877

P S Laplace

Probabilités

II

DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE
N DE MÉMOIRES ET OUVRAGES
par les soins de Maurice SOLOVINE

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR LES

PROBABILITÉS

PAR

PIERRE-SIMON LAPLACE

II

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1921

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR LES

PROBABILITÉS

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS

Application du Calcul des Probabilités aux sciences morales.

On vient de voir les avantages de l'analyse des probabilités dans la recherche des lois des phénomènes naturels dont les causes sont inconnues ou trop compliquées pour que leurs effets puissent être soumis au calcul. C'est le cas de presque tous les objets des sciences morales. Tant de causes imprévues, ou cachées, ou inappréciables, influent sur les institutions humaines, qu'il est impossible d'en juger *à priori* les résultats. La série des événements que le temps amène, développe ces résultats et indique les moyens de remédier à ceux qui sont nuisibles. On a souvent fait à cet égard des lois sages, mais, parce que l'on avait négligé d'en conserver les motifs, plusieurs ont été abrogées comme inutiles, et il a fallu pour les rétablir que de fâcheuses expériences en aient fait de nouveau sentir le besoin. Il est donc bien important de tenir, dans chaque branche de l'administration publique, un registre exact des effets qu'ont produits les divers moyens dont on a fait usage, et qui sont autant d'expériences faites en grand par les gouvernements. Appliquons aux sciences politiques et morales la méthode fondée sur l'observation et sur le calcul, méthode qui nous a si bien servi dans les sciences naturelles. N'opposons point une résistance inutile et souvent dangereuse aux effets inévitables du progrès des lumières, mais ne changeons qu'avec une circonspection extrême nos institutions et les usages auxquels nous sommes depuis longtemps pliés. Nous connaissons bien par l'expérience du passé les inconvénients qu'ils présentent, mais nous ignorons quelle est l'étendue des maux que leur changement peut produire. Dans cette ignorance, la théorie des probabilités prescrit d'éviter tout changement, surtout il faut éviter les changements brusques qui dans l'ordre moral, comme dans l'ordre physique, ne s'opèrent jamais sans une grande perte de force vive.

Déjà le calcul des probabilités a été appliqué avec succès à plusieurs objets des sciences morales. Je vais en présenter ici les principaux résultats.

De la Probabilité des témoignages.

La plupart de nos jugements étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul. La chose, il est vrai, devient souvent impossible, par la difficulté d'apprécier la véracité des témoins et par le grand nombre de circonstances dont les faits qu'ils attestent sont accompagnés. Mais on peut dans plusieurs cas résoudre des problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec les questions qu'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider et à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels de mauvais raisonnements nous exposent. Une approximation de ce genre, lorsqu'elle est bien conduite, est toujours préférable aux raisonnements les plus spécieux. Essayons donc de donner quelques règles générales pour y parvenir.

On a extrait un seul numéro d'une urne qui en renferme mille. Un témoin de ce tirage annonce que le n° 79 est sorti; on demande la probabilité de cette sortie. Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, en sorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{1}{10}$. Ici, l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des deux hypothèses suivantes, savoir, que le témoin énonce la vérité, ou qu'il trompe. Suivant le principe que nous avons exposé sur la probabilité des causes, tirée des événements observés, il faut d'abord déterminer *à priori* la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin; on aura donc $\frac{9}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 n'est pas sorti, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Mais pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non sortis; et comme il est supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79 est $\frac{1}{999}$; en multipliant donc cette probabilité par la précédente, on aura $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, dans la seconde hypothèse. Il faut encore multiplier cette probabilité par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même, ce qui donne $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité de l'événement, relative à cette hypothèse. Présentement, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses, on aura par le sixième principe la probabilité de la première hypothèse, et cette probabilité sera $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire la véracité même du témoin. C'est aussi la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non-sortie de ce numéro est $\frac{1}{10}$.

Si le témoin voulant tromper avait quelque intérêt à choisir le n° 79 parmi les numéros non sortis; s'il jugeait, par exemple, qu'ayant placé sur ce numéro une mise considérable, l'annonce de sa sortie augmentera son crédit, la probabilité qu'il choisira ce numéro ne sera plus, comme auparavant, $\frac{1}{999}$; elle pourra être alors $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., suivant l'intérêt qu'il aura d'annoncer sa sortie. En la supposant $\frac{1}{9}$, il faudra multiplier par cette fraction la probabilité $\frac{999}{1000}$, pour avoir dans l'hypothèse du mensonge la probabilité de l'événement observé, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{10}$; ce qui donne $\frac{111}{10000}$ pour la probabilité de l'événement dans la seconde hypothèse. Alors la probabilité de la première hypothèse, ou de la sortie du n° 79, se réduit par la règle précédente à $\frac{9}{120}$. Elle est donc très affaiblie par la considération de l'intérêt que le témoin peut avoir à annoncer la sortie du n° 79. A la vérité, ce même intérêt augmente la probabilité $\frac{9}{10}$ que le témoin dira la vérité, si le n° 79 sort. Mais cette probabilité ne peut excéder l'unité ou $\frac{10}{10}$; ainsi la probabilité de la sortie du n° 79 ne surpassera pas $\frac{10}{121}$. Le bon sens nous dicte que cet intérêt doit inspirer de la défiance; mais le calcul en apprécie l'influence.

La probabilité *à priori* du numéro énoncé par le témoin est l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne; elle se transforme, en vertu du témoignage, dans la véracité même du témoin; elle peut donc être affaiblie par ce témoignage. Si, par exemple, l'urne ne renferme que deux numéros, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1, et si la véracité d'un témoin qui l'annonce est $\frac{4}{10}$, cette sortie en devient moins probable. En effet, il est visible que le témoin ayant alors plus de pente vers le mensonge que vers la vérité, son témoignage doit diminuer la probabilité du fait attesté, toutes les fois que cette probabilité égale ou surpasse $\frac{1}{2}$. Mais s'il y a trois numéros dans l'urne, la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1 est accrue par l'affirmation d'un témoin dont la véracité surpasse $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme 999 boules noires et une boule blanche, et qu'une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche. La probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori* dans la première hypothèse, sera ici, comme dans la question précédente, égale à $\frac{9}{10000}$. Mais dans l'hypothèse où le témoin trompe, la boule blanche n'est pas sortie, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{1}{10}$ du mensonge, ce qui donne $\frac{999}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à la seconde hypothèse. Cette probabilité n'était que $\frac{1}{10000}$ dans la question précédente : cette grande différence tient à ce qu'une boule noire étant sortie, le témoin qui veut tromper n'a point de choix à faire parmi les 999 boules non sorties, pour annoncer la sortie d'une boule blanche. Maintenant, si l'on forme deux fractions dont les numérateurs soient les probabilités relatives à chaque hypothèse, et dont le dénominateur commun soit la somme de ces probabilités, on aura $\frac{9}{1008}$ pour la probabilité de la première hypothèse et de la sortie d'une boule blanche, et $\frac{999}{1008}$ pour la probabilité de la seconde hypothèse et de la sortie d'une boule noire. Cette dernière probabilité est fort approchante de la certitude : elle en approcherait beaucoup plus encore, et deviendrait $\frac{999999}{1000008}$, si l'urne renfermait un million de boules dont une seule serait blanche, la sortie d'une boule blanche devenant alors beaucoup plus extraordinaire. On voit ainsi comment la probabilité du mensonge croît à mesure que le fait devient plus extraordinaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que le témoin ne se trompait point, mais si l'on admet encore la chance de son erreur, le fait extraordinaire devient plus invraisemblable. Alors au lieu de deux hypothèses, on aura les quatre suivantes, savoir, celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point ; celle du témoin ne trompant point et se trompant ; l'hypothèse du témoin trompant et ne se trompant point ; enfin celle du témoin trompant et se trompant. En déterminant à *priori* dans chacune de ces hypothèses la probabilité de l'événement observé, on trouve par le sixième principe la probabilité que le fait attesté est faux égale à une fraction dont le numérateur est le nombre des boules noires de l'urne, multiplié par la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et se trompe, ou qu'il trompe et ne se trompe point et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté de la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ou qu'il trompe et se trompe à la fois. On voit par là que si le nombre des boules noires de l'urne est très grand, ce qui rend extraordinaire la sortie de la boule blanche, la probabilité que le fait attesté n'est pas approche extrêmement de la certitude.

En étendant cette conséquence à tous les faits extraordinaires, il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin devient d'autant plus grande, que le fait attesté est plus extraordinaire. Quelques auteurs ont avancé le contraire, en se fondant sur ce que la vue d'un fait extraordinaire, étant parfaitement semblable à celle d'un fait ordinaire, les mêmes motifs doivent nous porter à croire également le témoin, quand il affirme l'un ou l'autre de ces faits. Le simple bon sens repousse une aussi étrange assertion, mais le calcul des probabilités, en confirmant l'indication du sens commun, apprécie de plus l'invraisemblance des témoignages sur les faits extraordinaires.

Ces auteurs insistent et supposent deux témoins également dignes de foi, dont le premier atteste qu'il a vu mort, il y a quinze jours, un individu que le second témoin affirme avoir vu hier, plein de vie. L'un ou l'autre de ces faits n'offre rien d'invraisemblable. La résurrection de l'individu est une conséquence de leur ensemble; mais les témoignages ne portant point directement sur elle, ce qu'elle a d'extraordinaire ne doit point affaiblir la croyance qui leur est due. (*Encyclopédie*, art. *Certitude.*)

Cependant, si la conséquence qui résulte de l'ensemble des témoignages était impossible, l'un d'eux serait nécessairement faux; or une conséquence impossible est la limite des conséquences extraordinaires, comme l'erreur est la limite des invraisemblances; la valeur des témoignages, qui devient nulle dans le cas d'une conséquence impossible, doit donc être très affaiblie dans celui d'une conséquence extraordinaire. C'est, en effet, ce que le calcul des probabilités confirme.

