

A. R. P. N.

1880

LUC PICART

ASTRONOMIE
GÉNÉRALE



COLLECTION ARMAND COLIN



Astronomie
générale

DU MÊME AUTEUR

Calcul des Orbites et des Éphémérides. (Doin, Paris, 1913.)

26
-60

521

KIA

N° 50.

COLLECTION ARMAND COLIN
(Section de Mathématiques)

Astronomie générale

par

Luc PICART

Directeur de l'Observatoire de Bordeaux

42 Figures



LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS

1924

Tous droits réservés.

Inv. 1969. Brunt

6067/1958



INVENTAR 1961

Tous droits de reproduction,
de traduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.
Copyright 1924, by Max Leclerc
et H. Bourrelier.

PRÉFACE

L'astronomie devait être représentée dans cette collection; nombreux en effet sont les esprits éclairés qui, s'intéressant surtout aux méthodes et aux résultats principaux, reculent devant la lecture un peu difficile des traités d'astronomie, dont les auteurs ont le goût et l'habitude des longs calculs; d'autre part, les vulgarisateurs ressemblent trop souvent à ces guides qui prétendent diriger et forcer l'admiration sans être capables de fournir un renseignement essentiel; en outre, l'enseignement de nos lycées, si remarquable à tant d'égards, est loin d'être parfait pour la science qui nous occupe; la plupart des professeurs de mathématiques n'ont pas sur la cosmographie de connaissances plus étendues que celles qu'ils sont chargés de répandre; de sorte que leurs préférences vont naturellement aux matières sur lesquelles ils peuvent exposer des vues plus personnelles.

Un volume sera consacré à l'astrophysique; celui-ci s'occupe plutôt de la branche mathématique; je me suis efforcé, en le rédigeant, de ne faire appel qu'à des connaissances très élémentaires; j'ai établi sommairement, au début, les formules principales de la trigonométrie sphérique, dont l'emploi m'a paru indispensable pour la précision; dans la seconde partie, où intervient une explication mécanique, le lecteur a seulement besoin de savoir former les équations du mouvement d'un point matériel.

J'ai signalé un certain nombre de questions qui font

l'objet des recherches des astronomes contemporains; je voudrais laisser l'impression que l'astronomie n'est pas une science achevée, ce qui serait bien près d'une science morte; si elle progresse lentement, c'est qu'elle repose sur des bases trop vastes, et qu'elle occupe trop peu de travailleurs.

I.. P.



ASTRONOMIE GÉNÉRALE

CHAPITRE PREMIER

LE CIEL ÉTOILÉ

La branche de l'astronomie dont nous nous efforçons de donner une idée est celle qui s'occupe de déterminer les positions relatives des astres, afin d'en déduire d'abord leurs mouvements relatifs, puis les lois mécaniques qui régissent ces mouvements; on admettra que le lecteur a déjà une connaissance sommaire du système du monde, qu'il sait par exemple que la terre est un corps isolé tournant sur lui-même en un jour, que la terre accomplit d'autre part une révolution annuelle autour du soleil, et l'on ne reviendra sur ces notions que pour en discuter l'exactitude; on ne se préoccupera en aucune façon de suivre dans l'exposition le développement historique de la science.

1. Sphère céleste. — La notion de sphère céleste se présente immédiatement aux yeux d'un observateur isolé; incapable de déterminer les distances qui le séparent des astres, il imagine qu'ils sont situés sur la surface d'une sphère; ce ne serait qu'une approximation grossière si la combinaison d'observations faites en des points différents permettait d'évaluer ces distances et de constater qu'elles sont inégales.

Il n'en est point ainsi : si l'on excepte les corps du

système solaire, qui sont en nombre très restreint parmi les astres visibles, le rapport des distances d'un astre aux dimensions du système solaire est si grand que l'esprit ne peut se représenter l'éloignement d'une étoile que par des comparaisons très imparfaites, telles que celle-ci : la lumière met un peu plus de 8 minutes pour venir du soleil à la terre ; elle met plus de 4 ans à nous parvenir de l'étoile la plus rapprochée.

D'autre part, les distances angulaires mutuelles des étoiles, c'est-à-dire les angles formés par les directions des rayons qui les joignent à l'observateur, varient très peu, bien que par suite de la rotation diurne de la terre, le système entier des astres paraisse tourner en un jour autour de la ligne des pôles ; et ce sont ces seules variations d'angles qui permettent de déterminer les distances des étoiles les plus proches de notre système.

Il est donc nécessaire de prendre comme base l'étude de l'astronomie sphérique, dans laquelle on considérera la projection de chacun des astres sur une sphère de rayon très grand, sans chercher à mesurer sa distance à l'observateur.

2. Constellations. — Les figures formées sur la sphère par les groupes d'étoiles demeurent invariables, puisque les distances angulaires des étoiles prises deux à deux ne changent pas. Pour se reconnaître sur la sphère céleste, les anciens ont assimilé ces figures à des objets ou à des animaux, et leur ont donné le nom de constellations, ou quelquefois d'astérismes. L'étude de ces constellations est indispensable pour l'amateur qui veut observer le ciel à l'œil nu ; ce n'est point une œuvre inutile : maintes comètes ont été découvertes, même dans le cours du dernier siècle, sans le secours d'aucun instrument, et c'est de la même façon qu'on reconnaît encore le plus souvent la présence d'étoiles

nouvelles, dont l'étude présente le plus grand intérêt pour l'astronomie physique.

La classification des étoiles en constellations a varié suivant les auteurs; on s'accorde à l'heure actuelle à reconnaître 88 groupes pour le ciel entier; il serait trop long de décrire ici leurs formes diverses et les moyens de les repérer; l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1915 et deux des années suivantes de millésime impair contiennent une description complète de leur système, due à M. Bigourdan. Nous nous bornerons à l'exposition du procédé le plus communément employé pour trouver facilement les étoiles les plus remarquables, celui des alignements, en l'appliquant à quelques exemples: tous ceux qui ont regardé le ciel étoilé connaissent la Grande Ourse, dont l'aspect est représenté par la figure 1; les sept étoiles qui forment cette constellation sont à peu près de même éclat, et la règle qui consiste à classer dans chaque groupe les étoiles suivant leurs grandeurs, en les désignant par les lettres grecques α , β , γ ,... dans l'ordre de l'alphabet ne suffit pas à les distinguer; la figure montre l'ordre dans lequel elles sont notées.

Ayant reconnu ce groupe d'étoiles, si l'on prolonge la ligne qui joint β à α dans le sens $\beta\alpha$ de cinq fois environ sa longueur, on arrive à l'étoile polaire, d'éclat comparable à celui des deux premières; cette étoile est à une petite distance du pôle Nord (environ $1^{\circ}15'$), de sorte qu'elle paraît immobile dans le ciel; elle fait partie de la Petite Ourse, constellation de forme semblable à la Grande Ourse, mais disposée en sens contraire.

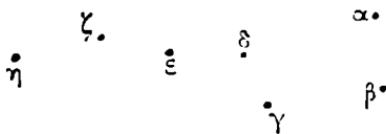


Fig. 1.

En prolongeant d'une longueur égale la ligne $\beta\alpha$ -polaire, on tombe sur Cassiopée, constellation qui est en partie dans la voie lactée.

La ligne courbe formée par les trois étoiles ε ζ η de la queue de la Grande Ourse va passer par une étoile brillante, Arcturus, qui est l'étoile principale de la constellation du Bouvier.

La queue de la Petite Ourse, prolongée de la même façon, conduit à la Chèvre (Capella), qui fait partie de la constellation du Cocher.

L'étoile Véga est le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les deux autres sommets sont Arcturus et la Polaire.

Et ainsi de suite. La plus belle constellation du ciel d'hiver, Orion, est située sur la ligne qui joint la Polaire à la Chèvre, à peu près à la même distance de la Chèvre que celle-ci l'est de la Polaire; mais cet alignement est superflu pour l'observateur qui a regardé une fois la magnifique constellation, précédée dans le mouvement apparent par la belle étoile Aldébaran, du Taureau, et suivie par Sirius, la plus éclatante des étoiles.

3. Mouvement diurne. — La rotation diurne de la terre autour d'un axe provoque un mouvement apparent de rotation de la sphère céleste autour de la même ligne. Ce mouvement se manifeste immédiatement à l'observateur qui pointe un astre dans une lunette fixée à la surface de la terre; toutes les étoiles lui paraissent se déplacer dans le même sens. Si l'on regarde le ciel à l'œil nu, à un intervalle de quelques heures, on constate également une variation dans la partie visible, qui est limitée par le plan de l'horizon, tangent à la surface de la terre : des étoiles nouvelles se sont levées, d'autres ont disparu. Pour les différents points de la terre, l'horizon n'est pas le même, mais la direction de l'axe autour duquel s'accomplit le mouvement apparent reste

invariable; cette ligne coupe la sphère céleste en deux points qu'on appelle les pôles; celui de ces deux points dont la position est voisine de la Petite Ourse s'appelle le pôle Nord.

Pour un observateur idéal placé sur la ligne des pôles et traversé des pieds à la tête par la direction Sud-Nord, le mouvement apparent des étoiles paraît s'effectuer de la droite vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre; ce sens de rotation prend le nom de *rétrograde*, le sens opposé ou *direct* étant celui du mouvement réel de rotation de la terre.

La hauteur du pôle au-dessus de l'horizon, angle formé par la direction du pôle visible avec l'horizon, est un angle aigu; il est égal à l'angle aigu formé par la verticale, qui est la perpendiculaire à l'horizon, avec le plan perpendiculaire à la ligne des pôles, qu'on appelle l'équateur; on sait que ce dernier angle est la latitude géographique du lieu d'observation.

Le méridien, en un point donné, est le plan qui contient à la fois la verticale et la parallèle à la ligne des pôles: par suite de la rotation diurne, toutes les étoiles passent successivement dans ce plan. On constate que l'intervalle de temps, mesuré avec les pendules les plus précises, mis par une étoile à revenir consécutivement dans le méridien, reste constant, et que d'autre part cet intervalle reste le même quand on considère les diverses étoiles; c'est une démonstration expérimentale du fait que la durée de rotation de la terre est constante, et que cette rotation s'opère d'une façon uniforme.

On verra plus loin que la fixité de la direction de la ligne des pôles dans l'espace n'est qu'une première approximation: les pôles terrestres, c'est-à-dire les points où cette ligne coupe la surface de la terre, ne subissent que des déplacements extrêmement faibles; mais les points où elle coupe la sphère céleste varient,

chacun des pôles célestes décrivant sensiblement un petit cercle dans l'espace de 26 000 ans.

Au contraire, la durée de rotation de la terre demeure constante, et cette invariabilité est la base de la mesure du temps. Il peut paraître au premier abord que cette affirmation constitue un cercle vicieux, puisque la détermination précise du temps est basée sur les observations des étoiles, et que les meilleurs instruments de mesure, pendules ou chronomètres, ne sont ni assez parfaits, ni assez stables pour déceler une variation lente dans la durée de la rotation terrestre. Il n'en est rien : cette durée, prise comme unité de temps, sert à mesurer les plus longues périodes de phénomènes indépendants de la rotation terrestre, tels que les révolutions autour du soleil des planètes les plus éloignées, et une variation d'unité de temps devrait provoquer un désaccord entre l'observation et la théorie, qui n'a jamais été constaté ; l'étude la plus complète qui ait été faite dans ce sens est celle des observations anciennes des éclipses de soleil dont la chronologie a pu fixer les dates. D'autre part, la théorie, qui explique complètement par les attractions combinées du soleil et de la lune le déplacement de la ligne des pôles dans l'espace, montre que ces attractions ne peuvent changer la durée de la rotation de la terre ; elle établit également que les déplacements de masses à la surface de la terre, dont le plus important constitue le phénomène des marées, ne peuvent modifier cette durée d'une façon appréciable.

CHAPITRE II

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE

4. Coordonnées sphériques. — On prend comme image de la sphère céleste une surface sphérique dont le rayon, d'ailleurs arbitraire, est choisi comme unité de longueur; pour définir la position d'un point sur cette sphère, on trace d'abord un grand cercle, qu'on appelle fondamental, sur lequel on choisit une origine A et un sens positif (fig. 2); on distingue l'un de l'autre les deux hémisphères limités par ce grand cercle, ou, ce qui revient au même, les deux extrémités C et C' du diamètre perpendiculaire au plan fondamental;

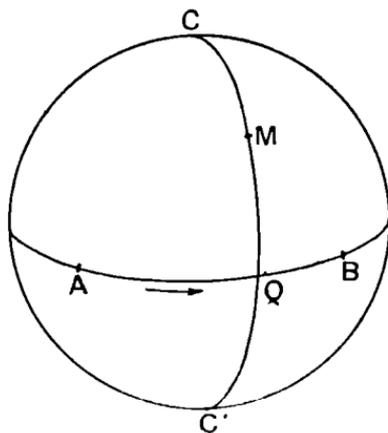


Fig. 2.

tal; dans la pratique, on dit que l'un des hémisphères est l'hémisphère Nord, s'il contient le pôle Nord.

Soit M un point quelconque de la sphère : par C , C' et M on fait passer un demi grand cercle qui coupe le cercle fondamental en un point Q ; l'arc AQ est la première des coordonnées sphériques du point M ; cette coordonnée λ est comprise entre 0 et 2π si l'on mesure AQ par sa longueur; entre 0° et 360° si l'on considère

l'angle au centre de la sphère. La deuxième coordonnée μ du point M est l'arc MQ, plus petit qu'un quart de grand cercle; on convient d'affecter le nombre qui mesure MQ du signe + ou du signe — selon que le point M se trouve dans le même hémisphère que C ou C'. Il est clair qu'à un système de valeurs de λ et μ tel qu'on ait

$$0 < \lambda < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2},$$

correspond réciproquement un point de la sphère et un seul.

Ce système de coordonnées n'est autre que celui qu'on emploie en géométrie analytique sous le nom de coordonnées polaires dans l'espace; si l'on prend trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ ayant leur origine au centre O de la sphère, Ox ayant la direction de OA, Oy celle de OB, le point B étant sur le grand cercle fondamental à une distance $\frac{\pi}{2}$ de A dans le sens positif, Oz celle de OC, on a les expressions suivantes des coordonnées d'un point situé sur la direction OM, à la distance r de l'origine :

$$x = r \cos \mu \cos \lambda, \quad y = r \cos \mu \sin \lambda, \quad z = r \sin \mu.$$

On emploie en astronomie les quatre systèmes suivants de coordonnées sphériques :

1^o Le plan fondamental est l'*horizon*; l'origine est le point Sud, c'est-à-dire celui des deux points d'intersection de l'horizon et du méridien le plus éloigné du pôle Nord; la première des deux coordonnées, qui s'appelle l'*azimut*, est comptée positivement dans le sens rétrograde, par conséquent du Sud vers l'Ouest; un grand cercle perpendiculaire à l'horizon prend le nom de vertical, et la deuxième coordonnée d'un astre s'appelle la

hauteur ; on la remplace souvent par la distance angulaire au zénith, ou *distance zénithale*, qui est le complément de la hauteur. Le principal avantage de ce système consiste en ce que la détermination de l'une des coordonnées, la hauteur, peut se faire sans qu'on connaisse le méridien d'un lieu ; les observations de hauteur sont, pour cette raison, couramment employées par les marins et les explorateurs ; mais il apparaît par contre immédiatement que l'azimut et la hauteur d'un astre varient d'un instant à l'autre sous l'effet de la rotation terrestre.

2° Le plan fondamental est l'équateur, l'origine au point visible d'intersection de l'équateur et du méridien ; la première coordonnée est *l'angle horaire*, formé par le plan du cercle horaire de l'astre, c'est-à-dire le grand cercle qui passe par l'astre et les pôles, et le méridien ; cet angle, compté dans le sens rétrograde, qui est celui du mouvement apparent des étoiles, varie proportionnellement au temps ; la seconde coordonnée, qui reste fixe durant le mouvement diurne, et qu'on mesure par l'angle formé par la direction de l'étoile et l'équateur, se nomme la *déclinaison* δ ; on introduit souvent à la place de δ la distance polaire D , qui n'est autre que la distance angulaire de l'étoile au pôle Nord comptée de 0 à π ou de 0° à 180° ; quel que soit le signe de δ , on a :

$$D = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \text{ou} \quad D = 90^\circ - \delta.$$

Dans la pratique, l'angle horaire s'évalue en unités de temps : la durée de la rotation de la terre, ou jour sidéral, étant divisée en 24 heures sidérales, l'angle horaire d'une étoile, mesuré en degrés, augmente de $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ en une heure ; pour convertir en heures, minutes et secondes de temps un angle horaire exprimé en degrés, on devra donc

diviser par 15 le nombre donné. Pour éviter toute confusion, on désigne par les lettres m et s les minutes et secondes de temps, en réservant les accents ' et '' pour les minutes et secondes d'arc.

Lorsqu'on doit répéter souvent le calcul, il y a avantage à se servir d'une table facile à construire, et qu'on trouve dans la plupart des recueils astronomiques; si l'on fait directement l'opération, on remarquera que le nombre des heures est le quotient par 15, à une unité près par défaut, du nombre des degrés; le reste de ce quotient, pour être converti en minutes de temps, doit être multiplié par 60 et divisé par 15, c'est-à-dire multiplié par 4; et le nombre total des minutes de temps s'obtiendra en ajoutant à ce produit le quotient par 15 du nombre des minutes d'arc; le chiffre des secondes s'obtient par le même procédé.

Donnons un exemple de l'opération inverse, pour laquelle on applique la même règle, en commençant le calcul en sens inverse : soit à convertir en degrés et fractions de degrés le nombre $13^h 25^m 39^s,21$; on divise 39^s par 4, ce qui donne $9'$; le reste multiplié par 15, donne $48'',15$; on divise 25^m par 4, ce qui donne 6^o ; le reste, multiplié par 15, donne $15'$ à ajouter aux $9'$ précédentes; enfin on multiplie 13 par 15 et on ajoute aux 6^o provenant des minutes de temps; on peut inscrire les résultats de la façon suivante :

$$\begin{array}{r}
 6^o \\
 \hline
 195^o \\
 \hline
 201^o
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9' \\
 \hline
 15' \\
 \hline
 24'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 48'',15 \\
 \hline
 48'',15
 \end{array}$$

3° L'équateur reste le plan fondamental, mais l'origine est un point fixe (en première approximation tout au moins) par rapport au système des étoiles, de sorte que les deux coordonnées d'une étoile sont constantes; le sens positif est le sens direct; on choisit comme origine le point γ où le soleil traverse l'équateur à l'équinoxe du printemps, et l'on appelle *ascension droite* l'angle formé par le cercle horaire d'une étoile avec le cercle horaire du point γ .

Les deux systèmes de coordonnées, angle horaire — déclinaison, et ascension droite — déclinaison, ne diffèrent que par les positions des origines sur le grand

cercle fondamental et les sens positifs adoptés; pour passer de l'angle horaire d'une étoile à son ascension droite, ou inversement, il suffit de connaître la position relative des origines; on appelle *temps sidéral* l'angle horaire du point γ évalué en heures. Marquons sur l'équateur (fig. 3) l'intersection M du méridien, origine des angles horaires, la position du point γ , et l'intersection E du cercle horaire d'une étoile.

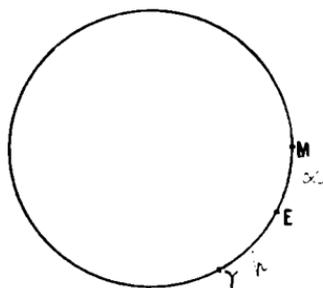


Fig. 3.

En comptant tous les arcs dans le sens direct, on a, quelle que soit la position relative des trois points,

$$\overline{\gamma M} = \overline{\gamma E} + \overline{EM},$$

à un multiple près de la circonférence. En évaluant ces arcs en heures, appelant t le temps sidéral, h l'angle horaire d'un astre d'ascension droite α , on a donc la formule générale :

$$t = h + \alpha.$$

4^o Dans l'étude du mouvement des planètes, on est conduit à prendre comme plan fondamental l'écliptique, c'est-à-dire le plan du grand cercle que paraît décrire le soleil pendant l'année sur la sphère céleste; les deux coordonnées s'appellent la *longitude* et la *latitude célestes*: l'origine des longitudes est le point γ , le sens positif dans lequel elles sont comptées est le sens direct.

5. **Formules principales de trigonométrie sphérique.** — Tous les problèmes relatifs au calcul des coordonnées sphériques, en particulier le passage d'un système de coordonnées à un autre, se ramènent à la considération de triangles sphériques. Un triangle sphérique est la figure formée sur une sphère par trois arcs de grands cercles AB , BC , CA , joignant deux à deux trois points de sa surface; sur le grand cercle passant par A et B , par exemple, on peut distinguer deux arcs différents, l'un inférieur, l'autre supérieur à une demi-circonférence, de sorte qu'il existe plusieurs triangles sphériques ayant pour sommets A , B , C . Dans les applications astronomiques, le sens positif fixé sur chaque grand cercle supprime toute équivoque entre ces divers triangles.

Soit (fig. 4) un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère de rayon 1; les côtés a , b , c sont les longueurs des arcs BC , CA , AB ; l'angle A , par exemple, est l'angle des deux grands cercles AB et AC dirigés de A vers B et C respectivement; c'est aussi l'angle des tangentes en A à ces deux grands cercles; cet angle peut varier de 0 à 2π .

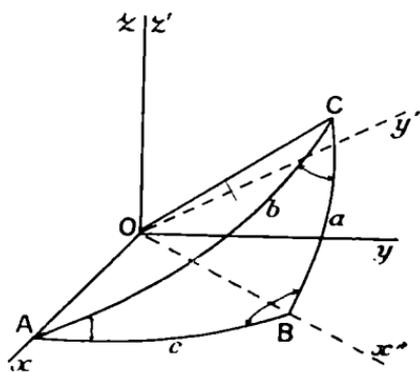


Fig. 4.

Prenons trois axes rectangulaires $Oxyz$ ayant leur origine au

centre de la sphère et correspondant au plan fondamental AB , le sens positif étant celui de A vers B , et l'axe des x ayant la direction OA . La projection de OC sur le plan Ozy fera avec Oy l'angle A , et sera mesurée

par $\sin b$; les coordonnées x, y, z du point C seront donc :

$$(1) \quad x = \cos b, \quad y = \sin b \cos A, \quad z = \sin b \sin A.$$

Faisons tourner ces axes autour de Oz , dans le sens positif, de l'angle mesuré par c , de telle sorte que le nouvel axe des x' coïncide avec OB ; le théorème des projections donne les formules de transformation :

$$(2) \quad x' = x \cos c + y \sin c, \quad y' = -x \sin c + y \cos c, \quad z' = z.$$

D'autre part, les coordonnées x', y', z' s'expriment directement par des formules analogues aux formules (1); en passant des anciens axes aux nouveaux, on doit remplacer l'arc $AC = b$ par $BC = a$; mais l'angle A doit être remplacé non par l'angle B du triangle, mais par l'angle formé par le grand cercle BC avec la direction AB prolongée à partir de B ; cet angle est le supplément de B (à une circonférence près, puisqu'il y a lieu d'envisager le cas où B serait supérieur à une demi-circonférence); on a donc :

$$(3) \quad x' = \cos a, \quad y' = -\sin a \cos B, \quad z' = \sin a \sin B.$$

Par comparaison des formules (1), (2), (3), on trouve :

$$(1) \quad \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont pas suffisantes pour résoudre le triangle, puisque l'angle C n'y figure pas; on reconnaît facilement qu'elles ne sont pas indépendantes, puisque la somme de leurs carrés membre à membre donne une identité.

Mais il est permis de substituer à l'une des deux dernières formules celle qu'on en déduit en permutant à la fois les éléments b et c d'une part, B et C de

l'autre; on écrit souvent la dernière formule sous forme de l'égalité de deux rapports, et, en tenant compte de ce qui vient d'être dit, on obtient l'*analogie des sinus* :

$$(II) \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Les formules (I) et (II) fournissent alors trois relations indépendantes entre les six éléments du triangle sphérique; or la géométrie des trièdres montre qu'on doit pouvoir calculer trois des éléments quand on connaît les trois autres; on peut déduire des relations précédentes des formules qui, dans certains cas, seront plus commodes pour le calcul; on peut aussi trouver des relations analogues par des considérations géométriques; toutes ces relations sont des combinaisons des précédentes, et nous ne nous arrêtons pas à les établir.

Pour effectuer un calcul numérique, on peut d'abord se servir des tables donnant les valeurs naturelles des lignes trigonométriques; on s'aidera, pour faire les multiplications, soit de tables appropriées, soit de machines à calculer.

Le plus souvent, on se sert de tables de logarithmes: il se présente alors une difficulté, du fait que la première et la troisième des formules (I) sont à deux termes, c'est-à-dire qu'il faut obtenir $\log(A + B)$ ou $\log(A - B)$, connaissant $\log A$ et $\log B$. Le calculateur ne s'attarde pas à transformer les formules par l'introduction d'angles auxiliaires, et emploie les logarithmes d'addition ou de soustraction.

Les tables de \log d'addition donnent $\log(1 + x)$, l'argument étant $\log x$; ceci posé, lorsqu'il s'agit de calculer $\log(A + B)$, on écrit :

$$\log(A + B) = \log A \left(1 + \frac{B}{A}\right) = \log A + \log\left(1 + \frac{B}{A}\right),$$

B étant le plus grand des deux nombres A et B ; la table fournit le nombre qu'il faut ajouter à $\log A$, l'argument étant $\log \frac{B}{A}$, c'est-à-dire la différence $\log B - \log A$.

Les tables de soustraction sont de deux sortes ; les unes donnent le nombre qu'il faut retrancher de $\log A$ pour obtenir $\log (A - B)$, en supposant la différence $A - B$ positive ; les autres, le nombre positif ou négatif qu'il faut ajouter à $\log B$.

Dans les deux cas, l'argument est toujours la différence $\log A - \log B$.

6. **Triangles rectangles.** — Lorsque le triangle est rectangle, c'est-à-dire quand l'angle A par exemple est droit, les formules précédentes se simplifient ; on déduit immédiatement des relations (I) les suivantes :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c, \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c, \\ \sin a \sin B &= \sin b. \end{aligned}$$

En divisant membre à membre les deux dernières, on obtient celle-ci, souvent utilisée :

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c.$$

7. **Applications diverses.** — 1^o Pour passer d'un système de coordonnées sphériques à un autre, on peut se borner à la considération du cas où les deux grands cercles fondamentaux ont pour origine commune un de leurs points d'intersection, puisque le changement d'origine sur un grand cercle a simplement pour effet d'ajouter une constante à la première des coordonnées sans modifier la seconde.

On considère alors le triangle P'PE (fig. 5) qui a pour sommets les pôles des deux plans fondamentaux

et l'étoile; ce triangle s'appelle souvent *triangle de position*: ses éléments, sauf l'angle en E, s'expriment

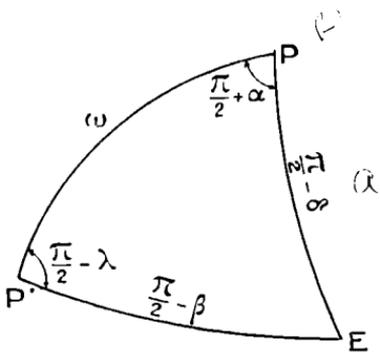


Fig. 5.

facilement à l'aide des coordonnées dans les deux systèmes; supposons, pour fixer les idées, que P soit le pôle de l'équateur et P' le pôle de l'écliptique: l'arc PP' mesure l'inclinaison ω de l'écliptique sur l'équateur; PE est le complément de la déclinaison δ , P'E le complément de la latitude β ; l'arc PP' pro-

longé, dont le pôle est le point γ , irait couper l'équateur et l'écliptique en des points situés à $\frac{\pi}{2}$ du point γ dans le sens rétrograde; l'angle en P' du triangle est donc égal à $\frac{\pi}{2} - \lambda$, λ étant la longitude du point E, et l'angle P à $\frac{\pi}{2} + \alpha$, α étant l'ascension droite; on aura donc, s'il s'agit de calculer l'ascension droite et la déclinaison :

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \beta \cos \omega + \cos \beta \sin \omega \sin \lambda, \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \omega + \cos \beta \cos \omega \sin \lambda;\end{aligned}$$

si c'est le problème inverse qui se pose :

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \cos \omega \sin \delta - \sin \omega \cos \delta \sin \alpha, \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \omega + \cos \delta \cos \omega \sin \alpha.\end{aligned}$$

2° La position d'un grand cercle de la sphère, lors-

qu'on a choisi un grand cercle fondamental, est déterminée par son nœud et son inclinaison.

Le nœud N (fig. 6) est l'intersection du grand cercle avec le cercle fondamental; en réalité il y a deux nœuds, symétriques l'un de

l'autre par rapport au centre de la sphère; on les distingue en prenant un sens positif sur le grand cercle; le nœud ascendant N est celui qui correspond au passage, dans le sens choisi, de l'hémisphère Sud à l'hémisphère Nord; la position de N est déterminée par l'arc $AN = \theta$, qui peut varier de 0 à 2π .

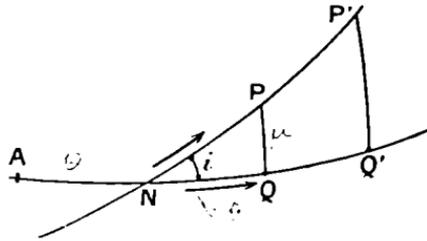


Fig. 6.

L'inclinaison i est l'angle formé par les deux directions positives des deux grands cercles en N ; elle est comprise entre 0 et π .

Le problème suivant se rencontre fréquemment : deux points P et P' étant donnés par leurs coordonnées sphériques λ, μ et λ', μ' , calculer les éléments θ et i du grand cercle qui joint ces deux points.

Il se résout à l'aide de la dernière des formules trouvées pour les triangles rectangles : si du point P on abaisse le grand cercle PQ perpendiculaire sur le grand cercle fondamental AN , le côté PQ est mesuré par μ , l'arc NQ par $\lambda - \theta$; on a donc :

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \theta),$$

et de même,

$$\operatorname{tg} \mu' = \operatorname{tg} i \sin(\lambda' - \theta).$$

Ces deux équations sont du premier degré par rapport à $\operatorname{tg} i \sin \theta$ et $\operatorname{tg} i \cos \theta$; les valeurs de ces deux

quantités une fois calculées, on a $\operatorname{tg} i$ au signe près, et les deux valeurs de θ correspondantes diffèrent entre elles de π ; cette ambiguïté résulte des deux sens que l'on peut adopter sur le grand cercle, et correspond au

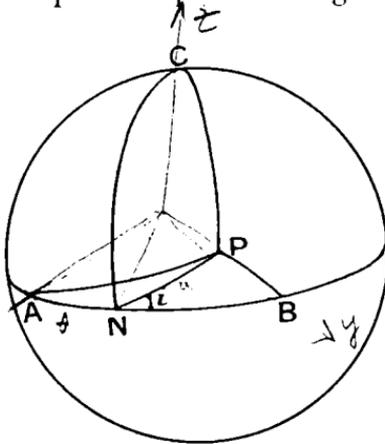


Fig. 7.

remplacement du nœud N par le nœud opposé N'.

3^o Soit à calculer les coordonnées rectangulaires x, y, z , (§ 4) d'un point P de la sphère, sachant que ce point est situé sur un grand cercle dont les éléments sont θ et i , à une distance angulaire du nœud $NP = u$.

Ces coordonnées sont, le rayon de la sphère étant pris pour unité, les cosinus des arcs de

grands cercles compris respectivement entre le point P et les points d'intersection A, B, C des axes avec la sphère.

La considération des triangles APN, BPN et CPN donne successivement (fig. 7) :

$$x = \cos \theta \cos u - \sin \theta \sin u \cos i,$$

$$y = \sin \theta \cos u + \cos \theta \sin u \cos i,$$

$$z = \sin u \sin i.$$

CHAPITRE III

DÉTERMINATION DES DISTANCES ANGULAIRES

8. Mesure des angles : lunette et micromètre.

— Pour définir pratiquement une direction, il faut connaître deux de ses points; ces deux points étaient, dans l'antiquité dont se sont servi longtemps les astronomes, une croisée de fils placée à l'une des extrémités d'une règle, et le centre du trou oculaire situé à l'autre bout; la mesure du déplacement angulaire de la règle, quand on visait successivement deux directions, donnait l'angle de ces deux directions; une telle mesure n'est pas susceptible d'une précision assurant la minute d'arc.

L'emploi de la lunette astronomique pour la mesure des angles ne se justifie donc pas seulement parce que la lunette permet d'observer des astres invisibles à l'œil nu; on peut, avec cet instrument, atteindre une précision d'environ le dixième de seconde d'arc.

Sans faire la théorie de la lunette astronomique, il est nécessaire de rappeler brièvement la marche d'un rayon lumineux dans l'appareil; on sait que l'instrument se compose essentiellement d'un objectif et d'un oculaire; le système oculaire sert seulement à examiner les images formées dans le plan focal de l'objectif; quant à celui-ci, il est formé de deux lentilles en crown-glass et en flint-glass, afin d'obtenir une image achromatique.

Il n'est pas permis d'assimiler l'objectif à une lentille infiniment mince, à travers laquelle un rayon passant par le centre optique ne subirait pas de déviation; mais

la théorie des lentilles épaisses n'introduit pas une grande complication; il résulte de cette théorie (fig. 8) qu'il existe deux points N et N' , appelés « points nodaux », situés sur l'axe du système objectif, tels qu'un rayon arrivant dans la direction AN sort parallèlement à sa direction primitive, mais en passant par le second point nodal N' ; l'image d'un point A , situé à l'infini

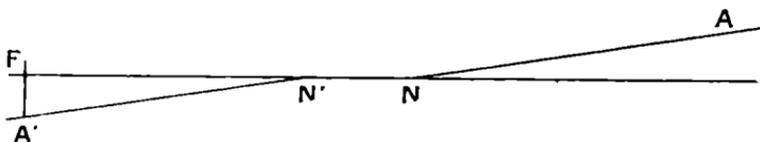


Fig. 8.

dans la direction NA , va ainsi se former en un point A' situé dans le plan focal de l'objectif sur la direction $N'A'$ parallèle à NA .

Dans le plan focal est placé un système de fils rectangulaires croisés, et l'on vise l'objet A en amenant A' à coïncider avec cette croisée de fils; la ligne de visée, qu'on appelle *l'axe optique* de l'instrument, est donc la ligne qui joint la croisée des fils au second point focal N' .

Cette ligne ne coïncide pas en général rigoureusement avec l'axe de symétrie de l'instrument, mais si celui-ci est bien construit, elle en diffère très peu; d'ailleurs, une rotation d'axe perpendiculaire au plan des deux droites les fait tourner du même angle, qui se lira sur un cercle divisé fixé à la lunette.

On a très fréquemment à mesurer l'angle de deux directions très voisines; dans ce cas, on laisse la lunette immobile, et l'on utilise un micromètre pour déterminer dans le plan focal de l'objectif les positions des images des deux points très éloignés. Un micromètre se compose essentiellement d'une plaque rectangulaire, ayant une partie évidée traversée par un fil ou plusieurs

fils parallèles, et se déplaçant dans son plan sur deux glissières perpendiculaires à ces fils ; le mouvement est guidé par une vis bien calibrée, tout jeu de la plaque sur la vis étant supprimé au moyen de ressorts. Le déplacement des fils ou du système de fils s'évalue par l'angle dont a tourné la vis, angle lu sur un tambour gradué fixé à la tête de la vis.

Si l'on a deux micromètres dont les fils sont rectangulaires, on peut mesurer les coordonnées rectangulaires d'un point du champ par rapport aux fils fixes ; souvent il existe un seul micromètre, qui peut tourner autour de l'axe du tube de la lunette ; au lieu de l'amener dans deux orientations qui diffèrent entre elles d'un angle droit, on détermine la rotation qu'il doit subir pour que la ligne centre-astre soit perpendiculaire à la direction des fils mobiles ; c'est l'angle de position de l'astre ; en y adjoignant la distance de l'astre au centre, on a les coordonnées polaires de l'astre.

Dans un système ou dans l'autre, on doit passer de la mesure d'un déplacement, c'est-à-dire d'une longueur, à la détermination d'un angle. Or on a (fig. 8) :

$$FA' = N'F \operatorname{tg} N' ;$$

lorsque le point A' se déplace dans le plan focal, la distance FA' varie donc proportionnellement à la tangente de l'angle en N' ; comme il s'agit d'un petit angle, celui-ci est mesuré, en secondes ou en minutes d'arc, par un nombre proportionnel à sa tangente.

Il en résulte que la mesure d'un angle s'obtiendra en multipliant la distance, lue en divisions du tambour du micromètre, par la valeur angulaire d'une des divisions, et que d'autre part on pourra trouver cette valeur angulaire en mesurant avec le micromètre un angle connu, par exemple celui formé par les directions de

deux étoiles voisines, et le divisant par la différence des lectures correspondantes.

9. Cercles divisés. — L'angle dont tourne un cercle divisé lié invariablement à une lunette mesure l'angle de rotation de l'axe optique, pourvu que cette droite soit parallèle au plan du cercle divisé, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de rotation; lorsqu'on pointe des objets situés à très grande distance, il n'est pas nécessaire que les deux axes se rencontrent.

La graduation est en général tracée sur une lame d'argent incrustée au bord du cercle, dans le plan de ce cercle; elle se lit sur des repères fixes, constitués par des verniers ou par des microscopes micrométriques; ces derniers appareils sont de petits microscopes, munis d'un micromètre portant deux fils parallèles qu'on déplace de façon à ce qu'un trait de la division visée vienne occuper le milieu des deux fils.

Si le cercle tournait autour de son centre et si les divisions étaient exactement tracées, la différence de deux lectures faites devant un seul repère donnerait l'angle dont a tourné le cercle; ces conditions ne sont jamais réalisées rigoureusement, et l'on doit chercher à éliminer l'erreur dite d'excentricité, et les erreurs de division.

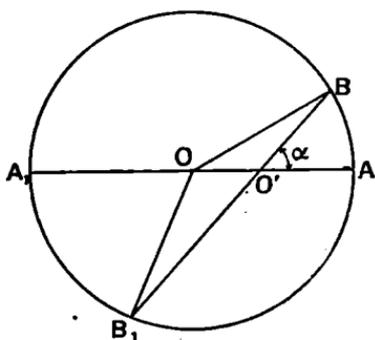


Fig. 9.

Supposons que le cercle, de rayon R , tourne réellement autour d'un point O' différent du centre O (fig. 9); soit α l'angle dont tourne le cercle quand on amène successivement devant un repère fixe un point B du cercle, et le point A ,

prolongement de OO' ; les lectures donnent l'angle BOA , et non $BO'A$, et la correction ε à appliquer est l'angle B du triangle OBO' ; or on a :

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha} = \frac{OO'}{R}.$$

Ce rapport $\frac{OO'}{R} = e$ s'appelle l'excentricité ; s'il est assez petit, on peut assimiler la correction ε à son sinus, et l'on a, $\varepsilon = e \sin \alpha$; mais cette formule montre que si l'on veut atteindre une précision assez grande, il faut tenir compte de l'erreur en question, puisqu'une excentricité de $\frac{1}{206265}$ suffit à provoquer une erreur qui peut atteindre $1''$; heureusement il est possible d'éliminer l'erreur d'excentricité en faisant des lectures à deux repères opposés par rapport au centre de rotation du cercle ; devant le second repère, on lira en effet l'angle B_1OA_1 , auquel il faudra appliquer une correction égale à l'angle en B_1 , mais en sens contraire de la première, et la moyenne des deux déterminations donnera l'angle α .

On peut assimiler l'erreur d'excentricité aux erreurs de division, en considérant les unes et les autres comme des fonctions périodiques de la lecture faite sur le cercle ; la correction due à l'inclinaison de l'axe de rotation sur la perpendiculaire au plan du cercle est de la même catégorie ; l'erreur finale ε , sur une lecture quelconque x , peut, d'après un théorème d'analyse, se développer en série de Fourier :

$$\varepsilon = a_1 \cos(x + X_1) + a_2 \cos(2x + X_2) + \dots \\ + a_n \cos(nx + X_n) + \dots ;$$

les a et les X sont indépendants de x ; $a_1, a_2 \dots$ sont d'autant plus petits et plus rapidement décroissants que

les conditions théoriques sont plus voisines d'être réalisées.

