x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

adică în care divergenţa este identic nulă în toate punctele lor, iar rotorul este o funcţie vectorială oarecare ω (x, y, z), le vom numi *„fără surse"* sau *„solenoidale"*.

Dacă într'un caz particular pentru un câmp oarecare (sau pentru un domeniu oarecare al câmpului) avem div $\equiv 0$ şi rot $\equiv 0$, aceasta va purta numele de *câmp laplacian* în regiunea respectivă.

3° In sfârşit, câmpurile (sau domeniile câmpului) pentru care

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\ \mathbf{a} &= \rho\ (x, y, z), \\ \text{rot}\ \mathbf{a} &= \omega\ (y, x, z). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

adică acelea pentru care, în general, divergenţa şi rotorul sunt diferite de zero, le vom numi *câmpuri de formă generală*.

Astfel, câmpul $\mathbf{a} = m\,\mathbf{r}$ în care $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului curent raportat la o origină oarecare, iar m un scalar constant, reprezintă un câmp potenţial în întregul spaţiu nemărginit, deoarece

$$\text{rot}\ (m\,\mathbf{r}) = m\ \text{rot}\ \mathbf{r} = 0 \ \text{ şi } \ \text{div}\ (m\,\mathbf{r}) = m\ \text{div}\ \mathbf{r} = 3\,m.$$

Câmpul vitezelor unui corp solid ce se roteşte împrejurul unei axe oarecare l este un *câmp solenoidal*, deoarece pentru el $\mathbf{v} = [\omega\,\mathbf{r}]$, în care $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului în raport cu o origină oarecare de pe axă, de unde

$$\text{div}\ [\omega\,\mathbf{r}] = 0 \ \text{ şi } \ \text{rot}\ [\omega\,\mathbf{r}] = 2\,\omega.$$

---

1) [In cazul când egalităţile (1) nu au loc în întregul spaţiu ocupat de câmp, ci numai în unele domenii ale lui, termenul irotaţional sau „potenţial" se va referi numai la aceste domenii. Acelaş lucru trebue avut în vedere şi pentru definiţiile ulterioare].

Intregul volum V, ocupat de corp în fiecare moment dat, constitue domeniul acestui câmp.

Câmpul de forma

$$\mathbf{a} = \frac{C}{r^3}\mathbf{r} \quad ,$$

în care C este un număr constant, va fi un câmp laplacian în întregul spațiu nemărginit, cu excepția punctului $\mathbf{r} = 0$[1] care nu face parte din câmp.

Pentru el

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } (\frac{C}{r^3}\mathbf{r}) = 0 \text{ și } \text{div } \mathbf{a} = \text{div } (\frac{C}{r^3}\mathbf{r}) = 0.$$

Câmpul

$$\mathbf{a} = m\,\mathbf{r} + [\mathbf{c}\,\mathbf{r}] \, ,$$

în care m este un scalar constant, iar $\mathbf{c}$ un vector constant, reprezintă un câmp de formă generală.

Câmpul elecrostatic $\mathbf{E}$ produs de o sarcină spațială va fi un câmp potențial în întregul spațiu nemărginit, inclusiv în punctele ocupate de sarcină, deoarece

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ și } \text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

(In punctele *din afara* sarcinii spațiale el va putea fi chiar laplacian, deoarece $\rho = 0$). Câmpul magnetic $\mathbf{H}$ produs de un curent repartizat într'un volum va fi un câmp solenoidal în domeniile prin care trece curentul, deoarece

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad \text{și rot } \mathbf{H} = 4\,\pi\,\mathbf{u},$$

unde $\mathbf{u}$ reprezintă vectorul densității curentului; în celelalte regiuni el va fi laplacian.

In sfârșit, în teoria câmpurilor electromagnetice vom întâlni câmpuri de formă generală.

Pentru a încheia, să dăm încă două exemple de câmpuri matematice caracteristice tuturor raționamentelor ulterioare.

Anume, *dacă vectorul* $\mathbf{a}$ *este gradientul unei funcții scalare oarecare* φ, *atunci câmpul acestui vector este potențial.*

Intr'adevăr, dacă

$$\mathbf{a} = \text{grad } \varphi \, , \tag{4}$$

atunci, după cum am văzut

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot grad } \varphi = 0$$

---

1) [Punctul $\mathbf{r} = 0$ nu face parte din câmp, deoarece pentru el expresia $\frac{C}{r^3}\mathbf{r}$ își pierde sensul].

Funcţia φ se numeşte *funcţie potenţială a acestui câmp vectorial,* iar valoarea ei numerică, într'un punct oarecare, se numeşte *potenţialul câmpului în acel punct.* Vom vedea, în paragraful următor, că şi reciproc, orice câmp potenţial poate fi privit ca un câmp al gradienţilor unei funcţii scalare φ oarecare.

Un exemplu tipic de câmp solenoidal îl constitue câmpul rotorilor oricărui câmp vectorial. Intr'adevăr, dacă

$$\mathbf{W} = \text{rot } \mathbf{a},$$

câmpul **W** este solenoidal, deoarece după cum am văzut

$$\text{div } \mathbf{W} = \text{div rot } \mathbf{a} = 0.$$

Vom vedea că şi reciproc, pentru orice vector solenoidal **a** poate fi găsit un vector **A**, (chiar o infinitate) astfel încât vectorul dat să reprezinte rotorul **A**, adică

$$\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{A}. \tag{5}$$

Vectorul variabil **A** poate fi numit *primitiv* în raport cu **a** (x, y, z), la fel cum în analiza obişnuită o funcţie $F(x)$ este primitivă pentru funcţia $f(x)$ dacă $f(x) = F'(x)$. Dar, prin analogie cu potenţialul scalar, vectorul variabil **A** este denumit [1] vectorul potenţial al câmpului solenoidal **a**.

Tot aşa cum poate fi găsit vectorul potenţial **a** prin potenţialul scalar φ, cu ajutorul gradientului putem găsi vectorul solenoidal **a** cu ajutorul rotorului [2] vectorului **A**.

Ulterior vom preciza noţiunea de vector potenţial.

§ 71. NOŢIUNEA DE DOMENIU SIMPLU ŞI MULTIPLU CONEX

Să ne propunem problema studierii proprietăţilor principalelor câmpuri vectoriale. După cum vom vedea ulterior, *va fi necesar să ne ocupăm, în amănunt, nu numai de forma funcţiei* **a(r)**, *ci şi de proprietăţile pur geometrice ale acelui domeniu* Ω în care **a** este definit.

Deaceea, este necesar să ne ocupăm mai întâi de unele consideraţii geometrice şi să introducem câteva definiţii.

Vom numi domeniul de definiţie al câmpului acea parte a domeniului Ω în care el este determinat. Câmpul poate fi sau extins la întregul spaţiu nemărginit tridimensional, sau limitat de oarecare suprafeţe, pe care le vom numi limitele câmpului.

De ex., domeniul de definiţie al câmpului electrostatic **E** produs de o sarcină punctiformă, va fi constituit de întregul

---

1) In cazul unor condiţii suplimentare, despre care vom vorbi în cap. XIII.

2) Această operaţie se numeşte uneori „rotaţia vectorului **A**".

spaţiu nemărginit, cu excepţia punctului A, în care se află sarcina care-l produce. Pentru o sarcină spaţială, domeniul de definiţie al câmpului va fi constituit de întregul spaţiu nemărginit, fără nicio excepţie. Pentru câmpul magnetic exterior produs de un curent cilindric infinit, domeniul de definiţie va fi constituit de întregul spaţiu nemărginit, cu excepţia domeniului din interiorul cilindric al conductorului (fig. 135). Suprafaţa limită o constitue suprafaţa cilindrică a conductorului. Invers, pentru câmpul magnetic interior, domeniul de definiţie se va extinde în interiorul conductorului.

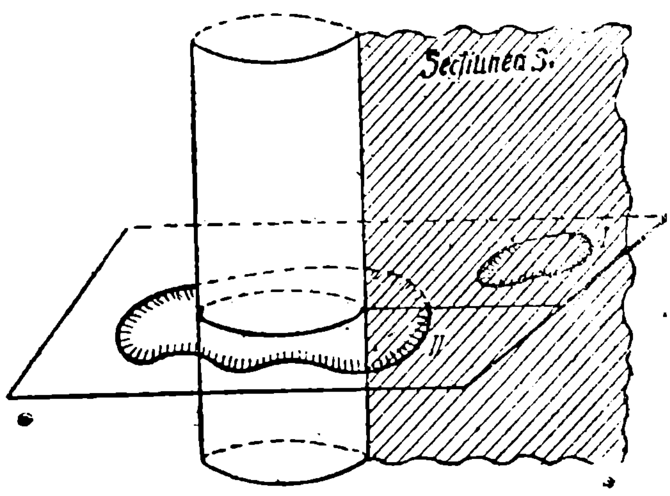


Fig. 135

Pentru câmpul de viteze al unui solid în mişcare, domeniul de definiţie al lui, în fiecare moment, va fi reprezentat de volumul ocupat de acel corp într'un moment dat, iar suprafaţa lui limită va coincide cu suprafaţa corpului, etc.

Astfel, fie Ω domeniul de definiţie al câmpului. Vom presupune acest domeniu *conex*. Prin acest termen se înţelege un domeniu care posedă însuşirea ca dintr'un punct oarecare A se poate trece oricând la un alt punct B printr'o linie continuă, *toate punctele căreia* se află în interiorul domeniului dat; această linie nu trebue să depăşească limitele domeniului. Să ducem în acest domeniu un contur arbitrar, C, având punctele situate în domeniul respectiv şi să-l deformăm continuu, făcându-l să convească către un punct, fără însă a permite vreo discontinuitate a conturului. In acest caz, după cum vom vedea imediat, cu ajutorul unor exemple, sunt posibile două tipuri de domenii în dependenţă de forma lor.

In unele cazuri, domeniul Ω este de aşa natură, încât *orice contur C* ce-i aparţine, poate fi redus, printr'o transformare continuă, la un punct oarecare A al domeniului, *fără a traversa limitele domeniului şi fără a întrerupe linia* C.

Astfel de domenii (sau spaţii) le vom numi *simplu conexe*. Drept exemplu pentru acest fel de domenii poate servi întregul spaţiu nemărginit. La fel, domeniul situat în interiorul suprafeței sferei, precum și domeniul cuprins între suprafețele a două sfere concentrice, vor fi simplu conexe.

In alte cazuri, domeniul Ω este astfel încât *nu orice contur* C, care-i aparține poate fi redus la un punct printr'o transformare continuă. fără a traversa limitele domeniului și fără a întrerupe linia *C*.

Astfel de domenii sau spații le vom numi *multiplu conexe*. Așa, de exemplu, în fig. 135, toată partea nemărginită a spațiului, *exterioară în raport cu cilindrul infinit lung*, nu va mai fi simplu *conexă*. Intr'adevăr, unele contururi cum este de ex., conturul I sunt astfel încât pot fi reduse la un punct *A*. Altele însă, cum este conturul II, care cuprinde cilindrul, nu pot fi reduse la un punct, fără să se întrerupă conturul sau fără ca să se traverseze suprafața cilindrului care servește drept limită pentru acest domeniu exterior.

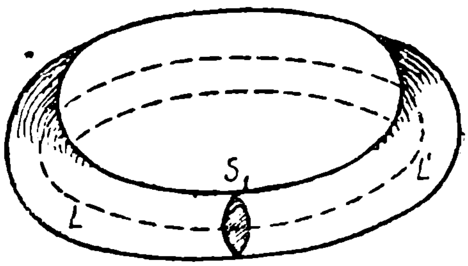


Fig. 136

Un al doilea exemplu îl constitue volumul ocupat de un tor (fig. 136). Aci sunt posibile astfel de contururi, cum este de exemplu *LL'*, care nu pot fi reduse la un punct.

Un exemplu intuitiv de domeniu multiplu conex îl poate constitui și volumul ocupat de o scândură groasă, în care s'au executat unul sau mai multe orificii cilindrice (fig. 137). Intr'adevăr, contururile duse în interiorul acestei scânduri și care cuprind unul sau mai multe orificii, nu pot fi reduse la un punct, fără ca să se traverseze limitele domeniului sau fără a se întrerupe linia.

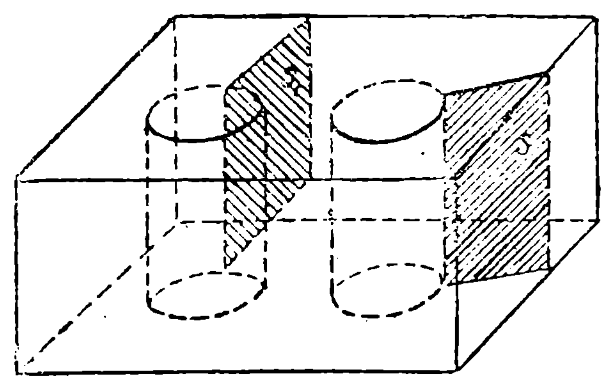


Fig. 137

Un domeniu multiplu conex poate fi transformat în simplu conex, dacă prin el se duc astfel de suprafețe secante sau „secțiuni" S_i, care ar împiedica existența unor contururi ce nu se pot reduce la un punct, *suprafețe care să fie incluse în numărul de limite ale domeniului*. Astfel, în fig. 135 este suficient să ducem un plan oarecare S_1 care să treacă printr'una dintre generatricele cilindrului. Atunci, în acest domeniu „complectat", adică în domeniul în care suprafeței cilindrului i s'a adăugat o nouă suprafață „limită" S_1. nu vor putea fi duse contururi de tipul II, iar domeniul se va transforma în simplu conex. In fig. 136 este suficient ca prin tor să ducem o secţiune transversală de forma S_1; în fig. 137 sunt necesare două astfel de secţiuni S_1 şi S_2.

Numărul minim λ de tăieturi sau „secţiuni" care trebue făcute într'un domeniu, pentru ca acesta, din multiplu, să devină simplu conex, adunat unităţii, se numeşte ordinul de conexitate, adică

$$\lambda + 1 = \text{ordinul de conexitate.}$$

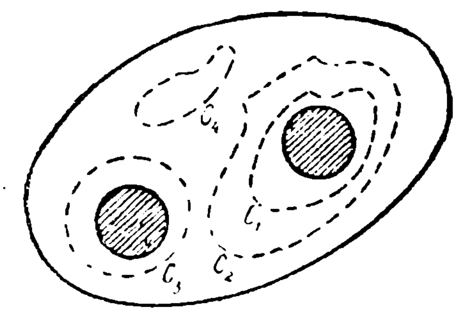


Fig. 138

Astfel, în fig. 135 şi 136 domeniul este dublu conex, în fig. 137—triplu conex ş.a.m d.

Să introducem încă o definiţie. In fig. 138 este reprezentat schematic un domeniu triplu conex Ω cu două tăieturi sau „găuri" în el. Atunci, două contururi oarecare, de exemplu C_1 şi C_2, pe care prin schimbări continue le putem transforma unul într'altul fără ca să ieşi din limitele domeniului şi fără ca să întrerupem contururile, le vom numi *comparabile între ele*. Invers, vom numi incomparabile contururile C_1 *şi* C_3 sau C_1 şi C_4, etc,

§ 72. CÂMPUL POTENŢIAL ÎNTR'UN DOMENIU SIMPLU CONEX

Fie dat într'un domeniu oarecare *simplu conex* Ω un câmp *potenţial*

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Presupunem că funcţiile a_x, a_y şi a_z sunt uniforme, continue şi diferenţiabile în orice punct al domeniului, împreună cu primele lor derivate parţiale, având derivatele de ordinul doi finite.

Să studiem proprietăţile acestui câmp. Deoarece câmpul este potenţial, rotorul este nul, adică

$$\text{rot } \mathbf{a} = 0. \tag{1}$$

Rezultă că proiecţiile rotorului pe axele de coordonate sunt identic nule. De aici obţinem condiţia analitică a potenţialului sub forma următoarelor egalităţi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial y} &= \frac{\partial a_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial a_y}{\partial z} &= \frac{\partial a_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Egalităţile (2) nu sunt numai necesare, ci şi suficiente, deoarece din ele reiese (1).

Teorema 1. *Intr'un câmp potenţial situat într'un domeniu simplu conex, integrala de linie a vectorului de-a-lungul unei traiectorii oarecare, ce uneşte două puncte arbitrare ale câmpului trecând prin interiorul acestuia, nu depinde de forma traiectoriei.*

Intr'adevăr, fie M_0AM şi M_0BM două traiectorii arbitrare între punctele M_0 şi M (fig. 139).

Datorită simplei conexităţi a domeniului nostru, drumul M_0AM îl putem transforma pe cale continuă în M_0BM, *fără ca să ieşim din limitele domeniului.*

Presupunem că locul geometric al tuturor acestor poziţii succesive ale liniei M_0AM în timpul trecerii ei continue din poziţia I în poziţia II, formează o suprafaţă oarecare S. Atunci această suprafaţă, cu toate punctele ei, se va găsi în domeniul nostru. Să luăm linia M_0AMBM_0 drept un contur continuu C. Atunci, conform teoremei lui Stokes putem scrie

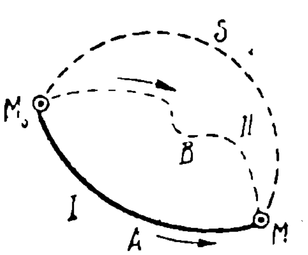


Fig. 139

$$\int_{M_0AM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int_{MBM_0} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dS. \tag{3}$$

Dar în toate punctele suprafeţei S, rotorul este nul prin definiţie, deoarece suprafaţa S se află în întregime în interiorul domeniului, în care câmpul este potenţial. Rezultă că integrala din membrul drept se va anula, iar egalitatea noastră va deveni

$$\int_{M_0AM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int_{MBM_0} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = 0. \tag{4}$$

De aici

$$\int\limits_{M_0AM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = - \int\limits_{MBM_0} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}.$$

In sfârşit, schimbând sensul integrării în integrala din membrul drept şi schimbând simultan semnul vom obţine expresia căutată

$$\int\limits_{M_0AM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{M_0BM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (5)$$

Din egalitatea (4) am obţinut o a doua teoremă.

Teorema 2. *In câmpul potenţial situat într'un domeniu simplu conex circulaţia vectorului de-a-lungul unui contur oarecare aparţinând câmpului, nu depinde de forma lui, fiind totdeauna egală cu zero.*

Teoremele 1 şi 2 sunt strâns legate între ele, deoarece una poate fi dedusă din cealaltă ca o consecinţă, şi reciproc. De altfel, din teorema 2 rezultă o consecinţă importantă : într'un câmp potenţial în cazul unui domeniu simplu conex, nu pot exista linii vectoriale închise.

Intr'adevăr, să admitem situaţia inversă, deci existenţa măcar a unei singure linii închise L. In acest caz, parcurgând-o o singură dată în sens pozitiv, observăm că toţi termenii de sub integrala

$$\oint\limits_{L} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$$

sunt pozitivi, iar integrala nu poate fi nulă, ceeace ar contrazice teorema 2.

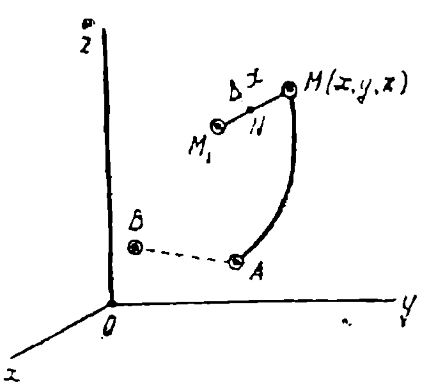


Fig. 140

Teorema 3. *Pentru un câmp potenţial poate fi găsită întotdeauna o funcţie scalară astfel încât vectorul câmp* **a** *să fie gradientul primei, adică*

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Demonstraţie. Fie M (x, y, z) punctul considerat. Să alegem în câmpul nostru un punct arbitrar imobil, A (a, b, c), pe care să-l denumim punct *iniţial* (fig. 140)

Plecând din acest punct, ne deplasăm în punctul considerat.

M de-a-lungul unei traiectorii arbitrare AM [1] Să calculăm integrala:

$$\varphi\,(x, y, z) = \int_{AM} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{6}$$

Conform celor demonstrate anterior, valoarea numerică a acestei integrale nu depinde de forma traiectoriei, ci numai de poziția punctului $M(x, y, z)$ (punctul A este presupus imobil). Rezultă de aici că totalitatea valorilor mărimii φ din integrala noastră formează pentru diferitele puncte M un câmp scalar oarecare al funcției $\varphi\,(x, y, z)$. Să demonstrăm că vectorul câmp este gradientul acestei funcții, adică axele de coordonate sunt legate de funcția dată prin relațiile :

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{7}$$

De unde reiese:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\mathbf{k} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Pentru aceasta, să considerăm o deplasare din punctul M în punctul infinit vecin M_1 situat la distanța Δx pe dreapta MM_1, *paralelă cu axa x* și să calculăm integrala curbilinie de-a-lungul traiectoriei AMM_1. Conform egalității (6) avem

$$\varphi\,(x + \Delta x, y, z) = \int_{AMM_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} \tag{9}$$

Scădem egalitatea (8) din (9). Atunci, în membrul drept rămâne doar integrala luată de-a-lungul deplasării rectilinii infinit mici $MM_1 = \Delta x$

$$\varphi\,(x+\Delta x, y, z) - \varphi\,(x, y, z) = \int_{MM_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{9'}$$

Deoarece, însă, în cazul nostru

$$\mathbf{a}\, d\mathbf{l} = a_x \Delta x + a_y \Delta y + a_z \Delta z = a_x \Delta x$$

(deoarece $\Delta y = \Delta z = 0$) conform teoremei mediilor, integrala (9') este egală cu $a_x\,(N)\,\Delta x$, în care $a_x\,(N)$ este valoarea funcției a_x într'un punct intermediar oarecare N între M și M_1. Astfel

$$\varphi\,(x + \Delta x, y, z) - \varphi\,(x, y, z) = a_x\,(N) \cdot \Delta x.$$

---

1) [Se înțelege dela sine că traiectoria *AM* trebue să se găsească cu toate punctele sale în domeniul de definiție al câmpului].

Impărţind ambii membri prin Δx şi trecând la limită pentru $\Delta x \to 0$ vom obţine

$$\lim_{\Delta x \to 0} a_x (N) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi (x + \Delta x, y, z) - \varphi (x, y, z)}{\Delta x}$$

sau încă

$$a_x (M) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

In mod analog putem demonstra şi celelalte două egalităţi (7) şi de aici şi egalitatea (8). *Astfel, orice câmp potenţial poate fi privit ca un câmp al gradienţilor unei funcţii scalare oarecare* φ, *definită prin egalitatea* (6).

Alegerea punctului A fiind arbitrară, putem obţine un număr infinit de funcţii φ pentru acelaş câmp.

Să demonstrăm că două funcţii arbitrare dintre acestea se deosebesc între ele doar prin termenul constant C. Intr'adevăr, dacă am considera un punct oarecare B drept punct iniţial, am găsi o altă funcţie

$$\psi = \int_{BM} \mathbf{a} d\mathbf{l}.$$

Deoarece însă alegerea traiectoriei BM este arbitrară, putem să o alegem astfel, încât ea să treacă prin punctul A de mai sus. Atunci

$$\psi = \int_{BA} \mathbf{a} d\mathbf{l} + \int_{AM} \mathbf{a} d\mathbf{l} = C + \int_{AM} \mathbf{a} d\mathbf{l} = C + \varphi.$$

Rezultă că $\psi = \varphi + C$. Prezenţa constantei arbitrare nu joacă un rol hotărîtor, deoarece; în primul rând, la găsirea gradientului, această constantă dispare; în al doilea rând, deoarece, în practică, deobicei, nu importă valorile însăşi ale funcţiei φ, ci doar *diferenţele* valorilor lor între două puncte oarecare.

Adesea, punctul iniţial este ales la infinit. Se înţelege, că acest lucru se poate face doar în acele câmpuri în care vectorul $\mathbf{a}$ dispare la infinit, în aşa fel încât integrala (6) să aibă o valoare finită, cu toate că traiectoria de-a-lungul căreia efectuăm integrarea este infinită.

Integrala $\int_{AM} \mathbf{a} d\mathbf{l}$ se numeşte *potenţialul câmpului* în punctul dat M, iar funcţia $\varphi = \int\limits_{AM} \mathbf{a} d\mathbf{l}$ în cazul lui M variabil se numeşte *funcţie potenţială a câmpului.*

NOTĂ. In fizică, de pildă, în electrostatică se preferă să se ia adesea în locul funcţiei φ o funcţie de semn contrar acesteia $V = -\varphi$. Atunci egalităţile (7) şi (8) capătă forma:

$$a_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \; a_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \; a_z = -\frac{\partial V}{\partial z}; \tag{7'}$$

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} V \tag{8'}$$

Teorema 4. *Intr'un câmp potenţial, liniile vectoriale sunt perpendiculare pe suprafeţele de nivel ale funcţiei* φ.

Demonstraţie. Lucrul acesta reiese direct din egalitatea $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$. Deoarece vectorul câmp $\mathbf{a}$ coincide cu gradientul lui φ, el va fi ortogonal la suprafaţa de nivel şi deci liniile vectoriale vor fi şi ele ortogonale în orice punct la aceste suprafeţe.

Teorema 5. *Integrala liniară a vectorului, de-a-lungul traiectoriei cuprinse între două puncte arbitrare date* M *şi* N *ale câmpului, este egală cu diferenţa valorilor funcţiei potenţiale corespunzătoare punctelor final şi iniţial, adică*

$$\int\limits_{MN} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \varphi_N - \varphi_M . \tag{10}$$

Intr'adevăr, conform lui (8),

$$\mathbf{a} d\mathbf{l} = a_x dx + a_y dy + a_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi.$$

Deaceea

$$\int\limits_{MN} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int\limits_{M}^{N} d\varphi = \Big[\varphi(x, y, z)\Big]_M^N = \varphi_N - \varphi_M.$$

Dacă într'un caz particular punctele M şi N sunt situate pe aceeaşi suprafaţă de nivel, integrala devine nulă deoarece

$$\varphi_M = \varphi_N.$$

In sfârşit, să utilizăm divergenţa câmpului pentru a demonstra următoarea teoremă.

Teorema 6. *Intr'un câmp potenţial al vectorului* **a**, *funcţia lui potenţială satisface relaţia lui Poisson*

$$\triangle \varphi = \rho,$$

sau încă

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=\rho, \tag{11}$$

în care ρ (x, y, z) este *divergența câmpului.*

Intr'adevăr, prin definiție

$$\operatorname{div} \mathbf{a}=\rho.$$

Introducând aici, în locul lui **a**, expresia lui sub forma unei funcții potențiale, scriem

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi=\rho$$

sau, deoarece div grad φ este laplacianul $\triangle\varphi$,

$$\triangle\varphi=\rho,$$

ceeace trebuia demonstrat.

Intr'un caz particular, în punctele câmpului, în care divergența este nulă, egalitatea (11) se transformă în ecuația lui Laplace

$$\triangle\varphi=0 \text{ sau } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0. \tag{12}$$

Ecuația lui Laplace-Poisson permite determinarea funcției potențiale prin integrarea unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale. In unele probleme, această cale este uneori mai comodă decât calculul integralei (6). Teoria acestei ecuații și a funcțiilor, pe care le determină, formează obiectul unei discipline aparte numită fizica matematică.

In încheiere, să reamintim că în teoria câmpurilor electrostatice, ecuația lui Laplace-Poisson, după cum s'a arătat în paragraful 58, are forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{13}$$

în care ρ este densitatea sarcinii spațiale într'un punct dat al câmpului.

Să arătăm printr'un exemplu elementar explicația ecuației lui Laplace-Poisson.

Exmplu. Câmpul produs de sarcini de semne contrare între două plăci paralele.

Fie plăcile AA' și BB' infinit lungi, încărcate cu sarcini de semn contrar, aflându-se la potențiale V_1 și V_2 astfel ca $V_1 > V_2$. Să găsim valoarea câmpului **E** produs între ele (fig. 141).

Rezolvare. Să orientăm axa x perpendicular pe plăci, în sensul descreşterii potenţialului, iar planul yOz să-l suprapunem peste placa încărcată pozitiv AA'. Vom căuta să obţinem funcţia potenţială din ecuaţia lui Laplace-Poisson. In virtutea

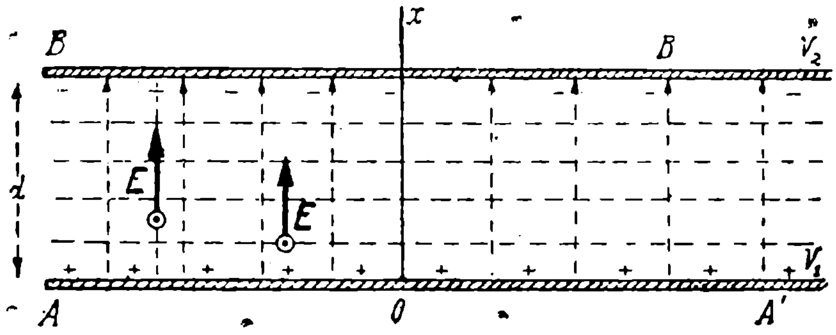


Fig. 141

simetriei problemei în raport cu axa x şi ţinând seama de lungimea înfinită a plăcilor, putem conchide că suprafeţele echipotenţiale vor fi nişte plane paralele cu plăcile noastre şi deci funcţia va depinde, în cazul nostru, *de o singură variabilă* x. Egalitatea (13) va lua forma

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0. \tag{14}$$

deoarece între plăci nu există sarcini spaţiale.

Integrându-l pe (14) găsim

$$V = Cx + D, \tag{15}$$

C şi D fiind nişte constante arbitrare.

Punem condiţia ca pentru $x = 0$ funcţia V să ia valoarea V_1, iar pentru $x = d$, d fiind distanţa dintre plăci, funcţia să ia valoarea V_2. In acest caz $D = V_1$ şi

$$V_2 = Cd + V_1.$$

Introducând pe C şi D în (15) obţinem

$$V = \frac{V_2 - V_1}{d} x + V_1 = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{d} x. \tag{16}$$

Vectorul **E** poate fi acum găsit din formula

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

sau încă

$$\mathbf{E} = \frac{V_1 - V_2}{d}\mathbf{i}. \tag{17}$$

Rezultă că acest câmp este uniform şi orientat după axa x. Mărimea **E** este egală în orice punct cu

$$\frac{V_1 - V_2}{d},$$

adică este egală cu căderea de potenţial pe unitatea de lungime a drumului celui mai scurt dintre plăci.