Pour le faire voir, considérons deux urnes A et B dont la première contienne un million de boules blanches, et la seconde un million de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne dont on extrait ensuite une boule. Deux témoins, l'un du premier tirage, l'autre du second, attestent que la boule qu'ils ont vu extraire est blanche, sans indiquer l'urne dont elle a été extraite. Chaque témoignage pris isolément n'a rien d'invraisemblable, et il est facile de voir que la probabilité du fait attesté est la véracité même du témoin. Mais il suit de l'ensemble des témoignages, qu'une boule blanche a été extraite de l'urne A au premier tirage, et qu'ensuite, mise dans l'urne B, elle a reparu au second tirage, ce qui est fort extraordinaire; car cette seconde urne renfermant alors une boule blanche sur un million de boules noires, la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{1000001}$. Pour déterminer l'affaiblissement qui en résulte dans la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, nous remarquerons que l'événement observé est ici l'affirmation par chacun d'eux, que la boule qu'il a vu extraire est blanche. Représentons par $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il énonce la vérité, ce qui peut avoir lieu dans le cas présent, lorsque le témoin ne trompe point et ne se trompe point, et lorsqu'il trompe et se trompe à la fois. On peut former les quatre hypothèses suivantes.

1° Le premier et le second témoin disent la vérité. Alors une boule blanche a d'abord été extraite de l'urne A, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite au premier tirage a pu sortir également de l'une ou de l'autre urne. Ensuite, la boule extraite mise dans l'urne B a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement est $\frac{1}{1000001}$; la probabilité du fait énoncé est donc $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que les témoins disent la vérité, on aura $\frac{81}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

2° Le premier témoin dit la vérité, et le second ne la dit point, soit qu'il trompe et ne se trompe point, soit qu'il ne trompe point et se trompe. Alors une boule blanche est sortie de l'urne A au premier tirage, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule ayant été mise dans l'urne B, une boule noire en a été extraite : la probabilité de cette extraction est $\frac{1000000}{1000001}$; on a donc $\frac{1000000}{2000002}$ pour la probabilité de l'événement composé. En la multipliant par le produit des deux probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que le premier témoin dit la vérité, et que le second ne la dit point, on aura $\frac{9000000}{200000200}$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

3° Le premier témoin ne dit pas la vérité, et le second l'énonce. Alors une boule noire est sortie de l'urne B au premier tirage, et après avoir été mise dans l'urne A, une boule blanche a été extraite de cette urne. La probabilité du premier de ces événements est $\frac{1}{2}$, et celle du second est $\frac{1000000}{1000001}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{1000000}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$, que le premier témoin ne dit pas la vérité et que le second l'énonce, on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à cette hypothèse.

4° Enfin, aucun des témoins ne dit la vérité. Alors une boule noire a été extraite de l'urne B au premier tirage; ensuite ayant été mise dans l'urne A, elle a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$, que chaque témoin ne dit pas la vérité, on aura $\frac{1}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, savoir, qu'une boule blanche a été extraite à chacun des tirages, il faut diviser la probabilité correspondante à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses, et alors on a pour cette probabilité $\frac{81}{1800082}$, fraction extrêmement petite.

Si les deux témoins affirmaient, le premier, qu'une boule blanche a été extraite de l'une des deux urnes A et B; le second, qu'une boule blanche a été pareillement extraite de l'une des deux urnes A′ et B′, en tout semblables aux premières, la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins serait le produit des probabilités de leurs témoignages ou $\frac{81}{100}$; elle serait donc cent quatre-vingt mille fois au moins plus grande que la précédente. On voit par là, combien dans le premier cas la réapparition au second tirage de la boule blanche extraite au premier, conséquence extraordinaire des deux témoignages, en affaiblit la valeur.

Nous n'ajouterions point foi au témoignage d'un homme qui nous attesterait qu'en projetant cent dés en l'air, ils sont tous retombés sur la même face. Si nous avions été nous mêmes spectateurs de cet événement, nous n'en croirions nos propres yeux qu'après en avoir scrupuleusement examiné toutes les circonstances, et après en avoir rendu d'autres yeux témoins, pour être bien sûrs qu'il n'y a eu ni hallucination, ni prestige. Mais après cet examen, nous ne balancerions point à l'admettre, malgré son extrême invraisemblance; et personne ne serait tenté, pour l'expliquer, de recourir à un renversement des lois de la vision. Nous devons en conclure que la probabilité de la constance des lois de la nature est pour nous supérieure à celle que l'événement dont il s'agit ne doit point avoir lieu, probabilité supérieure elle-même à celle de la plupart des faits historiques que nous regardons comme incontestables. On peut juger par là du poids immense de témoignages nécessaire pour admettre une suspension des lois naturelles, et combien il serait abusif d'appliquer à ce cas les règles ordinaires de la critique. Tous ceux qui, sans offrir cette immensité de témoignages, étayent ce qu'ils avancent de récits d'événements contraires à ces lois, affaiblissent plutôt qu'ils n'augmentent la croyance qu'ils cherchent à inspirer, car alors ces récits rendent très probable l'erreur ou le mensonge de leurs auteurs. Mais ce qui diminue la croyance des hommes éclairés, accroît souvent celle du vulgaire, toujours avide du merveilleux.

Il y a des choses tellement extraordinaires, que rien ne peut en balancer l'invraisemblance. Mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages; et quand cette opinion vient à changer, un récit absurde admis unanimement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivants qu'une nouvelle preuve de l'extrême influence de l'opinion générale sur les meilleurs esprits. Deux grands hommes du siècle de Louis XIV, Racine et Pascal, en sont des exemples frappants. Il est affligeant de voir avec quel complaisance Racine, ce peintre admirable du cœur humain et le poète le plus parfait qui fut jamais, rapporte comme miraculeuse la guérison de la jeune Perrier, nièce de Pascal et pensionnaire à l'abbaye de Port-Royal; il est pénible de lire les raisonnements par lesquels Pascal cherche à prouver que ce miracle devenait nécessaire à la religion, pour justifier la doctrine des religieuses de cette abbaye, alors persécutées par les Jésuites. La jeune Perrier était depuis trois ans et demi affligée d'une fistule lacrymale : elle toucha de son œil malade une relique que l'on prétendait être une des épines de la couronne du Sauveur, et elle se crut à l'instant guérie. Quelques jours après, les médecins et les chirurgiens constatèrent la guérison, et ils jugèrent que la nature et les remèdes n'y avaient eu aucune part. Cet événement, arrivé en 1656, ayant fait un grand bruit, « tout Paris se porta, dit Racine, à Port-Royal. La foule croissait de jour en jour, et Dieu même semblait prendre plaisir à autoriser la dévotion des peuples, par la quantité de miracles qui se firent en cette église. » A cette époque, les miracles et les sortilèges ne paraissaient pas encore invraisemblables, et l'on n'hésitait point à leur attribuer les singularités de la nature, que l'on ne pouvait autrement expliquer.

Cette manière d'envisager les effets extraordinaires se retrouve dans les ouvrages les plus remarquables du siècle de Louis XIV, dans l'Essai même sur l'entendement humain du sage Locke, qui dit en parlant des degrés d'assentiment : « quoique la commune expérience et le cours ordinaire des choses aient avec raison une grande influence sur l'esprit des hommes, pour les porter à donner ou à refuser leur consentement à une chose qui leur est proposée à croire, il y a pourtant un cas où ce qu'il y a d'étrange dans un fait n'affaiblit point l'assentiment que nous devons donner au témoignage sincère sur lequel il est fondé. Lorsque des événements surnaturels sont conformes aux fins que se propose celui qui a le pouvoir de changer le cours de la nature, dans un tel temps et dans de telles circonstances, ils peuvent être d'autant plus propres à trouver créance dans nos esprits, qu'ils sont plus au-dessus des observations ordinaires, ou même qu'ils y sont plus opposés. » Les vrais principes de la probabilité des témoignages, ayant été ainsi méconnus des philosophes auxquels la raison est principalement redevable de ses progrès, j'ai cru devoir exposer avec étendue les résultats du calcul sur cet important objet.

Ici se présente naturellement la discussion d'un argument fameux de Pascal, que Craig, mathématicien anglais, a reproduit sous une forme géométrique. Des témoins attestent qu'ils tiennent de la Divinité même, qu'en se conformant à telle chose, on jouira, non pas d'une ou de deux, mais d'une infinité de vies heureuses. Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu qu'elle ne soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage de ceux qui se conforment à la chose prescrite est infini, puisqu'il est le produit de cette probabilité par un bien infini; on ne doit donc point balancer à se procurer cet avantage.