Supposons qu'on place p repères fixes aux sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle, les lectures à ces microscopes étant ainsi

$$x, \quad x + \frac{2\pi}{p}, \quad x + \frac{4\pi}{p}, \quad \dots$$

les corrections à appliquer à ces lectures, d'après la formule précédente, sont

$$\varepsilon_1 = a_1 \cos\left(x + \frac{2\pi}{p} + X_1\right) + a_2 \cos\left(2x + \frac{4\pi}{p} + X_2\right) + \dots$$

.....

$$\varepsilon_{p-1} = a_1 \cos\left(x + 2\pi \frac{p-1}{p} + X_1\right) + \dots$$

La correction à appliquer à la moyenne arithmétique des lectures sera la moyenne arithmétique des ε ; le coefficient de $\frac{a_k}{p}$ dans cette moyenne est

$$\begin{aligned} & \cos(kx + X_k) + \cos\left(kx + X_k + \frac{2k\pi}{p}\right) + \dots \\ & + \cos\left(kx + X_k + 2k\pi \frac{p-1}{p}\right); \end{aligned}$$

cette somme est nulle en général, car elle représente la somme des projections sur un axe de rayons du cercle trigonométrique aboutissant aux sommets d'un polygone régulier étoilé. Il n'y a qu'un cas d'exception, celui où k est multiple de p ; alors tous les termes deviennent égaux. Il suit de là que les termes d'indice inférieur à p disparaissent dans la correction de la moyenne arithmétique des lectures aux p microscopes.

Il existe d'ailleurs des méthodes d'étude directe des erreurs de division.

CHAPITRE IV

INSTRUMENTS; PROCÉDÉS D'OBSERVATION

10. Instrument méridien. — C'est l'appareil fondamental de l'astronomie de position. Il consiste essentiellement en une lunette (fig. 10) dont l'axe optique se déplace dans le méridien, en tournant par conséquent autour d'un axe horizontal qui a la direction Est-Ouest.

Admettons pour un instant que l'appareil soit installé d'une façon parfaite : une étoile paraîtra se déplacer dans le champ de la lunette dans le sens de la rotation de la terre, puisque les images sont renversées; si un fil fixe marque la trace du méridien dans le plan focal de l'objectif, l'instant du passage apparent de l'étoile devant ce fil exprimera, en temps sidéral, l'ascension droite de l'étoile; ceci résulte de la formule $t = h + z$ (§ 4) appliquée lorsque l'angle horaire h est nul. Par conséquent une horloge sidérale, c'est-à-dire un mécanisme divisant régulièrement en 24 heures et en fractions l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs d'une étoile au méridien, réglée de façon que son zéro coïncide avec le passage du point γ , donnera directement l'ascension droite d'une étoile qui est observée à son passage au méridien.

La lunette étant fixée invariablement à un cercle divisé qui tourne autour de l'axe horizontal Est-Ouest, si le zéro de la division correspond à la direction du pôle, la lecture du cercle, dans un pointé sur une étoile, donnera la distance polaire de l'astre.

Pour déterminer le zéro de la pendule, le point γ n'étant pas directement observable, puisqu'il s'agit d'un point fictif sur la détermination duquel nous reviendrons; on observe une étoile fondamentale, c'est-à-dire une étoile dont on connaît d'avance l'ascension droite; de même la lecture de la distance polaire d'une étoile fondamentale donne la correction à faire subir au zéro du cercle qui tourne avec la lunette.

Malgré les soins apportés à la construction des pendules sidérales, et les précautions prises pour éviter les irrégularités de marche (pression barométrique constante aussi bien que température invariable) il est nécessaire de contrôler l'heure marquée en observant un assez grand nombre de fondamentales; on arrive ainsi à établir une formule simple qui donne la correction de la pendule en fonction du temps.

D'autre part, l'instrument n'est jamais installé dans les conditions définies théoriquement: la lunette tourne autour d'un axe qui n'est ni rigoureusement horizontal, ni dirigé exactement dans le plan Est-Ouest; enfin son axe optique n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation. Les déterminations directes doivent subir des corrections dues à ces imperfections.

Soit i l'inclinaison de l'axe sur l'horizon, a l'erreur d'azimut, c l'angle de l'axe optique avec le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, angle qui prend le nom de collimation. La correction qu'il faut appliquer à une détermination d'ascension droite, la correction de pendule étant supposée effectuée, est une fonction $f(i, a, c)$ qui s'annule quand ces trois erreurs s'annulent; cette fonction peut se développer en série procédant suivant les puissances de i, a, c ; or les erreurs sont toujours de l'ordre de quelques secondes d'arc; dans un développement en série, ce sont les mesures en radians qui interviennent (c'est-à-dire les longueurs

mesurées sur le cercle de rayon l' ; les carrés et les

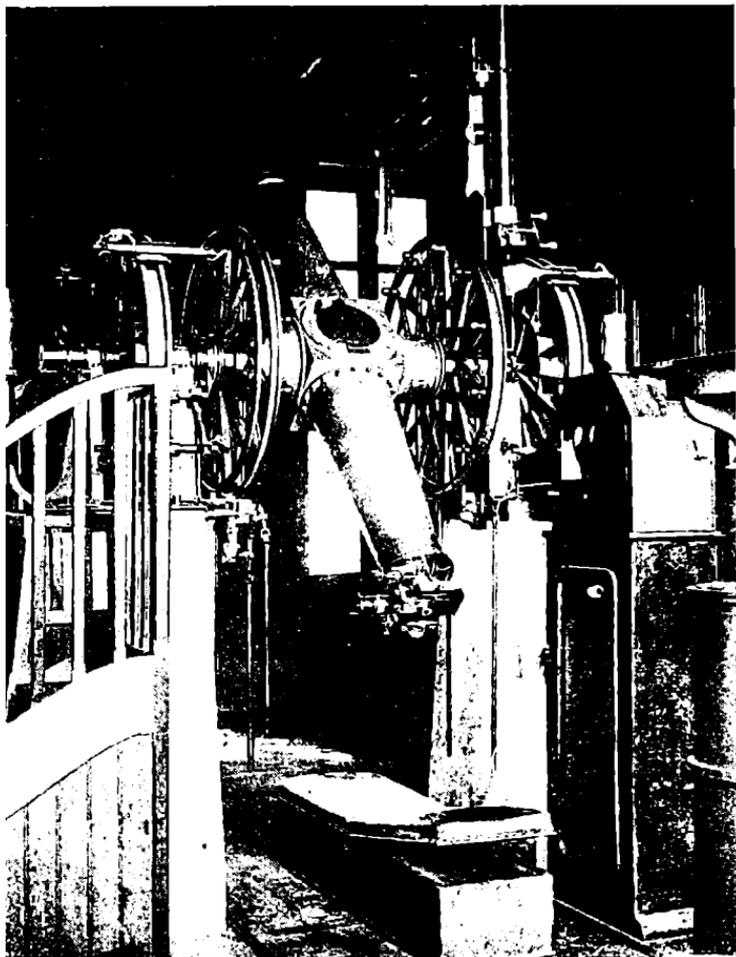


Fig. 10. — INSTRUMENT MÉRIDIEN DE L'OBSERVATOIRE
DE BORDEAUX.

roduits de i , a , c , sont donc négligeables, et la cor-

rection τ due aux erreurs instrumentales s'exprimera sous la forme

$$\tau = i \frac{\partial f}{\partial i} + a \frac{\partial f}{\partial a} + c \frac{\partial f}{\partial c},$$

les valeurs des dérivées partielles étant calculées pour $i = a = c = 0$.

Cette forme linéaire montre qu'on peut obtenir l'expression de τ en supposant que successivement deux des erreurs instrumentales soient nulles, la troisième existant seule, et faisant la somme des trois termes ainsi obtenus. Or, l'erreur d'inclinaison existant seule ferait décrire à l'axe optique un grand cercle passant par les points Nord et Sud du méridien (fig. 11);

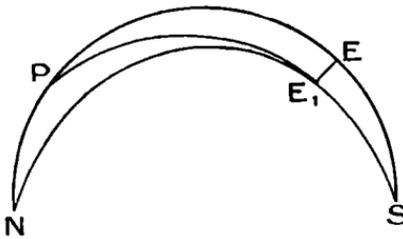


Fig. 11.

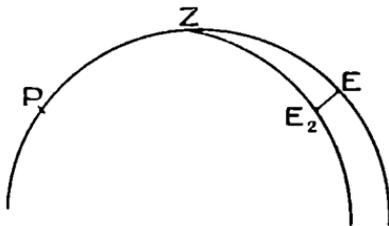


Fig. 12.

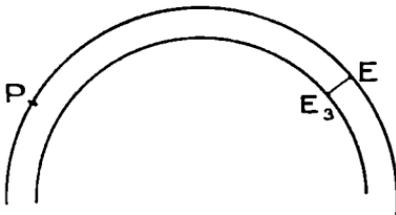


Fig. 13.

l'erreur a , un grand cercle vertical ZM' faisant l'angle a avec le méridien (fig. 12); l'erreur c , un petit cercle parallèle au méridien (fig. 13). L'effet de ces erreurs est de remplacer l'observation de l'étoile au point E du méridien par l'observation du point E_1 , E_2 , ou E_3 où le parallèle décrit

par l'étoile coupe le cercle découpé sur la sphère céleste par l'axe optique de l'instrument; la correction à

faire subir à l'ascension droite déterminée par l'observation est l'angle horaire du point E_1 , E_2 ou E_3 , ayant pour sommet le pôle P ; or les arcs de parallèle EE_1 , EE_2 , EE_3 peuvent se confondre avec des arcs de grand cercle perpendiculaire au méridien, de sorte que, τ_1 désignant la première correction, on a dans le triangle PEE_1 :

$$\frac{\tau_1}{EE_1} = \frac{1}{\sin PE} = \sec \delta;$$

on aura de même τ_2 et τ_3 ; pour déterminer les arcs EE_1 , EE_2 , EE_3 , on a immédiatement :

$$EE_1 = i \sin NE = i \cos (\delta - \varphi),$$

$$EE_2 = a \sin ZE = a \sin (\delta - \varphi),$$

$$EE_3 = c;$$

il vient donc finalement :

$$\tau = m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta,$$

où l'on a posé $m = i \cos \varphi - a \sin \varphi$, $n = i \sin \varphi + a \cos \varphi$.

Pour pouvoir calculer les constantes m , n , c , il suffit théoriquement de déterminer par l'observation les corrections τ à appliquer à trois étoiles fondamentales; cette méthode est souvent appliquée pour dresser un catalogue d'ascensions droites; quand ce catalogue comprend des étoiles de toutes les régions du ciel, on prend comme fondamentales des étoiles voisines du pôle, pour lesquelles les coefficients de n et c deviennent très grands; il y a lieu toutefois de faire remarquer que m se retranche de la correction de pendule, qu'il devient ainsi impossible de séparer de la constante de la correction instrumentale.

Si l'on veut déterminer l'heure, c'est-à-dire la correction de la pendule, il faut opérer autrement : les erreurs de collimation et d'inclinaison peuvent être obtenues par des mesures physiques, indépendantes de

toute observation astronomique; pour la collimation, on se base sur ce fait que si l'on retourne la lunette, c'est-à-dire si l'on place le tourillon Est sur le coussinet Ouest et inversement, la droite joignant deux points de l'instrument vient, si elle n'est pas située dans le plan perpendiculaire à l'axe des tourillons en son milieu, occuper une position symétrique par rapport à ce plan; on pointe le fil mobile d'un micromètre sur un objet paraissant à l'infini (mire ou collimateur) dans les deux positions de la lunette; la différence des deux lectures donne le double de la collimation; la moyenne arithmétique donne la position du fil sans collimation. Pour l'inclinaison, on emploie le niveau à bulle d'air dont les supports sont placés sur les deux tourillons cylindriques, puis échangés entre eux; la demi-différence des lectures correspondant au centre de la bulle, exprimée en angle, donne l'inclinaison; on se sert également d'un bain de mercure placé au-dessous de l'instrument; si un fil mobile est amené à coïncider avec son image par réflexion dans le bain de mercure, le plan de visée du fil est alors vertical, et la différence des lectures au micromètre de la position de ce fil et de celle du fil sans collimation donne l'inclinaison.

Il est à remarquer que l'erreur d'azimut, qui ne peut se déduire que d'observations astronomiques, disparaît quand l'étoile traverse le méridien au zénith; ce fait, évident géométriquement, résulte aussi de l'expression précédente de EE_2 ; pour cette raison, on emploie de préférence des étoiles zénithales à la détermination de l'heure.

Pour effectuer la mesure des distances polaires, on emploie un second micromètre dont les fils sont perpendiculaires au méridien; l'instrument étant fixé au moyen d'une pince lorsque l'étoile pénètre dans le champ de la lunette, un observateur lit les divisions

du cercle, en général à six microscopes, tandis que celui qui regarde à la lunette note l'ascension droite et place le micromètre de déclinaison de façon qu'un fil bissecte l'étoile au voisinage du méridien; les lectures du cercle sont corrigées de celle du micromètre, des erreurs de division, comme il a été indiqué plus haut, de l'erreur du zéro fournie par des observations de fondamentales; dans des déterminations de haute précision, on tient compte de la flexion de l'instrument, variable avec son inclinaison, dont l'étude exige des mesures délicates.

L'instant du passage d'une étoile derrière un fil est assez difficile à noter avec précision; aussi dispose-t-on un certain nombre de fils symétriquement deux à deux, par rapport au méridien; on prend la moyenne des instants des passages aux divers fils.

La méthode dite de l'œil et de l'oreille consiste à écouter les battements à la seconde d'une pendule sidérale en même temps qu'on suit le déplacement de l'étoile par rapport aux fils fixes; l'observateur fractionne l'intervalle de temps des deux battements dans le même rapport que le fil sépare la longueur comprise entre les positions de l'étoile qui correspondent aux battements. L'expérience a montré qu'il est préférable de se servir d'un chronographe, sur lequel un signal électrique actionné par l'observateur marque l'instant du passage d'une étoile derrière un fil. L'application de l'une ou l'autre de ces méthodes entraîne une erreur dite personnelle, c'est-à-dire qui varie d'un observateur à l'autre; si cette erreur est la même pour toutes les étoiles, elle change simplement la valeur de la constante m , et n'a aucune influence sur la formation d'un catalogue.

On fait disparaître l'erreur personnelle par l'emploi du micromètre impersonnel, dont le principe est le sui-

vant : un fil de micromètre est entraîné de façon à suivre très approximativement le mouvement apparent de l'étoile, et le rôle de l'observateur se borne à corriger le déplacement du fil de façon qu'il bissecte toujours l'étoile; le tambour du micromètre porte un certain nombre de contacts électriques, de sorte que l'instant d'un signal, noté automatiquement sur le chronographe, correspond à une certaine position du fil, et par suite de l'étoile, dans le champ de la lunette; on peut, avec cet instrument, obtenir une précision d'environ $0^s,02$.

11. Équatoriaux visuels et photographiques. --- Ces instruments sont établis de façon que la lunette puisse être dirigée vers un point quelconque du ciel, et que, d'autre part, elle puisse suivre un astre dans son mouvement diurne apparent; la lunette doit donc pouvoir tourner autour de deux axes, dont l'un est dirigé suivant la ligne des pôles; la rotation autour de cet axe se lit sur un cercle divisé, qui donne ainsi l'angle horaire de l'astre quand l'origine de la division est au méridien; cette rotation peut être produite par un mouvement d'horlogerie, que l'observateur embraye après avoir dirigé convenablement la lunette, et qui fait accomplir à l'appareil un tour complet en 24 heures; quand la lunette tourne autour du second axe, perpendiculaire au premier, la déclinaison de l'objet visé varie; c'est en général la distance polaire qui se lit sur le cercle fixé à la lunette. L'instrument est enfermé dans une coupole à base circulaire, percée d'une ouverture, et reposant sur des galets ou un support hydraulique, de telle sorte que l'ouverture puisse être placée dans un azimut quelconque.

La complication de la monture rend beaucoup plus difficile que dans le cas du méridien une installation remplissant les conditions théoriques, et, d'autre part,

la stabilité de l'instrument est moindre que celle d'un méridien. Aussi, en dehors des études d'astrophysique, auxquelles servent le plus souvent des télescopes ayant une monture analogue, l'équatorial n'est-il guère utilisé qu'à des mesures différentielles, c'est-à-dire à la comparaison de la position d'un astre à celle d'une étoile voisine, dont les coordonnées ont été obtenues à l'instrument méridien.

Ces mesures se font au moyen de micromètres, dont les fils sont parallèles à la direction du mouvement diurne s'il s'agit de différences de déclinaisons, perpendiculaires à cette direction quand on veut déterminer des différences d'ascensions droites; on obtient ainsi, connaissant la valeur angulaire du tour de vis de chacun des micromètres, les distances angulaires EE_1 et EE_2 , d'une étoile E' voisine de E (fig. 14) à deux plans rectangulaires passant par E_1 , dont l'un contient le cercle horaire; mais il faut remarquer que l'arc EE_2 représente la différence de déclinaison, tandis que la différence d'ascension droite est mesurée par l'angle en P du triangle PEE_1 ; on a $EE_1 = x' - x) \sec \delta$, en désignant par x, δ, x', δ' les ascensions droites et déclinaisons des deux astres. Il arrive souvent qu'au lieu d'employer le micromètre d'ascension droite, on obtient directement la différence des

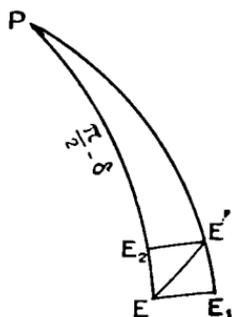


Fig. 14.

ascensions droites par la méthode des passages; on laisse l'instrument fixe et l'on note à la pendule sidérale les instants des passages des deux astres derrière les fils du micromètre.

Enfin, au lieu de déterminer les différences des coordonnées rectangulaires, on peut aussi, ce qui revient à

l'emploi de coordonnées polaires, définir la position relative de l'astre E' par rapport à l'étoile connue E au moyen de la distance EE' des deux astres et de l'angle de position $E'EP$; cet angle est pratiquement l'angle formé par la direction joignant les deux astres avec la direction Nord (le sens positif étant Nord-Est-Sud). Le système tout entier des micromètres est alors fixé dans un tube intérieur et concentrique au tube de la lunette, qui peut tourner autour de son axe de symétrie; quand on a amené les fils de l'un des micromètres à être parallèles à la direction EE' , on fait entraîner l'instrument par le mouvement d'horlogerie, et l'on mesure directement la distance EE' ; si l'on veut une grande précision, on doit employer deux micromètres à vis et fils parallèles, avec lesquels on pointe simultanément les deux astres.

La fig. 14 montre immédiatement que si d et p sont la distance et l'angle de position mesurés, on a, les arcs étant très petits :

$$\delta' - \delta = d \cos p, \quad \alpha' - \alpha = d \sin p \sec \delta.$$

La monture équatoriale est nécessairement adoptée quand on se propose de photographier les étoiles, puisqu'il faut pour obtenir leurs images une pose plus ou moins longue, pendant laquelle l'instrument doit suivre le mouvement apparent; on remplace alors l'oculaire de la lunette par un châssis photographique; mais, pour avoir sur le cliché des points assez nets, ce qui est indispensable pour effectuer des mesures, on doit contrôler l'entraînement de l'instrument; à cet effet, on lui adjoint une lunette visuelle dont l'axe est parallèle au sien, l'oculaire de la lunette portant une croisée de fils (ou un système équivalent), sous laquelle on place une étoile guide; l'observateur a pour tâche de maintenir cette étoile guide à la même position dans le champ, en

agissant sur deux vis de rappel, qui corrigent les inégalités du mouvement d'entraînement et le déplacement dû à la variation de réfraction.

Les clichés du catalogue entrepris, à la fin du dernier siècle, par l'œuvre internationale de la *Carte Photographique du Ciel*, mesurent 16 centimètres de côté, une distance de 1 millimètre correspondant environ à une minute d'arc; sur chaque cliché, on photographie avant le développement un réseau bien étudié, c'est-à-dire un double système de traits formant des carrés qui sont tracés sur une glace argentée; ces traits jouent le rôle des fils micrométriques dans un appareil visuel : on place la plaque photographique sur un chariot qui peut se déplacer parallèlement aux deux systèmes de traits du réseau, les déplacements étant guidés et mesurés par deux vis micrométriques; de sorte qu'on peut mesurer les distances de chaque étoile aux deux traits les plus voisins du réseau, les pointés étant faits avec un microscope fixe; les coordonnées rectilignes ainsi obtenues sont rapportées au centre de la plaque, par rapport auquel on connaît les positions des traits du réseau, d'une façon indépendante des déformations qui peuvent se produire sur la couche sensible.

Le catalogue photographique donne, en dehors des coordonnées rectilignes, des tables qui permettent de calculer les différences d'ascension droite et de déclinaison d'une étoile et du centre de la plaque; le calcul indiqué tient compte de ce que les distances linéaires deviennent trop grandes pour être confondues avec des mesures angulaires, et, d'autre part, des corrections instrumentales dues à l'orientation de la plaque, à la mise au point, etc.; enfin des corrections théoriques dues aux variations de la réfraction, de l'aberration, de la précession, d'une étoile à l'autre.

Il n'est pas nécessaire, sauf dans des cas très excep-

tionnels, de former les expressions théoriques des dernières corrections; elles sont faibles, et, lorsqu'on les développe en séries procédant suivant les puissances des coordonnées rectilignes x et y rapportées au centre de la plaque, les termes linéaires sont seuls importants. Si l'on appelle ξ et η les coordonnées corrigées, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\xi &= a + bx + cy, \\ \eta &= a' + b'x + c'y,\end{aligned}$$

a, b, c, a', b', c' , étant des constantes.

Pour calculer ces constantes, on utilise des observations méridiennes d'étoiles dites *de repère*, qui sont choisies de façon qu'on les retrouve sur chaque plaque en nombre à peu près constant, et distribuées aussi uniformément que possible. Par les observations méridiennes, on connaît, pour chaque étoile de repère, les coordonnées ξ et η rapportées au centre théorique de la plaque; les mesures faites sur le cliché donnent x et y ; au moyen de trois étoiles de repère, on peut donc calculer les constantes, qui serviront ensuite à trouver les coordonnées corrigées des autres étoiles.

On emploie dans un certain nombre d'observatoires l'équatorial *coudé*; c'est un instrument dans lequel

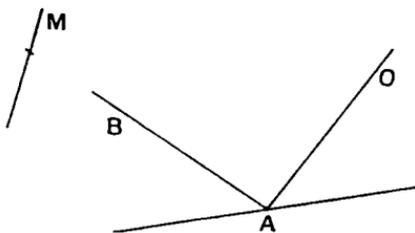


Fig. 15.

l'oculaire reste fixe, de sorte que l'observateur n'a pas à se déplacer pour suivre le mouvement apparent d'une étoile; la figure schématique 15 fera facilement comprendre le principe de sa construction : l'ocu-

laire est en O, à l'extrémité d'un tube d'axe OA, dirigé suivant la ligne des pôles, et tout le système tourne soli-

dairement autour de OA ; l'objectif est en B, à l'extrémité d'un tube AB perpendiculaire à OA ; un rayon lumineux dirigé suivant BA se réfléchit sur un miroir placé en A et incliné à 45° sur chacun des deux axes ; on ne viserait ainsi que les astres situés à l'équateur ; mais un miroir M placé devant l'objectif, dont le plan peut varier autour d'une perpendiculaire au plan horaire AOB, permet de ramener dans la direction BA le rayon lumineux émané d'une étoile quelconque de ce plan.

12. Catalogues d'étoiles. — La détermination des positions d'un certain nombre d'étoiles fondamentales, dont la réunion constitue un catalogue, est le résultat de perfectionnements successifs apportés aux observations et à la discussion de ces observations. Une difficulté s'ajoute à celle de comparer des observations d'inégale précision : en conséquence d'un phénomène qui prend le nom de précession des équinoxes, sur lequel nous reviendrons plus loin, le plan fondamental auquel se rapportent les coordonnées mesurées directement, qui est l'équateur, n'est pas invariable par rapport à la sphère céleste ; de sorte que les coordonnées des étoiles fixes doivent être modifiées quand on passe d'une époque à une autre. Or les coefficients qui permettent le calcul de ces modifications sont eux-mêmes déterminés d'après les observations, et doivent être modifiés à mesure que celles-ci deviennent plus précises.

D'autre part, la plupart des étoiles sont affectées de *mouvements propres*, très faibles en général, mais qui rendent difficile la définition précise d'un système fixe.

Le premier catalogue fondamental date de la fin du XVIII^e siècle ; il comprenait seulement 36 étoiles ; celui qui paraît actuellement le plus précis est le catalogue américain de Levis Boss, qui contient les positions de 6188 étoiles calculées pour 1900.

A côté de ces positions discutées avec le plus grand soin, il existe un très grand nombre de catalogues qui donnent des coordonnées basées sur celles des étoiles fondamentales ; les plus importants sont le catalogue de Bonn, dressé par Argelander, celui de Lalande, celui de l'*Astronomische Gesellschaft*, dû à la collaboration de 13 observatoires ; enfin le catalogue photographique, sur le point d'être achevé, qui contiendra les positions de toutes les étoiles jusqu'à la 11^e magnitude inclusivement, c'est-à-dire d'environ deux millions d'étoiles.

Les astronomes ont en outre besoin de cartes stellaires ; la lecture des deux cercles divisés d'un équatorial n'indique en effet que d'une façon approximative la direction vers laquelle l'instrument est braqué ; pour reconnaître son étoile de comparaison, l'observateur se livre à un véritable travail d'exploration : au moyen d'une carte, il prend des alignements ou effectue des mesures rapides de distances. De telles cartes furent d'abord dressées au moyen de catalogues ; telles celles de Bonn, qui donnaient les étoiles jusqu'à la magnitude 9,5. La photographie permet d'obtenir des cartes d'une manière plus rapide et plus exacte ; la carte photographique internationale contient les étoiles jusqu'à la 14^e magnitude.

13. Longitude et latitude géographiques. — On a rappelé dès le début (§ 3) que la latitude géographique d'un lieu est égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ; la seconde coordonnée qui sert à définir la position d'un point sur la surface terrestre, la longitude, est l'angle dièdre du méridien du lieu avec un méridien origine, qui, pratiquement, est le méridien de l'observatoire de Greenwich ; on compte les longitudes de 0° à 180° vers l'Ouest ou vers l'Est ; le plus souvent, on attribue le signe positif aux longitudes Ouest ; avec

cette convention, si l'on désigne par h et h_0 les angles horaires d'un même astre, vu simultanément d'un point A de longitude L et d'un point du méridien origine, on a :

$$h = h_0 - L;$$

quand l'astre dont il s'agit est le point γ , les angles horaires sont les temps sidéraux, de sorte que la longitude en un point donné se mesure par la différence du temps sidéral en ce point et du temps sidéral au même instant sur le méridien origine.

On peut aujourd'hui connaître plusieurs fois par jour l'heure du méridien origine, en recevant au moyen de la télégraphie sans fil les signaux envoyés de la Tour Eiffel par les soins du Bureau international de l'heure ; il existe différentes sortes de signaux, en particulier des signaux rythmés qui permettent d'employer la méthode des coïncidences et d'obtenir une très grande précision dans la comparaison d'un chronomètre.

La détermination la plus exacte de l'heure sidérale locale est celle qui résulte d'observations méridiennes ; il existe des instruments transportables qui sont employés uniquement à cette opération ; on détermine soigneusement les constantes des instruments, on reçoit directement sur le chronographe les signaux de la station origine ; enfin on élimine les erreurs personnelles par l'échange des instruments et des observateurs.

L'instrument méridien fournit également les meilleures déterminations de latitudes ; nous avons indiqué que la détermination de la direction du pôle résulte de la lecture sur le cercle méridien de la distance polaire d'une fondamentale ; en dehors des erreurs instrumentales, il y a lieu de tenir compte de la correction de réfraction ; on élimine à peu près cette correction en

combinant des observations de fondamentales qui traversent le méridien au Nord et au Sud du zénith, à peu près à égale distance de ce point; la direction de la verticale, qui est le second côté de l'angle à mesurer, se déduit de pointés sur le bain de mercure placé en dessous de l'instrument.

Lorsqu'on ne dispose pas d'instrument méridien, ce qui est le cas des marins et des explorateurs, on mesure la distance zénithale d'un astre connu; les marins se servent pour cette observation d'un sextant, qui donne la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon défini par la surface des eaux, les géographes d'un théodolite; dans le triangle sphérique PZA (fig. 16) où P désigne le pôle, Z le zénith, A l'astre observé, le côté PZ est le complément de la latitude λ , ZA la distance mesurée ζ , PA la distance polaire $\frac{\pi}{2} - \delta$, enfin l'angle en P est l'angle horaire h de l'astre; la relation

$$\cos \zeta = \sin \delta \sin \lambda + \cos \delta \cos \lambda \cos h$$

permet de calculer h si l'on connaît la latitude λ (et par conséquent le temps sidéral par la formule $t = h + \alpha$); ou inversement de déterminer λ quand on connaît le temps sidéral; dans la pratique, les deux coordonnées sont toujours connues approximativement, ce qui permet aux marins d'observer un astre de déclinaison variable comme le soleil en remplaçant δ par une valeur suffisamment approchée.

La distance ζ doit être corrigée de la réfraction, dont le calcul n'est jamais rigoureux; aussi a-t-on proposé de déterminer la latitude par des observations d'azimut; le procédé qui paraît le meilleur consiste à noter les passages de deux astres dans le premier vertical, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire au méridien. On obtient d'une façon commode la position du mé-

ridien au moyen de l'étoile polaire : des recueils astronomiques donnent l'angle maximum que forme le plan vertical de l'étoile avec le méridien, angle qui se calcule aisément quand on connaît la déclinaison de l'étoile, et qui porte le nom de *digression* maxima ; or, au voisinage de ce maximum, l'azimut de la polaire varie très peu et est très facile à observer ; il suffit de lui ajouter le nombre de la table pour avoir l'azimut du méridien.

Soient alors A et A' (fig. 16) les positions de deux astres lors de leur passage au 1^{er} vertical, t et t' les instants correspondants, h et h' les angles horaires des deux astres, d'ascensions droites α et α' ; on a :

$$t = h + \alpha, \quad t' = h' + \alpha',$$

d'où :

$$h' - h = t' - t - (\alpha' - \alpha) ;$$

dans le triangle PAA', l'angle en P est justement l'angle $h' - h$, les côtés PA et PA' sont les distances polaires ; il faut, pour obtenir PZ, calculer la hauteur du triangle PAA'. L'intérêt de la méthode réside dans ce fait que si le premier vertical n'est déterminé que d'une façon approximative, la direction PZ n'est plus exactement perpendiculaire à AA' et diffère de la hauteur PZ' d'un petit angle ; mais, si l'on considère l'angle Z'PZ comme une quantité très petite du 1^{er} ordre, la différence des arcs PZ' — PZ est du second ordre.

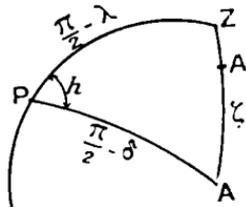


Fig. 16.

Il existe un grand nombre de procédés, dont beaucoup n'ont plus qu'un intérêt historique, pour déterminer les coordonnées géographiques d'un lieu ; nous

nous bornerons à indiquer le principe de deux d'entre eux qui s'emploient couramment :

1^o Si l'on considère une sphère céleste qui tourne solidairement avec la terre, le zénith Z d'un point fixera la position du lieu terrestre, et ses coordonnées sphériques seront les coordonnées géographiques du lieu, si on choisit convenablement l'origine ; sur la sphère, on peut figurer la position d'un astre à un instant donné par l'intermédiaire de l'angle horaire et de la déclinaison ; si trois étoiles ont été vues du lieu à la même hauteur, elles sont sur un petit cercle de la sphère ayant pour pôle Z ; inversement, si l'on connaît les positions de ces étoiles sur la sphère, on peut déterminer les coordonnées du pôle Z du petit cercle passant par ces points : *l'astrolabe à prisme* est un instrument qui permet de déterminer l'instant du passage d'une étoile à une hauteur déterminée, voisine de 60° , et qui dépend de la réfraction atmosphérique ; tant que cette réfraction reste la même, elle reste sans influence, car elle change le rayon sphérique du petit cercle sans modifier son centre.

2^o Si l'on marque sur la sphère céleste, au sens ordinaire cette fois, la position d'une étoile, le lieu des points Z , tels que cette étoile soit vue du point correspondant sous une distance zénithale ζ donnée, est un petit cercle ayant pour pôle le point qui représente l'étoile, et pour rayon sphérique la distance ζ ; si donc on pouvait observer simultanément deux étoiles, on déterminerait Z par l'intersection de deux petits cercles ; on tient compte de la non-simultanéité de deux observations en faisant tourner le cercle horaire du premier astre observé, et le petit cercle dont il est le centre, d'un angle mesuré par la différence des temps des observations. La méthode basée sur ces considérations est semi-graphique ; on considère l'image de la sphère

céleste sur une carte marine, et les courbes qui représentent les deux petits cercles, appelés cercles de hauteur, sur cette carte; pour trouver leur intersection, on leur substitue des droites très voisines de leurs tangentes au point de rencontre, qu'on appelle droites de hauteur.

CHAPITRE V

CORRECTIONS DES OBSERVATIONS

14. Parallaxes. — Le mot parallaxe a plusieurs significations différentes, mais qui se rattachent directement les unes aux autres, de sorte qu'il n'y a pas à craindre de confusion entre ses diverses acceptions. On

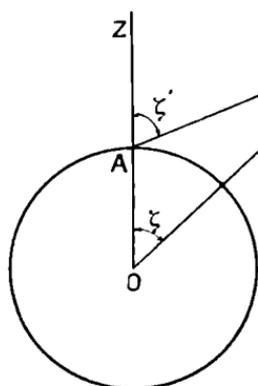


Fig. 17.

appelle en premier lieu *parallaxe diurne* l'angle p sous lequel on voit (fig. 17) le rayon terrestre OA aboutissant en un point A de la surface ; si l'on prolonge OA , la direction AZ est celle de la verticale géocentrique, qui diffère peu de la verticale observée, d'un angle qu'on peut calculer quand on connaît l'aplatissement de la terre ;

l'angle p est la différence entre les angles formés par la direction AZ avec les deux directions AP et OP ; on dit que c'est la correction de parallaxe qu'il faut appliquer à la distance zénithale ζ' , de l'astre vu de A pour obtenir celle qui serait mesurée par un observateur fictif placé au centre de la terre ; cette correction permet la comparaison d'observations faites en différents points de la terre.

On a, dans le triangle OPA, r désignant le rayon OA, Δ la distance OP :

$$\sin p = \frac{r}{\Delta} \sin \zeta';$$

pour un astre situé à une distance donnée, le maximum de p a lieu quand $\zeta' = \frac{\pi}{2}$ et s'appelle parallaxe horizontale; d'autre part, si l'on considère les différents points de la surface terrestre, la parallaxe horizontale équatoriale est la plus grande de toutes les valeurs de la parallaxe d'un astre; elle est donnée par la relation simple

$$\sin P = \frac{a}{\Delta},$$

a étant le rayon équatorial de la terre; d'où il résulte que la connaissance de P équivaut à celle de la distance de l'astre au centre de la terre; sauf pour la lune, dont la parallaxe fera l'objet d'une étude spéciale, les angles P ainsi définis sont très petits; pour le soleil, on a en moyenne $P = 8'',80$; pour Neptune, P atteint à peine $0'',3$; pour les comètes qui se rapprochent le plus de la terre, la parallaxe arrive rarement à $30''$; on peut donc toujours confondre P et $\sin P$; pour les astres extérieurs au système solaire, la correction est tout à fait insensible.

Quand on connaît la parallaxe p , on peut calculer les corrections de parallaxe en ascension droite et en déclinaison, c'est-à-dire les corrections qu'il faut appliquer aux coordonnées observées d'un astre pour obtenir celles qui fixent la direction joignant le centre de la terre à l'astre; on considère (fig. 18) le triangle de position PZ'M'; Z' est l'intersection avec la sphère céleste du point joignant l'observateur au centre de la terre; c'est un point du méridien, voisin de Z; en por-

tant à partir de M' sur l'arc $Z'M'$ un arc égal à p , on obtient le point M qui définit la direction cherchée. Pratiquement, p est très petit et peut être assimilé à une

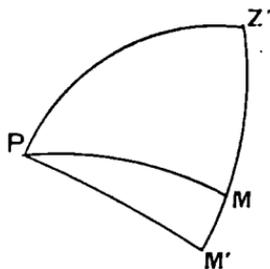


Fig. 18.

différentielle; on pourra donc se borner à différencier les formules qui donnent l'angle horaire et la déclinaison d'un astre en fonction de l'azimut et de la distance zénithale, cette dernière seule subissant une variation $-p$. Ce calcul, que nous ne faisons qu'indiquer, doit être effectué non seulement pour la comparaison d'observations faites en

des heures différentes, mais pour comparer une observation faite en un point donné à une position théorique, celle-ci étant calculée pour le centre de la terre.

Nous nous occuperons plus loin de la détermination de la parallaxe du soleil, qui est une des constantes fondamentales de l'astronomie; de sa valeur moyenne $8'',8$, on déduit que la distance moyenne soleil-terre est environ 23 400 fois le rayon terrestre; on conçoit dès lors que, si les dimensions de la terre peuvent être négligées vis-à-vis de la distance d'une étoile, il ne soit plus permis de considérer comme parallèles les différents rayons allant d'une étoile aux positions successives de la terre sur l'orbite qu'elle décrit annuellement autour du soleil. On appelle parallaxe d'une étoile E l'angle sous lequel on voit de cet astre la longueur $ST = R$ joignant les centres de la terre et du soleil; le maximum de cet angle a lieu quand ST , qui est à peu près constant, est perpendiculaire à ES ; ce maximum π s'appelle la parallaxe annuelle de l'étoile, et l'on a $\sin \pi = \frac{R}{D}$, D étant la distance ES exprimée avec la

longitude entre la terre et l'étoile, rapportée au soleil, sera de 90° .

15. Aberration. — En cherchant à observer les déplacements parallactiques annuels, Bradley découvrit (en 1727) que toutes les étoiles paraissent décrire annuellement une ellipse, mais que ces ellipses ont le même grand axe; il était difficile d'admettre que toutes les étoiles fussent situées à la même distance; d'autre part, l'époque du passage de la position apparente à l'extrémité du grand axe de l'ellipse différait de trois mois de celle indiquée par le raisonnement précédent, de sorte qu'un minimum d'écart était observé au lieu du maximum prévu, et inversement. C'est de ce désaccord que vient le nom d'*aberration* appliqué par Bradley au phénomène, dont il put donner une explication correcte;

celle-ci repose sur le fait que la vitesse de propagation de la lumière, quoique très grande vis-à-vis de la vitesse de l'observateur dans l'espace, est cependant mesurable; Rømer en avait trouvé une valeur approchée, à la fin du xvii^e siècle, par la comparaison des observations des satellites de Jupiter.

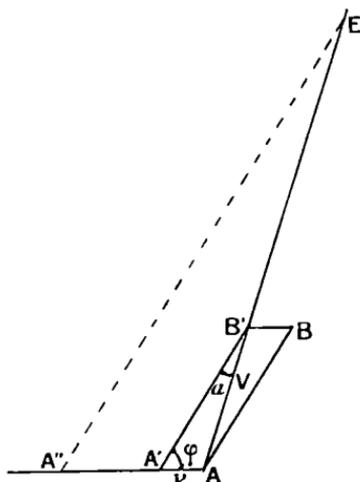


Fig. 20.

Soit AB (fig. 20) la direction vers laquelle est pointée une lunette, B étant le centre de l'objec-

tif. A l'œil de l'observateur; comme celui-ci est en mouvement, il ne reçoit pas l'onde lumineuse arrivée en B, mais celle parvenue en B' au temps $t - \tau$, τ désignant le

temps très court mis par la lumière pour se propager de B' en A ; la direction réelle de l'astre est donc la direction AB', alors que la direction visée est AB : l'intervalle τ est extrêmement petit, puisque la vitesse de la lumière est de 300 000 kilomètres par seconde ; le déplacement A'A de A, pendant cet intervalle, peut être considéré comme rectiligne et comme égal et parallèle au déplacement B'B ; les longueurs AB' et AA' sont d'ailleurs dans le même rapport $\frac{v}{V}$ que la vitesse v de l'observateur à la vitesse V de la lumière.

L'angle d'aberration a est donné dans le triangle AB'A' par la formule

$$\sin a = \frac{v}{V} \sin \varphi,$$

où φ désigne l'angle de la vitesse de l'observateur avec la direction apparente de l'astre. On voit qu'au point de vue du calcul, on peut assimiler l'aberration et la parallaxe ; la direction apparente étant celle qui serait vue d'un observateur fictif immobile A'' placé sur la direction de la vitesse de l'observateur réel A prolongée en sens opposé, à une distance égale à θc , θ étant le temps mis par la lumière à parvenir de l'étoile E à l'observateur A.