§ 73 CÂMPUL POTENŢIAL INTR'UN DOMENIU MULTIPLU CONEX

Intr'un domeniu multiplu conex, câmpul potenţial (rot $\mathbf{a}=0$) poate prezenta uneie particularităţi diferite de cele studiate în paragraful precedent. Astfel, circulaţia de-a-lungul conturului poate să nu devină nulă pentru *orice contur arbitrar ales*. Şi anume, dacă putem reduce conturul *mnpqm* (fig. 142) la un punct, *atunci circulaţia de-a-lungul lui este nulă*. Intr'adevăr, suprafaţa S construită pe el, aşa cum s'a arătat în paragraful precedent, se va afla situată cu toate punctele ei în interiorul domeniului, în care câmpul este potenţial. Deaceea, fluxul rotorului prin această suprafaţă va fi nul şi atunci, după teorema lui Stokes,

$$\oint_{mnpqm} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dS = 0. \tag{1}$$

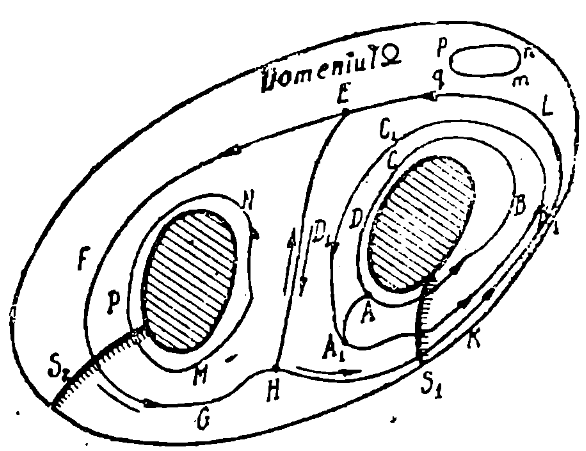


Fig. 142

Dacă însă conturul $ABCDA$ nu poate fi redus la un punct, suprafaţa S, ce se sprijină pe el, va intersecta *alte domenii*, în care câmpul poate să nu mai fie potenţial, adică în care *pot* exista linii de vârtej şi deci fluxul rotorului din egalitatea (1) *poate fi diferit de zero*. Am considerat un caz asemănător în cazul câmpului magnetic produs de un curent rectiliniu infinit lung (fig. 143)

Câmpul exterior

$$\mathbf{H}_e = -2I\frac{y}{\rho^2}\mathbf{i} + 2I\frac{x}{\rho^2}\mathbf{j} + 0.\mathbf{k},$$

este potenţial, deoarece pentru el

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_e = 0$$

(este laplacian, chiar, deoarece și div $\mathbf{H}_e = 0$) dar domeniul lui de existență este dublu conex,

Dar câmpul interior

$$\mathbf{H}_i = -2\pi u y \mathbf{i} + 2\pi u \mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$$

are rotorul egal cu $4\pi\mathbf{u}$; rezultă că el posedă linii de vârtej care, în cazul de față, constitue liniile de curent electric în conductor. Am găsit tocmai că circulația $\oint_C \mathbf{H}\,d\mathbf{l}$ de-a-lungul conturului $m\,n\,p\,q$ (fig. 143) ce poate fi redus la un punct, este nulă; dar circulația de-a-lungul conturului $A\,B\,C\,D\,A$ ce cuprinde conductorul, este diferită de zero și egală cu $4\pi I$. Suprafața S construită pe un astfel de contur intersectează domeniul interior al conductorului și este traversată de linii de vârtej.

Să ne întoarcem acum la cazul general din fig. 142. Este ușor să demonstrăm că circulația de-a-lungul a *două contururi comparabile* $A\,B\,D\,A$ și $A_1 B_1 D_1 A_1$, considerate *de aceeași direcție, este aceeași.*

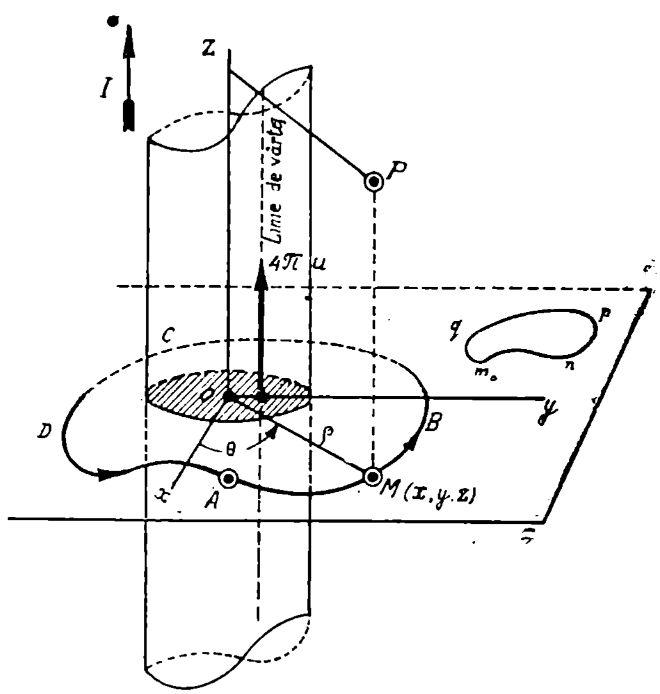


Fig. 143

Intr'adevăr, să facem o secțiune auxiliară după linia AA_1 care unește ambele contururi și să studiem integrala de-a-lungul liniei complexe $A\,B\,D\,A\,A_1\,D_1\,B_1\,A_1\,A$. Aceasta este o linie închisă, deoarece începe și se termină în acelaș punct A. Ea aparține categoriei de linii ce pot fi *reduse* la un punct, deoarece am făcut secțiunea prin $A\,A_1$, considerând această porțiune de două ori. Deaceea, circulația de--alungul unei astfel de linii este nulă. Insemnând integrala curbilinie printr'un simbol $(A\,B\,D\,A\,A_1\,D_1\,B_1\,A_1)$, putem scrie că această integrală este nulă. O putem însă împărți într'o sumă de integrale de formă asemănătoare.

$$(A\,B\,D\,A) + (A\,A_1) + (A_1\,D_1\,B_1\,A_1) + (A_1\,A) = 0.$$

Deoarece integralele curbilinii $(A\ A_1)$ și $(A_1\ A)$ se anulează prin însumare, egalitatea va lua forma

$$(A\ B\ D\ A) + (A_1\ D_1\ B_1\ A_1) = 0.$$

Trecând a doua integrală în membrul drept cu semnul minus și schimbând sensul de integrare (din care cauză semnul se schimbă din nou) vom obține ceeace trebuia demonstrat

$$(A\ B\ D\ A) = (A_1\ B_1\ D_1\ A_1). \qquad (2)$$

Astfel, circulația de-a-lungul unor contururi comparabile nu depinde de forma contururilor, trebuind să ținem seama numai dacă ele cuprind o aceeași gaură. Invers, circulațiile de-a-lungul unor contururi incomparabile, cum sunt de exemplu $A\ B\ D\ A$ și $M\ N\ P\ M$ pot fi, în general, diferite între ele.

Să facem niște secțiuni S_i în domeniul multiplu conex ca să-l transformăm în simplu conex. Convenim să numim *contururi principale* acele contururi ale domeniului, care intersectează o singură dată numai una dintre secțiuni. De exemplu: $A\ B\ D\ A$ și $M\ N\ P\ M$, iar *valorile circulațiilor de-a-lungul lor*, luate într'un sens oarecare bine determinat, le vom numi *constante ciclice*. De exemplu, pentru câmpul magnetic exterior, studiat mai sus, vom avea o singură constantă ciclică egală cu $4\ \pi\ I$. Atunci circulația de-a-lungul conturului care intersectează câteva secțiuni S_i, va fi egală cu suma constantelor ciclice respective. Intr'adevăr, fie $H\ K\ E\ F\ H$ un astfel de contur. Ducând o linie auxiliară $E\ H$, putem scrie

$$(H\ K\ E\ F\ H) = (H\ K\ E\ H) + (H\ E\ F\ H) = m_1 + m_2, \qquad (3)$$

în care m_1 și m_2 sunt constantele ciclice corespunzătoare fiecărui contur principal.

In cazul cel mai general, circulația de-a-lungul oricărui contur închis are forma

$$p_1\ m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_k\ m_k,$$

în care m_i sunt constante ciclice, iar p_i sunt numere întregi (pozitive sau negative, care ne arată de câte ori și în ce sens conturul nostru intersectează fiecare din secțiunile S_i).

Este evident că numărul constantelor ciclice este egal cu numărul secțiunilor necesare pentru transformarea domeniului în simplu conex.

Să considerăm acum problema funcției potențiale într'un domeniu multiplu conex. Fie un punct oarecare A (fig. 144) punctul inițial, iar $M\ (x,\ y,\ z)$ punctul considerat. Ca și în paragraful precedent, să determinăm funcția curbilinie cu ajutorul integralei

$$\varphi\ (x, y, z) = \int\limits_{AM} \mathbf{a}\ d\mathbf{l}, \qquad (4)$$

luată dela punctul inițial A spre punctul considerat de-a-lungul unei traiectorii oarecare AM, ce trece prin câmp. Să denumim *valoare principală* φ_0 a integralei, acea valoare care se obține atunci când traiectoria AM nu intersectează niciuna dintre secțiunile S_i ; de exemplu, integrala de-a-lungul lui ABM din figură. Ca și în paragraful precedent, se poate demonstra că

$$a_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x},\ a_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y},\ a_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}.$$

Să presupunem acum că o traiectorie oarecare dintre A și M intersectează una dintre secțiunile S_i o singură dată.

Atunci valoarea φ a integralei *în acelaș* punct M de-a-lungul acestei traiectorii, va fi diferită de φ_0 prin constanta ciclică m_i, corespunzătoare secțiunii date S_i, adică:

$$\varphi = \varphi_0 + m_i . \quad (5)$$

Intr'adevăr

$$\varphi = (ACDM) = (ACDMBA) + (ABM) = m_i + \varphi_0.$$

In general, expresia cea mai generală a funcției φ în punctul M va fi

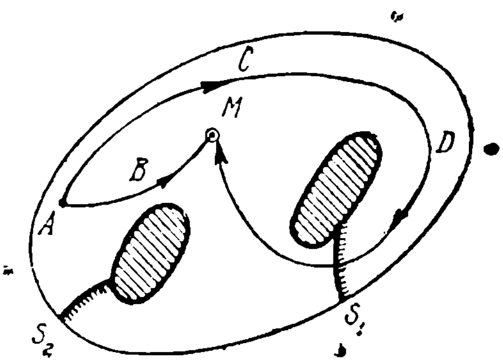


Fig. 144.

$$\varphi = \int_{AM} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \varphi_0 + p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_k m_k = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i m_i , \quad (6)$$

în care numerele întregi p_i ne arată de câte ori și în ce sens traiectoria AM intersectează fiecare dintre secțiunile S_i. Astfel, *funcția potențială a unui câmp potențial într'un domeniu multiplu conex va fi, în general, multiformă, iar valorile ei într'un punct dat diferă prin constante ciclice.*

Să verificăm acest fapt pentru un câmp magnetic exterior $\mathbf{H}_e$ (fig. 143). Atunci

$$\mathbf{H}_e\, d\mathbf{l} = H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz = 2I \frac{-y dx + x dy}{\rho^2} = 2\, I \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Impărțind prin x^2 numitorul și numărătorul fracției, obținem

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\left(\text{arc tg } \frac{y}{x} \right).$$

Fie A şi M două puncte arbitrare ale câmpului exterior. Atunci

$$\varphi = \int_{AM} \mathbf{H}_e \, d\mathbf{l} = 2 I \int_{AM} d \left(\text{arc tg} \frac{y}{x}\right) = 2 I \left[\text{arc tg} \frac{y}{x}\right]_A^M. \quad (7)$$

Să însemnăm prin θ unghiul, pe care-l face planul meridional dus prin axa z și punctul M cu planul xOz (fig. 143). Atunci

$$\text{tg}\, \theta = \frac{y}{x} \quad \text{și arc tg} \frac{y}{x} = \theta.$$

De unde, din (7) obținem definitiv

$$\varphi = \int_{AM} \mathbf{H}_e \, d\mathbf{l} = 2 I \, (\theta_M - \theta_A). \quad (8)$$

Unghiul θ este o funcție multiformă. Când se înconjoară conductorul o singură dată în sensul pozitiv şi se revine în punctul inițial, valoarea ei crește prin aceasta cu 2π. Astfel, potențialul câmpului magnetic exterior, reprezentat în fig 143, prezintă valori multiple. Intre altele, din (8) putem deduce, din nou, că circulația vectorului $\mathbf{H}_e$, atunci când se înconjoară curentul în sens pozitiv, este egală cu $2 I \cdot 2\pi$, adică $4\pi I$.

Să observăm, în încheiere, că dacă într'un domeniu simplu conex, liniile vectoriale ale câmpului potențial nu pot fi închise, într'un domeniu multiplu conex, în schimb, liniile vectoriale închise pot exista, deoarece integrala vectorului de-a-lungul unei astfel de linii poate fi diferită de zero, aceasta necontrazicând caracterul potențial al câmpului. In mod corect, în fig. 143, liniile vectorului $\mathbf{H}_e$ reprezintă cercuri închise.

§ 74. CÂMPUL SOLENOIDAL

Am definit câmpul solenoidal ca satisfăcând condiția.

$$\text{div } \mathbf{a} = 0 \quad (1)$$

Sau, sub formă analitică

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0. \quad (1')$$

Presupunând funcțiile a_x, a_y și a_z împreună cu primele lor derivate parțiale ca fiind uniforme și continue, să demonstrăm proprietatea fundamentală a unui asemenea câmp solenoidal care poate fi exprimată prin următoarea teoremă.

Teoremă. *Intr'un câmp solenoidal, liniile vectoriale nu pot* *începe sau sfârşi într'un punct oarecare situat în interiorul domeniului câmpului.*

Intr'adevăr, fie M un punct oarecare interior regiunii (fig. 145). Să ducem prin acesta un element de suprafaţă ΔS ortogonală vectorului **a** astfel încât la o primă aproximaţie vectorul **a** să poată fi considerat constant în mărime şi direcţie în toate punctele suprafeţei.

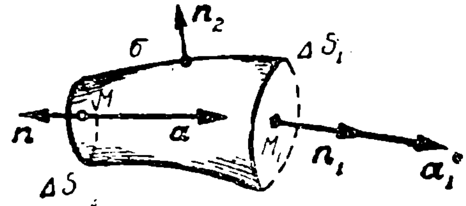


Fig. 145

Ducând liniile vectoriale prin toate punctele conturului C al acestei suprafeţe, vom obţine aşa numitul tub vectorial. Intr'un punct M_1, infinit vecin, ducem o a doua suprafaţă ΔS_1, deasemenea ortogonală vectorului **a**.

Vom obţine un volum oarecare infinit mic ΔV, limitat de suprafeţele ΔS şi ΔS_1 şi de suprafaţa σ a tubului vectorial. Să aplicăm teorema lui Gauss volumului

$$\int_{\Delta S} \mathbf{an}\, dS + \int_{\Delta S_1} \mathbf{an}\, dS_1 + \int_{\sigma} \mathbf{an}\, d\sigma = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV \qquad (2)$$

Membrul drept al acestei egalităţi este identic nul prin niţie, deoarece divergenţa **a** este identic nulă în toate punctele câmpului.

In membrul stâng integrala extinsă la suprafaţa σ este deasemenea nulă, deoarece în toate punctele acesteia normala **n** la suprafaţă este perpendiculară pe direcţia vectorului.

In ceace priveşte, însă, primele două integrale, acestea, în virtutea faptului că ΔS şi ΔS_1 sunt infiniţi mici, dau $-a\Delta S$ şi $+a_1\Delta S_1$. Astfel egalitatea (2) va deveni

$$-a\Delta S + a_1\Delta S_1 = 0$$

de unde

$$a_1\,\Delta S_1 = a\Delta S = \text{constant.} \qquad (3)$$

sau

$$\Delta N_1 = \Delta N = \text{constant.}$$

Astfel, fluxul vectorului, prin secţiunea transversală situată la începutul tubului, este egal cu fluxul, ce trece prin celălalt capăt. Reamintindu-ne că am definit „numărul de linii", prin produsul $a\Delta S$, rezultă că *„numărul de linii ce ies printr'un capăt al tubului vectorial este egal cu numărul de linii ce intră prin celălalt capăt.* Deoarece această deducţie poate fi făcută pentru orice punct M şi pentru un tub de lungime şi secţiune transversală *oricât de mică*, reiese că niciuna dintre liniile de acest fel nu poate nici să fie întreruptă, nici să înceapă nicăieri în câmp.

Rezultă că liniile vectoriale ale unui câmp solenoidal pot fi:

1. sau închise;
2. sau să înceapă şi să se termine la limitele câmpului;
3. sau să meargă spre infinit.

Astfel, în câmpul magnetic al unui curent rectiliniu, după cum am văzut, ele formează cercuri.

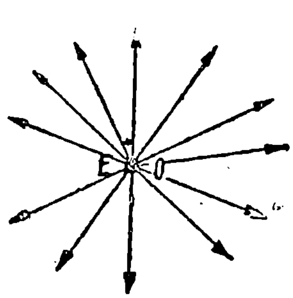


Fig. 146

Intr'un câmp electrostatic produs de o sarcină pozitivă punctiformă [1] (fig. 146) ele se sprijină cu extremităţile lor pe suprafaţa sferei infinit mici care înconjoară sarcina şi care exclude punctul 0 din componenţa câmpului; iar celelalte extremităţi merg spre infinit. Intr'un câmp electrostatic produs din sarcini superficiale, repartizate pe conductori metalici, ele încep şi se termină pe suprafeţele conductorilor; unele dintre ele, însă, sprijinite cu o extremitate pe suprafaţa conductorului, pot merge spre infinit cu cealaltă.

$$\text{Expresia } a\Delta S = a_1\Delta S_1 = \ldots = a_i\,\Delta S_i = \ldots$$

care îşi păstrează constantă valoarea de-a-lungul tuturor secţiunilor transversale ale tubului, se numeşte uneori tensiunea tubului [2]).

Din egalitatea $a_1\,\Delta S_1 = a_2\,\Delta S_2$ reiese că

$$\Delta S_1 : \Delta S_2 = a_2 : a_1,$$

adică suprafeţele secţiunilor transversale ale tubului sunt invers proporţionale cu mărimea vectorului. Rezultă că în acele locuri în care mărimea a scade, secţiunea transversală a tubului se măreşte, şi invers.

Câmpul de vârtejuri. Am văzut că un câmp de vârtejuri al unui câmp vectorial oarecare a constitue un exemplu caracteristic de câmp solenoidal, deoarece divergenţa rotorului este totdeauna nulă. Rezultă că liniile de vârtejuri nu pot începe sau sfârşi în interiorul câmpului. Astfel, în câmpul vi-

---

1) Ambele aceste câmpuri sunt solenoidale, ceeace este uşor de demonstrat luând div **H.** şi div **E.**

2) De altfel, însăşi denumirea de câmp solenoidal, sau *tubular* provine din faptul că liniile de forţă sau vectoriale ale unui asemenea câmp formează tuburi continui şi întregul volum al câmpului poate fi împărţit în astfel de tuburi.

tezelor unui corp în rotație, liniile de vârtej sunt paralele cu axa de rotație, începând și sfârșind pe suprafața corpului (limita câmpului).

Pentru un câmp magnetic interior al unui conductor, servesc drept linii de vârtej liniile de curent, ce nu se pot întrerupe sau începe nicăeri în interiorul conductorului (așa zisa teoremă a „continuității" curentului). Pe suprafețele de cep ale conductorului, dacă acesta nu este închis, ele intră în dielectric; iar în cazul unui câmp electromagnetic alternativ, ele se continuă în dielectric sub forma unui așa numit „curent" de deplasare, noțiune introdusă de Maxwell. Dacă vom lua un tub de rotori de secțiune variabilă oarecare ΔS, atunci produsul $|\operatorname{rot} \mathbf{a}|\,\Delta S$ este continuu în toate secțiunile și se numește tensiunea rotorului din acest tub.

Teorema inversă. Se poate demonstra și invers că *orice câmp solenoidal* **a** *este câmpul vârtejurilor unui alt vector oarecare* **A** *care poate fi numit primitiv pentru* **a**.

Intr'adevăr, fie divergența unui vector oarecare, identic nulă, adică

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Vom căuta un vector

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

astfel încât

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{5}$$

Egalitatea (5) ne duce la un asemenea sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= a_x(x, y, z), \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= a_y(x, y, z), \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= a_z(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

în care a_x, a_y și a_z sunt funcții date de x, y, z, iar A_x, A_y și A_z sunt funcțiile căutate. Rezultă că problema găsirii lui **A** se reduce la integrarea sistemului (6).

Să ne convingem că în cazul când există un vector oarecare $\mathbf{A}_0\,(x, y, z)$ astfel încât $\operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \mathbf{a}$, putem găsi un număr infinit de astfel de vectori. Intr'adevăr, să adăugăm lui $\mathbf{A}_0$ un vector potențial arbitrar grad ψ (x,y,z), în care ψ este o funcție scalară arbitrară de $(x, y, z,)$ Atunci vectorul

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \operatorname{grad} \psi \tag{6'}$$

satisface deasemenea condiția (5) deoarece

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A}_0 + \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0 + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \mathbf{a}.$$

Alegerea funcției ψ fiind arbitrară, putem găsi un număr infinit de vectori **A**, după formula (6').

Una dintre soluțiile sistemului (6) o putem obține prin cuadraturi. Pentru a demonstra aceasta, să încercăm să găsim soluția lui (6) presupunând că $A_z = 0$. Atunci sistemul va deveni

$$\begin{gathered} -\frac{\partial A_y}{\partial z} = a_x (x, y, z), \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = a_y \ (x, y, z), \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = a_z \ (x, y, z). \end{gathered} \tag{7}$$

Primele două egalități pot fi satisfăcute, luând

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} a_x (x,y,z)\, dz + f_1(x,y) \text{ și } A_x = \int_{z_0}^{z} a_y (x, y, z)\ dz + f_2(x, y), \tag{8}$$

în care z_0 este valoarea inițială arbitrar aleasă pentru z, iar f_1 și f_2 sunt două funcții arbitrare de x și y care joacă rolul unor constante arbitrare la integrarea parțială în raport cu z.

Pentru determinarea lui f_1 și f_2 folosim ultima dintre ecuațiile (7). Pe baza egalităților (8), ea va deveni

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z} a_x\, dz - \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z} a_y\, dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = a_z \,(x, y, z).$$

Diferențiind în raport cu x și y, sub integrală vom scrie

$$-\int_{z_0}^{z}\left\{\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right\} dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = a_z \ (x, y, z).$$

Conform condițiilor de solenoidalitate (4) înlocuim funcția $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}$ de sub integrală prin $-\frac{\partial a_z}{\partial z}$. Atunci

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_z}{\partial z}\, dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = a_z \ (x, y, z). \tag{9}$$

Prima integrală se efectuează uşor şi dă

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_x}{\partial z}\, dz = \Big[a_z\,(x, y, z)\Big]_{z_0}^{z} = a_z\,(x, y, z) - a_z\,(x, y, z_0).$$

Atunci obţinem din (9)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} = a_z\,(x, y, z_0).$$

Deoarece avem o singură ecuaţie de legătură între f_1 şi f_2 şi două funcţii necunoscute, una din ele poate fi aleasă arbitrar.

Pentru simplitate luăm

$$f_2\,(x, y) = 0. \tag{10}$$

Atunci pentru determinarea lui f_1 (x, y.) rămâne ecuaţia

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a_z\,(x, y, z_0)\,.$$

Soluţia ei va fi

$$f_1(x,\ y), = \int_{x0}^{x} a_z\,(x, y, z_0)\, dx + \varphi(y), \tag{11}$$

în care x_0 este o valoare iniţială arbritrar aleasă pentru x. iar $\varphi\ (y)$ este o funcţie arbritrară de y, care joacă rolul unei constante arbitrare la integrarea parţială în raport cu x. Vom găsi din (8), (10) şi (11) următoarea soluţie:

$$A_x = \int_{z_0}^{z} a_y\,(x, y, z)\, dz,$$

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} a_x\,(x, y, z)\, dz + \int_{x_0}^{x} a_z\,(x, y, z_0)\, dx + \varphi\,(y),$$

$$A_z = 0.$$

Procedeul expus aici ne arată doar posibilitatea principială de a găsi una dintre soluţiile lui **A** cu toate că din punct de vedere practic, el nu este întodeauna cel mai comod. In practică, după cum vom vedea, se aplică alte procedee. In particular, folosindu-ne de teorema referitoare la soluţiile multiple ale lui **A**, alegem pe aceea pentru care

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.}$$

Această soluţie se numeşte, deobicei potenţialul vector al câmpului **a**.

§ 75. CÂMPUL DE FORMĂ GENERALĂ

Am definit câmpul de formă generală prin condiţiile

$$\text{div } \mathbf{a} = \rho\ (x, y, z),$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \omega\ (x, y, z).$$

Funcţiile ρ şi ω pot fi nule în unele puncte, dar în general ele sunt diferite de zero. In ceeace priveşte câmpul de formă generală, ne vom limita la expunerea, fără demonstraţie, a teoremei, care arată că un astfel pe câmp poate fi descompus într'o sumă de două câmpuri vectoriale

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

dintre care unul este potenţial, iar celălalt solenoidal, adică

$$\text{rot } \mathbf{a}_1 = 0; \qquad \text{div } \mathbf{a}_2 = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{a}_1 = \rho\ (x, y, z); \qquad \text{rot } \mathbf{a}_2 = \omega\ (x, y, z).$$

Câmpul potenţial şi solenoidal reprezintă, după cum am văzut mai sus, tipurile cele mai simple de câmpuri vectoriale, din care se poate forma un câmp de formă generală prin suprapunerea lor. Vezi detalii în capitolul XIII.

§ 76. NOŢIUNEA DE DIFERENŢIERE ÎN SPAŢIU

Intre operatorii grad φ, div **a** şi rot **a** există o mare deosebire atât în ceeace priveşte condiţiile care determină operaţiile cu aceştia, cât şi în ceeace priveşte expresiile lor formale. Se poate, totuşi, ca toate aceste operaţii să fie reunite din punct de vedere formal sau matematic *într'o singură noţiune generală a aşa numitei „diferenţieri în spaţiu"*, care poate fi pusă într'o anumită legătură cu noţiunea obişnuită de diferenţiere din analiza scalară. Deoarece ideea diferenţierii în spaţiu începe să apară din ce în ce mai des în manualele de ştiinţe aplicate, socotim necesar să explicăm şi în cursul de faţă această noţiune.

O astfel de unificare a celor mai importante noţiuni ale teoriei câmpului într'o singură noţiune generală este preţioasă prin ea însăşi, deoarece răspunde unei cerinţe naturale a matematicii în ceeace priveşte generalizările. Pe de altă parte, este esenţială şi deoarece, atât câmpul scalar, cât şi cel vectorial, după cum am văzut în § 53, pot fi privite drept o generalizare în domeniul vectorial a importantei noţiuni despre funcţii, întâlnită pentru prima oară în analiza mărimilor scalare.

Fie determinat în domeniul Ω un câmp oarecare, care poate fi atât scalar φ (**r**), cât şi vectorial **a** (**r**) şi fie M (**r**) punctul considerat (fig. 147).

La deplasarea într'un punct oarecare infinit vecin M(**r** + Δ**r**) funcţia, care reprezintă câmpul, va căpăta o creştere oarecare (scalară sau geometrică). Se poate pune aici chestiunea vitezei de variaţie a funcţiei la trecerea dela punctul dat spre punctele vecine, analog modului în care pentru funcţia scalară $f(x)$ se pune chestiunea vitezei de variaţie în legătură cu variaţia argumentului x.

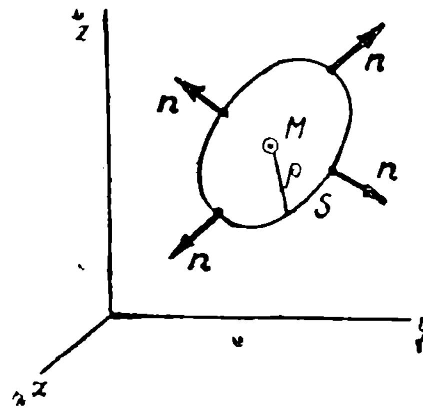


Fig. 147

Pentru ca să ţinem cont de posibilitatea variaţiilor în spaţiu *după toate direcţiile*, ieşind din punctul M, să-l înconjurăm pe acesta cu o suprafaţă mică închisă S, care să cuprindă un volum mic oarecare ΔV şi să construim versorul normal **n** în toate punctele lui S. In fiecare punct al suprafeţei putem scrie trei feluri de produse

$$\mathbf{n}\,\varphi, \ \mathbf{na} \text{ şi } [\mathbf{n}\,\mathbf{a}], \tag{1}$$

adică produsele dintre valoarea versorului normal **n** într'un punct oarecare al suprafeţei prin valoarea corespunzătoare a funcţiei studiate în acest punct.

Primul şi al treilea dintre ele reprezintă nişte vectori, iar al doilea un scalar; toate trei sunt legate de punctele suprafeţei S. Descompunem suprafaţa S în elementele dS formând *pentru fiecare din ele* expresiile

$$\mathbf{n}\,\varphi dS, \ \mathbf{na}dS \text{ şi } [\mathbf{na}]\,dS, \tag{2}$$

în care valorile mărimilor din (1) sunt calculate pentru un punct oarecare arbritrar ales pe fiecare din elementele dS.

Dacă vom alcătui acum integralelele expresiilor (2), extinse la suprafaţa S şi vom lua raportul dintre integrală şi volumul corespunzător ΔV, cuprins în interiorul suprafeţei, obţinem

$$\frac{\oint_S \mathbf{n}\,\varphi\, dS}{\Delta V}, \quad \frac{\oint_S \mathbf{na}\, dS}{\Delta V} \text{ şi } \frac{\oint_S [\mathbf{na}]\, dS}{\Delta V}.$$

Să facem acum ca volumul ΔV şi suprafaţa S să tindă către punctul M, astfel încât toate distanţele infinit mici φ dela punctul M până la oricare dintre punctele suprafeţei S să tindă simultan către zero. Atunci, după cum vom vedea mai departe, fiecare dintre raporturile (3) va tinde, în general, către o limită oarecare bine determinată, pe care o vom numi *derivata* *în spațiu* a funcției corespunzătoare φ (**r**) sau **a** (**r**) în punctul M, convenind să o notăm astfel:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\,\varphi\, dS}{\Delta V} = \nabla\,\varphi; \tag{4}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{na}\, dS}{\Delta V} = \nabla\,\mathbf{a}; \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S [\mathbf{na}] dS}{\Delta V} = [\nabla\,\mathbf{a}\,]. \tag{6}$$

Simbolul ∇ îl vom numi simbolul diferențierii în spațiu; vom demonstra ulterior că el nu reprezintă altceva decât operatorul nabla.

Derivatele (4) și (6), prin însăși definiția lor ne vor da niște vectori, deoarece integrala extinsă la suprafața S, fiind o sumă a elementelor vectoriale $\mathbf{n}\,\varphi\, dS$ și $[\mathbf{na}]\, dS$ ne va da un vector oarecare, ΔV de la numitor fiind un scalar.

In ceeace privește derivata (5) ea va reprezenta o mărime oarecare scalară, deoarece și numărătorul și numitorul din membrul stâng al expresiei ei sunt scalari. După cum se vede, funcția scalară φ (**r**) admite o singură derivată spațială, deoarece din factorii **n** și φ se poate forma un singur fel de produse $\mathbf{n}\varphi$ în timp ce pentru funcția vectorială **a**(**r**) sunt posibile două feluri de produse **na** și [**na**] și deci două derivate

Urmează să demonstrăm că expresia (4) ne dă tocmai grad φ, iar expresiile (5) și (6) sunt egale respectiv cu div **a** și rot **a**; prin aceasta vom demonstra și coincidența simbolului ∇, introdus de noi, cu operatorul nabla, precum și posibilitatea de a efectua cu operatorul nabla aceleași operații ca și cu un vector.

Inainte de toate, aceasta este evident pentru (5), deoarece definiția divergenței, dată de noi mai sus, coincide în întregime cu definiția (5) din acest paragraf.

Rămâne să demonstrăm echivalența lui (4) și (6) cu grad φ și rot **a**.

Ar urma să demonstrăm, în prealabil, însăși existența limitelor (4) — (6) și să determinăm condițiile în care ele există. Aceasta este necesar, deoarece în numitorul celor trei formule apare mărimea ΔV, care, în genere, este un infinit mic de ordinul trei față de ρ, ordinul mărimilor dela numărător fiind greu de stabilit, fără o cercetare amănunțită.

