UNIVERSITATEA C.I. PARHON

Facultatea de Matematică şi Fizică

C U R S

de

FIZICA STATISTICA ŞI MECANICA CUANTICA

I. Radiaţia termică

- 1951 -

RADIATIA TERMICA

§ 1.- Mărimi fundamentale. Intensitatea radiației

Schimbul de energie termică între corpuri se poate efectua prin conducție, convecție și radiație. Spre deosebire de conducție și convecție, propagarea căldurii prin radiație poate avea loc chiar în vid. In prezentul capitol ne vom mărgini la studiul radiației termice în vid.

Pentru a caracteriza regimul de propagare al radiației, să considerăm un punct arbitrar P situat în regiunea în care are loc fenomenul de propagare și o direcțiune arbitrară, reprezentată prin vectorul unitate $\vec{u}$ trecând prin acel punct. In aproximația opticei geometrice, se poate vorbi de "raza" luminoasă care trece prin P și se propagă în direcția $\vec{u}$. O singură "rază", însă, nu transportă o cantitate finită de energie; pentru a obține un transport măsurabil de energie, e necesar să considerăm un fascicol de raze, definit în felul următor (fig.1): construim prin punctul P un element plan de suprafață $d\sigma$, perpendicular pe vectorul $\vec{u}$, iar printr'un punct P' situat la o distanță r de punctul P pe semi-dreapta de direcție $\vec{u}$ și trecând prin P', construim un alt element $d\sigma'$ perpendicular pe $\vec{u}$. Fascicolul considerat este cel constituit din toate razele care unesc un punct oarecare al elementului $d\sigma$ cu un punct oarecare al elementului $d\sigma'$. Energia transportată de fascicol se măsoară punând elementul $d\sigma'$ în contact cu un receptor de energie radiantă (bolometru, pilă termoelectrică, etc.) și protejând acest receptor contra tuturor razelor care nu aparțin fascicolului, deci construind în jurul elementelor de suprafață $d\sigma$ și $d\sigma'$ un înveliș tubular care să nu intercepteze nici una dintre razele fascicolului, să fie opac pentru radiația sosind din exterior și să absoarbă razele care, trecând prin deschiderea $d\sigma$ sub un unghiu prea mare, întâlnesc peretele interior al acestui înveliș.

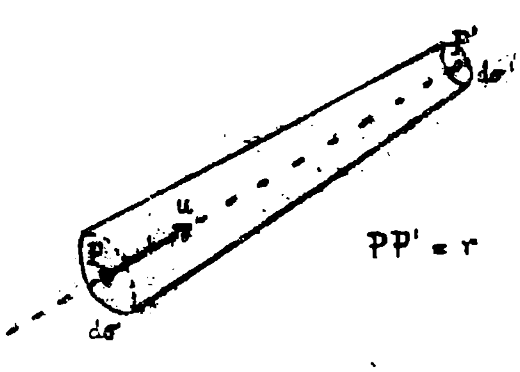


Fig.1.-

Legile fotometriei ne permit să afirmăm că :

1). Energia dW primită de receptor este proporţională cu durata dt a intervalului de timp în care receptorul e în contact cu elementul $d\sigma'$. (Pentru ca această lege să fie exactă e necesar ca timpul dt să fie lung faţă de perioadele radiaţiilor care sosesc pe elementul $d\sigma'$, căci altfel energia depinde de faza în care se află vibraţia; vom presupune că această condiţie e satisfăcută pentru toate radiaţiile de care ne preocupăm.

2) Energia dW este proporţională cu ariile elementelor $d\sigma$ şi $d\sigma'$ şi invers proporţională cu pătratul distanţei r dintre cele două elemente. (Pentru ca această lege să fie exactă, e necesar ca dimensiunile lineare ale elementelor $d\sigma$ şi $d\sigma'$ să fie mari faţă de lungimile de undă ale radiaţiilor considerate; în caz contrar, legile opticei geometrice nu mai sunt valabile din cauza fenomenelor de difracţie. Vom presupune condiţia verificată pentru toate radiaţiile care ne interesează).

Putem scrie deci :

$$dW = J \cdot dt \cdot d\sigma \cdot \frac{d\sigma'}{r^2} \qquad (1)$$

Această relaţie, care conţine mărimi referitoare la cele două puncte P şi P', se poate reduce uşor la o relaţie în care nu intervin decât mărimi referitoare la punctul P ; în adevăr, raportul $d\sigma'/r^2$ este egal cu aria $d\Omega$ tăiată pe sfera unitate de conul cu vârful în P şi având ca bază elementul $d\sigma'$, deci este unghiul solid al acestui con (fig.2)

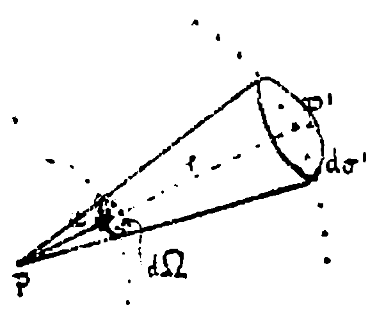


Fig.2.-

Relaţia (1) devine atunci

$$dW = J\, dt\, d\sigma\, d\Omega \qquad (2)$$

Coeficientul de proporţionalitate J se numeşte <u>intensitatea radiaţiei</u> în punctul considerat şi pentru direcţia de propagare considerată. Această intensitate poate depinde de punctul P, de direcţia $\vec{u}$ precum şi de momentul t la care se face determinarea. Cu ajutorul ei putem determina foarte uşor energia transportată în timpul dt printr'un element de suprafaţă $d\sigma$ de către un fascicol de unghiu solid $d\Omega$ a cărui axă $\vec{u}$ face un unghiu θ cu normala la elementul de suprafaţă $d\sigma$ (fig.3) . E evident că formula (2) poate fi utilizată cu condiţia

Fig.3.-

de a se înlocui aria $d\sigma$ a elementului prin aria proiecţiei acestui element pe planul normal la direcţia de propagare $\vec{u}$, deci de a înlocui pe $d\sigma$ cu $d\sigma.\cos\theta$; formula devine deci :

$$dW = J.dt.d\sigma.\cos\theta.\,d\Omega \,. \qquad (3)$$

Formula (3) descompune radiaţia din vecinătatea punctului după diferitele direcţii de propagare. In optică, însă, un fascicol luminos poate fi analizat mai departe, în diversele sale componente monocromatice; acestea, la rândul lor, pot fi caracterizate prin starea lor de polarizaţiei. Prima descompunere poate fi realizată interpunând între elementul de suprafaţă $d\sigma'$ (fig.1) şi receptorul de energie radiantă un monocromator care nu lasă să treacă decât radiaţii având frecvenţa cuprinsă în intervalul de frecvenţe dela ν la $\nu + d\nu$. Intensitatea radiaţiei cu frecvenţa cuprinsă în acest interval este proporţională cu $d\nu$:

$$dJ = J_\nu \,.\, d\nu \qquad (4)$$

factorul de proporţionalitate J_ν, purtând numele de intensitate spectrală (fig.4). Intensitatea totală este evident egală cu suma intensităţilor tuturor intervalelor de frecvenţe din spectru :

$$J = \int_0^\infty J_\nu \,.\, d\nu \qquad (5)$$

Deasemenea e clar că J_ν este o funcţiune de frecvenţa aleasă ν, căci altfel J dat de formula (5) ar fi infinit.

In fine, descompunerea fascicolului după starea de polarizare poate fi făcută pentru fiecare componentă monocromatică în parte, introducând între monocromator şi receptor un analizor care lasă să treacă numai radiaţie polarizată linear într'un anumit plan care trece prin direcţia de propagare.

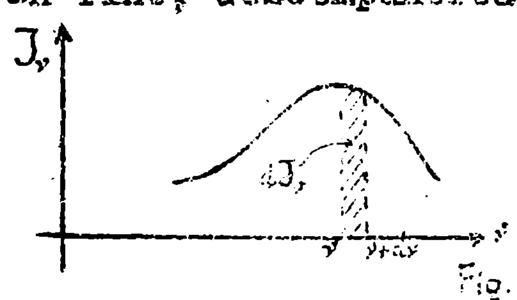


Fig.4.-

O lege din optică afirmă că e suficient să se cunoască intensitatea radiaţiei care străbate analizorul pentru două orientări ale acestuia perpendiculare între ele pentru a o cunoaşte pentru orice altă orientare. Intensitatea totală a radiaţiei monocromatice este egală cu suma intensităţilor celor două radiaţii monocromatice polarizate la unghi drept :

$$J_\nu = J_\nu^{(1)} + J_\nu^{(2)} \tag{6}$$

Din definiţiile de mai sus rezultă că expresia

$$J_\nu^{(p)} \cdot d\nu \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \qquad (p=1,2) \tag{7}$$

reprezintă energia radiantă cu o frecvenţă cuprinsă între ν şi $\nu + d\nu$ şi cu starea de polarizare definită prin indicele p (=1 sau 2), care traversează în intervalul de timp dt elementul de suprafaţă $d\sigma$, direcţiile de propagare fiind cuprinse în conul de deschidere $d\Omega$ şi cu axa înclinată cu un unghi θ faţă de normala la elementul de suprafaţă .

Factorul $J_\nu^{(p)}$ este mărimea fundamentală care caracterizează propagarea energiei radiante în regiunea considerată. Dacă $J_\nu^{(p)}$, nu depinde de starea de polarizaţie, deci dacă $J_\nu^{(1)} = J_\nu^{(2)}$, radiatia se numeşte radiaţie nepolarizată sau naturală. Atunci avem din (6): $J_\nu^{(1)} = J_\nu^{(2)} = J_\nu/2$. Deci nu e necesar să lucrăm cu componentele polarizate. Dacă J_ν nu depinde de direcţia de propagare definită prin vectorul $\vec{u}$, radiaţia se numeşte izotropă. Dacă J_ν nu depinde de poziţia punctului P în interiorul regiunii de propagare, radiaţia se numeşte omogenă.

§ 2) <u>Densitatea radiatiei</u>. O altă mărime care poate servi pentru a caracteriza câmpul de radiaţie este densitatea energiei radiante. Ea este definită ca raportul dintre energia conţinută într'o regiune spaţială infinit mică în jurul punctului P şi volumul V al acestei regiuni. Dacă energia este descompusă după diferitele sale caracteristice (direcţie de propagare, frecvenţă, stare de polarizare), se poate defini densitatea acelei fracţiuni din energia totală care posedă anumite caracteristice.

Densitatea de energie radiantă în jurul unui punct P nu este o mărime independentă de intensitatea radiaţiei în acelaş punct. Mărginindu-ne la cazul propagării radiaţiei în vid, viteza de propagare are valoarea c independent de direcţia de propagare, frecvenţă sau starea de polarizare . Deci energia de un anumit tip, care traversează în timpul dt elementul de suprafaţă $d\sigma$ într'o direcţie $\vec{u}$ care face unghiul θ cu normala la elementul de su-

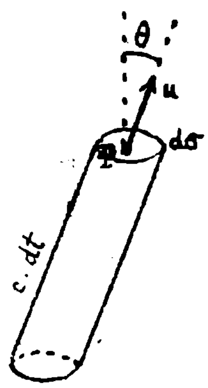


Fig.5.-

prafaţă, este energia care se află într'un cilindru având ca bază elementul $d\sigma$ şi având generatoarele de lungime $c.dt$ paralele cu direcţia de propagare $\vec{u}$ .Volumul acestui cilindru este deci (fig.5) :

$$dV = c.dt.d\sigma.\cos\theta \qquad (8)$$

Impărţind deci valoarea (7) a energiei radiante cu o frecvenţă cuprinsă în intervalul $\nu, \nu + d\nu$, cu starea de polarizare definită prin indicele (p) şi cu direcţia de propagare cuprinsă în conul elementar $d\Omega$, energie cuprinsă în cilindrul din fig.5, prin volumul (8) al acestui cilidnru, obţinem expresia

$$\frac{1}{c}.J_\nu^{(p)}.d\nu.d\Omega \qquad (9)$$

pentru densitatea în jurul punctului P ,a energiei radiante cu starea de polarizare, frecvenţa şi direcţia de propagare specificate. Dacă facem abstracţie de starea de polarizare, avem, pentru desnitatea energiei radiante cu frecvenţă şi direcţie de propagare specificate, expresia

$$\frac{1}{c}\left(J_\nu^{(1)} + J_\nu^{(2)}\right).d\nu.d\Omega = \frac{1}{c}.J_\nu.d\nu.d\Omega \qquad (10)$$

Prin integrare asupra tuturor direcţiunilor de propagare,obţinem din (10) densitatea totală a energiei radiante cu frecvenţa cuprinsă în intervalul $\nu, \nu + d\nu$:

$$w_\nu.d\nu = \frac{d\nu}{c}\iint J_\nu.d\Omega \qquad (11)$$

Coeficientul de proporţionalitate w_ν se numeşte "densitatea spectrală" a energiei .