La vitesse de l'observateur peut être considérée comme la somme géométrique de trois composantes, dues respectivement :

- 1° Au mouvement de rotation de la terre ;
- 2° Au mouvement d'entraînement de la terre autour du soleil ;
- 3° Au mouvement du système solaire dans l'espace.

Chacune de ces composantes étant très petite par rapport à la vitesse V de la lumière, on peut étudier leurs effets séparément, et faire la somme géométrique

des déplacements [qui leur correspondent. pour obtenir le déplacement final apparent; on est ainsi conduit à distinguer l'aberration diurne, l'aberration annuelle, et l'aberration séculaire.

1^o La vitesse due au mouvement diurne est perpendiculaire au méridien de l'observateur; elle est maxima pour les points de l'équateur terrestre; comme le chemin décrit par chacun d'eux, en un jour de 86 400 secondes, est de 40 000 kilomètres, elle est de moins d'un demi-kilomètre par seconde; la composition de cette vitesse et de la vitesse V , lorsqu'une étoile passe au méridien d'un lieu déterminé, introduit une correction qui porte sur l'ascension droite de l'étoile, et non sur la déclinaison; cette correction écarte du méridien la direction apparente de l'étoile d'un angle constant; elle a donc exactement le même effet que l'erreur instrumentale de collimation (§ 10) et s'ajoute, avec un signe convenable, au coefficient c de la formule de réduction des observations méridiennes.

2^o Dans le mouvement annuel de la Terre, que nous considérerons ici comme circulaire, le rayon du cercle décrit est 23 400 fois plus grand que précédemment, et la vitesse angulaire du rayon 365 fois plus petite; la vitesse de l'observateur est donc environ 60 fois plus grande que précédemment, c'est-à-dire de l'ordre de 30 kilomètres par seconde; le rapport $\frac{v}{V}$ est de l'ordre de $\frac{1}{10\,000}$; puisque l'arc de longueur 1 mesure un angle de 206265'', l'angle qui a pour sinus $\frac{v}{V}$ est d'environ 20''. Si par le centre S du soleil, on mène une droite égale et parallèle à la vitesse v de la terre, le lieu de son extrémité décrit la courbe qu'on appelle *hodographe de l'orbite terrestre*; cette courbe est une circonférence

(même si l'on tient compte de l'excentricité de l'ellipse décrite par la terre, mais le centre, dans ce cas, n'est pas au point S). En considérant la sphère de centre S qui a pour rayon la vitesse V de la lumière comme la sphère céleste, le lieu des positions apparentes d'une étoile E modifiées par l'aberration annuelle s'obtient, d'après la construction de la figure 20, en prenant l'intersection de la sphère avec un cône ayant pour sommet S et pour base l'hodographe, auquel on a fait subir la translation V dans la direction SE; ce lieu est donc très voisin d'une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'écliptique; on reconnaît que le grand axe est le même pour les diverses étoiles; quant au petit axe, il est maximum pour une étoile située au pôle de l'écliptique (l'ellipse devient un cercle), et s'annule pour les étoiles situées à l'écliptique, qui paraissent osciller autour de leur position moyenne sur un arc de ce grand cercle. Enfin le déplacement ayant lieu dans le plan qui contient la vitesse de la terre, perpendiculaire au rayon vecteur du soleil, est, au moment des maxima ou minima, perpendiculaire au déplacement parallactique.

Si l'observation permettait d'obtenir correctement le grand axe commun à toutes les ellipses d'aberration annuelles, on en déduirait le rapport $\frac{v}{V}$; or la vitesse v peut se calculer en fonction de la distance R du soleil à la terre; on aurait donc ainsi la distance, ou, ce qui revient au même, la parallaxe du soleil, si l'on avait déterminé d'autre part la vitesse V de la lumière; ou bien, inversement, on déduirait la vitesse V de la parallaxe solaire; mais la question se complique du fait que les étoiles subissent des déplacements du même ordre que ceux dus à l'aberration, par suite des phénomènes de précession et de nutation.

3° Pour évaluer l'aberration séculaire, il faudrait connaître la grandeur et la direction de la vitesse d'entraînement du système solaire; or ces données ne peuvent actuellement être exprimées par des nombres précis : la direction est déterminée à plusieurs degrés près, la grandeur est un peu plus faible que la vitesse de translation de la terre; on doit donc provisoirement considérer cette vitesse comme constante en grandeur et en direction; l'addition géométrique d'un tel vecteur à la vitesse V portée sur une direction constante a pour effet une déviation constante dans la direction de l'étoile, qu'il est impossible de contrôler.

L'ensemble des trois corrections reçoit le nom *d'aberration des fixes*; le rayon qui parvient à l'observateur à l'époque t a été émis par l'étoile à une date $t - \theta$ qui peut être très antérieure à t ; mais, comme les mouvements propres qu'il est possible de déterminer sont très faibles et doivent être, pendant longtemps encore considérés comme rectilignes et uniformes, un décalage du temps dans les observations d'étoiles n'a aucune importance; il en est autrement s'il s'agit d'un astre du système solaire, dont le déplacement est sensible pendant le temps que la lumière met à parvenir à l'observateur; on dit que les observations doivent tenir compte de *l'aberration planétaire*, et le principe de la correction est le suivant : si θ désigne le temps mis par la lumière pour venir d'une planète à la terre, la direction observée à l'instant t est celle qui joint la position de la terre à l'instant t à celle de la planète à l'instant $t - \theta$.

Nous avons admis, dans ce qui précède, que la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse constante indépendante de celle de la source lumineuse; or la définition du rayon lumineux a besoin d'être précisée dans l'hypothèse des ondulations; un examen approfondi montre que la vitesse V doit être la vitesse dans

le vide, et non la vitesse dans le milieu intérieur à la lunette, comme il apparaît d'abord; ce résultat a été confirmé par des expériences célèbres effectuées à Greenwich, dans lesquelles le tube de la lunette avait été rempli d'eau et d'un autre liquide. D'un autre côté, en introduisant la vitesse de l'observateur, nous avons admis implicitement l'existence d'un système de référence fixe, par rapport auquel on peut évaluer un déplacement absolu; on sait que, d'après la théorie de la relativité développée par Einstein, la conception même d'un tel système doit être considérée comme impossible; d'après cette même théorie, il ne saurait exister d'aberration séculaire, et la composition d'une vitesse avec la vitesse de la lumière serait absurde: l'idée de simultanéité n'existant plus, les explications relatives à l'aberration planétaire auraient aussi besoin d'être révisées. La discussion de ces questions, si intéressante qu'elle soit, ne saurait trouver place ici.

16. Réfraction atmosphérique. — On sait que la lumière ne se propage en ligne droite que dans un milieu homogène; si un rayon lumineux passe d'un milieu moins dense dans un milieu plus dense, sa direction change et se rapproche de la normale à la surface de séparation. Or l'atmosphère terrestre est loin de s'étendre jusqu'aux étoiles, et sa densité n'est pas constante, mais diminue quand l'altitude augmente. La trajectoire lumineuse dans l'atmosphère n'est donc pas une ligne droite, et la direction dans laquelle on voit une étoile n'est pas confondue avec la direction du rayon qui pénètre dans l'atmosphère terrestre; l'angle de ces deux droites est la correction de réfraction.

Pour calculer la réfraction, il faudrait déterminer la trajectoire lumineuse, ce qui exigerait la connaissance de la forme des surfaces sur lesquelles la densité reste constante, et de la loi de variation de la densité, de l'une

à l'autre de ces surfaces; or, malgré les expériences de sondages aériens multipliées depuis un demi-siècle, nos connaissances sur l'atmosphère sont très limitées; les courants aériens paraissent avoir leur plus grande vitesse au voisinage de la surface du sol, et les déviations qu'ils produisent dans la direction du rayon lumineux doivent être considérées comme des erreurs accidentelles, que la combinaison d'un grand nombre d'observations permet seulement d'éliminer; cette région agitée paraît dominée par une zone relativement calme dont l'altitude inférieure varie entre 10 et 15 kilomètres; mais, dans cette zone, la variation de densité avec l'altitude n'est connue que d'une manière très imparfaite; de sorte que le calcul de la réfraction ne peut reposer que sur des hypothèses plus ou moins plausibles, et que la précision des observations astronomiques, surtout des mesures de déclinaison, rencontre une limite dans ce phénomène.

L'hypothèse la plus simple consiste à négliger, avec Laplace, l'aplatissement et la rotation terrestres, et à supposer que l'atmosphère est composée de couches sphériques concentriques homogènes; puisque le rayon réfracté demeure dans le plan normal à la surface de séparation qui contient le rayon d'incidence, la trajectoire lumineuse est une courbe plane; la réfraction donne une correction de hauteur ou distance zénithale, non d'azimut.

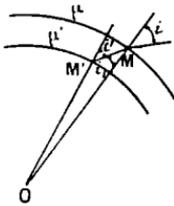


Fig. 21.

Considérons (fig. 21) deux sphères de rayons r et r' assez voisins pour que le petit arc MM' de trajectoire qui va de l'une à l'autre puisse être confondu avec sa corde. Soit i l'angle d'incidence du rayon arrivant en M , μ l'indice de réfraction par rapport au vide de la couche qui précède M , i' et μ' les mêmes quantités rela-

tives à M' , enfin i_1 l'angle du rayon réfracté MM' avec la normale OM ; d'après la loi de la réfraction, on a :

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{\mu'}{\mu};$$

d'autre part, dans le triangle OMM' ,

$$\frac{\sin i_1}{r'} = \frac{\sin i'}{r};$$

en multipliant membre à membre ces deux relations, on obtient :

$$\mu r \sin i = \mu' r' \sin i';$$

le produit $\mu r \sin i$ reste donc constant en tous les points de la trajectoire; si μ_0 est l'indice absolu de réfraction au point d'observation, ζ la distance zénithale observée, et si l'on prend pour unité de longueur le rayon terrestre, on a :

$$(1) \quad \mu r \sin i = \mu_0 \sin \zeta.$$

Cette équation est l'équation différentielle de la trajectoire; quand on définit un point M de cette courbe (fig. 22) par des coordonnées polaires r et ω , cette dernière étant comptée à partir de la verticale OZ de l'observateur, on sait que l'on a :

$$\operatorname{tg} i = \frac{r d\omega}{dr};$$

si donc, dans l'équation (1), on considère que μ est une fonction de r , cette équation devient une équation différentielle du premier ordre. La correction de réfraction est la différence entre l'angle ζ_0 , que forme avec OZ la direction du rayon lumineux à son entrée dans l'atmosphère, et la distance

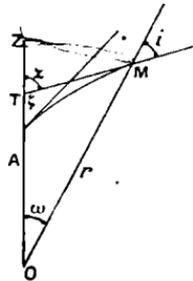


Fig. 22.

zénithale observée ζ , définie par la tangente en A au rayon lumineux; on voit immédiatement que la concavité de la courbe est toujours tournée vers O, du fait que la densité augmente quand r diminue; par conséquent, la différence $\zeta_0 - \zeta$ est toujours positive. On peut considérer celle-ci comme la somme des accroissements successifs que prend l'angle z formé par la tangente MT à la trajectoire quand le point M se déplace sur celle-ci, du point A à l'extrémité B de l'atmosphère; or on a, dans le triangle OMT :

$$z = \omega + i, \quad dz = d\omega + di,$$

ou, d'après la dernière formule,

$$dz = di + \operatorname{tg} i \frac{dr}{r};$$

d'autre part, en prenant les logarithmes des deux membres de (1), puis les différentielles,

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dr}{r} + \frac{di}{\operatorname{tg} i} = 0,$$

la combinaison des deux relations donne :

$$dz = -\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu};$$

à la limite de l'atmosphère, $\mu = 1$; l'intégrale qui exprime la réfraction R devient une intégrale définie, car on a :

$$(2) \quad R = \zeta_0 - \zeta = \int_{AB} dz = \int_1^{\mu_0} \operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu};$$

l'équation (1) donne d'ailleurs :

$$\operatorname{tg} i = \frac{\mu_0 \sin \zeta}{\sqrt{\mu^2 r^2 - \mu_0^2 \sin^2 \zeta}};$$

la hauteur de l'atmosphère est très petite vis-à-vis du

rayon terrestre (probablement inférieure au centième du rayon); d'autre part, μ_0 , et *a fortiori* μ , est très voisin de 1, de sorte qu'il en est de même de $\frac{\mu_0^2}{\mu^2 r^2}$; si on pose

$$\alpha = 1 - \frac{\mu_0^2}{\mu^2 r^2},$$

on a :

$$\operatorname{tg} i = \frac{\mu_0}{\mu r} \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \alpha \sin^2 \zeta}} = \frac{\mu_0}{\mu r} \operatorname{tg} \zeta (1 + \alpha \operatorname{tg}^2 \zeta)^{-\frac{1}{2}};$$

la formule du binôme permet de développer $\operatorname{tg} i$ en série qui converge rapidement et qui procède suivant les puissances de α ; en substituant dans l'expression (2, de R, on obtient :

$$(3) \quad R = a \operatorname{tg} \zeta + b \operatorname{tg}^3 \zeta + \dots,$$

le premier coefficient a étant

$$a = \mu_0 \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu^2 r}.$$

Laplace a établi que si l'on considère les différences $\mu - 1$ et $r - 1$ comme très petites du premier ordre, et si l'on admet que les couches concentriques sont en équilibre hydrostatique, les deux premiers coefficients a et b , calculés au 3^me ordre près, ne dépendent que de la pression atmosphérique et de la température au point d'observation.

La comparaison des observations et de la formule (3) montre que cette formule, réduite à ses deux premiers termes, représente correctement la correction de réfraction pour des distances zénithales inférieures à 75°; cette comparaison peut se faire en mesurant la distance zénithale d'une étoile qui a traversé le méridien au zénith; au moment de ce passage, la correction de

réfraction est nulle ; on peut, d'autre part, calculer pour une heure quelconque la distance zénithale vraie.

Souvent on admet l'existence de la formule (3) limitée à ses deux premiers termes, et l'on détermine les coefficients a et b par des observations de passages inférieurs et supérieurs de circumpolaires au méridien ; ζ et ζ' étant les distances zénithales observées pour une circumpolaire, les distances vraies seront $\zeta + R$ et $\zeta' + R'$; leur demi-somme $\frac{\zeta + \zeta' + R + R'}{2}$ est la colatitude γ du lieu, d'où l'équation

$$2\gamma - a(\operatorname{tg} \zeta + \operatorname{tg} \zeta') - b(\operatorname{tg}^3 \zeta + \operatorname{tg}^3 \zeta') = \zeta + \zeta' ;$$

la combinaison d'un grand nombre d'observations semblables, les coefficients étant corrigés en tenant compte des variations de température et de pression, permet de contrôler l'exactitude de la formule (3), et de calculer γ , a et b .

La réfraction est plus difficile à calculer pour les distances zénithales supérieures à 75° ; il est nécessaire d'introduire une hypothèse sur la loi de variation de la température avec l'altitude. La réfraction à l'horizon est d'environ $36'$; elle retarde l'heure du coucher et avance l'heure du lever d'un astre.

17. Précession des équinoxes ; nutation. — Le déplacement de l'équinoxe a été reconnu par Hipparque, environ 125 ans avant notre ère ; il observait directement les longitudes et latitudes des étoiles, et la comparaison de ses positions avec celles qui résultaient d'observations antérieures d'environ 150 ans lui montra que les latitudes restaient fixes, tandis que les longitudes augmentaient de la même quantité ; il en conclut que le point γ devait se déplacer dans le sens rétrograde d'environ $50''$ par an. Bradley établit bien longtemps après (1737) que ce déplacement n'est pas uniforme, et

que l'obliquité de l'écliptique n'est pas constante. Mais le phénomène ne fut vraiment élucidé que par la théorie, développée pour la première fois par d'Alembert, après que Newton eut indiqué qu'il fallait en chercher la cause dans l'aplatissement de la terre; si la terre était sphérique et composée de couches concentriques homogènes, la résultante des attractions exercées par le soleil, par exemple, sur ses différents points se réduirait à une force passant par le centre, qui serait sans action sur la rotation du globe; les actions combinées du soleil et de la lune sur le renflement équatorial de la terre permettent d'expliquer complètement le déplacement de la ligne des pôles.

C'est également la théorie qui a signalé la variation du plan de l'écliptique, due aux actions des planètes sur le système formé par le soleil, la terre et la lune; cette variation est très lente, et quand on en tient compte, le déplacement du point γ devient, naturellement, beaucoup plus difficile à représenter.

On prend comme grand cercle de référence l'écliptique d'une époque déterminée, et la position correspondante de l'équinoxe comme origine; la théorie des mouvements des centres de gravité des planètes permet de déterminer la longitude du nœud et l'inclinaison de l'écliptique à une époque donnée (§ 7, 2^o), tandis que la théorie de la rotation terrestre donne les mêmes éléments relatifs à l'équateur.

Les expressions de ces éléments contiennent deux sortes de termes bien différents :

1^o Des termes *séculaires*, c'est-à-dire des séries de la forme

$$at + bt^2 + ct^3 \dots,$$

dont les coefficients décroissent d'ailleurs très rapidement, si bien qu'il est toujours permis de négliger ceux qui suivent le troisième;

2° Des termes *périodiques*, c'est-à-dire du type

$$A \cos(\omega t + h),$$

dont la période $\frac{2\pi}{\omega}$ dépend d'une façon simple :

pour les éléments de l'écliptique, de l'année ou de la durée de révolution de l'une des planètes ;

pour les éléments de l'équateur, de l'année, de la durée d'une lunaison, et, en ce qui concerne le terme le plus important, de la durée de révolution des nœuds de l'orbite lunaire sur l'écliptique, soit environ 18 ans $\frac{2}{3}$.

On appelle *écliptique* et *équateur moyens* les positions fictives des plans fondamentaux calculées en prenant seulement dans les expressions précédentes les termes séculaires ; le déplacement de ces plans moyens constitue ce qu'on appelle la *précession des équinoxes* ; les positions de l'écliptique et de l'équateur *vrais* se déduisent des précédents par l'addition des termes périodiques, dont la considération constitue le phénomène de *nutation*.

En négligeant le petit déplacement de l'écliptique, et ne retenant que les termes les plus importants de la précession et de la nutation, on peut représenter facilement le déplacement de l'équateur en figurant celui de l'axe OP qui lui est perpendiculaire : l'axe OP décrit autour de l'axe Oa de l'équateur moyen, en 18 ans $\frac{2}{3}$, un cône ayant pour base une petite ellipse tracée sur le plan tangent en a à la sphère céleste ; le grand axe de cette ellipse, situé dans le plan $a O \pi$ qui contient l'axe $O \pi$ perpendiculaire à l'écliptique, est vu du centre O sous un angle de $9''{,}2$, le petit axe mesurant $6''{,}9$; ce mouvement, qui est la partie la plus importante de la nutation, se produit dans le sens rétrograde (fig. 23).

D'autre part, l'axe Oa et le cône qui l'entoure tournent également dans le sens rétrograde, autour de $O \pi$,

le déplacement du plan $\alpha O \pi$ étant d'environ $50'',26$ par an, ce qui correspond à une période de 26 000 ans.

Le changement du grand cercle fondamental a naturellement pour effet de modifier les coordonnées d'une étoile dont la direction reste fixe; le calcul complet de ces variations, qu'on appelle corrections de précession et de nutation, procède suivant des développements en série; il est possible de former assez simplement les premiers termes, et de donner une indication sur le calcul effectif: reprenons les formules du § 7 (1^o) qui permettent de calculer l'ascension droite α et la déclinaison δ d'une étoile en fonction de ses coordonnées écliptiques λ , β , et de l'obliquité ω de l'écliptique:

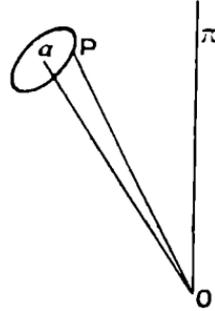


Fig. 23.

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \delta = \sin \beta \cos \omega + \cos \beta \sin \omega \sin \lambda, \\ \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \omega + \cos \beta \cos \omega \sin \lambda; \end{cases}$$

supposons que, ω et β restant constants, λ varie proportionnellement au temps, ce qui correspond au cas d'un déplacement uniforme du point γ sur l'écliptique; cherchons les dérivées α' et δ' en fonction de λ' ; la première équation donne:

$$\cos \delta \cdot \delta' = \cos \beta \sin \omega \cos \lambda \cdot \lambda',$$

ou, en tenant compte de la 2^e formule (1),

$$(2) \quad \delta' = n \cos \alpha,$$

où l'on a posé

$$n = \lambda' \sin \omega.$$

Pour obtenir α' , partons de la 3^e (1):

$$-\sin \delta \sin \alpha \cdot \delta' + \cos \delta \cos \alpha \cdot \alpha' = \cos \beta \cos \omega \cos \lambda \cdot \lambda';$$

on en déduit facilement, en remplaçant δ' par sa valeur (2), et posant

$$(3) \quad \begin{aligned} m &= \lambda' \cos \omega, \\ \alpha' &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta. \end{aligned}$$

Pour un intervalle de temps même assez considérable, on démontre qu'on peut obtenir les corrections de précession de α et δ en multipliant les expressions (2) et (3) par la durée t de l'intervalle, sous la condition de ne plus considérer m et n comme des constantes, mais comme des séries procédant selon les puissances de t ; pratiquement, on prend les valeurs de α' et δ' pour l'époque $\frac{t}{2}$ et on multiplie par t ; on a, en effet, au 3^e ordre près :

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_0' t + \alpha_0'' \frac{t^2}{2} = \alpha_0 + \left(\alpha_0' + \alpha_0'' \frac{t}{2} \right) t,$$

et le coefficient de t est l'expression approchée de α' pour l'époque $\frac{t}{2}$.

Les catalogues modernes donnent, à côté des coordonnées α et δ de chaque étoile, les coefficients de précession α' et δ' (annuels), et les variations en 100 ans (séculaires) de ces coefficients; il est ainsi très facile d'obtenir les coordonnées rapportées à l'équinoxe et l'équateur moyens du début d'une année quelconque.

La nutation se calcule seulement pour une fraction d'année; son effet, ajouté à celui de la précession pour le même intervalle, s'appelle la *réduction au jour*; voici comment on peut concevoir le calcul de cette réduction: on admet qu'on passe de l'équateur moyen au début de l'année à l'équateur vrai d'un jour donné: 1^o en faisant tourner l'équateur autour de $O n$ d'un angle $d\lambda$, sans changer l'obliquité, ce qui correspond à une nutation en longitude; 2^o en modifiant l'inclinaison

d'un angle $d\omega$ (nutation en obliquité), ces deux variations angulaires pouvant être assimilées à des différentielles. On a, par exemple, pour la nutation en ascension droite :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega;$$

or nous venons d'effectuer le calcul de $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$; celui de $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ se ferait d'une façon analogue; les variations $d\lambda$ et $d\omega$ se déduisent de la théorie de la rotation terrestre, et doivent être calculées pour des époques assez rapprochées pour qu'on puisse interpoler; les recueils astronomiques, en particulier la *Connaissance des Temps*, donnent les formules complètes qui permettent le calcul de dx et $d\delta$, et, pour chaque jour, les valeurs numériques des coefficients qui entrent dans ces formules.

Le calcul se fera en sens inverse de celui qu'on vient d'indiquer quand il s'agit de comparer diverses positions d'un astre; on commence par corriger les données d'observation de façon à les rapporter à l'équinoxe et l'équateur moyens du début de l'année correspondante, puis on applique les corrections de précession en choisissant un plan et une origine de référence qui se rapportent à une date intermédiaire entre toutes les observations.

CHAPITRE VI

ASTRONOMIE STELLAIRE

18. Détermination des parallaxes stellaires. — La petitesse des parallaxes annuelles, comparées aux corrections dont il vient d'être question, rend impossible la détermination de ces angles par des mesures de positions absolues ; mais les étoiles à parallaxe sensible sont très rares, et en comparant la position de l'une d'elles à celles d'étoiles voisines sur la sphère céleste, pour lesquelles les corrections d'observation, de réfraction et de précession seront approximativement les mêmes, on peut espérer trouver, par des mesures micrométriques, les dimensions de l'ellipse de parallaxe. Cette méthode, proposée par Herschel vers 1780, le conduisit à la découverte de systèmes doubles formés par deux étoiles très voisines qui tournent l'une autour de l'autre ; il est facile de voir qu'il ne s'agit pas d'un phénomène de parallaxe, la durée de révolution étant en général très différente d'une année ; néanmoins, les successeurs d'Herschel trouvèrent par cette voie en 1837, la première parallaxe, celle de l'étoile 61 du Cygne ($0''31$) ; le procédé, qu'on appelle direct ou trigonométrique, est encore appliqué actuellement au moyen de clichés photographiques ; on prend, à l'époque qui correspond au plus grand déplacement parallactique dans la région du ciel, une première pose (en réalité trois images distinctes sur la même plaque) ; puis, sur la même plaque non développée, six mois après, une seconde pose (6 images) ; enfin, un an après la pre-

mière, une troisième pose (3 images), cette dernière étant nécessaire pour vérifier qu'il n'y a pas de mouvement propre sensible, ou pour déterminer ce mouvement propre. Soit d la différence entre l'abscisse d'une étoile dénuée de parallaxe, et celle d'une étoile à parallaxe et mouvement propre sensibles ; l'écart dû à la parallaxe est proportionnel à la grandeur ϖ de la parallaxe et égal à ϖ multiplié par la grandeur, facile à calculer, du rayon de l'ellipse de parallaxe correspondant à une distance d'un *parsec* (c'est-à-dire à une parallaxe de 1'') ; d'autre part, le mouvement propre donne un déplacement uniforme en grandeur et direction ; on a donc :

$$d = d_0 + \mu t + P\varpi,$$

où P est connu ; en mesurant d pour différentes étoiles de la plaque photographique à trois dates différentes, on peut ainsi déterminer μ et ϖ .

L'emploi de la photographie a permis d'augmenter rapidement le nombre des parallaxes connues ; en 1882, on n'en connaissait que 34 : en 1910, 365 étaient publiées, et, malgré les événements, plus de 800 étaient déterminées par cette voie en 1918 ; certains observatoires américains sont entièrement consacrés à la détermination photographique des parallaxes.

C'est par l'examen de clichés que M. Innes, de l'observatoire de Johannesburg (Sud africain), a trouvé en 1916 la parallaxe d'une étoile qu'il appelle Proxima Centauri, dont la distance au soleil serait les $\frac{9}{10}$ de celle d' α Centaure, la parallaxe étant environ 0''82 ; comme le mouvement propre est relativement assez grand, ce résultat a peut-être besoin d'être confirmé par de nouvelles mesures.

D'autres méthodes, dites indirectes, ont été appliquées pour déterminer les parallaxes ; elles reposent sur

des hypothèses plus ou moins fondées; avant d'en donner une idée, rappelons qu'on appelle *vitesse radiale* la projection de la vitesse d'un astre sur la direction qui le joint à l'observateur : cette vitesse se détermine au spectroscopie, le déplacement des raies spectrales permettant de mesurer la vitesse de la source lumineuse, qu'on évalue par exemple en kilomètres par seconde.

1° La méthode de Boss est basée sur ce que certaines étoiles, quoique assez éloignées les unes des autres, ont des mouvements propres assez voisins en grandeurs, et dirigés très sensiblement vers le même point du ciel; c'est-à-dire que les grands cercles suivant lesquels paraissent respectivement dirigés ces mouvements se

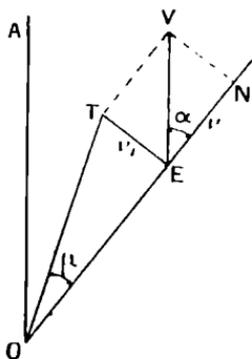


Fig. 24.

coupent sensiblement en un point, qu'on nomme *l'apex* du groupe d'étoiles; les plus connus de ces groupes portent le nom des constellations qui renferment le plus d'étoiles qui leur appartiennent; ce sont les groupes du Taureau, de Persée, de la Grande Ourse; admettons que les mouvements réels de toutes les étoiles d'un groupe soient dirigés vers le même point de l'espace, situé dans la direction OA de l'apex (fig. 24);

la vitesse EV est la résultante de la vitesse radiale v et d'une composante v_1 , perpendiculaire au rayon OE; or, α étant l'angle formé par les deux directions de l'apex et de l'étoile, on peut calculer v_1 par la formule

$$v_1 = v \operatorname{tg} \alpha;$$

d'autre part v_1 est la grandeur absolue du mouvement

propre apparent dans l'unité de temps, pratiquement l'année ; si donc μ désigne le mouvement angulaire observé durant le même temps, et Δ la distance de l'observateur à l'astre, on a :

$$v_1 = \Delta \operatorname{tg} \mu;$$

d'où l'on déduit Δ et par suite la parallaxe. Pour les étoiles du groupe du Taureau, la parallaxe ainsi obtenue a varié entre $0'',02$ et $0'',03$, alors que des mesures photographiques ont conduit à une moyenne de $0'',025$; l'accord est donc satisfaisant.

2° L'étoile secondaire d'une étoile double décrit autour de l'étoile principale une ellipse ; les observations permettent de déterminer l'orientation de cette ellipse ; mais on n'en connaît pas le grand axe ; on sait seulement déterminer l'angle sous lequel il est vu ; or on peut calculer la direction de la vitesse de l'astre à chaque instant, la grandeur de cette vitesse étant proportionnelle au grand axe, et par conséquent exprimer la projection de cette vitesse sur la direction du rayon visuel ; si l'observation a donné la vitesse radiale en kilomètres, on peut par conséquent obtenir le grand axe en kilomètres ; on en déduira la parallaxe du système.

3° L'extension de la loi de Newton aux étoiles doubles a la conséquence suivante : en prenant pour unité de temps l'année, pour unités de longueur et de masse la distance moyenne terre-soleil et la masse du soleil, en appelant enfin m, m' les masses des deux composantes, a le demi grand axe de l'orbite de l'une par rapport à l'autre, U la période de révolution, on a la relation :

$$m + m' = \frac{a^3}{U^2}.$$

Dans les systèmes qui ont pu être bien étudiés, les

masses m et m' sont peu différentes, et de l'ordre de la masse du soleil ; d'autre part, U est déterminé par les observations ; une hypothèse plus ou moins admissible sur les valeurs de m et m' conduira à une détermination plus ou moins exacte de a et, par suite, de la parallaxe.

4° L'éclat apparent d'une étoile varie en raison inverse du carré de sa distance à l'observateur ; de sorte que si l'on connaissait l'éclat absolu, c'est-à-dire celui qui correspondrait à une distance de un parsec, et d'autre part l'éclat apparent, qui est une fonction simple de la magnitude, on pourrait inversement calculer la distance de l'astre. La méthode spectroscopique proposée par Adams en 1916 repose sur la détermination physique des éclats absolus des étoiles ; cet éclat dépendrait simplement de la différence d'intensité entre deux raies déterminées du spectre stellaire ; en traçant, pour des étoiles du même type spectral, une courbe ayant pour abscisse la différence d'intensité des deux raies, pour ordonnée l'éclat absolu, la courbe a une allure régulière pour les étoiles de parallaxe connue ; elle permet de déterminer par extrapolation les éclats absolus d'autres étoiles de spectre analogue. L'emploi de ce procédé a permis de publier en 1921 une liste de 1646 parallaxes d'étoiles, dont 150 ont pu être comparées avec des déterminations directes et s'en rapprochent d'une façon satisfaisante ; les autres sont en général de quelques millièmes de seconde et complètement inaccessibles à la détermination directe.

19. Mouvements propres. — Le plus grand mouvement propre connu, découvert en 1916, par le célèbre observateur américain Barnard, atteint $10'',3$ par an ; on connaît en outre 6 étoiles, dont les déplacements annuels dépassent $5''$; mais ces cas sont tout à fait exceptionnels, et, en général, les mouvements propres sont représentés par des fractions de seconde ; leur

détermination au moyen de catalogues exige la comparaison de positions aussi éloignées que possible; quand il s'agit d'observations anciennes, il est souvent nécessaire de reprendre complètement les calculs de réduction; c'est ce qu'a fait Auwers pour le Catalogue de Bradley, qui peut être considéré comme le plus ancien qui contienne des positions précises; on conçoit d'ailleurs que les grandeurs des mouvements propres ainsi déterminés varient, suivant les valeurs attribuées aux constantes qui entrent dans les corrections de précession.

On utilise actuellement, ainsi que nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, des clichés photographiques pris à des époques différentes; pour reconnaître, avant d'effectuer des mesures précises, l'existence d'un mouvement propre, on emploie le *stéréo-comparateur*; le nom de cet appareil vient de ce qu'il a été utilisé d'abord pour la vision stéréoscopique: les deux plaques étaient examinées de chaque œil à un oculaire différent; on les plaçait de telle sorte que les images de la plupart des étoiles fussent en coïncidence pour les deux yeux; le déplacement d'une étoile par rapport aux autres faisait paraître son image en relief, en avant ou en arrière de la plaque. Le procédé dit du *blink microscope* paraît s'être substitué au précédent: les images des deux plaques sont vues à travers un seul oculaire, au moyen d'un système de prismes facile à imaginer; pour reconnaître le déplacement d'une étoile, on recouvre successivement son image sur une plaque et sur l'autre au moyen d'un écran qui se déplace rapidement; l'étoile paraît osciller autour d'une position moyennée. C'est avec le stéréo-comparateur que Barnard découvrit, sur deux plaques prises à 18 ans d'intervalle, le mouvement propre signalé plus haut; la vitesse radiale de la même étoile, qui est de 11^e

magnitude, atteint 91 kilomètres par seconde, et est dirigée vers nous ; la vitesse totale est de 260 kilomètres, dépassant de beaucoup toutes celles connues auparavant ; la parallaxe est de $0''{,}52$, ce qui donne à l'étoile le troisième rang, après Proxima Centauri et α Centauri, dans l'ordre des distances au soleil.

Dès que furent déterminés quelques mouvements propres, on se demanda s'ils ne pouvaient pas être attribués au déplacement du système solaire par rapport aux étoiles ; ce déplacement devrait affecter inégalement les coordonnées des étoiles suivant leurs distances au soleil, et une discussion des grandeurs des mouvements exigerait la connaissance des parallaxes ; mais les grands cercles suivant lesquels s'opèrent les mouvements propres devraient se couper en deux points opposés de la sphère céleste, dont l'un serait l'apex du soleil. Herschel avait trouvé ainsi, comme direction approchée de l'apex solaire, un point de la constellation d'Hercule ; quoique cette conclusion fût appuyée sur très peu de mouvements propres, elle n'a pas été très modifiée par les recherches plus récentes.

Soit (fig. 25) une étoile E de coordonnées sphériques α et δ ; on détermine le mouvement propre annuel par les variations annuelles μ_α et μ_δ des deux coordonnées ; les projections de ce déplacement sur les tangentes aux cercles d'ascension droite et de déclinaison sont $\mu_\alpha \sec \delta$ et μ_δ . D'autre part, si ce déplacement provient d'un développement d'en-

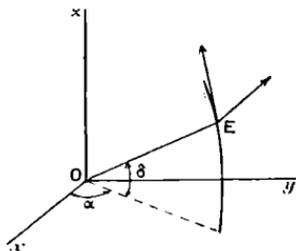


Fig. 25.

semble (égal et opposé au déplacement du soleil) dont les projections sur les axes sont X, Y, Z, on aura les projections sur les deux tangentes précédentes en for-

mant les cosinus directeurs de ces tangentes; on trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha} \sec \delta &= -X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \\ \mu_{\delta} &= -X \sin \delta \cos \alpha - Y \sin \delta \sin \alpha + Z \cos \delta.\end{aligned}$$

Il n'est pas vraisemblable d'admettre que le déplacement X, Y, Z produit à lui seul le mouvement propre de chaque étoile; mais on peut admettre que celui-ci résulte de ce déplacement et d'un autre très petit, variant en grandeur et direction d'une étoile à l'autre (*motus peculiaris*); si les mouvements propres sont assez nombreux dans une région voisine du point α, δ , et si les mouvements particuliers sont distribués au hasard, de façon à se retrouver deux à deux en sens contraires quand on les projette sur un axe, on adoptera dans les relations précédentes, pour μ_{α} et μ_{δ} , les moyennes arithmétiques des mouvements propres en ascension droite et déclinaison dans l'aire considérée, et on déduira X, Y, Z de l'ensemble des équations ainsi formées; on a obtenu ainsi, pour les valeurs approchées des coordonnées de l'apex :

$$\alpha = 270^{\circ}, \quad \delta = + 34^{\circ}.$$

On devrait retrouver le même résultat en projetant les déplacements, non plus suivant deux directions tangentes à la sphère céleste, mais suivant la direction normale, c'est-à-dire sur le rayon OE ; il faut alors utiliser les vitesses radiales v , mesurées au spectroscopie; on a l'équation :

$$v = X \cos \alpha \cos \delta + Y \sin \alpha \cos \delta + Z \sin \delta;$$

Campbell a trouvé sensiblement la même ascension droite pour l'apex, mais la déclinaison $+ 26^{\circ}$ est très différente de la détermination précédente; la vitesse serait d'environ 20 kilomètres par seconde.

On a constaté, d'autre part, en essayant de réunir les étoiles en groupes de même type spectral, ou de même magnitude, et en cherchant les coordonnées de l'apex au moyen des mouvements propres des étoiles d'un tel groupe, que les résultats sont très différents les uns des autres. Ces différences tiennent sans doute à la difficulté de définir le mouvement propre du soleil, provenant de ce qu'il n'existe pas de système fixe de référence ; on ne peut déterminer que des mouvements propres relatifs.

Les astronomes de la fin du XIX^e siècle avaient espéré que la formation de catalogues de plus en plus précis permettrait de déceler quelques variations dans la grandeur et la direction de quelques mouvements propres, et d'entrevoir la création d'une dynamique stellaire qui chercherait à expliquer ces variations par des forces. Les données que nous avons récemment acquises sur les distances mutuelles des étoiles et sur leurs masses ne laissent guère d'espoir de réaliser prochainement ces ambitions, les attractions mutuelles des étoiles devant être inappréciables. L'orientation actuelle de l'astronomie stellaire paraît plutôt l'application des lois de la statistique ; c'est-à-dire qu'on cherche à comparer la distribution des étoiles, leurs mouvements, leurs magnitudes, leurs masses, à celles d'un système d'un très grand nombre de corps pour lesquels ces divers éléments suivraient les lois du calcul des probabilités.

Les recherches de Kapteyn dans cette voie, confirmées par celles de M. Eddington, conduisent à admettre l'existence de deux courants d'étoiles, dont les directions sont sensiblement opposées l'une à l'autre ; les vitesses sont à peu près dirigées dans le plan de la voie lactée, les étoiles d'un courant étant intercalées au milieu de celles de l'autre ; ce résultat a été obtenu

d'abord par une méthode graphique dont voici une idée : sur des droites faisant entre elles les mêmes angles que les directions des mouvements propres particuliers dans une région du ciel, on porte, à partir d'un point représentant le centre de la région (fig. 26),

des longueurs proportionnelles au nombre de mouvements propres suivant les directions correspondantes ; si, le déplacement parallactique du soleil étant laissé de côté, il existait un seul courant d'étoiles, la courbe présenterait une forme telle que P, le grand axe étant dirigé dans le sens du courant ; un autre courant donnerait lieu à une courbe Q, et l'ensemble des deux donne une courbe telle que R ; on peut comparer celle-ci à celle qui résulte des observations, puis rattacher entre eux les graphiques relatifs à différentes régions du ciel et vérifier la concordance des lignes de courants. La question a été aussi traitée par le calcul ; Schwarzschild a montré qu'au lieu d'admettre deux courants opposés, on peut aussi dire, peut-être plus simplement, que les vitesses des étoiles ont une plus grande composante parallèle à un axe commun.

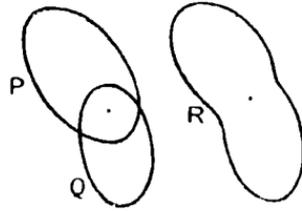


Fig. 26.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que les conclusions qui précèdent reposent seulement sur les mouvements propres d'étoiles brillantes ; il y aura lieu d'examiner si elles subsistent quand la photographie du ciel fournira les données relatives aux étoiles faibles.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que les conclusions qui précèdent reposent seulement sur les mouvements propres d'étoiles brillantes ; il y aura lieu d'examiner si elles subsistent quand la photographie du ciel fournira les données relatives aux étoiles faibles.