Nu vom da aici demonstrația, aceasta fiind prea lungă, mărginindu-ne doar la indicația că în unele condiții, destul de generale, referitoare la funcțiunile φ și **a**, condiții corespunzând acelora de care ne-am folosit în tot cursul nostru, limitele (4) și (6) există și nu depind de forma suprafeței S, nici de natura convergenței către punctul M, cu condiția ca toate dimensiunile lineare ale lui ρ să tindă concomitent către zero.

Să considerăm drept suprafață S suprafața paralelipipedului infitnit mic, având muchiile Δx, Δy și Δz, paralele cu axele de coordonate (fig 148) și să situăm punctul M în centrul lui de simetrie.

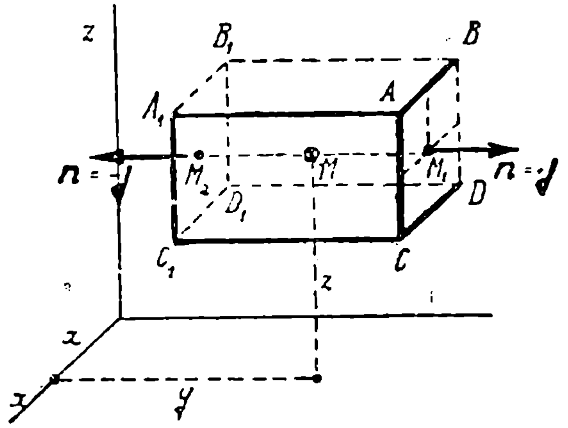


Fig. 148

Să calculăm pentru el $\oint_S \mathbf{n}\,\varphi\,dS$.

Vom avea pentru suprafața $ABCD$ perpendiculară pe axa y

$$\mathbf{n}\varphi\,\Delta S = \mathbf{j}\varphi\left(x,\ y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)\cdot \Delta x\,\Delta z.$$

Insă

$$\varphi\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) = \varphi\,(x, y, z) + \frac{\Delta y}{2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_1,$$

unde α_1 este un infinit mic de ordin superior lui Δy. Atunci

$$\mathbf{n}\varphi\,\Delta\,S_1 = \mathbf{j}\,\varphi\,\Delta x\,\Delta z + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \mathbf{j}\,\alpha_1\,\Delta x\,\Delta z. \qquad (7)$$

Pentru suprafața $A_1B_1C_1D_1$ simetrică cu $ABCD$, obținem o expresie analoagă, cu singura deosebire că normala $+\,\mathbf{j}$ trebue înlocuită cu $-\mathbf{j}$, iar creșterea $+\,\frac{\Delta y}{2}$ prin $-\,\frac{\Delta y}{2}$

$$\mathbf{n}\,\varphi\,\Delta\,S_2 = -\,\mathbf{j}\,\varphi\cdot\Delta x\,\Delta z + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z - \mathbf{j}\,\alpha_2\,\Delta x\,\Delta z, \qquad (7')$$

Suma expresiilor (7) și (7') ne dă pentru ambele suprafețe perpendiculare pe axa y

$$\mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\Delta\,V + \mathbf{j}\,\varepsilon_1,$$

în care $\varepsilon_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)\, \Delta x\, \Delta z$ este un infinit mic de ordin superior lui trei. In mod analog, pentru cele două suprafeţe perpendiculare pe axa x obţinem

$$\mathbf{i}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta V + \mathbf{i}\, \varepsilon_2$$

iar pentru ultima pereche de suprafeţe, perpendiculare pe axa z

$$\mathbf{k}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta V + \mathbf{k}\, \varepsilon_3.$$

Prin urmare, avem pentru întreaga suprafaţă a paralelipipedului S

$$\oint_S \mathbf{n}\varphi\, dS = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\Delta V + (\varepsilon_2 \mathbf{i} + \varepsilon_1 \mathbf{j} + \varepsilon_3 \mathbf{k}).$$

Impărţind prin ΔV şi trecând la limită pentru $\Delta V \to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\varphi\, dS}{\Delta V} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{8}$$

deoarece

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\varepsilon_2}{\Delta V}\mathbf{i} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta V}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon_3}{\Delta V}\mathbf{k}\right) = 0,$$

ceeace trebuia demonstrat.

In mod analog vom calcula si expresia (6) pentru acelaş volum al paralelipipedului din fig. 148. Fie

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

o funcţie vectorială de punct. Avem atunci pentru suprafaţa $ABCD$

$$[\mathbf{na}]_{M_1} = [\mathbf{ja}]_{M_1} = \left\{-\mathbf{k} a_x + \mathbf{i} a_z\right\}_{M_1} = -\mathbf{k} a_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) + \\ + \mathbf{i}\, a_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right).$$

Desvoltând funcţiile după formula lui Taylor în raport cu puterile crescătoare ale lui $\frac{\Delta y}{2}$ şi oprindu-ne la termenii infinit mici de ordinul întâi, obţinem

$$[\mathbf{na}]_{M_1} = -\mathbf{k}\, a_x + \mathbf{i} a_z + \frac{\Delta y}{2}\left\{-\mathbf{k}\, \frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{i}\, \frac{\partial a_z}{\partial y}\right\},$$

în care funcţiile a_x şi a_z precum şi derivatele lor au fost calculate pentru punctul M.

De aici avem pentru suprafaţa $ABCD$

$$[\mathbf{na}]_{M_1}\Delta S_1 = (-\mathbf{k}a_x + \mathbf{i}\,a_z)\,\Delta x\Delta z + \frac{1}{2}\,\Delta V\left\{-\mathbf{k}\,\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{i}\,\frac{\partial a_z}{\partial y}\right\} \quad (9)$$

Pentru suprafaţa opusă obţinem o expresie analoagă, înlocuind versorul normal $\mathbf{n}$ prin $-\mathbf{j}$ şi $+\frac{\Delta y}{2}$ prin $-\frac{\Delta y}{2}$,

$$[\mathbf{na}]_{M_2}\Delta S_2 = (+\mathbf{k}a_x - \mathbf{i}a_z)\,\Delta x.\,\Delta z + \frac{1}{2}\,\Delta V.\left\{-\mathbf{k}\,\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{i}\,\frac{\partial a_z}{\partial y}\right\} \quad (9')$$

Insumând (9) şi (9′) obţinem pentru ambele suprafeţe perpendiculare pe axa y expresia

$$\Delta V.\left\{-\mathbf{k}\,\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{i}\,\frac{\partial a_z}{\partial y}\right\}$$

cu aproximaţia unor infiniţi mici de ordin superior.

Permutând ciclic versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ şi literele x, y, z obţinem expresii analoage pentru perechile de suprafeţe perpendiculare pe axa x şi axa z. De aici obţinem pentru întreaga suprafaţă a paralelipipiedului suma

$$\oint_S [\mathbf{na}]dS = \Delta V\left\{-\mathbf{k}\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{i}\,\frac{\partial a_z}{\partial y} - \mathbf{i}\,\frac{\partial a_y}{\partial z} + \mathbf{j}\,\frac{\partial a_x}{\partial z} - \mathbf{j}\,\frac{\partial a_z}{\partial x} + \mathbf{k}\frac{\partial a_y}{\partial x}\right\}.$$

Impărţind prin ΔV şi trecând la limită, obţinem termenii

$$\lim_{\Delta V \to 0}\frac{\oint_S [\mathbf{na}]\,dS}{\Delta V} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \mathrm{rot}\ \mathbf{a}. \quad (10)$$

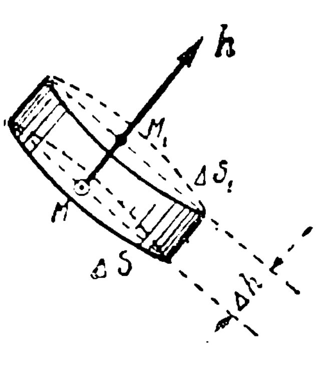


Fig. 149

adică ceeace trebuia demonstrat.

Să deducem şi proprietăţile fundamentale ale gradientului şi rotorului cu ajutorul metodei diferenţierii spaţiale.

Să considerăm în câmpul scalar al funcţiei φ un punct oarecare M şi versorul corespunzător $\mathbf{h}$ având o direcţie oarecare (fig. 149). Să ducem prin punctul M o suprafaţă circulară infinit mică ΔS, perpendiculară pe versorul $\mathbf{h}$ şi să construim pe ea un cilindru cu generatoarele paralele cu $\mathbf{h}$. Alegem mărimea Δh în aşa fel încât ea să fie un infinit mic de *ordin superior* faţă de raza ρ a cercului, luat drept suprafaţă

ΔS. Vom putea neglija atunci mărimea suprafeței laterale a cilindrului față de mărimea ΔS a ariei bazei lui. Să formăm integrala $\oint_\sigma \mathbf{n}\varphi \cdot d\sigma$, extinsă la întragea suprafață σ a cilindrului și să luăm raportul ei către volumul cilindrului $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta h$. Atunci, conform celor demonstrate, gradientul funcției φ în punctul M se definește astfel:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_\sigma \mathbf{n}\, \varphi\, d\sigma}{\Delta V}. \tag{11}$$

Insă

$$\oint_\sigma \mathbf{n}\varphi d\sigma = -\varphi(M)\, \mathbf{h} \cdot \Delta S + \varphi(M_1)\, \mathbf{h} \cdot \Delta S = \{\varphi(M_1) - \varphi(M)\}\, \mathbf{h} \cdot \Delta S,$$

căci neglijăm acea parte a integralei care se referă la suprafața laterală a cilindrului din motivele indicate mai sus.

Atunci egalitatea (11) *ia forma*

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\{\varphi(M_1) - \varphi(M)\}\Delta S}{\Delta S \cdot \Delta h}\, \mathbf{h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta h}\, \mathbf{h}.$$

Insă

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta h} = \frac{\partial \varphi}{\partial h},$$

ceia ce reprezintă tocmai derivata funcției φ în raport cu direcția $\mathbf{h}$.

Așa dar

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial h}\, \mathbf{h}.$$

Inmulțind scalar ambele părți ale acestei egalități cu versorul $\mathbf{h}$, obținem definitiv

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \mathbf{h} \operatorname{grad} \varphi, \tag{12}$$

cu alte cuvinte, *derivata funcției φ în raport cu o direcție oarecare* $\mathbf{h}$ *este egală cu proiecția gradientului pe această direcție*. Aceasta este proprietatea fundamentală a gradientului.

Proprietățile rotorului. Fie în punctul M al câmpului vectorial o suprafață ΔS limitată de conturul C având un sens de parcurgere bine determinat (fig. 150). Fie $\mathbf{h}$ vectorul normal suprafeței, legat de sensul de parcurgere al conturului după regula sistemului dextrotors. Să construim pe suprafaţa ΔS un cilindru infinit mic, având generatoarele paralele cu **h**. Conform celor demonstrate, avem pentru rotorul din punctul (M)

$$\mathbf{W} = \text{rot}\,\mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_\sigma [\mathbf{n}\,\mathbf{a}]\,d\sigma}{\Delta V} \qquad (13)$$

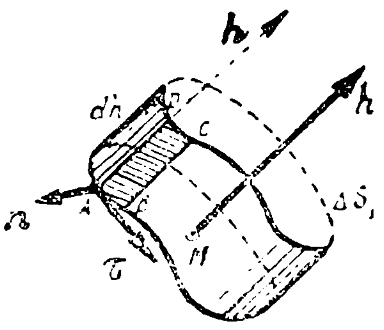


Fig. 150

în care integrala este extinsă la întreaga suprafaţă σ a cilindrului. Pentru a găsi proiecţia rotorului pe direcţia **h**, vom înmulţi scalar cu **h** ambele părţi ale egalităţii (13), Atunci

$$W_h = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{h}\oint_\sigma [\mathbf{na}]\,d\sigma}{\Delta V} =$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_\sigma \mathbf{h}[\mathbf{na}]\,d\sigma}{\Delta V}. \qquad (14)$$

L-am introdus pe **h** sub semnul integralei, întrucât este un factor constant. Pe suprafeţele ΔS şi ΔS_1, adică pe bazele cilindrului, produsul mixt $\mathbf{h}[\mathbf{na}]$ este nul, căci normala **n** este paralelă cu **h** în toate punctele acestora. Deaceea ne rămâne în numărătorul lui (14) numai integrala extinsă la *suprafaţa laterală a cilindrului.* Pentru a calcula, să efectuăm permutarea ciclică a factorilor în fiecare din elementele integralei

$$\mathbf{h}[\mathbf{na}]\,d\sigma = \mathbf{a}[\mathbf{hn}]\,d\sigma \qquad (15)$$

Insă produsul $[\mathbf{hn}]$ ne dă, după cum reiese din figură, versorul tangent conturului C în punctul A, iar elementul de suprafaţă $d\sigma$ poate fi exprimat cu ajutorul lui $dh\,dl$ în care dh este înălţimea cilindrului, iar $dl = AB$ este un element de lungime a conturului. Prin urmare, expresia (15) ia forma

$$\mathbf{a}\tau\,dh\cdot dl = \mathbf{a}d\mathbf{l}\cdot dh\cdot$$

căci produsul $\tau\,dl$ reprezintă tocmai $d\mathbf{l}$. Astfel, egalitatea (14) poate fi scrisă acum

$$W_h = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_c \mathbf{a}d\mathbf{l}\cdot dh}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{dh\oint_c \mathbf{a}d\mathbf{l}}{\Delta V}$$

sau, simplificând prin dh

$$W_h = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \mathbf{a} d\mathbf{l}}{\Delta S}. \tag{16}$$

Aceasta este tocmai *proprietatea fundamentală a rotorului, care constă în aceea că proiecția lui în raport cu o direcție oarecare* **h** *este egală cu limita raportului circulației de-a-lungul conturului suprafeței ortogonale direcției* **h**, *către mărimea suprafeței, când aceasta din urmă converge către punctul* M.

Din exemplele de mai sus reiese că metoda diferențierii spațiale ne dă posibilitatea de a deduce pe cale simplă cele mai importante proprietăți ale caracteristicelor diferențiale ale câmpului.

§ 77. GENERALIZAREA FORMULEI DE DIFERENȚIERE ÎN SPAȚIU

Asemănător felului în care am dedus operațiile grad φ, div **a** și rot **a** din noțiunea de diferențiere spațială, putem deduce și operațiile $\mathbf{v}\nabla\cdot\varphi$ și $\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{a}$ din egalitățile

$$\mathbf{v}\nabla\cdot\varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{v}\,\mathbf{n}\,\varphi dS}{\Delta V} \tag{1}$$

și

$$\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} = \frac{\oint_S \mathbf{v}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} dS}{\Delta V}. \tag{2}$$

Putem demonstra următoarea teoremă generală. Să considerăm o expresie algebrică oarecare $F(\mathbf{n})$, lineară și omogenă, în raport cu **n**, cu alte cuvinte o expresie care se bucură de proprietățile:

$$F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = F(\mathbf{n}_1) + F(\mathbf{n}_2);$$
$$F(\lambda\mathbf{n}) = \lambda F(\mathbf{n}).$$

In compoziția acestei expresii pot intra, înafara lui **n**, diferiți scalari variabili sau vectori, sau chiar scalari și vectori împreună. Să concepem o expresie analoagă $F(\nabla)$ înlocuind vectorul **n** prin simbolul ∇, în care ∇ va fi considerat drept operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

convenind, așa cum am făcut-o la timpul său, în capitolul *X*, că operatorul nabla acționează numai asupra mărimilor variabile care se află în dreapta lui și nu acționează asupra mărimilor situate înaintea lui, cu alte cuvinte în stânga lui. Atunci expresia $F(\nabla)$ va reprezenta rezultatul unei operații diferențiale oarecare, care se efectuează asupra mărimilor variabile care intră în compoziția ei. In aceste condiții putem demonstra că există următoarea relație

$$F(\nabla) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S F(\mathbf{n})\, dS}{\Delta V}, \tag{3}$$

în care $\mathbf{n}$ este versorul normal exterior suprafeței S, care înconjoară volumul ΔV din jurul punctului M. Formula (3) este cea mai generală formulă a diferențierei spațiale; toate formulele deduse până acum fiind cazuri particulare ale ei.

In concordanță cu condiția impusă mai sus operatorului nabla, va trebui să considerăm *constante* în cursul integrării toate acele mărimi din membrul drept, care în membrul stâng al formulei (3) stau înaintea lui ∇.

Să dăm câteva exemple.

Dacă $F(\mathbf{n}) = [\mathbf{na}]$ în care $\mathbf{a}$ este un vector variabil atunci

$$[\nabla \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S [\mathbf{na}]\, dS}{\Delta V} \tag{4}$$

Dacă $F(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\varphi$, în care φ este un scalar variabil atunci

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\varphi\, dS}{\Delta V}. \tag{5}$$

Dacă $F(\mathbf{n}) = \mathbf{vn} \cdot \mathbf{a}$, în care $\mathbf{v}$ este un vector constant, iar $\mathbf{a}$ un vector variabil atunci

$$\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} \cdot = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{v}_c \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}\, dS}{\Delta V}. \tag{6}$$

Dacă $F(\mathbf{n}) = \mathbf{vn} \cdot \mathbf{a}$ în care $\mathbf{v}$ și $\mathbf{a}$ sunt vectori variabili, atunci

$$\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{nv} \cdot \mathbf{a}\, dS}{\Delta V}, \tag{7}$$

în care prin operația $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$, conform convenției noastre, vom înțelege următoarea operație

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial (v_x \mathbf{a})}{\partial x} + \frac{\partial (v_y \mathbf{a})}{\partial y} + \frac{\partial (v_z \mathbf{a})}{\partial z} = \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Diferența între operațiile $\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{a}$ și $\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ constă în aceea că, în prima, operatorul acționează numai asupra lui **a**, iar în a doua, el acționează și asupra lui **v** și asupra lui **a**, deoarece ambele mărimi din operația a doua stau după semnul ∇. In membrul drept al formulelor (7) și (6) deosebirea constă în aceea că în formula (6) **v** este considerat constant în procesul de integrare, iar în formula (7) este variabil. Demonstrația formulei generale (3) poate fi găsită în cursurile complecte de calculul vectorial.[1] Formula (3) servește drept bază pentru metoda simbolică și pentru acele regule ale ei, care au fost prezentate în capitolul *X*, ca regule deduse pe cale experimentală.

Operațiile diferențiale de ordinul doi pot fi deasemenea definite cu ajutorul diferențierii spațiale, numai că în locul primului simbol ∇, socotind din partea stângă, trebue pus în integrală versorul **n**.[2])

De exemplu

$$\left[\nabla[\nabla\mathbf{a}]\right] = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint\limits_S \left[\mathbf{n}\,[\nabla\,\mathbf{a}]\right] dS}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint\limits_S [\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}]dS}{\Delta V}, \tag{8}$$

sau de exemplu

$$\nabla\nabla\varphi = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint\limits_S \mathbf{n}\nabla\varphi dS}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint\limits_S \mathbf{n}\ \mathrm{grad}\ \varphi dS}{\Delta V}, \tag{9}$$

In particular, observând că $\mathbf{n}$ grad φ nu este altceva decât $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ din formula (9) se poate obține o astfel de expresie pentru laplacianul funcției φ:

$$\triangle\varphi = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS}{\Delta V}. \tag{10}$$

Aceeași formulă s'ar fi putut obține și altfel, plecând dela formula lui Green [vezi formula (4) § 69]

$$\int\limits_V \triangle\varphi\, dV = \oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

1) Vezi, de exemplu, Kocin „Calculul vectorial și elemente de calcul tensorial" 1934, pag. 156—160.

2) Mai detaliat, vezi, de exemplu, Ignatowsky, „Die Vektoranalysis" 1921, Bd. II, pag. 27—29.

Aplicând-o la volumul infinit mic ΔV format împrejurul punctului studiat M, se poate scrie cu aproximația unor infiniți mici de ordin superior

$$(\Delta\varphi)_M \quad \Delta V = \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS + \varepsilon.$$

De aici, împărțind cu ΔV și trecând la limită când volumul ΔV tinde către punctul M, vom obține formula (10).

Capitolul XII

OPERAȚIILE DIFERENȚIALE IN COORDONATE CURBILINII

§ 78. NOȚIUNEA GENERALĂ DE COORDONATE CURBILINII

Adesea este util să se studieze câmpurile, nu într'un sistem rectangular de coordonate carteziene, ci în alte coordonate, care sunt mai convenabile problemei (cilindrice, sferice, eliptice, etc.). Deaceea este necesar să avem formulele, care exprimă în noul sistem invarianții câmpului.

In sistemul cartesian, poziția unui punct se determină cu ajutorul a trei numere x, y și z, care exprimă distanțele lui dela planele de coordonate. Cercetând ecuația

$$x = \text{const} = C_1,$$

ne convingem că pentru diferite valori ale constantei C_1, ecuația reprezintă o familie de plane paralele cu yOz.

In mod analog ecuațiile :

$$y = \text{const} = C_2 \text{ și } z = \text{const} = C_3$$

reprezintă familii de plane paralele respectiv cu zOx și xOy (fig. 151). Faptul că punctul M este determinat prin trei numere

$$x = a, \; y = b, \; z = c$$

poate fi interpretat geometric, ca o determinare a punctului prin intersecția a trei plane, ce fac parte din cele trei familii de plane corespunzătoare valorilor parametrilor

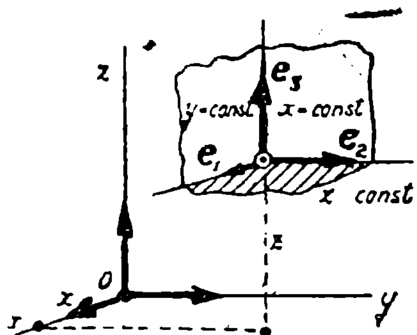


Fig. 151

$$C_1 = a, \; C_2 = b \; și \; C_3 = c.$$

In sistemul de coordonate cilindrice (fig. 152) poziţia punctului M este definită deasemenea prin trei numere ρ, φ şi z, dintre care primul exprimă distanţa punctului dela axa z, al doilea — unghiul diedru (azimutul punctului) dintre planul origină (xOz de pe figură) şi planul meridional P dus prin axa z şi punctul studiat şi în sfâşit, al treilea număr exprimă „supraînălţarea" z a punctului M faţă de un plan oarecare (xOy) luat ca plan de bază. Şi aici putem stabili trei familii de „suprafeţe de coordonate".

$$\rho = \text{const}; \quad \varphi = \text{const}; \quad z = \text{const}.$$

Prima dintre ele reprezintă familia cilindrilor coaxiali având-l pe z drept axă comună, a doua — familia semiplanelor meridionale care trec prin axa z şi, în sfârşit, a treia — familia planelor perpendiculare pe axa z. Determinarea punctului M cu ajutorul a trei numere $\rho = a$, $\varphi = b$ şi $z = c$ poate fi interpretată geometric, ca o determinare a punctului prin intersecţia a tre su rafeţe de coordonate aparţinând celor trei familii. Spre deosebire de sistemul cartesian, în care toate suprafeţele de coordonate reprezintă plane, în sistemul cilindric există o familie de plane curbilinii (cilindri). Dacă am alege axele de coordonate cartesiene ca în figură, se pot stabili următoarele formule de transformare

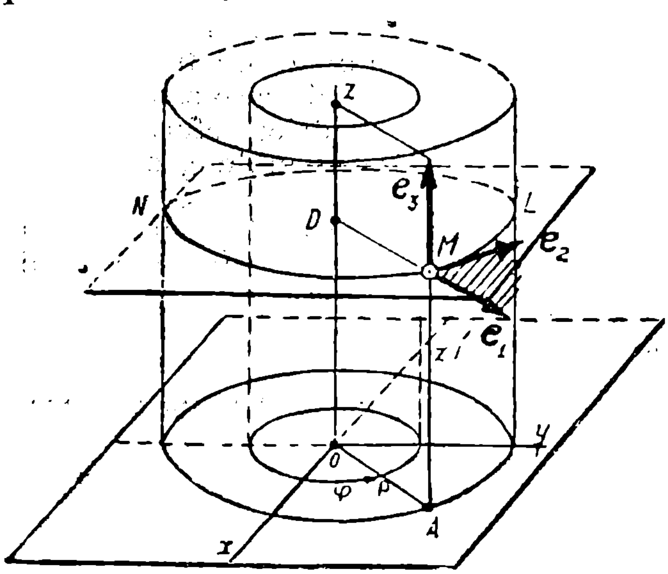


Fig. 152

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

şi

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ z &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

In sistemul sferic, poziţia unui punct este determinată de mărimea vectorului de poziţie r, de longitudinea φ şi de latitudinea θ (fig.153).

Familiile de suprafeţe de coordonate sunt:

$$r = \text{const}; \quad \varphi = \text{const}; \quad \theta = \text{const}.$$

Prima dintre ele reprezintă familia de suprafețe de sfere concentrice, a doua este familia semiplanelor meridionale ce trec prin axa z și, în sârșit, a treia este familia de suprafețe conice a cărei axă comună o constitue axa z. Punctul M de coordonate

$$r = a, \varphi = b \text{ și } \theta = c$$

este determinat și aici ca un punct de intersecție a trei suprafețe care corespund valorilor a, b și c. Dintre toate supra-

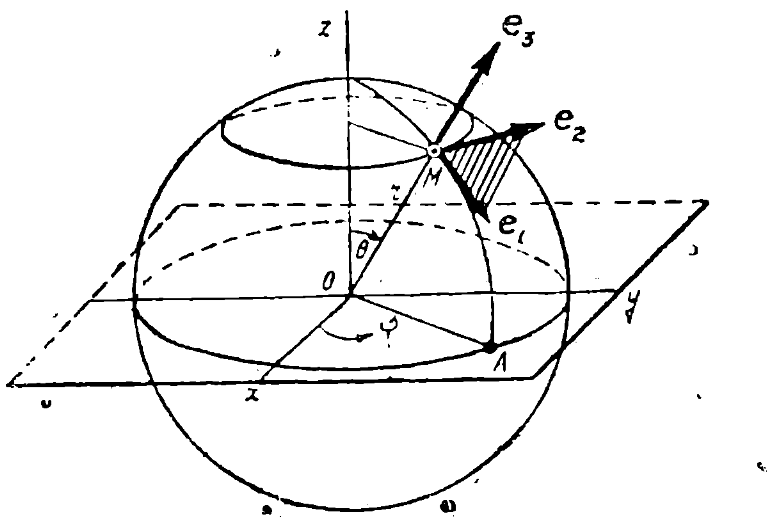


Fig. 153

fețele, cele sferice și conice sunt curbilinii. Formulele de transformare sunt

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z} \\ \theta &= \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

In general, fie determinate printr'un procedeu oarecare trei familii de suprafețe ce se intercalează reciproc

$$q_1 = \text{const} \,;\; q_2 = \text{const} \,;\; q_3 = \text{const}$$

care corespund respectiv valorilor unor parametri oarecare q_1, q_2 și q_3. Prin fiecare punct M al spațiului trece câte o singură suprafață din fiecare familie. Atunci poziția punctului poate fi determinată prin intersecţia acestor trei suprafeţe sau, ceeace este acelaş lucru, prin fixarea a trei valori numerice corespunzătoare q_1, q_2 şi q_3 (fig. 154). Cantităţile q_1, q_2 şi q_3 să le numim coordonate ale punctului M, iar cele trei familii de suprafeţe — suprafeţe de coordonate ale sistemului curbiliniu de coordonate dat.

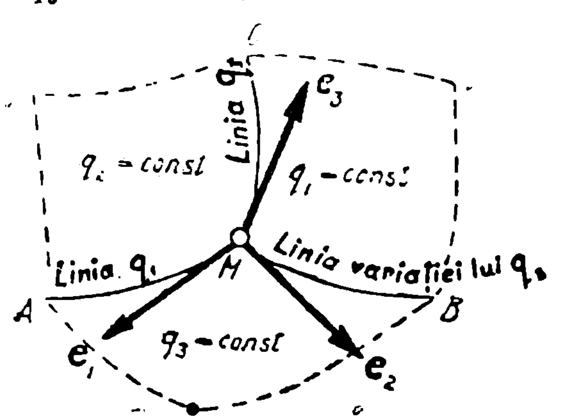


Fig. 154

Liniile de intersecţie ale suprafeţelor între ele le vom numi linii de coordonate ale sistemului nostru.

In mod concret, linia de intersecţie a planelor q_2= const şi q_3= const să o numim „linia de variaţie a lui q_1" sau simplu „linia q_1". Pe această linie se va deplasa punctul M, dacă q_2 şi q_3 vor rămâne constanţi, variind doar q_1.

Analog se determină şi „linia q_2" şi „linia q_3" (vezi fig. 154). Astfel, în sistemul cilindric liniile ρ vor fi reprezentate de către semidreptele DM, perpendiculare pe axa z, liniile φ — de cercurile ML, şi liniile z — de dreptele paralele cu axa z. In sistemul sferic, liniile r vor fi semidreptele OM ce pleacă din origină, liniile φ — cercurile ML şi liniile θ — semicercurile meridionale.

Să alegem drept sens pozitiv al liniei de coordonate q_i, pe acela în care se deplasează punctul M, atunci când q_i creşte. Formulele ce urmează le presupunem cunoscute

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(q_1, q_2, q_3),\\ y &= y\,(q_1, q_2, q_3),\\ z &= z\,(q_1, q_2, q_3), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1\,(x, y, z),\\ q_2 &= q_2\,(x, y, z),\\ q_3 &= q_3\,(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

aceste formule exprimând coordonatele cartesiene x, y şi z în funcţie de q_1, q_2 şi q_3 şi invers.

Funcţiile (5) şi (6) le presupunem uniforme, astfel ca fiecărui ansamblu de valori x, y şi z să-i corespundă un singur ansamblu de valori q_i şi invers [1]).

Să construim în punctul M trei versori unitari $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}_3$

---

1) Inafară de aceasta, vom presupune ulterior că funcţiile (5) şi (6) sunt continue şi derivabile.

tangenţi liniilor de coordonate q_i în sensul pozitiv, denumindu-i versori fundamentali *în punctul dat.*

In sistemul cartesian, ei sunt *constanţi pentru toate punctele spaţiului* fiind egali cu versorii fundamentali **i, j** şi **k**. In orice alt sistem, *ei îşi vor schimba, în general,* direcţiile, în timpul deplasării dintr'un punct M în altul.

In fiecare punct, totalitatea celor trei versori $\mathbf{e}_i$ va forma un triedru mobil.

Convenim să luăm întotdeauna versorii $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}_3$ astfel încât ansamblul lor să formeze un fascicol drept. Sistemul de coordonate se numeşte *ortogonal* dacă în fiecare punct M versorii $\mathbf{e}_i$ formează unul cu altul unghiuri drepte; rezultă că liniile şi suprafeţele de coordonate într'un asemenea sistem vor fi deasemenea ortogonale. Pe viitor, nu vom considera decât sisteme ortogonale.

Deplasări elementare. Fie $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al punctului M în raport cu ordinea O. La fel cum în sistemul cartesian, $\mathbf{r}$ este o funcţie de coordonate x, y, z, tot aşa şi în sistemul curbiliniu, el va fi o funcţie oarecare de scalarii q_i, adică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (q_1, q_2, q_3).$$

Imprimăm scalarului q_1 o deplasare elementară dq_1, lăsând valorile q_2 şi q_3 neschimbate. Punctul M se va deplasa pe linia q_1 care reprezintă hodograful vectorului $\mathbf{r}$ pentru variaţia argumentului q_1, q_2 şi q_3 fiind constanţi. Valoarea deplasării corespunzătoare variaţiei dq_1 va fi exprimată prin arcul $ds_1 = MA$ (fig. 155).