Dacă radiaţia este izotropă, deci dacă J_ν e independent de direcţiunea de propagare, integrala din membrul al doilea al egalităţii (11) se poate efectua şi obţinem relaţia

$$w_\nu = \frac{4\pi}{c}.J_\nu \qquad (12)$$

între densitatea spectrală w_ν şi intensitatea spectrală J_ν .Prin multiţire cu $d\nu$ şi integrare asupra tuturor frecvenţelor,se obţine relaţia

$$w = \frac{4\pi}{c}.J \qquad (12')$$

între densitatea totală de energie w și intensitatea totală J
Observăm că relațiile (12) sau ($12_a'$), scrise sub forma

$$J = \frac{c}{4\pi} \cdot w \qquad (13)$$

se interpretează ușor în teoria electromagnetică a radiației, în care J este lungimea vectorului lui Poynting, iar w densitatea de energie.

§ 3.- Legea lui Kirchhoff. Definițiile date în paragrafele precedente sunt valabile pentru o regiune a spațiului (despre care presupunem, pentru simplicitate, că nu conține materie) străbătută de o radiație oarecoare. In cele ce urmează vom presupune că regiunea este o cavitate ai cărei pereți sunt destul de groși pentru a absorbi integral orice radiație ar pătrunde în ei, venind fie din interiorul cavității, fie din exterior. In interiorul cavității se pot găsi alte corpuri materiale; în cele ce urmează nu ne vom ocupa însă decât de radiația din spațiul vid dintre aceste corpuri și pereții cavității (fig.6).

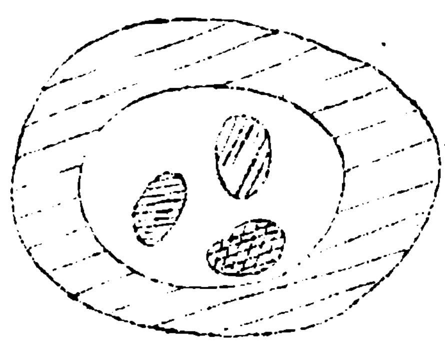


Fig.6.-

Să presupunem că pereții exteriori sunt aduși și menținuți la temperatura (măsurată în scara absolută) T.

Conform principiilor termodinamicei, după un timp mai mult sau mai puțin lung, întregul sistem va atinge o stare de echilibru, pentru care proprietățile sistemului nu mai variază în timp. In special, toate corpurile din cavitate capătă și ele temperatura T. In spațiul vid dintre corpuri și pereți se găsește un câmp de radiație a cărui "stare" în sensul definit în paragrafele precedente, nu mai variază. Radiația care se află în această stare se numește radiație termică. Energia radiantă care străbate acest spațiu provine prin fenomenul de emisie din materialul pereților și al corpurilor din interiorul cavității; după ce parcurge un drum mai mult sau mai puțin lung, suferind un număr de reflexii pe suprafețele materiale, această energie este absorbită în acest material. Conform ipotezelor noastre, radiația din interior nu poate străbate la exterior și nici fenomenul reciproc nu e posibil.

Prin aplicarea principiilor termodinamicei sistemului compus din materia pereţilor şi a corpurilor din interiorul cavităţii şi din radiaţie, putem trage câteva consecinţe importante asupra stării radiaţiei termice. Aceste consecinţe sunt cuprinse în următoarele legi, datorite lui Kirchhoff:

1) Radiaţia termică e nepolarizată, omogenă şi izotropă.

2) Intensitatea spectrală J_ν (sau, ceeace e tot una, densitatea spectrală w_ν) nu depinde de natura substanţelor din care sunt constituiţi pereţii şi corpurile din interiorul cavităţii, nici de forma geometrică a cavităţii, ci depinde numai de frecvenţa ν şi de temperatura T a sistemului.

(Observăm că aceste enunţuri nu sunt exacte decât dacă lungimea de undă a radiaţiilor considerate e mică faţă de dimensiunile lineare ale regiunilor în care se propagă radiaţia).

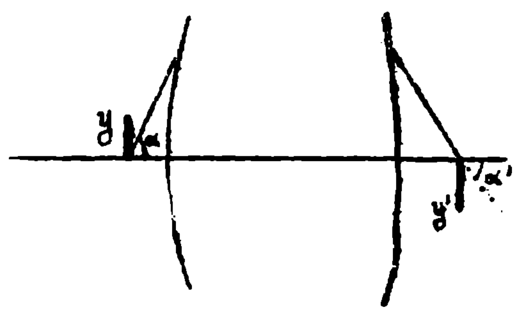
Pentru a justifica legile lui Kirchhoff, vom arăta că, dacă ele nu ar fi exacte, am putea imagina un dispozitiv care ar permite efectuarea unui proces interzis de legile termodinamicei. Condiderăm două cavităţi, având forme geometrice absolut arbitrare şi ai căror pereţi (şi eventuale corpuri interioare) sunt constituiţi din substanţe de natură arbitrară. Presupunem că ambele cavităţi sunt aduse la echilibrul termic corespunzător unei aceleiaşi temperaturi T . Presupunem deasemenea că pereţii sunt rigizi şi sunt adiabatici pentru orice formă de energie termică (capacitatea lor faţă de energia radiantă e inclusă în definiţia cavităţii).

Printr'un dispozitiv de tipul celui descris în § 1 şi reprezentat schematic în figura 1, să presupunem că extragem dintr'un anumit punct P al primei cavităţi un fascicol de raze care traversează un element de suprafaţă $d\sigma$ trecând prin acest punct şi care are direcţia de propagare cuprinsă într'un unghiu solid $d\Omega$; deasemenea, să presupunem că, folosind filtre şi aparate polarizatoare convenabil alese nu poate trece prin acest dispozitiv decât radiaţia care are frecvenţele cuprinse într'un interval $\nu, \nu+d\nu$ şi o anumită stare de polarizare. Printr'un dispozitiv analog, să presupunem că extragem un fascicol de acelaşi tip din cavitatea a doua, fascicolul fiind definit prin poziţia P_1 a orificiului de intrare în dispozitiv, aria $d\sigma_1$ a deschiderii acestui orificiu, unghiul solid $d\Omega_1$ al direcţiilor de propagare, starea de polarizare respectivă şi frecvenţele cuprinse în acelaş interval spectral. $\nu, \nu + d\nu$.

Printr'un sistem de lentile, să presupunem că formăm imaginea elementului $d\sigma$ asupra elementului $d\sigma_1$ .Pentru ca să existe corespondenţă între punctele acestor elemente, prin fascicolele definite mai sus, se ştie din optica geometrică [1] (legea sinusului) că trebue să avem $d\sigma . d\Omega = d\sigma_1 . d\Omega_1$. Deasemenea trebue ca optica

---

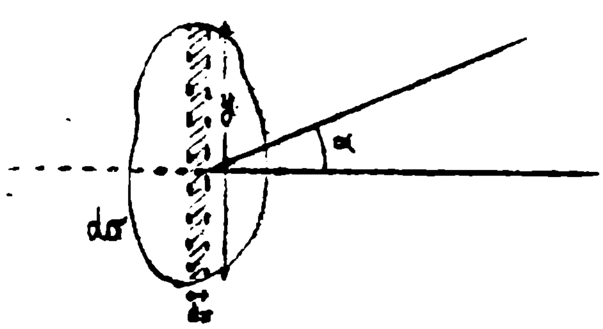
1)



In Optica geometrică legea sinusurilor (zisă şi condiţia lui Abbe sau condiţia de aplanetism) garantează reprezentarea fidelă a unui element de suprafaţă obiect, normal pe axa sistem centrat, şi se formulează de obicei astfel :

$$y . \sin\alpha = y' . \sin\alpha' ;$$

y este o dimensiune lineară transversală oarecare a obiectul α este unghiul arbitrar al unei raze care porneşte din picio lui. Formularea din text se poate deduce uşor din formularea d sus prin integrare. Descompun elementul $d\sigma$ în fâşii $y . dx$ condiţia sinusurilor spune :



$$y . \sin\alpha = y' . \sin\alpha' \quad , \quad dx . \sin\alpha = dx$$

şi înmulţind :

$$y . dx . \sin^2\alpha = y' . dx' . \sin^2\alpha'$$

Integrând :

$$\sin^2\alpha \int y\, dx = \sin^2\alpha' \int y' . dx'$$

sau : $$d\sigma . \sin^2\alpha = d\sigma' . \sin^2\alpha' .$$

Ori unghiul solid $d\Omega$ al unui con circular drept corespunde un semideschideri la vârf α dată de

$$d\Omega = 2\left(1 - \cos\alpha\right) = 4 . \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Unghiurile α, α' sunt însă infinit mici deoarece $d\Omega, d\Omega'$ sun ghiuri solide elementare. Deci relaţiile (13'),(13") se scriu:

geometrică să fie valabilă, fenomenele de difracție putând fi neglijate, deci este necesar ca lungimile de undă din regiunea spectrală considerată să fie mici față de dimensiunile lineare ale elementelor $d\sigma$ și $d\sigma_1$.

Energia radiantă, care iese ~~este~~ în timpul dt, prin dispozitivul respectiv din prima cavitate, este (vezi (7)),

$$dW = J_\nu^{(p)} . d\nu . d\sigma . d\Omega . dt$$

iar cea care ese din cea de a doua cavitate are valoarea

$$dW_1 = \left(J_\nu^{(p_1)}\right)_1 . d\nu . d\sigma_1 . d\Omega_1 . dt = \left(J_\nu^{(p_1)}\right)_1 . d\nu . d\sigma . d\Omega . dt$$

Sistemul de lentile aduce în prima cavitate toată energia radiantă care ese din a doua cavitate și reciproc. Dacă intensitățile $J_\nu^{(p)}$ în cele două puncte ale celor două cavități nu ar fi egale, dacă spre exemplu am avea $J_\nu^{(p)} > \left(J_\nu^{(p_1)}\right)_1$, atunci ar rezulta că $dW > dW_1$ și prin sistemul celor două dispozitive ar exista un transport net de energie radiantă dela prima cavitate spre cea de a doua, transport care nu ar fi însoțit de nici un fel de compensație în lumea exterioară. Deoarece temperaturile celor două cavități sunt presupuse egale, un astfel de transport este în contrazicere cu principiul al doilea al termodinamicei. Trebue să avem deci

$$J_\nu^{(p)} = \left(J_\nu^{(p_1)}\right)_1$$

Dar punctele P și P_1, axele conurilor direcțiilor de propagare, precum și planele de polarizare au fost alese în mod arbitrar în cele două cavități, iar natura corpurilor materiale cu care radiația se află în echilibru termic este deasemenea arbitrară. Rezultă deci că, atunci când echilibrul a fost atins, intensitatea J_ν nu depinde de punctul ales (radiația e omogenă), de direcția de propagare (radiația e izotropă), de planul de polarizare (radiația e nepolarizată) și în fine nu depinde nici de na-

---

$$d\sigma . \alpha^2 = d\sigma' . \alpha'^2 \qquad d\Omega = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 \ , \ d\Omega' = \alpha'^2$$

și comparându-le :

$$d\sigma . d\Omega = d\sigma' . d\Omega'$$

tura sau de forma geometrică a substanţelor cu care radiaţia este în echilibru termic. Intensitatea J_ν depinde numai de frecvenţa ν a radiaţiei considerate şi de temperatura de echilibru T. Problema fundamentală a teoriei radiaţiei este de a determina această funcţiune universală de două variabile.

§ 4.- <u>Relaţia dintre puterea emităţoare şi puterea absorbantă a unei suprafeţe. Corpul negru.</u>

După cum am spus mai sus, radiaţia din regiunea vidă a incintei provine prin emisie din interiorul substanţelor care alcătuesc pereţii sau corpurile din interiorul cavităţii, şi, după un drum mai mult sau mai puţin lung, sfârşeşte prin a fi absorbită de aceste corpuri (afară de cazul când ele au suprafeţe perfect reflectoare). Fără a intra în mecanismul acestor procese, putem studia bilanţul energetic într'un element de suprafaţă $d\sigma$ care mărgineşte spre vid unul dintre corpurile considerate. Energia radiantă dW care ese din corp prin elementul de suprafaţă considerat în timpul dt, care are direcţia de propagare cuprinsă în unghiul solid $d\Omega$, a cărui axă $\vec{u}$ face un unghiu θ cu normala la elementul $d\sigma$ şi a cărei frecvenţă e cuprinsă în intervalul spectral $\nu, \nu+d\nu$ poate fi scrisă sub forma

$$dW = E_\nu \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot dt \cdot d\nu \qquad (14)$$

unde factorul $\cos\theta$ a fost introdus pentru comoditatea calculelor ulterioare. Coeficientul de proporţionalitate E_ν, definit prin însăşi relaţia (14), se numeşte "<u>puterea emităţoare</u>" a elementului de suprafaţă, şi depinde în general atât de frecvenţă şi temperatură, cât şi de unghiul θ şi de natura corpului care emite radiaţia.