20. Magnitudes ; dénombrement et distribution des étoiles. — La classification des étoiles suivant leurs magnitudes, qu'on appelait autrefois grandeurs visuelles, a été conservée, bien que les mesures photo-

métriques fournissent l'éclat et non la magnitude; pour rattacher l'ancienne échelle des grandeurs aux mesures d'éclat, on admet qu'une étoile de magnitude m est 2,512 fois plus brillante qu'une étoile de magnitude $m + 1$; le nombre 2.512 a pour logarithme 0,4 dans le système vulgaire, de base 10; les magnitudes croissent ainsi en progression arithmétique quand les éclats E diminuent en progression géométrique, selon la formule

$$(1) \quad \log \frac{E}{E_0} = -0,4 (m - m_0),$$

E_0 désignant l'éclat d'une étoile de magnitude m_0 ; quand on a $m = m_0 + 5$, l'éclat E est le centième de E_0 ; on est conduit, par l'emploi de cette formule, à considérer des magnitudes inférieures à 1, et même des magnitudes négatives, dans le cas des étoiles très brillantes, telles que Sirius.

Les magnitudes visuelles ne coïncident pas toujours avec les magnitudes photographiques, qu'on déduit des diamètres des images ou de l'obscurcissement; l'étude de leurs rapports est du domaine de l'astrophysique.

Une description complète du ciel étoilé devrait contenir, en se bornant au point de vue de l'astronomie de position, les coordonnées sphériques de chaque étoile, sa parallaxe, son mouvement propre, son éclat apparent, sa masse, ses dimensions; et l'objet de l'astronomie stellaire serait de trouver les lois qui rattachent ces éléments entre eux ou à ceux fournis par l'astrophysique, en considérant soit l'ensemble des étoiles, soit des groupements particuliers. A défaut de connaissances précises, nous devons nous borner à un aperçu d'ensemble.

Si l'on admet que notre univers n'est pas entouré d'un milieu absorbant la lumière, on reconnaît aisément qu'il est limité dans toutes les directions; car une droite

quelconque issue de l'observateur devrait rencontrer au moins une étoile, et le ciel devrait être éclairé d'une façon continue.

La distribution apparente des étoiles est loin d'être uniforme; à l'œil nu, on peut déjà se rendre compte que leur nombre s'accroît au voisinage de la voie lactée; des dénombrements, effectués en classant les astres d'après leurs magnitudes, dans des zones de positions différentes, ont montré qu'il en est ainsi pour tous les groupes; on est ainsi amené à considérer que le soleil est une des étoiles d'un amas très aplati, à peu près symétrique par rapport à un plan qu'on appelle *galactique*; le soleil est à peu près au centre de l'amas, un peu au Nord du plan galactique.

Les distances mutuelles des étoiles les plus voisines de nous sont à peu près les mêmes que leurs distances au soleil, de sorte qu'on peut considérer approximativement leur répartition comme uniforme; pour reconnaître s'il en est de même à des distances plus considérables, on admet que les luminosités, ou éclats absolus, des étoiles ne s'écartent guère d'une valeur moyenne lorsqu'on considère un très grand nombre d'astres, de sorte que les différences d'éclats apparents ou de magnitudes proviennent seulement de ce que les distances sont très différentes. Dans l'hypothèse d'une égale répartition des étoiles, il est aisé de former une loi théorique donnant le nombre des étoiles jusqu'à une certaine magnitude: soit N le nombre des étoiles se projetant sur une région donnée de la sphère céleste, et situées à l'intérieur d'une sphère de rayon r , N_0 le nombre de celles de la même région à une distance égale ou inférieure à r_0 ; ces nombres doivent être entre eux comme les volumes correspondants; on a donc :

$$\frac{N}{N_0} = \frac{r^3}{r_0^3};$$

d'autre part les éclats apparents E et E_0 aux distances r et r_0 d'étoiles de même luminosité sont en raison inverse des carrés des distances, de sorte qu'on a :

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{E_0}{E}};$$

en introduisant les magnitudes au moyen de la formule (1), il vient :

$$\frac{r}{r_0} = 10^{0,2(m-m_0)};$$

$$\frac{N}{N_0} = 10^{0,6(m-m_0)} = (3,98)^{m-m_0}.$$

Quand on augmente d'une unité l'ordre de magnitude, le nombre des étoiles devrait ainsi être multiplié par 3,98. On énonce souvent le résultat d'une façon différente en disant que le nombre des étoiles de magnitude $m+1$ devrait être égal à celui des étoiles de magnitude m , multiplié par 3,98; on compte alors comme étoiles de magnitude m celles dont la magnitude est comprise entre m et $m+1$; de sorte que si, comme précédemment, N est le nombre total des étoiles jusqu'à la magnitude m , N' et N'' les totaux jusqu'aux magnitudes $m+1$ et $m+2$, le nombre des étoiles de magnitude m est $N' - N$, celui des étoiles de magnitude $m+1$ est $N'' - N'$; or si l'on a

$$\frac{N'}{N} = \frac{N''}{N'} = 3,98,$$

on a aussi

$$\frac{N'' - N'}{N' - N} = 3,98.$$

Les dénombrements d'étoiles ont donné, pour l'un ou l'autre des rapports précédents, des chiffres en général inférieurs au nombre théorique, ce qui démontre que les étoiles se raréfient quand la distance augmente,

et cela pour toutes les régions du ciel; pour la voie lactée, cette diminution n'est d'ailleurs pas régulière; il semble qu'en dehors d'un amas de forme ellipsoïdale très aplatie, il existe un anneau extérieur; mais la décroissance paraît ensuite très rapide.

Ces dénombrements ne permettent pas une évaluation des distances qui fixeraient la limite de notre univers; mais, en représentant par une formule empirique le nombre d'étoiles de magnitude m , on obtient une expression asymptotique du nombre total des étoiles de l'univers; on trouve ainsi que ce nombre est compris entre un et deux milliards.

Aux environs des pôles du grand cercle galactique, on rencontre peu d'étoiles; mais c'est dans ces régions que sont concentrées les nébuleuses spirales, qui paraissent extrêmement éloignées de nous, et que certains astronomes considèrent comme des systèmes analogues à la voie lactée.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT DU SOLEIL

21. Mouvement apparent du soleil ; détermination du point γ et de l'obliquité de l'écliptique. — Le phénomène de la rotation terrestre joue un rôle prépondérant dans les observations, si bien que les coordonnées observables avec le plus de précision sont l'ascension droite et la déclinaison rapportées à l'équateur vrai ; l'intérêt évident qu'offre l'étude du déplacement annuel du soleil justifierait à lui seul le choix du point γ comme origine des ascensions droites ; mais on peut ajouter qu'il n'y aurait aucun avantage à remplacer cette origine par une étoile déterminée de l'équateur, puisque l'équateur n'est pas invariable et cesserait de contenir l'étoile ; en plus, l'écliptique reste presque invariable et s'impose comme plan de comparaison, non seulement dans la théorie du soleil, mais dans celles de tous les corps du système solaire.

La détermination précise de la position du point γ et de l'obliquité de l'écliptique est donc une question de la plus haute importance, et des observations méridiennes du soleil doivent être faites dans tous les observatoires qui poursuivent la formation ou la correction de catalogues d'étoiles fondamentales.

On déduit les coordonnées du centre du soleil de l'observation des bords, le disque solaire étant circulaire ; la moyenne des temps des passages au méridien donne l'ascension droite du centre ; pendant le passage du soleil, qui dure environ deux minutes, puisque le

diamètre apparent dépasse peu $30'$, on peut considérer en effet la variation d'ascension droite du centre comme uniforme; (ce déplacement dans une année est de 360° , et dans un jour, de 1° environ, ou 4 minutes de temps; la variation d'ascension droite pendant le passage du soleil derrière un fil fixe est donc d'environ $\frac{1}{3}$ de seconde). Pour la déclinaison, il faut faire subir aux observations des deux bords des corrections de réfraction légèrement différentes entre elles, avant de prendre la moyenne; on utilise l'observation d'un seul bord en se servant de la valeur du diamètre apparent basée sur des observations antérieures.

Le centre du soleil reste toujours voisin de l'écliptique, puisque sa latitude atteint rarement $1''$; on détermine les éléments du grand cercle qui représente ce plan par des formules indiquées plus haut (§ 7, 2°), et que nous rappelons ici afin de discuter la précision des résultats.

Soient (fig. 27) S, S' deux positions du soleil données par les coordonnées $\alpha, \delta, \alpha', \delta'$, l'origine des ascensions droites étant un point arbitraire qui pratiquement est une position approchée du point γ , et soit a l'ascension droite à déterminer du point γ ; dans les triangles rectangles $\gamma SP, \gamma' SP'$, on a :

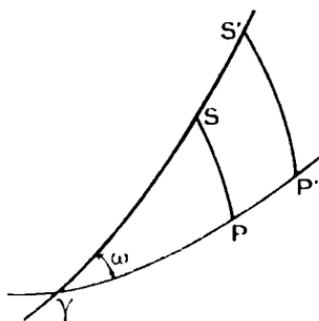


Fig. 27.

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \delta = \sin(\alpha - a) \operatorname{tg} \omega, \\ \operatorname{tg} \delta' = \sin(\alpha' - a) \operatorname{tg} \omega. \end{cases}$$

Il faut choisir les observations de façon à obtenir les valeurs de a et ω avec la plus grande approximation

possible ; il est clair que, pour ω , on devra prendre une équation dans laquelle le coefficient de $\text{tg } \omega$ ait la plus grande valeur possible ; soit la seconde équation, qui correspondra ainsi à une observation faite au voisinage du solstice ; la détermination de δ' sera facilitée par le fait que la déclinaison varie peu au voisinage de son maximum. Reste à choisir la première équation ; si les erreurs commises dans les observations et les calculs sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés, c'est-à-dire les assimiler à des différentielles, qu'on représentera par le symbole habituel d , la 1^{re} équation donne :

$$(2) \quad \frac{d\delta}{\cos^2 \delta} = \cos(\alpha - a) \text{tg } \omega \cdot d(\alpha - a) + \frac{\sin(\alpha - a)}{\cos^2 \omega} d\omega.$$

En prenant, comme Leverrier l'a indiqué, pour 1^{re} équation du groupe (1) celle qui se rapporte à une observation faite au voisinage de l'équinoxe de printemps, cette formule se simplifie et donne sensiblement, a étant la valeur conclue :

$$da = d\alpha - \frac{d\delta}{\text{tg } \omega};$$

si, au contraire, on forme la 1^{re} équation avec une observation voisine de l'équinoxe d'automne, l'ascension droite α_1 étant voisine de 180° , en appelant a_1 la valeur déduite du groupe (1), on a :

$$da_1 = d\alpha_1 + \frac{d\delta_1}{\text{tg } \omega};$$

en prenant pour ascension droite de γ la valeur moyenne $\frac{a + a_1}{2}$, l'erreur commise se réduit à $\frac{d\alpha + d\alpha_1}{2}$, si l'on admet que les erreurs $d\delta$ et $d\delta_1$ sont égales ; en tout cas, si ces dernières contiennent des termes sensiblement égaux et difficiles à évaluer, comme ceux des corrections

de réfraction, ils disparaissent dans la différence. En réalité, on remplacera les observations uniques au voisinage des équinoxes par des groupes d'observations dont les moyennes soient aux équinoxes.

22. Mouvement elliptique. — On sait que la considération des mouvements des diverses planètes a amené Copernic à admettre que c'est la terre, et non le soleil, qui se déplace dans le cours d'une année; remarquons que l'explication simple que ce déplacement permet de donner de l'aberration annuelle est un argument de plus en faveur du système de Copernic.

Nous supposerons donc maintenant que c'est la terre qui décrit l'écliptique; pour éviter toute confusion dans les calculs, il suffira de rappeler que, par rapport à trois axes de directions fixes, si X, Y, Z sont les coordonnées géocentriques du soleil, les coordonnées héliocentriques de la terre sont $-X, -Y, -Z$; et que, comme les directions ST et TS sont opposées, si la longitude héliocentrique de la terre est L , la longitude géocentrique du soleil est $180^\circ + L$.

La terre se meut dans le plan de l'écliptique suivant les lois que Képler a établies pour toutes les planètes : l'orbite est une ellipse dont le soleil est un des foyers, et l'aire balayée par le rayon vecteur varie proportionnellement au temps. Nous ne nous arrêterons pas à la vérification directe de ces lois par l'observation, qui résulterait de la comparaison des longitudes et des distances relatives, celles-ci étant inversement proportionnelles aux diamètres apparents du soleil; nous développerons d'abord leurs conséquences.

Représentons (fig. 28) l'ellipse décrite par la terre T ; on appelle *anomalie vraie* v l'angle formé par un rayon ST avec le grand axe SA dirigé vers le sommet A le plus rapproché du foyer S ; ce sommet A s'appelle le *périhélie* (on dit le *périgée* quand on considère le mou-

vement apparent du soleil); la distance $ST = r$ s'exprime en fonction de v par l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

dans laquelle e désigne l'excentricité de l'ellipse, c'est-

à-dire le rapport $\frac{OS}{OA} = \frac{c}{a}$,

O étant le centre de la courbe; p est le paramètre, égal à $a(1 - e^2)$.

On sait que l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'une circonférence de dia-

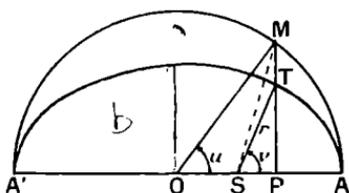


Fig. 28.

mètre AA' , cette circonférence étant tracée dans un plan qui fait avec celui de l'ellipse un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$; si l'on fait tourner le plan du cercle autour de AA' de façon à le rabattre sur le plan de l'ellipse, on obtient un point T de l'ellipse en réduisant dans le rapport $\frac{b}{a}$ l'ordonnée MP du point du cercle qui a même projection sur OA.

L'angle u compris entre OA et OM a reçu le nom d'*anomalie excentrique*; d'après ce qui précède, on a :

$$(1) \quad \begin{cases} r \cos v = a \cos u - ae, \\ r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin u; \end{cases}$$

on en tire, en ajoutant les carrés membre à membre :

$$r^2 = a^2 (1 - e \cos u)^2,$$

d'où :

$$(2) \quad \left(r = a (1 - e \cos u), \right)$$

puisque les deux membres sont positifs.

En combinant par addition et soustraction cette formule avec la première du groupe (1), on a :

$$r \cos^2 \frac{v}{2} = a(1 - e) \cos^2 \frac{u}{2},$$

$$r \sin^2 \frac{v}{2} = a(1 + e) \sin^2 \frac{u}{2},$$

d'où :

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

le radical étant pris positivement.

La loi des aires se traduit par la formule $r^2 \frac{dv}{dt} = C^2$.

L'introduction de l'angle u permet d'intégrer cette équation sans calcul : l'aire du secteur elliptique STA doit être considérée comme la projection de l'aire SMA, limitée par l'arc de cercle AM, quand on considère l'ellipse comme la projection du cercle ; or on a :

$$\text{aire SMA} = \text{aire OMA} - \text{triangle OMS},$$

et, u désignant la mesure de l'angle en radians,

$$\text{aire SMA} = \frac{a^2}{2} u - \frac{a^2 e}{2} \sin u;$$

puisque le cosinus de l'angle du plan avec le plan de projection est $\frac{b}{a}$, on a donc :

$$\text{aire STA} = \frac{ab}{2} (u - e \sin u).$$

Soient t et t_0 les instants où la terre se trouve en T et en A, U la durée d'une révolution; d'après la loi de Képler, le rapport de l'aire STA à l'aire de l'ellipse est égal à $\frac{t-t_0}{U}$; l'aire de l'ellipse, projection de l'aire du cercle, est égale à πab ; on a donc :

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{U} (t - t_0);$$

on pose $n = \frac{2\pi}{U}$, n étant le *moyen mouvement angulaire* de la terre; l'angle

$$(4) \quad \zeta = n(t - t_0)$$

s'appelle l'*anomalie moyenne*, ces dénominations se comprenant d'elles-mêmes quand on compare le déplacement du rayon vecteur à un mouvement angulaire uniforme.

Si les deux constantes n et t_0 , qui sont deux des *éléments* de l'orbite terrestre, sont connues, on déterminera la position de la terre à un instant quelconque t en calculant d'abord l'anomalie moyenne ζ par la formule (4), puis en résolvant l'équation de Képler :

$$(5) \quad u - e \sin u = \zeta;$$

quand on aura ainsi obtenu u , les formules (2) et (3) donneront r et v .

Lorsque, dans l'équation (5), on suppose par exemple ζ compris entre 0 et π , il existe une racine u et une seule dans le même intervalle; si l'on pose en effet :

$$\varphi(u) = u - e \sin u - \zeta,$$

ζ ayant la valeur donnée, on a manifestement :

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(\pi) > 0;$$

la fonction $\varphi(u)$ est croissante quand u varie de 0 à π , puisque sa dérivée $1 - e \cos u$ est toujours positive; elle s'annule donc une fois et une fois seulement dans l'intervalle; le raisonnement s'applique sans modification quand les limites sont π et 2π , aussi bien pour ζ que pour u .

Il suit de là que si l'on a formé une table des valeurs de $u - e \sin u$ ayant pour argument u , il suffit de chercher dans cette table le nombre le plus rapproché d'une valeur donnée de ζ et de lire l'argument correspondant

pour avoir une valeur approchée de u ; de telles tables ont été calculées, non seulement pour l'excentricité e de l'orbite terrestre, mais pour une série de valeurs de e assez rapprochées, de sorte qu'on peut les utiliser pour toutes les planètes.

Pour calculer plus exactement u , en partant de la valeur approchée u_1 trouvée dans la table et qui correspond au nombre ζ_1 , voisin de ζ tel que $\zeta_1 = u_1 - e \sin u_1$, on applique la méthode d'approximation de Newton ; c'est-à-dire qu'en appelant $u_1 + \delta u$ la valeur exacte de u , on suppose δu très petit, et on forme l'équation :

$$u_1 - e \sin u_1 + \delta u (1 - e \cos u_1) = \zeta,$$

qui donne :

$$\delta u = \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - e \cos u_1};$$

le facteur $\frac{1}{1 - e \cos u_1}$ est aussi donné par une table.

Lorsqu'on calcule une éphéméride, c'est-à-dire une série de positions pour des valeurs de t croissant en progression arithmétique, il est avantageux, au lieu de résoudre chaque fois l'équation de Képler, d'employer des développements en série pour trouver u , e , et r ; ces développements procèdent souvent suivant les puissances de e ; dans le cas de la terre, ils sont rapidement convergents, puisqu'on a approximativement $e = \frac{1}{60}$; l'étude théorique de ces développements est d'un très grand intérêt, mais nous ne pouvons donner ici que le premier terme de chacun d'eux ; de l'équation (5), on tire tout de suite, en négligeant les termes en e^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \cong \zeta + e \sin \zeta ; \\ \end{array} \right.$$

on a de même, d'après (2) :

$$r = a (1 - e \cos \zeta);$$

v est donné par la formule (3); la différence $v - u$ s'annule quand e s'annule; on aura le coefficient de e dans le développement de cette différence en considérant v comme fonction de e seulement, et calculant la dérivée $\frac{dv}{de}$ pour $e = 0$; de la formule (3), en prenant les logarithmes des deux membres, puis les dérivées, on tire :

$$\frac{1}{\sin v} \frac{dv}{de} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right);$$

le coefficient cherché est donc $\sin v$, et, à l'ordre d'approximation auquel nous nous bornons, il vient :

$$v = u + e \sin v,$$

d'où enfin :

$$v \approx \zeta + 2e \sin \zeta.$$

23. **Éléments de l'orbite terrestre.** — L'orientation de l'ellipse décrite par la terre dans le plan de l'écliptique est déterminée par l'angle que fait le grand axe, dirigé vers le périhélie, avec la direction origine des angles; cet angle τ est la *longitude du périhélie*: nous avons dû, pour définir la position à un instant donné, introduire précédemment les éléments n , t_0 , et e ; il resterait à fixer la longueur du demi grand axe a ; cette quantité est prise pour unité de longueur dans le système solaire, et nous ne la comparerons que plus tard aux longueurs mesurées à la surface de la terre, quand nous étudierons la détermination de la parallaxe solaire.

Des observations, on déduit les longitudes L , du soleil; avec les notations précédentes, on a $L = v + \tau$, et l'on appelle L la longitude *vraie*, par opposition avec la longitude *moyenne* l , qu'on déduit de l'anomalie moyenne par la formule $l = \zeta + \tau$.

Au bout du temps U , les longitudes L ou l ont augmenté de 360° ; si l'on mesure U en jours et fractions

de jours, le quotient $\frac{360^\circ}{U}$ qu'on exprime généralement en secondes, représente le moyen mouvement de la terre en un jour; au lieu de considérer une seule révolution, on en fait intervenir le plus grand nombre possible, et l'on part de deux longitudes L et L' qui diffèrent entre elles d'un nombre de degrés très rapproché d'un multiple de 360; en divisant cet angle par le nombre de jours écoulé entre les observations des deux longitudes, on obtient n .

Pour obtenir e , ϖ et t_0 , on peut employer la série qui donne v en fonction de ζ ; nous avons justement formé le premier terme de cette série afin de pouvoir donner un aperçu de la méthode; on a :

$$L \equiv \zeta + \varpi + 2e \sin \zeta + R;$$

R contient e^2 en facteur; c'est donc une petite quantité; l'erreur commise sur son calcul d'après l'expression analytique sera multipliée par un nombre très petit et pourra être négligée; considérant deux observations relatives aux époques t et t_1 , on a :

$$\begin{aligned} L &= n(t - t_0) + \varpi + 2e \sin n(t - t_0) + R, \\ L_1 &= n(t_1 - t_0) + \varpi + 2e \sin n(t_1 - t_0) + R_1; \end{aligned}$$

en retranchant membre à membre, on élimine ϖ , et l'on a :

$$\begin{aligned} L_1 - L &= n(t_1 - t) + 2e \sin nt_0 (\cos nt_1 - \cos nt) \\ &\quad - 2e \cos nt_0 (\sin nt_1 - \sin nt) + R_1 - R; \end{aligned}$$

cette équation ne contient que deux inconnues : $e \sin nt_0$ et $e \cos nt_0$; en formant, au moyen d'une troisième observation de longitude à l'époque t_2 , une seconde équation analogue, on pourra déterminer ces deux inconnues, et par suite e et t_0 ; l'une quelconque des observations, prise isolément, donnera ensuite ϖ .

L'excentricité e est environ $\frac{1}{60}$; l'époque t_0 du passage au périhélie est voisine du 1^{er} janvier; la longitude du périhélie est à peu près 280° . (= $12^h 51^m 50^s$)

On peut calculer e d'une autre façon (indépendamment des méthodes fournies par la mécanique céleste) : la différence $v - \zeta$, qui porte le nom *d'équation du centre*, est positive quand ζ est compris entre 0 et 180° ; en effet, de l'équation de Képler (5), il résulte qu'on a $u > \zeta$; de la formule (3), $v > u$; d'autre part, cette différence s'annule pour les limites 0 et 180° ; elle passe donc par un maximum dans l'intervalle, et l'on peut déterminer le point de l'ellipse auquel correspond ce maximum en annulant la dérivée; on a :

$$\frac{dv}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{dv}{dt} - n = \frac{K}{r^2} - n.$$

K désignant la constante des aires; on peut ainsi obtenir r , d'où u , v et ζ pour le point correspondant, ces différentes quantités dépendant seulement de e ; le maximum de $v - \zeta$ se développe en série procédant suivant les puissances de e , les deux premiers termes étant

$$2e + \frac{11}{48} e^3;$$

la différence $v - \zeta$ est aussi la différence $L - l$ entre la longitude vraie observée et la longitude moyenne, qu'on peut calculer, si l'on connaît n et les valeurs approchées de τ et t_0 ; en comparant la valeur observée à l'expression théorique, on peut obtenir e par approximations successives.

CHAPITRE VIII

TEMPS

24. Unités de temps. — Nous avons jusqu'à présent appelé jour sidéral l'intervalle qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile au méridien; cette définition est défectueuse, puisque par suite du déplacement de l'équateur, l'ascension droite d'une étoile varie d'un instant à l'autre, cette variation n'étant pas la même pour toutes les étoiles. Pour obtenir une unité qui, sans être tout à fait constante, n'a que des variations pratiquement inappréciables, on nomme jour sidéral l'intervalle compris entre deux passages successifs du point équinoxial γ au méridien d'un lieu.

En toute rigueur, il faudrait considérer l'axe de rotation instantané de la terre, et la rotation instantanée autour de cet axe, qui ne coïncide pas tout à fait avec l'axe de figure de la terre; mais si l'on marquait sur le globe terrestre les extrémités des deux axes, la distance maxima des deux points serait de 60 centimètres; on peut donc admettre que la rotation s'effectue autour de l'axe de figure; d'autre part la théorie indique que la projection de la rotation sur l'axe de figure est constante quand on tient compte des attractions des corps extérieurs. Mais le point γ ne peut être considéré comme fixe sur l'équateur: dans un jour, en considérant l'équateur comme plan de référence, l'écliptique paraît s'être déplacé, et son intersection avec l'équateur a varié; si l'on se borne à la partie principale du phénomène de précession, le point γ se déplace uniformément,

dans le sens rétrograde, de $0'',126$ par jour; la durée du jour sidéral serait ainsi plus courte de $\frac{0'',126}{15} = 0^s,008$, que la durée de la rotation terrestre, et serait constante. Le déplacement du point γ est en réalité plus complexe : la nutation le fait osciller de $18''$ autour de sa position moyenne en 18 ans $\frac{2}{3}$, de sorte que l'écart de $18''$ est atteint au bout d'un peu plus de 9 ans; comme cet écart périodique ne dépasse que très peu une seconde en 9 ans, aucune pendule ne permet de l'apprécier; *a fortiori* la variation du coefficient annuel de précession, correspondant à l'existence d'un terme en t^2 dans l'expression du mouvement de γ , est négligeable, puisque la variation dont il s'agit est, en un an, de $0'',0009$.

L'année tropique est l'intervalle de temps durant lequel la longitude moyenne du soleil, comptée à partir de l'équinoxe vrai, augmente de 360° ; le phénomène de nutation fait osciller la durée ainsi définie de sept minutes environ autour de ce qu'on appelle l'année tropique moyenne; cette durée elle-même n'est pas constante, en raison de l'existence du terme en t^2 dans l'expression du déplacement du point γ . On a convenu de faire débiter l'année tropique au moment où la longitude du soleil est de 280° ; c'est une époque voisine du 1^{er} janvier, mais qui peut s'en éloigner d'un jour ou deux; on la désigne par janvier 0, ou par le millésime de l'année, suivi d'un zéro; la durée de l'année tropique, calculée pour 1900, 0, était de 366,242199 jours sidéraux; elle diminue, en une année, d'une fraction de jour égale à 6×10^{-8} .

L'année sidérale est le temps nécessaire pour que la longitude moyenne du soleil, comptée à partir d'un point fixe γ_0 , de l'écliptique, augmente de 360° ; comme le déplacement du point γ a lieu dans le sens rétro-

grade, cette durée est un peu plus longue que celle de l'année tropique; elle est de $366^d,256$; dans l'étude du mouvement elliptique de la terre, c'est la durée U de l'année sidérale qu'il faut prendre pour calculer le moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{U}$; $U = 365^d,256$

On appelle *jour solaire vrai* l'intervalle de deux passages du soleil au méridien; cet intervalle n'est pas constant, car l'ascension droite du soleil ne varie pas proportionnellement au temps; d'une part la longitude du soleil ne croît pas d'une façon uniforme, puisque l'équation du centre est une fonction périodique du temps; d'un autre côté, à des arcs égaux de l'écliptique ne correspondent pas des angles horaires égaux. Pour obtenir une mesure du temps basée sur le mouvement diurne du soleil, on considère un soleil fictif, appelé *soleil moyen*, qui se déplace sur l'équateur d'une façon uniforme: l'ascension droite du soleil moyen, comptée à partir de l'équinoxe moyen mobile, est égale à la longitude moyenne du soleil, comptée à partir du même point.

Le *jour solaire moyen* est l'intervalle de deux passages consécutifs du soleil moyen au méridien; sa durée est constante, le seul terme qui la modifie un peu étant, dans le déplacement de γ , le terme en t^2 tout à fait négligeable.

Le jour moyen est un peu plus long que le jour sidéral, puisque l'ascension droite du soleil moyen augmente de 360° pendant une année tropique; dans le même temps, le soleil passe une fois de moins au méridien que le point γ , de sorte que le nombre de jours moyens contenu dans une année tropique est $365,2422$. Pour passer d'une durée exprimée en jours et fractions de jours sidéraux à la même durée exprimée en jours moyens, ou inversement, il suffit

d'effectuer une règle de trois. Dans la pratique, on part du fait que :

1 jour moyen égale un jour sidéral, plus 236,5553 secondes sidérales,

1 jour sidéral égale un jour moyen, moins 235,9094 secondes moyennes,

et l'on calcule la correction à ajouter à un nombre donné en fractions de jours moyens pour obtenir le même nombre exprimé en jours sidéraux ou inversement. A la fin de la *Connaissance des Temps*, on trouve des tables donnant ces corrections de minute en minute pour des durées inférieures à 24 heures, et les compléments pour des secondes ou fractions de seconde.

25. Temps sidéral et temps moyen. — On a défini dès le début le temps sidéral, ou l'heure sidérale à un instant donné, comme l'angle horaire du point γ ; de même le temps moyen est l'angle horaire du soleil moyen, le midi moyen, origine du jour moyen, étant l'instant du passage du soleil moyen au méridien; toutefois, en raison de la difficulté pratique de faire commencer le jour à midi, le temps civil est avancé de 12 heures sur le temps ainsi défini, qu'on appelle temps moyen astronomique.

Pour comparer une pendule de temps sidéral à une pendule de temps moyen, il faut d'abord tenir compte du changement d'origine; la *Connaissance des Temps* donne pour chaque jour l'heure sidérale à midi moyen, calculée pour le méridien de Greenwich; cette heure est obtenue par la formule ¹

$$h = 18^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}}.836 + 86401^{\text{s}},84542 t + 9^{\text{s}},315 \frac{t^2}{10^6} + P.$$

Les trois premiers termes représentent l'ascension

1. Andoyer, *Cours d'astronomie*, tome I, 3^e édition, p. 285.

droite du soleil moyen rapportée à l'équinoxe moyen; t est compté en années juliennes de 365^d,25 à partir de 1900, 0; le dernier terme P représente le déplacement du point γ dû à la nutation, qu'il est nécessaire d'ajouter pour rapporter le soleil moyen à l'équinoxe vrai.

L'heure sidérale déterminée par des observations méridiennes d'étoiles fondamentales est une heure *locale*; elle ne peut donc être comparée directement avec l'heure du passage du soleil moyen au méridien de Greenwich, et il faut corriger h pour obtenir l'ascension droite du soleil moyen au moment de son passage au méridien du lieu d'observation; cette correction se fera en changeant t dans la formule précédente, et comme elle ne sera sensible que dans le terme en t , elle sera une constante pour un lieu donné; c'est ainsi que pour Paris, dont la longitude orientale est de 9^m20^s,93, elle sera de $-1^s,53$.

La différence entre l'heure h , marquée par une pendule sidérale et l'heure h ainsi corrigée mesure le temps sidéral écoulé depuis le passage du soleil moyen au méridien; convertie en temps moyen par la règle indiquée plus haut, elle fournit l'heure moyenne *locale* à l'instant considéré.

On sait que, par convention, l'heure légale n'est plus l'heure moyenne locale; on a divisé la surface terrestre en 24 fuseaux horaires, par des méridiens dont les longitudes diffèrent respectivement d'une heure, le premier fuseau étant limité par deux méridiens à trente minutes chacun du méridien de Greenwich; on adopte dans chaque fuseau l'heure du méridien qui passe au milieu, et l'on étend cette règle à un pays tout entier quand ses limites ne sont pas trop extérieures au fuseau. En France, l'heure légale est celle du méridien de Paris, augmentée de 9 minutes 21 secondes.

26. Temps vrai. Equation du temps. — Le temps vrai est l'angle horaire du soleil ; la détermination de cet angle à un instant donné exige le calcul de l'ascension droite du soleil ; on doit d'abord obtenir la longitude L , qui est égale à la longitude moyenne l augmentée de l'équation du centre C ; on aura ensuite l'ascension droite α , en se reportant au triangle γ PS (fig. 27), par la formule

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \cos \omega \operatorname{tg} L.$$

La différence $\alpha - L$ est une fonction périodique de L , et par suite de l ; on l'appelle la *réduction à l'équateur* ρ ; l'ascension droite du soleil est ainsi

$$\alpha = \alpha_m + C + \rho,$$

α_m désignant l'ascension droite du soleil moyen au même instant.

Si t est l'heure sidérale, h l'heure vraie, h_m l'heure moyenne, on a :

$$t = \alpha + h,$$

$$t = \alpha_m + h_m,$$

d'où :

$$(2) \quad h_m - h = \alpha - \alpha_m = C + \rho.$$

La différence $h_m - h$, *exprimée en temps moyen*, a reçu le nom *d'équation du temps*.

La Connaissance des Temps donne pour chaque jour, à midi moyen, l'équation du temps (changée de signe dans les tables) ; elle donne aussi la même quantité pour midi vrai.

La détermination du *midi vrai*, c'est-à-dire de l'instant du passage du soleil au méridien, est un problème important pour la pratique, en particulier pour la discussion des observations méridiennes du soleil ; il s'agit, non plus de calculer α pour une époque donnée, mais de trouver une époque telle que l'on ait $\alpha = t$.

On forme le tableau des valeurs de α pour chaque jour à midi moyen; soit α_0 cette valeur pour un jour déterminé, et soit θ la fraction de jour moyen, positive ou négative, qui, comptée à partir de midi moyen, s'écoule jusqu'au midi vrai; θ est toujours une petite fraction, puisque l'équation du temps reste inférieure à 17 minutes; on peut donc admettre que, pendant cet intervalle, l'ascension droite du soleil varie proportionnellement au temps; l'ascension droite α au moment du passage du soleil au méridien est alors :

$$\alpha = \alpha_0 + \theta \Delta \alpha_0,$$

$\Delta \alpha_0$ désignant la variation de α_0 en un jour, qu'on trouvera dans le tableau calculé. Mais la différence des temps des passages du soleil et du soleil moyen est aussi la différence des temps sidéraux à midi vrai et à midi moyen $\alpha - \alpha_m$; cette différence, convertie en fraction de jour moyen est donc égale à θ ; on a ainsi :

$$\theta = \frac{\alpha - \alpha_m}{86\,400} \frac{N}{N + 1},$$

N étant le nombre (365,2422) de jours moyens contenus dans l'année tropique; d'où deux équations pour calculer θ et α ; θ est l'équation du temps à midi vrai exprimée en fraction de jour.

L'équation du temps varie d'une façon assez compliquée; la figure 29 représente approximativement sa marche au cours d'une année; les valeurs maxima et minima sont les suivantes :

12 février	14 ^m 25 ^s ;
16 mai	— 3 ^m 47 ^s ;
26 juillet	6 ^m 20 ^s ;
3 novembre	— 16 ^m 22 ^s .

On se rend compte du sens de cette variation en par-

tant de la formule (2) et formant des expressions approchées de C et de ϱ ; nous avons vu que C est sensiblement égal à $2e \sin \zeta$, ζ désignant l'anomalie moyenne

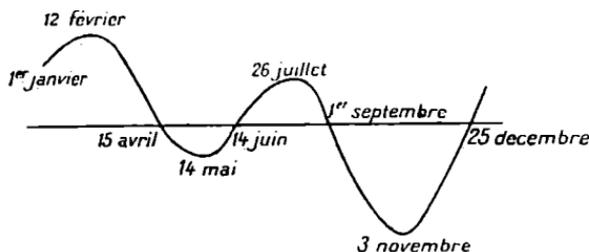


Fig. 29.

du soleil; pour avoir une approximation analogue de ρ , il suffit d'écrire la formule (1) sous la forme

$$\lg \alpha = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \operatorname{tg} L;$$

elle est alors semblable à la formule (3) du § 26 qui relie les anomalies vraie et excentrique, et l'on en déduit

$$\rho = \alpha - L = -\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \sin 2L, \quad \checkmark$$

en laissant de côté des termes qui contiennent en facteur $\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}$; si dans cette expression approchée, on remplace L par l , on trouve, pour valeur approchée de l'équation du temps,

$$-461' \sin \zeta - 592' \sin (2\zeta + 203^\circ, 3);$$

on peut construire la courbe point par point, en prenant la différence des ordonnées des deux sinusoides

$$y = 461' \sin \zeta, \quad y = 592' \sin (2\zeta + 203^\circ, 3).$$

Quand l'équation du temps est positive, midi moyen précède midi vrai; la seconde moitié du jour, mesurée sur le temps moyen local, paraît plus longue que la première; lorsque, comme au début de l'année, l'équation du temps augmente en même temps que la durée de l'éclairement solaire, les jours paraissent augmenter beaucoup plus le soir que le matin; il arrive même que les jours paraissent encore diminuer le matin aussitôt après le solstice d'hiver.

Lorsque l'équation du temps varie peu, ce qui arrive au voisinage de ses maxima ou minima, la durée du jour vrai est sensiblement égale à la durée du jour moyen; au contraire, lorsque la variation de l'équation du temps est maxima, le jour vrai diffère du jour moyen de la plus grande valeur possible; cette différence peut atteindre 30 secondes.

CHAPITRE IX

MOUVEMENT DES PLANÈTES

27. Mouvement apparent des planètes. — On sait qu'il existe huit planètes principales, dont les distances au soleil sont exprimées par les nombres suivants :

Mercure	0,39	Jupiter	5,20
Vénus	0,72	Saturne	9,55
La Terre	1,00	Uranus	19,22
Mars	1,52	Neptune	30,11

En outre, le système solaire comprend des petites planètes et des comètes ; le nombre des petites planètes actuellement connues est voisin de mille ; la plus grande partie d'entre elles sont situées entre Mars et Jupiter ; toutefois l'une d'elles, Eros, se meut entre la Terre et Mars, et quelques-unes, dites troyennes, sont sensiblement à la même distance du soleil que Jupiter.

Si l'on représente sur une sphère la suite des positions apparentes d'une planète, on constate que ces



Fig. 30.

positions restent au voisinage de l'écliptique ; mais la courbe décrite n'est pas simple, au moins dans

certaines régions ; elle forme des boucles ou des sinuosités analogues à celles de la fig. 30, dans laquelle la droite médiane représenterait l'écliptique ; c'est-à-dire qu'à certains moments, la longitude apparente, qui en général est croissante, varie en sens contraire ; on dit

qu'il y a *station*, puis *rétrogradation* du mouvement en longitude.

Le système de Copernic, en admettant que toutes les planètes sont en mouvement par rapport au soleil, permet d'expliquer cette complication apparente; tout d'abord, les écarts en latitude, c'est-à-dire de part et d'autre de l'écliptique, tiennent à ce que la planète se meut dans un plan qui ne coïncide pas avec le plan de l'écliptique. On peut se rendre compte des anomalies en longitude en se bornant au cas où la planète reste dans ce plan; on simplifiera encore, sans trop s'éloigner de la réalité, en supposant que les mouvements héliocentriques de la planète et de la terre sont circulaires.

Soit n le mouvement angulaire de la terre, a sa distance au soleil, n' et a' les mêmes éléments pour la planète; on prendra pour origine du temps t l'instant où les trois astres, planète P, soleil S, terre T sont en ligne droite dans l'ordre PST, et pour axe des x la direction correspondante, qui sera aussi l'origine des longitudes. A un instant t , les coordonnées de la terre par rapport à Sx et à l'axe Sy perpendiculaire seront :

$$a \cos nt, \quad a \sin nt;$$

celles, de la planète,

$$a' \cos (n't + 180^\circ), \quad a' \sin (n't + 180^\circ);$$

les coordonnées de la planète par rapport à deux axes ayant la terre pour origine et parallèles aux premiers seront :

$$-a^2 \cos nt - a' \cos n't, \quad -a \sin nt - a' \sin n't,$$

et la longitude géocentrique L de la planète sera donnée par la formule

$$\operatorname{tg} L = \frac{a \sin nt + a' \sin n't}{a \cos nt + a' \cos n't};$$

un calcul facile permet de trouver la dérivée $\frac{dl}{dt}$; on a :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{na^2 + n'a'^2 + (n + n')aa' \cos(n' - n)t}{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(n' - n)t};$$

le dénominateur est toujours positif, sa plus petite valeur étant $(a - a')^2$; n et n' étant tous deux positifs, le numérateur est une fonction périodique de t qui reste positive pendant plus de la moitié de la période; le mouvement apparent est donc en général direct; il ne peut devenir rétrograde qu'au voisinage des valeurs de t telles que

$$\cos(n' - n)t = -1;$$

la différence des longitudes aura augmenté d'un multiple impair de 180° , c'est-à-dire que les trois astres seront encore en ligne droite avec la disposition SPT ou STP, suivant qu'il s'agit d'une planète inférieure ou supérieure; le mouvement deviendra effectivement rétrograde si l'on a

$$na^2 + n'a'^2 < (n + n')aa';$$

or la troisième loi de Képler rattache les mouvements angulaires et les distances au soleil par les relations

$$n^2a^3 = n'^2a'^3 = k^2;$$

en éliminant n et n' , on arrive à l'inégalité

$$\sqrt{a} + \sqrt{a'} < \frac{a'}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a'}}.$$

qui est vérifiée quelles que soient les valeurs relatives de a et a' .