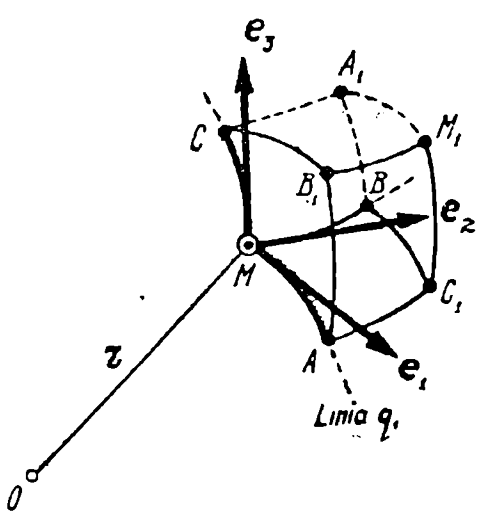


Fig. 155

Deplasările analoage MB şi MC dealungul liniilor q_2 şi q_3, sub influenţa creşterilor respective dq_2 şi dq_3 să le însemnăm prin ds_2 şi ds_3. Deplasarea totală ds a punctului, din poziţia M în M_1, sub acţiunea simultană a tuturor celor trei creşteri dq_1, dq_2 şi dq_3 poate fi privită (cu aproximaţia unor infiniţi mici de ordin superior) ca diagonala MM_1 a paralelipipedului „curbiliniu" MAC_1M_1C. Acest paralelipiped este format din trei plane de coordonate, duse prin punctul M şi alte trei plane infinit apropiate care trec prin punctul M_1 $(q_1+dq_1, q_2+dq_2, q_3+dq_3)$.

Deoarece paralelipipedul este ortogonal, reiese că, cu aproximaţia unor infiniţi mici de ordin superior, putem scrie

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2, \tag{7}$$

iar volumul elementar al paralelipipedului va fi

$$dV = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3. \tag{8}$$

Calculul elementelor ds_i. In unele cazuri, elementele ds_i se determină uşor în mod direct din consideraţii geometrice. Astfel, pentru sistemul cilindric din fig. **152**, găsim:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a. pentru linia } \rho & ds_1 = d\rho, \\ \text{b. pentru linia } \varphi & ds_2 = \rho d\varphi, \\ \text{c. pentru linia } z & ds_3 = dz. \end{array}\right\} \tag{9}$$

De aici

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2 + dz^2 \tag{7'}$$

$$dV = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot dz. \tag{8'}$$

Pentru sistemul sferic din figura 153,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a. pentru linia } \theta & ds_1 = r d\theta, \\ \text{b. pentru linia } \varphi & ds_2 = r \sin\theta d\varphi, \\ \text{c. pentru linia } r & ds_3 = dr. \end{array}\right\} \tag{10}$$

De aici

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + dr^2 \tag{7''}$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \tag{8''}$$

In cazul general însă se poate pleca dela aceea că la schimbarea unei singure variabile q_1, q_2 *şi* q_3 *rămânând constanţi:*

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\, dq_1.$$

Dar derivata vectorului $\mathbf{r}$ în raport cu q_1, când $dq_1 > 0$ este orientată după versorul tangent $\mathbf{e}_1$ la linia q_1 de unde

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| e_1 = H_1 e_1,$$

în care, prin simbolul $\mathbf{H}_1$ s'a notat $\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right|$.

Deaceea

$$d\mathbf{r} = H_1\, dq_1\, \mathbf{e}_1.$$

De aici, deoarece $ds_1 = \left| d\mathbf{r} \right|$, putem scrie că

$$ds_1 = H_1\, dq_1,$$

în care

$$H_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right|, \tag{11}$$

In mod analog se va exprima şi ds_2 şi ds_3. In general,

$$ds_i = H_i\, dq_i \tag{12}$$

unde

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Mărimile H_1 H_2 şi H_3 se numesc coeficienţii lui Lamé pentru un sistem dat de coordonate. Mai rămâne să arătăm calea ce trebue urmată pentru calculul lor.

Pentru aceasta se poate pleca dela egalitatea

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

De aici

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\, \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\, \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\, \mathbf{k},$$

de unde

$$H_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

In general

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i=1,2,3) \tag{13}$$

Deoarece formulele (5) care exprimă coordonatele carteziene cu ajutorul celor curbilinii q_1, q_2 şi q_3 ne sunt deobicei cunoscute, coeficienţii Lamé pot fi complect determinaţi cu ajutorul formulelor (13). Astfel, pentru coordonatele cilindrice şi sferice, coeficienţii Lamé calculaţi cu ajutorul formulei (13) au forma

Sistemul cilindric | Sistemul sferic

$$\left.\begin{array}{ll} \text{liniile } \rho: & H_\rho = 1 \\ \text{liniile } \varphi: & H_\varphi = \rho \\ \text{liniile } z: & H_z = 1 \end{array}\right\} (14) \qquad \left.\begin{array}{ll} \text{liniile } \theta: & H_\theta = r \\ \text{liniile } \varphi: & H_\varphi = r \sin\theta \\ \text{liniile } r: & H_r = 1 \end{array}\right\} (15)$$

De altfel, ele ar fi putut fi determinate uşor, în acest caz şi în mod direct, prin compararea formulelor teoretice (12) cu cele concrete (9) şi (10).

Cunoscând expresiile pentru ds_i din formula (12) se poate scrie

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 ds_3^2 \qquad (16)$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (17)$$

Să considerăm, în încheere, şi formula generală pentru $d\mathbf{r}$ referitoare la cazul variaţiei simultane a celor trei coordonate q_i.

Deoarece $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, avem după formula (12)

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \qquad (18)$$

§ 79 GRADIENTUL ŞI DIVERGENŢA

Fie $M(q_1, q_2, q_3)$ un punct oarecare al câmpului scalar corespunzător funcţiei $F(q_1, q_2, q_3)$ şi vectorul $\mathbf{G}$ gradientul acestui câmp în punctul dat (fig. 156).

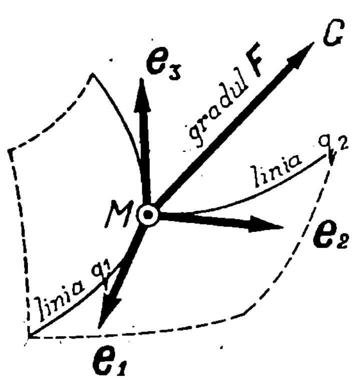


Fig. 156

Vom găsi vectorul $\mathbf{G}$ dacă vom reuşi să determinăm proiecţiile lui G_1, G_2 şi G_3 pe versorii $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}_3$ corespunzători acelui punct, deoarece

$$\mathbf{G} = \text{grad } F = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Vom găsi proiecţia lui G_1 pe direcţia $\mathbf{e}_1$, din proprietatea fundamentală a gradientului, luând derivata lui F în raport cu arcul s_1 al liniei de coordonate

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial s_1} \qquad (2)$$

Deoarece s'a dedus mai sus [formula (12)]

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}$$

avem

$$G_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_1}.$$

Vom găsi expresii analoage şi pentru celelalte două proiecţii.

De unde obţinem din (1)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \qquad (3)$$

In cazul particular, al sistemului cartesian, rezultă o formulă bine cunoscută, deoarece atunci toţi $H_i = 1$, iar $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ se transformă respectiv în $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$; iar versorii $\mathbf{e}_i$ în $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, şi $\mathbf{k}$.

Pentru coordonatele cilindrice, folosindu-ne de tabloul (14) al paragrafului precedent, putem scrie

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z, \qquad (4)$$

în care versorii $\mathbf{e}_i$ sunt înlocuiţi prin versorii concreţi $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ şi $\mathbf{e}_z$ (vezi fig. 152).

In sfârşit, *pentru coordonatele sferice*, cu ajutorul tabloului (15) scriem

$$\text{grad } F = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial r} \mathbf{e}_r. \qquad (5)$$

Divergenţa. Fie $\mathbf{a}$ (q_1, q_2, q_3) un câmp vectorial oarecare şi M (q_1, q_2, q_3) punctul considerat (vezi fig. 157). In acest punct să construim un paralelipiped elementar cu volumul

$$dV = H_1 H_2 H_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 \qquad (6)$$

şi să notăm prin S suprafaţa care-l limitează. Pentru calculul divergenţei utilizăm definiţia ei fundamentală

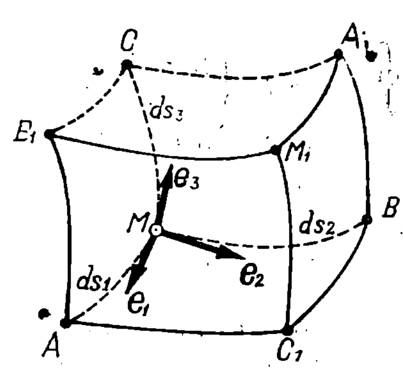


Fig. 157

$$\text{div } \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_S \mathbf{a}_n \, dS}{\Delta V}$$

Vectorul-câmp **a** îl presupunem descompus în punctul M după versorii $\mathbf{e}_i$ sub forma

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3,$$

în care proiecțiile a_i sunt funcții scalare oarecare de q_1, q_2 şi q_3.

Fluxul ce trece prin fața posterioară MBA_1C este determinat numai de componenta $a_1\,\mathbf{e}_1$ perpendiculară pe aceasta (celelalte componente fiindu-i tangente). Deoarece aria acestei fețe este egală cu $ds_2\,ds_3 = H_2\,H_3\,dq_2\,dq_3$ iar normala exterioară $\mathbf{n} = -\,\mathbf{e}_1$, fluxul prin fața posterioară va fi

$$\mathbf{a}\mathbf{n}\,dS = -\,a_1\,H_2\,H_3\,dq_2\,dq_3. \tag{7}$$

La trecerea către fața anterioară $AC_1\,M_1\,B_1$, expresia (7) îşi păstrează forma. Deoarece, însă, coordonata q_1 capătă o creştere dq_1, funcția $a_1\,H_2\,H_3$, ce intră în (7), va primi o valoare *nouă* pe fața anterioară

$$a_1\,H_2\,H_3 + \frac{\partial(a_1\,H_2\,H_3)}{\partial q_1}\,dq_1.$$

Afară de aceasta, semnul minus se transformă în plus deoarece normala exterioară îşi va schimba sensul. Prin urmare, fluxul prin fața anterioară este:

$$\left\{a_1\,H_2\,H_3 + \frac{\partial(a_1\,H_2\,H_3)}{\partial q_1}\,dq_1\right\}dq_2\,dq_3. \tag{8}$$

Suma expresiilor (7) şi (8) va da

$$\frac{\partial(a_1\,H_2\,H_3)}{\partial q_1}\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{9}$$

In mod analog se vor exprima şi fluxurile prin celelalte două perechi de fețe. Fluxul total prin întreaga suprafață S va fi (cu aproximația unor infiniți mici de ordin superior)

$$\oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\,dS = \left\{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right\}dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

Impărțind prin mărimea dV [formula (6)] şi trecând la limită, vom obține definitiv

$$\operatorname{div}\,\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right\}. \tag{10}$$

Nu este greu de observat că în sistemul cartesian în care $H_i = 1$, această formulă se transformă în formula obişnuită.

Pentru sistemul cilindric: $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$ şi $H_z = 1$. Deaceea

$$\operatorname{div}\,\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial(a_\rho\,\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(a_z\rho)}{\partial z}\right\}.$$

In ultimul termen, factorul ρ poate fi scos de sub semnul derivării. Deaceea, obţinem efectuând parantezele

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{11}$$

Pentru sistemul sferic după tabloul 15: $H_\theta = r, H_\varphi = r \sin \theta$ şi $H_r = 1$. Prin urmare

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (a_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial a_\varphi r}{\partial \varphi} + \frac{\partial (a_r r^2 \sin\theta)}{\partial r} \right\}.$$

Scoţând de sub semnul derivaţiei pe r din primul şi al doilea termen, precum şi din al treilea pe $\sin \theta$ obţinem

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (a_r r)}{\partial r}. \tag{12}$$

§ 80 EXPRESIA LAPLACIANULUI IN COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Fie $F\ (q_1, q_2, q_3)$ o funcţie scalară oarecare de q_1, q_2 şi q_3. Pentru a afla expresia laplacianului ei în coordonate q_1, q_2, q_3, să ne reamintim că laplacianul poate fi obţinut ca rezultat a două diferenţieri succesive ale funcţiei F: 1) efectuarea gradientului F şi 2) găsirea divergenţei gradientului.

$$\Delta F = \operatorname{div} \operatorname{grad} F.$$

Deaceea, scriem conform formulei (3) din paragraful precedent

$$\operatorname{grad} F = \frac{1}{H_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \tag{1}$$

După aceasta aplicăm rezultatului obţinut formula (10) corespunzătoare divergenţei în care trebue să-i înlocuim pe a_1, a_2 şi a_3 din (1) prin factorii scalari care stau pe lângă versorii $\mathbf{e}^i$. Obţinem

$$\Delta F = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot \frac{H_2 H_3}{H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot \frac{H_3 H_1}{H_2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_3} \right) \right\}. \tag{2}$$

Este uşor să recunoaştem în această formulă pe cea proprie coordonatelor cartesiene, când $H_i = 1$.

Pentru sistemul cilindric: $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$ şi $H_z = 1$. De aceea

$$\Delta F = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \rho \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \rho \right) \right\}.$$

După scoaterea factorilor nederivabili de sub semnul derivatei obţinem simplificând

$$\Delta F = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\rho\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \qquad (3)$$

Pentru sistemul sferic: $H\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$ şi $H_r = 1$.

Deaceea

$$\Delta F = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}r^2\sin\theta\right)\right\}$$

sau încă

$$\Delta F = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}r^2\right). \qquad (4)$$

§ 81. EXPRESIA ROTORULUI

Construind din nou paralelipipedul elementar (fig. 158) folosim pentru determinarea rotorului proprietatea lui fundamentală

$$\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}_n\mathbf{a} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \mathbf{a}\,d\mathbf{l}}{\Delta S}. \qquad (1)$$

Să luăm faţa MBA_1C perpendiculară pe versorul $\mathbf{e}_1$ şi să calculăm circulaţia vectorului $\mathbf{a}$ dealungul conturului MBA_1CM. Vectorul $\mathbf{a}$ în punctul M îl presupunem doscompus după versori

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3.$$

Pe porţiunea MB după formula (12) § 78 putem considera

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = H_2\,dq_2\,\mathbf{e}_2.$$

Deaceea, integrala curbilinie de pe această porţiune, datorită faptului că MB este un infinit mic, se va reduce la un singur element

$$(\mathbf{a}d\mathbf{l})_{MB} = a_2 H_2\,dq_2. \qquad (2)$$

Pe porţiunea A_1C expresia $\mathbf{a}d\mathbf{l}$ va avea o formă analoagă lui (2), doar funcţia a_2H_2 schimbându-şi valoarea (deoarece coordonata q_3 va căpăta o creştere dq_3)

$$a_2H_2 + \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}dq_3.$$

Afară de aceasta se va schimba semnul expresiei (2) deoarece sensul A_1C este contrar sensului MB. Astfel

$$(\mathbf{a}d\mathbf{l})_{A_1C} = -\left\{a_2H_2 + \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}dq_3\right\}dq_2. \qquad (3)$$

Pe porţiunea CM avem

$$d\mathbf{l} = -\overline{MC} = -d\mathbf{r} = -H_3\, dq_3 \mathbf{e}_3.$$

De unde

$$(\mathbf{a}d\mathbf{l})_{CM} = -a_3 H_3\, dq_3. \quad (4)$$

Pe porţiunea BA_1 raţionând ca mai sus, scriem din (4)

$$(\mathbf{a}d\mathbf{l})_{BA_1} = +\left\{a_3 H_3 + \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} dq_2\right\} dq_3. \quad (5)$$

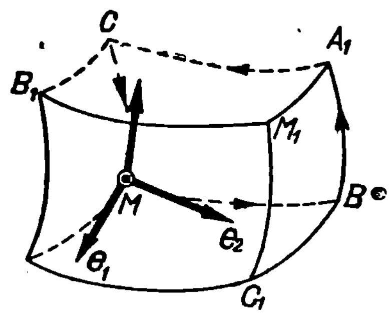


Fig. 158

Suma tuturor expresiilor (2) — (5) ne va da circulaţia pe întreg conturul MBA_1CM (cu aproximaţia unor infiniţi mici de ordin superior).

$$\int_C \mathbf{a}d\mathbf{l} = \left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right\} dq_2\, dq_3.$$

Impărţind prin aria feţii

$$\Delta S = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$$

şi trecând la limită pentru $\Delta S \to 0$ găsim, conform formulei (1) proiecţia $(\text{rot } \mathbf{a})_1$ a rotorului pe direcţia versorului $\mathbf{e}_1$, adică

$$(\text{rot } \mathbf{a})_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right\}. \quad (6)$$

In mod analog vom găsi proiecţiile lui şi de pe celelalte două direcţii

$$\left.\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{a})_2 &= \frac{1}{H_3H_1}\left\{\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1}\right\},\\ (\text{rot } \mathbf{a})_3 &= \frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Inmulţind pe (6) şi (7) respectiv cu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}_3$ şi adunând vom obţine pentru rot $\mathbf{a}$ expresiile corespunzătoare.

In particular, pentru *coordonatele cilindrice:*

$$\left.\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{a})_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},\\ (\text{rot } \mathbf{a})_\varphi &= \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho},\\ (\text{rot } \mathbf{a})_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(a_\varphi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi};\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

pentru cele sferice:

$$\left.\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{a})_\theta &= \frac{1}{r \sin\theta}\cdot\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(a_\varphi r)}{\partial r},\\ (\text{rot } \mathbf{a})_\varphi &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(a_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\theta},\\ (\text{rot } \mathbf{a})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(a_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

§ 82 EXEMPLE DE APLICAŢII ALE LAPLACIANULUI ÎN COORDONATE CURBILINII

Să rezolvăm două probleme care reprezintă aplicaţii ale laplacianului în coordonate curbilinii.

Problema 1. Să se determine câmpul electrostatic produs de sarcina Q într'un dielectric omogen; sarcina fiind uniform repartizată într'un volum sferic de rază a şi având densitatea ρ (fig. 159).

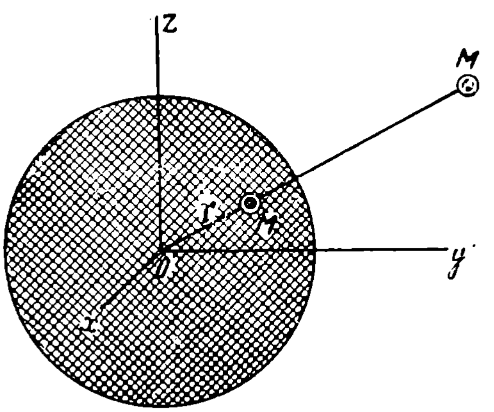


Fig. 159

Rezolvare. Am rezolvat această problemă în paragraful 58 capitolul VIII, cu ajutorul teoremei lui Gauss. Acum o vom rezolva printr'un alt procedeu şi anume vom căuta mai întâi funcţia potenţială V a acestui câmp şi apoi îl vom afla pe **E** după formula

$$\mathbf{E} = -\,\text{grad } V \qquad (1)$$

Să studiem două cazuri. Fie punctul M (**r**) interior, adică $r < a$. Se ştie că în punctele în care există sarcini spaţiale, funcţia potenţială satisface ecuaţia lui Poisson

$$\triangle V = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \qquad (2)$$

în care $\triangle V$ este laplacianul funcţiei V.

In virtutea simetriei problemei în raport cu toate direcţiile ieşind din punctul O, se poate afirma că acest câmp **E** precum şi potenţialul V vor fi în fiecare punct funcţii numai de distanţa r dintre punctul considerat şi centrul O al sferei adică

$$V = V(r). \qquad (3)$$

Să transformăm laplacianul în coordonate sferice. Atunci ecuația (2) va deveni

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}r^2\right)=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Deoarece însă V nu depinde de θ şi φ, $\frac{\partial V}{\partial\theta}$ şi $\frac{\partial V}{\partial\varphi}$ vor fi identic nule şi relația (4) va lua o formă mai simplă

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr}r^2\right)=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{5}$$

sau încă

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr}r^2\right)=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}r^2.$$

Integrând odată în raport cu r, obținem

$$\frac{dV}{dr}\cdot r^2=-\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}r^3+C$$

sau încă

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}r+\frac{C}{r^2}, \tag{6}$$

C, fiind o constantă arbitrară. Pentru a o determina, să observăm că după formulele (1) şi (3)

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad} V=-\frac{dV}{dr}\mathbf{r}^0. \tag{7}$$

Prin urmare, mărimea (6) reprezintă valoarea numerică a vectorului **E** (cu semnul schimbat). In virtutea simetriei este evident că în centrul sferei vectorul **E** trebue să fie nul. Reiese deci că termenul $\frac{C}{r}$ din egalitatea (6) trebue să lipsească; altfel (6) şi-ar pierde sensul în cazul $r = 0$. Prin urmare

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}r. \tag{6'}$$

Introducând acest rezultat în (7), obținem

$$\mathbf{E}=\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}r\,\mathbf{r}^0=\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}\mathbf{r}. \tag{7'}$$

De aici deducem: *în punctele interioare vectorul* **E** *este proporțional în mărime cu distanța* **r** *a punctului considerat dela centrul sferei și este colinear cu* **r**. Am obținut în § 58 acelaș rezultat, pe altă cale însă. In cazul particular când ne aflăm pe suprafața sferei și $r = a$.

$$E_{\text{supr.}} = \frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}a = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{4}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}a^3 = \frac{1}{\varepsilon a^2}Q. \quad (8)$$

Integrând în continuare pe (6') am putea găsi funcția potențială

$$V = -\frac{2}{3}\frac{\pi\rho}{\varepsilon}r^2 + C_1, \quad (9)$$

C_1 fiind o constantă arbitrară, depinzând de alegerea suprafeței al cărei potențial îl presupunem prin convenție nul.

Să considerăm acum un punct M exterior ($r > a$), în care funcția V satisface ecuația lui Laplace $\Delta V = 0$. Ecuația (5) ia în acest caz forma:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr}r^2\right) = 0.$$

Integrând odată în raport cu r, obținem

$$\frac{dV}{dr}r^2 = \text{const} = C_2$$

sau încă

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C_2}{r^2}. \quad (10)$$

Să găsim vectorul **E** al câmpului exterior utilizând formula (7)

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr}\mathbf{r}^0 = -\frac{C_2}{r^2}\mathbf{r}^0. \quad (11)$$

Observăm că el este invers proporțional în mărime cu pătratul distanței dela centrul sferei.

Pentru a determina constanta C_2 trebue să ținem seama de faptul că vectorul **E** reprezintă — în cazul unei sarcini spațiale situate într'un dielectric omogen — o funcție *continuă* de punct în întregul domeniu de definiție al câmpului [1])

De aceea, pentru $r = a$, valoarea lui E, obținută din (11) trebue să coincidă cu valoarea (8) obținută cu ajutorul formulei valabile pentru câmpul interior

$$E_{\text{supr}} = -\frac{C_2}{a^2} = \frac{1}{\varepsilon a^2}Q.$$

1) După cum se știe, funcția noastră poate suferi discontinuități doar la trecerea prin *suprafețe cu sarcini distribuite* pe ele.

De aci $C_2 = -\frac{Q}{\varepsilon}$ şi deci

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{Q}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}$$

şi

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{\varepsilon r^2}. \tag{10'}$$

Rezultă că *o sferă încărcată acţionează asupra unui punct din exterior ca şi cum întreaga sarcină ar fi concentrată în centrul ei şi ar acţiona conform legii lei Coulomb.* Continuând integrarea lui (10') vom obţine funcţia potenţială a câmpului exterior

$$V = \frac{Q}{\varepsilon r} + C_3. \tag{12}$$

Putem lega constanta C_3 de constanta C_1 din formula (9) astfel încât pentru $r = a$ adică pe suprafaţa sferei să avem unul şi acelaş potenţial.

Exerciţul 2. Să se determine câmpul electrostatic produs de o sarcină spaţială distribuită uniform şi având densitatea β în interiorul unui cilindru drept înfinit lung de rază a (fig. 160).

Rezolvare. Rezolvând problema ca şi în cazul precedent să alegem un sistem de coordonate cilindrice, astfel încât axa z să coincidă cu axa cilindrului. In virtutea simetriei, în raport cu axa z, putem afirma că $\mathbf{E}$ şi V sunt funcţii doar de distanţa ρ la care se află punctul considerat de axa z. Prin urmare, vectorul $\mathbf{E}$ şi potenţialui V vor avea aceleaşi valori numerice pe suprafaţa unui cilindru de rază ρ coaxial cu cel dat. Afară de aceasta, câmpul va fi acelaş în toate planele perpendiculare pe axa z (un astfel de câmp se numeşte câmp plan-paralel). Este destul, deci, să-l studiem într'un plan oarecare, de pildă xOy. Prin urmare

$$V = V\ (\rho) \tag{12}$$

atunci

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{dV}{d\rho}\rho^0 \tag{13}$$

Pentru punctele *interioare* ale cilindrului, ecuaţia lui în coordonate cilindrice ia forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\rho\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\beta}{\varepsilon}.$$

Deoarece însă $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ şi $\frac{\partial V}{\partial z}$ sunt identic nule, avem

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dV}{d\rho}\rho\right) = -\frac{4\pi\beta}{\varepsilon}.$$

De aci

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dV}{d\rho}\rho\right) = -\frac{4\pi\beta}{\varepsilon}\rho. \qquad (14)$$

Integrând odată în raport cu ρ obţinem (după ce am **împărţit prin** ρ)

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{2\pi\beta}{\varepsilon}\rho + \frac{C}{\rho}.$$

Ca şi în exerciţiul precedent, să demonstrăm că $C=0$, adică

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{2\pi\beta}{\varepsilon}\rho. \qquad (15)$$

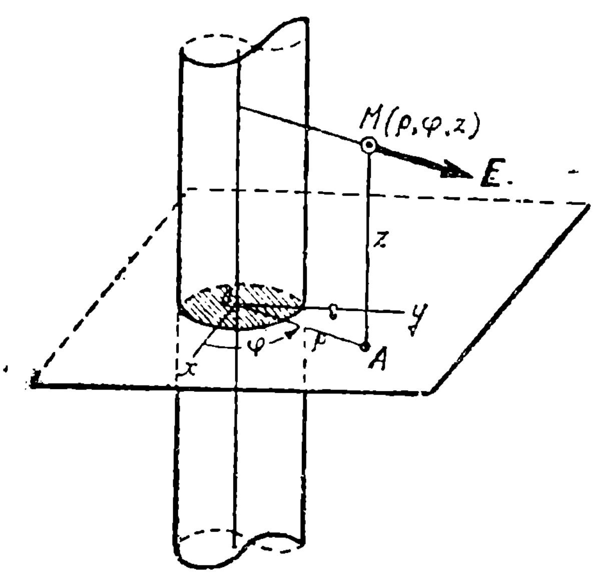


Fig. 160

De aici, conform formulei (13)

$$\mathbf{E} = \frac{2\pi\beta}{\varepsilon}\rho\,\rho^{0} = \frac{2\pi\beta}{\varepsilon}\rho \quad (16)$$

Prin urmare, *vectorul-câmp din interiorul cilindrului este proporţional în mărime cu distanţa* ρ *a punctului considerat dela axa cilindrului, fiind colinear cu* ρ.

In cazul particular al punctelor situate pe suprafaţa cilindrului ($\rho = a$), obţinem

$$E_{supr} = \frac{2\pi\beta}{\varepsilon}a. \quad (17)$$

Continuând integrarea lui (15) obţinem funcţia potenţială

$$V = -\frac{\pi\beta}{\varepsilon}\rho^2 + \text{const}. \qquad (18)$$

Pentru punctele exterioare cilindrului ($\rho \gg a$) să considerăm **în locul lui (14)** ecuaţia lui Laplace

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dV}{d\rho}\rho\right) = 0.$$

De unde, după integrare (şi împărţind prin ρ), obţinem

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{C_1}{\rho}.$$

Deci, conform formulei (13)

$$\mathbf{E} = -\frac{C_1}{\rho}\rho^0. \tag{19}$$

Vom determina constanta C_1 ca şi în exerciţiul precedent. cerând ca în cazul $\rho = a$ (adică pe suprafaţa cilindrului) valorile lui E din formulele (17) şi (19) să fie aceleaşi

$$-\frac{C_1}{a} = \frac{2\pi\beta}{\varepsilon} a.$$

Adică

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2\pi\beta}{\varepsilon}a^2. \\ \mathbf{E} &= \frac{2\pi\beta a^2}{\varepsilon\rho}\rho^0 = \frac{2\pi\beta a^2}{2\rho^2}\int\frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

şi

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{2\pi\beta a^2}{\varepsilon\rho}. \tag{20}$$

Rezultă că *în domeniul exterior vectorul* $\mathbf{E}$ *este invers proporţional cu distanţa* ρ *dela axa cilindrului.* Din (28) reiese

$$V_{ext} = -\frac{2\pi\beta a^2}{\varepsilon}\int\frac{d\rho}{\rho} + \text{const.}$$

sau încă

$$V_{ext} = C_2 - \frac{2\pi\beta a^2}{\varepsilon}\ln\rho. \tag{21}$$

Am obţinut potenţialul exterior. Observăm că suprafeţele echipotenţiale sunt cilindri coaxiali cu cel dat.

Observaţie. Presupunem că în locul unei sarcini spaţiale nu este dată una superficială, repartizată pe suprafaţa unui *cilindru metalic* infinit lung, de densitate superficială σ. In acest caz, în domeniul exterior, câmpul rămâne *acelaş*, ca şi în cazul sarcinii spaţiale, cu condiţia ca densităţile σ şi β să fie alese astfel încât fluxul vectorului prin suprafaţa laterală a cilindrului, a cărei generatoare este egală cu unitatea (fig. 16) să fie aceeaşi pentru sarcina spaţială ca şi pentru cea superficială. Suprafaţa cilindrului din fig. 161 este egală cu $S = 2\pi a 1$.

Rezultă că fluxul sarcinii superficiale va fi, după formula (17)

$$N = E_{supr.} S = \frac{2\pi\beta a}{\varepsilon} S \tag{22}$$

In cazul sarcinii superficiale, înconjurăm cilindrul nostru cu suprafaţa unui alt cilindru, infinit apropiat de primul, alăturându-i două suprafeţe de cep (baze). In acest caz, conform teoremei lui Gauss

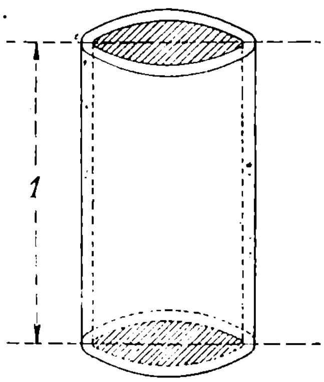


Fig. 161

$$N = \frac{4\pi Q}{\varepsilon} = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\sigma\ S) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} S. \qquad (23)$$

Comparând (22) cu (23) găsim relaţia dintre β şi σ

$$\frac{3\pi\beta a}{\varepsilon} S = \frac{4\sigma\pi}{\varepsilon} S$$

sau

$$\beta = \frac{2\sigma}{a}.$$

Dacă-l înlocuim în (19') şi (21) pe β prin expresia lui echivalentă din (24), obţinem formulele corespunzătoare pentru câmpul exterior produs de o *sarcină superficială*.

In particular, obţinem din (21) pentru potenţialul V al câmpului exterior.

$$V = C_2 - \frac{4\pi\sigma a}{\varepsilon} \ln \rho. \qquad (24)$$

Mărimea $\lambda = 2\pi\sigma a$ reprezintă *sarcina pe unitatea de lungime a cilindrului.* De aici putem scrie

$$V = C_2 - 2\lambda \ln \rho,$$

Am utilizat această formulă, fără demonstraţii, în § 51, capitolul VII.