Cet argument est fondé sur le nombre infini des vies heureuses promises, au nom de la Divinité, par les témoins; il faudrait donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exagèrent leurs promesses au delà de toutes limites, conséquence qui répugne au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage, au point de la rendre infiniment petite ou nulle. En effet, ce cas revient à celui d'un témoin qui annoncerait la sortie du numéro le plus élevé d'une urne remplie d'un grand nombre de numéros dont un seul a été extrait, et qui aurait un grand intérêt à annoncer la sortie de ce numéro. On a vu précédemment combien cet intérêt affaiblit son témoignage. En n'évaluant qu'à $\frac{1}{2}$ la probabilité que, si le témoin trompe, il choisira le plus grand numéro, le calcul donne la probabilité de son annonce plus petite qu'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus la moitié du produit du nombre des numéros, par la probabilité du mensonge considérée *à priori* ou indépendamment de l'annonce. Pour assimiler ce cas à celui de l'argument de Pascal, il suffit de représenter par les numéros de l'urne tous les nombres possibles de vies heureuses, ce qui rend le nombre de ces numéros infini, et d'observer que si les témoins trompent, ils ont le plus grand intérêt, pour accréditer leur mensonge, à promettre une éternité de bonheur. L'expression de la probabilité de leur témoignage devient alors infiniment petite. En la multipliant par le nombre infini de vies heureuses promises, l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de cette promesse, ce qui détruit l'argument de Pascal.

Considérons présentement la probabilité de l'ensemble de plusieurs témoignages sur un fait déterminé. Pour fixer les idées, supposons que ce fait soit la sortie d'un numéro d'une urne qui en renferme cent, et dont on a extrait un seul numéro. Deux témoins de ce tirage annoncent que le n° 2 est sorti, et l'on demande la probabilité résultante de l'ensemble de ces témoignages. On peut former ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité, les témoins trompent. Dans la première hypothèse, le n° 2 est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{100}$. Il faut la multiplier par le produit des véracités des témoins, véracités que nous supposerons être $\frac{9}{10}$ et $\frac{7}{10}$: on aura donc $\frac{6}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la seconde, le n° 2 n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{99}{100}$. Mais l'accord des témoins exige alors qu'en cherchant à tromper, ils choisissent tous deux le numéro 2 sur les 99 numéros non sortis : la probabilité de ce choix, si les témoins ne s'entendent point, est le produit de la fraction $\frac{1}{99}$ par elle-même ; il faut ensuite multiplier ces deux probabilités ensemble, et par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ que les témoins trompent ; on aura ainsi $\frac{1}{330000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse. Maintenant, on aura la probabilité du fait attesté ou de la sortie du n° 2, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses ; cette probabilité sera donc $\frac{2079}{2080}$, et la probabilité de la non-sortie de ce numéro et du mensonge des témoins sera $\frac{1}{2080}$.

Si l'urne ne renfermait que les numéros 1 et 2, on trouverait de la même manière $\frac{21}{22}$ pour la probabilité de la sortie du n° 2, et par conséquent $\frac{1}{22}$ pour la probabilité du mensonge des témoins, probabilité quatre-vingt-quatorze fois au moins plus grande que la précédente. On voit par là combien la probabilité du mensonge des témoins diminue, quand le fait qu'ils attestent est moins probable en lui-même. En effet, on conçoit qu'alors l'accord des témoins, lorsqu'ils trompent, devient plus difficile, à moins qu'ils ne s'entendent, ce que nous ne supposons pas ici.

Dans le cas précédent, où l'urne ne renfermant que deux numéros la probabilité *à priori* du fait attesté est $\frac{1}{2}$, la probabilité résultante des témoignages est le produit des véracités des témoins, divisé par ce produit ajouté à celui des probabilités respectives de leur mensonge.

Il nous reste à considérer l'influence du temps sur la probabilité des faits transmis par une chaîne traditionnelle de témoins. Il est clair que cette probabilité doit diminuer à mesure que la chaîne se prolonge. Si le fait n'a aucune probabilité par lui-même, tel que la sortie d'un n° d'une urne qui en renferme une infinité, celle qu'il acquiert par les témoignages décroît suivant le produit continu de la véracité des témoins. Si le fait a par lui-même une probabilité; si, par exemple, ce fait est la sortie du n° 2 d'une urne qui en renferme un nombre fini, et dont il est certain qu'on a extrait un seul numéro, ce que la chaîne traditionnelle ajoute à cette probabilité décroît suivant un produit continu, dont le premier facteur est le rapport du nombre des numéros de l'urne moins un à ce même nombre, et dont chaque autre facteur est la véracité de chaque témoin, diminuée du rapport de la probabilité de son mensonge au nombre des numéros de l'urne moins un; en sorte que la limite de la probabilité du fait est celle de ce fait considérée *à priori* ou indépendamment des témoignages, probabilité égale à l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne.

L'action du temps affaiblit donc sans cesse la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monuments les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir en multipliant et conservant les témoignages et les monuments qui les étayent. L'imprimerie offre pour cet objet un grand moyen, malheureusement inconnu des anciens. Malgré les avantages infinis qu'elle procure, les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux après des milliers d'années les faits historiques aujourd'hui les plus certains.

Craig a essayé de soumettre au calcul l'affaiblissement graduel des preuves de la religion chrétienne;

en supposant que le monde doit finir à l'époque où elle cessera d'être probable, il trouve que cela doit arriver 1454 ans après le moment où il écrit. Mais son analyse est aussi fautive que son hypothèse sur la durée du monde est bizarre.

Des choix et des décisions des assemblées.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui la composent. Tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent si souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre au calcul cette probabilité. Il y a cependant quelques résultats généraux dictés par le simple bon sens, et que le calcul confirme. Si, par exemple, l'assemblée est très peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision; si cet objet exige des considérations délicates, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, en sorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera; alors la décision de la majorité sera problablement mauvaise, et la crainte à cet égard sera d'autant plus fondée que l'assemblée sera plus nombreuse. Il importe donc à la chose publique que les assemblées n'aient à prononcer que sur des objets à la portée du plus grand nombre : il lui importe que l'instruction soit généralement répandue, et que de bons ouvrages fondés sur la raison et sur l'expérience éclairent ceux qui sont appelés à décider du sort de leurs semblables ou à les gouverner, et les prémunissent d'avance contre les faux aperçus et les préventions de l'ignorance. Les savants ont de fréquentes occasions de remarquer que les premiers aperçus trompent souvent, et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

Il est difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela quelques règles, en considérant les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats, et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre plusieurs candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre, ce qui paraît le plus simple est de faire écrire à chaque votant sur un billet les noms de tous les candidats, suivant l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque manière que les candidats soient comparés entre eux, en sorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence, que les billets établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur une urne qui contienne une infinité de boules, au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats; concevons encore qu'il tire de son urne un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur un billet, à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme sera le candidat que l'assemblée préfère, et qu'en général l'ordre de préférence des candidats sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre des boules que chaque électeur donne aux candidats : ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules, toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles; et l'on aura le nombre de boules, rélatif à chaque candidat, en faisant une somme de tous les nombres que chaque combinaison lui donne, et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du dernier nom, de l'avant-dernier, etc., sont proportionnels aux termes de la progression arithmétique 1, 2, 3, etc. En écrivant donc ainsi sur chaque billet les termes de cette progression, et ajoutant les termes relatifs à chaque candidat sur ces billets, les diverses sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. Tel est le mode d'élection, qu'indique la Théorie des Probabilités. Sans doute, il serait le meilleur, si chaque électeur inscrivait sur son billet les noms des candidats, dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue. Mais les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite doivent troubler cet ordre, et faire placer quelquefois au dernier rang le candidat le plus redoutable à celui que l'on préfère, ce qui donne trop d'avantage aux candidats d'un médiocre mérite. Aussi l'expérience a-t-elle fait abandonner ce mode d'élection dans les établissements qui l'avaient adopté.

L'élection à la majorité absolue des suffrages réunit à la certitude de n'admettre aucun des candidats, que cette majorité rejette, l'avantage d'exprimer le plus souvent le vœu de l'assemblée. Elle coïncide toujours avec le mode précédent, lorsqu'il n'y a que deux candidats. A la vérité, elle expose à l'inconvénient de rendre les élections interminables. Mais l'expérience a fait voir que cet inconvénient est nul, et que le désir général de mettre fin aux élections réunit bientôt la majorité des suffrages sur un des candidats.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet semble devoir être assujetti aux mêmes règles, que l'élection entre plusieurs candidats. Mais il existe entre ces deux cas cette différence, savoir, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrents; au lieu que si les propositions entre lesquelles il faut choisir sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comme on doit alors envisager la question.

Donnons à chaque votant une urne qui renferme un nombre infini de boules, et supposons qu'il les distribue sur les diverses propositions, en raison des probabilités respectives qu'il leur attribue. Il est clair que le nombre total des boules exprimant la certitude, et le votant étant par l'hypothèse assuré que l'une des propositions doit être vraie, il répartira ce nombre en entier sur les propositions. Le problème se réduit donc à déterminer les combinaisons dans lesquelles les boules seront réparties de manière qu'il y en ait plus sur la première proposition du billet que sur la seconde; plus sur la seconde que sur la troisième, etc.; à faire les sommes de tous les nombres de boules, relatifs à chaque proposition dans ces diverses combinaisons et à diviser cette somme par le nombre des combinaisons : les quotients seront les nombres de boules que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve par l'analyse qu'en partant de la dernière proposition pour remonter à la première, ces quotients sont entre eux comme les quantités suivantes : 1° l'unité divisée par le nombre des propositions ; 2° la quantité précédente augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins une ; 3° cette seconde quantité augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins deux, et ainsi du reste. On écrira donc sur chaque billet ces quantités à côté des propositions correspondantes, et en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition sur les divers billets, les sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Disons un mot de la manière de renouveler les assemblées qui doivent changer en totalité, dans un nombre d'années déterminé. Le renouvellement doit-il se faire à la fois, ou convient-il de le partager entre ces années? D'après ce dernier mode, l'assemblée serait formée sous l'influence des diverses opinions dominantes pendant la durée de son renouvellement ; l'opinion qui y régnerait alors serait donc très probablement la moyenne de toutes ces opinions. L'assemblée recevrait ainsi du temps le même avantage que lui donne l'extension des élections de ses membres à toutes les parties du territoire qu'elle représente. Maintenant, si l'on considère ce que l'expérience n'a que trop fait connaître, savoir, que les élections sont toujours dirigées dans le sens le plus exagéré des opinions dominantes, on sentira combien il est utile de tempérer ces opinions les unes par les autres, au moyen d'un renouvellement partiel.