On s'explique sans calcul que l'élongation d'une planète inférieure, c'est-à-dire la différence de sa longitude géocentrique et de celle du soleil, ne puisse dépasser en valeur absolue une limite égale à la moitié

de l'angle sous lequel l'orbite entière est vue de la terre; au contraire, une planète telle que Mars peut être en *opposition*, en *quadrature*, ou en *conjonction*, termes qui correspondent respectivement aux cas où les longitudes géocentriques de l'astre et du soleil diffèrent de 180° , de 90° , ou sont égales.

28. Lois de Képler. Éléments d'une orbite planétaire. — L'hypothèse d'un mouvement circulaire uniforme de la terre autour du soleil est en contradiction avec le phénomène de l'inégalité des saisons, et les astronomes grecs avaient dû déjà abandonner l'idée de la rotation uniforme du rayon terre-soleil; Copernic, reprenant l'une de leurs hypothèses, supposait que la terre décrit un cercle dont le soleil n'est pas le centre, d'une façon telle que le rayon vecteur joignant la terre à l'équant, point symétrique du soleil par rapport au centre du cercle, ait un mouvement angulaire uniforme; nous ne mentionnons cette loi inexacte et compliquée que parce qu'elle a servi d'approximation à Képler pour former, dans son étude du mouvement de la planète Mars, les positions de la terre par rapport au soleil.

C'est par une longue série de tâtonnements et d'approximations successives que Képler est arrivé à conclure d'abord que l'orbite de Mars est elliptique, puis à énoncer les deux autres lois qui rendent son nom immortel, et l'on ne peut qu'entrevoir les idées qui l'ont guidé: il s'agissait de relier entre elles la longitude héliocentrique

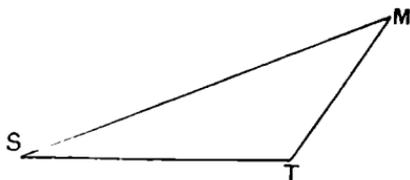


Fig. 31.

de Mars et la longueur du rayon SM (fig. 31). Or la longitude héliocentrique n'est directement connue, pour un observateur terrestre, qu'à l'époque où elle

est égale à la longitude de la terre, c'est-à-dire au moment où Mars se trouve en opposition. D'une opposition à la suivante, la longitude de la terre dépasse celle de Mars de 360° ; l'intervalle correspondant s'appelle la durée de la révolution *synodique*; si n est le moyen mouvement de la terre, n' celui de Mars, et si l'on néglige les excentricités des orbites, on a, pour calculer la durée σ de la révolution synodique :

$$(n - n')\sigma = 360^\circ;$$

les durées des révolutions sidérales étant $\frac{360^\circ}{n}$ et $\frac{360^\circ}{n'}$, on en déduit :

$$\frac{1}{U} - \frac{1}{U'} = \frac{1}{\sigma};$$

les observations donnant σ , on peut calculer U' , puis n' , puis, pour une époque donnée, la longitude héliocentrique qui est égale à celle de la terre au moment de l'opposition, et dont la variation est $n't$ dans le temps t ; on a ainsi une évaluation approchée de la longitude de SM.

Il existe d'ailleurs un moyen différent d'obtenir n' ; il consiste à noter l'instant du passage de la planète dans le plan de l'écliptique; la position correspondante s'appelle un *nœud* de l'orbite, et l'on distingue le nœud ascendant du nœud descendant, le premier correspondant au passage de la planète de l'hémisphère Sud dans l'hémisphère Nord; l'intervalle qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une planète au même nœud est la durée U' de révolution de la planète.

Dans le triangle STM, l'angle en T est donné directement par l'observation; du calcul approché de l'angle en S, qui est la différence des longitudes héliocentriques de Mars et de la terre, Képler déduisait le rapport

$\frac{SM}{ST}$, d'où la loi de variation de SM (dépendante de celle de ST). L'excentricité de l'ellipse décrite par la terre est d'environ 0,017, celle relative à Mars est 0,093; la variation de SM est donc quatre fois plus grande que celle de ST, circonstance évidemment favorable à la découverte des lois du mouvement; les deux premières lois de Képler furent publiées en 1605, la dernière en 1618; elles s'énoncent ainsi :

1° Chaque planète se meut dans un plan passant par le soleil, et décrit une ellipse dont le soleil est un foyer;

2° Les aires balayées par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps employés pour les parcourir;

3° Les carrés des durées U des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes; si l'on introduit les moyens mouvements n , on peut traduire cette loi par la relation $n^2 a^3 = k^2$, k^2 restant constant quand on passe d'une planète à une autre.

Les formules qui permettent de définir le mouvement d'une planète sur son orbite sont, en vertu des deux premières lois, celles qui ont été données plus haut pour l'étude du mouvement annuel de la terre.

La détermination d'une orbite exige la connaissance de six quantités, appelées *éléments* de l'orbite :

θ , longitude du nœud ascendant, et i , inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique, définissent la position du grand cercle qui représente le plan de l'orbite sur la sphère céleste;

l'orientation de l'ellipse dans ce plan est connue par l'angle g que forme la direction du périhélie avec celle du nœud ascendant; cet angle s'appelle *argument de latitude* du périhélie; on introduit plus fréquemment la somme $\theta + g = \varpi$, qu'on appelle *longitude du périhélie*

dans l'orbite: il est à noter que les angles θ et g ne sont pas comptés dans le même plan;

le demi grand axe a et l'excentricité e fixent la forme et la grandeur de l'ellipse; a est toujours évalué en prenant pour unité la distance moyenne de la terre au soleil; la 3^e loi de Képler donne le moyen mouvement

$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$; les 5 éléments précédents déterminent com-

plètement la trajectoire de la planète; il reste à relier une position sur cette trajectoire à l'instant correspondant; on prend souvent pour 6^e élément l'instant t_0 du passage au périhélie; la *longitude moyenne de l'époque* est une constante équivalente: on appelle *longitude dans l'orbite* à un instant donné la somme $\varpi + \nu$ de la longitude du périhélie et de l'anomalie vraie; de même la longitude moyenne l est la somme $\varpi + \zeta$ dans laquelle l'anomalie moyenne ζ remplace l'anomalie vraie ν ; on a $\zeta = n(t - t_0)$; la longitude moyenne ε de l'époque est la longitude l à l'époque $t = 0$; on a donc $\varepsilon = \varpi - nt_0$; quand on prend ε comme 6^e élément, on a, pour calculer ζ , la formule

$$\zeta = nt + \varepsilon - \varpi.$$

29. Éphéméride d'une planète. — Il s'agit maintenant, connaissant les six éléments précédents, de déterminer la direction vers laquelle un observateur terrestre doit diriger sa lunette pour trouver la planète; on publie le calcul de l'ascension droite et de la déclinaison géocentriques, la correction de parallaxe diurne étant ensuite appliquée pour chaque observateur; une suite de positions ainsi formées pour des dates successives constitue ce qu'on appelle une éphéméride de l'astre.

En premier lieu, on calcule l'anomalie moyenne ζ comme il vient d'être expliqué; on en déduit l'anomalie

excentrique u par la résolution de l'équation de Képler, puis l'anomalie vraie v et le rayon vecteur r par les formules

$$\lg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \lg \frac{\mu}{2}, \quad r = a(1 - e \cos u).$$

La longitude dans l'orbite est $\varpi + v$, et la partie de cet angle (ou l'argument de latitude), comprise dans le plan de l'orbite, est $\varpi - \theta + v$; si donc on appelle x, y, z les coordonnées de la planète par rapport aux trois axes rectangulaires qui se rapportent à l'écliptique, l'origine étant au centre du soleil, on a (§ 7, 3^o) :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos (\varpi - \theta + v) - \sin \theta \sin (\varpi - \theta + v) \cos i, \\ y &= r s [\sin \theta \cos (\varpi - \theta + v) + \cos \theta \sin (\varpi - \theta + v) \cos i], \\ z &= r \sin (\varpi - \theta + v) \sin i. \end{aligned}$$

On passe de ces coordonnées aux coordonnées rectangulaires x', y', z' , relatives à l'équateur, par une rotation des axes autour de Sx , d'un angle ω égal à l'obliquité de l'écliptique, cette rotation ayant lieu dans le sens rétrograde; les formules de transformation sont :

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \omega - z \sin \omega, \\ z' &= y \sin \omega + z \cos \omega. \end{aligned}$$

Chacune des expressions ainsi obtenues est une somme de la forme $\alpha \sin (\varpi - \theta + v) + \beta \cos (\varpi - \theta + v)$; en réunissant les deux termes, on a :

$$\begin{aligned} x' &= ar \sin (A + v), \\ y' &= br \sin (B + v), \\ z' &= cr \sin (C + v), \end{aligned}$$

où a, b, c, A, B, C désignent des constantes qui sont calculées une fois pour toutes.

Si l'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées rectangu-

lares de la planète par rapport à des axes ayant pour origine le centre de la terre et parallèles aux axes $Sx'y'z'$, et si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées du soleil par rapport à ces axes, on a :

$$\xi = x' + X, \quad \eta = y' + Y, \quad \zeta = z' + Z.$$

Les coordonnées X, Y, Z sont connues par l'étude du mouvement annuel de la terre ; elles sont fournies de jour en jour par la Connaissance des Temps.

On a enfin, pour calculer l'ascension droite α , la déclinaison δ géocentriques, et la distance ρ au centre de la terre, les formules

$$\xi = \rho \cos \alpha \cos \delta, \quad \eta = \rho \sin \alpha \cos \delta, \quad \zeta = \rho \sin \delta.$$

CHAPITRE X

GRAVITATION

30. La loi de Newton déduite des lois de Képler.
— Les dimensions des divers corps du système solaire étant très petites par rapport aux distances qui les séparent les uns des autres, on pourra, pour étudier les causes de leurs mouvements, les assimiler à des points matériels; ce point de vue est d'ailleurs justifié par le théorème de mécanique qui donne les lois du mouvement du centre de gravité. Une autre approximation, sur laquelle on reviendra plus loin, consiste à admettre que le soleil est fixe.

D'après le principe de l'inertie, chaque planète est soumise à une force; par raison de symétrie, cette force est dirigée dans le plan de l'orbite; prenons dans ce plan deux axes de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le soleil; les équations du mouvement sont

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

x et y étant les coordonnées de la planète, m sa masse, X et Y les projections de la force qui l'anime.

Pour traduire la loi des aires, on exprime que le quotient par dt de l'aire du triangle ayant pour sommet l'origine et pour base la droite qui joint le point x, y au point $x + dx, y + dy$ est constant; on a ainsi :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C,$$

C étant le double de l'aire balayée par le rayon vecteur dans l'unité de temps ; on en déduit :

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

d'où, en tenant compte des équations (1) :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

ce qui montre que la force agissant sur la planète est une force *centrale*, dont la direction passe toujours par le soleil. Cette force est attractive, puisque la concavité de l'ellipse décrite est toujours tournée vers le soleil ; nous supposons que son intensité F dépend seulement de la distance r de la planète au soleil, et non de l'orientation du rayon vecteur dans l'espace ; F est ainsi une fonction de r seulement, comptée positivement de la planète P vers S , de sorte qu'on a :

$$X = -F \frac{x}{r}, \quad Y = -F \frac{y}{r};$$

la combinaison bien connue qui permet d'arriver au théorème des forces vives, formée en ajoutant membre à membre les équations (1) après avoir multiplié les deux membres de la première par dx , ceux de la seconde par dy , donne, en appelant V la vitesse de la planète,

$$(2) \quad d(mV^2) = -2Fdr.$$

Mais, si l'on se reporte à l'étude du mouvement elliptique faite dans le § 26, on a, en choisissant convenablement les axes de coordonnées :

$$x = a \cos u - ae, \quad y = a \sqrt{1 - e^2} \sin u,$$

d'où :

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin u \frac{du}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = a \sqrt{1 - e^2} \cos u \frac{du}{dt},$$

$$V^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2;$$

u est défini en fonction du temps par l'équation de Képler, $u - e \sin u = n (t - t_0)$, qui donne

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos u};$$

on a donc :

$$V^2 = n^2 a^2 \frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u},$$

ou bien, en tenant compte de la formule

$$r = a (1 - e \cos u),$$

qui donne $2a - r = a (1 + e \cos u)$,

$$(3) \quad V^2 = n^2 a^2 \frac{2a - r}{r} = n^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

En portant cette expression dans l'équation (2), on en conclut :

$$(4) \quad F = \frac{mn^2 a^3}{r^2}.$$

D'un point à l'autre de l'orbite, la force qui agit sur la planète varie donc *en raison inverse du carré de la distance au soleil*.

D'autre part, d'après la 3^e loi de Képler, le produit $n^2 a^3$ est une constante k^2 pour les diverses planètes; il résulte de l'expression (4) que la force qui agit sur chaque planète est *proportionnelle à sa masse*.

Il est nécessaire de traiter le problème inverse, c'est-à-dire de chercher la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale d'intensité F égale à $\frac{mk^2}{r^2}$;

l'équation (2), dans laquelle on remplace F par cette expression, s'intègre immédiatement et donne :

$$(5) \quad V^2 = \frac{2k^2}{r} + h,$$

h étant une constante.

On est conduit à introduire, au lieu des coordonnées rectangulaires x et y , des coordonnées polaires, en posant

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

l'expression de la vitesse devient :

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

D'autre part, l'intégrale des aires peut s'écrire

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C;$$

en éliminant dt dans l'expression de V^2 au moyen de cette équation, on trouve facilement :

$$V^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right];$$

si l'on remplace V^2 par cette valeur dans l'équation (5), on a l'équation différentielle de la trajectoire :

$$(6) \quad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2} \left(\frac{2k^2}{r} + h\right),$$

qui s'écrit, en posant $\frac{1}{r} = \rho$,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -\rho^2 + \frac{1}{C^2} (2k^2\rho + h) = -\left(\rho - \frac{k^2}{C^2}\right)^2 + \frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2};$$

on pose encore

$$\rho - \frac{k^2}{C^2} = \sigma \sqrt{\frac{k^4}{C^4} + \frac{h}{C^2}},$$

et l'équation devient :

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}},$$

d'où, θ_0 étant une constante,

$$\theta - \theta_0 = \text{arc cos } \sigma, \quad \sigma = \cos (\theta - \theta_0),$$

et, finalement,

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2}{C^2} + \sqrt{\frac{k^4}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos (\theta - \theta_0).$$

Or on sait que l'équation en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

représente une conique ayant pour foyer l'origine, l'axe polaire étant dirigé vers le sommet le plus rapproché du foyer ; p est le paramètre de la courbe ; si l'on a $e < 1$, la courbe est une ellipse ; $e > 1$, une hyperbole ; $e = 1$, une parabole.

Les deux dernières équations deviennent identiques si l'on définit p et e par les formules

$$p = \frac{C^2}{k^2}, \quad e = p \sqrt{\frac{k^4}{C^4} + \frac{h}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{k^4}};$$

de la dernière, il résulte que le genre de la trajectoire dépend seulement du signe de h ; si h est négatif, la courbe est une ellipse ; si h est nul, une parabole ; h positif, une hyperbole.

h est déterminé, au moyen de l'équation (5), par les conditions initiales, c'est-à-dire que si l'on connaît, à un instant donné t_0 , la distance r_0 de la planète au soleil et sa vitesse V_0 , on a :

$$h = V_0^2 - \frac{2k^2}{r_0}.$$

Cette expression donne lieu à quelques remarques intéressantes :

1^o La valeur de h , et par suite le genre de la trajectoire, ne dépend que de la grandeur de la vitesse V_0 et non de sa direction ;

2^o Quand r_0 est très grand, h est positif, et la trajectoire est une hyperbole ; on en conclut que si un astre pénètre dans le système solaire, il doit en sortir ensuite, à moins qu'une action autre que celle du soleil ne modifie son mouvement ;

3^o Lorsque h est négatif, c'est-à-dire dans le cas du mouvement elliptique, on peut l'exprimer en fonction des éléments de l'orbite ; la constante C des aires est égale au rapport du double de l'aire de l'ellipse à la durée de révolution ; on a donc :

$$C = \frac{2\pi ab}{U} = na^2\sqrt{1-e^2},$$

d'où, en tenant compte de la 3^e loi de Képler,

$$(7) \quad C^2 = k^2 a (1 - e^2);$$

il vient ainsi, en se reportant à l'expression de e :

$$h = -\frac{k^4}{C^2}(1 - e^2) = -\frac{k^2}{a}.$$

et l'on retrouve l'expression de V^2 sous la forme (3) directement obtenue ; on voit que a dépend seulement de la grandeur de la vitesse initiale et non de sa direction ; si une planète faisait explosion de telle façon que les divers fragments eussent la même vitesse, les orbites qu'ils décriraient auraient le même grand axe, par suite, la même durée de révolution ; ils reviendraient en même temps au lieu de l'explosion.

Lorsqu'on a calculé a par l'équation des forces vives, on est en mesure de construire l'orbite elliptique d'une

planète P dont on connaît la position et la vitesse initiales : le plan de l'orbite sera déterminé par le soleil S et la vitesse initiale ; si l'on prend le symétrique S' du point S par rapport à la direction de la vitesse initiale, ce point appartient au cercle directeur de l'ellipse qui a pour centre le second foyer F ; on obtient ce second foyer F en joignant S'P et portant sur cette direction, à partir de S', une longueur égale à $2a$.

Nous admettrons, sans faire le calcul explicitement, que si l'on connaît, à un instant donné, les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la planète par rapport à 3 axes rectangulaires, et les dérivées $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$, on sait calculer les six éléments de l'orbite.

31. Extension de la loi de Newton : Gravitation universelle. — On connaît 15 comètes périodiques dont le retour a été observé, qui décrivent des ellipses suivant les 3 lois de Képler ; la loi d'attraction de Newton s'étend d'elle-même à ces astres.

Pour la plus grande partie des comètes, l'orbite, tout en étant elliptique, a un grand axe considérable, de sorte qu'on ne peut suivre l'astre que dans une portion restreinte de sa trajectoire ; la détermination du grand axe et celle du moyen mouvement sont incertaines ; on assimile le mouvement à un mouvement parabolique. Il faut alors modifier l'énoncé de la 3^e loi de Képler pour en trouver une vérification : on se sert de la formule (7) du paragraphe précédent, qui exprime la constante C des aires sous la forme $k\sqrt{p}$, p étant le paramètre de l'orbite, et qui garde un sens quand la courbe devient une parabole ; pour les différentes orbites paraboliques, on vérifie que l'aire balayée par le rayon vecteur pendant l'unité de temps est proportionnelle à la racine carrée du paramètre.

Les mouvements des satellites autour des planètes

obéissent d'une façon très approchée aux deux premières lois de Képler; Mercure et Vénus n'ont point de satellites; la terre en a un : la lune; Mars, 2; Jupiter, 9; Saturne, 10 (en dehors de son anneau); Uranus, 4; Neptune, 1. La 3^e loi étant vérifiée pour le cas où il y a plusieurs satellites, on doit admettre que la planète attire chacun de ses satellites proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de la distance.

La 3^e loi de Képler n'a pas de sens quand il n'y a qu'un satellite, tel que la lune; on n'ignore pas cependant que Newton s'est basé sur le mouvement de la lune pour énoncer sa loi d'attraction; c'est qu'il avait admis que la pesanteur, qui s'exerce sur les corps placés à la surface de la terre, est de même nature que la force exercée par la terre sur la lune, c'est-à-dire s'exprime suivant la même loi; de sorte que le rapport du nombre g , qui mesure la force exercée sur l'unité de masse à la surface terrestre, à l'attraction exercée sur l'unité de masse de la lune, doit être égal au carré du rapport de la distance terre-lune au rayon de la terre. La formule (4) du paragraphe précédent donne pour l'expression de la force agissant sur l'unité de masse à la distance r :

$$F = \frac{n^2 a^5}{r^2};$$

n et a sont le moyen mouvement de la lune et sa distance à la terre; on négligera ici l'excentricité de l'orbite lunaire, ce qui revient à prendre $r = a$, et l'on prendra $a = 60\rho$, ρ étant le rayon de la terre; on doit donc avoir :

$$g = 60^2 n^2 a = 60^3 n^2 \rho;$$

la durée U de la révolution de la lune autour de la terre est 27 jours 7 h. 43 m.; on doit la convertir en secondes pour avoir la même unité que dans la mesure de g ;

de même, on mesurera ρ en mètres, de façon que $2\pi\rho = 4 \times 10^7$; on trouve ainsi, en remplaçant n par $\frac{2\pi}{U}$,

$$g = \frac{60 \times 2\pi \times 4 \times 10^7}{(39643)^2},$$

ce qui donne pour g la valeur 9 m. 8, qui n'est pas trop éloignée de la détermination expérimentale. On remarquera que ce calcul suppose connu le rayon de la terre, et l'on s'expliquera que Newton ait été arrêté par une évaluation erronée de ce rayon : il prit d'abord pour mesure d'une minute d'arc à la surface de la terre le mille anglais de 1609 mètres; ce n'est que lorsqu'il connut la détermination, faite par Picard, de la longueur d'un degré du méridien, qu'il attribua à la minute la valeur du mille marin de 1852 mètres, assez voisine de la valeur réelle, et qu'il put conclure à l'identité de la pesanteur et de l'attraction de la lune.

D'après ce qui précède, le soleil exerce sur chaque planète une attraction qui se représente par $\frac{mk^2}{r^2}$, et la planète exerce sur chacun de ses satellites une force égale à $\frac{m'k'^2}{r'^2}$; d'autre part, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, l'attraction exercée par le soleil sur la planète doit provoquer une réaction égale et de sens contraire; si l'on admet que cette réaction, exercée par la planète, est de la même nature que l'action exercée par celle-ci sur ses satellites, elle s'exprime sous la forme $\frac{Mk'^2}{r'^2}$, où M désigne la masse du soleil; et l'égalité des deux forces donne :

$$mk^2 = Mk'^2,$$

ou

$$\frac{k^2}{M} = \frac{k'^2}{m};$$

pour les diverses planètes, le rapport du coefficient d'attraction k'^2 à la masse m de la planète est ainsi constant, et égal au rapport correspondant pour le soleil; si on le désigne par f , qui devient ainsi une constante du système solaire, on obtient pour l'attraction exercée par un corps de masse m sur un corps de masse m' l'expression $\frac{fmm'}{r^2}$, r étant la distance des deux corps.

Newton a enfin étendu cette loi à toutes les particules matérielles, qui s'attirent ainsi deux à deux; cette extension paraît compliquer d'une façon considérable l'étude du mouvement des corps du système solaire, puisqu'il faut tenir compte d'une infinité de forces d'attraction; mais le problème se simplifie, comme Newton lui même l'a montré : d'une part, la résultante des attractions exercées par les différentes particules d'un corps sur un point matériel extérieur est, si le corps attirant est sphérique et homogène, rigoureusement la même que celle exercée par un point placé au centre du corps et ayant même masse que ce corps; ce résultat subsiste très approximativement, quelle que soit la forme du corps attirant et sa constitution, si ses dimensions sont très faibles par rapport à la distance au point attiré, le centre du corps étant remplacé par son centre de gravité; d'un autre côté, le théorème du mouvement du centre de gravité permet d'étudier le mouvement d'un tel point en y transportant parallèlement à elles-mêmes les forces extérieures appliquées aux différents points du corps considéré. On est ainsi ramené à l'étude du mouvement d'un nombre fini de points matériels qui s'attirent deux à deux suivant la loi de Newton.

32. Equations du mouvement relatif; masses des planètes qui ont des satellites. — Le soleil ne peut

plus être considéré comme fixe, puisqu'il est attiré par chacune des planètes; d'un autre côté, les observations ne fournissent que des mouvements par rapport au soleil; il est donc nécessaire de former les équations de ces mouvements relatifs.

Nous admettrons que l'on puisse imaginer trois axes rectangulaires, d'origine et de directions fixes, par rapport auxquels les mouvements du soleil et des planètes sont *absolus*; nous ne considérons que le système formé par le soleil et deux autres corps (réduits à des points matériels); cette limitation permettra de simplifier l'écriture sans rien omettre d'essentiel; nous indiquerons d'ailleurs, chemin faisant, les termes complémentaires qu'il conviendrait d'ajouter aux équations pour tenir compte des autres corps du système solaire.

Désignons par x_0, y_0, z_0, M , les coordonnées et la masse du soleil S, et par $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, les coordonnées des deux autres corps, que nous supposons d'abord deux planètes P et P', de masses m et m' ; soient r et r' les distances PS et P'S au soleil, Δ la distance PP'.

Les forces qui agissent sur le soleil sont : l'attraction de la planète P, égale à $\frac{fMm}{r^2}$, dont les projections sur les axes sont :

$$fMm \frac{x_1 - x_0}{r^3}, \quad fMm \frac{y_1 - y_0}{r^3}, \quad fMm \frac{z_1 - z_0}{r^3};$$

et l'attraction de la planète P', dont les projections se calculent de la même façon; on a donc comme première équation du mouvement absolu du soleil :

$$(1) \quad \frac{d^2x_0}{dt^2} = fm \frac{x_1 - x_0}{r^3} + fm' \frac{x_2 - x_0}{r'^3};$$

nous n'écrivons pas, pour simplifier, les équations relatives aux autres axes de coordonnées, qui s'obtiennent en remplaçant x par y ou z avec le même indice.

De même, la planète P est soumise à l'attraction du soleil et de P'; cette dernière, à l'attraction de S et P; les premières équations du mouvement de ces planètes sont donc :

$$(2) \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = fM \frac{x_0 - x_1}{r^3} + fm' \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3};$$

$$(3) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = fM \frac{x_0 - x_2}{r'^3} + fm \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3}.$$

Par rapport à des axes parallèles aux axes fixes, ayant le soleil pour origine, les coordonnées x, y, z de P et x', y', z' de P' sont données par

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x, & y_1 &= y_0 + y, & z_1 &= z_0 + z, \\ x_2 &= x_0 + x', & y_2 &= y_0 + y', & z_2 &= z_0 + z'. \end{aligned}$$

On en déduit facilement les équations qui définissent ces coordonnées *relatives*; en retranchant membre à membre l'équation (1) de l'équation (2), on trouve :

$$(4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + f(M + m) \frac{x}{r^3} = fm' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right).$$

On aurait de même :

$$(5) \quad \frac{d^2x'}{dt^2} + f(M + m') \frac{x'}{r'^3} = fm \left(\frac{x - x'}{\Delta^3} - \frac{x}{r^3} \right).$$

Les équations des types (4) et (5) constituent, en comptant celles qui sont relatives aux autres axes de coordonnées, un système de six équations différentielles du second ordre; on ne connaît que 4 intégrales de ce système, et l'intégration ne peut se faire qu'au moyen de développements en séries.

Il arrive que les seconds membres des équations (4) ou (5) restent très petits : les dénominateurs des divers termes restent finis, car les planètes ne s'approchent jamais très près les unes des autres, ni du soleil; d'autre

part, les coefficients m et m' sont très petits vis à vis de ceux qui leur correspondent dans les premiers membres, puisque la masse de Jupiter, de beaucoup la plus considérable des planètes, est une fraction de la masse M du soleil représentée par $\frac{1}{1047}$ (celle de la terre est environ $\frac{M}{300\,000}$). Si l'on néglige ces seconds membres, les équations du mouvement relatif de la planète P sont :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + f(M + m) \frac{x}{r^3} &= 0, & \frac{d^2y}{dt^2} + f(M + m) \frac{y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + f(M + m) \frac{z}{r^3} &= 0. \end{aligned}$$

Le mouvement relatif est ainsi défini par les mêmes équations que le mouvement absolu d'un point de masse m attiré par l'origine fixe suivant une force d'intensité $\frac{fm(M + m)}{r^2}$; si nous admettons, ce qui pourrait s'établir rigoureusement, que l'orbite est contenue dans le plan défini par la vitesse initiale et l'origine, il est inutile de reprendre l'intégration effectuée précédemment: l'orbite est elliptique, le moyen mouvement et le demi grand axe étant liés par la formule :

$$n^2 a^3 = f(m + M);$$

le deuxième membre n'est plus constant quand on passe d'une planète à une autre; mais il varie très peu, puisque m est toujours très petit vis-à-vis de M . La 3^e loi de Képler n'est ainsi qu'une loi approchée; mais, pour les petites planètes ou les comètes, dont la masse n'est qu'une fraction à peine appréciable de la masse de la terre, on peut pratiquement considérer cette loi comme rigoureuse.

Supposons maintenant que le troisième corps P' , au lieu d'être une planète, soit un satellite de la planète P .

et reprenons le système d'équations (1), (2), (3); on étudiera le mouvement relatif de P' par rapport à P en posant :

$$x_2 = x_1 + \xi, \quad y_2 = y_1 + \eta, \quad z_2 = z_1 + \zeta,$$

et la première équation du mouvement sera :

$$(6) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + f(m + m') \frac{\xi}{\Delta^3} = fM \left(\frac{x_0 - x_2}{r^3} - \frac{x_0 - x_1}{r'^3} \right);$$

le coefficient M est très grand, mais la parenthèse qu'il multiplie est très petite; d'une part, les distances r et r' de la planète et de son satellite au soleil sont très grandes par rapport à la distance $PP' = \Delta$; de plus, du fait que les points P et P' sont rapprochés, les deux termes de la parenthèse sont sensiblement égaux, et leur différence est très faible; on peut donc, en première approximation, négliger le deuxième membre de (6); on trouve ainsi que le satellite décrit autour de la planète une orbite képlérienne, le moyen mouvement n' et le demi grand axe a' étant liés par l'équation

$$n'^2 a'^3 = f(m + m');$$

si l'on compare à l'expression de la loi de Képler trouvée pour la planète, on a :

$$\frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3} = \frac{m + m'}{M + m} = \frac{m}{M} \frac{1 + \frac{m'}{m}}{1 + \frac{m}{M}};$$

le premier membre de cette relation est connu par les observations; sauf pour la lune, le rapport $\frac{m'}{m}$ est très faible; on peut le négliger en première approximation, et l'on obtient alors une valeur approchée du rapport $\frac{m}{M}$ de la masse de la planète à celle du soleil.

33. Aperçu de la théorie des perturbations. — On passe du mouvement elliptique qui constitue la première approximation du mouvement d'une planète au mouvement dit *troublé* en tenant compte des seconds membres, d'abord négligés, dans l'équation (4) du paragraphe précédent et les équations analogues; ces seconds membres sont respectivement, en ce qui concerne la planète P,

$$fm' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right), \quad fm' \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right), \quad fm' \left(\frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3} \right);$$

si, au lieu de considérer une seule planète *troublante* P', on considérerait toutes les planètes P'', P''', ... les seconds membres seraient des sommes de termes semblables à ceux-ci.

Par définition, ces seconds membres, multipliés par le facteur *m*, sont les projections sur les axes de la force *perturbatrice* qui agit à chaque instant sur la planète P.

Δ désignant la distance PP', on a, en gardant les mêmes notations :

$$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

d'où, en prenant les dérivées partielles par rapport à *x*,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = - \frac{x' - x}{\Delta},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Delta} = - \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{x' - x}{\Delta^3};$$

les trois projections écrites plus haut sont donc les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ d'une fonction R, qui

prend le nom de fonction perturbatrice, et qui est définie par la formule

$$(1) \quad R = fm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right).$$

L'étude du mouvement troublé, ou la théorie des perturbations du mouvement elliptique, est basée sur ce fait que, pendant une période assez longue, la position d'une planète s'écarte peu de celle qu'on calculerait au moyen des lois de Képler; il en résulte qu'on se rendra mieux compte des modifications survenues dans le système solaire, au bout d'un temps assez long, en négligeant les déplacements des planètes dans leur mouvement elliptique, pour s'attacher surtout à la recherche des variations des éléments qui déterminent les ellipses décrites.

Nous avons vu qu'on sait calculer les six éléments d'une orbite elliptique quand on connaît la position et la vitesse de la planète à un instant donné; on appelle éléments *osculateurs* à l'époque t , les éléments ainsi calculés en partant de la position réelle et de la vitesse réelle de la planète à cet instant t ; ce sont ainsi les éléments de l'orbite que continuerait à décrire la planète si, à partir de l'époque t , la force perturbatrice venait à disparaître.

Cherchons à voir comment varient ces éléments quand on passe de l'instant t à l'instant $t + dt$; les vitesses sur l'orbite réelle et sur l'orbite osculatrice étant les mêmes, la position à l'instant $t + dt$ doit être considérée comme unique, qu'il s'agisse du mouvement réel ou du mouvement osculateur; la vitesse à l'instant $t + dt$ s'obtiendra en composant la vitesse V à l'instant t avec un segment Γdt , Γ étant en grandeur et direction l'accélération de la planète; cette accélération n'est pas la même dans les deux cas : dans le mou-

vement elliptique, elle est due uniquement à l'attraction du soleil; dans le mouvement troublé, elle est la somme géométrique de la première, et de la force perturbatrice divisée par la masse m de la planète. Par suite, les éléments déterminés en partant de la position et de la vitesse réelle à l'instant $t + dt$ différeront des précédents, et l'on conçoit qu'à l'aide des formules qui permettent de calculer ces éléments, on puisse déterminer leurs variations dans le temps dt , ou, ce qui revient au même, leurs dérivées $\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \dots$ quand on connaît à chaque instant les projections de la force perturbatrice.

Le raisonnement des fondateurs de la mécanique céleste, Lagrange et Laplace, est peut être plus facile à saisir sous sa forme analytique : les trois équations (4) du paragraphe précédent, qui sont du second ordre, deviennent six équations du premier ordre quand on introduit les projections de la vitesse de la planète

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz}{dt}.$$

On reconnaît facilement que ces équations peuvent s'écrire sous la forme dite *canonique* :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \zeta}, \\ \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z}. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de poser, en partant des équations en question :

$$(3) \quad F = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2} - \frac{f(M+m)}{r} - R = F_0 - R.$$

Lorsque l'on réduit F à F_0 , en négligeant R , on peut intégrer les six équations (2), les constantes introduites

par l'intégration étant les éléments du mouvement elliptique, $a, e, \theta, i, \varpi, \varepsilon$ (§ 32); les coordonnées et les projections de la vitesse sont des fonctions de ces six éléments et du temps t ; on aura, par exemple :

$$(4) \quad \begin{cases} x = f(a, e, \theta, i, \varpi, \varepsilon, t); \\ \xi = \varphi(a, e, \theta, i, \varpi, \varepsilon, t). \end{cases}$$

On peut, supposant formées ces expressions (4), les considérer comme définissant un changement des variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, en de nouvelles variables, $a, e, \theta, i, \varpi, \varepsilon$; les dérivées des anciennes variables s'exprimeront en fonction des nouvelles au moyen des équations de transformation (4); on aura, par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t};$$

de même, on pourra calculer les dérivées partielles de la fonction F par rapport aux nouvelles variables par des formules telles que

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a},$$

et en déduire inversement les expressions des dérivées telles que $\frac{\partial F}{\partial x}$ en fonction des dérivées telles que $\frac{\partial F}{\partial a}, \dots$

En portant ces expressions dans les équations (2), on aura des équations qui définiront $\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \dots$ comme des

fonctions linéaires des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial e}, \dots$

Comme les éléments a, e, \dots doivent être des constantes quand F se réduit à F_0 , les seconds membres de ces équations ne contiendront que les dérivées partielles

$\frac{\partial R}{\partial a}, \frac{\partial R}{\partial e}, \dots$ de la fonction perturbatrice.

Ce calcul peut heureusement être simplifié par l'emploi de théorèmes d'analyse; le résultat peut être mis sous une forme remarquablement simple, employée surtout par Poincaré : si, au lieu des six éléments précédents, on introduit six de leurs combinaisons, savoir

$$(5) \quad L = \sqrt{f(m+M)}\sqrt{a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \\ \Theta = G \cos i, \quad l = nt + \varepsilon - \varpi, \quad g = \varpi - \theta, \quad \theta,$$

l , en particulier, étant l'anomalie moyenne que nous avons représentée jusqu'ici par ζ , les équations (2) transformées s'écrivent :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \theta}; \\ \frac{dl}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial G}, & \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Theta}. \end{cases}$$

On dit que les nouveaux éléments, L , G , Θ , l , g , θ , sont *canoniques*.

Si l'on réduisait F à F_0 , un des éléments canoniques, l , varierait proportionnellement au temps, les autres resteraient constants; donc $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ se réduit à n , et les autres dérivées partielles de F_0 sont nulles. On a donc finalement, en remplaçant F par $F_0 - R$, le système :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \theta}, \\ \frac{dl}{dt} = n - \frac{\partial R}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G}, & \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}. \end{cases}$$

L'intégration ne peut se faire que par des approximations successives. R , lorsqu'on considère toutes les planètes, est une somme de termes de la forme

$$fm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right) = fm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos \psi}{r'^2} \right),$$

où ψ désigne l'angle compris entre les rayons vecteurs r et r' des planètes P et P'; on mettra en évidence la petitesse de R en écrivant $R = \mu R_1$, μ étant un facteur de l'ordre des masses des planètes troublantes, et l'on cherchera à développer chacun des éléments suivant les puissances croissantes de μ ; par exemple, on écrira :

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \dots$$

L_0 est la valeur de L obtenue en faisant $\mu = 0$ dans les équations (7); c'est donc une constante; pour obtenir L_1 , il suffira de remplacer dans $\frac{\partial R}{\partial l}$ les éléments canoniques par leurs valeurs obtenues en première approximation; on n'a donc ainsi que des quadratures à effectuer.

La fonction R (ou R_1), limitée au premier terme écrit, est une fonction périodique des anomalies moyennes l et l' ; car si l'on augmente chacun de ces angles de 360° , les positions des planètes ne changent pas; cette fonction peut se développer en série trigonométrique de la forme

$$(8) \quad \Sigma A \cos (pl + p'l' + h),$$

où p et p' désignent des nombres entiers positifs ou négatifs, h une constante, A une fonction des 10 éléments l, l', Θ, \dots autres que l et l' .

Les dérivées partielles de R par rapport aux divers éléments sont des séries analogues.

Pour effectuer la seconde approximation, on remplacera les éléments par des constantes, sauf l qui sera remplacé par $nt + i_0$ et l' , qui sera de même remplacé par $n't + l'_0$; le terme général de l'une des séries deviendra :

$$A_0 \cos (\nu t + h_1), \quad \text{où} \quad \nu = pn + p'n',$$

h_1 étant une nouvelle constante; l'intégrale indéfinie sera $\frac{A_0}{\nu} \sin(\nu t + h_1)$, c'est-à-dire un terme de même période que le terme de la fonction perturbatrice qui a servi à le calculer; on pourra aussi obtenir des termes en t , par l'intégration des termes constants dans les seconds membres.

Les approximations suivantes conduisent à des calculs semblables; finalement, chacun des éléments s'exprime sous forme d'une série comprenant trois sortes de termes, auxquels on donne le nom d'*inégalités*, savoir:

1° Des termes séculaires en t, t^2, \dots , qui croissent indéfiniment avec le temps;

2° Des termes périodiques, tels que $\frac{A_0}{\nu} \sin(\nu t + h_1)$; nous rappelons que le diviseur ν est introduit par l'intégration; quand il est très petit, le coefficient peut devenir considérable; l'inégalité correspondante est alors à longue période;

3° Des termes périodiques mixtes, de la forme $t^m \cos(\nu t + h)$; les maxima de ces termes augmentent avec le temps, mais leurs valeurs sont tantôt positives, tantôt négatives.

Un théorème important, connu sous le nom de théorème de la stabilité du système solaire, consiste en ce que, si l'on néglige les termes en u^2 , les grands axes des orbites des planètes et les moyens mouvements n'ont pas d'inégalités séculaires.