Capitolul XIII

DETERMINAREA UNUI CÂMP CU AJUTORUL DIVERGENŢEI ŞI ROTORULUI

§ 83. METODA GENERALĂ

In cele anterioare ne-am ocupat cu precădere de problema aflării divergenţei şi rotorului unui câmp dat **a** într'un punct oarecare. Această problemă este, după cum se ştie, asemănătoare cu problema diferenţierii întâlnită în analiza scalară, atunci când ni se cerea să aflăm derivata sau diferenţiala unei funcţii date. Putem încerca totuşi să punem problema inversă, adică fiind date divergenţa şi rotorul unui câmp arbitrar **a** într'o regiune oarecare să încercăm a găsi câmpul, adică funcţia vectorială **a** (**r**). Problema aceasta este analoagă integrării. Am mai întâlnit până acum probleme de acest fel. Astfel, în § 82, cunoscând divergenţa câmpului electrostatic (densitatea sarcinilor de volum) am aflat care este câmpul **E.** In acest caz cunoaştem rotorul câmpului (rot **E**=0). deoarece acel câmp era potenţial. Intr'o oarecare măsură se aseamănă cu această problemă şi § 74 în care fiind dată divergenţa câmpului solenoidal (div **a** = 0) a trebuit să aflăm vectorul primitiv **A** pentrucă apoi, prin rotaţie, să găsim vectorul **a**. Vom examina acum problema sub formă generală, permiţând cititorului să-şi facă o idee despre metodele de rezolvare şi despre acele probleme clasice ale fizicei matematice de care este legată aceasta.

Fie astfel în regiunea Ω :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= q\ (x, y, z), \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \omega\ (x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

adică se dau divergenţa câmpului **a**, sub forma unei funcţii scalare oarecare $q\ (x,\ y,\ z)$ şi rotorul lui, sub forma unei funcţii vectoriale oarecare $\omega\ (x,\ y,\ z)$ şi se cere a se determina vectorul **a** ca funcţie de punct (sau proiecţiile lui a_x, a_y şi a_z ca funcţii de $x,\ y,\ z$)

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \qquad (2)$$

Sub forma analitică această problemă se reduce la integrarea următorului sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivatele parţiale:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = q\ (x,\ y,\ z), \\ &\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \omega_x\ (x,\ y,\ z), \\ &\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = \omega_y\ (x,\ y,\ z), \\ &\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = \omega_z\ (x,\ y,\ z), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

în care q, ω_x, ω_y şi ω_z sunt cunoscute, iar a_x, a_y şi a_z reprezintă funcţiile de punct căutate (1). Este evident că sub această formă problema (3) prezintă un caracter prea general şi necesită, în general, adăugarea unor condiţii suplimentare, sau unor aşa numite condiţii la limită, pentru determinarea complectă a câmpului.

Să presupunem regiunea Ω simplu conexă şi finită şi să admitem că înafara relaţiilor diferenţiale (3) se cunosc şi *valorile componentei normale*

$$a_n = f\ (x,\ y,\ z) \qquad (4)$$

a vectorului căutat **a** pe suprafaţa S care o delimitează.

Condiţia (4) poartă numele de condiţie la limită. Să arătăm că în acest caz vectorul **a** este complect definit deci că *sistemul de ecuații* [1]) prezintă o *singură soluție* atunci când *îi adăugăm* condiția (4) (este vorba aici de o soluție continuă).

Intr'adevăr, să presupunem că am reușit să găsim, înafara soluției **a** (x, y, z) o altă soluție oarecare **b** $(x, y, z,)$ care să satisfacă aceleași condiții (1) și (4), sau

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{b} &= q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \omega \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$b_n = f\ (x, y, z)\ \text{(pe suprafața } S). \qquad (6)$$

Diferența acestor soluții este un vector variabil

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \qquad (6')$$

In acest caz funcția **u** (x, y, z) ar trebui să satisfacă următoarele ecuații în regiunea Ω:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

iar proiecția ei u_n pe normala la suprafața S ar fi identic egală cu zero, deoarece

$$u_n = a_n - b_n = f - f = 0. \qquad (8)$$

Din ecuațiile (7) rezultă că în regiunea noastră câmpul vectorului **u** va fi laplacian. In acest caz, însă, el este reprezentat printr'o funcție potențială, iar problema aflării lui **u** poate fi redusă la problema aflării funcției lui potențiale.

Să însemnăm prin φ (x, y, z) această funcție potențială. Conform § 72 ea trebue să satisfacă relația lui Laplace (căci divergența lui **u** este nulă).

$$\triangle \varphi = 0.$$

Și astfel laplacianul $\triangle \varphi$ va fi identic nul în toate punctele regiunii considerate

Să aplicăm formula lui Green funcției φ

$$\int_V \left\{ \varphi \triangle \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \right\} dV = \oint_S \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS,$$

în care prin V *se înțelege întregul volum ocupat de domeniul* Ω, iar prin S — suprafața ce îl delimitează. In baza condiției (9) formula lui Green ia forma

$$\int_V (\operatorname{grad} \varphi)^2\, dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (10)$$

(1) Funcțiile q, ω_x, ω_y și ω_z sunt presupuse uniforme, continue și diferențiabile în regiunea noastră împreună cu derivatele lor, care ne vor fi necesare în cursul demonstrației.

Dar membrul drept este identic nul, căci, după cum am arătat mai sus

$$\mathbf{u} = \text{grad}\ \varphi. \tag{11}$$

De aici reiese că u_n ca proiecție a gradientului pe direcția **n** este egal cu $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Şi deoarece u_n este nul în toate punctele suprafeței, conform formulei (8) rezultă că și $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ este nul în acele puncte. De aici

$$\oint_V (\text{grad}\ \varphi)^2\, dV = 0. \tag{10'}$$

Dar expresia de sub integrală $(\text{grad}\ \varphi)^2\, dV$ este o mărime evident pozitivă (sau nulă) în toate punctele regiunii V. Prin urmare, şi integrala (10'),fiind suma acestor elemente poate fi nulă numai în cazul când funcția de sub integrală este identic nulă *în tot domeniul*. Şi astfel

$$\text{grad}\ \varphi = 0 \quad (\text{în tot domeniul } \Omega).$$

In acest caz, din (11) rezultă că și $\mathbf{u}=0$, de unde $\mathbf{b}-\mathbf{a}=0$ sau $\mathbf{b}$ coincide cu $\mathbf{a}$ în orice punct. Cu alte cuvinte, există o *singură soluție care satisface condițiile* (1) *în domeniul* Ω *și condiția limită* (4) *pe suprafața* S *care îl delimitează.*

Să presupunem acum că domeniul Ω este nelimitat. Pentru a extinde teorema și la acest caz, putem reprezenta prin convenție pe Ω ca o regiune limitată de suprafaţa sferei imaginare S descrisă dintr'un punct oarecare O cu o rază R, care creşte nelimitat.

In acest caz, în locul condiției (4) care dispare, trebue să introducem acum alta, care, de altfel, se realizează adesea în practică şi anume să impunem condiţia ca vectorul-câmp să dispară la infinit, căpătând o valoare infinit mică de ordinul $\frac{1}{R^2}$ pentru $R \to \infty$; în acest caz φ va fi o mărime de ordinul $\frac{1}{R}$. Cu alte cuvinte, trebue ca pentru un R suficient de mare să aibă loc inegalitatea

$$|\mathbf{a}| < \frac{A}{R^2} \quad \text{și} \quad |\varphi| < \frac{B}{R},$$

A și B fiind niște constante oarecare. In acest caz, în formula lui Green (10) integrala din membrul drept va tinde către zero, [1]) pentru $R \to \infty$ şi va lua forma

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 \, dV = 0$$

de unde vor rezulta aceleaşi deducţii ca şi mai înainte.

„Teorema unicităţii" soluţiei demonstrată mai sus, joacă un rol important în practică, de exemplu în teoria câmpurilor electrostatice. Este astfel uneori posibil să ghicim pur şi simplu cu succes soluţia unei probleme, sau să o găsim efectiv, pe baza unor consideraţii de simetrie sau pe o altă cale oarecare [2]).

In baza teoremei vom putea afirma că soluţia găsită e unică.

Observaţie. Se mai observă că funcţiile $q(x, y, z)$, $\omega(x, y, z)$ şi $f(x, y, z)$ din relaţiile (1) — (4) nu pot fi date absolut arbitrar. Astfel din relaţia rot $\mathbf{a} = \omega$ rezultă că ω trebue să satisfacă condiţia

$$\text{div } \omega = 0.$$

Mai departe, pe suprafaţa limită S şi în volumul V al regiunii noastre trebue să fie satisfăcută teorema lui Gauss, adică să avem

$$\int_S a_n \, dS = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV.$$

De unde, între funcţiile $a_n = f(x, y, z)$ şi $q(x, y, z)$ trebue să existe relaţia

$$\int_S f(x, y, z) \, dS = \int_V q(x, y, z) dV.$$

§ 84. CÂMPUL POTENŢIAL. POTENŢIALUL SCALAR

Să rezolvăm acum problema generală (1) a paragrafului precedent. O vom rezolva mai întâi pentru cazul particular al absenţei rotorului, adică pentru cazul

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} &= q(x, y, z) \\ \text{rot } \mathbf{a} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

---

1) Intr'adevăr, dacă $|\mathbf{a}|$ şi $|\mathbf{b}|$ sunt infiniţi mici de ordinul $\frac{1}{R^2}$ şi $|\mathbf{u}|$ va fi de acelaş ordin, deci şi $|u_n|$ sau $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|$. In acest caz

$$\left|\oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS\right| \leqslant \oint_S |\varphi| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| dS < \frac{AB}{R^3} \oint_S dS = \frac{AB}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi AB}{R}.$$

De unde

$$\lim_{R \to \infty} \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0.$$

2) Pentru problemele clasice ale electrostaticei, vezi Tamm „Bazele teoriei electricităţii", 1932, vol. 1 p. I, pg. 77-80.

Vom vorbi mai departe despre condițiile limită.

Domeniul Ω în care sunt satisfăcute relațiile (1) este presupus simplu conex.

Din relația rot $\mathbf{a} = 0$ rezultă caracterul potențial al câmpului căutat. Deaceea, vom afla mai întâi funcția lui potențială φ (x, y, z) după care, vom găsi ușor însăși vectorul $\mathbf{a}$ din relația

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{2}$$

Introducând expresia (2) în prima dintre relațiile (1) observăm că aceasta va lua forma

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = q\ (x, y, z)$$

sau

$$\Delta\varphi = q\ (x, y, z), \tag{3}$$

adică *problema aflării câmpului s'a redus la integrarea ecuației lui Poisson*, sau la aflarea funcției φ cu ajutorul laplacianului ei.

Pentru rezolvarea problemei lui Poisson aplicăm formula a doua lui Green

$$\oint_S \left(\varphi\ \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS = \int_V (\varphi\ \Delta\ \psi - \psi\Delta\varphi)\ dV. \tag{4}$$

Vom considera două cazuri. Vom presupune astfel mai întâi că domeniul Ω este limitat (fig. 162) și fie M (x_0, y_0, z_0) *punctul considerat* în care dorim să determinăm valoarea funcției căutate φ (x_0, y_0, z_0). Fie A (x, y, z) *un punct variabil* în domeniul nostru. Vom efectua integrala din formula lui Green în raport cu coordonatele lui. Insemnăm prin

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

distanța dela punctul considerat M până la punctul variabil A. Să luăm drept ψ în formula lui Green, o funcție $\psi = \frac{1}{r}$. Observăm de îndată (aceasta ne va fi necesar în cele ce urmează) că laplacianul funcției $\psi = \frac{1}{r}$ este nul în orice punct al domeniului, înafara punctului M (x_0, y_0, z_0), unde funcția $\psi = \frac{1}{r}$ nu are nici un sens. Lucrul

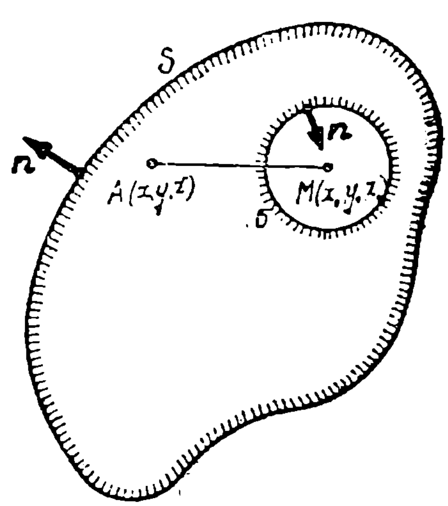


Fig. 162

acesta poate fi verificat și pe cale directă, luând laplacianul după formula

$$\triangle\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot$$

Este încă şi mai simplu să luăm laplacianul lui $\frac{1}{r}$ în coordonate sferice

$$\triangle\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}r^2\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}.r^2\right) = 0 \cdot$$

Să trecem acum la formula lui Green.

Deoarece însă funcţia $\frac{1}{r}$ devine discontinuă pentru $r=0$, pentru a evita aceasta şi pentru a avea dreptul să aplicăm formula lui Green, *excludem punctul* M din regiunea noastră, înconjurându-l cu o sferă σ de rază foarte mică ρ. Insemnăm volumul acestei sfere prin ε. Aplicăm astfel formula lui Green volumului $V-\varepsilon$, cuprins *între* suprafeţele S şi σ. Ştiind că pentru acest volum $\triangle\psi = 0$, vom scrie formula (4) sub forma următoare:

$$\oint_S \varphi . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dS - \oint_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \oint_\sigma \varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma - \oint_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma =$$

$$= -\int_{V-\varepsilon} \frac{1}{r}\triangle\varphi\, dV, \tag{5}$$

Integrala din membrul drept ne este cunoscută deoarece valoarea $\triangle\varphi = q$ este dată. O vom scrie deci sub forma:

$$-\int_{V-\varepsilon} \frac{q}{r}\, dV.$$

La limită, pentru $\varepsilon \to 0$ ea devine $\int_V \frac{q}{r}\, dV$, reprezentând o valoare finită şi complect determinată, după cum am arătat în § 58 (vezi exemplul 5 şi observaţia care-l însoţeşte). In ceeace priveşte integralele din membrul stâng pe primele două le vom lăsa neschimbate. Să vedem cu ce va fi egală, la limită, cea de a treia:

$$I_3 = \oint_\sigma \varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma.$$

Deoarece pe sfera σ, exterioară faţă de volumul $V - \varepsilon$ normala **n** este orientată spre interiorul sferei, adică în sens opus vectorului de poziţie **r** reiese că

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

Prin urmare

$$I_3 = \oint_\sigma \varphi \cdot \frac{1}{r^2}\, d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \oint_\sigma \varphi \cdot d\sigma. \qquad (6)$$

După teorema mediilor, $\oint_\sigma \varphi\, d\sigma$ poate fi înlocuită prin expresia

$$\varphi\,(N) \oint_\sigma d\sigma,$$

în care $\varphi\,(N)$ reprezintă valoarea funcţiei φ într'un punct oarecare N de pe suprafaţa sferei σ.

Şi astfel

$$I_3 = \frac{1}{\rho^2}\, \varphi\,(N) \oint_\sigma d\sigma = 4\pi\, \varphi\,(N).$$

Atunci când sfera converge către punctul M, valoarea $\varphi(N)$ tinde la limită către valoarea φ în punctul considerat M, de unde

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_3 = 4\pi \,.\, \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(N) = 4\pi\, \varphi(M) = 4\pi\, \varphi, \qquad (7)$$

în care $\varphi(M)$ sau φ reprezintă valoarea căutată a funcţiei potenţiale φ în punctul M.

Să arătăm, în sfârşit, că ultima integrală din membrul stâng

$$I_4 = \oint_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{\rho} \oint_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

tinde către zero; într'adevăr

$$\left| \oint_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma \right| \leqslant \oint_\sigma \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| d\sigma \leqslant C \oint_\sigma d\sigma = 4\pi\, C\, \rho^2,$$

C fiind limita superioară a valorii $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|$ pe sfera σ.

Reiese că

$$\left| I_4 \right| \leqslant \frac{1}{\rho}\, 4\pi\, C\rho^2 = 4\pi\, C\, \rho,$$

de unde

$$\lim_{\sigma \to 0} I_4 = \lim_{\rho \to 0} 4\pi\, C\rho = 0.$$

La limită, formula (5) va lua forma

$$\oint_S \varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dS - \oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + 4\pi\varphi(M) = - \int_V \frac{q}{r} dV.$$

de unde

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_V \frac{q}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dS. \tag{8}$$

Această formulă ne dă valoarea funcției potențiale căutate $\varphi(M)$ în orice punct din interiorul domeniului, dacă se cunoaște:

1° valoarea divergenței $q(x, y, z)$ în tot domeniul și

2° valoarea lui φ și a derivatei sale $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ după normala la suprafața limită S.

Condițiile 2° reprezintă tocmai *condițiile* la limită despre care am amintit la începutul paragrafului. Formula (8) ne dă astfel soluția problemei lui Poisson pentru o suprafață simplu conexă limitată.

Observăm că cunoașterea lui $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ pe suprafața S este echivalentă cu cunoașterea componentei normale a vectorului **a** pe această suprafață, căci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{na} = a_n.$$

Să insistăm acum puțin asupra condițiilor la limită.

Formula (8) pentru a fi aplicată, cere cunoașterea potențialului φ precum și cunoașterea componentei normală $a_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ la suprafața S. Deoarece, însă, după teorema univocității este deajuns să cunoaștem numai una dintre componentele normale ale vectorului, formula (8) prezintă o deficiență considerabilă și necesită o transformare ulterioară, deoarece cunoașterea simultană a lui a_n și φ nu constitue în practică un lucru chiar atât de simplu, cu atât mai mult cu cât aceștia nu sunt independenți unul față de celălalt. Vom arăta mai departe, în § 87, modul în care se rezolvă problema în cazul când numai a_n este cunoscut.

Să presupunem acum domeniul Ω nelimitat şi ocupând întregul spaţiu infinit tridimensional. Vom introduce în locul condiţiei 2° o alta care să impună vectorului ca la limită să fie de acelaş ordin de mărime cu $\frac{1}{R^2}$. Este uşor să arătăm, în acest caz, cum am mai făcut-o de altfel de două ori, că ultimele două integrale din formula (8) tind către zero, dacă le extindem la suprafaţa sferei de rază infinită R. Formula va lua, deci, pentru spaţiul infinit, o formă mult mai simplă

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{q}{r}\,dV, \tag{9}$$

sau

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{q(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Formula (9) *constitue soluţia problemei lui Poisson pentru cazul spaţiului infinit,* atunci când condiţia de dispariţie a vectorului **a** la infinit este îndeplinită.

Observaţie. Din motive asupra cărora nu vom insista aici, expresia (9) poartă numele în fizica teoretică de „potenţial newtonian al maselor repartizate în volum". Dacă înlocuim q prin $-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ o vom putea numi, din punct de vedere electrostatic, potenţial coulombian al sarcinilor spaţiale.

§ 85. CAMPUL SOLENOIDAL. POTENŢIALUL VECTOR

Să rezolvăm acum problema determinării câmpului în al doilea caz particular, adică pentru

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a} &= 0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{a} &= \omega(x, y, z)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ne vom limita numai la cazul unui *spaţiu simplu conex infinit.* Vom pune condiţia ca la limită modulul vectorului **a** să fie de acelaş ordin de mărime cu $\frac{1}{R^2}$ iar ω — de acelaş ordin de mărime cu $\frac{1}{R^3}$ (sau cel puţin superior ordinului al doilea, în raport cu $\frac{1}{R}$). Deoarece câmpul căutat este solenoidal, va trebui să aflăm mai întâi un vector primitiv **A**, al cărui rotor să fie tocmai vectorul **a**, adică să avem

$$\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{A}. \tag{2}$$

Introducând expresia (2) în a doua relaţie (1) obţinem următoarea ecuaţie diferenţială pentru **A**:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \omega\,(x, y, z)$$

sau

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \triangle \mathbf{A} = \omega. \tag{3}$$

Deoarece există o infinitate de vectori primitivi **A** (vezi § 74) vom alege din acest număr pe acela a cărui divergenţă este identic nulă

sau

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \tag{4}$$

(vom arăta în cele ce urmează că această alegere este posibilă).

In acest caz, relaţia (3) se simplifică, luând forma

$$\triangle \mathbf{A} = -\omega \tag{5}$$

Aceasta constitue o relaţie analoagă cu aceea a lui Poisson, fiind pusă însă sub formă vectorială. Dacă descompunem acum pe **A** şi ω după versorii fundamentali

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \text{şi} \quad \omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

ecuaţia (5) va fi echivalentă cu trei ecuaţii Poisson obişnuite sub formă scalară:

$$\triangle A_x = -\omega_x\,; \ \triangle A_y = -w_y \quad \text{şi} \quad \triangle A_z = -\omega_z\,.$$

Rezolvând pe fiecare în parte după formula (9) a paragrafului precedent (în cazul spaţiului infinit) putem scrie:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\omega_x}{r}\, dV,$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\omega_y}{r}\, dV,$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\omega_z}{r}\, dV,$$

Inmulţind respectiv prin versorii **i**, **j** şi **k** şi adunând, obţinem vectorul căutat **A** sub forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\omega}{r}\, dV. \tag{6}$$

Prin analogie cu expresia (9) a paragrafului precedent, această expresie se numeşte *potenţialul-vector al câmpului solenoidal* **a**, Vectorul **a** se determină din expresia (6) printr'o rotaţie, adică

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\infty} \frac{\omega}{r}\, dV \tag{7}$$

Să demonstrăm că div **A** = 0 [1]). Pentru aceasta ne rămâne să arătăm că expresia găsită (6) satisface efectiv condiţia div **A** = 0.

Intr'adevăr

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int_{\infty} \frac{\omega}{r}\, dV = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \operatorname{div}_M \left(\frac{\omega}{r}\right) dV. \tag{8}$$

Reamintim aici că divergenţa lui **A** se ia în raport cu coordonatele x_0, y_0 şi z_0 ale punctului M (fig. 162 din paragraful precedent) iar integrarea integralei triple se efectuează în raport cu coordonatele x, y şi z ale punctului curent. Deaceea, putem introduce semnul divergenţei sub semnul integralei, ca semn al diferenţierii funcţiei de sub integrală, în raport cu parametrii x_0, y_0 şi z_0. Simbolul div_M. ne arată tocmai că diferenţierea se efectuează în raport cu coordonatele punctului M. Dar după formula

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{div}_M \left(\frac{\omega}{r}\right) = \frac{1}{r}\, \omega \operatorname{grad}_M \left(\frac{1}{r}\right) = \omega\, \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) \tag{9}$$

deoarece ω nu depinde de coordonatele lui M.

Se înţelege uşor că

$$\nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla_A \left(\frac{1}{r}\right)$$

Lucrul acesta se poate verifica printr'o simplă derviare a expresiei

1) Cititorul poate trece peste acest aliniat la prima citire.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

mai întâi în raport cu coordonatele lui M, iar apoi în raport cu cele ale lui A.

Expresia (9) poate fi scrisă, deci

$$\mathrm{div}_M \left(\frac{1}{r}\,\omega\right) = -\,\omega\,\mathrm{grad}_A \left(\frac{1}{r}\right). \tag{10}$$

Aplicăm acum membrului drept al relației (10) formula cunoscută div $(\varphi\mathbf{a}) = \varphi$ div $\mathbf{a} + \mathbf{a}$ grad φ, scriind-o în ordine inversă adică

$$\mathbf{a}\ \mathrm{grad}\ \varphi = \mathrm{div}\ \varphi\mathbf{a} - \varphi\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}$$

Rezultă că

$$\omega\,\mathrm{grad}_A \left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{div}_A \left(\frac{1}{r}\,\omega\right) - \frac{1}{r}\,\mathrm{div}_A\,\omega = \mathrm{div}_A\left(\frac{1}{r}\,\omega\right),$$

căci ω $\mathrm{div}_A = 0$, deoarece ω este rotorul vectorului $\mathbf{a}$. Integrala (8) poate fi deci scrisă sub forma:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty} \mathrm{div}_A \left(\frac{1}{r}\,\omega\right) dV\,. \tag{11}$$

Integrala noastră este extinsă la întregul spațiu infinit. O vom considera ca o integrală de volum a sferei S, descrisă din punctul M cu o rază R ce tinde să ia valori infinite. In acest caz putem aplica teorema lui Gauss membrului drept al lui (11) și scrie

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \omega_n \frac{1}{r}\,dS = -\frac{1}{4\pi R}\oint_S \omega_n\,dS. \tag{12}$$

Vom demonstra acum că integrala din membrul drept tinde către zero pentru $R \to \infty$. Intr'adevăr, am presupus că valoarea lui ω este la infinit, de acelaş ordin de mărime cu $\frac{1}{R^3}$ deci și

$$|\omega_n| < \frac{B}{R^3},$$

B fiind o constantă oarecare.

Prin urmare

$$\left|\frac{1}{R}\int_S w_n\,dS\right| \leqslant \frac{1}{R}\int_S |\omega_n|\,dS < \frac{B}{R^4}\int_S dS = \frac{4\pi B}{R^2},$$

de unde rezultă că integrala (12) tinde la limită către zero, pentru $R \to \infty$. De aici

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 86. POTENȚIALUL-VECTOR AL CURENTULUI ELECTRIC

Să presupunem că într'un mediu oarecare a fost produs un curent electric I repartizat în întregul volum (fig. 163) și că vectorul lui densitate este dat prin funcția $\mathbf{u}$ (x, y, z). In studiul electricității și magnetismului se demonstrează că un câmp magnetic $\mathbf{H}$ produs de un curent arbitrar se bucură de următoarele proprietăți:

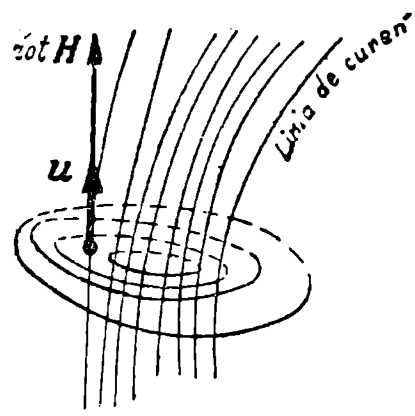


Fig. 163

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} (\mu\, \mathbf{H}) = 0 \\ &\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\, \mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In cazul particular când $\mu = 1$, prima relație devine $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ arătându-ne că $\mathbf{H}$ este un câmp solenoidal. Relația a doua reprezintă una din așa numitele relații fundamentale ale lui Maxwell și exprimă natura rotorică a câmpului $\mathbf{H}$ de unde rezultă că liniile lui rotorice reprezintă tocmai liniile de curent [1]). Deoarece câmpul $\mathbf{H}$ satisface condițiile (1) din paragraful precedent, rezultă că, cunoscându-se densitatea de curent $\mathbf{u}$ (x, y, z) îl putem afla pe $\mathbf{H}$ produs de acesta.

Pentru aceasta vom determina potențialul-vector după formula (6) a paragrafului precedent, înlocuind în prealabil ω prin 4π $\mathbf{u}$.

In acest caz

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mathbf{u}}{r}\, dV,$$

în punctele celelalte, în care $\mathbf{u}$ este nul, funcția de sub integrală devine deasemenea nulă. Câmpul $\mathbf{H}$ se determină acum din formula (7) a paragrafului precedent

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{u}}{r}\, dV. \qquad (2)$$

Expresia (2) poartă numele, în studiul electricității și magne-

---

1) Acest lucru va fi demonstrat în § 93 Cap. XIV.

tismului, de *potențialul vector al curentului electric*. Conform cu (5) § 85 ea satisface relația vectorială a lui Poisson care se obține din (5) înlocuind pe ω cu $4\pi\mathbf{u}$

$$\triangle \mathbf{A} = -4\pi\,\mathbf{u}. \tag{3}$$

Să rezolvăm acum următoarea problemă practică:

Problema 1. Să se găsească potențialul-vector și câmpul magnetic **H** al curentului ce trece printr'un conductor cilindric rectiliniu de lungime infinită, densitatea curentului fiind uniform repartizată și având valoarea

$$u = \frac{I}{\pi a^2} \tag{4}$$

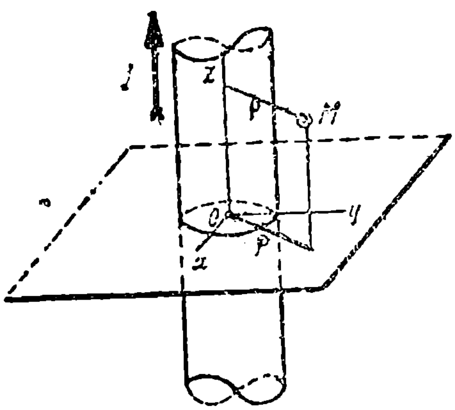


Fig. 164.

Mărimea a reprezintă raza cilindrului (fig, 164).

Rezolvare. Dispunem axele de coordonate așa cum se vede în figură. In acest caz vectorul densitate va fi

$$\mathbf{u} = u\mathbf{k} = \frac{I}{\pi a^2}\,\mathbf{k}.$$

Se vede din relația (2) că și potențialul-vector va avea acum o singură componentă dealungul axei z sau

$$\mathbf{A} = A\mathbf{k}. \tag{5}$$

De aici, din (3) obținem pentru determinarea lui A în punctele situate în interiorul conductorului următoarea relație a lui Poisson sub formă scalară (după eliminarea lui **k**)

$$\triangle A = -\frac{4I}{a^2}\,. \tag{6}$$

Pentru punctele *din exteriorul* conductorului, unde $\mathbf{u} = 0$, ea se transformă în ecuația lui Laplace

$$\triangle A = 0. \tag{6'}$$

Deoarece câmpul este plan și paralel, fiind simetric în raport cu axa z, este evident că A va fi funcție *numai de* ρ, unde ρ reprezintă distanța dela punctul considerat la axa cilindrului. De aici, trecând la coordonatele cilindrice, obținem ca și în § 82

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dA}{d\rho}\,\rho\right) = -\,\frac{4I}{a^2} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dA}{d\rho}\,\rho\right) = 0. \tag{7}$$

Aplicând rezultatele (18) şi (21) din § 82 (vezi problema 2) obţinem

a) pentru câmpul interior

$$A_i = C_1 - \frac{I}{a^2}\rho^2,$$

b) pentru câmpul exterior

$$A_e = C_2 - 2I\ln\rho,$$

în care

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

de unde

$$\mathbf{A}_i = (C_1 - \frac{I}{a^2}\rho^2)\mathbf{k}$$

şi

$$\mathbf{A}_e = (C_2 - 2I\ln\rho)\mathbf{k}.$$

Cunoscându-l pe **A** *îl obţinem pe* **H** *printr'o rotaţie.* Vom folosi formula

$$\text{rot}\ \varphi\mathbf{a} = \varphi\ \text{rot}\ \mathbf{a} - [\mathbf{a}\ \text{grad}\ \varphi]. \tag{8}$$

In cazul nostru, rolul lui **a** îl joacă versorul **k** şi deci rotorul lui este nul.

Vom găsi prin urmare pentru câmpul *interior*, ţinând seama de formula (8)

$$\mathbf{H}_i = \text{rot}\left(-\frac{I}{a^2}\rho^2\,\mathbf{k}\right) = +\frac{I}{a^2}[\mathbf{k}\ \text{grad}\ \rho^2] = \frac{I}{a^2}\left[\mathbf{k}\,2\rho\frac{\rho}{\rho}\right] = \frac{2I}{a^2}[\mathbf{k}\rho].$$

Inlocuind pe $\frac{I}{a^2}$ prin πu şi introducând factorul scalar u în interiorul parantezelor, obţinem

$$\mathbf{H}_i = 2\pi\,[\mathbf{u}\rho]. \tag{9}$$

care reprezintă formula cunoscută de noi din § 22, capitolul III.