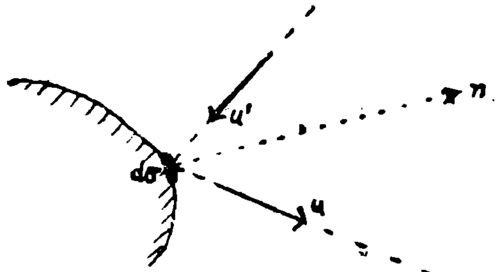


Fig. 7.-

Radiaţia care se propagă în direcţia $\vec{u}$ dinspre elementul de suprafaţă $d\sigma$ spre vid nu provine numai din interiorul corpului, ci provine şi prin reflexia pe elementul de suprafaţă a radiaţiei care soseşte pe acest element din direcţia $\vec{u}'$, definită prin cunoscutele legi ale reflexiei. Energia dW', care soseşte dinspre vid în această direcţie pe elementul de suprafaţă, e dată de

$$dW' = J_\nu \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot dt \cdot d\nu \quad ; \qquad (15)$$

din această energie numai o fracțiune $R_\nu \leq 1$ se reflectă, fracțiunea restantă $1 - R_\nu = A_\nu \leq 1$ fiind absorbită în interiorul corpului. Coeficienții fără dimensiuni R_ν și A_ν se numesc respectiv puterea reflectoare și puterea absorbantă a elementului de suprafață. Ei depind în general de natura corpului, de temperatură, frecvență și de unghiul θ .

Energia totală care părăsește elementul $d\sigma$ în direcția $\vec{u}$ este deci

$$dW + R_\nu \cdot dW' = E_\nu \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot dt \cdot d\nu + R_\nu \cdot J_\nu \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot dt \cdot d\nu \qquad (16)$$

In starea de echilibru termic fluxul de energie nu depinde de direcție, energia care se propagă în direcția $\vec{u}'$ trebue să fie egală cu energia care se propagă în direcția $\vec{u}$, deci membrii ai doilea ai egalităților (15) și (16) trebue să fie egali. Prin egalare și simplificare (aici se vădește utilitatea introducerii factorului $\cos\theta$ în definiția (14)) obținem $E_\nu + R_\nu J_\nu = J_\nu$ sau $E_\nu = (1 - R_\nu) \cdot J_\nu = A_\nu J_\nu$ sau, în fine,

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = J_\nu \qquad (17)$$

Deoarece J_ν nu depinde decât de frecvență și temperatură, egalitatea (17) exprimă următoarea consecință importantă a legii lui Kirchhoff : deși puterea emițătoare și puterea absorbantă a unui element de suprafață pot depinde de natura corpului pe care îl mărginește elementul, precum și de direcția de propagare a radiației emise sau absorbite, totuși raportul acestor două mărimi nu depinde decât de frecvență și temperatură.

Deosebit de interesante sunt două cazuri extreme ale egalității (17). In cazul $A_\nu = 0$ (sau $R_\nu = 1$) suprafața se numește perfect reflectoare, căci întreaga energie radiantă (din domeniul spectral ν , $\nu + d\nu$) este reflectată. Din relația (17) rezultă că trebue să avem atunci $E_\nu = 0$, deci o suprafață perfect reflectoare pentru o anumită frecvență are o putere emițătoare nulă pentru acea frecvență.

In cazul $A_\nu = 1$ (sau $R_\nu = 0$) suprafața se numește perfect absorbantă pentru frecvența respectivă. In special, dacă suprafaţa e perfect absorbantă pentru toate frecvenţele, ea se numeşte "neagră". In acest caz rezultă din (17) că

$$E_\nu = J_\nu \tag{18}$$

deci puterea emiţătoare a unei suprafeţe negre este o funcţiune universală de frecvenţă şi de temperatură. Energia radiantă emisă de o astfel de suprafaţă este egală, prin compararea egalităţii (18) cu (14), cu

$$dW = J_\nu \, . \, d\sigma \, . \cos\theta \, . \, d\Omega \, . \, d\nu \, . \, dt \tag{19}$$

şi deci e proporţională cu cosinusul unghiului dintre direcţia de propagare şi normala la suprafaţă (legea lui Lambert). Suprafeţe perfect negre nu pot fi realizate în practică. O aproximaţie foarte bună se poate obţine, însă, făcând în peretele unei cavităţi, care conţine radiaţie în echilibru termic, un orificiu destul de mic pentru ca pierderea de energie prin acest orificiu să nu distrugă starea de echilibru. Energia radiantă emisă de acest orificiu este evident dată tocmai de expresia (19), deci e identică cu aceea a unei suprafeţe negre. Faptul că un astfel de orificiu are o putere absorbantă practic egală cu unitatea, rezultă din aceea că o radiaţie care ar pătrunde prin orificiu din afară înspre interiorul cavităţii suferă un număr foarte mare de reflexii pe pereţii cavităţii înainte de a putea ieşi din nou afară; la fiecare reflexie ea este slăbită prin absorpţie, astfel încât numai o mică fracţiune din energia intrată poate ieşi din nou prin orificiu.

§ 5.- Presiunea de radiaţie. Legea lui Stefan - Boltzmann

In teoria câmpului electromagnetic se arată că unui sistem de unde electromagnetice, care transportă prin vid o energie W într'o anumită direcţie, trebue să i se atribue un impuls având ca direcţie direcţia de propagare a undelor. Vom folosi acest rezultat pentru calculul acţiunii ponderomotoare a undelor electromagnetice asupra unui element de suprafaţă al unui corp material. Observăm că aceste acţiuni pot fi determinate în general cu ajutorul tensorului lui Maxwell, dar nu vom folosi această metodă ci numai rezultatul citat. Ne vom mărgini deasemenea numai la cazul unui câmp de radiaţie izotrop, singurul pe care îl vom folosi în cele ce urmează.

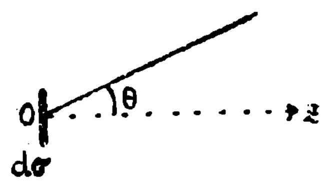


Fig.8.-

Fie deci o radiaţie având frecvenţa cuprinsă în intervalul $\nu, \nu+d\nu$ şi care se propagă în spre elementul $d\sigma$ în direcţii conţinute într'un unghiu solid $d\Omega$, a cărui axă face unghiul θ cu normala la elementul $d\sigma$. Energia care soseşte în timpul dt pe acest element e dată de (7) :

$$dW = J_\nu \cdot d\nu \cdot d\Omega \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot dt$$

Impulsul respectiv are mărimea

$$dP = \frac{dW}{c} = \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\Omega \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot dt \qquad (20)$$

alegând un sistem de axe astfel încât planul xOy să coincidă cu planul elementului $d\sigma$, proiecţiile impulsului pe cele trei axe sunt respectiv

$$\left.\begin{aligned}
dP_z &= \frac{dW}{c} \cdot \cos\theta = \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\Omega \cdot \cos^2\theta \cdot dt \cdot d\sigma \\
dP_x &= \frac{dW}{c} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\Omega \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot dt \cdot d\sigma \\
dP_y &= \frac{dW}{c} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi = \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\Omega \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot dt \cdot d\sigma
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

In aceste expresii $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

Prin integrare asupra tuturor unghiurilor θ dela 0 la $\pi/2$ şi asupra tuturor azimuturilor φ, obţinem componentele impulsului total adus în timpul dt de radiaţia cu frecvenţa în intervalul spectral $\nu, \nu+d\nu$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta P_z &= \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cdot dt \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{3c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cdot dt \\
\Delta P_x &= \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cdot dt \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0 \\
\Delta P_y &= \frac{1}{c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cdot dt \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

In calculul precedent, factorul J_ν poate fi scos în fața în fața integralei deoarece, radiația fiind presupusă izotropă, nu depinde de direcție. Tot din condiția de izotropie rezultă că în vecinătatea elementului de suprafață $d\sigma$ există și radiație care se propagă dinspre element spre vid. Această radiație exercită un efect de recul asupra elementului și impulsul transportat de ea în timpul dt este dat tot de formulele (22). Prin urmare, impulsul total schimbat în timpul dt între radiație și elementul de suprafață este un vector normal la suprafață și având o valoare egală cu dublul membrului al doilea al primei egalități (22). Acest impuls, împărțit cu timpul dt, este egal cu forța exercitată de radiație asupra elementului de suprafață :

$$F = \frac{4\pi}{3c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \quad ,$$

forță care are o direcție normală la elementul $d\sigma$. Raportând forța la unitatea de suprafață, se obține presiunea exercitată de radiație, și, anume, presiunea parțială dp_ν a radiației din domeniul spectral considerat :

$$dp_\nu = \frac{4\pi}{3c} \cdot J_\nu \cdot d\nu \qquad (23)$$

Folosind relația (12) dintre intensitatea și densitatea spectrală a energiei radiante, putem scrie

$$dp_\nu = \frac{1}{3} w_\nu \cdot d\nu \qquad (24)$$

Presiunea totală se obține prin integrare asupra tuturor frecvențelor :

$$p = \frac{1}{3} \int w_\nu \cdot d\nu = \frac{1}{3} w \quad , \qquad (25)$$

unde w este densitatea totală a energiei radiante. Această relație a fost verificată de experiență în limita erorilor (Lebedev).

Observăm că atât formula (23), cât și consecințele ei (24) și (25), sunt valabile în cazul general al unei radiații izotrope, chiar dacă ea nu are distribuție spectrală corespunzătoare echilibrului termic. In cele ce urmează ne vom ocupa de cazul special al echilibrului termic, în care J_ν este funcțiunea universală de ν și T definită la § 3. Atunci w din relația (25) este o funcțiune universală numai de T. Următorul raționament termodinamic ne permite să determinăm forma acestei funcțiuni :

Deoarece radiaţia (presupusă în echilibru termodinamic) e omogenă, energia totală radiantă conţinută în cavitatea de volum V este

$$W = V \cdot w \qquad (26)$$

Să presupunem că o parte din peretele cavităţii este mobil, astfel încât prin deplasarea acestei părţi să putem varia volumul cavităţii. Dacă variaţia este extrem de lentă, astfel încât echilibrul să nu fie distrus, lucrul mecanic primit de radiaţie

$$d\mathcal{L} = -p \cdot dV = -\frac{w}{3}\, dV \qquad (27)$$

Conform principiului întâiu al termodinamicei, căldura primită de sistem (pe cale reversibilă) e dată de

$$dQ = dW - d\mathcal{L} = d\left(Vw\right) + p \cdot dV = w\, dV + V\, dw + \frac{1}{3} w\, dV \qquad (28)$$

Această cantitate de căldură nu e nulă decât dacă p[illegible]
[illegible]tei au în exterior un înveliş adiabatic. In caz contrar, [illegible]
[illegible]e de căldură poate fi schimbată de pereţi cu exteriorul, dar
[illegible]ii vor transforma această căldură în energie radiantă, prin
[illegible]se de emisie sau absorbţie, astfel încât echilibrul termic cu
[illegible]ţia să fie menţinut. Vom cerceta acest caz general. Principiul
[illegible]ilea ne permite să afirmăm că în acest caz raportul $\frac{dQ}{T}$ este
[illegible]erenţială totală exactă şi, anume, diferenţiala entropiei
[illegible]ţiei :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{4}{3} w\, dV + V\, dw\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{w}{T}\cdot dV + \frac{V}{T}\,\frac{dw}{dT}\, dT \qquad (29)$$

Condiţia de integrabilitate se scrie :

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{4}{3}\frac{w}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\cdot\frac{dw}{dT}\right) = \frac{1}{T}\,\frac{dw}{dT}$$

sau

$$-\frac{4}{3}\frac{w}{T^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{T}\frac{dw}{dT} = \frac{1}{T}\cdot\frac{dw}{dT}$$

Această relaţie între w şi T se mai poate scrie

$$\frac{dw}{w} = 4\,\frac{dT}{T}$$

ceeace prin integrare conduce la rezultatul final :

$$w = \text{const}\, T^4 \tag{30}$$

Această formulă constitue <u>legea lui Ştefan - Boltzmann</u> : densitatea totală a energiei radiante (la echilibru termic) este proporţională cu puterea a patra a temperaturii absolute. Dată fiind relaţia dintre densitatea energiei şi intensitate, o lege analoagă se poate formula şi pentru aceasta din urmă. Aceste legi au fost bine verificate de experienţă.

Notând cu a constanta de proporţionalitate din relaţia (30), putem introduce valoarea lui w în ecuaţia (29) pentru a determina entropia radiaţiei :

$$dS = \frac{4}{3} a T^3 dV + 4aVT^2 dT = d\left(\frac{4}{3} a T^3 V\right)$$

deci

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V, \tag{31}$$

adică : densitatea totală a entropiei $\frac{S}{V}$ e proporţională cu puterea a treia a temperaturii absolute. Din această expresie putem trage următoarea concluzie, pe care o vom folosi în paragraful următor : pentru transformări reversibile şi adiabatice, entropia constantă deci

$$T^3 V = \text{const} \tag{32}$$

§ 6.- <u>Legea de deplasare. (Wien)</u> Determinarea funcţiunii universale $w(\nu, T)$ pentru radiaţia termică nu este posibilă fără o analiză a proceselor de emisie şi absorbţie care conduc la stabilirea echilibrului. W.Wien a arătat însă că un rezultat general poate fi obţinut fără a face nici un fel de ipoteză asupra acestor procese ; el a reuşit anume să reducă problema la aceea a determinării unei funcţiuni de o singură variabilă, astfel încât cunoaşterea dependenţei lui w faţă de variabila ν pentru o singură temperatură permite să se găsească dependenţa faţă de frecvenţă a acestei funcţiuni pentru orice altă temperatură. Ideia fundamentală care stă la baza raţionamentului lui Wien, constă în posibilitatea de a schimba frecvenţa radiaţiei prin reflexie pe o oglindă mobilă. Se ştie că variaţia frecvenţei este dată atunci de legea lui

Doppler - Fizeau. Pentru a putea folosi această lege, este însă necesar ca variaţia frecvenţei să fie datorită exclusiv acestui efect; trebue deci exclus orice fenomen de absorbţie şi reemisie, care ar putea modifica frecvenţa radiaţiei într'un chip incontrolabil. Procesul trebue deci condus într'o incintă cu pereţi perfect reflectori, unul dintre ei fiind constituit dintr'o oglindă mobilă, iar în interiorul incintei nu trebue să se găsească nici un corp absorbant sau emiţător.