De la probabilité des jugements des tribunaux.

L'analyse confirme ce que le simple bon sens nous dicte, savoir, que la bonté des jugements est d'autant plus probable, que les juges sont plus nombreux et plus éclairés. Il importe donc que les tribunaux d'appel remplissent ces deux conditions. Les tribunaux de première instance, plus rapprochés des justiciables, leur offrent l'avantage d'un premier jugement déjà probable et dont ils se contentent souvent, soit en transigeant, soit en se désistant de leurs prétentions. Mais si l'incertitude de l'objet en litige et son importance déterminent un plaideur à recourir au tribunal d'appel, il doit trouver dans une plus grande probabilité d'obtenir un jugement équitable plus de sûreté pour sa fortune, et la compensation des embarras et des frais qu'une nouvelle procédure entraîne. C'est ce qui n'avait point lieu dans l'institution de l'appel réciproque des tribunaux de département, institution par là très préjudiciable aux intérêts des citoyens. Il serait peut-être convenable et conforme au calcul des probabilités d'exiger une majorité de deux voix au moins, dans un tribunal d'appel, pour infirmer la sentence du tribunal inférieur. On obtiendrait ce résultat, si le tribunal d'appel étant composé d'un nombre pair de juges, la sentence subsistait dans le cas de l'égalité des voix.

Je vais considérer particulièrement les jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les plus fortes preuves de son délit. Mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont les jugements criminels, ceux mêmes qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possibilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais le jugement est commandé par le danger qui résulterait de l'impunité du crime. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante. La preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire, pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats, et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très difficiles à connaître. Telle est l'imminence du danger qui menacerait la société, si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois ce danger est si grand, que le magistrat se voit contraint de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit, et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact. Il forme son opinion, en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné aux résultats de ses réflexions et de son expérience; et sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit; car on exige naturellement pour prononcer la mort des preuves beaucoup plus fortes, que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave appliquée à un léger délit devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Une loi qui donne aux juges la faculté de modérer la peine, dans les cas de circonstances atténuantes, est donc conforme à la fois aux principes d'humanité envers le coupable, et à l'intérêt de la société. Le produit de la probabilité du délit par sa gravité étant la mesure du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très fortes, mais insuffisantes pour le condamner : dans la vue d'acquérir de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure et l'abus qu'on peut en faire l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache le plus grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal, qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée, sera juste, c'est-à-dire conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus? Ce problème important bien résolu donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix dans un nombreux tribunal indique que l'affaire dont il s'agit est à fort peu près douteuse; la condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très grande probabilité d'une décision juste, mais en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc, ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner, lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul à cet objet, persuadé qu'il est toujours le meilleur guide, lorsqu'on l'appuie sur les données que le bon sens nous suggère.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion, et cinq cents sont de l'opinion contraire, il est visible que la probabilité de l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car en la supposant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais si les juges sont unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction; la probabilité de l'opinion de chaque juge est donc alors très près de l'unité ou de la certitude, à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent à la fois tous les juges.

Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort : elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables et contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision d'un tribunal jugeant à une majorité connue est juste. Dans les tribunaux où sur huit juges, cinq voix seraient nécessaires pour la condamnation d'un accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasserait $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait au-dessous de $\frac{1}{4}$; il y aurait donc pour l'accusé un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges : cela est général, quelle que soit la majorité requise, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse, à mesure que le tribunal devient plus nombreux. On pourrait croire que dans un tribunal où l'on exigerait une majorité de douze voix, quel que fût le nombre des juges, les voix de la minorité, neutralisant un pareil nombre de voix de la majorité, les douze voix restantes représenteraient l'unanimité d'un jury de douze membres, requise en Angleterre, pour la condamnation d'un accusé. Mais on serait dans une grande erreur. Le bon sens fait voir qu'il y a différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges dont cent douze condamnent l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction, dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit point pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas. Il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve un cinquième à peu près pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas un millième de la première. C'est une confirmation du principe que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé, quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue, quand le nombre des juges s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne peuvent condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près un quart, si le nombre des juges est six : elle est au-dessous de $\frac{1}{7}$, si ce nombre s'élève à douze. Ainsi, l'on ne doit se régler, ni sur le rapport arithmétique, ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? c'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux où cinq voix sur huit suffisent pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{65}{256}$ ou au-dessus de $\frac{1}{4}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais ce qui doit rassurer un peu est la considération que, le plus souvent, le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent : il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment plus vif dans ceux qui n'ont point l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée par la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1093}{8192}$, ou un peu plus grande qu'un huitième : elle est à peu près $\frac{1}{22}$, si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys. Cela suppose que l'unanimité résulte uniquement des preuves favorables ou contraires à l'accusé; mais des motifs entièrement étrangers doivent souvent concourir à la produire, lorsqu'elle est imposée au jury comme une condition nécessaire de son jugement. Alors ses décisions dépendant du tempérament, du caractère, des habitudes des jurés et des circonstances où ils se trouvent, elles sont quelquefois contraires aux décisions que la majorité du jury aurait prises, s'il n'eût écouté que les preuves; ce qui me paraît être un grand défaut de cette manière de juger.

La probabilité des décisions est trop faible dans nos jurys et je pense que, pour donner une garantie suffisante à l'innocence, on doit exiger au moins la pluralité de neuf voix sur douze.

Des Tables de mortalité et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

La manière de former les Tables de mortalité est fort simple. On prend dans les registres civils un grand nombre d'individus dont la naissance et la mort soient indiquées. On détermine combien de ces individus sont morts dans la première année de leur âge, combien dans la seconde année, et ainsi de suite. On en conclut le nombre d'individus vivants au commencement de chaque année, et l'on écrit ce nombre dans la table à côté de celui qui indique l'année. Ainsi l'on écrit à côté de zéro le nombre des naissances, à côté de l'année 1 le nombre des enfants qui ont atteint une année, à côté de l'année 2 le nombre des enfants qui ont atteint deux années, et ainsi du reste. Mais comme dans les deux premières années de la vie la mortalité est très rapide, il faut pour plus d'exactitude indiquer, dans ce premier âge, le nombre des survivants à la fin de chaque demi-année.

Si l'on divise la somme des années de la vie de tous les individus inscrits dans une Table de mortalité, par le nombre de ces individus, on aura la durée moyenne de la vie qui correspond à cette Table. Pour cela, on multipliera par une demi-année, le nombre des morts dans la première année, nombre égal à la différence des nombres d'individus inscrits à côté des années 0 et 1. Leur mortalité devant être répartie sur l'année entière, la durée moyenne de leur vie n'est qu'une demi-année. On multipliera par une année et demie le nombre des morts dans la seconde année, par deux années et demie le nombre des morts dans la troisième année, et ainsi de suite. La somme de ces produits, divisée par le nombre des naissances, sera la durée moyenne de la vie. Il est facile d'en conclure que l'on aura cette durée, en formant la somme des nombres inscrits dans la Table à côté de chaque année, en la divisant par le nombre des naissances et en retranchant un demi du quotient, l'année étant prise pour unité. La durée moyenne de ce qui reste à vivre, en partant d'un âge quelconque, se détermine de la même manière, en opérant sur le nombre des individus qui sont parvenus à cet âge, comme on vient de le faire sur le nombre des naissances. Ce n'est point au moment de la naissance que la durée moyenne de la vie est la plus grande, c'est lorsqu'on a échappé aux dangers de la première enfance, et alors elle est d'environ quarante-trois ans. La probabilité d'arriver à un âge quelconque, en partant d'un âge donné, est égale au rapport des deux nombres d'individus, indiqués dans la table à ces deux âges.

La précision de ces résultats exige que, pour la formation des tables, on emploie un très grand nombre de naissances. L'analyse donne alors des formules très simples pour apprécier la probabilité que les nombres indiqués dans ces tables ne s'écarteront de la vérité que dans d'étroites limites. On voit par ces formules que l'intervalle des limites diminue et que la probabilité augmente, à mesure que l'on considère plus de naissances; en sorte que les tables représenteraient exactement la vraie loi de la mortalité, si le nombre des naissances employées devenait infini.

Une table de mortalité est donc une table des probabilités de la vie humaine. Le rapport des individus inscrits à côté de chaque année, au nombre des naissances, est la probabilité qu'un nouveau-né atteindra cette année. Comme on estime la valeur de l'espérance en faisant une somme des produits de chaque bien espéré par la probabilité de l'obtenir, on peut également évaluer la durée moyenne de la vie, en ajoutant les produits de chaque année par la demi-somme des probabilités d'en atteindre le commencement et la fin, ce qui conduit au résultat trouvé ci-dessus. Mais cette manière d'envisager la durée moyenne de la vie a l'avantage de faire voir que .dans une population stationnaire, c'est-à-dire telle que le nombre des naissances égale celui des morts, la durée moyenne de la vie est le rapport même de la population aux naissances annuelles; car la population étant supposé stationnaire, le nombre des individus d'un âge compris entre deux années consécutives de la table est égl au nombre des naissances annuelles, multiptié par la demi-somme des probabilités d'atteindre ces années; la somme de tous ces produits sera donc la population entière; or il est aisé de voir que cette somme, divisée par le nombre des naissances annuelles, coïncide avec la durée moyenne de la vie, telle que nous venons de la définir.