Pentru câmpul *exterior* avem, după aceeaşi formulă (8)

$$\mathbf{H}_e = \text{rot}\ (-2I\mathbf{k}\ln\rho) = 2I\ [\mathbf{k}\ \text{grad}\ \ln\rho] = 2I\left[\mathbf{k}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\omega}{\rho}\right] = \frac{2I}{\rho^2}[\mathbf{k}\omega];$$

sau, întroducându-l pe I în interiorul parantezelor, obţinem

$$\mathbf{H}_e = \frac{2\,[I\omega]}{\rho^2}, \tag{10}$$

adică tocmai formula (9) a aceluiaş paragraf. Din (9) şi (10) putem obţine componentele pe axele de coordonate, aşa cum s'a procedat în § 22.

Să rezolvăm acum o a doua problemă:

Problema 2. Să se găsească câmpul magnetic exterior produs de doi conductori cilindrici, paraleli şi infinit lungi, străbătuţi de un curent I în sensuri contrarii. Razele conductorilor se presupun suficient de mici în raport cu distanţa $2c$ dintre axele lor (fig. 165).

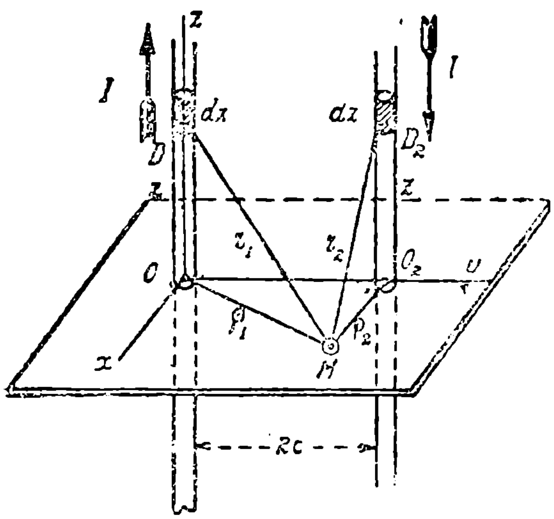


Fig. 165

Rezolvare. In acest exemplu ne vom folosi nemijlocit de expresia potenţialului vector **A**

$$\mathbf{A} = \int\limits_V \frac{\mathbf{u}}{r}\, dV, \qquad (11)$$

în care, după cum am spus, integrala se extinde la tot volumul V ocupat de curenţi.

Alegem axele de coordonate aşa cum se arată în figură. Fie M punctul considerat al câmpului exterior. Distanţele lui la axe sunt ρ_1 şi ρ_2. Fără a îngrădi cu nimic caracterul general al raţionamentului nostru, avem dreptul să luăm punctul M în planul xOy căci este evident că acest câmp va fi plan şi paralel. Vom mai însemna prin D şi D_2 punctele de coordonată z situate pe conductori. Un element de volum aparţinând fiecărui conductor va fi în acest caz

$$dV = \sigma . dz = \pi a^2\, dz,$$

în care $\sigma = \pi a^2$ reprezintă suprafaţa secţiunii transversale a conductorului. Densitatea de curent $\mathbf{u}_1$ va fi, sub formă vectorială pentru primul conductor

$$\mathbf{u}_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \mathbf{k},$$

iar pentru cel de al doilea

$$\mathbf{u}_2 = - \frac{I}{\pi a^2}\, \mathbf{k}.$$

Integrala (11) se divide în acest caz în două

$$\mathbf{A} = \left\{ I \int\limits_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho_1^2}} - I \int\limits_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho_2^2}} \right\} \mathbf{k}, \qquad (12)$$

ea efectuându-se în raport cu z, adică de-alungul fiecărui condutor.

Vom integra mai întâi între limite finite, dela — 1 la + 1. Observând că

$$\int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = 2\int_{0}^{l} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = 2\Big[\ln(z+\sqrt{z^2+\rho^2})\Big]_0^l = 2\ln.\frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{\rho},$$

obținem, aplicând aceasta la (12)

$$\mathbf{A} = 2I\left\{\ln\cdot\frac{l+\sqrt{l^2+\rho_1{}^2}}{\rho_1} - \ln\frac{l+\sqrt{l^2+\rho_2{}^2}}{\rho_2}\right\}\mathbf{k}$$

sau

$$\mathbf{A} = 2I\left\{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln\frac{l+\sqrt{l^2+\rho_1{}^2}}{l+\sqrt{l^2+\rho_2{}^2}}\right\}\mathbf{k}. \tag{13}$$

Făcând pe l să tindă către $+\infty$ fracția a doua de sub logaritm tinde către unitate, deci al doilea termen dispare. Obținem la limită

$$\mathbf{A} = 2I\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathbf{k}. \tag{14}$$

Acesta este vectorul-potențial al unui sistem de doi conductori paraleli. Se vede printre altele că liniile de *egală valoare ale potențialului vectorial* A se determină din relația

$$A = 2I\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}, \tag{15}$$

sau

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}.$$

Aceasta este ecuația cunoscută a cercurilor lui Apolonius, întâlnită în electrostatică.

Pentru a-l găsi pe $\mathbf{H}$ trebue să luăm acum

$$\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A} = 2I\cdot\text{rot}\left(\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathbf{k}\right). \tag{16}$$

Putem efectua această expresie după formula cunoscută

$$\text{rot}\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\text{rot}\,\mathbf{a} + [\text{grad}\,\varphi,\ \mathbf{a}]$$

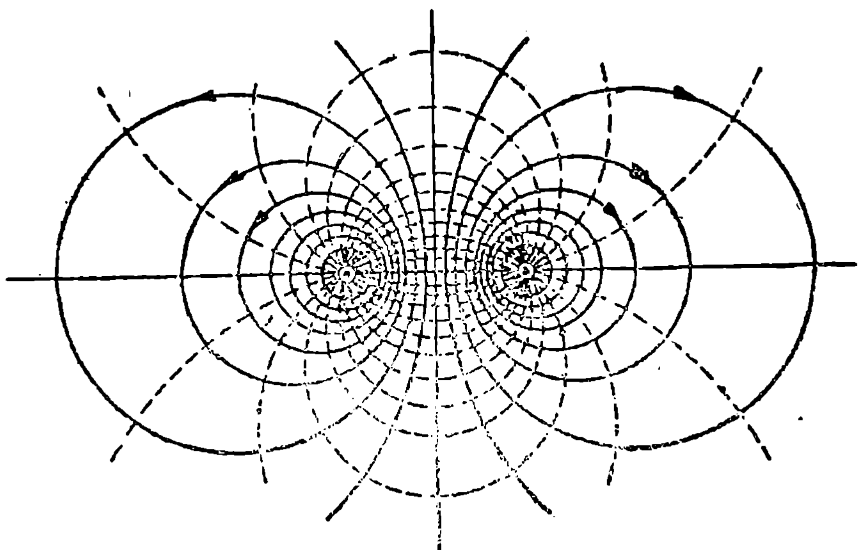
în care $\varphi = \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$. In cazul nostru (deoarece $\mathbf{a} = \mathbf{k}$ este constantă)

$$\mathbf{H} = 2I\,[\text{grad}\ \varphi,\ \mathbf{k}], \tag{17}$$

iar

$$\varphi = \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

In fig. 166, cercurile trasate cu *linie continuă* reprezintă linii de egală valoare pentru potențialul vectorial (cercurile lui Apolonius). Afirmăm că ele reprezintă în acelaș timp



Câmpul magnetic produs de doi curenți paraleli de semn diferit

Fig. 166

liniile de forță ale câmpului **H**. Intr'adevăr, liniile grad φ în care $\varphi = \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$, au fost examinate de noi în § 52. Ele formează o familie de cercuri, reprezentate în fig. 166 prin linii punctate. Dar în acest caz, în virtutea egalității (17) liniile vectorului **H** vor fi ortogonale pe ele. Rezultă că acestea vor coincide cu liniile continue.

§ 87 CÂMPUL DE FORMĂ GENERALĂ

Să presupunem acum că problema determinării câmpului cu ajutorul divergenței și rotorului său este dată sub o formă generală, adică

$$\begin{aligned} \text{div}\ \mathbf{a} &= q\,(x, y, z) \\ \text{rot}\ \mathbf{a} &= \omega\,(x, y, z)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

O vom rezolva mai întâi pentru un spaţiu infinit, simplu conex. Presupunem pentru aceasta că valoarea lui $|\mathbf{a}|$ devine la infinit ca şi mai înainte, de acelaş ordin de mărime cu $\frac{1}{R^2}$. In acest caz, problema se rezolvă uşor. Vom găsi mai întâi un vector *potenţial* $\mathbf{a}_1$ pentru spaţiul infinit, astfel încât

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_1 = q\ (x, y, z) \quad \text{şi} \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = 0. \tag{2}$$

Soluţia acestei probleme, conform § 84 se reprezintă sub forma

$$\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} \varphi,$$

unde

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{q}{r}\, dV. \tag{3}$$

Vom găsi apoi un vector *solenoidal* $\mathbf{a}_2$ astfel ca

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \omega\ (x, y, z). \tag{4}$$

Această problemă se rezolvă conform § 85 cu ajutorul formulei

$$\mathbf{a}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

în care

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\omega}{r}\, dV. \tag{5}$$

Este evident că în acest caz vectorul

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

va satisface condiţiile problemei (1) şi va constitui soluţia ei deoarece

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div}\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2 = q\ (x, y, z,)$$

şi

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot}\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \omega\ (x, y, z,).$$

După teorema fundamentală a § 83 această soluţie va fi unică. Astfel încât, după formulele (3) şi (5),

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\operatorname{grad}\int\limits_{\infty} \frac{q}{r}\, dV - \operatorname{rot}\int\limits_{\infty} \frac{\omega}{r}\, dV\right\}. \tag{7}$$

Sub formă simbolică, cu ajutorul operatorului ∇ lucrul acesta se poate scrie astfel

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\nabla_M \int\limits_{\infty} \frac{\nabla \mathbf{a}}{r}\, dV - \left[\nabla_M \int\limits_{\infty} \frac{[\nabla \mathbf{a}]}{r}\, dV\right]\right\}. \tag{7'}$$

Cazul domeniului finit simplu conex. Vom da pentru acest caz numai planul general de rezolvare, indicând cititorului cursurile speciale de fizică matematică.

Condițiilor (1) li se alătură aici, după cum, am arătat în § 83, o condiție la limită

$$a_n = f\ (x, y, z) \quad \text{(pe suprafața } S). \tag{8}$$

Vom descompune problema în trei părți. In prima vom căuta un vector **a**, astfel încât el să satisfacă în domeniul Ω condițiile

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_1 = q\ (x, y, z,) \quad \text{şi} \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = 0 \,. \tag{9}$$

Nu vom impune vectorului $\mathbf{a}_1$ condiții la limită pe suprafață. In acest fel, va trebui să rezolvăm problema lui Poisson pentru un domeniu finit.

Cu toate acestea, nimic nu ne împedică să extindem această problemă şi să o rezolvăm pentru cazul *spațiului infinit;* pentru aceasta este deajuns să „prelungim" funcția $q\ (x, y, z)$ [1]) peste limitele domeniului făcând-o arbitrară înafara acestor limite, de exemplu egalând-o chiar cu zero. Vectorul $\mathbf{a}_1$ găsit pe această cale va satisface condițiile (9) *înlăuntrul limitelor domeniului considerat* Ω. Vom avea atunci groblema lui Poisson pentru un spațiu infinit şi ne vom putea folosi de rezultatele § 84, astfel încât

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_\infty \frac{\widetilde{q}}{r}\, dV, \tag{10}$$

în care $\widetilde{q}$ reprezintă funcția „prelungită" q.

In al doilea rând, vom căuta un vector **a** astfel încât el să satisfacă pentru domeniul nostru condiția

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \omega\ (x, y, z). \tag{11}$$

Nici aici nu vom pune condiții la limită. Vom extinde şi aici problema la un spațiu infinit, prelungind funcția $\omega\ (x, y, z)$ peste limitele domeniului Ω. Aci, totuşi, trebue să prelungim pe ω ținând seama de unele condiții. Trebue mai întâi ca $\operatorname{div} \widetilde{\omega} = 0$. Trebue apoi ca funcția $\widetilde{\omega}$ împreună cu primele sale derivate parțiale să fie continuă în orice punct, cu excepția posibilă a unui număr finit de suprafețe; pe aceste suprafețe componenta normală a vectorului $\widetilde{\omega}$ trebue să rămână continuă, doar cea tangențială putând suferi discontinuități.

In sfârşit, vectorul $\widetilde{\omega}$ trebue să fie, la infinit, de un ordin

---

1) Funcțiile inițiale din relațiile (1) $q\ (x, y, z)$ şi $\omega\ (x, y, z)$ sunt determinate numai în domeniul Ω.

de mărime superior lui doi — în raport cu $\frac{1}{R}$. Ţinând seama de aceste condiţii, problema poate fi rezolvată după formulele din § 85 adică

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_M \int_\infty \frac{\widetilde{\omega}}{r} dV \tag{12}$$

în care $\widetilde{\omega}$ reprezintă funcţia „prelungită" ω.

Găsindu-l pe $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ putem defini componentele lor normale pe suprafaţa limită S. Să presupunem că ele vor avea următoarele valori

$$\left.\begin{aligned} a_{1n} &= f_1 (x, y, z), \\ a_{2n} &= f_2 (x, y, z), \end{aligned}\right\} \text{ (pe suprafaţa } S). \tag{13}$$

Suma vectorilor $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ satisface relaţiile (1) înlăuntrul domeniului, căci

$$\operatorname{div} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2 = q\ (x, y, z),$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \omega\ (x, y, z,).$$

Dar această sumă *nu satisface* încă condiţia la limită (8) înlăuntrul domeniului, deoarece, pe suprafaţă, componenta ei normală este egală cu

$$a_{1n} + a_{2n} = f_1 + f_2.$$

Este necesar însă ca $a_n = f$.

Deaceea, în partea a treia a problemei, vom căuta un vector care să satisfacă în interiorul domeniului considerat condiţiile

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_3 = 0 \text{ şi } \operatorname{rot} \mathbf{a}_3 = 0. \tag{14}$$

Vom pune condiţia ca valoarea lui pe suprafaţa S să fie egală cu

$$a_{3n} = f - f_1 - f_2 = g\ (x, y, z). \tag{15}$$

Dacă vom reuşi să găsim un astfel de vector, atunci suma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \tag{16}$$

va constitui soluţia problemei.

Intr'adevăr, este evident că expresia (16) satisface condiţiile (1) căci

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = q \text{ şi } \operatorname{rot} \mathbf{a} = \omega$$

Pe suprafaţa S soluţia noastră se comportă astfel

$$a_n = a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} = f_1 + f_2 + (f - f_1 - f_2) = f,$$

adică *va satisface și condiția la limită (8).*

Să vedem la ce se reduce acum ultima parte a problemei.

Din ecuațiile (14) reiese că vectorul $\mathbf{a}_3$ trebue să formeze un câmp laplacian în domeniul finit Ω. Rezultă deci că funcția lui potențială ψ trebue să satisfacă relația lui Laplace în interiorul domeniului, sau

$$\Delta\psi = 0. \tag{17}$$

Funcția ψ trebue să satisfacă pe suprafața S următoarea condiție ce decurge din (15)

$$a_{3n} = \mathbf{n}\,\text{grad}\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = g\,(x, y, z). \tag{18}$$

Și astfel problema s'a redus la *aflarea unei astfel de funcții* ψ *care să satisfacă relația lui Laplace (17) înlăuntrul unui domeniu simplu conex finit oarecare și a cărei derivată normală să ia valori date $g\ (x,\ y,\ z)$ pe suprafața finită S.* Aceastā problemă poartă numele de problema lui Neumann în cursul de ecuații ale fizicei matematice, în care se dau și metodele ei de rezolvare.

Incheiere. — Prin aceasta încheiem scurta privire asupra problemelor determinării câmpurilor cu ajutorul divergențelor și rotorilor și asupra acelor probleme ale fizicei matematice de care este legată.

Nu ne-am referit la cazurile determinării câmpurilor în domeniile multiplu conexe, deoarece pentru aceasta ar fi fost necesar să desvoltăm o serie de generalizări ale formulei lui Green, date de Thomson Lord Kelvin precum și o serie întreagă de alte probleme cum ar fi, de exemplu, condițiile care permit determinismul și existența soluțiilor și cazul când funcțiile câmpului pot suferi discontinuități și multe altele. Pentru lămurirea lor trimitem cititorul la cursurile corespunzătoare ale fizicei matematice. [1]).

---

1) Vezi Webster și Sege „Ecuațiile diferențiale ale fizicei matematice" p. 11.

Capitolul XIV

CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

§ 88. CONSIDERAȚII GENERALE

Vom examina în încheiere, câteva probleme din teoria câmpului electromagnetic.

Să presupunem că într'un mediu fizic oarecare, au fost creiate simultan vectorii intensitate ai câmpului electric şi magnetic **E** și **H** care sunt, în general, funcțiuni nu numai de loc, ci şi de timp, adică

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\,(\mathbf{r}, t) \text{ şi } \mathbf{H} = \mathbf{H}\,(\mathbf{r}, t) \tag{1}$$

sau în coordonate cartesiene

$$\left.\begin{array}{ll} E_x = E_x\,(x, y, z, t), & H_x = H_x\,(x, y, z, t), \\ E_y = E_y\,(x, y, z, t), & H_y = H_y\,(x, y, z, t), \\ E_z = E_z\,(x, y, z, t), & H_z = H_z\,(x, y, z, t). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Domeniul Ω al unui astfel de mediu îl vom numi domeniul câmpului electromagnetic **E** şi **H** sau simplu — câmp electromagnetic.

Câmpul va fi determinat prin relațiile (1) şi (2).[1] Problema metodelor practice de creare a unui astfel de câmp este examinată în disciplinele tehnice corespunzătoare (radiotehnica, teoria electricității şi magnetismului ş. a.), ea neconstituind obiectul studiului nostru.

Ne vom limita, deci, la enumerarea câtorva exemple simple. Astfel, un mediu gazos nelimitat ce înconjoară o antenă, o bobină sau, în general, un conductor oarecare de curent alternativ constitue exemplul cel mai simplu de câmp electromagnetic. Tot aşa şi interiorul unei antene şi, în general, regiunea interioară a oricărui conductor străbătut de curent va constitui un exemplu de astfel de câmp.

Pentru caracterizarea deplină a unui câmp electromagnetic este necesar să se dea, înafara relației (1) şi mediul fizic, în care se produce aceasta.

După cum ne arată experiența, pentru o descriere matematică unică a proceselor electrice fundamentale ce au loc

---

1) In locul coordonatelor cartesiene, putem lua oricare altele, de exemplu coordonatele curbilinii q_1, q_2, q_3.

în acest mediu, odată cu apariţia unui câmp electromagnetic este absolut necesar să se cunoască constanta dielectrică ε, permeabilitatea magnetică μ şi conductibilitatea chimică γ. Intr'un mediu uniform, aceste valori sunt constante pentru toate punctele lui; în general, ele reprezintă funcţii oarecare de loc (uneori şi de timp).

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(x,y,z,t,), \\ \mu &= \mu(x,y,z,t,), \\ \gamma &= \gamma(x,y,z,t,). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Noţiunea de mediu este una dintre cele mai generale pe care le-a creat Maxwell. Prin mediu se poate subînţelege şi un spaţiu infinit ce înconjoară conductorii şi interiorul acestor conducători şi substanţa dielectricului dintre armăturile condesatorului ş. a. m. d.

După cum au arătat, primele cercetări ale lui Maxwell, variaţia vectorilor **E** şi **H** cu timpul, constitue o condiţie primordială pentru ca aceste câmpuri electromagnetice **E** şi **H** să fie electromagnetice în adevăratul sens al cuvântului.

După cum vom vedea mai jos, numai atunci are loc o interacţiune a câmpurilor electric şi magnetic şi există o legătură reciprocă între ele. Exprimată mai departe în limbaj matematic, această legătură duce la cunoscutele relaţii ale lui Maxwell, care constitue bazele întregii teorii.

O a doua condiţie esenţială a acestui câmp o constitue posibilitatea de a se propaga în spaţiu şi de a transmite energia din unele puncte în altele. In aceasta constă deosebirea esenţială de câmpurile statice care păstrează imobilă energia în acele puncte ale câmpului în care ea s'a strâns iniţial.

Relaţiile lui Maxwell constitue o generalizare matematică şi o trecere în domeniul câmpurilor variabile a unui întreg şir de legi fundamentale ale electrotehnicei teoretice şi, în primul rând, a legii integrale a lui Biot şi Savart referitoare la travaliul forţelor câmpului magnetic în cazul înconjurării curentului şi a legii lui Faraday asupra inducţiei electromagnetice.

Deaceea, pentru a le deduce, va trebui să examinăm unele din aceste legi. In acest studiu, vom căuta să evităm obişnuitele reprezentări strâmte, legate de sistemele de conductori, bobine, etc., şi vom da acestor legi o astfel de formulare încât ele să rămână valabile, oricare ar fi mediul considerat. In acelaş timp, vom da exprimarea lor în termenii corespunzători teoriei câmpurilor şi calculului vectorial.

§ 89. LEGEA LUI OHM SUB FORMĂ VECTORIALĂ PENTRU UN MEDIU CONDUCTOR

Fie un câmp electric într'un mediu conductor oarecare. Prin fiecare din punctele acestuia va trece un curent electric. Vom înțelege, ca deobicei, prin sensul curentului, sensul opus mișcării electronilor, adică sensul de trecere a sarcinii pozitive după direcția vectorului **E** dintr'un loc cu potențialul mai ridicat într'altul cu potențialul mai scăzut.

Să construim două suprafețe de nivel infinit apropiate, $V = \text{const}$ și $V_1 = \text{const}$ (fig, 167) și fie prin definiție $V > V_1$,

Să construim în punctul M un element de suprafață dS pe suprafața V și pe aceste drept bază, un cilindru infinit mic ABA_1B_1 de aceeași parte cu latura dn paralelă cu normala și orientată în sensul potențialului descrescător. Rezistența ohmică a acestui cilindru va fi

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{dn}{ds}.$$

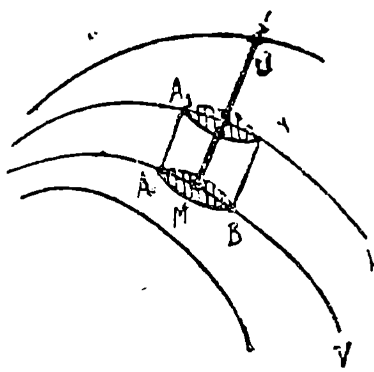


Fig. 167

Diferența potențialelor la extremitățile lui va fi $V - V_1 = dV$.

Să calculăm valoarea curentului în cilindru după legea lui Ohm

$$di = \frac{V - V_1}{R} = \gamma \frac{dV}{dn} dS. \qquad (1)$$

Introducem acum vectorul densitate de curent **u** în punctul M, egal în mărime cu raportul $\frac{di}{ds}$ al valorii curentului di către mărimea elementului ortogonal de suprafață dS și coincizând în direcție cu versorul $\mathbf{E}^0$ al vectorului **E**.

In acest caz obținem din formulele (1)

$$\left|\mathbf{u}\right| = \frac{di}{ds} = \gamma \left|\frac{dV}{dn}\right|.$$

Curentul este orientat de partea potențialului descrescător. Deaceea înmulțind ambii membri ai acestei relații cu versorul $\mathbf{E}^0$, perpendicular pe suprafața $V = \text{const}$, obținem sub formă vectorială

$$\mathbf{u} = \gamma \left|\frac{dV}{dn}\right| \mathbf{E}^0. \qquad (2)$$

Dar valoarea absolută $\left|\frac{dV}{dn}\right|$, ca valoare a funcției derivate V, după normală la suprafața $V =$ const, reprezintă tocmai valoarea $|\mathbf{E}|$ căci

$$E = |\mathbf{E}| = |-\operatorname{grad} V| = \left|\frac{dV}{dn}\right|,$$

de unde obținem din (2)

$$\mathbf{u} = \gamma E \mathbf{E}^0$$

sau în sfârșit

$$\mathbf{u} = \gamma \mathbf{E}. \tag{3}$$

Aceasta constitue tocmai legea lui Ohm sub formă vectorială.

Importanța formulei (3) constă în aceea că ea exprimă legea locală, adică legea referitoare la punctul M al câmpului, la fel cum sub forma (1) legea se referă la volumul elementului de cilindru ABA_1B_1, adică la o întreagă porțiune de curent.

Deaceea, formula (3) poartă uneori numele de expresie „locală" sau „diferențială" a legii lui Ohm, spre deosebire de forma obișnuită sau „integrală" $\frac{V - V_1}{R}$.

In cuvinte, o putem enunța astfel: dacă într'un punct oarecare al unui mediu conductor se produce un câmp electric $\mathbf{E}$, atunci în fiecare punct al lui se va produce un curent de conducție; vectorul densitate de curent $\mathbf{u}$ raportat la 1 cm^2 de secțiune transversală, ortogonală pe direcția curentului, este egal în mărime cu produsul γE și orientat după vectorul $\mathbf{E}$.

Importanța esențială a formulei (3) constă în următoarele: în timp ce formula (1) este valabilă numai pentru un câmp potențial, fiind legată de funcția potențială V, formula (3) poate fi extinsă și asupra câmpurilor de orice tip, de exemplu asupra câmpurilor variabile [1]), căci în această formulă câmpul este în dependență nu de V, ci de vectorul $\mathbf{E}$ care constitue cauza mișcării sarcinilor libere.

---

(1) După cum vom vedea mai departe, în câmpurile variabile $\mathbf{E}$ va fi în general nepotențial. Valabilitatea formulei (3) pentru orice câmp magnetic este admisă ca un postulat al fizicii (se verifică a posteriori, adică pe baza corespondenței dintre deducțiile teoretice și experiență.)

§ 90. CURENTUL DE DEPLASARE, MEDIUL DE FORMĂ GENERALĂ

Noţiunea de curent de deplasare constitue una dintre cele mai importante noţiuni introduse de Maxwell în teoria fenomenelor electrice produse în dielectric.

El reprezintă, după cum se ştie, o consecutivitate de impulsuri instantanee ale polarizaţiei dielectricului, transmise dela un strat al dielectricului la altul, odată cu variaţia tensiunii în conductorii despărţiţi de stratul de dielectric (fig. 168).

Aşa, de exemplu, la apariţia unei sarcini oarecare ΔQ pe armătura MN a condensatorului (fig. 168), în stratul adiacent al dielectricului se va produce o deplasare a orbitelor electronilor într'un sens şi una a nucleilor pozitivi în celălalt sens. Lucrurile se întâmplă la fel ca şi când o sarcină, egală cu ΔQ, ar fi fost transmisă de pe armătura MN pe stratul infinit vecin AB-al dielectricului; ea va fi transmisă pe aceeaşi cale dela aceasta din urmă la cel învecinat $A_1 B_1$ şi aşa mai departe până la armătura următoare M_1N_1. Curentul de deplasare în dielectric constituie o continuare a curentului de conducţie din conductor. Dacă armăturile condensatorului se află sub o tensiune variabilă $e(t)$, se va produce încontinuu o transmisie de impulsuri de polarizaţie, când într'o parte, când într'alta, adică, se va produce un curent continuu în timp, care poartă numele de curent de deplasare. Valoarea acestui curent se determină din egalitatea

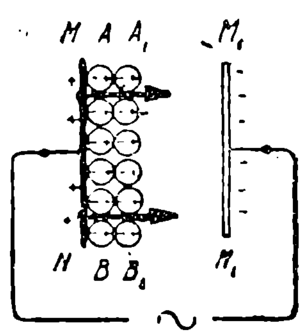


Fig. 168

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt},$$

unde Δt reprezintă timpul în care se obţine o creştere de sarcină ΔQ pe armătura MN. Dacă însemnăm prin $Q = \sigma S$ sarcina variabilă de pe conductorul MN, în care σ reprezintă densitatea superficială, iar S — aria suprafeţei conductorului avem

$$i = \frac{dQ}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}.$$

Dar, după formula cunoscută, densitatea superficială σ este legată de valoarea $|\mathbf{E}|$ a câmpului electric pe suprafaţa conductorului prin relaţia $|\mathbf{E}| = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$. De aici

$$i = S \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} (\varepsilon E), \tag{1}$$

iar densitatea de curent u raportată la unitatea de suprafață, ortogonală pe $\mathbf{E}$, va fi

$$u = \frac{i}{s} = \frac{1}{4\pi} \frac{d(\varepsilon E)}{dt},$$

sau, sub formă vectorială (înmulțind ambii membrii prin versorul $\mathbf{n}$ perpendicular pe suprafața S în punctul dat, orientat în sensul lui $\mathbf{E}$ și introducând pe $\mathbf{n}$ ca factor constant, sub semnul derivației),

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d(\varepsilon \mathbf{n} E)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{d(\varepsilon \mathbf{E})}{dt}. \tag{2}$$

Formula (2) se poate scrie și sub forma

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}, \tag{2'}$$

în care vectorul

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon^1}{4\pi}\mathbf{E} \tag{3}$$

poartă numele de vector deplasare în punctul dat al dielectricului.

Cu toate că formula (2) este dedusă numai pentru stratul dielectricului adiacent suprafeței conductorului, o putem extinde la orice strat care se află în intériorul acestuia. Ea este deci, generală pentru orice dielectric.

In cuvinte, ea se enunță astfel: dacă într'un mediu dielectric ε se creează un câmp electric $\mathbf{E}$, variabil în timp ($\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$), atunci în fiecare punct al mediului se va produce un curent de deplasare; vectorul — densitate $\mathbf{u}$ al curentului ce trece prin elementul de suprafață de 1 cm^2, perpendicular pe $\mathbf{u}$, se determină prin formula (2).

Trebue să observăm că acest curent de deplasare se produce numai într'un câmp electric variabil.

Dacă, însă, ε și $\mathbf{E}$ sunt independente de timp, derivata lui $\varepsilon \mathbf{E}$ este nulă, iar curentul de deplasare dispare.

Maxwell, referindu-se la curentul de deplasare, a presupus că în raport cu fenomenele magnetice, el posedă aceleași proprietăți, ca și curentul de conducție și anume că el poate crea în mediul înconjurător un câmp magnetic, asemănător câmpului curentului de conducție, și produce apariția unui fenomen de inducție în conductorii învecinați. Valabilitatea acestei ipoteze este întărită de coincidența dintre deducțiile teoretice și experiență. Ulterior, această afirmație a fost verificată nemijlocit, pe calea încercărilor directe.

Teoria lui Maxwell adâncește această generalizare referitoare la curentul de deplasare. Să presupunem astfel că avem un mediu oarecare (semiconductor) caracterizat prin constanta dielectrică ε şi conductanţa ohmică γ. Maxwell presupune în acest caz că într'un astfel de mediu se produc, în fiecare punct, sub influenţa câmpului electric **E**, ambii curenţi (adică atât curentul de conducţie, cât şi cel de deplasare). Vectorul densitate total va fi suma lor geometrică, adică

$$\mathbf{u}_{tot} = \mathbf{u}_{cond} + \mathbf{u}_{depl}, \tag{4}$$

sau

$$\mathbf{u} = \gamma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}. \tag{5}$$

Dacă mediul se apropie, prin proprietăţile lui, de conductor, primul termen capătă o importanţă primordială; dacă se apropie de dielectric, cel de al doilea termen devine hotărîtor.

Al doilea termen poate prezenta o mare importanţă şi în câmpurile repede variabile, unde derivata lui ε **E** în raport cu timpul poate căpăta valori însemnate.