Intr'o astfel de incintă nu există însă procese care să garanteze menţinerea echilibrului termic. Dacă se introduce în cavitate o radiaţie cu o distribuţie spectrală arbitrară a energiei oricât de depărtată de echilibrul termic ar fi ea, această distribuţie se menţine un timp infinit de lung. Vom arăta totuşi că, dacă la momentul iniţial radiaţia are distribuţie de energie corespunzătoare echilibrului termic, această stare se păstrează în tot cursul deplasării (presupusă infinit de lentă) a peretelui mobil, cu singura condiţie ca prin reflexii difuze pe ceilalţi pereţi să se menţină tot timpul izotropia radiaţiei. Această concluzie se bazează pe faptul că formula (25) pentru presiunea de radiaţie este valabilă chiar dacă distribuţia spectrală a energiei nu corespunde echilibrului termic.

Vom presupune deci că, la momentul iniţial, în incinta de volum V_0 se găseşte o cantitate de energie W_0 care are toate caracteristicile corespunzătoare unui echilibru termic la o temperatură T. Prin deplasarea infinit de lentă a peretelui mobil, să presupunem că volumul ajunge la o valoare finală V. Deoarece pereţii sunt presupuşi perfect reflectori faţă de energia radiantă şi impermeabili faţă de orice altă formă de energie termică, transformarea este adiabatică, aşa încât variaţia de energie e dată numai de lucrul mecanic al presiunii:

$$dW = -p \cdot dV = -\frac{1}{3} w \cdot dV = -\frac{1}{3} \cdot \frac{W}{V} \cdot dV,$$

deci

$$W V^{1/3} = \text{const} = W_0 V_0^{1/3} \tag{33}$$

Energia totală este deci perfect determinată pentru orice poziţie a peretlui mobil.

Să presupunem prin absurd că starea finală nu ar fi o stare de echilibru termic. Prin introducerea în cavitate a unui fragment arbitrar de mic de substanţă absorbantă (şi deci reemiţătoare, conform legii lui Kirchhoff) prin procesele de absorbţie şi reemisie, energia radiantă va tinde, după un timp mai mult sau mai puţin lung, să capete distribuţie spectrală care corespunde echilibrului termic la o anumită temperatură T. Acest proces de evoluţie către starea de echilibru este, conform principiului al doilea, un proces esenţialmente ireversibil. Putem presupune fragmentul de substanţă atât de mic, încât introducerea lui să nu modifice decât arbitrar de puţin energia radiantă totală W a stării finale.

Să deplasăm apoi peretele mobil în sens opus (cu viteză infinit de mică) astfel încât să revenim la volumul iniţial V_0. In tot cursul acestui proces de întoarcere, fragmentul de substanţă absorbantă rămâne în interiorul cavităţii, deci radiaţia se găseşte tot timpul în echilibru termic. Lucrul mecanic efectuat în cursul acestei faze a procesului este însă egal şi de semn contrar cu lucrul mecanic efectuat în faza iniţială, de variaţie a volumului dela V_0 la V, deoarece presiunea, care determină valoarea acestui lucru mecanic, depinde numai de energia totală şi nici decum de modul cum e distribuită această energie pe diferitele frecvenţe. Starea finală este deci o stare de echilibru termic al energiei W_0 în volumul V_0, deci coincide cu starea iniţială, cu singura excepţie a prezenţei fragmentului de substanţă absorbantă. Scoţând acest fragment, ceeace produce iarăşi o variaţie neglijabilă a energiei, revenim exact la starea iniţială a radiaţiei. Intregul proces este deci un proces ciclic, iar singura modificare pe care a suferit-o exteriorul este o eventuală modificare a fragmentului de substanţă, între starea pe care a avut-o înainte de a fi introdus în incintă şi starea pe care o are după ce a fost scos din ea. Dacă fragmentul este suficient de mic, modificarea aceasta în exteriorul sistemului poate fi făcută arbitrar de mică.

Conform definiţiilor termodinamicei, un proces ciclic suferit de un sistem, proces care se produce fără a lăsa urme în exteriorul sistemului, este reversibil. Dar în raţionamentul nostru am întâlnit o fază a procesului, care era ireversibilă, deci întregul proces ar urma să fie ireversibil. Pentru a evita contradicţia trebue să admitem că acea fază ireversibilă nu există, deci că radiația în starea definită prin volumul V și energia W era în echilibru termic chiar înaintea introducerii fragmentului de substanță absorbantă. In tot timpul fazei inițiale radiația a rămas deci în starea de echilibru corespunzătoare valorii instantanee a volumului și energiei totale, deși în această fază au fost excluse procesele de absorbție și emisie.

Odată convinși de posibilitatea procesului ales de Wien, să pășim la determinarea modificărilor pe care le atrage reflexia pe un perete mobil perfect reflector.

Pentru a determina variația frecvenței, să considerăm oglinda plană deplasându-se paralel cu ea însăși, direcția deplasării luată ca axă Ox (normală la planul oglinzii), iar

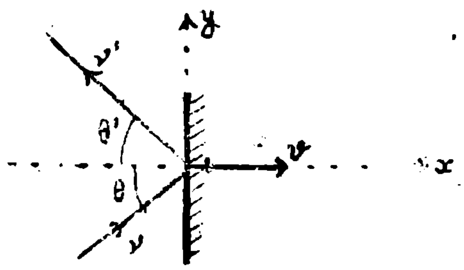


Fig.9.-

viteza de deplasare fiind v (pozitiv sau negativ). Dinspre partea negativă a axei Ox, să presupunem că sosește spre oglindă o undă cu frecvența ν și cu o direcție de propagare care face un unghiu θ cu normala la oglindă. Luăm ca plan xOy planul de incidență al undei. Fie θ' unghiul de reflexie și ν' frecvența undei reflectate. Pentru a determina pe θ' și ν' vom folosi proprietatea că diferența dintre faza undei incidente și faza unei reflectate e constantă în toate punctele de pe planul oglinzii.

Avem deci

$$2\pi\nu\left(x.\cos\theta + y.\sin\theta - ct\right) + \varphi - 2\pi\nu'\left(-x.\cos\theta' + y.\sin\theta' - c.t\right) - \varphi' = const \quad (33)$$

pentru toate punctele din planul oglinzii mobile, deci pentru toate punctele cari satisfac ecuației

$$x = vt \quad (34)$$

Substituind x din (34) în egalitatea (33), aceasta trebue să devină o identitate, deci membrul întâi nu trebue să mai conțină pe y și t. Anulând coeficienții acestor variabile obținem relațiile

$$\nu'.\sin\theta' = \nu.\sin\theta \quad , \quad \nu\left(1-\frac{v}{c}.\cos\theta\right) = \nu'\left(1+\frac{v}{c}.\cos\theta'\right) \quad (35)$$

Aceste relații ne determină pe ν' și θ' ; ele admit soluţia banală $\theta' = \pi - \theta$, $\nu' = \nu$, care rezultă din faptul că unda incidentă are peste tot o diferenţă de fază nulă cu ea însăşi. Cealaltă soluţie este cea care corespunde undei reflectate.

Ne vom mărgini la determinarea frecvenţei ν' , eliminând unghiul θ' : a doua ecuaţie (35) se poate scrie

$$\frac{\nu}{\nu'}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) - 1 = \frac{v}{c}\cos\theta'$$

iar prima :

$$\frac{\nu}{\nu'}\frac{v}{c}\sin\theta = \frac{v}{c}\sin\theta'.$$

Ridicând la pătrat ambele ecuaţii şi însumând, căpătăm

$$\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2\underbrace{\left(1 - \frac{2v}{c}\cos\theta + \frac{v^2}{c^2}\right)}_{a} - 2\frac{\nu}{\nu'}\underbrace{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}_{b} + \underbrace{1 = \frac{v^2}{c^2}}_{c}$$

După cum am observat, această ecuaţie de Gr.II-lea în ν/ν' admite o rădăcină egală cu unu. Cealaltă rădăcină e evident egală cu produsul rădăcinilor :

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\theta + \frac{v^2}{c^2}}$$

Dacă presupunem că viteza v de deplasare a oglinzii este foarte mică, în special mică faţă de viteza luminii c , putem neglija termenii în $\frac{v^2}{c^2}$ şi obţinem

$$\nu' = \nu\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (36)$$

Această relaţie exprimă cantitativ legea lui Doppler - Fizeau.

In cursul reflexiei pe o oglindă mobilă nu se schimbă însă numai frecvenţa unei unde electromagnetice, ci şi energia ei; în adevăr, unda exercită o forţă asupra oglinzii, iar această forţă, deplasându-şi punctul de aplicare prin mişcarea oglinzii, execută un lucru mecanic care modifică energia undei. Pentru a determina această modificare, vom folosi legile generale ale dinamicei precum şi relaţia dintre energia şi impulsul unei unde, relaţie folosită într'un paragraf precedent.

Notând cu F proiecţia pe axa Ox (vezi fig.9) a forţei exercitată de radiaţie asupra onglinzii, variaţia proiecţiei impulsului radiaţiei pe aceeaşi axă e dată de $-\int F dt$, integrala fiind extinsă la toată durata reflexiei. Dar proiecţia impulsului înainte de reflexie este $\frac{W}{c}\cdot\cos\theta$, iar după reflexie este $-\frac{W'}{c}\cdot\cos\theta'$ unde W' representintă energia undei după reflexie. Avem deci

$$-\frac{W'}{c}\cos\theta' - \frac{W}{c}\cos\theta = -\int F\,dt \tag{37}$$

Principiul energiei spune că lucrul mecanic $\int F dx$ al forţei este produs în contul energiei undei :

$$-W' + W = \int F\,dx = v\int F\,dt \tag{38}$$

Inmulţind ecuaţia (37) cu v şi adunând-o membru cu membru cu ecuaţia (38), obţinem

$$-W'\left(1+\frac{v}{c}\cdot\cos\theta'\right) + W\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) = 0 \tag{39}$$

Această ecuaţie este complect analoagă cu a doua ecuaţie (35) ; prin împărţire se constată că raportul dintre energie şi frecvenţă nu se schimbă prin reflexie :

$$\frac{W}{\nu} = \frac{W'}{\nu'} \tag{40}$$

Comparând (40) cu (36), rezultă modul în carevariază energia undei electromagnetice :

$$\boxed{W' = W\left(1-2\frac{v}{c}\cos\theta\right)} \tag{41}$$

Formulele (36) şi (41) ne vor servi la exprimarea condiţiei de echilibru termic al radiaţiei închise în incintă.

Revenind acum la radiaţia în echilibru termic, să studiem variaţia pe care o suferă acea fracţiune din radiaţie, care are frecvenţa cuprinsă în intervalul spectral ν, $\nu + d\nu$. Energia totală a radiaţiei de acest tip, conţinută în cavitatea de volum V , e dată de expresia

$$V \cdot w_\nu \cdot d\nu \tag{42}$$

Două cauze provoacă variaţia acestei energii prin reflexia pe peretele reflector mobil : energia care se găseşte înainte de reflexie în acest interval spectral părăseşte intervalul prin reflexie, ceeace produce o scădere δ_1 a mărimii (42); pe de altă parte, tot în urma reflexiei, energie radiantă care avea frecvenţa în alte intervale spectrale poate să se găsească după o reflexie în intervalul considerat; acest proces produce o creştere δ_2 a mărimii (42). Să determinăm pe rând valorile pe care le au aceste mărimi într'un interval de timp dt . Aria totală a oglinzii va fi notată în cursul acestui calcul cu litera σ .

Dacă intervalul spectral $d\nu$ e destul de îngust, orice undă având înainte de reflexie pe oglinda mobilă frecvenţa cuprinsă în acest interval va avea după reflexie o frecvenţă situată în afara intervalului $d\nu$ .Prin urmare scăderea δ_1 a energiei radiante din incintă şi care are o frecvenţă cuprinsă în intervalul spectral dat se obţine integrând expresia (3) pentru toate unghiurile de incidenţă θ dela 0 la $\frac{\pi}{2}$ şi pentru toate elementele de suprafaţă ale oglinzii :

$$\delta_1 = J_\nu \, d\nu \, dt \int d\sigma \int \cos\theta \, d\Omega = J_\nu . d\nu . dt . \sigma . \pi \qquad (43)$$

La efectuarea integrărilor am folosit în mod explicit ipoteza că radiaţia este isotropă, deci J_ν nu depinde de direcţia de propagare .