Il est facile, au moyen d'une table de mortalité, de former la table correspondante de la population supposée stationnaire. Pour cela, on prend des moyennes arithmétiques entre les nombres de la table de mortalité correspondants aux âges, zéro et un an, un et deux ans, deux et trois ans, etc. La somme de toutes ces moyennes est la population entière : on l'écrit à côté de l'âge zéro. On retranche de cette somme la première moyenne, et le reste est le nombre des individus d'un an et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 1. On retranche de ce premier reste la seconde moyenne ; ce second reste est le nombre des individus de deux années et au dessus : on l'écrit à côté de l'année 2, et ainsi de suite.

Tant de causes variables influent sur la mortalité, que les tables qui la représentent doivent changer suivant les lieux et les temps. Les divers états de la vie offrent à cet égard des différences sensibles relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas été suffisamment observées. Elles le seront un jour : alors on saura quel sacrifice de la vie chaque profession exige, et l'on profitera de ces connaissances pour en diminuer les dangers.

La salubrité plus ou moins grande du sol, son élévation, sa température, les mœurs des habitants et les opérations des gouvernements ont sur la mortalité une influence considérable. Mais il faut toujours faire précéder la recherche de la cause des différences observées, par celle de la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée. Ainsi le rapport de la population aux naissances annuelles, que l'on a vu s'élever en France à vingt-huit et un tiers, n'est pas égal à vingt-cinq dans l'ancien duché de Milan. Ces rapports, établis l'un et l'autre sur un grand nombre de naissances, ne permettent pas de révoquer en doute l'existence dans le Milanais d'une cause spéciale de mortalité, qu'il importe au gouvernement de ce pays de rechercher et de faire disparaître.

Le rapport de la population aux naissances s'accroîtrait encore, si l'on parvenait à diminuer ou à éteindre quelques maladies dangereuses et très répandues. C'est ce que l'on a fait heureusement pour la petite vérole, d'abord par l'inoculation de cette maladie, ensuite, d'une manière beaucoup plus avantageuse, par l'inoculation de la vaccine, découverte inestimable de Jenner qui par là s'est rendu l'un des plus grands bienfaiteurs de l'humanité.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est pas deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare, que l'on peut en faire abstraction dans le calcul. Cette maladie, à laquelle peu de monde échappait avant la découverte de la vaccine, est souvent mortelle et fait périr un septième environ de ceux qu'elle attaque. Quelquefois elle est bénigne, et l'expérience a fait connaitre qu'on lui donnait ce dernier caractère, en l'inoculant sur des personnes saines, préparées par un bon régime, et dans une saison favorable. Alors le rapport des individus qu'elle fait périr, aux inoculés, n'est pas un trois-centième. Ce grand avantage de l'inoculation, joint à ceux de ne point altérer la beauté, et de préserver des suites fâcheuses que la petite vérole naturelle entraîne souvent après elle, la fit adopter par un grand nombre de personnes. Sa pratique fut vivement recommandée, mais, ce qui arrive presque toujours dans les choses sujettes à des inconvénients, elle fut vivement combattue. Au milieu de cette dispute, Daniel Bernoulli se proposa de soumettre au calcul des probabilités l'influence de l'inoculation sur la durée moyenne de la vie. Manquant de données précises sur la mortalité produite par la petite vérole, aux divers âges de la vie, il supposa que le danger d'avoir cette maladie et celui d'en périr sont les mêmes à tout âge. Au moyen de ces suppositions, il parvint par une analyse délicate à convertir une table ordinaire de mortalité dans celles qui auraient lieu, si la petite vérole n'existait pas, ou si elle ne faisait périr qu'un très petit nombre de malades; et il en conclut que l'inoculation augmenterait de trois ans au moins la durée moyenne de la vie, ce qui lui parut mettre hors de doute l'avantage de cette opération. D'Alembert attaqua l'analyse de Bernoulli, d'abord sur l'incertitude de ses deux hypothèses, ensuite sur son insuffisance, en ce que l'on n'y faisait point entrer la comparaison du danger prochain, quoique très petit, de périr par l'inoculation, au danger beaucoup plus grand, mais plus éloigné, de succomber à la petite vérole naturelle. Cette considération qui disparaît, lorsque l'on considère un grand nombre d'individus, est par là indifférente aux gouvernements, et laisse subsister pour eux les avantages de l'inoculation ; mais elle est d'un grand poids pour un père de famille qui doit craindre, en faisant inoculer ses enfants, de voir périr ce qu'il a de plus cher au monde et d'en être cause. Beaucoup de parents étaient retenus par cette crainte que la découverte de la vaccine a heureusement dissipée. Par un de ces mystères que la nature nous offre si fréquemment, le vaccin est un préservatif de la petite vérole aussi sûr que le virus variolique, et il n'a aucun danger: il n'expose à aucune maladie et ne demande que très peu de soins. Aussi sa pratique s'est-elle promptement répandue; et pour la rendre universelle, il ne reste plus à vaincre que l'inertie naturelle du peuple, contre laquelle il faut lutter sans cesse, même lorsqu'il s'agit de ses plus chers intérêts.

Le moyen le plus simple de calculer l'avantage que produirait l'extinction d'une maladie consiste à déterminer par l'observation le nombre d'individus d'un âge donné, qu'elle fait périr chaque année, et à le retrancher du nombre des morts au même âge. Le rapport de la différence au nombre total d'individus de l'âge donné, serait la probabilité de périr dans l'année à cet âge, si la maladie n'existait pas. En faisant donc une somme de ces probabilités depuis la naissance jusqu'à un âge quelconque, et retranchant cette somme de l'unité, le reste sera la probabilité de vivre jusqu'à cet âge, correspondante à l'extinction de la maladie. La série de ces probabilités sera la table de mortalité, relative à cette hypothèse, et l'on en conclura par ce qui précède la durée moyenne de la vie. C'est ainsi que Duvilard a trouvé que l'accroissement de la durée moyenne de la vie, dû à l'inoculation de la vaccine, est de trois ans au moins. Un accroissement aussi considérable en produirait un fort grand dans la population, si d'ailleurs elle n'était pas restreinte par la diminution relative des subsistances.

C'est principalement par le défaut des subsistances que la marche progressive de la population est arrêtée. Dans toutes les espèces d'animaux et de végétaux, la nature tend sans cesse à augmenter le nombre des individus, jusqu'à ce qu'ils soient au niveau des moyens de subsister. Dans l'espèce humaine, les causes morales ont une grande influence sur la population. Si le sol, par de faciles défrichements, peut fournir une nourriture abondante à des générations nouvelles, la certitude de faire vivre une nombreuse famille encourage les mariages et les rend plus précoces et plus féconds. Sur un sol pareil, la population et les naissances doivent croître à la fois en progression géométrique. Mais quand les défrichements deviennent plus difficiles et plus rares, alors l'accroissement de la population diminue : elle se rapproche continuellement de l'état variable des subsistances, en faisant autour de lui des oscillations, à peu près comme un pendule, dont on promène d'un mouvement retardé le point de suspension, oscille autour de ce point par sa pesanteur. Il est difficile d'évaluer le *maximum* d'accroissement de la population : il paraît d'après quelques observations que, dans de favorables circonstances, la population de l'espèce humaine pourrait doubler tous les quinze ans. On estime que dans l'Amérique septentrionale la période de ce doublement est de vingt-deux années. Dans cet état de choses, la population, les naissances, les mariages, la mortalité, tout croît suivant la même progression géométrique dont on a le rapport constant des termes consécutifs, par l'observation des naissances annuelles à deux époques.

Une table de mortalité représentant les probabilités de la vie humaine, on peut déterminer à son moyen la durée des mariages. Supposons, pour simplifier, que la mortalité soit la même pour les deux sexes; on aura la probabilité que le mariage subsistera un an, ou deux, ou trois, etc., en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun soit le produit des deux nombres de la table, correspondants aux âges des conjoints, et dont les numérateurs soient les produits successifs des nombres correspondants à ces âges augmentés d'une, de deux, de trois, etc. années. La somme de ces fractions, augmentée d'un demi, sera la durée moyenne du mariage, l'année étant prise pour unité. Il est facile d'étendre la même règle à la durée moyenne d'une association formée de trois ou d'un plus grand nombre d'individus.

Des bénéfices des établissements qui dépendent de la probabilité des événements.

Rappelons ici ce que nous avons dit en parlant de l'espérance. On a vu que, pour obtenir l'avantage qui résulte de plusieurs événements simples dont les uns produisent un bien et les autres une perte, il faut ajouter les produits de la probabilité de chaque événement favorable, par le bien qu'il procure, et retrancher de leur somme celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable, par la perte qui y est attachée. Mais quel que soit l'avantage exprimé par la différence de ces sommes, un seul événement composé de ces événements simples ne garantit point de la crainte d'éprouver une perte. On conçoit que cette crainte doit diminuer lorsque l'on multiplie l'événement composé. L'analyse des probabilités conduit à ce théorème général.

Par la répétition d'un événement avantageux, simple ou composé, le bénéfice réel devient de plus en plus probable, et s'accroît sans cesse : il devient certain dans l'hypothèse d'un nombre infini de répétitions; et en le divisant par ce nombre, le quotient ou le bénéfice moyen de chaque événement est l'espérance mathématique elle-même, ou l'avantage relatif à l'événement. Il en est de même de la perte qui devient certaine à la longue, pour peu que l'événement soit désavantageux.