Fie în punctul M al mediului (fig. 169) un element infinitezimal de suprafaţă dS care nu este ortogonal pe vectorul **u**. In acest caz, ţinând seama de definiţia densităţii, este evident că curentul electric di ce străbate acest element va fi egal cu

$$di = udS' = udS \cos(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = \mathbf{un}\, dS, \tag{6}$$

în care dS reprezintă elementul de suprafaţă ortogonal **u**.

Vom extinde această formulă şi pentru cazul în care normala **n** face un unghi obtuz cu direcţia lui **u**.

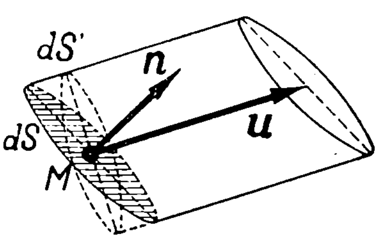


Fig. 169

Vom considera astfel valoarea curentului prin acest element de suprafaţă în direcţia normalei date **n** drept o mărime algebrică, sensul lui depinzând de alegerea normalei.

In sfârşit, dacă suprafaţa S va avea dimensiuni finite şi o formă arbitrară, este evident că

$$i = \int_S \mathbf{un}\, dS. \tag{7}$$

§ 91. TRAVALIUL CÂMPULUI MAGNETIC LA INCONJURAREA UNUI CONTUR STRĂBĂTUT DE CURENT.

O importanţă deosebită pentru deducerea ecuaţiilor lui Maxwell, o prezintă teorema travaliului forţelor câmpului magnetic în mişcarea împrejurul unui curent. Să o deducem sub forma ei generală.

Fie, în fig. 170, conturul închis D străbătut de curentul i, a cărui orientare este indicată de săgeată. Să luăm un alt contur închis C care se înlănţue cu conturul D la fel ca verigile unui lanţ şi să-l parcurgem astfel încât el să fie legat de direcţia curentului i după legea lui Maxwell. Să calculăm travaliul forţelor câmpului magnetic **H** la parcurgerea conturului C şi să arătăm că

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 4\pi i,$$

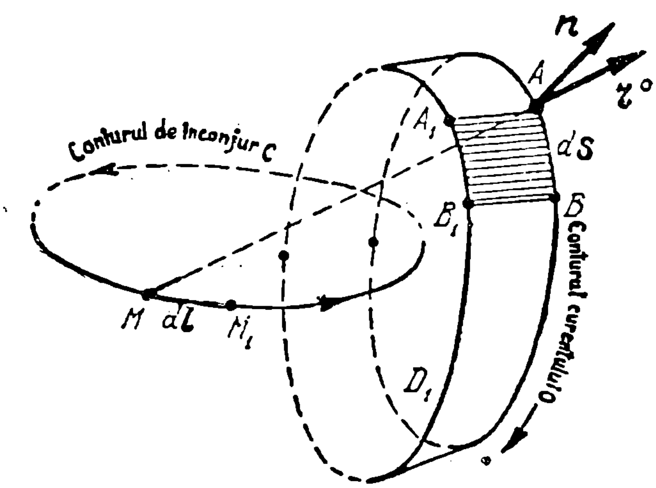


Fig. 170

adică să arătăm că *el este independent de natura drumului şi are o valoare constantă* $4\pi \mathbf{i}$.

1° Să luăm un punct arbitrar M pe conturul C şi să determinăm valoarea intensităţii câmpului **H** creat în acesta de către curentul i ce circulă prin D.

Fie $\overline{AB} = d\mathbf{s}$ un element de contur al curentului. In acest caz, el creează în punctul M, după legea lui Biot şi Savart, un vector elementar

$$d\mathbf{H} = i \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{r}_1]}{r^2},$$

în care $\mathbf{r}_1$ reprezintă versorul vectorului $\overline{AM}$.

Reamintim că în legea lui Biot-Savart, orientarea vectorului $\overline{AM}$ se ia întotdeauna „dela punctul“ A, ce produce câmpul „spre punctul studiat“ M. Valoarea întreagă a lui **H** creat de întregul curent i în punctul M va fi

$$\mathbf{H} = i \oint_D \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{r}_1]}{r^2},$$

integrarea efectuându-se *de-a-lungul conturului D al curentului.*

2° Să ne deplasăm acum pe conturul C din punctul M într'un punct infinit vecin M_1, cu $MM_1 = d\mathbf{l}$. In acest caz travaliul elementar al vectorului **H** în această deplasare va fi

$$dA = \mathbf{H} d\mathbf{l} = i d\mathbf{l} \oint_D \frac{[d\mathbf{s}\mathbf{r}_1]}{r^2} = i \oint_D \frac{d\mathbf{l}[d\mathbf{s}\mathbf{r}_1]}{r^2}$$

(factorul **dl** fiind constant, poate fi introdus sub semnul integralei). Vom efectua o permutare ciclică a factorilor produsului mixt; vom mai introduce deasemenea un semn minus suplimentar în fața lui **dl** pentru motive pe care le vom arăta mai jos. Astfel

$$dA = -i \oint_D \frac{\mathbf{r}_1 [-d\mathbf{l}\, d\mathbf{s}]}{r^2}.$$

Vectorul $d\mathbf{l}$ reprezintă deplasarea punctului considerat din M în M_1. In loc de aceasta vom lăsa punctul M fix și vom deplasa printr'o translație întregul contur al curentului D, ca un tot în direcția lui M cu $AA_1 = -d\mathbf{l}$.

Este evident că în acest caz poziția reciprocă a *conturului deplasat* D_1 și a punctului M va fi aceeași ca și poziția punctului deplasat M_1 față de conturul inițial D. Cu alte cuvinte, am schimbat mișcarea punctului M în direcția conturului D printr'o mișcare inversă a conturului D în direcția lui M. Și astfel

$$dA = -i \oint_D \frac{\mathbf{r}_1 [\overline{AA_1}\, d\mathbf{s}]}{r^2}.$$

Dar produsul $[\overline{AA_1}\, d\mathbf{s}]$ constitue reprezentarea vectorială a elementului de suprafață AA_1BB_1 format de pozițiile succesive ale elementului AB în mișcarea lui de translație. Prin aceasta

$$[\overline{AA_1}\, d\mathbf{s}] = \mathbf{n}\, d\sigma,$$

în care $\mathbf{n}$ reprezintă versorul normal la elementul de suprafață, orientat așa cum se vede în figură. Introducem, în sfârșit, versorul $\mathbf{r}^0 = -\mathbf{r}_1$, adică versorul orientării inverse dela M spre A. Integrala se va scrie în acest caz

$$dA = i \oint_D \frac{\mathbf{r}^0 \mathbf{n}}{r^2}\, d\sigma. \qquad (1)$$

Dar expresia $\frac{\mathbf{r}^0 \mathbf{n}}{r^2}\, d\sigma = \delta\omega$ reprezintă unghiul solid sub care este văzut elementul de suprafață AA_1BB_1, din punctul M. Lucrul acesta reiese din fig. 171, în care elementul este mărit. Să descriem, într'adevăr, din M o sferă de rază MA trecând prin A și să ducem

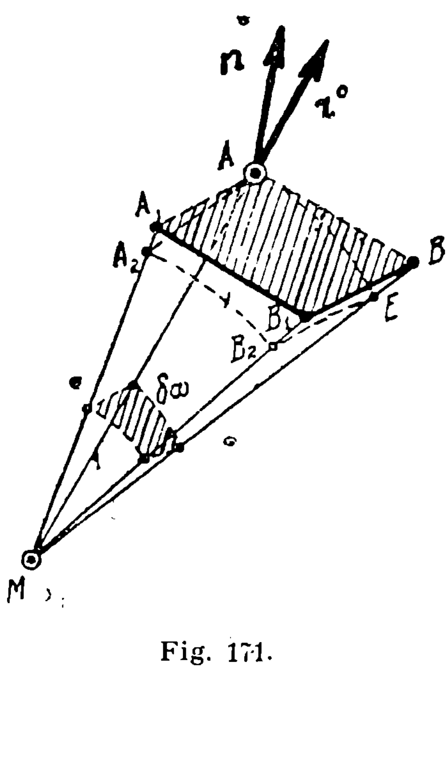


Fig. 171.

din M razele către vârful elementului de suprafață $d\sigma$. In acest caz, produsul $\mathbf{r}^0\mathbf{n}\, d\sigma = d\sigma \cos(\mathbf{r}^0, \mathbf{n}) = d\sigma'$, constitue suprafața elementului AA_2EB_2 al acestei sfere, iar raportul $\frac{d\sigma'}{r^2}$ este egal cu unghiul solid $\delta\omega$. Rezultă că travaliul elementar (1) poate fi reprezentat sub forma

$$dA = i \oint_D \delta\omega. \qquad (1')$$

Integrala din membrul drept al formulei, fiind suma elementelor $\delta\omega$, ne dă unghiul solid ω sub care este văzută din M întreaga suprafață inelară, cuprinsă între contururile D și D_1, formată de pozițiile succesive ale conturului D atunci când aceasta se deplasează în poziția D_1 (fig. 170).

3° Să însemnăm prin Ω unghiul solid sub care este văzut din M conturul D și prin Ω_1 unghiul corespunzător conturului D_1 (fig. 172),

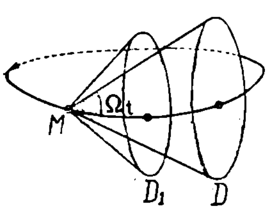


Fig. 172.

Reiese din desen că

$$\oint_D \delta\omega = \Omega_1 - \Omega = d\Omega,$$

de unde

$$dA = i\,(\Omega_1 - \Omega) = i d\,\Omega. \qquad (2)$$

4° Parcurgem acum conturul C începând dintr'un punct oarecare M_0 (fig. 173) terminându-ne drumul în acelaşi punct. Travaliul total A va fi în acest caz

$$A = \lim_{(c)} \Sigma\, dA = i \lim_{(c)} \Sigma\, d\Omega = i\,(\Omega_{fin} - \Omega_0), \qquad (3)$$

în care Ω_0 reprezintă valoarea inițială a unghiului solid, sub care este văzut din M conturul D, iar Ω_{fin} reprezintă valoarea finală pe care o ia unghiul la sfârşitul parcursului. Afirmăm că

$$\Omega_{fin} = \Omega_0 + 4\pi,$$

sau: unghiul solid, ca funcție de punctul M, variind neîncetat în timpul parcurgerii conturului C, ce se interpătrunde cu D, capătă în punctul M_0 o valoare mărită cu 4π,

Lucrul acesta reiese din fig. 173, în care este arătat conturul curentului obținut prin intersecția lui D și D_1 cu planul desenului. Semnul ⊕ arată că sensul curentului este dela noi spre planul figurii, iar semnul ⊙ arată că sensul curentului este dela planul figurii spre noi.

Conturul C este reprezentat printr'o linie punctată. M_0,

M_1, M_2, $M_3 \ldots$,. sunt pozițiile succesive ale punctului M în timpul parcursului. Linia întreruptă indică, prin definiție, variația continuă a unghiului solid Ω dela vlaoarea inițială Ω_0 până la

$$\Omega_{\text{fin}} = \Omega_0 + 4\pi.$$

Și astfel, din formula (3) se obține

$$A = \oint_c \mathbf{H}\, d\, \mathbf{l} = 4\pi i, \quad q.e.d.$$

Această formulă poartă uneori numele de legea integrală a lui Biot-Savart.

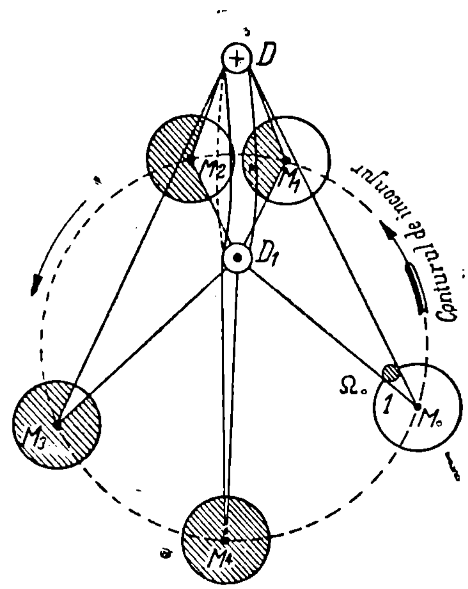


Fig. 173

§ 92. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

Să scriem acum legea inducției electromagnetice sub formă vectorială.

Fie un câmp magnetic variabil **H** produs într'un mediu de permeabilitate magnetică μ. Vectorul $\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H}$ poartă numele de vector inducție magnetică, iar liniile vectoriale ale câmpului **B** — linii de inducție magnetică (fig. 174).

Fie C un contur închis oarecare, situat în acest câmp, a cărui direcție de parcurs este dată și S o suprafață oarecare, limitată de acest contur. Normala **n** în diferitele puncte ale acestei suprafețe o stabilim în raport cu direcția de parcurgere a conturului, după regula sistemului dextrotors. Fluxul vectorului **B** prin suprafața S

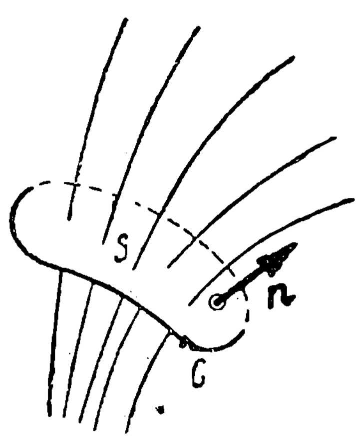


Fig. 174

$$\Phi = \oint_s \mathbf{B}\, \mathbf{n}\, dS$$

îl vom numi flux de inducție magnetică, străbătând conturul C sau suprafața S. Acest flux este în general o funcție de t, dacă **H** depinde de t.

Legea inducției electromagnetice a lui Faraday spune în acest caz că variația fluxului Φ produce o forță electromotoare de inducție în conturul C, depinzând de viteza variației fluxului în raport cu timpul și egală cu

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dS. \qquad (1)$$

Dacă conturul C ar fi făcut dintr'un material conductor, această forță ar fi determinat în el apariția unui curent. Dar deoarece curentul, adică mișcarea sarcinilor electrice, se produce datorită existenței unui câmp electric E, rezultă că legea lui Faraday conține afirmația că variația câmpului magnetic aduce cu sine o variație corespunzătoare (sau o apariție) a curentului electric în spațiul înconjurător.

Vom exprima acum forța electromotoare e din conturul C prin integrala de linie $\oint_c \mathbf{E}\,dl$, luată în sensul de parcurgere, așa cum se obișnuiește în electrodinamică. Legea lui Faraday va lua în acest caz forma

$$\int_c \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dS, \qquad (2)$$

sau introducând derivata în raport cu t sub semnul integralei

$$\int_c \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,\mathbf{n}\,dt \qquad (2')$$

Astfel, *legea lui Faraday conține noțiunea de interdependență sau de legătură reciprocă dintre câmpurile magnetic și electric.* Aceeași idee, dar sub altă formă, o exprimă și legea lui Biot și Savart

$$\int_c \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = 4\,\pi\,i,$$

în măsura în care în membrul stâng intră vectorul **H**, iar în cel drept — vectorul **E** prin intermediul curentului i (vezi legea lui Ohm și formulele pentru curentul de deplasare).

Meritul cel mai mare al lui Maxwell constă tocmai în aceea că el a observat primul această interdependență și a considerat problema aceasta pe o scară largă, făcând din ea baza teoriei sale.

Inafară de aceasta, el a reușit să dea acestei idei o formă matematică finită, exprimând-o în celebrele sale ecuații diferențiale, din care s'au putut face o serie de deducții teoretice și practice de cea mai mare importanță (îndeosebi legile de propagare ale undelor electromagnetice și crearea teoriei electromagnetice a luminii). Vom deduce aceste legi în cele ce urmează.

§ 93. DEDUCEREA RELAŢIILOR LUI MAXWELL

Vom pune problema sub forma următoare. Fie într'un mediu oarecare (ε, μ, γ) un câmp electromagnetic **E** şi **H** produs pe o cale oarecare, în care vectorii **E** şi **H** sunt nişte funcţiuni oarecare de loc şi timp. Experienţa (vezi, de exemplu, raţionamentul dela sfârşitul paragrafului precedent) ne arată că aceste câmpuri **E** şi **H** sunt interdependente[1]. Se pune problema de a exprima matematic această interdependenţă.

Să ducem prin punctul considerat M un element plan de suprafaţă S de dimensiuni arbitrare (fig. 175). Conturul ce delimitează elementul de suprafaţă îl vom însemna prin C. Să luăm apoi pe contur un sens arbitrar de parcurgere, indicat de săgeată, în figură, şi să ducem normala **n** la elementul de suprafaţă conform orientării alese după regula sistemului dextrotors.

Datorită existenţei vectorului **E** rezultă conform cu § 90 că în fiecare punct al mediului vom avea un vector densitate de curent **u** alcătuit dintr'un curent de conducţie şi un curent de deplasare.

$$\mathbf{u} = \gamma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}. \qquad (1)$$

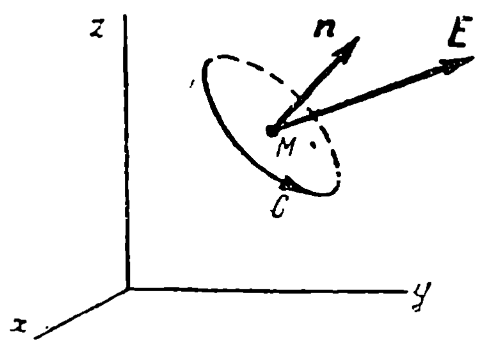


Fig. 175

In acest caz, prin suprafaţa S va trece un curent de intensitate.

$$i = \int_S \mathbf{u}\, \mathbf{n}\, dS.$$

având direcţia normalei **n**.

Acest curent va fi legat de câmpul magnetic **H** după legea lui Biot-Savart. Să parcurgem conturul C după direcţia indicată mai sus şi să calculăm circulaţia vectorului **H**.

Putem scrie după formula din § 91

$$\int_C \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = 4\pi i = 4\pi \int_S \mathbf{u}\, \mathbf{n}\, dS, \qquad (2)$$

1) După cum vom vedea mai departe, această dependenţă este reciprocă, adică variaţiile câmpului electric pot produce variaţii corespunzătoare ale câmpului magnetic şi invers. Deaceea este mai just să considerăm vectorii **E** şi **H** ca două feţe sau ca două manifestări ale aceleiaşi cantităţi fizice unice, şi anume ale unui câmp electromagnetic unic.

sau înlocuind pe **u**

$$\oint_S \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = 4\pi \int_S \left\{ \gamma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right\} \mathbf{n} dS. \qquad (2')$$

Avem astfel înaintea noastră o dependenţă integrală oarecare între **E** şi **H** în domeniul elementului de suprafaţă S ales arbitrar şi deci nelegat de proprietăţile câmpului ca atare.

Să exprimăm această dependenţă sub o formă locală. Vom transforma în membrul stâng al relaţiei (2), integrala curbilinie a vectorului **H** dealungul conturului C, conform legii lui Stokes, într'o integrală dublă a rotorului lui **H**, luată pe suprafaţa S, adică

$$\oint_S \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\, rot\, \mathbf{H}\, dS.$$

In acest caz, relaţia (2) ia forma

$$\int_S \mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{H}\, dS = 4\pi \int_S \left\{ \gamma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right\} \mathbf{n}\, dS. \qquad (3)$$

Deoarece această relaţie este valabilă pentru orice element de suprafaţă, putem să o aplicăm *elementului infinitezimal* ΔS considerat în punctul M. Dar în acest caz, datorită dimensiunilor infinitezimale ale lui ΔS, fiecare dintre integralele (3) se raportează la un singur element numai, şi relaţia devine

$$(\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{H})_M \cdot \Delta S = 4\pi (\mathbf{u}\mathbf{n})_M \cdot \Delta S + \alpha$$

(cu aproximaţia unui infinit mic α de ordin superior).

Impărţind prin ΔS şi trecând la limită, observând că pentru $\Delta S \to 0$ elementul de suprafaţă se reduce la un punct M, obţinem o relaţie între **H** şi **u** *referitoare la punctul ales M*

$$\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{n}\, 4\pi \mathbf{u},$$

adică proiecţia lui rot **H** pe o direcţie oarecare **u** este egală cu proiecţia vectorului 4π **u** pe aceiaşi direcţie. Dar, deoarece egalitatea acestor proiecţii este valabilă pentru *toate direcţiile posibile* **n**, rezultă că însişi vectorii **H** şi 4π **u** sunt egali în punctul dat, sau [1]).

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{u} \qquad (5)$$

sau

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \left\{ \gamma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right\}. \qquad (5')$$

1) Vezi şi în observaţia asupra egalităţii a două produse scalare care conţin un factor arbitrar.

Egalitatea (5) reprezintă prima relație a lui Maxwell sub forma vectorială ce leagă pe **H** *și* **E** *în punctul considerat.*

După cum am arătat mai sus, ea se referă la un punct dat și deaceea [spre deosebire de legea integrală (2)] exprimă legea diferențială sau locală.

Din punct de vedere fizic, ea ne spune că *liniile de curent electric* **u** *constituie linii rotorice pentru câmpul magnetic* **H**.

Observație. Am mai întâlnit o astfel de relație în § 61, capitolul IX, dar acolo ea a fost dedusă numai pentru cazul particular al unui conductor cilindric infinit lung. Acum însă, am obținut-o pentru cazul general al unui câmp electromagnetic.

Pentru a deduce cea de a doua relație a lui Maxwell, ne vom întoarce la elementul de suprafață S (fig. 175) și ne vom folosi de legea lui Faraday. Datorită vectorului **H** (t) prin elementul de suprafață S va trece un flux de inducție magnetică

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dS = \int_S \mu\,\mathbf{H}\,\mathbf{n}\,dS.$$

In acest caz putem aplica conturului C legea inducției a lui Faraday sub forma

$$\oint_C \mathbf{E}\,d\,\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mu\,\mathbf{H}\,\mathbf{n}\,dS.$$

Derivata $\frac{\partial}{\partial t}$ poate fi introdusă sub semnul integralei.

Intr'adevăr, integrarea din membrul drept se face în raport cu coordonatele x, y și z ale punctului de pe elementul de suprafață S. Timpul t intră deci în funcția de sub integrală ca parametru. Deoarece limitele integralei nu depind de t (ele sunt determinate de contur), derivata integralei definite în în raport cu parametrul este egală cu integrala derivatei funcției de sub integrală, adică

$$\oint_C \mathbf{E}\,d\,\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial(\mu\,\mathbf{H}\,\mathbf{n})}{\partial t}\,dS. \tag{6}$$

Am obținut a doua relație dintre **E** și **H** sub forma integrală o vom transforma la fel ca mai înainte. Vom înlocui mai întâi integrala de linie din membrul stâng printr'o integrală dublă, după teorema lui Stokes

$$\oint_C \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\,dS.$$

In acest caz

$$\int_S \mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{E} \, dS = - \int_S \mathbf{n} \frac{\partial (\mu \mathbf{H} \mathbf{n})}{\partial t} dS.$$

Deoarece factorul **n** este independent de timp, îl putem scoate în fața semnului derivatei și obținem

$$\int_S \mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{E} \, dS = - \int_S \mathbf{n} \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} dS.$$

Trecând acum la elementul infinitezimal de suprafață ΔS putem scrie

$$\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{E} \cdot \Delta S = - \mathbf{n} \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} \cdot \Delta S + \beta,$$

β fiind un infinit mic de ordin superior în raport cu ΔS. In sfârșit, impărțind cu ΔS și făcând elementul de suprafață să tindă către punctul M, obținem la limită

$$\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{E} = - \mathbf{n} \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t},$$

sau

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t}. \tag{7}$$

Aceasta este a doua relație a lui Maxwell sub forma vectorială.

Ca și precedenta, ea exprimă o lege locală și leagă între ei vectorii **E** și **H** în fiecare punct al câmpului.

Din punct de vedere fizic. se exprimă două lucruri:

a) că în câmpurile electromagnetice variabile, câmpul electric **E** nu mai este, în general un câmp potențial, căci rot **E** este diferit de zero și egal cu $-\frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t}$;

b) că liniile vectoriale ale câmpului $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ sunt linii rotorice ale câmpului **E**.

§ 94. RELAȚIILE LUI MAXWELL IN COORDONATE CARTESIENE

Am găsit deci că într'un câmp electromagnetic vectorii **E** și **H** sunt legați între ei în fiecare punct prin relațiile

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4 \pi \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}. \tag{I}$$

şi

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial(\mu\,\mathbf{E})}{\partial t}. \qquad \text{(II)}$$

La aceste două relaţii ale lui Maxwell se mai adaugă două relaţii complimentare. Una dintre ele

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

sau, sub formă mai generală

$$\text{div}\,(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho \qquad \text{(III)}$$

poate fi trecută, sub formă de postulat, din domeniul câmpurilor, electrostatice în domeniul câmpurilor variabile. Cealaltă

$$\text{div}\,(\mu\mathbf{H}) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

se stabileşte ţinând seama de faptul că liniile de inducţie magnetică $\mu\,\mathbf{H}$ apar sub forma unor linii închise în experienţele noastre şi deci câmpul vectorial $\mu\,\mathbf{H}$ este un câmp solenoidal (fără surse).

Valabilitatea acestor presupuneri, la fel ca şi o serie de altele, transpuse de teoria lui Maxwell din domeniul câmpurilor statice în domeniul câmpurilor variabile [1]) se demonstrează a posteriori, adică prin aceea că toate deducţiile teoretice se adeveresc în practică.

Dacă vom descompune pe **E** şi **H** după versori

$$\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j} + E_z\,\mathbf{k} \text{ şi } \mathbf{H} = H_x\,\mathbf{i} + H_y\,\mathbf{j} + H_z\,\mathbf{k},$$

relaţiile I-IV vor căpăta, în coordonate cortesiene, forma unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Şi anume, prima dintre ele se descompune în următoarele trei

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi\gamma E_x + \frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi\gamma E_y + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi\gamma E_z + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Ia)}$$

(1) Aşa sunt, de exemplu, relaţiile dintre proiecţiile normale şi tangenţiale ale câmpului şi intensitatea curenţilor pe suprafeţele de discontinuitate, sau la limitele de trecere din unele medii într'altele :

$$D_{n_1} + D_{n_2} = \sigma,$$
$$B_{n_1} + B_{n_2} = 0$$
$$E_{t_1} = E_{t_2}$$
$$H_{t_1} = H_{t_2}$$
$$U_{n_1} + U_{n_2} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

A doua relație ne dă

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial (\mu H_x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial (\mu H_y)}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial (\mu H_z)}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IIa)}$$

In sfârşit, (III) și (IV) se vor scrie

$$\frac{\partial (\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon E_z)}{\partial z} = 4\pi\rho, \qquad \text{(IIIa)}$$

$$\frac{\partial (\mu H_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu H_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu H_z)}{\partial z} = 0. \qquad \text{(IVa)}$$

Proiecțiile E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z și densitatea sarcinilor ρ sunt legate astfel între ele printr'un sistem de 8 ecuații diferențiale cu derivate parțiale de tipul I — IVa.

Rezultă de aici că cunoscând proprietățile mediului, adică pe ε, μ și γ, precum și unele condiții inițiale și la limită (cunoscând adică starea câmpului într'un moment inițial oarecare t_0 și valoarea lui pe suprafețele limită sau alte suprafețe oarecare) putem rezolva problema aflării naturii câmpului într'un moment oarecare t și într'un punct arbitrar, integrând acest sistem de ecuații.

Cu alte cuvinte, se poate prevedea modul în care vor decurge procesele electrice și magnetice în mediul considerat, din ecuațiile inițiale și la limită. In aceasta constă tocmai importanța principală fizico-matematică a relațiilor lui Maxwell.

Deoarece numărul necunoscutelor este de 7, iar cel al ecuațiilor de 8, apare aici problema compatibilității lor.

Să examinăm această problemă considerând forma vectorială. Să demonstrăm anume că dacă în momentul inițial t_0, câmpul $\mathbf{H}_0$ este luat astfel încât $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_0) = 0$, în orice alt moment t, relația (IV) va fi satisfăcută și va constitui o consecință a relației (II). Intr'adevăr, deoarece pentru orice câmp $\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, reiese din relația (II) că în orice moment t vom avea

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} = 0. \qquad (V)$$

Intervertind operatorul div și derivata $\frac{\partial}{\partial t}$ între ei (ceeace este posibil, deoarece operația aflării divergenței este echivalentă cu efectuarea unei serii de derivări parțiale în raport cu coordonatele x, y și z) vom obține relația valabilă pentru orice moment t.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mu \mathbf{H}) = 0,$$

Rezultă de aici că expresia div ($\mu\mathbf{H}$) în fiecare punct al câmpului este independentă de timpul t și egală cu o constantă, oricare ar fi valoarea t

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = \text{const}$$

Dar dacă ni se dă că în momentul inițial t_0 divergența lui $\mu\mathbf{H}$ este nulă, rezultă că ea va rămâne nulă și în momentele următoare, prin aceasta verificându-se și valabilitatea formulei (IV).

Observăm, în încheere, că la deducerea relațiilor lui Maxwell au apărut subînțelese următoarele presupuneri:

a) isotropismul mediului;
b) permeabilitatea magnetică μ este independentă de inducția magnetică $\mathbf{B}$ și
c) mediul este imobil.

Rezultă că relațiile lui Maxwell considerate aici (sub forma I-IV) nu pot fi valabile și pentru acele fenomene cum sunt procesele electromagnetice din mediile cristaline, fenomenele care au loc în substanțele electromagnetice, precum și electrodinamica mediilor mobile.

Inafară de aceasta, în categoria fenomenelor care nu sunt cuprinse de teoria lui Maxwell în forma considerată aici, intră și fenomenele electronice, deoarece acele legi fundamentale a căror generalizare stă la baza teoriei lui Maxwell prin însăși esența lor aparțin acelor așa numite legi „microscopice" ale electricității și nu ating problemele structurii atomului.

Observații asupra sistemului de unități. Am presupus până aici, în deducerile noastre, că toate mărimile fizice care intră în relațiile noastre sunt măsurate într'un sistem oarecare de unități; de exemplu în sistemul electromagnetic absolut sau sistemul electrostatic absolut ș. a. m. d.

Totuși, în practică, se impune folosirea pe de-antregul a așa numitului sistem „mixt" de unități. El constă, în esență, în aceea că toate mărimile legate de câmpul electric cum sunt ε, $\mathbf{E}$, ρ, $\mathbf{u}$, i, γ ș. a. m. d. se transformă în unități electrostatice absolute, iar mărimile legate de câmpul magnetic cum sunt μ, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, ș. a. se transformă în unități electromagnetice absolute.

In acest caz, forma relațiilor I-IV se schimbă întrucâtva, și anume apare coeficientul de transformare c, egal în valoare numerică cu 3×10^{10} care permite trecerea dela un sistem de unităţi la celălalt.

Să demonstrăm aceasta. Să presupunem că la început, în legea iniţială a lui Biot şi Savart

$$\oint_C \mathbf{H}_{e.m.}\, d\mathbf{l} = 4\pi \mathbf{i}_{e.m.} \tag{1}$$

ambele mărimi **H** şi i au fost măsurate în unităţi electromagnetice absolute. Dacă vom măsura acum aceeaşi intensitate i a curentului din membrul drept în unităţi electrostatice absolute acesta va creşte şi egalitatea nu va mai fi valabilă, deoarece unitatea electrostatică absolută de intensitate a curentului este mai mică decât cea electromagnetică absolută de 3×10^{10} ori. Deaceea, pentru restabilirea egalităţii (1) în sistemul mixt, trebue să dividem membrul drept prin c şi să scrim

$$\oint_C \mathbf{H}_{e.m.}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} i_{e.s.} \tag{1'}$$

De aici şi în prima relaţie a lui Maxwell care constitue transformarea ei matematică se obţine factorul $\frac{1}{c}$ în membrul drept, adică

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{u}. \tag{VI}$$

La fel, dacă în legea iniţială a lui Farady

$$e_{e.m.} = -\frac{\partial \Phi_{e.m.}}{\partial t} \tag{2}$$

exprimăm valoarea forţei electromotoare din membrul drept în unităţi electrostatice absolute, membrul stâng se va micşora, iar egalitatea îşi pierde valabilitatea (deoarece o unitate electrostatică absolută de f. e. m. este egală cu 3.10^{10} unităţi electromagnetice absolute).