Il suffit, d'après l'expression (5) de L , de démontrer qu'il en est ainsi pour L ; or, si dans la 1^{re} équation (7), on remplace $\frac{\partial R}{\partial t}$ par le développement calculé au moyen de l'expression (8) de R , c'est-à-dire

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \Sigma A p \sin(pl + p'l + h),$$

on a, pour calculer le terme en μ dans le développement de L, l'équation

$$\frac{dL}{dt} = -\Sigma \Lambda_0 p \sin(\nu t + h_1);$$

on peut, en intégrant, obtenir un terme séculaire en considérant les termes du deuxième membre qui ne contiennent pas t ; de tels termes ne peuvent provenir d'un terme de (8) indépendant de t , puisque, pour ceux-ci, p est nul; ils ne peuvent exister que si l'on a

$$\nu = pn + p'n' = 0;$$

le rapport $\frac{n}{n'}$ des moyens mouvements des 2 planètes serait ainsi un nombre commensurable $\frac{-P'}{P}$; comme cette circonstance ne se rencontre pas dans le système solaire, il n'existe, en deuxième approximation, que des termes périodiques dans le développement de L.

Il arrive, au contraire, que le rapport $\frac{n'}{n}$ étant voisin d'un nombre commensurable, ν devient très petit; ceci se présente pour les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, et une inégalité à longue période prend une importance assez grande.

CHAPITRE XI

ORBITES

34. Détermination d'une orbite d'après les observations ; exposé sommaire de la méthode de Laplace.

— Ce n'est que par une collaboration minutieusement préparée entre divers observatoires qu'on parvient à déterminer la parallaxe d'une planète dont on connaît déjà l'orbite ; quand il s'agit d'un astre nouveau, qui souvent n'est observé au début qu'en un seul point de la terre, les observations indiquent seulement sa direction, et non sa distance. Une observation fournissant deux coordonnées, on conçoit que trois observations soient nécessaires pour déterminer les six éléments de l'orbite. On supposera, négligeant les corrections de parallaxe qu'il est impossible de calculer, que ces observations sont faites au centre de la terre ; elles sont toujours faites à des dates très rapprochées, car il est nécessaire de calculer au plus tôt une orbite approximative d'un astre nouvellement découvert, afin de pouvoir indiquer sa position approchée aux autres observateurs, et de le retrouver si le mauvais temps interrompait la série de ses observations.

Soit μ une fonction des coordonnées observées, qui prend les valeurs μ_1, μ_2, μ_3 quand on y substitue les coordonnées observées aux trois dates t_1, t_2, t_3 ; du fait que les intervalles de temps qui séparent les observations sont faibles, il résulte qu'on peut calculer approximativement la valeur de μ et de ses dérivées première et seconde, μ' et μ'' , par rapport au temps,

pour une époque t intermédiaire entre les trois dates extrêmes d'observation; on a en effet :

$$\mu_1 = \mu + \mu' (t_1 - t) + \mu'' \frac{(t_1 - t)^2}{2} + \dots$$

$$\mu_2 = \mu + \mu' (t_2 - t) + \mu'' \frac{(t_2 - t)^2}{2} + \dots$$

$$\mu_3 = \mu + \mu' (t_3 - t) + \mu'' \frac{(t_3 - t)^2}{2} + \dots$$

les termes non écrits, qui seront négligés, étant du troisième ordre par rapport aux intervalles de temps; on démontre même que si l'on prend t égal à $\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$, le calcul de μ' , μ'' laisse de côté les termes du troisième ordre dans ces équations.

Ceci posé, soient S_x, S_y, S_z les trois axes rectangulaires héliocentriques qui se rapportent à l'écliptique, de sorte que les coordonnées de la terre soient $X, Y, 0$; les coordonnées ξ, η, ζ de l'astre par rapport à des axes parallèles menés par le centre de la terre sont :

$$\xi = \rho \cos \beta \cos \lambda, \quad \eta = \rho \cos \beta \sin \lambda, \quad \zeta = \rho \sin \beta,$$

où ρ désigne la distance inconnue au centre de la terre, λ et β la longitude et la latitude géocentriques, qui se déduisent de l'ascension droite et de la déclinaison observées.

Nous écrirons ces formules :

$$\xi = \mu \sigma, \quad \eta = \nu \sigma, \quad \zeta = \sigma,$$

en posant

$$\rho \sin \beta = \sigma, \quad \mu = \cos \lambda \cotg \beta, \quad \nu = \sin \lambda \cotg \beta;$$

μ et ν sont des fonctions connues des coordonnées observées; nous supposerons que, par application de ce qui précède, on ait calculé μ et ν , et leurs dérivées premières et secondes pour une époque t intermédiaire

entre les observations; à la même époque, on connaîtra, par les tables du mouvement de la terre, les coordonnées X et Y et leurs dérivées X' et Y' . Les coordonnées héliocentriques de l'astre seront :

$$(1) \quad x = X + \mu\sigma, \quad y = Y + \nu\sigma, \quad z = \sigma,$$

et les projections de sa vitesse s'exprimeront par

$$(2) \quad x' = X' + \mu\sigma' + \mu'\sigma, \quad y' = Y' + \nu\sigma' + \nu'\sigma, \quad z' = \sigma'.$$

On connaîtra la position et la vitesse de la planète à l'instant t lorsqu'on aura calculé σ et σ' ; l'orbite sera alors déterminée.

Or, le mouvement de l'astre est défini par les équations :

$$x'' + \frac{k^2 x}{r^3} = 0, \quad y'' + \frac{k^2 y}{r^3} = 0, \quad z'' + \frac{k^2 z}{r^3} = 0,$$

r désignant toujours la distance au soleil; dans ces équations, remplaçons x, y, z par les expressions (1): il vient :

$$(3) \quad \begin{cases} \mu\sigma'' + 2\mu'\sigma' + \mu''\sigma + X'' + \frac{k^2(X + \mu\sigma)}{r^3} = 0, \\ \nu\sigma'' + 2\nu'\sigma' + \nu''\sigma + Y'' + \frac{k^2(Y + \nu\sigma)}{r^3} = 0, \\ \sigma'' + \frac{k^2\sigma}{r^3} = 0. \end{cases}$$

La dernière équation permet d'éliminer σ'' ; X'' et Y'' sont fournis par les équations du mouvement de la terre, qu'on peut écrire, en négligeant la masse de la terre par rapport à celle du soleil,

$$X'' + \frac{k^2 X}{R^3} = 0, \quad Y'' + \frac{k^2 Y}{R^3} = 0,$$

R désignant la distance de la terre au soleil

Les deux premières équations deviennent :

$$(4) \quad \begin{cases} 2\mu'\sigma' + \mu''\sigma + k^2X \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) = 0, \\ 2\nu'\sigma' + \nu''\sigma + k^2Y \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) = 0. \end{cases}$$

En éliminant σ' , et remplaçant σ par $\rho \sin \beta$, on obtient :

$$(5) \quad \rho \sin \beta (\mu''\nu' - \nu''\mu') + k^2 (X\nu' - Y\mu') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) = 0.$$

Cette équation ne suffit pas à déterminer ρ , puisque la distance au soleil r est aussi inconnue ; mais, si l'on considère le triangle ayant pour sommets à l'instant t le soleil S, la terre T et la planète P, les 3 côtés sont $SP = r$, $TP = \rho$, $ST = R$: l'angle $STP = \varphi$, sous lequel on voit de la terre le côté r , est déterminé par l'observation ; on a, dans le triangle :

$$(6) \quad r^2 = \rho^2 - 2\rho R \cos \varphi + R^2,$$

et les deux équations (5) et (6) suffisent théoriquement à calculer ρ et r ; si l'on élimine ρ ou r entre les deux équations, on trouve une équation du 8^e degré. Voici comment on peut voir assez simplement quel est le nombre des solutions acceptables ; on pose d'abord

$$(7) \quad \frac{\rho}{R} = z, \quad \frac{r}{R} = u, \quad \frac{k^2 (X\nu' - Y\mu')}{k^4 \sin \beta (\mu''\nu' - \nu''\mu')} = m ;$$

le système des deux équations devient :

$$(8) \quad z = m \left(1 - \frac{1}{u^3} \right), \\ u^2 = 1 - 2z \cos \varphi + z^2 = (z - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi.$$

Posant encore

$$x = z - \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{(x^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

on a, entre x et y , la relation

$$(9) \quad x + \cos \varphi = m(1 - y),$$

qui, en coordonnées rectangulaires x, y , représente une droite; on est finalement ramené à chercher l'intersection de cette droite avec la courbe

$$(10) \quad y = \frac{1}{(x^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

comme u et z doivent être positifs, on doit avoir :

$$y > 0, \quad x > -\cos \varphi;$$

il suffit donc de tracer la portion de courbe située au-dessus de Ox ; c'est (fig. 32) une courbe en cloche, symétrique par rapport à Ox , qui a deux points d'inflexion,

$$x = \pm \frac{\sin \varphi}{2}.$$

Le point A, de coordonnées $x = -\cos \varphi, y = 1$, est à la fois sur la droite et sur la courbe; à ce point correspond la solution $\varphi = 0$, $r = R$, la planète étant confondue avec la terre; on ne s'étonnera pas de trouver cette solution, puisqu'on a écrit seulement que le mouvement s'opère sous l'action de l'attraction newtonienne.

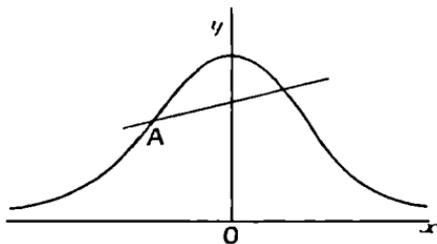


Fig. 32.

Sans effectuer la discussion complète, qui exigerait la considération de 3 cas, selon que A est à gauche des points d'inflexion, entre les 2 points, ou à droite, on voit

immédiatement qu'une droite passant par A ne coupe la courbe qu'en deux points au plus à droite de A; il y a, dans le premier cas, une solution unique lorsque le coefficient angulaire de la droite (9) est plus petit que celui de la tangente en A à la courbe, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$-\frac{1}{m} < 3 \cos \varphi \quad \text{ou} \quad 1 + 3m \cos \varphi < 0;$$

ce résultat subsiste dans les 3 cas.

Pour résoudre approximativement le système des 2 équations, on a construit une table à double entrée, d'arguments z et φ , qui donne :

$$\frac{1}{m} = z \left[1 - \frac{1}{(1 - 2z \cos \varphi + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Lorsqu'on trouve dans cette table, dans la colonne où φ est déterminé, deux fois le nombre $\frac{1}{m}$ calculé d'après les observations, il y a hésitation entre deux valeurs de z ; le choix ne peut être fixé qu'en tenant compte d'une observation supplémentaire.

Quand on aura obtenu φ , et par suite σ , les équations (4) donneront σ' .

35. Comètes; orbites paraboliques; étoiles filantes.

— En dehors de leur aspect physique que nous ne décrirons pas ici, les comètes se distinguent des planètes par la nature de leurs orbites : les ellipses décrites par les planètes ont des excentricités très faibles, et leurs plans sont peu inclinés sur le plan de l'écliptique; tous les mouvements sont directs, c'est-à-dire que les longitudes sont croissantes. Au contraire, les orbites des comètes sont inclinées sur l'écliptique d'angles quelconques; pour beaucoup d'entre elles,

l'inclinaison est plus grande que 90° , de sorte que le mouvement en longitude est rétrograde ; mais surtout les excentricités des orbites sont considérables, au point que, comme nous l'avons dit plus haut, il convient de considérer l'orbite comme parabolique dans un premier calcul. La détermination de la position d'un point qui se meut sur une parabole suivant les lois de Képler est d'ailleurs plus facile que lorsqu'il s'agit du mouvement elliptique ; l'équation en coordonnées polaires d'une parabole rapportée à son foyer et à l'axe de la courbe est

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}},$$

où q désigne la distance du sommet, ou périhélie, au foyer. La 3^e loi de Képler donne :

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{2q};$$

on remplace r par l'expression précédente, en remarquant que $\frac{1}{\cos^2 \frac{v}{2}}$ est égal à $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$, et aussi à la dérivée

de $2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}$; il vient ainsi :

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \frac{d \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{dt} = \frac{k}{\sqrt{2q^{\frac{3}{2}}}},$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne :

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k}{\sqrt{2q^{\frac{3}{2}}}} (t - t_0),$$

t_0 , étant l'époque du passage au périhélie ; cette for-

mule, pour être générale, suppose que l'on compte négativement l'anomalie ν , de $-\pi$ à 0, avant le passage au périhélie.

À une valeur donnée de t , l'équation (1) fait correspondre une seule valeur de ν ; la fonction $\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$, et, par suite, la fonction $\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2}$ est en effet une fonction toujours croissante quand ν varie entre $-\pi$ et $+\pi$; elle croît de $-\infty$ à $+\infty$ et passe une fois et une fois seulement par une valeur donnée. Il en résulte que si l'on a construit une table qui donne les valeurs de $\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2} \right)$ pour des valeurs assez rapprochées de ν , l'inversion de cette table, en partant de la valeur de $\frac{t-t_0}{q^{\frac{3}{2}}}$ calculée, donnera la valeur de ν qui correspond au temps t .

Le calcul d'une éphéméride se poursuivra comme dans le cas du mouvement elliptique. Une orbite parabolique est déterminée par 5 éléments seulement, le paramètre p remplaçant les deux éléments a et e de l'ellipse; on sait d'ailleurs que la parabole peut être considérée comme la limite d'une ellipse lorsque a devient infini, e tendant vers 1, le produit $a(1-e^2)$ gardant une valeur finie. Lorsque, dans l'équation des forces vives [§ 34 (3)], on fait a infini, cette équation devient :

$$V^2 = \frac{k^2}{r};$$

c'est la relation qui doit exister, en particulier à l'instant initial, entre la vitesse et le rayon vecteur pour que l'orbite soit parabolique. On sait encore déterminer l'orbite ayant la position et la vitesse initiales;

la construction indiquée plus haut pour trouver le second foyer de l'ellipse ne s'applique plus, mais se modifie d'elle-même : le symétrique du foyer par rapport à la direction de la vitesse est un point de la directrice ; en joignant ce point à la position initiale, on a la direction de l'axe de la parabole, auquel la directrice est perpendiculaire ; cette construction se traduit aisément en formules.

Se basant sur le résultat signalé en discutant l'équation des forces vives, savoir que l'orbite d'un corps qui pénétrerait dans le système solaire serait en général hyperbolique, la plupart des astronomes admettent que les comètes font partie du système solaire ; pour expliquer que quelques-unes d'entre elles sont périodiques, c'est-à-dire décrivent des ellipses dont les axes sont mesurables, on suppose que les mouvements de ces astres, primitivement presque paraboliques, ont été fortement troublés par leur passage au voisinage d'une grosse planète ; c'est ce qu'on appelle l'hypothèse de la *capture* des comètes. La discussion de cette hypothèse est loin d'être simple : si, lorsque la comète est dans le voisinage immédiat de Jupiter, par exemple, on peut considérer son mouvement comme hyperbolique, il existe d'autre part une zone dans laquelle, l'attraction du soleil et celle de Jupiter étant comparables, la théorie des perturbations ne s'applique pas. Tisserand a donné un critérium qui établit une relation entre les éléments de l'orbite primitive et ceux de l'orbite modifiée par le voisinage de Jupiter ; cette relation se déduit d'une intégrale du *problème restreint*, dans lequel on étudie le mouvement d'un point de masse négligeable, soumis à l'action du soleil et d'une planète qui décrit autour du soleil une orbite circulaire.

Les étoiles filantes sont des corps de masses très faibles, que la terre rencontre dans son mouvement

annuel, et qui, pénétrant dans l'atmosphère avec une vitesse de l'ordre de la vitesse orbitale de la terre, c'est-à-dire de 30 kilomètres à la seconde, s'échauffent et s'enflamment. Ces corps étant invisibles avant leur entrée dans l'atmosphère, la statistique seule permet d'indiquer les lois de leur chute; il est clair que, s'ils sont distribués uniformément, la direction dans laquelle on doit en voir le plus est celle du déplacement de la terre; on néglige le déplacement de l'observateur dû à la rotation terrestre, dont la vitesse est faible vis-à-vis de la vitesse due au mouvement annuel; il en résulte que le moment de la journée où l'observateur verra le plus d'étoiles filantes sera celui où *l'apex*, point du ciel vers lequel la terre se dirige, sera le plus haut possible au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire lorsqu'il sera au méridien. Or la vitesse de la terre peut être considérée comme perpendiculaire à la direction TS, qui joint la terre au soleil, la direction TV précédant de 90° la direction TS dans le sens du mouvement apparent de rotation du ciel; l'apex passe donc approximativement au méridien 6 heures avant le soleil, soit vers 6 heures du matin. Le nombre des étoiles filantes doit donc augmenter de 6 heures du soir à 6 heures du matin; c'est ce que vérifie l'expérience.

On a d'autre part observé, à certaines dates, des pluies d'étoiles filantes, et constaté que ces météores extrêmement nombreux paraissaient venir d'un même point du ciel qu'on a appelé *radiant*. Schiaparelli a montré qu'il y a identité entre les orbites d'essaims de corpuscules dont la rencontre avec la terre a produit certaines de ces pluies et les orbites de comètes périodiques dont le retour prévu n'avait pas été observé; les essaims météoriques seraient ainsi ce qui subsiste des comètes; il peut se faire que les essaims se désagrègent, les corpuscules se distribuant le long de l'or-

bite à peu près commune; il n'y a plus alors de pluie abondante, mais si, chaque année, la terre vient rencontrer le courant de météores, il se produit un accroissement du nombre des étoiles filantes; c'est ainsi que s'explique l'abondance annuelle des étoiles filantes au voisinage du 11 août.

Pour déterminer l'orbite d'un essaim dont on connaît le radiant, on admet qu'au moment de la chute des météores, la position de l'essaim coïncide avec celle de la terre. La grandeur de la vitesse V de l'essaim se trouve déterminée par l'équation des forces vives, soit qu'on suppose son mouvement parabolique, soit qu'on lui attribue une période de révolution déterminée, ce qui, d'après la 3^e loi de Képler, équivaut à fixer le demi grand axe de l'orbite; on a, suivant l'une ou l'autre des hypothèses :

$$(1) \quad V^2 = \frac{2k^2}{R} \quad \text{ou} \quad (3) \quad V^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right);$$

il reste à déterminer la direction de la vitesse V .

Prenons les trois axes de coordonnées écliptiques, et soit u la vitesse relative de l'essaim par rapport à la terre; soient λ et β la longitude et la latitude du radiant; les projections de la vitesse relative, dirigée du radiant vers la terre, sont, u étant positif,

$$-u \cos \beta \cos \lambda, \quad -u \cos \beta \sin \lambda, \quad -u \sin \beta;$$

les projections sur les mêmes axes de la vitesse d'entraînement de la terre sont

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}, \quad 0.$$

On a donc :

$$V^2 = \left(\frac{dX}{dt} - u \cos \beta \cos \lambda \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} - u \cos \beta \sin \lambda \right)^2 + u^2 \sin^2 \beta;$$

si l'on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre, on a d'autre part :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{R}.$$

En substituant l'expression de V^2 dans l'équation (3) par exemple, il vient :

$$u^2 - 2u \cos \beta \left(\frac{dX}{dt} \cos \lambda + \frac{dY}{dt} \sin \lambda\right) - k^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right) = 0;$$

le dernier terme est négatif, car on a toujours $a > R$; l'équation en u a donc une seule racine positive; quand on l'aura calculée, on aura les projections de V , savoir :

$$\frac{dX}{dt} - u \cos \beta \cos \lambda, \quad \frac{dY}{dt} - u \cos \beta \sin \lambda, \quad -u \sin \beta.$$

On sera alors en mesure de calculer les éléments de l'orbite.

36. Étoiles doubles. — Les déplacements relatifs des composantes d'une étoile double sont les seuls qui manifestent l'existence de forces à l'extérieur du système solaire; aussi les seules données que l'on possède sur les masses des étoiles se bornent à celles des étoiles doubles. L'extension de la loi de Newton à ces systèmes ne peut se faire directement, l'observateur ne pouvant mesurer la distance réelle des deux composantes, et ne voyant que la projection sur le plan tangent à la sphère céleste de l'orbite que décrit l'étoile satellite autour de l'étoile principale; la distinction entre les deux astres est d'ailleurs arbitraire, et guidée en général par la considération des magnitudes; les observations se font à l'équatorial, presque toujours par des mesures micrométriques de distances et d'angles de positions (§ 11); on utilise fréquemment la construction graphique de la trajectoire apparente, qu'il faut

tracer avec soin. On constate que cette courbe est toujours une ellipse, l'étoile principale étant à l'intérieur, en un point qui s'écarte plus ou moins du centre : d'autre part, le rayon vecteur issu de cette étoile principale se déplace suivant la deuxième loi de Képler, c'est-à-dire balaye des aires proportionnelles aux temps.

En raison du très grand éloignement des étoiles doubles, les projections des orbites peuvent être considérées comme cylindriques, c'est-à-dire obtenues par des projetantes parallèles entre elles ; la seule affirmation rigoureuse que l'observation permette d'énoncer sur la forme des orbites réelles est que ce sont des courbes tracées sur des cylindres elliptiques ; mais, comme les génératrices de ces cylindres ont des orientations quelconques dans l'espace, il est extrêmement vraisemblable, sinon absolument certain, que ces courbes sont des ellipses. Par contre, le foyer d'une ellipse ne se projetant pas en général au foyer de l'ellipse projetée, et aucun théorème général ne permettant de distinguer la projection du foyer, il n'est pas permis d'affirmer que l'étoile principale est au foyer de l'ellipse décrite.

D'après le théorème qui exprime la projection d'une aire plane, la loi des aires, observée dans l'ellipse apparente, existe également dans l'orbite vraie ; il en résulte que l'étoile satellite est soumise à une force centrale dirigée vers l'étoile principale. Pour déterminer la grandeur de cette force, on est conduit au problème suivant, énoncé par Bertrand : trouver les lois de forces centrales telles que, quelles que soient la position et la vitesse initiales, le mobile décrive une ellipse. Ce problème a été simultanément résolu par deux mathématiciens français, Halphen et Darboux : si l'on suppose que la force ne dépend que de la distance, et non de l'orientation du rayon vecteur, deux lois de forces seulement satisfont à la condition

posée : l'attraction proportionnelle à la distance, et l'attraction newtonienne, inversement proportionnelle au carré de la distance. Sous l'action de la première loi, l'ellipse décrite par le satellite aurait pour centre l'étoile principale; or, la propriété du centre est projective, c'est-à-dire que le centre d'une ellipse se projette au centre de l'ellipse projetée. Comme il n'en est point ainsi dans la nature, on est amené à rejeter la première loi, et à conclure que la loi de Newton s'étend aux étoiles doubles.

On admet, en outre, sans que cette induction ait une base mathématique, que le coefficient f qui figure dans l'expression de la force d'attraction, $\frac{fmm'}{r^2}$, de deux masses m et m' , a la même valeur que dans le système solaire. D'après l'étude faite précédemment du mouvement relatif (§ 36), si l'on appelle n et a le moyen mouvement et le demi grand axe de l'orbite relative décrite par le satellite, on a :

$$(1) \quad n^2 a^3 = f(m + m').$$

On prend comme unité de masse la masse du soleil (augmentée de celle de la terre), comme unités de longueur et de temps, la distance moyenne de la terre au soleil, et l'année sidérale; la 3^e loi de Képler appliquée au mouvement de la terre donne, avec ces unités,

$$f = 4\pi^2;$$

si l'on désigne par U la durée de la révolution de l'étoile satellite, on a $n = \frac{2\pi}{U}$, et la formule (1) s'écrit :

$$\frac{a^3}{U^2} = m + m'.$$

L'observation donne directement U , mais non a ; on

déduit seulement des observations l'angle sous lequel le demi grand axe a est vu, la longueur a étant le produit de cet angle par la distance à l'observateur, ou par l'inverse de la parallaxe de l'étoile, exprimée en secondes comme l'angle précédent. Il faut donc connaître la parallaxe d'un système double pour calculer la somme des masses $m + m'$.

Les deux composantes de l'étoile double décrivent en réalité deux ellipses autour de leur centre de gravité commun, les rayons vecteurs, et par suite les grands axes de ces ellipses étant en rapport inverse de celui des masses des composantes; si donc on peut apprécier le déplacement de l'étoile principale, on aura le rapport $\frac{m'}{m}$; ce déplacement pourrait se déterminer par des comparaisons de l'étoile principale avec des étoiles voisines; mais, en fait, les déterminations peu nombreuses qu'on possède résultent de la discussion des positions absolues fournies par des observations méridiennes.

Voici quelques-unes des données les plus précises qu'on possède sur les étoiles doubles visuelles (Aitken, the Binary Stars, New-York, 1918) :

	M	U	a	ϖ	$m + m'$	$\frac{m'}{m}$
Sirius	— 1,6; 9,0	49,3	7",6	0",38	3,3	0,3
Procyon	0,5; 13,5	39,0	4,1	0,31	1,5	0,3
α Centaure	0,3; 1,7	78,8	17,7	0,76	2,0	0,9
ζ Hercule	3,0; 6,5	34,5	1,4	0,11	1,7	0,4
85 Pégase	5,8; 11,0	26,3	0,8	0,07	2,6	1,0
70 Ophiuchus	4,1; 6,1	87,9	4,6	0,17	2,6	0,8
O ² Eridan	9,4; 10,8	180,0	4,8	0,17	0,6	»
ε Hydre	3,7; 5,2	15,3	0,2	0,03	3,3	»

La première colonne donne les magnitudes des deux composantes; la seconde, les durées de révolution; la troisième, les demi grands axes, et la suivante, les parallaxes ϖ . Il est remarquable que, bien que les

composantes présentent souvent des différences d'éclats considérables, les masses sont très comparables, et de l'ordre de la masse du soleil.

Puisqu'il n'existe pas, pour les étoiles doubles, de relation analogue à celle qui résulte de la 3^e loi de Képler entre n et a dans le système solaire, la détermination de l'orbite exige la connaissance de sept éléments, savoir :

Cinq éléments géométriques : la longitude θ du nœud et l'inclinaison i sur le plan de l'orbite apparente, qui fixent la position du plan de l'orbite vraie ; l'angle g formé par la ligne des nœuds et la direction du périastre, qui oriente l'orbite dans ce plan ; le demi grand axe a et l'excentricité e , a étant provisoirement évalué en secondes d'arc, comme les distances angulaires mesurées ; et deux éléments dynamiques, la durée U de la révolution, ou le moyen mouvement sur l'orbite, $n = \frac{2\pi}{U}$, et l'époque t_0 du passage au périastre.

Lorsque les observations s'étendent à une révolution complète, on a U directement ; quand elles ne se rapportent qu'à une portion de l'orbite, on détermine la constante des aires en mesurant, sur le graphique qui représente l'ellipse apparente, l'aire comprise entre deux rayons vecteurs et l'arc d'ellipse, puis prenant le rapport à l'intervalle de temps correspondant ; ce rapport est égal à celui de l'aire totale de l'ellipse, qu'on sait évaluer avec les mêmes unités, à la durée U . Pour obtenir t_0 , après avoir déterminé la direction du périastre comme nous allons le voir, on choisira des observations au voisinage de ce point, et on déterminera par interpolation l'instant du passage.

Supposons maintenant tracée l'ellipse apparente (fig. 33) ; soit A l'étoile principale, et soit C l'intersection de la droite OA, qui part du centre O de la courbe,

avec l'ellipse; la droite OC est la projection d'un demi grand axe de l'orbite vraie, C étant la projection du périastre, et O la projection du centre; le rapport $\frac{OA}{OC}$ est égal au rapport des distances correspondantes dans l'orbite vraie; on a donc :

$$\frac{OA}{OC} = e :$$

menons le diamètre OD, conjugué de OC dans l'ellipse apparente; cette droite est la projection du petit axe de l'ellipse vraie; imaginons alors que dans le plan de l'ellipse vraie on ait tracé le cercle principal, c'est-à-dire le cercle ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse; on sait que les ordonnées de ce cercle, perpendiculaires au grand axe, sont dans un rapport constant avec les ordonnées correspondantes de l'ellipse; si nous projetons le cercle principal sur le plan de l'ellipse apparente, nous obtiendrons donc une ellipse dont les ordonnées, comptées à partir de OC sur des parallèles à OD, se déduisent de celles de l'ellipse en les multipliant par le rapport $\frac{a}{b}$ des axes de l'ellipse vraie; ce

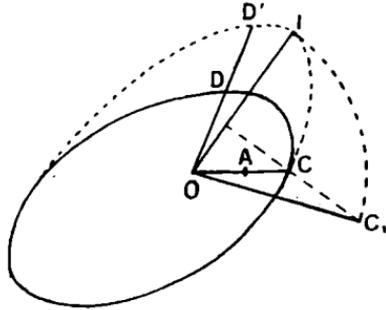


Fig. 33.

rapport, égal à $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, est connu lorsqu'on a obtenu e , et l'on peut construire l'ellipse dite *auxiliaire*, dont nous n'avons représenté que la moitié.

Dans l'ellipse auxiliaire, tangente en C à l'ellipse

apparente, les directions OC et OD sont encore conjuguées; si b' est le demi-diamètre OD, on aura $OD' = \frac{b'}{\sqrt{1-e^2}}$; on sait construire les axes de cette ellipse : sur la normale en C aux deux ellipses, on porte, de part et d'autre, la longueur $\frac{b'}{\sqrt{1-e^2}}$; par les deux points obtenus et le point O on fait passer une circonférence qui coupe la tangente en C en deux points respectivement situés sur les axes de l'ellipse; les longueurs de ces axes peuvent se calculer à l'aide des théorèmes d'Appollonius.

Ces axes déterminés, on trouve facilement les quatre éléments géométriques de l'orbite autres que e : le seul diamètre du cercle principal qui se projette en vraie grandeur est celui qui est parallèle au plan de projection; par conséquent la ligne des nœuds, qui passe par A, est parallèle au grand axe de l'ellipse auxiliaire, et le grand axe de l'ellipse vraie est égal à celui de l'ellipse auxiliaire; on a ainsi les deux éléments θ et a ;

2^o La ligne de pente de l'orbite, perpendiculaire à la ligne des nœuds, se projette suivant une parallèle au petit axe de l'ellipse auxiliaire; si β est le petit axe de l'ellipse auxiliaire, on a :

$$\cos i = \frac{\beta}{a};$$

on remarquera que le sens i de l'inclinaison n'est point déterminé; comme deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de projection se projettent suivant la même courbe, les seules observations visuelles ne permettent pas de donner un signe à i ;

3^o L'angle g , formé par la direction du périastre et de la ligne des nœuds, est aussi l'angle qui se projette suivant COI, OI étant le grand axe de l'ellipse auxi-

liaire; si l'on rabat sur un plan parallèle au plan de projection passant par O , le point C viendra en C' à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de C sur OI et du cercle de rayon OI , et l'on aura $g = C'OI$.

Il existe des étoiles doubles dont la connaissance et l'étude reposent sur des mesures spectroscopiques ou photométriques; nous n'en parlerons pas, puisqu'un volume de cette collection est consacré à l'astrophysique.

CHAPITRE XII

LA LUNE

37. Mouvement de la lune. — Nous avons formé plus haut (§ 36) les équations du mouvement d'un satellite autour de la planète principale en tenant compte de l'action perturbatrice du soleil; le calcul peut se traduire de la façon suivante, m' , m et M étant les masses respectives du satellite, de la planète et du soleil : le satellite, dans son mouvement relatif, est soumis à une force principale, dirigée vers la planète, et mesurée par $f \frac{m' (m + m')}{\Delta^2}$, et à une force perturbatrice qui est la différence géométrique des attractions exercées par le soleil sur deux points de masse m' coïncidant respectivement avec le satellite et la planète. Il est nécessaire de se rendre compte de l'importance de la force perturbatrice par rapport à la force principale; or, d'après la définition précédente, la force perturbatrice sera maxima lorsque les deux composantes dont elle est la différence auront la même direction, c'est-à-dire lorsque les trois corps seront en ligne droite; soient a et a' les distances de la terre à la lune et au soleil; le rapport de la force perturbatrice à la force principale sera :

$$\frac{M \left[\frac{1}{(a' - a)^2} - \frac{1}{a'^2} \right]}{\frac{m + m'}{a^2}} = \frac{M}{m + m'} \frac{a^2 a (2a' - a)}{a'^2 (a' - a)^2};$$

mais, n et n' étant les moyens mouvements de la lune et de la terre, on a :

$$\frac{M}{m + m'} = \frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3},$$

et le rapport précédent est environ $2 \left(\frac{n'}{n}\right)^2$; or $\frac{n'}{n}$ est approximativement $\frac{1}{13}$; la force perturbatrice est donc nettement plus petite que la force principale, mais elle est relativement beaucoup plus importante que lorsqu'il s'agit du mouvement d'une planète.

Aussi les variations de quelques-uns des éléments de l'ellipse que la lune, en première approximation, décrit autour de la terre sont-elles considérables :

L'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique a pour valeur moyenne $5^{\circ}9'$ et varie entre $5^{\circ}0'$ et $5^{\circ}18'$;

Le demi grand axe a est en moyenne égal à $60,3$ rayons terrestres; l'excentricité est faible, environ $0,055$; la durée de révolution est de $27^{\text{d}}7^{\text{h}}43^{\text{m}}$ environ;

La longitude du nœud ascendant varie rapidement avec le temps : le nœud se déplace dans le sens rétrograde, d'un mouvement à peu près uniforme, et fait un tour complet en $18 \text{ ans } \frac{2}{3}$ environ; ceci représente un déplacement de près de 20° par an, soit de plus de 1° pendant une révolution de la lune, qui, après une lunaison, ne revient donc pas au même point de l'écliptique. Le déplacement du périhélie est encore plus rapide; il accomplit, dans le sens direct, un tour complet en un peu moins de 9 ans.

La théorie de la lune présente de grandes difficultés, en raison justement de l'importance de la fonction perturbatrice; elle a fait l'objet de nombreux travaux, et l'on possède des tables et des formules analytiques qui donnent, non seulement les éléments du mouvement

elliptique, mais directement la longitude, la latitude et le rayon vecteur de la lune, ce dernier étant en général remplacé par la parallaxe équatoriale. La latitude et la parallaxe ne subissent que des variations périodiques; la valeur moyenne de la parallaxe, qu'on appelle *constante de la parallaxe lunaire*, est $\tau_0 = 57'2''70$; r_0 étant la distance moyenne de la terre au soleil, exprimée en prenant comme unité le rayon équatorial terrestre a , on a : $\sin \tau_0 = \frac{a}{r_0} = 57'2''54$, valeur un peu différente de τ_0 ; la parallaxe τ varie entre $52'$ et $62'$.

L'expression de la longitude λ contient des termes séculaires et des termes périodiques; on a, l'époque initiale étant 1900,0 (Andoyer, cours d'astronomie) :

$$\lambda = 270^{\circ}26'11'',71 + (13 \times 360^{\circ} + 477644'',0606) t \\ + 7''14 \left(\frac{t}{100} \right)^2 + 0'',0068 \left(\frac{t}{100} \right)^3 + P,$$

t étant évalué en années; le coefficient $7'',14$ du terme en $\left(\frac{t}{100} \right)^2$ s'appelle l'*accélération séculaire* de la longitude; les termes périodiques qui forment P sont nombreux; quelques-uns d'entre eux, qui ont des coefficients élevés, ont conservé d'anciennes dénominations; ce sont :

L'équation du centre, $6^{\circ}17' \sin (\lambda - \sigma)$, où σ désigne la longitude du périégée;

L'évection, $1^{\circ}16' \sin (\lambda - 2\lambda' + \sigma)$, λ' étant la longitude du soleil;

La variation, $39',5 \sin 2 (\lambda - \lambda')$;

L'équation annuelle, $- 11' \sin (\lambda' - \sigma')$, où σ' représente la longitude du périégée solaire.

On appelle révolution *tropicque* de la lune le temps nécessaire pour que la longitude moyenne, c'est-à-dire la longitude diminuée des termes périodiques, augmente

de 360° ; l'origine des longitudes est l'équinoxe vrai; si on compte la longitude à partir d'un équinoxe fixe, l'intervalle correspondant à un accroissement de 360° s'appelle la révolution *sidérale*, et ne diffère que de quelques secondes de la durée précédente, la durée commune étant de $27^j 7^h 43^m$.

La révolution *synodique* est l'intervalle pendant lequel la différence entre les longitudes de la lune et du soleil s'accroît de 360° ; à la fin de la période, les deux corps apparaissent dans la même position relative qu'au début; sa durée, calculée comme nous l'avons vu plus haut, est de $29^j 12^h 44^m$.

On distingue encore la révolution *anomalistique*, intervalle de deux passages au périégée, et la révolution *draconitique*, intervalle de deux passages au nœud ascendant; leurs durées approximatives sont de $27^j 13^h$ et $27^j 5^h$.

38. Phases. Rotation. — On sait que la lune n'est pas lumineuse par elle-même, et que nous n'apercevons de sa surface que la partie éclairée par le soleil; au moment de la pleine lune, le disque lunaire est circulaire, aucun aplatissement n'ayant été décelé, ni par des mesures micrométriques directes, ni sur des photographies (1), et le bord extérieur de la lune reste toujours circulaire. Prenons comme plan du tableau (fig. 34), le plan qui contient les centres S, T, L des trois astres; le cône circonscrit à la lune qui a pour sommet le soleil S pouvant être remplacé par un cylindre, la partie éclairée de la lune sera limitée en projection par le diamètre AA₁ perpendiculaire à la direction LS;

1, On n'est pas autorisé à en conclure que la lune est sphérique; Laplace pensait, au contraire, qu'elle a la forme d'un ellipsoïde de révolution dont le grand axe est tourné vers la terre; la théorie de la rotation de la lune est plutôt contraire à cette hypothèse, et indique la presque sphéricité du satellite.

la partie visible de la terre est le fuseau qui se projette suivant ALB , dont la projection sur un plan perpendiculaire est limitée par le bord $CB'D$ et la demi-ellipse $CA'D$

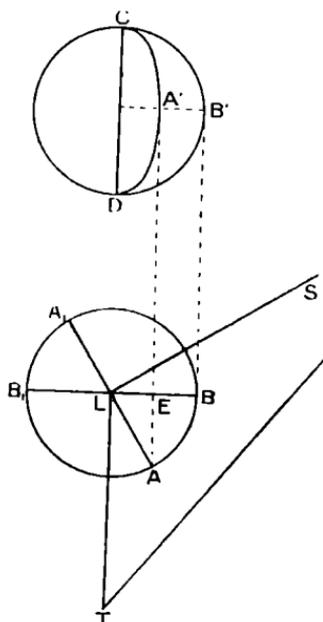


Fig. 34.

projection du demi grand cercle LA ; le rapport de $A'B'$ au diamètre représente, par définition, la grandeur de la phase; c'est aussi le rapport de la surface visible à la surface entière de la lune; on l'évaluait autrefois en *doigts*, c'est-à-dire en douzièmes; on a :

$$A'B' = BE = LA(1 - \cos ALB);$$

d'où, comme les angles TLS et ALB sont supplémentaires, on tire, pour la grandeur de la phase :

$$\frac{A'B'}{2LA} = \cos^2 TLS;$$

il est facile d'évaluer l'angle TLS ; λ et β étant la longitude et la latitude géocentriques de la lune, les cosinus directeurs de la direction TL par rapport aux axes écliptiques sont $\cos \lambda \cos \beta$, $\sin \lambda \cos \beta$ et $\sin \beta$; ceux de la direction TS qui va au soleil sont, λ' étant la longitude du soleil, $\cos \lambda'$, $\sin \lambda'$, 0; l'angle en T du triangle STL est donc déterminé par la relation

$$\cos T = \cos \beta \cos (\lambda' - \lambda);$$

on a ensuite :

$$\operatorname{tg} TLS = \frac{r' \sin T}{r - r' \cos T},$$

r et r' désignant les distances TL et TS .

La variation de la phase se suit aisément au cours d'une lunaison ; lorsque la lune est entre la terre et le soleil, on dit qu'elle est en conjonction, ou en *sizygie* inférieure ; la lune est nouvelle, et l'observateur terrestre ne la voit pas ; elle est en quadrature quand la différence des longitudes de la lune et du soleil est de 90° ou 270° ; en opposition ou en *sizygie* supérieure, quand cette différence est de 180° , ce qui correspond à la pleine lune.