Ce théorème sur les bénéfices et les pertes est analogue à ceux que nous avons donnés précédemment sur les rapports qu'indique la répétition indéfinie des événements simples ou composés, et, comme eux, il prouve que la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes les plus subordonnées à ce que nous nommons *hasard.*

Lorsque les événements sont en grand nombre, l'Analyse donne encore une expression fort simple de la probabilité que le bénéfice sera compris dans des limites déterminées, expression qui rentre dans la loi générale de la probabilité, que nous avons donnée ci-dessus, en parlant des probabilités qui résultent de la multiplication indéfinie des événements.

C'est de la vérité du théorème précédent que dépend la stabilité des établissements fondés sur les probabilités. Mais pour qu'il puisse leur être appliqué, il faut que ces établissements, par de nombreuses affaires, multiplient les événements avantageux.

On a fondé sur les probabilités de la vie humaine divers établissements, tels que les rentes viagères et les tontines. La méthode la plus générale et la plus simple de calculer les bénéfices et les charges de ces établissements consiste à les réduire en capitaux actuels. L'intérêt annuel de l'unité est ce que l'on nomme *taux de l'intérêt*. A la fin de chaque année, un capital acquiert pour facteur l'unité plus le taux de l'intérêt; il croît donc suivant une progression géométrique dont ce facteur est la raison. Ainsi, par l'effet du temps il devient immense. Si, par exemple, le taux de l'intérêt est $\frac{1}{20}$ ou de cinq pour cent, le capital double à fort peu près en quatorze ans, quadruple en vingt-neuf ans, et, dans moins de trois siècles, il devient deux millions de fois plus considérable.

Un accroissement aussi prodigieux a fait naître l'idée de s'en servir, pour amortir la dette publique. On forme pour cela une caisse d'amortissement à laquelle on consacre un fond annuel, employé au rachat des effets publics et sans cesse accrû de l'intérêt des effets rachetés. Il est clair qu'à la longue cette caisse absorbera une grande partie de la dette nationale. Si, lorsque les besoins de l'État obligent à faire un emprunt, on consacre une partie de cet emprunt à l'accroissement du fonds annuel d'amortissement, les variations des effets publics seront moindres, la confiance des prêteurs et la probabilité de retirer sans perte le capital prêté, quand on le désire, en seront augmentées et rendront les conditions de l'emprunt moins onéreuses. D'heureuses expériences ont pleinement confirmé ces avantages. Mais la fidélité dans les engagements et la stabilité, si nécessaires au succès de pareils établissements, ne peuvent être bien garanties que par un gouvernement dans lequel la puissance législative est divisée en plusieurs pouvoirs indépendants. La confiance qu'inspire le concours nécessaire de ces pouvoirs double la force de l'État, et le Souverain lui-même gagne alors en puissance légale, beaucoup plus qu'il ne perd en puissance arbitraire.

Il résulte de ce qui précède que le capital actuel, équivalent à une somme qui ne doit être payée qu'après un certain nombre d'années, est égal à cette somme multipliée par la probabilité qu'elle sera payée à cette époque, et divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt et élevée à une puissance exprimée par le nombre de ces années.

Il est facile d'appliquer ce principe aux rentes viagères sur une ou sur plusieurs têtes, et aux caisses d'épargne et d'assurance d'une nature quelconque. Supposons que l'on se propose de former une table de rentes viagères, d'après une table donnée de mortalité. Une rente viagère payable au bout de cinq ans, par exemple, et réduite en capital actuel, est par ce principe égale au produit des deux quantités suivantes, savoir, la rente divisée par la cinquième puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et la probabilité de la payer. Cette probabilité est le rapport inverse du nombre des individus inscrits dans la table, vis-à-vis de l'âge de celui qui constitue la rente, au nombre inscrit vis-à-vis de cet âge augmenté de cinq années. En formant donc une suite de fractions, dont les dénominateurs soient les produits du nombre de personnes indiquées dans la table de mortalité comme vivantes à l'âge de celui qui constitue la rente, par les puissances sucessives de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont les numérateurs soient les produits de la rente par le nombre des personnes vivantes au même âge augmenté successivement d'une année, de deux années, etc., la somme de ces fractions sera le capital requis pour la rente viagère à cet âge.

Supposons maintenant qu'une personne veuille, au moyen d'une rente viagère, assurer à ses héritiers un capital payable à la fin de l'année de sa mort. Pour déterminer la valeur de cette rente, on peut imaginer que la personne emprunte en viager à une caisse ce capital, et qu'elle le place à intérêt perpétuel à la même caisse. Il est clair que ce capital sera dû par la caisse à ses héritiers, à la fin de l'année de sa mort; mais elle n'aura payé, chaque année, que l'excès de l'intérêt viager sur l'intérêt perpétuel. La table des rentes viagères fera donc connaître ce que la personne doit payer annuellement à la caisse, pour assurer ce capital après sa mort.

Les assurances maritimes, celles contre les incendies et les orages, et généralement tous les établissements de ce genre, se calculent par les mêmes principes. Un négociant a des vaisseaux en mer, il veut assurer leur valeur et celle de leur cargaison contre les dangers qu'ils peuvent courir : pour cela il donne une somme à une compagnie qui lui répond de la valeur estimée de ses cargaisons et de ses vaisseaux. Le rapport de cette valeur à la somme qui doit être donnée pour prix de l'assurance dépend des dangers auxquels les vaisseaux sont exposés, et ne peut être apprécié que par des observations nombreuses sur le sort des vaisseaux partis du port pour la même destination.

Si les personnes assurées ne donnaient à la compagnie d'assurance que la somme indiquée par le calcul des probabilités, cette compagnie ne pourrait pas subvenir aux dépenses de son établissement; il faut donc qu'elles paient d'une somme plus forte le prix de leur assurance. Mais alors quel est leur avantage ? C'est ici que la considération du désavantage moral, attaché à l'incertitude, devient nécessaire. On conçoit que le jeu le plus égal devenant, comme on l'a vu précédemment, désavantageux, parce que le joueur échange une mise certaine contre un bénéfice incertain, l'assurance par laquelle on échange l'incertain contre le certain doit être avantageuse. C'est en effet ce qui résulte de la règle que nous avons donnée ci-dessus pour déterminer l'espérance morale, et par laquelle on voit de plus jusqu'où peut s'étendre le sacrifice que l'on doit faire à la compagnie d'assurance, en conservant toujours un avantage moral. Cette compagnie peut donc, en procurant cet avantage, faire elle-même un grand bénéfice, si le nombre des assurés est très considérable, condition nécessaire à son existence durable. Alors son bénéfice devient certain, et ses espérances mathématiques et morales coïncident. Car l'Analyse conduit à ce théorème général, savoir, que si les expectatives sont très nombreuses, les deux espérances approchent sans cesse l'une de l'autre, et finissent par coïncider dans le cas d'un nombre infini d'expectatives.

Nous avons dit, en parlant des espérances mathématique et morale, qu'il y a un avantage moral à répartir les risques d'un bien que l'on attend sur plusieurs de ses parties. Ainsi, pour faire parvenir une somme d'argent d'un port éloigné, il vaut mieux la répartir sur plusieurs vaisseaux, que de l'exposer sur un seul. C'est ce que l'on fait au moyen des assurances mutuelles. Si deux personnes, ayant chacune la même somme sur deux vaisseaux différents partis du même port pour la même destination, conviennent de partager également tout l'argent qui leur arrivera, il est clair que par cette convention chacune d'elles répartit également sur les deux vaisseaux la somme qu'elle attend. A la vérité, ce genre d'assurances laisse toujours de l'incertitude sur la perte que l'on peut craindre. Mais cette incertitude diminue à mesure que le nombre des associés augmente : l'avantage moral s'accroît de plus en plus, et finit par coïncider avec l'avantage mathématique, sa limite naturelle. Cela rend l'association d'assurances mutuelles, lorsqu'elle est très nombreuse, plus avantageuse aux assurés que les compagnies d'assurances qui, à raison du bénéfice qu'elles font, donnent un avantage moral toujours inférieur à l'avantage mathématique. Mais la surveillance de leur administration peut balancer l'avantage des assurances mutuelles. Tous ces résultats sont, comme on l'a vu précédemment, indépendants de la loi qui exprime l'avantage moral.

On peut envisager un peuple libre comme une grande association dont les membres se garantissent mutuellement leurs propriétés, en supportant proportionnellement les charges de cette garantie. La confédération de plusieurs peuples leur donnerait des avantages analogues à ceux que chaque individu retire de la société. Un congrès de leurs représentants discuterait les objets d'une utilité commune à tous ; et sans doute, le système des poids, des mesures et des monnaies, proposé par les savants français, serait adopté dans ce congrès comme une des choses les plus utiles aux relations commerciales.

Parmi les établissements fondés sur les probabilités de la vie humaine, les meilleurs sont ceux dans lesquels, au moyen d'un léger sacrifice de son revenu, on assure son existence et celle de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins. Autant le jeu est immoral, autant ces établissements sont avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchants de la nature. Le Gouvernement doit donc les encourager et les respecter dans les vicissitudes de la fortune publique; car les espérances qu'ils présentent, portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée. C'est un avantage que l'institution du Gouvernement représentatif leur assure.