Deaceea, pentru a restabili egalitatea (2) în sistemul mixt trebue să scrim

$$c.\, e_{e.s.} = -\frac{\partial \Phi_{e.m.}}{\partial t}.$$

sau

$$e_{e.s.} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{e.m.}}{\partial t}, \tag{2'}$$

Rezultă că şi în cea de a doua relaţie a lui Maxwell va apare factorul $\frac{1}{c}$ în membrul drept, sau .

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho \qquad \text{(VIII)}$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \qquad \text{(IX)}$$

forma lor va rămâne invariabilă. Intr'adevăr, în cea dintâi, *atât membrul drept cât şi cel stâng se referă la acelaş câmp* **E**, deci forma ei rămâne invariabilă. Acelaş lucru trebue spus şi despre relaţia (IX) la care membrul drept este nul.

Ne vom folosi în cele ce urmează *numai de sistemul mixt de unităţi.*

§ 95. ECUAŢIA PROPAGĂRII UNDELOR ELECTROMAGNETICE INTR'UN MEDIU UNIFORM

Vom arăta aici câteva transformări generale, referitoare la relaţiile câmpului electromagnetic.

Să presupunem că avem un câmp electromagnetic într'un mediu uniform invariabil, adică în care ε, μ şi γ sunt aceiaşi în orice punct, fiind invariabili cu timpul.

Să mai presupunem că în mediu nu există sarcini spaţiale (adică $\rho = 0$). In acest caz, putem scoate în relaţiile lui Maxwell pe ε şi μ în faţa semnului derivatei şi scrie (după simplificare):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma}{c} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \text{(I)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Să arătăm că în acest caz *putem elimina uşor din sistem una din mărimile* **E** *sau* **H** şi să obţinem o relaţie cu o singură necunoscută **H** sau **E**. Va reieşi, deasemenea, că atât pentru **H** cât şi pentru **E** *se obţine o aceeaşi ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu derivate parţiale.*

Să eliminăm, de exemplu, la început, pe **E**. Vom lua pentru aceasta rotorul ambilor membri ai ecuaţiei (1) (căci dacă vectorii sunt egali şi rotorii lor sunt egali)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma}{c} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Să intervertim în termenul al doilea din membrul drept operatorii rot şi $\frac{\partial}{\partial t}$. Lucrul acesta este posibil deoarece operaţia rot **a** este echivalentă cu derivarea în raport cu x, y, z, iar operaţia $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$ reprezintă o derivare în raport cu t. Rezultă de aici că rezultatul diferenţierii nu se schimbă prin schimbarea ordinei de diferenţiere.

Vom obţine

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma}{c} \text{ rot } \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{E}).$$

Inlocuindu-l pe rot **E** prin expresia lui din relaţia (II) avem

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\frac{4\pi\gamma}{c} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) =$$

$$= -\frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Inlocuind mai departe după formula cunoscută

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \triangle \mathbf{H},$$

$\triangle$ **H** reprezentând, după cum se ştie, laplacianul vectorului **H**. Dar termenul grad div **H** dispare în baza relaţiei (IV) a lui Maxwell, deoarece div **H** $= 0$. Relaţia (1) a lui **H** ia aşa dar forma

$$-\triangle \mathbf{H} = -\frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

sau

$$\triangle \mathbf{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{2}$$

Efectuând laplacianul, obţinem în sfârşit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{2'}$$

O relaţie complect analoagă se obţine şi pentru **E**. Pentru aceasta vom lua rotorul în ambii membri ai relaţiei (II)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \text{ rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}).$$

Vom înlocui aici pe rot **H** prin expresia lui din relaţia (I) a lui Maxwell, efectuând apoi membrul stâng, ca mai sus.

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \triangle \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\gamma}{c}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right).$$

Şi aici dispare termenul grad div **E** conform relaţiei (III) a lui Maxwell; în membrul drept vom efectua diferenţierea arătată. După schimbarea semnelor se obţine

$$\triangle \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3}$$

Această relaţie este întru totul analoagă relaţiei (2). Şi astfel, *problema determinării câmpului într'un mediu uniform invariabil, în care nu există sarcini spaţiale, se reduce la integrarea unei ecuaţii diferenţiale de forma:*

$$\triangle \mathbf{U} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \tag{4}$$

în care vectorul **U** poate reprezenta pe **H** sau pe **E**.

Dacă descompunem vectorii **E** şi **H** după versori

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad \text{şi} \quad \mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k},$$

obţinem din relaţia (4) pentru fiecare din cele şase mărimi $E_x, E_y, \ldots, H_z$ o aceeaşi ecuaţie scalară de forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{4'}$$

în care prin $U(x,y,z,t)$ poate fi subînţeleasă oricare dintre funcţiile

$$E_x, E_y, E_z; H_x, H_y, H_z.$$

Ecuaţiile (4) şi (4') se numesc ecuaţiile propagării undelor electromagnetice într'un mediu conductor uniform şi invariabil. Ea poartă uneori numele de ecuaţia „telegrafiştilor“ deoarece este întâlnită în studiul problemei propagării oscilaţiilor pe liniile lungi.

In cazul particular în care mediul este un dielectric ideal uniform, adică $\gamma = 0$, în relaţiile (4) şi (4') dispare termenul conţinând pe $\frac{\partial U}{\partial t}$ şi obţinem o relaţie mult mai simplă

$$\triangle \mathbf{U} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}$$

sau

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = a^2 \triangle \mathbf{U}, \tag{5}$$

unde s'a pus pentru prescurtare

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{6}$$

Analitic, această relație este echivalentă cu trei relații scalare de forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \triangle U = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \tag{5'}$$

în care, ca și mai înainte, prin $U(x,y,z,t)$ se înțelege oricare din mărimile E_x, E_y,.... H_z.

Relațiile (5) sau (5') poartă numele de *ecuația propagării undelor electromagnetice într'un dielectric uniform invariabil.*

In fizica matematică ea se numește *ecuația undelor* pentru un mediu tridimensional. Problema determinării câmpului se reduce astfel, pentru un dielectric ideal uniform, la integrarea ecuației undelor (5) sau (5'). Mărimea a reprezintă viteza de propagare a undelor electromagnetice.

§ 96. POTENȚIALUL-VECTOR ȘI POTENȚIALUL SCALAR PENTRU MĂRIMILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC. VECTORUL LUI HERTZ.

In aplicațiile practice ale ecuațiilor lui Maxwell, este necesar adesea să aflăm, mai întâi, nu mărimile **E, H** și ρ ci unele *mărimi auxiliare*, legate de acestea, care prezintă într'un caz sau altul mai multă comoditate, iar apoi, cu ajutorul acestor mărimi auxiliare să le găsim pe cele fundamentale.

Folosul acestor mărimi auxiliare constă sau în aceea că putem stabili mai ușor pentru ele condițiile inițiale și la limită, sau în faptul că ele sunt mai apropiate de acele mărimi care pot fi măsurate direct, sau în sfârșit, pentrucă ele simplifică problema din punct de vedere matematic (de pildă se micșorează numărul ecuațiilor).

Ceva asemănător există, de exemplu, în teoria câmpurilor electrostatice, în care, în multe probleme, se impune să căutăm mai întâi nu însuși vectorul **E** ce caracterizează câmpul, ci funcția lui potențială sau potențialul $V(x, y, z)$; în acest caz $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$.

Astfel, rezolvarea ecuației problemei Laplace-Poisson pentru funcția V se simplifică adesea dacă problema posedă o simetrie centrală sau axială; în alte cazuri se întrebuințează cu succes un sistem adecuat de coordonate curbilinii, și așa mai departe.

In sfârșit, diferența potențialelor se măsoară, în practică, direct cu ajutorul instrumentelor, mult mai comod decât mărimea lui **E**, fiind mult mai uşor astfel să se obţină condiţiile la limită pe unele sau altele dintre suprafeţe şi aşa mai departe.

Vom întâlni procedee asemănătoare şi în teoria câmpurilor electromagnetice, dar, bineînţeles, sub o formă mult mai complicată.

Şi astfel, fiind date pentru un *mediu uniform invariabil* oarecare, ecuaţiile

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma}{c}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

deoarece câmpul **H** este solenoidal ($\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), putem afla după cum se ştie, un vector primitiv **A** astfel încât

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{5}$$

In acest caz, ultima dintre ecuaţiile lui Maxwell, este evident satisfăcută.

Să aflăm acum vectorul **A**. După cum se ştie, există o infinitate de vectori primitivi care satisfac condiţia (5).

Intr'adevăr, dacă **A** reprezintă *una dintre valorile ce* satisfac pe (5). orice alt vector de forma

$$\mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \tag{6}$$

în care $f(x, y, z, t)$ e o funcţie scalară arbitrară de x, y, z şi t, *satisface aceeaşi condiţie* (5) căci

$$\operatorname{rot}\ (\mathbf{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{7}$$

Ne vom folosi şi în cele ce urmează de posibilitatea de a alege arbitrar funcţia f.

Să presupunem că am reuşit să găsim una dintre valorile vectorului **A**. Vom arăta cum poate fi exprimat vectorul **E** în funcţie de această valoare. Vom folosi pentru aceasta a doua ecuaţie a lui Maxwell, care capătă forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\ (\mathbf{A} + \operatorname{grad} f).$$

Intervertind operatorii $\frac{\partial}{\partial t}$ şi rot, putem scrie

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\,\text{rot}\left(\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,f\right). \tag{8}$$

Această ecuaţie se rezolvă uşor în raport cu **E** dacă o scriem sub forma

$$\text{rot}\left\{\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,f\right\} = 0.$$

Dacă însă rotorul unui vector oarecare este nul, acest vector este potenţial, de unde

$$\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,f = -\,\text{grad}\,\psi,$$

în care $\psi\ (x, y, z, t)$ este o funcţie scalară arbitrară de x, y, z şi t (semnul minus este luat pentru comoditate).

De aici

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \left(\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,f + \text{grad}\,\psi\right).$$

Intervertind, în sfârşit, operatorii $\frac{\partial}{\partial t}$ şi grad, scriem

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\left(\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \psi\right),$$

sau, în sfârşit,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi, \tag{9}$$

în care φ este deasemenea o funcţie scalară arbitrară de x, y, z şi t pe care o vom alege într'un mod corespunzător în cele ce urmează. Egalitatea (9) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (8).

Dacă găsim, deci, vectorul **A**, primitiv pentru **H**, acesta se va determina luând rotorul lui **A**, iar vectorul **E** se obţine din relaţia (9) printr'o diferenţiere.

Dar cum poate fi determinat **A** şi aleasă corespunzător funcţia φ? Ne vom folosi pentru aceasta de celelalte ecuaţii ale lui Maxwell, (1) şi (3).

După introducerea lui (5) şi (9), relaţiile (1) şi (3) capătă forma

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \frac{4\pi\gamma}{c}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi\right) + \frac{\varepsilon}{c}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right);$$

$$\text{div}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi\right) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\,.$$

Amintindu-ne că rot **A** = grad div **A** — $\triangle$**A** și că div grad $\varphi = \triangle\varphi$, obținem, grupând termenii,

$$\left.\begin{aligned} -\triangle \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{4\pi\gamma}{c}\operatorname{grad}\varphi + \\ + \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0; \\ -\triangle\varphi - \frac{\mu}{c}\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Să examinăm acum câteva cazuri caracteristice.

Cazul I. *Fie un mediu dielectric uniform ideal* ($\gamma=0$) *în care nu există sarcini spațiale* ($\rho = 0$). Relația (10) se poate scrie în acest caz

$$\left.\begin{aligned} -\triangle\mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0, \\ -\triangle\varphi = \frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

în care am însemnat pentru prescurtare prin a^2 pe $\frac{c^2}{\mu\varepsilon}$

sau

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (12)$$

Deoarece funcția φ este arbitrară vom pune condiția ca expresia din parantezele simple să devină nulă, sau

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Această ecuație se numește „ecuația continuității". In acest caz relațiile (11) vor deveni [în baza relației (13)]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = a^2\triangle\mathbf{A}, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\triangle\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Prima dintre aceste relații permite determinarea lui **A**, iar cea de a doua, determinarea funcției φ [din infinitatea de soluții pentru **A** și φ trebue alese acelea care satisfac ecuația (13).

După cum se vede, pentru **A** și φ s'a obținut ecuația undelor. Cu ajutorul lui **A** și φ determinăm acum pe **H** și în virtutea relațiilor (5) și (9). Și astfel, în acest caz, problema aflării mărimilor auxiliare **A** şi φ s'a redus la rezolvarea ecuaţiei undelor.

Vectorul **A** şi funcţia φ poartă numele respectiv de potenţial-vector şi de potenţial scalar pentru mărimile câmpului electromagnetic.

Vectorul lui Hertz. Putem reuni şi mai mult mărimile **A** şi φ şi în locul lor să căutăm o singură mărime auxiliară. Pentru aceasta, introducem, ţinând seama de ecuaţia (13), un vector auxiliar **Z**, astfel încât

$$\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \tag{15}$$

şi

$$\varphi = + \operatorname{div} \mathbf{Z}$$

In acest caz, ecuaţia (13) va fi evident satisfăcută (să se verifice prin înlocuire). Relaţia (14) va lua forma

$$-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} - a^2 \triangle \mathbf{Z}\right\} = 0,$$

$$\operatorname{div}\left\{\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} - a^2 \triangle \mathbf{Z}\right\} = 0.$$

Aceste ecuaţii pot fi satisfăcute simultan, dacă este îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = a^2 \triangle \mathbf{Z}. \tag{16}$$

După cum se vede, pentru **Z** am obţinut ecuaţia undelor. Rezolvând-o, îl aflăm pe **Z**, deci putem determina pe **A** şi φ cu ajutorul lui printr'o simplă diferenţiere a relaţiilor (15).

Vectorul **Z** a fost introdus pentru prima oară de Hertz, atunci când acesta a rezolvat problema câmpului electromagnetic al unui dipol oscilant (1889) şi poartă numele de *vectorul lui Hertz*.

Formulele (5) şi (9) pot fi contopite cu formulele (15) pentru a obţine o metodă directă de calcul a lui **H** şi **E** în funcţie de vectorul **Z**. Vom avea atunci

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{Z}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = +\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}\right) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Z}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Inlocuind în ultima relaţie valoarea $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}$ în virtutea ecuației undelor (16) prin $\triangle \mathbf{Z}$, putem scrie

$$\mathbf{E} = \triangle \mathbf{Z} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{Z} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}.$$

Vom avea, deci, în sfârșit

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \\ \mathbf{E} &= - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Astfel, *în studiul problemei propagării câmpurilor electromagnetice într'un dielectric invariabil uniform, lipsit de sarcini libere* ($\rho=0$), *problema determinării câmpului se reduce la determinarea vectorului lui Hertz din ecuația undelor (16),* **H** *și* **E** *aflându-se din formulele (18).*

Cititorul va găsi în cursurile de radiotehnică exemple concrete de aplicații ale vectorului lui Hertz la problema oscilațiilor dipolului lui Hertz. In cursurile de propagarea și transmiterea energiei electromagnetice se pot găsi numeroase aplicații ale lui **Z** și în probleme mai complicate.

Cazul II. Să ne întoarcem la relațiile (10) exprimate sub formă generală și să presupunem că în problemă *ni se dă repartiția curenților de conducție* $\mathbf{u}_{cond}$ și cea a sarcinilor spațiale ρ. Acest caz se întâlnește adesea în practică, în teoria emisiunii radiofonice (mai ales pentru $\rho=0$). Prima dintre relațiile (10) se poate scrie astfel

$$-\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} +$$

$$+ \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{4\pi\gamma}{c} \operatorname{grad} \varphi = 0. \tag{19}$$

Considerând și aici ecuația (13) sub forma

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

vom aduce relația (10) la forma

$$\left.\begin{aligned} -\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma}{c}\left(\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi\right) &= 0, \\ -\triangle \varphi + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \end{aligned}\right\}$$

Dar expresia din paranteză reprezintă tocmai $-\mathbf{E}$, de unde

$$-\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\gamma \mathbf{E}.$$

In sfârşit, deoarece conform legii lui Ohm $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{u}_{\text{cond.}}$, obţinem relaţia finală care permite determinarea lui **A** şi φ

$$\left.\begin{aligned} -\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{u}_{\text{cond.}}, \\ -\triangle \varphi + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho\,. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Am obţinut astfel ecuaţiile undelor cu parte dreaptă. Se presupun cunoscute funcţiile **u** şi ρ din membrul drept.

Caz particular. Să ne oprim asupra cazului particular când curenţii $\mathbf{u}_{\text{cond.}}$ şi sarcinile ρ sunt constante în timp adică atunci când considerăm curenţi electrici staţionari (curenţi constanţi) şi sarcini electrostatice. In acest caz **A** şi φ vor fi deasemenea invariabili în raport cu t, derivatele lor în raport cu t fiind nule.

Relaţiile (21) vor lua forma

$$\triangle \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$\triangle \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{u}_{\text{cond.}}$$

Prima dintre ele reprezintă obişnuita ecuaţie a lui Laplace-Poisson, iar a doua — relaţia cunoscută de noi pentru determinarea potenţialului-vector al curentului electric, pe care am utilizat-o în capitolul precedent. Acolo s'a dat, de altfel, şi rezolvarea acestor ecuaţii pentru cazul spaţiului infinit, sub forma

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\infty}\frac{\rho\, dV}{r}\,.$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int_{\infty}\frac{\mathbf{u}\, dV}{r}\,.$$

Vectorii **E** şi **H** vor lua şi ei în acest caz forma cunoscută, în baza formulelor (9) şi (5)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{şi} \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Prima dintre ele determină câmpul electrostatic al sarcinilor ρ, iar a doua câmpul magnetic staţionar al curenţilor constanţi. După cum se vede, teoria acestor câmpuri poate fi considerată ca un caz particular al teoriei generale a câmpurilor electromagnetice.

Să ne întoarcem acum la relaţiile (21) sub forma lor generală, adică în cazul când **u** şi ρ sunt funcţii de timp. Se poate demonstra că tot aşa cum soluţia relaţiei lui Poisson

$$\triangle \varphi = \rho\ (x, y, z)$$

poate fi pusă (pentru cazul spaţiului infinit) sub forma aşa numitului *potenţial newtonian de volum*

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho\ (\xi, \eta, \zeta)\ dV}{r},$$

la fel şi pentru ecuaţia undelor cu parte dreaptă

$$\triangle \varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \rho\ (x, y, z, t) \qquad (22)$$

soluţia ei poate fi reprezentată sub forma aşa numitului potenţial newtonian întârziat

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\,dV \qquad (23)$$

(amănunte asupra acestuia pot fi găsite în cursurile de fizică matematică).

Cazul III (cazul general). Dacă, în sfârşit, nici repartiţia curenţilor, nici cea a sarcinilor spaţiale nu ne sunt cunoscute, putem scrie prima dintre relaţiile (10) sub forma

$$-\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{4\pi\gamma}{c}\varphi + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

In acest caz ecuaţia (13) se alege sub forma

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{4\pi\gamma}{c}\varphi + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (24)$$

iar relaţiile (10) iau forma

$$-\triangle \mathbf{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0,$$

$$-\triangle \varphi + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \qquad (25)$$

Vectorii **E** şi **H** se determină ca şi înainte din (9) şi (5). In acest caz, prima dintre ecuaţiile (25) poartă numele de ecuaţia telegrafiştilor. Prin analogie cu precedenta, şi aici mărimea se numeşte potenţial scalar, iar **A** vectorul potenţial al câmpului. Urmează, desigur, să observăm că mărimea nu poate fi identificată în întregime cu potențialul câmpului electrostatic deoarece vectorul **E** conține, în formula (9) în afara termenului — grad φ si termenul — $\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Incheiere Vom mai face încă o observație pentru câmpul electromagnetic produs *într'un dielectric uniform ce conține sarcini spațiale* ρ ($\rho \neq 0$), Să demonstrăm că în acest caz el poate fi privit ca o *sumă de două câmpuri :* unul *electrostatic* produs de sarcinile ρ, celălalt — *electromagnetic pur*, determinat prin relațiile lui Maxwell (1) — (4) în care $\rho = 0$ Intr'adevăr fie $\gamma = 0$ și $\rho \neq 0$. Relațiile (1) — (4) vor căpăta forma

$$\left.\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Să calculăm divergența în ambii membri ai primei relații. Deoarece divergența rotorului este nulă, obținem

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

De aci, înlocuind div **E** cu valoarea $\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ obținem din relația a treia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

De aci reiese că $\rho = \text{const}$, adică ρ este constant în raport cu t. Și astfel densitatea ρ a sarcinilor spațiale într'un dielectric perfect este constantă în raport cu timpul. Să reprezentăm câmpurile căutate **E** și **H** sub forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \text{ și } \mathbf{H} = \mathbf{H}, \tag{27}$$

impunând vectorului $\mathbf{E}_1$ condiția ca

$$\text{rot } \mathbf{E}_1 = 0 \text{ și div } \mathbf{E}_1 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{28}$$

Ansamblul relațiilor (28) determină un câmp electrostastic obișnuit $\mathbf{E}_1$. El va fi invariabil, deoarece ρ nu depinde de t. Din relațiile (26) vom obține atunci pentru câmpurile $\mathbf{E}_2$ și **H**

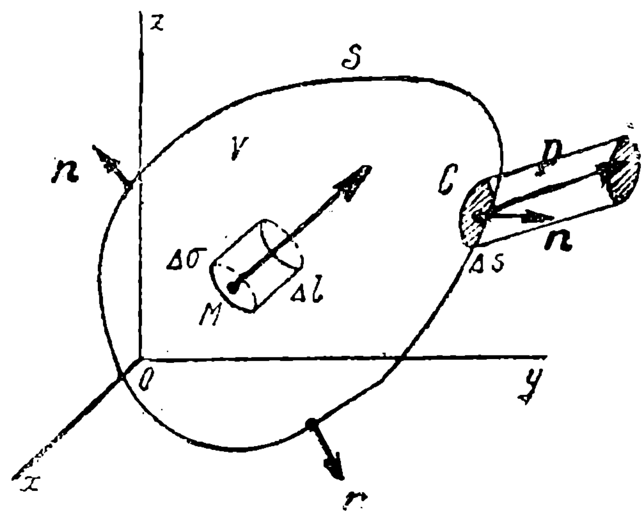
$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \quad \left(\text{căci } \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = 0\right)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{E}_2 = 0$$
$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Aceste relații sunt analoage cu (26) cu singura deosebire că în cea de a treia membrul drept este nul. Şi astfel, în studiul câmpului electromagnetic într'un dielectric putem considera pe ρ nul, fără a limita caracterul general al problemei,

§ 97. TRANSMITEREA ENERGIEI ÎN CAMPUL ELECTROMAGNETIC. TEOREMA LUI POYNTING

Să examinăm, în încheiere procesul transmiterii energiei în câmpul electromagnetic din unele puncte ale mediului în altele. Să presupunem că într'un mediu invariabil uniform (ε,μ,γ) în care s'a produs un câmp electromagnetic, izolăm un volum arbitrar V, limitat de suprafața S (fig. 176). Să însem-



Fig, 176

năm prin A cantitatea de energie electromagnetică existentă in acest volum oarecare. Admițând că densitatea energiei electrice în unitatea de volum este egală cu $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2$, iar densitatea energiei magnetice $\frac{\mu}{8\pi} H^2$ [1])
obținem

$$A = \frac{1}{8\pi}\int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dV = \frac{1}{8\pi}\int_V (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)\, dV, \quad (1)$$

în care integrala este extinsă la volumul considerat V.

1) Teoria lui Maxwell presupune că aceste formule introduse pentru câmpurile statice, rămân valabile şi pentru câmpurile variabile.

Insemnând prin A_1 cantitatea de energie acumulată în acelaş volum în momentul

$$t_1 = t + \Delta t.$$

Adică într'un interval de timp Δt, putem presupune cu aproximaţia unui infinit mic de ordinul întâi, că

$$A_1 = A + \frac{dA}{at} \Delta t.$$

Vom numi diferenţa $A - A_1$ egală cu $-\frac{dA}{dt} \Delta t$, *variaţia cantităţii de energie în volumul V în intervalul* Δt, însemnând-o prin δA

$$\delta A = -\frac{dA}{dt} \Delta t = -\frac{\Delta t}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV. \qquad (2)$$

Să ne ocupăm puţin de mărimea δA. Introducând derivate în raport cu t sub semnul integralei obţinem[1])

$$\delta A = -\frac{\Delta t}{4\pi} \int_V \left(\varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV. \qquad (3)$$

Din relaţiile (1) şi (2) ale lui Maxwell, § 94, deducem

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c. \text{ rot } \mathbf{H} - 4\pi\gamma \mathbf{E},$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - c. \text{ rot } \mathbf{E}.$$

De aici, înmulţind scalar respectiv prin **E** şi **H** şi adunând, obţinem

$$\varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c\,(\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) - 4\pi\gamma E^2.$$

Integrala (3) se descompune în alte două, luând forma

$$\delta A = C \frac{\Delta t}{4\pi} \int_V (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H})\, dV + \Delta t \int_V \gamma E^2 dV. \qquad (4)$$

---

1) Limitele integralei nu depind de t. Timpul t intră ca parametru în expresia de sub integrală

Reamintindu-ne că

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

putem scrie, aplicând formula în ordine inversă

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}].$$

De aici, egalitatea (4) poate fi scrisă astfel

$$\delta\mathbf{A} = C\frac{\Delta t}{4\pi}\int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}]\,dV + \Delta t\int_V \gamma\, E^2 \,.\, dA. \tag{5}$$

Astfel, variația cantității de energie electromagnetică din volumul V în intervalul Δt se exprimă prin formula (5) compusă din două integrale.

Să arătăm că integrala a doua reprezintă acea parte a energiei electromagnetice care s'a desvoltat în intervalul de timp Δt în volumul V sub formă de efect Joule. Intr'adevăr, fie M un punct situat în interiorul volumului (vezi figura). Să construim împrejurul lui un volum elementar

$$\Delta V = \Delta\sigma \cdot \Delta l$$

sub forma unui cilindru cu baza $\Delta\sigma$ ortogonal pe vectorul $\mathbf{E}$ în punctul M şi având generatoarea Δl, paralelă cu $\mathbf{E}$. Rezistența ohmică a acestui cilindru conductor va fi

$$R = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta\sigma}\,.$$

Intensitatea curentului de conducție i ce trece prin elementul de suprafață $\Delta\sigma$ va fi, conform legii lui Ohm din § 89,

$$i_{cond} = u\cdot\Delta\sigma = \gamma\, E\cdot\Delta\sigma.$$

Cantitatea de energie desvoltată sub formă de căldură, în cilindru, în intervalul Δt este

$$i^2_{cond}\cdot R\cdot\Delta t = \gamma^2\cdot E^2\,\Delta\sigma^2\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta\sigma}\,\Delta t = \Delta t\cdot\gamma\, E^2\,\Delta\sigma\cdot\Delta l = \Delta t\cdot\gamma\, E^2\cdot\Delta V,$$

în care ΔV reprezintă volumul cilindrului. Cantitatea de energie ce se desvoltă în întregul volum V în acelaş interval de timp Δt va fi, evident

$$\Delta t.\lim\sum_{(V)}\gamma E^2.\Delta V = \Delta t\int_V \gamma E^2\; dV, \tag{6}$$

în care însumarea este extinsă asupra întregului volum V, limitat de suprafața noastră. Mărimea (6) reprezintă tocmai cea de a doua integrală din formula (5). Să neglijăm acum acest termen al lui (5) și să însemnăm expresia rămasă prin $\delta' A$ adică

$$\delta' A = c \cdot \frac{\Delta t}{4\pi} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{EH}] \, dV. \qquad (7)$$

Să transformăm acum integrala de volum a divergenței vectorului [**EH**] într'o integrală dublă, extinsă la suprafața S, ce delimitează volumul nostru. In acest caz

$$\delta' A = c. \frac{\Delta t}{4\pi} \int_S [\mathbf{EH}]_n \, dV, \qquad (8)$$

în care simbolul $[\mathbf{EH}]_n$ reprezintă proiecția vectorului $[\mathbf{EH}]$ pe normala exterioară n la suprafața (vezi punctul C din fig 176).

Să interpretăm integrala (8) din punct de vedere fizic. Să construim pentru aceasta în fiecare punct C câte un vector auxiliar **P** egal cu

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \qquad (9)$$

In acest caz formula (8) ne arată că prin fiecare element dS al suprafeței se propagă în intervalul Δt, o energie egală cu

$$\Delta t . \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_n \, dS \qquad (10)$$

adică egală numeric cu fluxul acestui vector auxiliar **P** prin elementul de suprafață dS, multiplicat prin Δt.

Impărțind expresia (10) prin Δt, obținem cantitatea de energie transmisă prin elementul de suprafață dS, raportată la unitatea de timp

$$\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_n \, dS = P_n \, dS.$$

Dacă elementul de suprafață dS ar fi fost perpendicular pe vectorul **P**, am fi avut

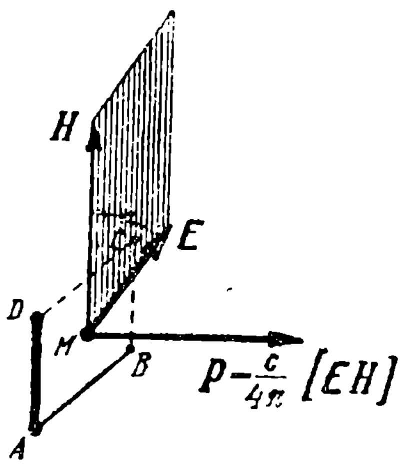
$$\frac{c}{4\pi} \left| [\mathbf{EH}] \right| \cdot dS = P \cdot dS.$$

Impărțind, în sfârșit, prin dS obținem cantitatea de energie transmisă în unitatea de timp raportată la unitatea de suprafață ortogonală pe vectorul **P** sub forma.

$$P = \frac{c}{4\pi} \left| [\mathbf{EH}] \right| = \frac{c}{4\pi} EH \cdot \sin \alpha. \qquad (11)$$

în care α este unghiul dintre vectorii **E** și **H** (fig. 177).

Vectorul **P** poartă numele de vectorul lui Poynting. Deoarece planul S a fost dus arbitrar, rezultatul (11) obținut pentru punctele lui poate fi aplicat oricărui punct al câmpului electromagnetic. Putem spune deci că: într'un câmp electromagnetic se produce o transmitere de energie electromagnetică din fiecare punct al câmpului spre cele vecine: această



Fig, 177

transmitere se efectuează în mod dirijat, sub forma unui flux orientat de partea vectorului lui Poynting **P** determinat prin formula (9).

Reiese deci că prin unitatea de suprafață $ABCD$ (fig. 177) ortogonală pe vectorul **P** se transmite în unitatea de timp o cantitate de energie egală în valoare numerică cu

$$\frac{c}{4\pi}\left|[\mathbf{EH}]\right|$$

TABLA DE MATERII

(VOL. II)

Pag.

Partea III-a TEORIA CAMPURILOR

Dată în lucru: 7 IV. 1949; Bun de tipar: 20 XII 1949; Tiraj: 2.200; Format: 70×100/16; Clasificarea zecimală: 51 (075); Tipografia România Liberă
Nr. 147/949