Pentru a determina creşterea de energie δ_2 , trebue să considerăm acele unde, care după reflexie au frecvenţa ν . Frecvenţa lor înainte de reflexie fiind notată cu ν_0 , relaţia între ν_0 şi ν e dată de legea lui Doppler - Fizeau (36)

$$\nu = \nu_0 \left(1 - 2 \frac{v}{c} \cdot \cos\theta\right)$$

Rezolvând această ecuaţie în raport cu ν_0 se obţine

$$\nu_0 = \frac{\nu}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\theta} = \nu \left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\theta + \dots\right) \qquad (44)$$

unde neglijăm puterile superioare ale raportului $\frac{v}{c}$. Deasemenea pentru intervalul de frecvenţe avem

$$d\nu_0 = d\nu \left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (45)$$

Energia totală a radiaţiilor cu frecvenţa cuprinsă în intervalul $\nu_0 , \nu_0 + d\nu_0$ şi care soseşte în timpul dt pe întreaga oglindă sub unghiul de incidenţă θ este

$$\mathcal{J}_{\nu_0} \cdot d\nu_0 \cdot dt \cdot \sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega$$

In urma reflexiei, această radiație va avea frecvența în intervalul dorit $\nu, \nu + d\nu$ dar energia ei se modifică conform legii (41), deci va avea mărimea

$$\mathcal{J}_{\nu_0}\, d\nu_0 \cdot dt \cdot \sigma \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \left(1 - 2\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right) \qquad (46)$$

In această expresie vom înlocui pe $d\nu_0$ cu valoarea (45), iar pe $\mathcal{J}_{\nu_0}$ îl vom desvolta în serie după puterile lui ν_0 :

$$\mathcal{J}_{\nu_0} = \mathcal{J}_\nu + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}(\nu_0 - \nu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu^2}(\nu_0-\nu)^2 + \cdots ,$$

sau, înlocuind pe $\nu_0 - \nu$ cu valoarea $2\nu\frac{v}{c}\cos\theta$ dată de (44) și neglijând puterile superioare ale raportului v/c :

$$\mathcal{J}_{\nu_0} = \mathcal{J}_\nu + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\cdot 2\nu\,\frac{v}{c}\cdot\cos\theta$$

(46) devine atunci

$$\left(\mathcal{J}_\nu + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\cdot 2\nu\cdot\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right)d\nu\left(1 + 2\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right) dt\cdot\sigma\cdot\cos\theta\cdot d\Omega\left(1 - 2\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right),$$

sau, ținând seamă de faptul că produsul $\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\theta\right)\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\theta\right)$ diferă de unitate prin mărimi neglijabile,

$$\left(\mathcal{J}_\nu + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\cdot 2\nu\cdot\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right)d\nu\cdot dt\cdot\sigma\cdot\cos\theta\;d\Omega .$$

Integrând această expresie pentru toate direcțiile de incidență, obținem energia radiantă totală care după reflexie în timpul dt are frecvențe în intervalul dat $\nu, \nu + d\nu$, adică creșterea δ_2 :

$$\delta_2 = d\nu\cdot dt\cdot\sigma\cdot\int\left(\mathcal{J}_\nu + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\cdot 2\nu\cdot\frac{v}{c}\cdot\cos\theta\right)\cos\theta\cdot d\Omega$$

$$= d\nu\cdot dt\cdot\sigma\left[\mathcal{J}_\nu\int\cos\theta\, d\Omega + \frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\, 2\nu\,\frac{v}{c}\int\cos^2\theta\, d\Omega\right]$$

$$= d\nu\cdot dt\cdot\sigma\left[\pi\mathcal{J}_\nu + \frac{2\pi}{3}\,\frac{\partial \mathcal{J}_\nu}{\partial \nu}\cdot 2\nu\cdot\frac{v}{c}\right] \qquad (47)$$

rămân constant în urma reflexiei

Variaţia totală a energiei (42), datorită reflexiei în timpul dt, este deci

$$\delta(Vw_\nu d\nu) = \delta_2 - \delta_1 = d\nu\, dt\, \sigma\left[\pi J_\nu + \frac{4\pi}{3}\nu \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right] - J_\nu\, d\nu\, dt\, \sigma\, \pi$$

$$= \frac{4\pi}{3}\nu \frac{v}{c}\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\sigma\, d\nu\, dt$$

Lungimea $d\nu$ a intervalului spectral, fiind o mărime constantă, poate fi simplificat, iar produsul $\sigma \cdot v\, dt$ dintre aria oglinzii şi spaţiul parcurs de oglindă în timpul dt reprezintă creşterea δV a volumului cavităţii. Ecuaţia precedentă se poate scrie deci

$$\delta(Vw_\nu) = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\nu}{c}\cdot\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\cdot\delta V$$

Putem elimina din această ecuaţie pe J_ν, folosind relația (12) dintre w_ν şi J_ν :

$$\delta(Vw_\nu) = \frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial w_\nu}{\partial \nu}\cdot\delta V.$$

sau

$$\frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial w_\nu}{\partial \nu} = \frac{\delta(Vw_\nu)}{\delta V} = w_\nu + V\frac{\partial w_\nu}{\partial V} \tag{48}$$

Funcţiunea w_ν trebue deci să satisfacă acestei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. In această ecuaţie apar ca variabile independente frecvenţa ν şi volumul V ; ca să trecem la variabilele ν şi T, cu ajutorul cărora trebue exprimată densitatea spectrală w_ν, e suficient să folosim faptul că transformarea pe care o suferă radiaţia prin comprimare într'o incintă cu pereţi reflectori este o transformare adiabatică, deci putem aplica relaţia (32) dintre T şi V pentru o astfel de transformare ; prin diferenţiere logaritmică această relaţie se scrie

$$\frac{\delta V}{V} + 3\frac{\delta T}{T} = 0,$$

deci ecuaţia (48) devine

$$\frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial w_\nu}{\partial \nu} = w_\nu - \frac{1}{3}T\frac{\partial w_\nu}{\partial T} \tag{49}$$

Pentru a găsi soluţia generală a acestei ecuaţii, este comod să o scriem sub forma

$$\frac{T}{w_\nu}\cdot\frac{\partial w_\nu}{\partial T} + \frac{\nu}{w_\nu}\cdot\frac{\partial w_\nu}{\partial \nu} = 3$$

şi să luăm ca funcţiune necunoscută pe $\varphi = \log . w_\nu$, iar ca variabile independente pe $x = \log \nu$ şi $y = \log T$. Ecuaţia se scrie atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3 \tag{50}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii lineare se obţine făcând suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{51}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei complete (50). Putem găsi o astfel de soluţie particulară care să depindă numai de x , deci astfel încât $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Atunci trebue să avem $\frac{d\varphi}{dx} = 3$, deci $\varphi = 3x$ este o astfel de soluţie . Soluţia generală a ecuaţiei omogene (51) se obţine uşor interpretând geometric această ecuaţie: ea spune că gradientul funcţiunii φ , definită în planul xOy , are componentele egale şi de semne contrarii, deci acest gradient este un vector care în orice punct al planului este paralel cu bisectoarea cadranului al doilea. Liniile "echipotenţiale" φ = const, care sunt perpendiculare pe direcţia gradientului, sunt deci paralele cu bisectoarea cadranului întâi, şi au ecuaţia $x - y$ = const. Deoarece φ e constant când $x - y$ e constant,

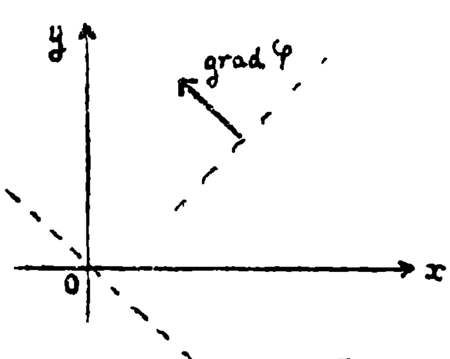


Fig. 10.-

rezultă că φ o funcţiune (arbitrară) de unica variabilă $x - y$:

$$\varphi = \varphi_1(x - y)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (50) e deci

$$\varphi = 3x + \varphi_1(x - y)$$

sau, revenind la vechile variabile (dependentă şi independente),

$$\log w_\nu = 3 \cdot \log \nu + \varphi_1(\log \nu - \log T) = 3 . \log \nu + \varphi_1\left(\log \frac{\nu}{T}\right).$$

Trecând dela logaritmi la numere se obţine

$$w_\nu = \nu^3 \cdot e^{\varphi_1\left(\log \frac{\nu}{T}\right)}$$

Factorul exponenţial este o funcţiune de raportul $\frac{\nu}{T}$, deci putem scrie mai scurt

$$w_\nu = \nu^3 . f\left(\frac{\nu}{T}\right) . \qquad (52)$$

Această relaţie se numeşte <u>legea de deplasare a lui Wien</u> : densitatea spectrală a radiaţiei termice, împărţită cu puterea a treia a frecvenţei, este o funcţiune numai de raportul dintre frecvenţă şi temperatură . Raţionamentul lui Wien nu permite să se determine mai de aproape forma acestei funcţiuni, dar ea nu este totuşi o funcţiune arbitrară căci, conform legii lui Kirchhoff, starea de echilibru termodinamic conduce la o distribuţie spectrală perfect determinată a energiei radiante.

§ 7.- <u>Consecinte ale legii de deplasare</u>. Observăm întâi că legea (52) are drept consecinţă imediată legea lui Stefan - Boltzmann. In adevăr, densitatea totală a energiei, la o temperatură dată T, este

$$w = \int_0^\infty w_\nu \, d\nu = \int_0^\infty \nu^3 . f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu .$$

Introducând ca variabilă de integrare raportul $\frac{\nu}{T} = x$, avem

$$w = \int_0^\infty T^3 . x^3 . f(x) . T dx = T^4 \int_0^\infty x^3 . f(x) . dx ,$$

ceeace arată proporţionalitatea dintre această densitate şi puterea a patra a temperaturii. Pentruca factorul de proporţionalitate să fie finit, trebue ca $f(x)$ să tindă destul de repede către zero când x tinde către ∞ , astfel încât integrala să aibă un sens.

Experienţa arată că isotermele radiaţiei, adică curbele reprezentative ale densităţii spectrale w_ν în funcţie de frecvenţă la temperatură constantă, sunt curbe care au un singur maximum, şi tind către zero când $\nu \to \infty$. Cunoaşterea unei singure astfel de curbe este echivalentă cu cunoaşterea lui $f(x)$ deci ne permite determinarea oricărei alte isoterme. In adevăr, dacă pentru o anumită temperatură T' punem $\frac{T'}{T} = K$, putem determina o frecvenţă ν' prin rela

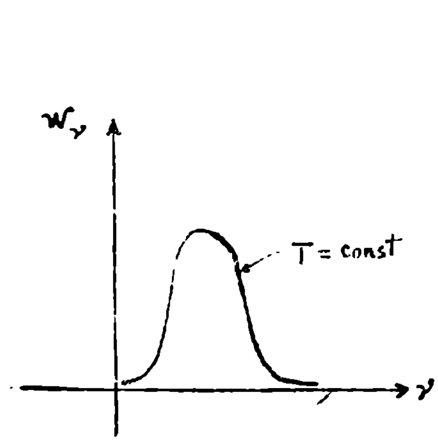


Fig. 11.

ţia $\nu' = K\nu$, astfel încât $\nu'/T' = \nu/T$. Atunci

$$w_{\nu'}(T') = \nu'^3 f\left(\frac{\nu'}{T'}\right) = K^3\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) = K^3 w_\nu(T)$$

In special, se constată că abscisa ν_{max}, pentru care isoterma îşi atinge maximul, este proporţională cu temperatura absolută, iar ordonata, reprezentând intensitatea spectrală maximă, este proporţională cu puterea a treia a temperaturii. Pentru comparaţia acestor rezultate cu datele experimentale, trebue să atragem atenţia că în fizica experimentală se foloseşte densitatea spectrală raportată la intervalul de lungimi de undă :

$$w_\lambda' = \frac{dW}{V|d\lambda|} = \frac{V \cdot w_\nu \cdot |d\nu|}{V \cdot |d\lambda|} = w_\nu \frac{|d\nu|}{|d\lambda|}$$

unde dW este energia totală din cavitatea de volum V şi având o lungime de undă cuprinsă în intervalul spectral $d\lambda$. Folosind relaţia cunoscută $\lambda\nu = c$, avem

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} \cdot |d\lambda| \quad ,$$

deci

$$w_\lambda' = \frac{c}{\lambda^2} \cdot w_\nu = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{c^3}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = T^5 \frac{c^3}{(\lambda T)^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = T^5 g(\lambda, T)$$

Lungimea de undă λ_{max} pentru care intensitatea este maximă, e deci invers proporţională cu temperatura absolută, iar valoarea maximă a intensităţii spectrale în scara lungimilor de undă e proporţională cu puterea a cincea a temperaturii absolute.

§ 8.- Interacţiunea dintre radiaţia termică şi un oscilator linear armonic

Raţionamentele bazate pe principiile termodinamicii nu pot conduce la determinarea formei funcţiunii $f(\nu/T)$, care apare în legea de deplasare. Pentru a ajunge la o determinare completă a proprietăţilor radiaţiei termice, e necesar să se facă apel la metodele mecanicii statistice. Aceste metode vor fi expuse într'un capitol ulterior. In acest paragraf şi în paragraful următor vom arăta că problema de mecanică statistică, pe care trebue să o rezolvăm pentru a determina funcţiunea $f(\nu/T)$, se reduce la aflarea energiei mijlocii a unei oscilaţii armonice simple, această oscilaţie putând fi de tip mecanic sau electromagnetic.