Disons un mot des emprunts. Il est clair que, pour emprunter en perpétuel, il faut payer chaque année le produit du capital par le taux de l'intérêt. Mais on peut vouloir acquitter ce capital en paiements égaux faits pendant un nombre déterminé d'années, paiements que l'on nomme *annuités*, et dont on obtient ainsi la valeur. Chaque annuité, pour être réduite au moment actuel, doit être divisée par une puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, égale au nombre des années après lesquelles on doit payer cette annuité. En formant donc une progression géométrique dont le premier terme soit l'annuité divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont le dernier soit cette annuité divisée par la même quantité élevée à une puissance égale au nombre des années pendant lesquelles le paiement doit avoir lieu, la somme de cette progression sera équivalente au capital emprunté, ce qui détermine la valeur de l'annuité. Une caisse d'amortissement n'est au fond qu'un moyen de convertir en annuités une rente perpétuelle, avec la seule différence que, dans le cas d'un emprunt par annuités, l'intérêt est supposé constant; au lieu que l'intérêt des rentes acquises par la caisse d'amortissement est variable. S'il était le même dans ces deux cas, l'annuité correspondante aux rentes acquises serait formée de ces rentes et de ce que l'état donne annuellement à la caisse.

Si l'on veut faire un emprunt viager, on observera que les tables de rentes viagères donnant le capital requis pour constituer une rente viagère, à un âge quelconque, une simple proportion donnera la rente que l'on doit faire à l'individu dont on emprunte un capital. On peut calculer par ces principes tous les modes possibles d'emprunt.

Les principes que nous venons d'exposer sur les bénéfices et sur les pertes des établissements peuvent servir à déterminer le résultat moyen d'un nombre quelconque d'observations déjà faites, lorsqu'on veut avoir égard aux écarts des résultats correspondants aux diverses observations. Désignons par x la correction du résultat le plus faible, et par x augmenté successivement de q, q', q'', etc., les corrections des résultats suivants. Nommons ε, ε', ε'', etc., les erreurs des observations, dont nous supposerons la loi de probabilité connue. Chaque observation étant une fonction du résultat, il est facile de voir qu'en supposant très petite la correction x de ce résultat, l'erreur ε de la première observation sera égale au produit de x par un coefficient déterminé. Pareillement l'erreur ε' de la seconde observation sera le produit de la somme q plus x, par un coefficient déterminé, et ainsi du reste. La probabilité de l'erreur ε étant donnée par une fonction connue, elle sera exprimée par la même fonction du premier des produits précédents. La probabilité de ε' sera exprimée par la même fonction du second de ces produits, et ainsi des autres. La probabilité de l'existence simultanée des erreurs ε, ε', ε'', etc., sera donc proportionnelle au produit de ces diverses fonctions, produit qui sera une fonction de x. Cela posé, si l'on conçoit une courbe dont x soit l'abscisse et dont l'ordonnée correspondante soit ce produit, cette courbe représentera la probabilité des diverses valeurs de x, dont les limites seront déterminées par les limites des erreurs ε, ε', etc. Maintenant, désignons par X l'abscisse qu'il faut choisir; X diminué de x sera l'erreur que l'on commettrait, si l'abscisse x était la véritable correction. Cette erreur, multipliée par la probabilité de x ou par l'ordonnée correspondante de la courbe, sera le produit de la perte par sa probabilité, en regardant, comme on doit le faire, cette erreur comme une perte attachée au choix de X. En multipliant ce produit par la différentielle de x, l'intégrale prise depuis la première extrémité de la courbe jusqu'à X sera le désavantage de X, résultant des valeurs de x inférieures à X. Pour les valeurs de x supérieures à X, x moins X serait l'erreur de X, si x était la véritable correction; l'intégrale du produit de x par l'ordonnée correspondante de la courbe et par la différentielle de x sera donc le désavantage de X, résultant des valeurs de x supérieures à x, cette intégrale étant prise depuis x égal à X jusqu'à la dernière extrémité de la courbe. En ajoutant ce désavantage au précédent, la somme sera le désavantage attaché au choix de X. Ce choix doit être déterminé par la condition que ce désavantage soit un *minimum*, et un calcul fort simple montre que pour cela X doit être l'abscisse dont l'ordonnée divise la courbe en deux parties égales, en sorte qu'il est aussi probable que la vraie valeur de x tombe en-deçà qu'au-delà de X.

Des géomètres célèbres ont choisi pour X la valeur de x la plus probable, et par conséquent celle qui correspond à la plus grande ordonnée de la courbe; mais la valeur précédente me paraît être évidemment celle que la théorie des probalités indique.

Des illusions dans l'estimation des Probabilités.

L'esprit a ses illusions comme le sens de la vue, et de même que le toucher corrige celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte et par l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité supérieure, mais qui n'est qu'un simple résultat du calcul. Ainsi nous ne craignons point, pour de faibles avantages, d'exposer notre vie à des dangers beaucoup moins invraisemblables que la sortie d'un quine à la loterie de France; et cependant personne ne voudrait se procurer les mêmes avantages avec la certitude de perdre la vie, si ce quine arrivait.

Nos passions, nos préjugés et les opinions dominantes, en exagérant les probabilités qui leur sont favorables, et en atténuant les probabilités contraires, sont des sources abondantes d'illusions dangereuses.

Les maux présents et la cause qui les fait naître, nous affectent beaucoup plus que le souvenir des maux produits par la cause contraire : ils nous empêchent d'apprécier avec justesse les inconvénients des uns et des autres et la probabilité des moyens propres à nous en préserver. C'est ce qui porte alternativement vers le despotisme et vers l'anarchie les peuples sortis de l'état de repos dans lequel ils ne rentrent jamais qu'après de longues et cruelles agitations.

Cette impression vive que nous recevons de la présence des événements, et qui nous laisse à peine remarquer les événements contraires observés par d'autres, est une cause principale d'erreur, dont on ne peut trop se garantir.

C'est principalement au jeu qu'une foule d'illusions entretient l'espérance et la soutient contre les chances défavorables. La plupart de ceux qui mettent aux loteries ne savent pas combien de chances sont à leur avantage, combien leur sont contraires. Ils n'envisagent que la possibilité, pour une mise légère, de gagner une somme considérable; et les projets que leur imagination enfante exagèrent à leurs yeux la probabilité de l'obtenir : le pauvre surtout, excité par le désir d'un meilleur sort, expose à ce jeu son nécessaire, en s'attachant aux combinaisons les plus défavorables, qui lui promettent un grand bénéfice. Tous seraient sans doute effrayés du nombre immense des mises perdues, s'ils pouvaient les connaître : mais on prend soin, au contraire, de donner aux gains une grande publicité qui devient une nouvelle cause d'excitation à ce jeu funeste.

Lorsqu'à la loterie de France un numéro n'est pas sorti depuis longtemps, la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro resté longtemps sans sortir doit au prochain tirage sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me paraît tenir à une illusion par laquelle on se reporte involontairement à l'origine des événements. Il est, par exemple, très peu vraisemblable qu'au jeu de *croix* ou *pile* on amènera *croix* dix fois de suite. Cette invraisemblance, qui nous frappe encore lorsqu'il est arrivé neuf fois, nous porte à croire qu'au dixième coup *pile* arrivera. Cependant le passé, en indiquant dans la pièce une plus grande pente pour *croix* que pour *pile*, rend le premier de ces événements plus probable que l'autre : il augmente, comme on l'a vu, la probabilité d'amener *croix* au coup suivant. Une illusion semblable persuade à beaucoup de monde que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant chaque fois, sur un même numéro jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises. Mais quand même de semblables spéculations ne seraient pas souvent arrêtées par l'impossibilité de les soutenir, elles ne diminueraient point le désavantage mathématique des spéculateurs, et elles accroîtraient leur désavantage moral, puisqu'à chaque tirage ils exposeraient une plus grande partie de leur fortune.

J'ai vu des hommes désirant ardemment d'avoir un fils n'apprendre qu'avec peine les naissances des garçons dans le mois où ils allaient devenir pères. S'imaginant que le rapport de ces naissances à celles des filles devait être le même à la fin de chaque mois, ils jugeaient que les garçons déjà nés rendaient plus probables les naissances prochaines des filles. Ainsi l'extraction d'une boule blanche d'une urne qui renferme un nombre limité de boules blanches et de boules noires, accroît la probabilité d'extraire une boule noire au tirage suivant. Mais cela cesse d'avoir lieu, quand le nombre des boules de l'urne est illimité, comme on doit le supposer, pour assimiler ce cas à celui des naissances. Si dans le cours d'un mois il était né beaucoup plus de garçons que de filles, on pourait soupçonner que vers le temps de leur conception une cause générale a favorisé les conceptions masculines, ce qui rendrait la naissance prochaine d'un garçon plus probable. Les événements irréguliers de la nature ne sont pas exactement comparables à la sortie des numéros d'une loterie dans laquelle tous les numéros sont mêlés à chaque tirage, de manière à rendre les chances de leur sortie parfaitement égales. La fréquence d'un de ces événements semble indiquer une cause un peu durable qui le favorise, ce qui augmente la probabilité de son prochain retour; et sa répétition longtemps prolongée, telle qu'une longue suite de jours pluvieux, peut développer des causes inconnues de son changement; en sorte qu'à chaque événement attendu, nous ne sommes point, comme à chaque tirage d'une loterie, ramenés au même état d'indécision sur ce qui doit arriver. Mais à mesure que l'on multiplie les observations de ces événements, la comparaison de leurs résultats avec ceux des loteries devient plus exacte.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés de la loterie de France les numéros le plus souvent sortis, pour en former des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais vu la manière dont le mélange des numéros se fait à cette loterie, le passé ne doit avoir sur l'avenir aucune influence. Les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard : j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans des limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros permet d'admettre sans invraisemblance.