La lune tourne toujours à peu près la même face vers la terre ; ce fait résulte de l'observation directe, qui permet de situer à égale distance du bord des cratères caractéristiques qui se distinguent à la surface ; on en conclut que la lune accomplit une rotation qui a la même durée que sa révolution autour de la terre. Une observation plus attentive montre que l'axe de rotation de la lune n'est pas exactement perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire ; si l'on représente (fig. 35) les axes $O\pi$ et OP perpendiculaires à l'écliptique et au plan de l'orbite lunaire, et l'axe OR de rotation de la lune, il résulte des observations de Cassini, confirmées par la théorie, que ces trois axes restent dans un même plan, leur disposition relative étant celle de la figure ; nous avons vu précédemment que l'axe OP de l'orbite lunaire n'a pas une inclinaison constante sur $O\pi$; sa position moyenne tourne autour de $O\pi$ en $18\frac{2}{3}$ ans, tandis que l'axe vrai décrit autour de celle-ci, en 173 jours, un petit cône dont l'ouverture est de $9'$. L'axe de rotation OR de la lune tourne aussi autour de $O\pi$; son inclinaison sur

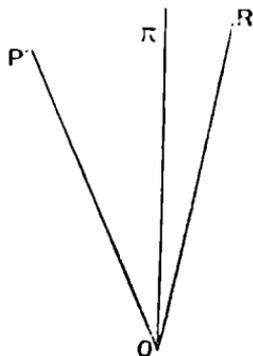


Fig. 35.

$O\pi$ reste à peu près constante, environ $1^{\circ}31'$; la vitesse de rotation autour de OR reste sensiblement constante, mais ne coïncide qu'en moyenne avec la vitesse angulaire de révolution de la lune; il y a ainsi oscillation apparente de la limite de la partie visible de la lune; c'est ce qui constitue le phénomène de *libration vraie*, qu'on décompose en libration de longitude et libration de latitude. D'un autre côté, le déplacement diurne de l'observateur entraîné par la rotation terrestre lui fait apercevoir des limites variables sur le disque lunaire et donne lieu à une libration appelée diurne ou apparente.

39. Parallaxe de la lune. — La première détermination précise que l'on ait obtenue de la parallaxe lunaire est celle qui a été déduite d'observations méridiennes effectuées simultanément, de 1751 à 1753, au Cap de Bonne Espérance, à Greenwich, Paris, Bologne et Berlin; cette collaboration de divers observatoires s'est souvent renouvelée, et la même méthode a été appliquée pour l'évaluation de la parallaxe de petites planètes.

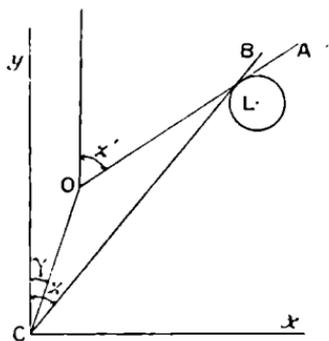


Fig. 36

Traçons, dans un plan qui représente le méridien du lieu O d'une observation, deux axes rectangulaires Cx et Cy ayant leur origine au centre C de la terre, l'axe Cy étant parallèle à la verticale du lieu O (fig. 36). Si l'on tient compte de l'aplatissement de la terre, le point O

ne se trouve pas sur l'axe Cy , et l'angle formé par Cy et CO est la différence γ entre la latitude astronomique et la latitude géocentrique du point C ; les coordonnées

du point O, situé à la distance ρ du centre C, sont :

$$\rho \sin \gamma, \quad \rho \cos \gamma.$$

Soit z' la distance zénithale du bord supérieur de la lune vu du point O, cette distance étant corrigée de la réfraction; l'équation de la tangente OA au bord de la lune est :

$$(x - \rho \sin \gamma) \cos z' - (y - \rho \cos \gamma) \sin z' = 0.$$

Soient d'autre part z l'angle formé par la direction C γ et la tangente CB au bord supérieur de la lune, et s le rayon apparent de la lune, c'est-à-dire l'angle LCB, L étant le centre de la lune; les coordonnées de L sont, r étant la distance CL :

$$r \sin (z + s), \quad r \cos (z + s).$$

Écrivons que la distance de ce point à la droite OA est $r \sin s$; il vient :

$$r \sin s = [r \sin (z + s) - \rho \sin \gamma] \cos z' - [r \cos (z + s) - \rho \cos \gamma] \sin z',$$

ou bien :

$$(1) \quad r \sin s = \rho \sin (z' - \gamma) - r \sin (z' - z - s).$$

Divisons par r , afin d'introduire la parallaxe de la lune; si a désigne le rayon équatorial de la terre, on a $\frac{a}{r} = \sin \varpi$, ϖ étant la parallaxe horizontale équatoriale; d'autre part, on peut écrire :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{a} \sin \varpi = \rho' \sin \varpi,$$

ρ' étant la longueur du rayon CO de la terre évaluée en prenant le rayon équatorial comme unité de longueur;

enfin k désignant la longueur du rayon de la lune mesurée avec la même unité, on a aussi :

$$\sin s = \frac{ka}{r} = k \sin \sigma;$$

l'équation (1) devient alors :

$$\sin [z' - (z + s)] = [-k + \rho' \sin (z' - \gamma)] \sin \sigma;$$

les nombres k et ρ' sont inférieurs à 1, et $\sin \sigma$ est environ $\frac{1}{60}$; on a donc, avec une approximation suffisante, en posant

$$(2) \quad z' - (z + s) = m \sin \sigma + \frac{m^3 \sin^3 \sigma}{6}.$$

Cette équation donne, en signe contraire, la correction qu'il faut appliquer à la distance zénithale z' d'un bord supérieur observé du point O pour obtenir la distance zénithale du centre L de la lune vu du centre de la terre, cette distance étant comptée à partir de la verticale du point O.

Supposons qu'une observation semblable soit faite d'un autre point O_1 de la terre dont le méridien est très voisin de celui du point O; cette observation fournira une équation analogue,

$$(3) \quad z'_1 - (z_1 + s_1) = m_1 \sin \sigma_1 + \frac{m_1^3 \sin^3 \sigma_1}{6}.$$

Si les deux points O et O_1 étaient sur le même méridien, les deux observations seraient simultanées : on aurait $\sigma = \sigma_1$, et la différence entre $z + s$ et $z_1 + s_1$ serait l'angle des verticales des points O et O_1 , ou bien la différence de leurs latitudes; en retranchant membre à membre les équations (2) et (3), on aurait :

$$z - z'_1 - (\lambda - \lambda_1) = (m - m_1) \sin \sigma + \frac{m^3 - m_1^3}{6} \sin^3 \sigma.$$

équation qui déterminerait $\sin \sigma$.

On forme la même équation dans le cas où les méridiens de O et de O_1 sont voisins, en ajoutant des termes correctifs aux deux membres; dans le premier membre, on tiendra compte de la variation de la déclinaison du centre de la lune pendant l'intervalle de temps $t_1 - t$ qui sépare les observations, en ajoutant le terme $D'(t_1 - t)$, D' étant fourni par les tables de la lune calculées à l'aide des observations antérieures; dans le second membre, en se basant encore sur ce que $t_1 - t$ est petit, on pourra prendre

$$\sin \varpi_1 = \sin \varpi + (t_1 - t) \varpi' \cos \varpi.$$

ϖ' étant de même calculé avec une approximation suffisante d'après les observations antérieures.

CHAPITRE XIII

ÉCLIPSES; PARALLAXE DU SOLEIL

40. **Éclipses de lune.** — Une éclipse de lune se produit lorsque le disque lunaire éclairé pénètre, en partie ou en totalité, dans le cône d'ombre portée par la terre, ce cône étant décrit par les génératrices tangentes extérieurement aux surfaces du soleil et de la terre. L'axe ST du cône est l'axe qui joint les centres des deux astres; par conséquent, il reste toujours dans le plan de l'écliptique; si l'orbite de la lune n'avait pas d'inclinaison, il arriverait qu'à chaque révolution de la lune le centre de la lune rencontrerait l'axe du cône; comme, ainsi que nous allons le voir, la lune est toujours plus rapprochée de la terre que le sommet du cône, il y aurait éclipse à chaque opposition.

En raison de l'inclinaison de l'orbite lunaire, il y a lieu de discuter la possibilité d'une éclipse au voisinage d'une opposition.

Représentons (fig. 37) la section du cône d'ombre

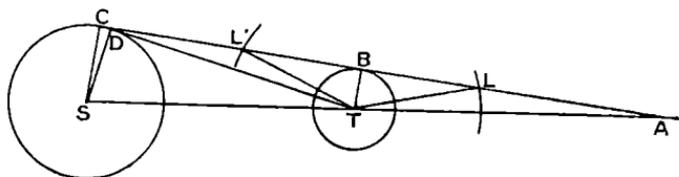


Fig. 37.

par un plan qui contient son axe ST et qui est perpendiculaire au plan de l'écliptique. La distance TA du

centre de la terre au sommet du cône s'obtient, en considérant les triangles rectangles semblables ATB et ASC formés en abaissant des points T et S des perpendiculaires sur la tangente commune ABC, par la relation

$$(1) \quad \frac{TA}{TB} = \frac{SA}{SC} = \frac{ST + TA}{SC};$$

si l'on prend pour unité de longueur le rayon TB de la terre (dont nous négligeons ici l'aplatissement), et si l'on désigne par ϖ et ϖ' les parallaxes de la lune et du soleil, on a :

$$ST = \frac{1}{\sin \varpi'}, \quad LT = \frac{1}{\sin \varpi},$$

L représentant le centre de la lune; on a aussi, s' étant le demi-diamètre apparent du soleil, $SC = SD = ST \sin s'$, d'où :

$$SC = \frac{\sin s'}{\sin \varpi'};$$

il vient donc, d'après (1) :

$$TA = \frac{1}{\sin s' - \sin \varpi'};$$

le demi-diamètre s' du soleil est voisin de $16'$, ϖ' est environ $8''8$, tandis que ϖ est à peu près $57'$; donc on a manifestement $TA > TL$.

L'angle A, ouverture du cône d'ombre, est défini par la formule

$$\sin A = \frac{1}{TA} = \sin s' - \sin \varpi';$$

les angles étant petits, on en déduit, au dixième de seconde près,

$$A = s' - \varpi';$$

soit, sur la droite AB, le point L situé à une distance TL du point T égale à la distance de la terre à la lune au

moment de l'opposition ; l'angle TLB est la parallaxe ϖ de la lune, et l'on a :

$$LTA = TLB - A = \varpi + \varpi' - s'.$$

Si donc, au moment de l'opposition, le bord inférieur de la lune est tangent en L au cône d'ombre, on a, λ étant la latitude du centre de la lune, et s son demi-diamètre apparent :

$$\lambda - s = \varpi + \varpi' - s'.$$

si $\lambda - s$ est, en valeur absolue, plus grand que $\varpi + \varpi' - s'$, il n'y a pas d'éclipse ; dans le cas contraire, la lune est éclipsée au moins partiellement.

Cette discussion n'est pas complète ; il est possible, comme la figure 38 le montrera, que le déplacement en latitude de la lune provoque une éclipse avant ou après l'opposition ; quoi qu'il en soit, on reconnaît qu'il ne peut y avoir d'éclipse que si la latitude de la lune est faible ; une discussion détaillée montre que cette latitude ne peut dépasser $64'$; la lune est alors au voisinage d'un des nœuds de son orbite, et comme le soleil est dans la direction opposée par rapport à la terre, il est au voisinage du nœud opposé ; on a établi qu'il ne peut y avoir éclipse si le soleil est à une distance angulaire du nœud supérieure à 11° .

On appelle *révolution tropique des nœuds* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil au nœud ascendant de la lune ; comme le mouvement du nœud est rétrograde, on obtient cette durée en ajoutant le moyen mouvement diurne du soleil au mouvement du nœud, et divisant 360° par le nombre ainsi obtenu ; on trouve ainsi $3461,6$, soit 19 jours environ de moins que la durée de l'année.

Le soleil se déplaçant ainsi d'un peu plus de 1° par jour par rapport au nœud, et l'intervalle de deux oppo-

sitions consécutives dépassant 29 jours, il ne peut y avoir éclipse de lune à deux oppositions consécutives. On voit aussi qu'il y aura rarement plus de deux éclipses de lune dans le cours d'une année; s'il y en a trois, c'est que le soleil passant à l'un des nœuds au début de janvier revient au même point à la fin de décembre, après avoir passé au nœud opposé dans l'intervalle, les circonstances étant chaque fois favorables à une éclipse. Enfin la différence entre l'année et la révolution tropique des nœuds explique la remarque ancienne d'après laquelle les dates des éclipses avancent en moyenne de 19 jours.

Le raisonnement qui précède néglige l'influence de l'atmosphère terrestre; cette influence s'exerce de deux façons différentes: la réfraction dévie les rayons tangents à la terre, et a pour effet de rapprocher de la terre le sommet A du cône d'ombre portée; mais d'autre part, les rayons lumineux qui traversent une grande épaisseur de l'atmosphère sont absorbés, de sorte que, pour la construction du cône d'ombre, on devrait augmenter le rayon de la terre; les observations ont montré que le rayon du cercle d'ombre, intersection du cône avec le plan perpendiculaire mené par le point L, doit être augmenté de $\frac{1}{50}$ de la valeur déterminée en négligeant l'atmosphère. La lune continue néanmoins à être éclairée, lorsqu'elle a pénétré dans le cône d'ombre, par les rayons réfractés dans les couches supérieures de l'atmosphère; sa surface ne disparaît pas complètement, mais est fortement colorée en rouge.

La détermination des instants de l'entrée de la lune dans le cône d'ombre, ou de sa sortie, ne peut se faire avec une très grande précision; d'autre part les observations des contacts extérieur ou intérieur du bord de la lune avec le cercle d'ombre ne se font qu'à quelques

secondes près ; on peut donc se contenter d'un raisonnement sommaire pour suivre la marche d'une éclipse.

Marquons (fig. 38, sur le plan perpendiculaire à l'axe

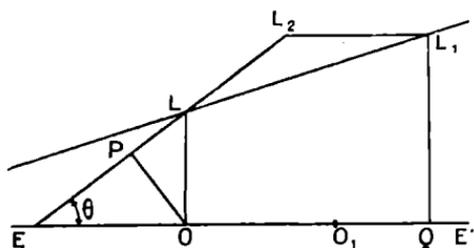


Fig. 38.

ST, la trace EE' de l'écliptique, la position O du centre du cercle d'ombre au moment de l'opposition, et celle L du centre de la lune, sur la perpendiculaire à EE' ; le point L se déplace

sensiblement en ligne droite ; soit L₁ sa position une heure après l'opposition.

Le centre O du cercle d'ombre n'est pas davantage fixe, et son déplacement horaire OO₁ mesure celui du soleil dans le même temps. Il s'agit d'étudier la suite des positions de la lune par rapport au cercle d'ombre ; c'est un mouvement relatif dans lequel la trajectoire apparente de la lune s'obtient en composant la vitesse horaire LL₁ de la lune avec la vitesse du centre du cercle prise en sens opposé ; on obtient ainsi la droite LL₂, qu'on définira par son coefficient angulaire et par la distance OP ; on a :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{L_1 Q - LO}{OQ - OO_1} = \frac{\beta'}{\lambda' - \lambda'_1}$$

β' étant la variation horaire de la latitude de la lune, λ' et λ'_1 les variations horaires des longitudes de la lune et du soleil ; la vitesse horaire du déplacement relatif de la lune est :

$$LL_2 = \frac{\lambda' - \lambda'_1}{\cos \theta}$$

enfin la distance OP est $\lambda \cos \theta$; ce point P correspond au milieu de l'éclipse; dans le cas de la figure, la date du milieu de l'éclipse précède celle de l'opposition de la fraction d'heure $\frac{\lambda \sin \theta \cos' \theta}{\lambda' - \lambda_1}$.

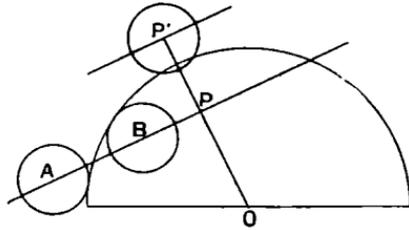


Fig. 39.

Si, sur le même plan, on représente (fig. 39) le cercle d'ombre, il est facile de déterminer les différentes phases de l'éclipse : le commencement aura lieu quand le bord de la lune sera tangent extérieurement au cercle d'ombre; A étant la position correspondante du centre de la lune, on a :

$$AP = \sqrt{(R + s)^2 - OP^2} = \sqrt{(R + s)^2 - \lambda^2 \cos^2 \theta};$$

on sait donc calculer l'instant du passage du centre de la lune en A .

Le commencement de la totalité aura lieu lorsque le centre de la lune étant en B , son bord sera tangent intérieurement au cône d'ombre; on aura alors :

$$BP = \sqrt{(R - s)^2 - \lambda^2 \cos^2 \theta}.$$

Les phénomènes se reproduiront symétriquement par rapport au point P .

Lorsque l'éclipse n'est pas complète, le rapport de la partie éclipsée à l'aire totale du disque circulaire, au moment du maximum, s'appelle la grandeur de l'éclipse; la figure montre que ce rapport est égal à $\frac{R + s - OP'}{2s}$.

41. Éclipses de soleil. — Il y a éclipse de soleil lorsque la lune pénètre en L' (fig. 37) à l'intérieur du cône circonscrit à la terre et au soleil; ceci se passe au

voisinage d'une conjonction et non plus d'une opposition ; on peut déterminer comme précédemment, à quelle condition doit satisfaire la latitude de la lune pour que l'éclipse se produise ; l'angle $L'TS$ est, avec les notations précédentes, égal à $\varpi - \varpi' + s'$, et l'on doit avoir :

$$\lambda - s < \varpi - \varpi' + s' ;$$

cette condition est moins stricte que celle trouvée précédemment pour qu'il y ait éclipse de lune ; le nombre des éclipses de soleil est par conséquent plus grand que celui des éclipses de lune ; toutefois, comme une éclipse de soleil n'est jamais visible de toute la surface de la terre, il arrive qu'un observateur placé en un point déterminé de la terre voie moins d'éclipses de soleil que d'éclipses de lune,

Représentons (fig. 40) la section, par un plan passant par l'axe SL joignant les centres du soleil S et de la

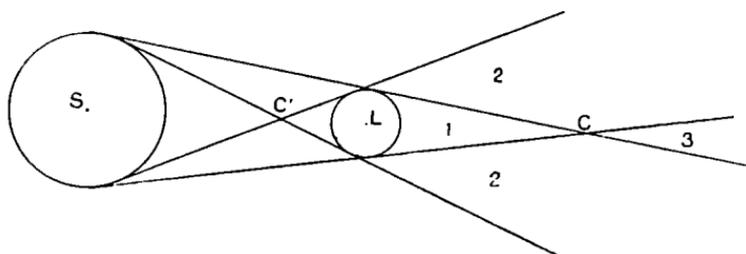


Fig. 40.

lune L , des cônes d'ombre et de pénombre lunaires, dont les sommets sont les points C et C' ; ces cônes délimitent 3 régions, marquées 1, 2, 3, telles qu'un observateur placé dans l'une d'elles voit le soleil éclipié : lorsqu'il se trouve dans la région 1, il ne reçoit aucun rayon du soleil et l'éclipse est totale ; dans la région 2, la partie visible du disque du soleil est limitée par le

cône circonscrit à la lune ayant pour sommet l'œil de l'observateur ; l'éclipse est partielle, cette partie visible se présentant sous forme de croissant ; enfin, lorsque l'observateur est situé dans la région 3, toutes les générations du cône circonscrit à la lune vont rencontrer la surface solaire, et l'éclipse est annulaire.

Le rapport des diamètres réels du soleil et de la lune est 398 ; c'est aussi le rapport $\frac{SC}{LC}$; si on prend les distances moyennes de la terre T au soleil et à la lune, le rapport $\frac{ST}{LT}$ est 385 ; le sommet C du cône d'ombre est donc en moyenne plus rapproché de la lune que la terre ; si les orbites de la terre et de la lune étaient circulaires, il n'y aurait jamais d'éclipse totale de soleil. Mais les excentricités des orbites terrestre et lunaire font varier le rapport $\frac{ST}{LT}$, qui peut atteindre la valeur maxima 413 ; en tout cas, une faible partie de la surface terrestre pénétrera dans le cône d'ombre. Même, la section du cône de pénombre par un plan perpendiculaire à l'axe, situé à la distance LT, sera toujours très inférieure à la surface terrestre, et la largeur de la zone éclipsee n'atteindra jamais les $\frac{6}{10}$ du rayon terrestre.

Les éclipses de soleil précèdent ou suivent les éclipses de lune de 14 jours, puisque les unes ont lieu aux conjonctions, les autres aux oppositions ; il peut se produire deux éclipses de soleil au voisinage d'un passage du soleil à l'un des nœuds de l'orbite lunaire, lors de deux conjonctions consécutives, et 5 éclipses pendant une année.

C'est seulement pendant la durée très courte des éclipses totales qu'on peut voir et photographier la couronne solaire ; d'autre part, un intérêt particulier

s'attache actuellement à ces phénomènes, du fait qu'ils offrent une des rares occasions de vérifier la théorie d'Einstein, d'après laquelle un rayon lumineux doit être dévié de sa trajectoire rectiligne en passant très près de la masse solaire, indépendamment de tout effet de réfraction; s'il en est ainsi, il doit être possible d'apercevoir des étoiles voisines du bord et placées en réalité sous le disque solaire. Il y a donc lieu de déterminer les points de la terre pour lesquels l'éclipse est totale, et les instants des diverses phases; nous nous bornerons ici à quelques indications sommaires, pour faire comprendre les données publiées par la Connaissance des Temps.

On détermine la *ligne de centralité*; c'est le lieu des points d'intersection avec la surface terrestre de l'axe du cône d'ombre; cet axe passe par deux points S et L dont on connaît, en fonction du temps, les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires liés à la terre; il décrit, lorsque le temps varie, une surface réglée, et la ligne de centralité est l'intersection de cette surface et du globe terrestre.

Le cône d'ombre découpe à chaque instant sur la terre une courbe qui est sensiblement une ellipse; l'enveloppe de cette courbe se compose de deux lignes à peu près parallèles à la ligne de centralité, et qui bornent la région de la terre pour laquelle l'éclipse est totale; une génératrice du cône d'ombre rencontre la surface terrestre en deux points, l'un étant dans l'hémisphère tourné vers le soleil, l'autre dans l'hémisphère opposé; lorsque ces deux points se confondent, la génératrice est tangente à la surface de la terre, et le soleil est à l'horizon du lieu correspondant; l'éclipse commence ou se termine au moment du lever ou du coucher du soleil; les courbes de totalité sont naturellement limitées par les courbes ainsi obtenues. De

même, la courbe de centralité s'arrête aux lieux où l'éclipse a son milieu au lever ou au coucher du soleil.

On trace encore les courbes limites de l'éclipse partielle, enveloppes de la courbe d'intersection du cône de pénombre avec la terre, et on les termine par les courbes qui représentent le lieu des points où l'éclipse commence ou finit au lever ou au coucher du soleil, ces courbes étant, géométriquement, le lieu des points de contact des génératrices du cône de pénombre avec la terre.

Pour qu'au bout d'un certain temps les positions relatives du soleil, de la lune, et du nœud ascendant de l'orbite lunaire, qui déterminent les circonstances d'une éclipse, fussent les mêmes qu'à l'instant initial, il faudrait que la lune eût accompli un nombre entier de révolutions draconitiques (par rapport au nœud), et un autre nombre entier de révolutions synodiques; en outre, l'intervalle devrait correspondre à un nombre entier de révolutions tropiques des nœuds; et encore, si l'on tient compte des distances, il serait nécessaire que le même intervalle fût un multiple entier de la révolution anomalistique (rapportée au périhélie) et de l'année.

Ces conditions ne sont pas remplies exactement, mais certaines le sont d'une façon assez approchée pour que l'existence d'une période, au bout de laquelle les éclipses se reproduisent dans le même ordre, et séparées par des durées sensiblement égales, ait pu être signalée par les astronomes chaldéens: il arrive que la durée commune de 242 révolutions draconitiques et de 223 révolutions synodiques est de 6585 j., 3, soit, en années juliennes, 18 ans 11 jours; cette durée est aussi, à une fraction de jour près, celle de 239 révolutions anomalistiques; on l'appelle le *saros*.

Pendant un saros, il y a en moyenne 42 éclipses de soleil et 27 de lune.

42. **Passages de Vénus sur le disque solaire.** — Le phénomène est analogue à une éclipse de soleil, le disque de Vénus remplaçant celui de la lune; comme l'orbite de Vénus est inclinée de $3^{\circ}23'$ sur l'écliptique, il n'y a point passage à chaque conjonction inférieure; il faut que la planète soit au voisinage d'un des nœuds de son orbite. Le rapport des moyens mouvements de la terre et de Vénus est très voisin de $\frac{243}{395}$, de sorte que, dans une période de 243 ans, il y a $395 - 243 = 152$ conjonctions intérieures; or on a :

$$8 \times 152 - 5 \times 243 = 1.$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{152}{243}$ du moyen mouvement de la terre au mouvement synodique de Vénus est voisin de $\frac{5}{8}$; il en résulte qu'au bout de 8 ans, la terre ayant retrouvé sa position primitive par rapport au nœud de Vénus, qui se déplace peu, Vénus aura accompli 5 révolutions synodiques, à un petit angle près. Si, au début de cette période de 8 ans, les deux planètes sont voisines d'un nœud, elles le seront encore à la fin. Mais il faudra attendre ensuite 121 ans 5, moitié de la période de 243 ans, pour que les deux planètes se retrouvent simultanément au voisinage de l'autre nœud; cette seconde durée peut d'ailleurs être diminuée de 8 ans, ou même exceptionnellement de 16 ans, lorsque la dernière conjonction s'est produite à une distance angulaire du nœud, voisine de la limite nécessaire pour qu'il y ait passage. Les dates des passages varient peu dans l'année et correspondent aux époques où la terre passe aux nœuds de Vénus.

Voici les dates de quelques passages, avec les intervalles correspondants :

6 juin 1761;	
3 juin 1769;	8 ans;
8 décembre 1874;	105 ans 5;
6 décembre 1882;	8 ans;
7 juin 2004;	121 ans 5;
5 juin 2012;	8 ans.

Le calcul des circonstances d'un passage de Vénus est un peu plus simple que celui d'une éclipse de soleil; nous nous bornerons à indiquer comment des observations effectuées en différents points de la terre peuvent fournir une relation entre la parallaxe de Vénus et celle du soleil, relation qui permettra de calculer cette dernière, comme nous le verrons bientôt.

Durant le passage, la planète paraît décrire une droite sur le disque solaire; la position de cette droite et la vitesse du déplacement apparent se déterminent, pour un observateur placé au centre de la terre, en considérant que cette corde est la projection sur le disque solaire d'un arc très petit de la trajectoire apparente de Vénus par rapport au centre de la terre. Soit à un instant donné M la projection de la planète V sur le disque solaire (fig. 41), vue du centre T ; pour un point A de la surface terrestre, la projection de Vénus ne se fait point en M , mais en un autre point M' du disque solaire; l'écart MM' est dans

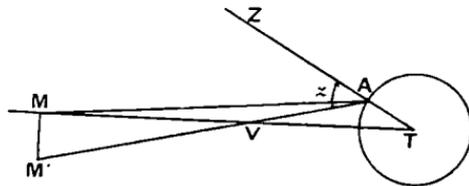


Fig. 41.

le plan vertical du point A qui contient V ; l'angle MAM' , sous lequel il est vu du point A , est la différence des

angles sous lesquels on voit de V et de A le même rayon TA de la terre, c'est-à-dire la différence des parallaxes de hauteur de V et de M, cette dernière pouvant être confondue avec la parallaxe du soleil; on a donc :

$$MAM' = (\varpi' - \varpi) \sin z,$$

ϖ' et ϖ étant les parallaxes horizontales de Vénus et du soleil, z la distance zénithale; le point M' décrit une corde, qu'on pourrait déterminer si l'on connaissait $\varpi' - \varpi$. Si, de deux stations différentes A et A', on observe les cordes apparentes décrites par Vénus, la comparaison des observations fournit le moyen de calculer $\varpi' - \varpi$; ce sont les distances des cordes au centre du soleil qui interviennent dans le calcul; ces distances se déduisent simplement des longueurs des cordes, et l'on évalue celles-ci, d'après Halley, par les intervalles entre les contacts d'entrée et de sortie de Vénus avec le disque solaire; on espérait noter ces contacts à une ou deux secondes près, et, comme la différence des temps des passages peut s'élever à 1800 secondes entre deux stations, on aurait eu l'inconnue à environ $\frac{1}{1000}$ de sa valeur près; mais le phénomène de l'irradiation, et aussi celui du ligament noir qui persiste entre la planète et le soleil, entraînent une incertitude de 20 ou 30 secondes sur la notation d'un contact. On a tenté, dans les dernières observations, de construire la corde au moyen de photographies prises pendant le passage de la planète; les résultats n'ont pas été meilleurs, la détermination du bord du soleil étant très incertaine.

43. Détermination de la parallaxe du soleil. — Bien que la précision des observations modernes permette de mesurer des angles plus petits que $8'',8$, il n'est pas possible de déduire la parallaxe du soleil

d'observations des bords, effectuées en différents points de la terre : les observations différentielles sont impossibles, si brillantes que soient les étoiles de comparaison, à cause du très grand éclaircissement du ciel au voisinage des bords ; pour les observations méridiennes, l'influence de la réfraction ne peut se calculer avec une approximation suffisante, l'échauffement produit par les rayons solaires modifiant l'état de l'atmosphère.

Les méthodes indirectes sont nombreuses, et présentent d'ailleurs plus d'intérêt dans leurs principes que dans leurs résultats finaux ; car, la distance de la terre au soleil étant l'unité de mesure astronomique, de même que le mètre est l'unité de longueur courante, on peut la remplacer par une valeur approchée de cette distance fixée une fois pour toutes, de même qu'on a pris pour définition du mètre la longueur de la barre de platine déposée aux archives ; un congrès d'astronomes a décidé, en 1896, de fixer à $8'',80$ la parallaxe horizontale équatoriale du soleil.

D'après la 3^e loi de Képler, les distances de toutes les planètes au soleil sont déterminées quand on connaît l'une d'elles, puisque les moyens mouvements résultent des observations ; au lieu de déterminer la distance au soleil, on pourra déterminer la distance à la terre à un instant quelconque ; par exemple la différence des parallaxes, déduite d'un passage de Vénus, donne la différence des distances du soleil et de Vénus à la terre au moment d'une conjonction, évaluée en rayons terrestres ; la distance de la terre à Vénus n'est pas exactement la différence $a - a'$ des distances moyennes des deux planètes au soleil, mais une quantité qui en diffère peu, et qu'on peut exprimer complètement, puisqu'on sait calculer les positions des deux planètes sur leurs orbites ; on a donc une relation entre a et a' qui, jointe à l'équation $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$, fournit a et a' .

Pour obtenir la parallaxe d'une planète, il est naturel de choisir l'une de celles qui se rapprochent le plus de la terre; on peut appliquer la même méthode que celle indiquée pour la parallaxe de la lune, c'est-à-dire observer l'astre, à peu près simultanément, de divers points de la terre aussi éloignés que possible; on peut aussi prendre comme base le déplacement d'un lieu terrestre dans son mouvement diurne, ce qui permet de garder le même observateur et le même instrument; il faut alors, bien entendu, évaluer le déplacement réel de la planète pendant l'intervalle des deux observations. Les deux procédés ont d'abord été appliqués pour Mars, les observations de Vénus étant plus difficiles à cause de son voisinage apparent du soleil. Mais il s'agit de mesures délicates, et les pointés des bords du disque d'une planète ne sont pas assimilables à ceux d'une étoile de comparaison; il vaut donc mieux se servir de petites planètes, dont le diamètre apparent est insensible.

La première méthode, c'est-à-dire celle d'une coopération entre plusieurs observatoires munis d'instruments méridiens, a été appliquée aux planètes Victoria et Sapho.

Une combinaison des deux procédés a été utilisée pour mesurer la parallaxe d'Eros à l'aide de clichés photographiques, obtenus dans 17 observatoires différents, pendant l'opposition de cette planète en 1900-1901; au moment de l'opposition, la distance d'Eros à la terre peut descendre au-dessous du quart de la distance terre-soleil. La discussion très complète des observations d'Eros, qui a été faite par M. Hinks, montre que la détermination de la parallaxe solaire qu'on en conclut est la plus précise parmi toutes celles qui ont été obtenues jusqu'ici; sa valeur est d'ailleurs très voisine de $8'',80$.

De la connaissance de la vitesse de la lumière, obte-

nue par des procédés physiques, on peut aussi déduire la parallaxe du soleil ; nous avons déjà signalé (§ 15) que la constante de l'aberration, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipse annuelle décrite par les étoiles fixes, étant déterminée directement, permettrait de calculer la vitesse de la terre sur son orbite avec la même unité que la vitesse de la lumière ; on en conclurait l'évaluation de la distance terre-soleil en kilomètres.

Les éclipses des satellites de Jupiter fournissent, comme l'a indiqué Rømer, un moyen d'évaluer la vitesse de la lumière en unités astronomiques ; de la comparaison de la valeur obtenue à la mesure en kilomètres, on déduira l'expression en kilomètres de l'unité astronomique. Les éclipses des trois premiers satellites de Jupiter se reproduisent au voisinage de chaque opposition, car les plans de leurs orbites sont peu inclinés sur le plan de l'orbite de Jupiter ; les durées des révolutions synodiques sont courtes, $1^{\text{d}}18^{\text{h}}$, $3^{\text{d}}13^{\text{h}}$, $7^{\text{d}}4^{\text{h}}$; les éclipses sont donc souvent observables. Pour comprendre la méthode, appelons θ l'intervalle réel de deux éclipses, et supposons que, Jupiter étant en opposition par rapport à la terre, on ait observé deux éclipses numérotées 1 et $n + 1$; la distance à la terre n'ayant pas varié, l'intervalle noté par l'observateur entre les deux éclipses est $n\theta$; si l'on observe l'éclipse du même satellite de rang $n' + 1$ lors d'une conjonction de Jupiter et de la terre, l'intervalle qui séparera l'observation de la première ne sera pas $n'\theta$, mais $n'\theta + \frac{2}{V}$, puisque la distance de Jupiter à la terre s'est accrue de deux unités astronomiques. On conçoit ainsi que les observations de 3 éclipses dont on connaît les numéros d'ordre permettent de déterminer θ et V .

Il existe encore, pour déterminer la parallaxe du soleil, plusieurs procédés fondés sur la mécanique

céleste; nous indiquerons sommairement trois d'entre eux :

1^o La troisième loi de Képler, appliquée au mouvement relatif de la lune par rapport à la terre, donne, avec des notations inutiles à rappeler :

$$n'^2 a'^3 = f(m + m');$$

on a de même, pour le mouvement de la terre par rapport au soleil :

$$n^2 a^3 = f(M + m),$$

d'où :

$$\frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3} = \frac{m + m'}{M + m};$$

les moyens mouvements n et n' résultent des observations, a' est connu d'après la détermination de la parallaxe de la lune; il suffit donc, pour avoir a , de connaître le dernier rapport $\frac{m + m'}{M + m}$.

Les inégalités séculaires d'une planète inférieure, en particulier de Mercure, dépendent du rapport $\frac{m + m'}{M}$, et les observations comparées à la théorie permettent de déterminer ce rapport; il diffère légèrement de celui qu'on voulait obtenir, mais en le substituant à celui-ci, on introduira une erreur de l'ordre de $\frac{m}{M}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{300000}$, qui est de peu d'importance, la parallaxe cherchée étant loin d'être connue d'une façon aussi précise.

2^o Parmi les inégalités périodiques de la longitude de la lune, il en existe une très sensible, appelée inégalité parallaxique, dont le coefficient contient en facteur le rapport $\frac{\sin \varpi}{\sin \varpi'}$, ϖ et ϖ' désignant les parallaxes

du soleil et de la lune; les observations de la lune permettent de mesurer le déplacement correspondant, et par suite de calculer ϖ .

3° Dans le mouvement annuel, ce n'est point le centre T de la terre, mais le centre de gravité G du système terre-lune, qui décrit une ellipse ayant pour foyer le centre du soleil (fig. 42); ce point G est toujours situé sur la droite TL qui joint le centre de la terre au centre de la lune, et l'on a :

$$\frac{TG}{GL} = \mu,$$

μ étant le rapport de la masse de la lune à celle de la terre.

Dans le cours d'une révolution synodique de la lune, les points T et L tournent autour de G avant de retrouver la même position par rapport à SG; il en résulte une oscillation mensuelle de la longitude de la terre, l'angle maximum d'écart entre ST et SG ayant pour sinus le rapport $\frac{TG}{SG}$. Le Verrier a déduit des observations du soleil que cet angle est environ $6''{,}5$; or on peut déduire TG de TL, c'est-à-dire de la parallaxe de la lune, si l'on connaît μ , dont la meilleure détermination résulte de la théorie de la nutation : on obtient ensuite SG.

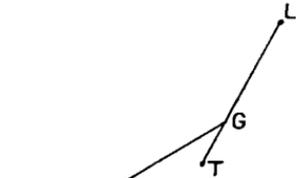


Fig. 42.

CHAPITRE XIV

ORIGINE DU MONDE SOLAIRE

44. **Hypothèses cosmogoniques.** — Dans la préface de ses leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Poincaré s'exprime ainsi : « Le problème de l'origine du Monde a de tout temps préoccupé tous les hommes qui réfléchissent ; il est impossible de contempler le spectacle de l'univers étoilé sans se demander comment il s'est formé ; nous devrions peut-être attendre pour chercher une solution que nous en ayons patiemment rassemblé les éléments, et que nous ayons acquis par là quelque espoir sérieux de la trouver ; mais si nous étions si raisonnables, si nous étions curieux sans impatience, il est probable que nous n'aurions jamais créé la science et que nous nous serions toujours contentés de vivre notre petite vie. Notre esprit a donc réclamé impérieusement cette solution, bien avant qu'elle fût mûre, et alors qu'il ne possédait que de vagues lueurs, lui permettant de la deviner plutôt que de l'atteindre. Et c'est pour cela que les hypothèses cosmogoniques sont si nombreuses, si variées, qu'il en naît chaque jour de nouvelles, tout aussi incertaines, mais tout aussi plausibles que les théories plus anciennes, au milieu desquelles elles viennent prendre place sans parvenir à les faire oublier. »

Après Poincaré, citons maintenant Laplace :

« On a, pour remonter à la cause des mouvements primitifs du système planétaire, les phénomènes suivants :

les mouvements des planètes dans le même sens et à peu près dans le même plan; les mouvements des satellites dans le même sens que ceux des planètes; les mouvements de rotation de ces différents corps et du soleil dans le même sens que leurs mouvements de projection et dans des plans peu différents; le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites.

« Voyons s'il est possible de s'élever à leur véritable cause.

« Quelle que soit sa nature, puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvements des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps, et, vu la distance prodigieuse qui les sépare, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue. Pour leur avoir donné, dans le même sens, un mouvement presque circulaire autour du soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre comme une atmosphère. La considération des mouvements planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du soleil s'est primitivement étendue au delà des orbes de toutes les planètes et qu'elle s'est resserrée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

« Dans l'état primitif où nous supposons le soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, le transforme en étoile. Si l'on conçoit, par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière, on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité, précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement diffuse qu'on pourrait à peine en soupçonner l'existence.

« Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déterminé les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le soleil: on peut donc conjecturer que les planètes ont été formées à ces limites successives par la condensation

des zones de vapeur qu'elle a dû, en se refroidissant, abandonner dans le plan de son équateur.

« L'atmosphère du soleil ne peut pas s'étendre indéfiniment; sa limite est le point où la force centrifuge due à son mouvement de rotation balance la pesanteur; or, à mesure que le refroidissement resserre l'atmosphère et condense à la surface de l'astre les molécules qui en sont voisines, le mouvement de rotation augmente; car, en vertu du principe des aires, la somme des aires décrites par le rayon vecteur de chaque molécule du soleil et de son atmosphère, et projetées sur le plan de son équateur, étant toujours la même, la rotation doit être plus prompte quand ces molécules se rapprochent du centre du soleil. La force centrifuge due à ce mouvement devenant ainsi plus grande, le point où la pesanteur lui est égale est plus près de ce centre; en supposant donc, ce qu'il est naturel d'admettre, que l'atmosphère s'est étendue, à une époque quelconque, jusqu'à sa limite, elle a dû, en se refroidissant, abandonner les molécules situées à cette limite et aux limites successives produites par l'accroissement de la rotation du soleil. Ces molécules abandonnées ont continué de circuler autour de cet astre, puisque leur force centrifuge était balancée par leur pesanteur. Mais, cette égalité n'ayant point lieu par rapport aux molécules atmosphériques placées sur les parallèles à l'équateur solaire, celles-ci se sont rapprochées, par leur pesanteur, de l'atmosphère à mesure qu'elles se condensaient et elles n'ont cessé de lui appartenir qu'autant que, par ce mouvement, elles se sont rapprochées de cet équateur.