Să considerăm deci un oscilator linear armonic de tip mecanic, adică un punct material susceptibil de mişcări pe o anumită dreaptă şi atras de un punct al acestei drepte cu o forţă cuasi - elastică (proporţională cu depărtarea). Vom caracteriza acest oscilator prin massa m a punctului şi frecvenţa proprie ν_0 a oscilaţiei. In lipsa altor forţe, ecuaţia de mişcare este

$$m\ddot{x} + 4\pi^2 \nu_0^2 m x = 0 \qquad (53)$$

unde x este distanţa dela punctul de massă m la centrul de atracţie. Vom presupune însă că punctul material poate suferi acţiunea unui câmp electromagnetic, deci că el are o sarcină electrică e. Se ştie că, în acest caz, chiar în absenţa unui câmp electro-magnetic exterior, mişcarea punctului este o mişcare oscilatorie amortizată, deoarece o sarcină accelerată pierde energie sub forma de unde electromagnetice. Se arată în teoria câmpului electromagnetic că pierderea $-dW$ de energie în timpul dt e dată de relaţia

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{x}^2 \qquad (54)$$

Putem ţine seama de influenţa acestei pierderi de energie asupra mişcării, introducând o forţă de frânare F, a cărei mărime trebue luată astfel încât lucrul mecanic al ei să dea tocmai valoarea (54) :

$$\int F\,dx = \int dW = -\frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\int \ddot{x}^2 . dt .$$

In ultima integrală putem pune $\ddot{x}^2 dt = \ddot{x} . \frac{d\dot{x}}{dt} . dt = \ddot{x}\,d\dot{x}$ şi putem integra prin părţi :

$$\int F\,dx = -\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\int \ddot{x}\,d\dot{x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\left[\ddot{x}\cdot\dot{x}\right] + \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\int \dot{x}\,d\ddot{x}$$

Dacă integrala se extinde la o perioadă completă a mişcării, partea integrată $\left[\ddot{x}\,\dot{x}\right]$ se anulează, deoarece produsul $\ddot{x}\dot{x}$ ia aceleaşi valori la cele două extremităţi ale intervalului de int grare . In integrala care rămâne, cantitatea de integrat se poate scrie $\dot{x}\,d\ddot{x} = \frac{dx}{dt}\,\frac{d\ddot{x}}{dt}\,dt = \dddot{x}\,.\,dx$. Avem atunci

$$\int F\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\int \dddot{x}\,dx \;;$$

o alegere convenabilă pentru F este deci

$$F = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\cdot\dddot{x} \quad . \tag{55}$$

Vom presupune acum că oscilatorul este situat în interiorul unei cavități în care se găsește radiație în echilibru termic. Atunci asupra sarcinei sale mai lucrează forța eE_x , unde E_x este mărimea componentei câmpului electric al radiației în direcția de oscilație a punctului material. Ecuația de mișcare completă e atunci

$$m\ddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 m\,x - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\dddot{x} = eE_x \tag{56}$$

Vom presupune că radiația este descompusă în componente monocromatice, și vom studia separat efectul fiecărei astfel de componente. Aceasta revine la a presupune că E_x este de forma

$$E_x = A_\nu\,.\,\cos 2\pi\nu t\,. \tag{57}$$

Soluția generală a ecuației lineare și neomogene (56) se obține adăugând soluția generală a ecuației omogene la o soluție particulară oarecare a ecuației complete. Știm însă că soluția generală a ecuației omogene reprezintă o oscilație amortizată, energia corespunzătoare tinzând către zero după un timp mai mult sau mai puțin lung. Pentru a găsi soluția care reprezintă starea de echilibru termodinamic dintre radiație și oscilator, trebuesc neglijați termenii cari conțin factori exponențiali (reali). Vom considera deci numai oscilația forțată permanentă, punând

$$x = C_1\cdot\cos 2\pi\nu t + C_2\cdot\sin 2\pi\nu t \tag{58}$$

Introducând această expresie în ecuația (56) în care membrul al doilea are forma (57), și identificând coeficienții lui $\cos 2\pi\nu t$ și $\sin 2\pi\nu t$ în ambii membri, obținem pentru C_1 și C_2 ecuația

$$
\left.\begin{aligned}
4\pi^2 m(\nu_0^2-\nu^2)C_1 &+ \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^3 C_2 = eA_\nu \\
4\pi^2 m(\nu_0^2-\nu)C_2 &- \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^3 C_1 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (59)
$$

Energia oscilatorului este

$$
W_{osc} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4\pi^2\nu_0^2 x^2\right),
$$

sau, substituind expresia([illegible]

$$
W_{osc} = 2\pi^2 m\left[\nu^2\left(-C_1\cdot\sin 2\pi\nu t + C_2\cdot\cos 2\pi\nu t\right)^2 + \nu_0^2\left(C_1\cos 2\pi\nu t + C_2\cdot\sin 2\pi\nu t\right)^2\right]
$$

$$
= 2\pi^2 m\left[\left(\nu_0^2 C_1^2+\nu^2 C_2^2\right)\cos^2 2\pi\nu t + \left(\nu_0^2 C_2^2+\nu^2 C_1^2\right)\sin^2 2\pi\nu t + 2(\nu_0^2-\nu^2)C_1 C_2\cdot\sin 2\pi\nu t\cdot\cos 2\pi\nu t\right]
$$

Ea variază periodic în jurul valorii mijlocii

$$
\overline{W}_{osc} = \pi^2 m\left(\nu_0^2+\nu^2\right)\left(C_1^2+C_2^2\right). \qquad (60)
$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai ambelor ecuații (59) și adunând membru cu membru, obținem

$$
\left\{\left[4\pi^2 m\left(\nu_0^2-\nu^2\right)\right]^2 + \left[\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^3\right]^2\right\}\left(C_1^2+C_2^2\right) = e^2 A_\nu^2
$$

Eliminăm suma $C_1^2 + C_2^2$ **între această ecuație și (60) :**

$$
\overline{W}_{osc} = \frac{\pi^2 m\left(\nu_0^2+\nu^2\right)e^2}{\left[4\pi^2 m\left(\nu_0^2-\nu^2\right)\right]^2 + \left[\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^3\right]^2} A_\nu^2 \qquad (61),
$$

Energia medie a oscilatorului este deci proporțională cu pătratul amplitudinii câmpului electric exterior, care întreține oscilațiile. Factorul de proporționalitate este o funcțiune de frecvența ν **a acestui câmp și are, după cum se știe din teoria rezonanței, un maximum foarte pronunțat pentru** $\nu = \nu_0$ **.**

Dacă ţinem seamă de toate componentele monocromatice în care poate fi descompus câmpul electromagnetic al radiaţiei termice, expresia care dă mărimea energiei medii a oscilatorului de frecvenţă ν_0 se obţine din relaţia (61) înlocuind în membrul al doilea unicul termen printr'o sumă de termeni de acelaşi tip, fiecare termen corespunzând câte unei componente monocromatice :

$$\overline{W_{osc}} = \sum_{0 \leq \nu < \infty} \frac{\pi^2 m (\nu_0^2 + \nu^2) e^2}{\left[4\pi^2 m (\nu_0^2 - \nu^2)\right]^2 + \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} (2\pi\nu)^3\right]^2} A_\nu^2 .$$

In această sumă putem grupa la un loc toţi termenii care corespund unor frecvenţe ale radiaţiei cuprinse în intervalul spectral ν , $\nu + d\nu$. Factorul de proporţionalitate fiind practic constant în acest interval, contribuţia acestui interval spectral la energia mijlocie a oscilatorului se poate scrie

$$\frac{\pi^2 m (\nu_0^2 + \nu^2) e^2}{\left[4\pi^2 m (\nu_0^2 - \nu^2)\right]^2 + \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} (2\pi\nu)^3\right]} \sum_{\nu}^{\nu + d\nu} A_\nu^2 . \qquad (62)$$

Din definiţia (57) rezultă însă că pentru fiecare componentă monocromatică avem

$$\overline{E_x^2} = \frac{1}{2} A_\nu^2 ,$$

unde bara superioară reprezintă, ca deobicei, valoarea mijlocie a mărimii barate.

Deoarece radiaţia este presupusă isotropă, avem

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \overline{H_x^2} = \overline{H_y^2} = \overline{H_z^2} = \frac{1}{6}\overline{(H^2 + E^2)} = \frac{1}{2} A_\nu^2 ,$$

deci

$$A_\nu^2 = \frac{1}{3}\overline{(E^2 + H^2)} = \frac{8\pi}{3} \cdot \overline{\frac{E^2 + H^2}{8\pi}}$$

adică A_ν^2 e proporţional cu densitatea mijlocie a energiei electromagnetice transportată de componenta monocromatică considerată. Rezultă că $\sum_{\nu}^{\nu+d\nu} A_\nu^2$ e proporţională cu densitatea de energie a undelor cu frecvența cuprinsă în intervalul ν, $\nu + d\nu$, deci, conform definițiilor din § 1, putem scrie

$$\sum_{\nu}^{\nu+d\nu} A_\nu^2 = \frac{8\pi}{3} w_\nu \, d\nu .$$

Inlocuind acest rezultat în (62) și integrând asupra întregului spectru se obține

$$\overline{W}_{osc} = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\pi^2 m(\nu_0^2+\nu^2)e^2}{\left[4\pi^2 m(\nu_0^2-\nu^2)\right]^2 + \left[\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu)^3\right]^2} w_\nu \, d\nu \qquad (63)$$

Pentru a efectua integrarea, vom profita de faptul că fracțiunea are un maximum foarte pronunțat în vecinătatea valorii $\nu = \nu_0$ și scade foarte repede când ν se îndepărtează dela această valoare. Singură vecinătatea rezonanței contribue în mod esențial la integrală. Putem deci înlocui pe w_ν cu valoarea w_{ν_0} pe care o ia la rezonanță, și putem scoate acest factor constant în fața integralei. Deasemenea în factorul fracționar putem înlocui peste tot pe ν cu valoarea constantă ν_0, cu singura excepție a diferenței $\nu^2 - \nu_0^2$ care poate fi înlocuită cu $(\nu+\nu_0)(\nu-\nu_0) \approx 2\nu_0(\nu-\nu_0)$. Vom avea atunci

$$\overline{W}_{osc} = \frac{8\pi}{3} w_{\nu_0} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 m e^2 \nu_0^2}{\left[8\pi^2 m\nu_0(\nu-\nu_0)\right]^2 + \left[\frac{16\pi^3}{3}\frac{e^2}{c^3}\nu_0^3\right]^2} d\nu$$

$$= \frac{8\pi}{3} w_{\nu_0} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 m e^2 \nu_0^2}{(8\pi^2 m\nu_0)^2 \cdot \left\{(\nu-\nu_0)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^3}\nu_0^2\right)^2\right\}} d\nu$$

$$= \frac{w_{\nu_0}}{12\pi} \int_0^\infty \frac{e^2}{m} \cdot \frac{d\nu}{(\nu-\nu_0)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^3}\nu_0^2\right)^2}$$

Notând pentru prescurtare $\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{e^2}{mc^3}\nu_0^2 = a$, deci $\frac{e^2}{m} = \frac{3c^3}{2\pi\nu_0^2} a$, putem scrie

$$\overline{W}_{osc} = \frac{w_{\nu_0} \cdot c^3}{8\pi^2\nu_0^2} \int_0^\infty \frac{a\, d\nu}{(\nu-\nu_0)^2 + a^2} = \frac{w_{\nu_0}\cdot c^3}{8\pi^2\nu_0^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{\nu-\nu_0}{a}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{w_{\nu_0}\cdot c^3}{8\pi^2\nu_0^2}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\nu_0}{a}\right)\right] = \frac{w_{\nu_0}\cdot c^3}{8\pi^2\nu_0^2}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\nu_0}{a}\right].$$

Pentru toate frecvențele ν_0 interesante, raportul $\frac{\nu_0}{a}$ este extrem de mare față de unitate; în adevăr, înlocuind frecvența prin lungimea de undă corespunzătoare $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$; avem $\frac{a}{\nu_0} = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^3}\nu_0 = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^2}\frac{1}{\lambda_0}$ .Afirmația este deci echivalentă cu afirmația că $\lambda_0 \gg \frac{e^2}{mc^2}$. Dar $\frac{e^2}{mc^2}$ este"raza electromagnetică" a particulei electrizate care oscilează, și întregul nostru calcul presupune că aceasta este mică față de toate lungimile de undă care interesează. Rezultă deci că putem înlocui pe $\operatorname{arctg}\frac{\nu_0}{a}$ cu $\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$. Vom avea atunci

$$\overline{W}_{osc} = \frac{c^3}{8\pi\nu_0^2}\cdot w_{\nu_0}$$

sau

$$w_{\nu_0} = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3}\cdot\overline{W}_{osc} \qquad (64)$$

Prin urmare, densitatea spectrală a radiației termice, în vecinătatea unei frecvențe ν (putem lăsa indicele zero la o parte), este proporțională cu energia mijlocie a unui oscilator linear mecanic de frecvență proprie ν , factorul de proporționalitate fiind $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$. Căutarea lui w_ν revine deci la căutarea lui $\overline{W}_{osc}$

§ 9.- Descompunerea radiației termice în vibrații staționare

La un rezultat analog cu cel găsit în paragraful precedent se poate ajuge descompunând câmpul electromagnetic al radiației în vibrații staționare simple. Pentru a putea da explicit forma acestor vibrații, vom presupune că incinta în care se află radiația are forma unui paralelipiped dreptunghiu de laturi A, B, C, iar pereții acestei incinte sunt perfect reflectori.

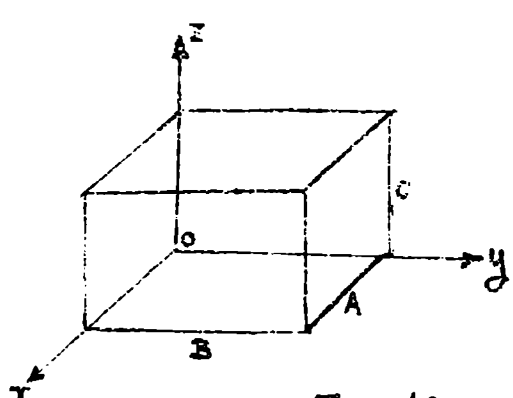


Fig. 12

Se știe că în acest caz câmpul electric are totdeauna o direcție normală la suprafața peretelui. Cele două componente tangențiale sunt deci peste tot nule. Vom arăta că componenta normală,care nu e nulă, are însă o derivată normală nulă. Alegând ca sistem de referință un triedru cu originea în unul din vârfurile paralelipipedului și cu nele paralele cu muchiile acestui paralelipiped, vom considera ca exemplu fața z = 0. In această față avem deci

$$E_x(x,y,0) = E_y(x,y,0) = 0 \quad ; \quad E_z(x,y,0) \neq 0 \tag{65}$$

Din condiția

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 ,$$

aplicată unui punct al planului z = 0, rezultă atunci :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}(x,y,0) = 0 . \tag{65'}$$

Condițiile la limită complete pentru E_x sunt deci :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}(0,y,z) = \frac{\partial E_x}{\partial x}(A,y,z) = 0 \;\; ; \;\; E_x(x,0,z) = E_x(x,B,z) = 0 \;\; ; \;\; E_x(x,y,0) = E_x(x,y,C) = 0 \tag{66}$$

O funcțiune de x,y,z care satisface acestor condiții este

$$\cos\frac{n_1\pi}{A}x \cdot \sin\frac{n_2\pi}{B}y \cdot \sin\frac{n_3\pi}{C}z ,$$

unde n_1, n_2, n_3 sunt trei numere întregi. In teoria seriilor lui Fourier se arată că orice funcțiune care satisface condițiilor la limită (66) și unor condițiuni de regularitate foarte generale poate fi desvoltată în serie trigonometrică triplă de forma

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty} C'\cdot \cos\frac{n_1\pi}{A}x\cdot\sin\frac{n_2\pi}{B}y\cdot\sin\frac{n_3\pi}{C}z ,$$

deci și componenta E_x admite o astfel de desvoltare. Din condițiile la limită pe care le satisfac componentele E_y și E_z rezultă că ele pot fi desvoltate în serii Fourier respectiv de formele

$$\sum\sum\sum C''\cdot\sin\frac{n_1\pi}{A}x\cdot\cos\frac{n_2\pi}{B}y\cdot\sin\frac{n_3\pi}{C}z \;\; ; \;\; \sum\sum\sum C'''\cdot\sin\frac{n_1\pi}{A}x\cdot\sin\frac{n_2\pi}{B}y\cdot\cos\frac{n_3\pi}{C}z$$

Deoarece vectorul $\vec{E}$ depinde nu numai de x,y,z ci și de t, trebue să admitem că dependența de timp e conținută în coeficienții C', C'', C'''. Diverșii termeni ai seriilor Fourier precedente, reprezintă diversele unde staționare sinusoidale care pot exista în cavitatea considerată. In cele ce urmează ne vom preocupa de o singură undă de acest fel. Pentru a simplifica scrisul, vom pune

$$\frac{n_1\pi}{A} = \alpha \quad , \quad \frac{n_2\pi}{B} = \beta \quad , \quad \frac{n_3\pi}{C} = \gamma \qquad (66)$$

Deasemenea, vom lucra cu potențialul vectorial $\vec{A}$ al undei, ales astfel încât potențialul scalar să fie nul. Se știe atunci că, punând

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \qquad (67)$$

ecuațiile lui Maxwell pentru vid sunt satisfăcute dacă potențialul $\vec{A}$ satisface condițiilor

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 A_{x,y,z}}{\partial t^2} = \Delta A_{x,y,z} \; ; \qquad (68)$$

cea de a doua ecuație, care e ecuația de propagare a undelor în vid, trebue să fie satisfăcută individual de către fiecare componentă a vectorului $\vec{A}$.

Vom satisface în mod evident condițiile la limită (65) și (65′) pentru $\vec{E}$ punând

$$A_x = a_x(t)\cdot\cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\sin\gamma z \;,\; A_y = a_y(t)\cdot\sin\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\sin\gamma z \;,\; A_z = a_z(t)\cdot\sin\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\cos\gamma z \qquad (69)$$

Substituind aceste expresii în ecuația (68), obținem respectiv

$$-\left(\alpha a_x + \beta a_y + \gamma a_z\right)\cdot\sin\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\sin\gamma z = 0$$

$$\frac{\ddot{a}_x}{c^2}\cdot\cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\sin\gamma z = -\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot a_x\cdot\cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\sin\gamma z \;, \text{etc.}$$

sau

$$\alpha a_x + \beta a_y + \gamma a_z = 0 \quad ; \quad \begin{cases} \ddot{a}_x + c^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot a_x = 0 \\ \ddot{a}_y + c^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot a_y = 0 \\ \ddot{a}_z + c^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot a_z = 0 \end{cases} \qquad (70)$$

Notând cu $\vec{a}$ vectorul (variabil în timp) de componente a_x, a_y, a_z şi cu $\vec{\nu}$ vectorul (fix) de componente α, β, γ, prima ecuaţie (70) spune că aceşti doi vectori sunt perpendiculari între ei, deci că $\vec{a}$ variază în planul fix perpendicular pe vectorul $\vec{\nu}$. Soluţia generală a acestei ecuaţii se obţine punând

$$\vec{a} = a'.\vec{u'} + a''.\vec{u''} \tag{71}$$

unde $\vec{u'}$ şi $\vec{u''}$ sunt doi vectori unitari fixi perpendiculari între ei şi perpendiculari pe vectorul $\vec{\nu}$. Grupul ultimelor ecuaţii (70) se poate scrie vectorial :

$$\ddot{\vec{a}} + c^2\nu^2\,\vec{a} = 0$$

Substituind expresia (71) pentru $\vec{a}$, obţinem

$$\left(\ddot{a}' + c^2\nu^2 a'\right)\vec{u'} + \left(\ddot{a}'' + c^2\nu^2 a''\right)\vec{u''} = 0$$

Prin înmulţirea scalară a acestei ecuaţii întâi cu $\vec{u'}$, apoi cu $\vec{u''}$, se deduce, ţinând seamă de perpendicularitatea vectorilor $\vec{u'}$ şi $\vec{u''}$, că trebue să avem

$$\ddot{a}' + c^2\nu^2 a' = 0 \qquad , \qquad \ddot{a}'' + c^2\nu^2 a'' = 0 .$$

Soluţia acestor ecuaţii este dată de o oscilaţie armonică de frecvenţă

$$\nu = \frac{c\nu}{2\pi} \tag{72}$$

şi a cărei amplitudine şi fază este arbitrară. Pentru fiecare vector $\vec{\nu}$, definit cu ajutorul numerelor întregi n_1, n_2, n_3 prin relaţiile (66), avem două vibraţii armonice linear polarizate, direcţiile de polarizaţie fiind perpendiculare între ele. O vibraţie electromagnetică simplă este dată de una dintre aceste două unde staţionare; vom considera în cele ce urmează unda cu polarizaţia definită prin vectorul $\vec{u'}$.

Diversele unde staţionare sunt definite prin poziţia vec rului $\vec{\nu}$ şi prin direcţia de polarizare. Pentru a ne da seama de posibilităţile de variaţie ale vectorului $\vec{\nu}$, să considerăm componentele sale α, β, γ ca fiind coordonatele unui punct reprezentativ într'un spaţiu al vectorului $\vec{\nu}$. Aceste coordonate sunt, aşa cum rezultă din (66), multipli întregi respectiv de $\frac{\pi}{A}, \frac{\pi}{B}, \frac{\pi}{C}$ şi sunt totdeauna pozitive sau nule. Prin urmare, extremitatea vectorului $\vec{\nu}$ aparţine punctelor situate în octanul întâi al unei reţele de puncte cu coordonatele reticulare respective $\frac{\pi}{A}, \frac{\pi}{B}, \frac{\pi}{C}$. Un paralelipiped elementar al reţelei, adică un paralelipiped care nu conţine decât un punct al reţelei, are volumul $\frac{\pi}{A}\cdot\frac{\pi}{B}\cdot\frac{\pi}{C} = \frac{\pi^3}{ABC}$. Prin urmare o regiune de volum $\mathcal{V}$ a spaţiului vectorilor $\vec{\nu}$ conţine $\mathcal{V}/\frac{\pi^3}{ABC} = \frac{ABC\cdot\mathcal{V}}{\pi^3}$ puncte.

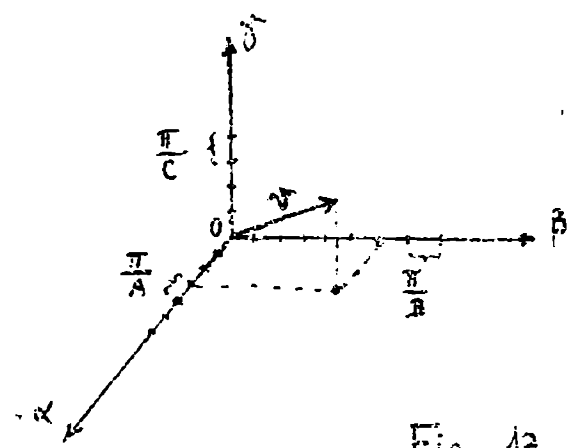


Fig. 13.

Să considerăm în special acei vectori $\vec{\nu}$ care corespund unor unde staţionare cu frecvenţa cuprinsă în intervalul spectral ν, $\nu + d\nu$. Dată fiind relaţia (72) dintre frecvenţa undei şi lungimea vectorului $\vec{\nu}$, extremităţile acestor vectori trebue să fie situate în regiunea din octanul întâi cuprinsă între două sfere cu centrul în origine şi având respectiv ca raze

$$\nu = \frac{2\pi}{c}\nu \quad , \quad \nu + d\nu = \frac{2\pi}{c}(\nu + d\nu)$$

Această regiune are volumul

$$d\mathcal{V} = \frac{1}{8}\cdot 4\pi\,\nu^2 d\nu = \frac{1}{8}\cdot 4\pi\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu = \frac{4\pi^4}{c^3}\nu^2 d\nu ,$$

deci numărul de puncte reticulare situate în interiorul ei este

$$ABC \cdot \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu .$$

Dat fiind faptul că, pentru fiecare vector $\vec{\nu}$ avem două vibraţii simple, linear polarizate, numărul total de vibraţii simple cu frecvenţa cuprinsă în intervalul spectral ν, $\nu + d\nu$ este

$ABC \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot d\nu$; ţinând seama că A, B, C reprezintă volumul V al cavităţii, acest număr dn se poate scrie

$$dn = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot d\nu \tag{73}$$

Observăm în treacăt că se poate demonstra valabilitatea acestei expresii oricare ar fi forma cavităţii cu pereţi reflectori.[1]

Notând acum cu $\overline{W}_{osc}(\nu, T)$ energia mijlocie pe care o are o oscilaţie eletromagnetică simplă de frecvenţa ν, atunci când se află în echilibru termic la temperatura T, energia tuturor oscilaţiilor din cavitate, care au frecvenţa în intervalul spectral $\nu, \nu + d\nu$ va fi dată de

$$dW = \overline{W}_{osc}(\nu, T) \cdot dn = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \overline{W}_{osc}(\nu, T) \cdot d\nu ,$$

de unde rezultă pentru densitatea spaţială şi spectrală a energiei

$$w_\nu = \frac{dW}{V \cdot d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \overline{W}_{osc}(\nu, T). \tag{74}$$

Această relaţie este identică în formă cu relaţia (64), singura deosebire fiind aceea că $\overline{W}_{osc}$ reprezintă energia mijlocie a unei oscilaţii simple electromagnetice în loc de energia corespunzătoare a unei oscilaţii mecanice.