« Considérons maintenant les zones de vapeur successivement abandonnées. Ces zones ont dû, selon toute vraisemblance, former, par leur condensation et l'attraction mutuelle de leurs molécules, divers anneaux concentriques de vapeur circulant autour du soleil. Le frottement mutuel des molécules de chaque anneau a dû accélérer les unes et retarder les autres, jusqu'à ce qu'elles aient acquis un même mouvement angulaire; ainsi les vitesses réelles des molécules plus éloignées du centre de l'astre ont été plus grandes. La cause suivante a dû contribuer encore à cette différence

de vitesse. Les molécules les plus distantes du soleil et qui, par les effets du refroidissement et de la condensation, s'en sont rapprochées pour former la partie supérieure de l'anneau ont toujours décrit des aires proportionnelles aux temps, puisque la force centrale dont elles étaient animées a été constamment dirigée vers cet astre; or, cette constance des aires exige un accroissement de vitesse à mesure qu'elles s'en sont rapprochées. On voit que la même cause a dû diminuer la vitesse des molécules, qui se sont élevées vers l'anneau pour former sa partie inférieure.

« Si toutes les molécules d'un anneau de vapeurs continuaient de se condenser sans se désunir, elles formeraient à la longue un anneau liquide ou solide, mais la régularité que cette formation exige dans toutes les parties de l'anneau et dans leur refroidissement a dû rendre ce phénomène extrêmement rare. Aussi le système solaire n'en offre-t-il qu'un seul exemple, celui des anneaux de Saturne. Presque toujours chaque anneau de vapeurs a dû se rompre en plusieurs masses qui, mues avec des vitesses peu différentes, ont continué de circuler à la même distance autour du soleil. Ces masses ont dû prendre des formes sphéroïdiques avec un mouvement de rotation dirigé dans le sens de leur révolution, puisque leurs molécules inférieures avaient moins de vitesse réelle que les supérieures; elles ont donc formé autant de planètes à l'état de vapeur. Mais si l'une d'elles a été assez puissante pour réunir successivement par son attraction toutes les autres autour de son centre, l'anneau de vapeurs aura été ainsi transformé dans une seule masse sphéroïdique de vapeurs circulant autour du soleil, avec une rotation dirigée dans le sens de sa révolution. Ce dernier cas a été le plus commun; cependant le système solaire nous offre le premier cas dans les quatre petites planètes qui se meuvent entre Jupiter et Mars, à moins qu'on ne suppose, avec M. Olbers, qu'elles formaient primitivement une seule planète, qu'une forte explosion a divisée en plusieurs parties animées de vitesses différentes.

« Maintenant, si nous suivons les changements qu'un refroidissement ultérieur a dû produire dans les planètes en vapeurs dont nous venons de concevoir la formation,

nous verrons naître au centre de chacune d'elles un noyau s'accroissant sans cesse par la condensation de l'atmosphère qui l'environne. Dans cet état, la planète ressemblait parfaitement au soleil à l'état de nébuleuse où nous venons de le considérer; le refroidissement a donc dû produire, aux diverses limites de son atmosphère, des phénomènes semblables à ceux que nous avons décrits, c'est-à-dire des anneaux et des satellites circulant autour de son centre, dans le sens de son mouvement de rotation et tournant dans le même sens sur eux-mêmes. La distribution régulière de la masse des anneaux de Saturne autour de son centre et dans le plan de son équateur résulte naturellement de cette hypothèse, et sans elle devient inexplicable; ces anneaux me paraissent être des preuves toujours subsistantes de l'extension primitive de l'atmosphère de Saturne et de ses retraites successives. Ainsi les phénomènes singuliers du peu d'excentricité des orbites des planètes et des satellites, du peu d'inclinaison de ces orbites à l'équateur solaire et de l'identité du sens des mouvements de rotation et de révolution avec celui du soleil, découlent de l'hypothèse que nous proposons et lui donnent une grande vraisemblance. Si le système solaire s'était formé avec une parfaite régularité, les orbites des corps qui le composent seraient des cercles dont les plans, ainsi que ceux des divers équateurs et des anneaux, coïncideraient avec le plan de l'équateur solaire. Mais on conçoit que les variétés sans nombre qui ont dû exister dans la température et la densité des diverses parties de ces grandes masses ont produit les excentricités de leurs orbites et les déviations de leurs mouvements du plan de cet équateur. »

L'hypothèse ainsi présentée par Laplace¹, « avec la défiance que doit inspirer tout ce qui n'est pas un résultat de l'observation ou du calcul », a été soumise

1. Exposition du système du monde, note VII et dernière. Nous avons supprimé, dans la note de Laplace, quelques phrases ayant un intérêt historique, et ce qui concerne la formation des comètes.

à de très nombreuses discussions, les unes plus théoriques, portant surtout sur la possibilité de la formation des anneaux et de leur transformation en planètes, les autres signalant comme inexplicables les discordances assez nombreuses entre certains mouvements particuliers et l'ordre général qui a servi de base à Laplace.

La théorie des figures d'équilibre d'une masse fluide est loin d'être assez perfectionnée pour expliquer la formation des anneaux; on démontre que les conditions d'équilibre relatif sont satisfaites pour une masse fluide homogène, limitée par un ellipsoïde de révolution aplati, qui tourne autour de son axe, pourvu que la vitesse de rotation reste inférieure à une certaine limite; mais il existe aussi un ellipsoïde à trois axes inégaux qui satisfait aux mêmes conditions, et, lorsqu'on fait croître la vitesse de rotation, la seconde figure est la seule qui subsiste; pour une vitesse encore plus grande, il n'existe plus aucune figure d'équilibre ellipsoïdale. Poincaré a montré l'existence d'une figure piriforme, qui semble précéder la fragmentation de la masse; mais il n'y a aucun indice de la formation d'un anneau; Laplace faisait d'ailleurs intervenir, en dehors d'une forte condensation centrale, le refroidissement de la masse gazeuse, dont il paraît impossible à l'heure actuelle de discuter mathématiquement l'influence.

Insistons davantage, en raison de leur intérêt propre, sur les particularités, découvertes la plupart après Laplace, qui paraissent contradictoires avec son hypothèse.

L'anneau de Saturne, dont la division en plusieurs parties était déjà connue de Cassini, est composé en réalité d'un très grand nombre de particules; ces particules sont séparées par des intervalles assez grands pour que des instruments puissants permettent d'aper-

cevoir le disque de la planète à travers l'anneau ; mais ce fait ne constitue pas une objection au système de Laplace ; l'anneau est analogue à celui que forment les petites planètes comprises entre Mars et Jupiter, avec une plus grande condensation.

Les planètes extérieures, Uranus et Neptune, ont un mouvement de rotation rétrograde, et les révolutions de leurs satellites s'accomplissent aussi en sens rétrograde ; de même, les satellites les plus éloignés de Saturne et de Jupiter tournent autour de ces planètes en sens rétrograde, les mouvements de révolution des autres satellites étant directs. L'explication donnée par Laplace de la similitude de tous les sens de rotation est donc manifestement insuffisante, et l'on a proposé de la remplacer par la suivante : quand un anneau se décompose en différentes particules, ces diverses parties, soumises à l'attraction du noyau central, se meuvent d'autant plus vite qu'elles sont plus rapprochées du noyau ; si deux d'entre elles viennent à s'agglomérer, la vitesse de la partie intérieure dépassant celle de l'extérieure, le mouvement de rotation qui prend naissance est rétrograde. Les planètes auraient eu ainsi, à l'origine, des rotations rétrogrades. Pour expliquer que les rotations soient ensuite devenues directes, on invoque l'influence d'une action sur laquelle G. Darwin a particulièrement appelé l'attention, celle des *marées* produites par l'attraction du noyau central sur la planète encore fluide, et même à l'intérieur de la planète quand sa surface était déjà solidifiée ; ces marées opposent en quelque sorte un frein à la rotation de la planète, tendant à rendre celle-ci directe et de même durée que sa révolution autour du centre. L'effet des marées aurait eu peu d'influence sur Neptune et Uranus, en raison de leur éloignement, et ne se serait fait sentir qu'à la longue sur Saturne et Jupiter, après que

les satellites les plus éloignés étaient déjà séparés de la planète.

Une autre objection consiste en ce que le premier satellite de Mars, Phobos, circule autour de la planète dans le sens direct, mais avec une vitesse angulaire de révolution qui dépasse la vitesse de rotation de la planète ; le satellite paraît ainsi, vu de la planète, se lever à l'Ouest et se coucher à l'Est. La même circonstance se présente pour la partie intérieure de l'anneau de Saturne.

Une modification profonde doit encore être apportée à l'exposé de Laplace : Roche admet que des anneaux se sont formés à l'intérieur de la nébuleuse planétaire, puis transformés alors que l'atmosphère nébuleuse les entourait encore ; le milieu résistant dans lequel se mouvait alors le satellite aurait eu pour effet de diminuer les dimensions de l'orbite, et par conséquent d'accélérer sa vitesse angulaire de révolution.

Enfin, l'idée d'un anneau ayant donné naissance à la lune est difficile à admettre, en raison de la grande masse relative de notre satellite, qui atteint environ $\frac{1}{81}$ de celle de la terre ; beaucoup d'astronomes pensent que la lune a dû se constituer en amas globulaire à l'intérieur de la nébuleuse terrestre, et rester très longtemps à l'intérieur en s'agrandissant, avant de s'en séparer.

L'hypothèse de Laplace est limitée au système solaire ; il semble qu'elle soit tout à fait impuissante à expliquer la formation des systèmes binaires, dans lesquels les deux composantes ont des masses comparables entre elles ; pourtant les statistiques récentes nous apprennent que la proportion des étoiles doubles est considérable, leur nombre dépassant le tiers de toutes les étoiles.

Parmi les théories proposées récemment pour expliquer l'origine du monde, nous citerons seulement : celle de M. Belot, qui attribue la formation des planètes au choc d'une nébuleuse tourbillonnaire pénétrant dans un nuage cosmique, le tourbillon entrant en vibration longitudinale dont les renflements donnent naissance aux différentes planètes ; celle de MM. Chamberlin et Moulton, qui fait dériver le système solaire d'une nébuleuse spirale, dont la formation elle-même s'expliquerait par le passage d'un astre de grande masse au voisinage d'une étoile à tendance explosive : enfin celle de M. Sec, qui suppose que toutes les planètes ont été captées par le soleil ; en pénétrant dans le milieu résistant constitué par l'atmosphère du soleil, elles auraient acquis des mouvements elliptiques, dont les grands axes auraient été en diminuant, jusqu'à ce que l'atmosphère ait complètement disparu de la région où elles se meuvent.

BIBLIOGRAPHIE

- ANDOYER. — *Cours d'astronomie* (2 vol.). Hermann, 1923-4.
- BAILLAUD. — *Cours d'astronomie* (2 vol.). Gauthier-Villars, 1893-1896.
- ANDRÉ. — *Traité d'astronomie stellaire* (2 vol.). Gauthier-Villars, 1899-1900.
- ANDRÉ. — *Les Planètes et leur origine*. Gauthier-Villars, 1909.
- ANDRÉ et PUISEUX. — *Études nouvelles sur l'astronomie. La Terre et la Lune, forme extérieure et structure interne*, par P. Puiseux. Gauthier-Villars, 1908.
- TISSERAND et ANDOYER. — *Leçons de cosmographie*. Colin, 1895.
- EDDINGTON. — *Stellar Movements and the structure of the Universe*. London, Macmillan et Cie, 1914.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.

CHAPITRE I. — Le ciel étoilé.	1
1. Sphère céleste, 1. — 2. Constellations, 2. — 3. Mouvement diurne, 4.	
CHAPITRE II. — Astronomie sphérique	7
4. Coordonnées sphériques, 7. — 5. Formules principales de la trigonométrie sphérique, 12. — 6. Triangles rectangles, 15. — 7. Applications diverses, 15.	
CHAPITRE III. — Détermination des distances angulaires	19
8. Mesure des angles. Lunette et micromètre, 19. — 9. Cercles divisés, 22.	
CHAPITRE IV. — Instruments ; procédés d'observation	25
10. Instrument méridien, 25. — 11. Equatoriaux visuels et photographiques, 32. — 12. Catalogues d'étoiles, 37. — 13. Longitude et latitude géographiques, 38.	
CHAPITRE V. — Corrections des observations	44
14. Parallaxes, 44. — 15. Aberration, 48. — 16. Réfraction atmosphérique, 53. — 17. Précession des équinoxes ; nutation, 58.	
CHAPITRE VI. — Astronomie stellaire.	64
18. Détermination des parallaxes stellaires, 64. — 19. Mouvements propres, 68. — 20. Magnitudes ; dénombrement et distribution des étoiles, 73.	
CHAPITRE VII. — Mouvement du soleil.	78
21. Mouvement apparent du soleil ; détermination du point γ et de l'obliquité de l'écliptique, 78. —	

22. Mouvement elliptique, 81. — 23. Éléments de l'orbite terrestre, 86.	
CHAPITRE VIII. — Temps.	89
24. Unités de temps, 89. — 25. Temps sidéral et temps moyen, 92. — 26. Temps vrai; équation du temps, 94.	
CHAPITRE IX. — Mouvement des planètes.	98
27. Mouvement apparent des planètes, 98. — 28. Lois de Képler. Éléments d'une orbite planétaire, 101. — 29. Éphéméride d'une planète, 104.	
CHAPITRE X. — Gravitation	107
30. La loi de Newton déduite des lois de Képler, 107. — 31. Extension de la loi de Newton; gravitation universelle, 113. — 32. Équations du mouvement relatif; masses des planètes qui ont des satellites, 116. — 33. Aperçu de la théorie des perturbations, 121.	
CHAPITRE XI. — Orbites.	129
34. Détermination d'une orbite d'après les observations; exposé sommaire de la méthode de Laplace, 129. — 35. Comètes, orbites paraboliques; étoiles filantes, 134. — 36. Étoiles doubles, 140.	
CHAPITRE XII. — La lune.	148
37. Mouvement de la lune, 148. — 38. Phases; rotation, 151. — 39. Parallaxe de la lune, 154.	
CHAPITRE XIII. — Éclipses. Parallaxe du soleil.	158
40. Éclipses de lune, 158. — 41. Éclipses de soleil, 163. — 42. Passages de Vénus sur le disque solaire, 168. — 43. Détermination de la parallaxe du soleil, 170.	
CHAPITRE XIV. — Origine du monde solaire.	176
44. Hypothèses cosmogoniques, 176.	
BIBLIOGRAPHIE, SOMMAIRE.	185

COLLECTION
ARMAND COLIN

Chaque volume in-16, broché 6 fr.
Relié 7 fr.

“ Vulgariser sans abaisser ”

BUT DE LA COLLECTION

- 1° Fournir **aux jeunes gens** qui désirent s'initier à la pratique d'une profession ou se perfectionner dans celle qu'ils ont choisie, des instruments commodes de travail, sous la forme de livres courts, et cependant complets, rédigés par des savants, par des spécialistes en chaque matière.
- 2° Mettre à la portée de **toute personne cultivée** que les nécessités de la vie ont obligée à se spécialiser, des exposés clairs et précis des connaissances jusqu'ici acquises dans les domaines les plus variés.

La COLLECTION ARMAND COLIN répond ainsi à ce besoin qu'a tout homme intelligent de sortir de temps en temps de sa spécialité pour faire, dans les champs d'action d'autrui, une excursion qui ne peut être instructive que si elle a lieu sous la direction d'un guide sûr. *C'est ce guide que fournit la « Collection Armand Colin ».*

- 3° Répandre au dehors des livres exposant les idées, les méthodes et le goût français, et faire ainsi rayonner dans le monde la science et la culture françaises.

LES MOYENS

La COLLECTION ARMAND COLIN comprendra un grand nombre de petits volumes, de 200 à 220 pages chacun, illustrés d'abondantes figures documentaires, et dont l'ensemble formera une véritable encyclopédie, sans cesse accrue et rajeunie par la publication de volumes nouveaux, maintenue, par conséquent, au niveau du progrès scientifique et toujours en harmonie avec les besoins du public.

Ces ouvrages sont *actuellement* répartis en 13 sections.

- | | |
|---|---|
| I. - <i>Philosophie.</i> | VIII. - <i>Chimie.</i> |
| II. - <i>Langues et Littératures.</i> | IX. - <i>Biologie.</i> |
| III. - <i>Histoire et Sciences économiques.</i> | X. - <i>Mécanique et Electricité industrielles.</i> |
| IV. - <i>Géographie.</i> | XI. - <i>Génie Civil.</i> |
| V. - <i>Droit.</i> | XII. - <i>Arts Militaires.</i> |
| VI. - <i>Mathématiques.</i> | XIII. - <i>Agriculture.</i> |
| VII. - <i>Physique.</i> | |

Dans chaque section, les spécialistes les mieux qualifiés exposent sur chaque point les faits essentiels, les résultats principaux, les principes fondamentaux ainsi que les méthodes qui servent à établir ces principes, à obtenir ces résultats et à contrôler ces faits.

N° 1

A. BLANC

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

RAYONNEMENT

Principes scientifiques de l'Éclairage

35 figures

CET ouvrage intéresse tous ceux qui ont à faire un choix raisonné entre les différents procédés d'éclairage.

Après avoir clairement exposé les principes sur lesquels doit reposer tout système d'éclairage qui veut être économique et satisfaisant, l'auteur passe en revue et compare tous les appareils, même les plus modernes, et en établit le rendement avec précision.

N° 2

E. JAMMY

Ingénieur en chef aux Forges et Chantiers de la Méditerranée

LA CONSTRUCTION DU VAISSEAU DE GUERRE

183 figures, 4 planches hors texte

CET ouvrage, abondamment illustré et écrit par l'un des hommes à qui nous devons la construction de puissantes unités navales, est à la fois le livre des spécialistes des constructions navales et le livre de tout homme cultivé qui veut s'orienter dans ce carrefour des sciences modernes que forme un de nos navires de guerre.

N° 3

R. BRICARD

Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers

CINÉMATIQUE ET MÉCANISMES

79 figures

D'UNE remarquable simplicité, l'ouvrage de M. Bricard permet à tous ceux qui veulent étudier les mécanismes dans leurs rapports avec les lois du mouvement, de s'initier à cette science avec des connaissances mathématiques très réduites. C'est aussi le livre du praticien qui veut comprendre et perfectionner son travail.

LIBRAIRIE ARMAND COLIN

N° 4

A. BAILLY

Professeur au Lycée Pasteur

.....

L'ÉCOLE CLASSIQUE FRANÇAISE

Les Doctrines et les Hommes 1660-1715

L'AUTEUR s'est proposé de caractériser l'esprit français à l'époque de sa perfection, d'analyser ses qualités de logique, de clarté, de profondeur; de montrer l'identité de doctrines et d'idéal par où se rejoignent des œuvres aussi diverses en apparence que celles d'un Racine, d'un La Fontaine, d'un Bossuet. De larges extraits complètent l'ouvrage.

N° 5

YVES HENRY

Ingénieur Agronome, Inspecteur général de l'Agriculture aux Colonies

.....

ÉLÉMENTS D'AGRICULTURE COLONIALE

PLANTES A HUILE

35 figures

TOUS ceux qui s'occupent de nos produits coloniaux, trouveront dans ce livre, écrit par un homme qui a longtemps vécu dans les pays dont il parle, des renseignements sûrs et indispensables. Les industriels ou commerçants qui utilisent les corps gras d'origine végétale puiseront dans cet ouvrage des indications précieuses.

N° 6

C. GUTTON

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy

.....

TÉLÉGRAPHIE ET TÉLÉPHONIE SANS FIL

(3^e Édition)

107 figures

AVEC une rare simplicité de moyens, presque sans formules mathématiques, l'auteur, savant doublé d'un technicien, permet à tous de comprendre l'ensemble des phénomènes de la Télégraphie et de la Téléphonie sans fil, ces deux sciences appliquées qui prennent dans notre vie quotidienne une place sans cesse plus étendue.

N° 7

EUGÈNE BLOCH

Maitre de Conférences à la Sorbonne

THÉORIE CINÉTIQUE
DES GAZ

7 figures

C'EST le premier exposé en langue française d'une théorie qui fait partie de toute culture scientifique complète. Sobre, clair, précis, ce livre est accessible à tous ceux qui possèdent des éléments des mathématiques et veulent s'initier rapidement à une discipline élevée.

N° 8

J. GEFFROY

Ingénieur des Arts et Manufactures, ancien Professeur à l'École Centrale

TRAITÉ PRATIQUE DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

248 figures

C'EST le livre du débutant en Géométrie Descriptive. L'exposé très simple et très compréhensif des méthodes est suivi d'applications pratiques à la taille des pierres et au trait de charpente. Les théoriciens peuvent y apprendre le rôle pratique de la Géométrie Descriptive, les praticiens peuvent aisément y retrouver l'explication des procédés qu'ils utilisent.

N° 9

H. BÉGHIN

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier

STATIQUE ET DYNAMIQUE
(TOME I)

76 figures

CE sont les lois essentielles de la Mécanique qui sont exposées dans ce livre. L'auteur oriente immédiatement chaque théorie vers les applications qu'elle comporte dans l'industrie. Une foule d'exercices choisis dans le domaine de l'expérience quotidienne de la Mécanique appliquée permettent au lecteur de se familiariser avec les procédés de la Mécanique.

N° 10

H. BÉGHIN

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier

STATIQUE ET DYNAMIQUE

(TOME II)

151 figures

Ce second volume complète heureusement les notions exposées dans le premier. Le sens du concret n'abandonne jamais l'auteur qui enveloppe de réalités les formules, et qui, inversement, dans chaque application pratique, sait discerner et faire comprendre le jeu et le rôle des lois. C'est pourquoi cet ouvrage rendra service aux étudiants des Facultés et des grandes Écoles, ainsi qu'aux ingénieurs qui se sont, dès le début, orientés vers les applications.

N° 11

CH. FABRY

Professeur à la Sorbonne

ÉLÉMENTS D'ÉLECTRICITÉ

70 figures

C'EST un livre pour les débutants, dans lequel les praticiens trouveront matière à réflexion, car il résume l'expérience de longues années d'enseignement et de recherches scientifiques. Tous seront étonnés de la simplicité que revêt l'exposition d'une science donnée parfois comme mystérieuse et compliquée.

N° 12

Colonel J. ROUELLE

LA FONTE

(ÉLABORATION ET TRAVAIL)

29 figures

CET ouvrage donne, en un style clair et précis, les principes fondamentaux, les points essentiels et les plus importants détails du travail de la fonte. Extrêmement documenté, malgré sa concision, il sera étudié avec fruit par les jeunes gens qui désirent entrer dans l'industrie métallurgique, et il sera lu avec intérêt par tous ceux qui veulent se tenir au courant du mouvement économique de notre pays.

N° 13

ET. RABAUD

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

L'HÉRÉDITÉ

34 figures

CET ouvrage intéresse toutes les personnes cultivées ; il est en outre précieux pour les éleveurs qui veulent obtenir des sélections raisonnées. C'est un résumé simple et clair de nos connaissances actuelles sur l'hérédité, une analyse de son mécanisme et des facteurs qui nous permettent d'en modifier les conséquences au moyen de l'éducation.

N° 14

V. AUGER

Professeur de Chimie analytique à la Sorbonne

PRINCIPES DE L'ANALYSE CHIMIQUE

77 figures

M. AUGER a condensé dans ce petit traité tout ce qu'une expérience de vingt années d'enseignement lui a appris à regarder comme nécessaire au chimiste qui veut connaître, comprendre et même perfectionner les méthodes analytiques. Aux étudiants comme aux initiés, ce livre présente les données nécessaires à la connaissance raisonnée de la chimie analytique.

N° 15

M. SORRE

Maitre de Conférences à la Faculté des Lettres de Bordeaux

LES PYRÉNÉES

3 cartes dans le texte — 3 cartes hors texte — 6 photographies

DANS cette remarquable synthèse de nos connaissances sur les Pyrénées, l'auteur s'est attaché d'abord à faire ressortir le côté pittoresque de la grande chaîne. Les explications claires et précises ne manqueront pas de satisfaire la curiosité des géographes et des géologues, amateurs ou professionnels.

N° 16

P. VEROLA
Ingénieur en Chef des Poudres

CHIMIE ET FABRICATION DES
EXPLOSIFS

9 figures

CE livre d'une haute portée scientifique, propre à satisfaire les plus exigeants des techniciens et à fournir des documents précis à ceux qui veulent le devenir, est une lecture saine et réconfortante. En étudiant cet exposé si lumineux et si précis des explosifs anciens et modernes, on ne peut qu'admirer l'énergie, l'ingéniosité qu'ont dû déployer nos ingénieurs et nos savants pour vaincre un ennemi supérieurement outillé.

N° 17

A. MATHIEZ
Professeur à l'Université de Dijon

LA RÉVOLUTION FRANÇAISE
(TOME I)

La Chute de la Royauté

M. MATHIEZ a su accomplir ce miracle de renouveler un sujet qu'on pouvait croire épuisé : admirablement documenté par ses recherches personnelles sur les hommes de la Révolution, il projette des lumières nouvelles sur une époque que tant d'historiens éminents semblaient avoir éclairée jusque dans les coins les plus obscurs.

N° 18

F. MAURETTE
Professeur à l'École des Hautes Études Commerciales

**LES GRANDS MARCHÉS DES
MATIÈRES PREMIÈRES**

8 cartes et 3 graphiques

QUELS sont les grands marchés de ces matières dont dépend la vie des individus et des nations : la houille et le pétrole, le coton, la laine et la soie, le fer, le caoutchouc, le blé ? Comment fonctionnent ces marchés ? Se sont-ils déplacés durant la crise que nous venons de traverser ? Quels sont ceux qui ont le plus bel avenir ? Voilà autant de questions que traite M. F. Maurette en des chapitres clairs et brefs qu'illustrent heureusement des croquis et des diagrammes.

N° 19

J. LEVAINVILLE
Docteur de l'Université de Bordeaux

L'INDUSTRIE DU FER EN FRANCE

4 cartes

TECHNICIEN doublé d'un économiste, mettant à profit une expérience longuement acquise dans les mines de France et dans celles de l'Afrique du Nord, M. J. Levainville nous documente merveilleusement sur l'Industrie sidérurgique en France. Suivant son évolution tantôt progressive, tantôt régressive, il nous expose avec une clarté faite de logique les raisons économiques des fluctuations qu'elle a subies au cours des siècles.

N° 20

Colonel J. ROUELLE

L'ACIER (ÉLABORATION ET TRAVAIL)

45 figures

CET ouvrage qui, avec celui relatif à la *Fonte*, et avec le livre écrit par M. J. Levainville sur l'Industrie du *Fer*, forme une trilogie documentaire de tout premier ordre, sera consulté avec intérêt par tous ceux que préoccupe l'avenir de la France. N'oublions pas, en effet, que grâce aux territoires récupérés, nous occupons la seconde place sur le marché mondial du fer et que le développement de l'Industrie sidérurgique est destiné à être l'un des principaux facteurs de notre relèvement économique.

N° 21

GEORGES SCELLE
Professeur à la Faculté de Droit de Dijon

LE DROIT OUVRIER

Tableau de la Législation française actuelle

L'AUTEUR étudie successivement l'évolution historique du Droit ouvrier, dominée par le facteur parlementaire et par l'action syndicaliste ; la vie interne, c'est-à-dire le mécanisme juridique des lois ouvrières ; enfin la vie de l'ouvrier qui utilise, de sa naissance à sa mort, les armes légales que ce Droit lui fournit.

Le livre est alerte, vivant, prenant, comme les objets dont il traite. C'est le livre d'un juriste rompu aux doctrines les plus récentes du Droit public et privé, en même temps qu'une œuvre de science sociale.

N° 22

D^r P. RAVAUT
Médecin de l'Hôpital Saint-Louis

LES MALADIES DITES VÉNÉRIENNES

22 figures

CE livre écrit par un maître incontesté, pousse un cri d'alarme et nous donne en même temps une raison d'espérer.

Un cri d'alarme, car les statistiques qu'on y trouve nous montrent quel effroyable danger menace la race française, surtout depuis que la guerre a étendu, dans de si inquiétantes proportions, le domaine de ces maladies, cause de dépopulation et facteurs de dégénérescence.

Une raison d'espérer, car le Docteur Ravaut nous montre qu'il est possible de lutter contre elles et même de les vaincre. Il en indique les moyens.

N° 23

HENRI CAVAILLES
Professeur au Lycée de Bordeaux

LA HOUILLE BLANCHE

8 cartes et 4 figures

L'ÉTUDE géographique de la houille blanche, que l'auteur nous présente, est le premier ouvrage d'ensemble renseignant le public sur ce qu'est la houille blanche, et donnant, par régions, l'état actuel de l'Industrie hydro-électrique en France et à l'Étranger.

Ce livre, où M. Cavailles discute avec une rare compétence toutes les conditions du problème, est donc indispensable à tous ceux qui veulent suivre les phases de la lutte ouverte entre la Houille blanche et la Houille noire, lutte que les besoins croissants de l'Industrie rend de plus en plus ardente.

N° 24

G. ANDRÉ
Professeur à l'Institut Agronomique

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SOLS EN AGRICULTURE

JUSQU'A ce que MM. André et Berthelot nous aient initiés à la vie souterraine des infiniment petits, les pratiques agricoles, relatives au sol, étaient restées empiriques. Elles sont, grâce à ces deux savants, entrées dans une voie scientifique où la marche est plus ferme, surtout si l'on a soin de prendre un guide auquel on puisse, en toute sûreté, se confier. Ce guide c'est le livre que nous offre M. André, et où, dans un langage à la fois simple, clair et précis, il nous met au courant des dernières données de cette science qui lui doit presque tout.

N° 25

GEORGES HARDY

Directeur general de l'Enseignement au Maroc

.....
VUE GÉNÉRALE DE

L'HISTOIRE D'AFRIQUE

A L'HEURE où les œuvres de colonisation et les partages de terres africaines passent au premier rang des préoccupations internationales, nous n'avons plus le droit d'ignorer une histoire qui, jusqu'ici, n'avait pas encore été écrite, et dans laquelle l'Europe, par son intervention continuelle, a sa part de responsabilité. Tout le monde voudra donc lire ce livre extrêmement attachant, dans lequel, à aucun moment, l'intérêt ne faiblit et où l'auteur pose, avec autant de clarté que de méthode, le passionnant problème africain.

N° 26

H. PARISELLE

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

.....
LES

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

82 figures

CE livre a été écrit par un maître pour réagir contre la défaveur dont l'étude de l'Optique géométrique était l'objet en France, ce qui nous avait rendus tributaires de l'Allemagne pour les Instruments d'optique.

La création récente d'un Institut d'Optique a mis fin à ce regrettable état de choses ; mais M. Pariselle n'a pas voulu que, seuls, les Ingénieurs opticiens sortis de cet Institut fussent au courant de la théorie des instruments d'optique : c'est pourquoi il a écrit son livre.

N° 27

P. MARTINO

Professeur à la Faculté des Lettres d'Alger

.....
LE

NATURALISME FRANÇAIS

QUELLE est l'origine du Naturalisme ? Comment et pourquoi cette doctrine s'écarta-t-elle si vite des rigides théories qui lui avaient servi de base et avaient constitué comme l'ossature de ses premières grandes œuvres ? Comment sa fortune fut-elle brusquement arrêtée par des changements survenus dans l'atmosphère politique du pays ? Que reste-t-il de ce grand mouvement ?

Tels sont quelques-uns des problèmes que nous pose et résout M. Martino dans ce livre attachant comme un roman.

N° 28

M. LE BESNERAIS
Ingénieur en Chef du Génie Maritime

THÉORIE DU NAVIRE

(TOME I)

61 figures

ON a toujours construit des bateaux, mais ce n'est que depuis peu qu'on connaît les conditions de leur stabilité. M. Le Besnerais, dont la réputation n'est plus à faire, nous apprend, dans ce petit livre appelé à rendre à bon compte les mêmes services que de longs et coûteux ouvrages, tout l'essentiel de la "Théorie du Navire". Il s'impose aux techniciens et plaira aux gens instruits, curieux des choses de la mer.

N° 29

L. JOLEAUD
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris

ÉLÉMENTS DE PALÉONTOLOGIE

(TOME I)

53 figures

ENTRE les formes animales qui peuplèrent le globe naissant et l'homme qui est au sommet de l'échelle des êtres, beaucoup de formes étranges apparurent, évoluèrent et disparurent. C'est à cette évolution passionnante pour le philosophe comme pour tous ceux qui s'intéressent à la question de nos origines, que M. Joleaud nous fait assister dans ces pages où, à aucun moment, l'intérêt ne faiblit.

N° 30

L. JOLEAUD
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris

ÉLÉMENTS DE PALÉONTOLOGIE

(TOME II)

40 figures

M. JOLEAUD qui, dans le Tome I de son ouvrage, avait entamé l'Histoire de cette évolution, l'achève dans le Tome II et le couronne en nous montrant l'humanité à son aurore et en nous faisant assister à ses patients efforts pour se dégager des entraves qui paralysaient son génie naissant. Beau et bon livre que liront avec passion tous ceux qui inquiète le problème mystérieux de nos origines.

N° 31

M. LARROUY

Ingénieur de l'École Supérieure d'Aéronautique

LE BALLON, L'AVION
LA ROUTE AÉRIENNE

25 figures

INGÉNIEUR, M. Larrouy a eu de fréquentes occasions d'appliquer les théories qui servent de base à l'aéronautique. — Pilote et commandant de centres aériens, il a pu contrôler lui-même ces théories. — Professeur de pilotes, il les a enseignées et a ainsi appris à les rendre accessibles à tous. — Romancier, enfin, il sait intéresser et charmer le lecteur. C'est assez dire que son livre est clair pour les profanes, attrayant pour les gens cultivés, précis pour les techniciens.

N° 32

J. CALMETTE

Professeur à l'Université de Toulouse

LA
SOCIÉTÉ FÉODALE

IL fallait, pour condenser en deux cents pages cet immense sujet, un homme qui connût à fond ce régime étrange qui s'oppose si complètement au statut antique comme au statut moderne. Personne mieux que M. Calmette ne pouvait mener à bien cette gageure.

On s'en rend compte en lisant ce livre qui jette un jour éclatant sur les origines et l'évolution du système féodal, car il semble, à chaque instant, que l'auteur a vraiment vécu ce qu'il raconte.

N° 33

H. LECOMTE

Membre de l'Institut, Professeur au Muséum d'Histoire Naturelle

BOIS COLONIAUX

28 figures

AVEC une ardeur d'apôtre, M. Lecomte dont la compétence et le savoir sont universellement reconnus, nous montre dans ce petit livre de quelles richesses nous disposerions si l'on savait exploiter les cent millions d'hectares de nos forêts coloniales.

Ce livre sera pour beaucoup de Français une révélation et un réconfort au moment où se pose l'angoissant problème de la reconstruction de nos régions dévastées.

N^o 34

ÉMILE BOREL

Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne

et

ROBERT DELTHEIL

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

PROBABILITÉS, ERREURS

10 figures

PERSONNE, pour écrire un livre de haute vulgarisation sur le calcul des probabilités, n'était mieux qualifié que MM. Borel et Deltheil. Aussi, n'y a-t-il pas lieu de s'étonner que ce petit livre soit un modèle de méthode et de clarté. Il sera apprécié non seulement par les mathématiciens, mais aussi par tous les gens cultivés qui s'intéressent aux divers problèmes dont la solution paraît livrée aux fantaisies de ce dieu fantasque qu'on nomme le Hasard.

N^o 35

CH. MAURAIN

Professeur à l'Université de Paris
Directeur de l'Institut Physique du Globe

LA PHYSIQUE DU GLOBE

21 figures

C'EST d'une façon élémentaire et en se mettant à la portée de tous que l'auteur traite les questions de Physique du Globe qui ont fait, ces dernières années, l'objet de son enseignement à la Sorbonne. Cet ouvrage sera d'autant mieux accueilli que cette branche importante des Sciences Physiques n'était, il y a peu de temps encore, enseignée nulle part dans les Universités françaises.

N^o 36

J. ROUCH

Professeur à l'École Navale

L'ATMOSPHÈRE ET LA PRÉVISION DU TEMPS

36 figures

PERSONNE n'est fixé sur la méthode à suivre pour prévoir le temps et il était indispensable qu'un homme autorisé comme le Commandant Rouch, qui a dirigé les services météorologiques de l'Armée pendant la guerre, tentât de nous faire connaître les lois qui régissent notre atmosphère. Grâce à ce livre, les agriculteurs, les marins, les touristes, etc., pourront prévoir quelques heures, parfois quelques jours à l'avance, le temps qu'il fera.

N° 37

PIERRE JOLIBOIS

Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines

LES MÉTHODES ACTUELLES
DE LA CHIMIE

45 figures

L'AUTEUR nous présente d'une manière simple, avec le minimum de formules, les méthodes expérimentales ou théoriques d'un usage courant dans la Chimie moderne. C'est dire que les jeunes gens des Facultés ou des grandes Ecoles, les techniciens de l'Industrie en quête de procédés de recherches et, en général, tous ceux qui s'engagent dans la voie des recherches chimiques ne pourront se passer de ce petit ouvrage d'initiation, où ils trouveront exposées dans un ordre tout à fait nouveau les différentes disciplines de la Science actuelle.

N° 38

BERNARD LAVERGNE

Professeur à la Faculté de Droit de Nancy

LES COOPÉRATIVES
DE CONSOMMATION EN FRANCE

ON ne connaît pas encore chez nous le mouvement coopératif. Le livre de M. Lavergne est destiné à vulgariser l'idée. Il nous montre le but, les progrès, les ambitions, l'avenir de l'idée coopérative. Il nous fait voir comment, en appliquant avec sincérité cette idée, on résout facilement les problèmes sociaux les plus irritants et les plus complexes. Excellent livre que voudront surtout étudier ceux qu'inquiète la cherté de la vie.

N° 39

Général THEVENET

Ancien Gouverneur de Belfort

LA GRANDE GUERRE

15 cartes

M. le Général Thevenet, qui fut pendant la guerre Gouverneur de Belfort, a, tout en reconnaissant les erreurs ou les fautes commises, élevé aux poilus de tous grades qui les ont réparées un monument aussi solide que le grès rouge de la citadelle dont on lui avait confié la garde.

Livre clair, précis et impartial, pour lequel le Maréchal Foch a bien voulu écrire une préface, et qui permet de suivre sans fatigue et de comprendre sans effort toutes les phases du grand drame qui vient de secouer le monde.

N° 45

ÉMILE RIPERT

Professeur de langue et de littérature provençale
à la Faculté des Lettres de l'Université d'Aix-Marseille

LE FÉLIBRIGE

ÉTANT à la fois poète, érudit et Provençal, M. Émile Ripert était tout désigné pour écrire cette histoire, que l'on sent émue, de ce qu'on pourrait appeler « la revanche de la Langue d'Oc ». Nul n'était mieux qualifié que lui pour nous faire aimer les Félibres et admirer comme il mérite d'être admiré, l'effort félibréen.

N° 46

A. LAURENS

Capitaine de Frégate
Chef de la section Historique de l'État-Major de la Marine

LE BLOCUS ET LA GUERRE SOUS-MARINE

LE C^t Laurens était, pendant les hostilités, chef du Service des Renseignements de la Direction générale de la guerre sous-marine. On ne sera pas étonné de trouver dans son livre des précisions extrêmement curieuses que les spécialistes eux-mêmes ignorent et grâce auxquelles on comprend enfin beaucoup d'événements qui étaient demeurés jusqu'à ce jour quelque peu obscurs et même mystérieux. Ce livre est écrit d'une plume alerte avec une concision toute militaire et ce n'est pas là son moindre mérite.

N° 51

CL. GIGNOUX

Chargé de Cours à la Faculté de Droit de Nancy

L'APRÈS-GUERRE ET LA POLITIQUE COMMERCIALE

LA guerre ayant presque supprimé le commerce international, l'a laissé dans un état de paralysie grave, et les gouvernements ont essayé de tous les remèdes pour le rétablir. C'est l'étude de l'ensemble complexe de ces remèdes : décrets, traités de commerce, tarifs douaniers, documents législatifs de toute sorte, qu'a tentée M. Gignoux, pour en dégager les grandes lignes de l'évolution politique commerciale de la France et des autres États depuis la guerre.