§ 10.- O aplicaţie a descompunerii câmpului radiaţiei în vibraţii simple

Metoda desvoltată în § 9, a descompunerii câmpului electromagnetic în oscilaţii staţionare simple, poate fi aplicată şi la demonstraţia legii lui Wien. Pentru aceasta, vom folosi noţiunea de entropie a radiaţiei, pe care am introdus-o în paragraful 5. Vom considera deci entropia totală S a radiaţiei ca suma entropiilor datorite diferitelor unde staţionare simple. Notând cu S_{osc} entropia unei astfel de unde, obţinem entropia tuturor undelor cu frecvenţa cuprinsă în intervalul spectral $\nu, \nu + d\nu$ prin înmulţire cu număr dn de unde simple care au frecvenţa în acest interval:

$$dS = V \cdot \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot S_{osc} \cdot d\nu ,$$

iar entropia totală a radiației se obține însumând asupra tuturor frecvențelor :

$$S = V \cdot \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \cdot S_{osc} \cdot d\nu .$$

Entropia S_{osc} a unei oscilații simple este funcțiune[1] de energia medie $\overline{W}_{osc} = W_{osc}$ a oscilației și de frecvența ν :

$$S_{osc} = f\left(W_{osc}, \nu\right) . \qquad (75)$$

Dacă această funcțiune ne-ar fi cunoscută, problema distribuției spectrale a energiei radiante în echilibru termic ar fi rezolvată. In adevăr, din termodinamică se știe că starea de echilibru este cea care corespunde valorii minime a energiei libere, atunci când temperatura și volumul au valori date. Energia liberă este

$$F = W - TS = V \cdot \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \left[W_{osc} - T \cdot f\left(W_{osc}, \nu\right)\right] d\nu .$$

Variind această expresie la V și T constant, obținem

$$\delta F = V \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \left[1 - T \cdot \frac{\partial f}{\partial W_{osc}} \right] \cdot \delta W_{osc} \cdot d\nu .$$

Pentru ca această variație să fie nulă oricare ar fi δW_{osc}, trebue să avem

$$T \cdot \frac{\partial f}{\partial W_{osc}} = 1 . \qquad (76)$$

Ecuația (75) reprezintă o relație între variabilele W_{osc}, ν și T, care, rezolvată în raport cu W_{osc}, ni l-ar da ca funcțiune

1) Energia unei oscilații simple (armonice) este constantă, deci

$$W_{osc} = \text{const} = \overline{W}_{osc}$$

de ν şi T . Substituind această funcţiune în ecuaţia (74) am reuşi să determinăm densitatea spectrală a radiaţiei în echilibru termic pentru o temperatură dată. Toată problema constă deci în a determina pe S_{osc} în funcţiune f de W_{osc} şi ν .

Legea lui Wien nu ne permite să efectuăm complet această determinare, dar dovedeşte că funcţiunea de două variabile se reduce la o funcţiune de o singură variabilă. Ideia de bază a demonstraţiei rămâne aceeaşi ca la § 6 : printr'o deplasare extrem de lentă a unuia dintre pereţii cavităţii, putem varia atât frecvenţa cât şi energia fiecărei vibraţii simple din cavitate. In cursul acestui proces care e reversibil şi adiabatic, entropia S_{osc} nu trebue să se schimbe. Problema determinării acestei entropii este deci echivalentă cu determinarea acelor funcţiuni de ν şi W_{osc} , care sunt "invarianţi adiabatici", adică nu se schimbă în cursul transformării. Pentru determinarea acestor invarianţi, vom studia întâi modul cum variază frecvenţa unei oscilaţii simple.

Să presupunem deci că deplasăm peretele $z = C$ al cavităţii, variind cu δC lungimea muchiei C . In cursul acestei deplasări, pe care o presupunem infinit de lentă, numerele întregi n_1 , n_2 , n_3 care definesc o undă staţionară, nu pot varia, deoarece singura variaţie posibilă pentru ele ar fi o variaţie discontinuă. Relaţia (72) pentru frecvenţa undei staţionare considerate se poate scrie

$$\nu = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} .$$

In cursul procesului adiabatic variază numai componenta $\gamma = \frac{n_3 \pi}{C}$.

Avem atunci prin diferenţiere logaritmică

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\gamma \cdot \delta\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \frac{\delta\gamma}{\gamma} = - \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \frac{\delta C}{C} . \qquad (7$$

Variaţia energiei W_{osc} este dată de lucrul mecanic efectuat în deplasarea peretelui de către presiunea exercitată de unda staţionară asupra acestui perete. Pentru a determina această presiune nu putem face apel la formula (25), care e valabilă numai pentru radiaţia izotropă. Teoria câmpului electromagnetic ne spune în general că presiunea asupra unei suprafeţe având normala paralelă cu axul Oz e dată de componenta T_{zz} a tensorului lui Maxwell :

$$p = -T_{zz} = \frac{1}{8\pi}\left(E_x^2 + E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 - H_z^2\right) \qquad (78)$$

Formulele (67), (69) și (71) ne dau următoarele expresii [pen]tru componentele câmpurilor electric și magnetic, ale unei unde [si]mple linear polarizate :

$$E_x = -\frac{\dot a}{c}\cdot u_x \cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\sin\gamma z \qquad H_x = a\left(\beta u_z - \gamma u_y\right)\cdot\sin\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\cos\gamma z$$

$$E_y = -\frac{\dot a}{c}\cdot u_y\cdot\sin\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\sin\gamma z \qquad H_y = a\left(\gamma u_x - \alpha u_z\right)\cdot\cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\cos\gamma z \qquad (79)$$

$$E_z = -\frac{\dot a}{c}\cdot u_z\cdot\sin\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\cos\gamma z \qquad H_z = a\left(\alpha u_y - \beta u_x\right)\cdot\cos\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\sin\gamma z$$

[Fii]nd vorba de o undă linear polarizată, (71) devine $\vec{A} = a\cdot\vec{u}$).

Pentru peretele $z = C$ avem $\sin\gamma C = 0$, deci $E_x = H_z = 0$ 1) și presiunea în punctul de coordonate x, y de pe a[ce]astă față are valoarea

$$p = \frac{1}{8\pi}\left[H_x^2 + H_y^2 - E_z^2\right] = \frac{1}{8\pi}\left[a^2\left(\beta u_z - \gamma u_y\right)^2\cdot\sin^2\alpha x\cdot\cos^2\beta y + \right.$$

$$\left. + a^2\left(\gamma u_x - \alpha u_z\right)^2\cdot\cos^2\alpha x\cdot\sin^2\beta y - \frac{\dot a^2}{c^2}\cdot u_z^2\cdot\sin^2\alpha x\cdot\sin^2\beta y\right].$$

Forța totală pe acest perete e deci

$$F = \int_0^A\!\!\int_0^B p\cdot dx\,dy = \frac{1}{32\pi}\left[a^2\left(\beta u_z - \gamma u_y\right)^2 + a^2\left(\gamma u_x - \alpha u_z\right)^2 - \frac{\dot a^2}{c^2}\cdot u_z^2\right]AB$$

Deoarece a e funcțiune sinusoidală de timp, și F depin[de] de timp. Ceeace se măsoară este însă valoarea mijlocie (ceeace în [teo]ria curentului alternativ se numește "valoarea efectivă" a lui F.

---

1) Condițiile la limită $H_z(x,y,0) = H_z(x,y,C) = 0$ rezultă din $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ [ți]nând seama că relațiile (65) atrag, conform primei ecuații (67), relații analoage pentru A_x, A_y (termenul static, independent de timp, care apare ca o constantă de integrare în (67), nu interesează în problema radiației).

Punând

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cdot \sin(2\pi\nu t + \varphi) \\ \dot{a} &= 2\pi\nu b \cdot \cos(2\pi\nu t + \varphi) \end{aligned}\right\} , \qquad (80)$$

avem

$$\left.\begin{aligned} \overline{a^2} &= b^2 \cdot \overline{\sin^2(2\pi\nu t + \varphi)} = \frac{b^2}{2} \\ \overline{\dot{a}^2} &= 4\pi^2\nu^2 b^2 \cdot \overline{\cos^2(2\pi\nu t + \varphi)} = \frac{1}{2} 4\pi^2\nu^2 b^2 = \frac{1}{2} c^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) b^2 \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

(In transformarea ultimei egalităţi am folosit valoarea (72) pentru frecvenţă).

Atunci valoarea mijlocie a forţei devine

$$\overline{F} = \frac{b^2}{64\pi}\left[(\beta u_z - \gamma u_y)^2 + (\gamma u_x - \alpha u_z)^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) u_z^2\right] A.B$$

$$= \frac{b^2}{64\pi}\left[\gamma^2(u_x^2 + u_y^2 - u_z^2) - 2\gamma u_z (\alpha u_x + \beta u_y)\right] A.B.$$

Folosind condiţia de perpendicularitate dintre vectorul tate $\vec{u}$ şi vectorul $\vec{v}$ de componente α, β, γ, avem

$$\alpha u_x + \beta u_y = -\gamma u_z ,$$

deci

$$\overline{F} = \frac{b^2}{64\pi} \cdot \gamma^2 (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, A.B = \frac{b^2}{64\pi} \gamma^2 A B . \qquad (82)$$

Energia totală a undei este

$$W_{osc} = \frac{1}{8\pi} \int_0^A \int_0^B \int_0^C (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{64\pi}\left[\frac{\dot{a}^2}{c^2} + a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right] ABC$$

Inlocuind în membrul al doilea pe a şi $\dot{a}$ cu valorile (80), se obţine

$$W_{osc} = \frac{1}{64\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).\,b^2.\,ABC\ .$$

Prin împărţirea acestei egalităţi cu (82) căpătăm egalitatea

$$\frac{\overline{F}}{W_{osc}} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{1}{C}\ .$$

Prin deplasarea cu δC a peretelui $z = C$, forţa F efectuează un lucru mecanic, provocând astfel o scădere a energiei oscilaţiei :

$$\delta W_{osc} = -\overline{F}.\delta C\ , \qquad \frac{\delta W_{osc}}{W_{osc}} = -\frac{\overline{F}}{W_{osc}}\,\delta C = -\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{\delta C}{C}\ . \tag{83}$$

Comparând această egalitate cu (77), deducem că

$$\frac{\delta W_{osc}}{W_{osc}} = \frac{\delta\nu}{\nu} \tag{84}$$

sau, prin integrare, că raportul $\frac{W_{osc}}{\nu}$ rămâne constant în cursul transformării; el este un "invariant adiabatic". Dealtfel, orice invariant adiabatic $f(W_{osc}, \nu)$, care depinde de frecvenţă şi de energia oscilaţiei, trebue să fie funcţiune numai de raportul W_{osc}/ν ; în adevăr, condiţia de invarianţă f = const se traduce prin relaţia diferenţială

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial\nu}\,\delta\nu + \frac{\partial f}{\partial W_{osc}}\cdot\delta W_{osc} = 0\ .$$

Inlocuind diferenţialele $\delta\nu$ şi δW_{osc} prin mărimile proporţionale (după 84) ν şi W_{osc}, se capătă ecuaţia

$$\nu.\,\frac{\partial f}{\partial\nu} + W_{osc}\cdot\frac{\partial f}{\partial W_{osc}} = 0$$

care nu este altceva decât ecuaţia lui Euler pentru funcţiunile omogene de grad zero faţă de variabilele ν şi W_{osc}. Invariantul adiabatic f este deci o astfel de funcţiune, deci nu depinde decât de raportul W_{osc}/ν. In special, entropia oscilatorului

S_{osc} este o astfel de funcţiune :

$$S_{osc} = f\left(\frac{W_{osc}}{\nu}\right) \tag{85}$$

Această concluzie este echivalentă cu legea de deplasare, căci relaţia (76) se scrie în acest caz :

$$\frac{T}{\nu} \cdot f'\left(\frac{W_{osc}}{\nu}\right) = 1 \ ,$$

nde accentul indică derivata funcţiunii în raport cu unica variabilă $\frac{W_{osc}}{\nu}$. Scriind ecuaţia precedentă sub forma

$$f'\left(\frac{W_{osc}}{\nu}\right) = \frac{\nu}{T} \tag{86}$$

i rezolvând-o în raport cu variabila $\frac{W_{osc}}{\nu}$, se obţine

$$\frac{W_{osc}}{\nu} = g\left(\frac{\nu}{T}\right) . \tag{87}$$

Introducând valoarea energiei de oscilaţie, extrasă din această egalitate în ecuaţia (74), căpătăm în definitiv

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \nu \cdot g\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Densitatea spectrală w_ν a energiei radiante în echilibrul termic la temperatura T e deci egală cu produsul dintre ν^3 şi o funcţiune $\frac{8\pi}{c^3} \cdot g\left(\frac{\nu}{T}\right)$ numai de raportul $\frac{\nu}{T}$. Acest enunţ coincide, până la notaţii, cu enunţul (52) al legii de deplasare. El are însă avantajul de a pune în evidenţă semnificaţia fizică a funcţiunii (necunoscute) de $\frac{\nu}{T}$, legând-o de relaţia dintre energie, entropie şi frecvenţa oscilaţiei armonice simple

UNIVERSITATEA "C.I.PARHON"

FACULTATEA DE MATEMATICI SI FIZICA.

Curs de Fizică Statistică

şi

Mecanică cuantica

de prof.Serban Titeica.

III.Teoria cuantică veche.

BUCURESTI,1951.