Dans une longue série d'événements du même genre, les seules chances du hasard doivent quelquefois offrir ces veines singulières de bonheur ou de malheur, que la plupart des joueurs ne manquent pas d'attribuer à une sorte de fatalité. Il arrive souvent dans les jeux qui dépendent à la fois du hasard et de l'habileté des joueurs, que celui qui perd, troublé par sa perte, cherche à la réparer par des coups hasardeux qu'il éviterait dans une autre situation : il aggrave ainsi son propre malheur et il en prolonge la durée. C'est cependant alors que la prudence devient nécessaire, et qu'il importe de se convaincre que le désavantage moral attaché aux chances défavorables s'accroît par le malheur même.

Le sentiment par lequel l'homme s'est placé longtemps au centre de l'univers, en se considérant comme l'objet spécial des soins de la nature, porte chaque individu à se faire le centre d'une sphère plus ou moins étendue, et à croire que le hasard a pour lui des préférences. Soutenus par cette opinion, les joueurs exposent souvent des sommes considérables à des jeux dont ils savent que les chances leur sont contraires. Dans la conduite de la vie, une semblable opinion peut quelquefois avoir des avantages, mais le plus souvent elle conduit à des entreprises funestes. Ici, comme en tout, les illusions sont dangereuses, et la vérité seule est généralement utile.

Un des grands avantages du calcul des probabilités est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent, lorsqu'on peut les soumettre au calcul, on doit en conclure que sur d'autres objets il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême. Prouvons cela par des exemples.

Une urne renferme quatre boules noires ou blanches, mais qui ne sont pas toutes de la même couleur. On a extrait une de ces boules, dont la couleur est blanche, et que l'on a remise dans l'urne pour procéder encore à de semblables tirages. On demande la probabilité de n'extraire que des boules noires dans les quatre tirages suivants.

Si les boules blanches et noires étaient en nombre égal, cette probabilité serait la quatrième puissance de la probabilité $\frac{1}{2}$ d'extraire une boule noire à chaque tirage; elle serait donc $\frac{1}{16}$. Mais l'extraction d'une boule blanche au premier tirage indique une supériorité dans le nombre des boules blanches de l'urne; car si l'on suppose dans l'urne trois boules blanches et une noire, la probabilité d'en extraire une boule blanche est $\frac{3}{4}$; elle est $\frac{2}{4}$, si l'on suppose deux boules blanches et deux noires; enfin, elle se réduit à $\frac{1}{4}$, si l'on suppose trois boules noires et une blanche. Suivant le principe de la probabilité des causes tirée des événements, les probabilités de ces trois suppositions sont entre elles, comme les quantités $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; elles sont par conséquent égales à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$. Il y a ainsi cinq contre un à parier que le nombre des boules noires est inférieur, ou tout au plus égal à celui des blanches. Il semble donc que d'après l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires doive être moindre que dans le cas de l'égalité des couleurs, ou plus petite qu'un seizième. Cependant cela n'est pas, et l'on trouve par un calcul fort simple cette probabilité plus grande qu'un quatorzième. En effet, elle serait la quatrième puissance de $\frac{1}{4}$, de $\frac{2}{4}$ et de $\frac{3}{4}$ dans la première, la seconde et la troisième des suppositions précédentes sur les couleurs des boules de l'urne. En multipliant respectivement chaque puissance par la probabilité de la supposition correspondante, ou par $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$, la somme des produits sera la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires. On a ainsi pour cette probabilité $\frac{29}{381}$, fraction plus grande que $\frac{1}{44}$. Ce paradoxe s'explique en considérant que l'indication de la supériorité des boules blanches sur les noires par le premier tirage n'exclut point la supériorité des boules noires sur les blanches, supériorité qu'exclut la supposition de l'égalité des couleurs. Or cette supériorité, quoique peu vraisemblable, doit rendre la probabilité d'amener de suite un nombre donné de boules noires plus grande que dans cette supposition, si ce nombre est considérable; et l'on vient de voir que cela commence, lorsque le nombre donné est égal à quatre.

Considérons encore une urne qui renferme plusieurs boules blanches et noires. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une boule blanche et une noire. On peut alors parier avec égalité d'extraire une boule blanche dans un tirage. Mais il semble que, pour l'égalité du pari, on doive donner à celui qui parie d'extraire la boule blanche deux tirages, si l'urne renferme deux boules noires et une blanche; trois tirages, si elle renferme trois boules noires et une blanche; et ainsi du reste : on suppose qu'après chaque tirage la boule extraite est remise dans l'urne.

Mais il est facile de se convaincre que ce premier aperçu est erroné. En effet, dans le cas de deux boules noires sur une blanche, la probabilité d'extraire de l'urne deux boules noires en deux tirages est la seconde puissance de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{9}$; mais cette probabilité ajoutée à celle d'amener une boule blanche en deux tirages est la certitude ou l'unité: puisqu'il est certain que l'on doit amener deux boules noires, ou au moins une boule blanche; la probabilité de ce dernier cas est donc $\frac{5}{9}$, fraction plus grande que $\frac{1}{2}$. Il y aurait plus d'avantage encore à parier d'amener une boule blanche en cinq tirages, lorsque l'urne contient cinq boules noires et une blanche; ce pari est même avantageux en quatre tirages : il revient alors à celui d'amener six en quatre coups avec un seul dé.

Le chevalier de Méré, ami de Pascal, et qui fit naître le calcul des probabilités en excitant ce grand géomètre à s'en occuper, lui disait « qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison. Si l'on entreprend de faire six avec un dé, il y a de l'avantage à l'entreprendre en quatre coups, comme de 671 à 625. Si l'on entreprend de faire sonnés avec deux dés, il y a désavantage à l'entreprendre en 24 coups. Néanmoins 24 est à 36 nombre de faces de deux dés, comme 4 est à 6 nombre des faces d'un dé. Voilà, écrivait Pascal à Fermat, quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement, que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se démentait..... Il a très bon esprit; mais il n'est pas géomètre : c'est, comme vous savez, un grand défaut. » Le chevalier de Méré, trompé par une fausse analogie, pensait que dans le cas de l'égalité des paris le nombre des coups doit croître proportionellement au nombre de toutes les chances possibles, ce qui n'est pas exact, mais ce qui approche d'autant plus de l'être, que ce nombre est plus grand.

On a essayé d'expliquer la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, par le désir général des pères d'avoir un fils qui perpétue leur nom. Ainsi, en imaginant une urne remplie d'une infinité de boules blanches et de boules noires en nombre égal, et supposant un grand nombre de personnes dont chacune tire une boule de cette urne, et continue ce tirage avec l'intention de s'arrêter quand elle aura extrait une boule blanche, on a cru que cette intention devait rendre le nombre des boules blanches extraites supérieur à celui des noires. En effet, elle donne nécessairement après tous les tirages un nombre de boules blanches égal à celui des personnes, et il est possible que ces tirages n'amènent aucune boule noire. Mais il est facile de reconnaître que cet aperçu n'est qu'une illusion, car si l'on conçoit que dans un premier tirage toutes les personnes tirent à la fois une boule de l'urne, il est évident que leur intention ne peut avoir aucune influence sur la couleur des boules qui doivent sortir à ce tirage. Son unique effet sera d'exclure du second tirage les personnes qui auront amené une boule blanche au premier. Il est pareillement visible que l'intention des personnes, qui prendront part au nouveau tirage, n'influera point sur la couleur des boules qui sortiront, et qu'il en sera de même des tirages suivants. Cette intention n'influera donc point sur la couleur des boules extraites dans l'ensemble des tirages : seulement, elle fera participer plus ou moins de personnes à chacun d'eux. Le rapport des boules blanches extraites aux noires sera ainsi très peu différent de l'unité. Il suit de là que le nombre des personnes étant supposé fort grand, si l'observation donne entre les couleurs extraites un rapport qui diffère sensiblement de l'unité, il est très probable que la même différence a lieu à fort peu près entre l'unité et le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne.

Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibniz et Daniel Bernoulli ont faite du calcul des probabilités à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable, il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient, *plus un*, *moins un*, *plus un*, *moins un*, etc. En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création, parce que la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros ou du néant. Ce fut ainsi que Leibniz crut voir l'image de la création dans son Arithmétique binaire, où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que Dieu pouvant être représenté par l'unité et le néant par zéro, l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système d'arithmétique. Cette idée plut tellement à Leibniz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibniz, toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite, *plus un*, *moins un*, *plus un*, *etc.*, devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair; et comme dans l'infini il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors, ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité; et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs qu'autant qu'on les arrête. Le rapport remarquable de cette application du calcul des probabilités, avec les limites des valeurs des séries périodiques, suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série, *plus un*, *moins un*, *plus un*, *etc.*, peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les sciences mathématiques, que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

Nous sommes portés naturellement à croire que l'ordre, suivant lequel nous voyons les choses se renouveler sur la terre, a existé de tout temps et subsistera toujours. En effet, si l'état présent de l'univers était entièrement semblable à l'état antérieur qui l'a produit, il ferait naître à son tour un état pareil, la succession de ces états serait donc alors éternelle. J'ai reconnu par l'application de l'Analyse à la loi de la pesanteur universelle que les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites, et la position de leurs orbites et de leurs équateurs, ne sont assujettis qu'à des inégalités périodiques. En comparant aux anciennes éclipses la théorie de l'équation séculaire de la lune, j'ai trouvé que depuis Hipparque la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde, et que la température moyenne de la terre n'a pas diminué d'un centième de degré. Ainsi la stabilité de l'ordre actuel paraît établie à la fois par la théorie et par les observations. Mais cet ordre est troublé par diverses causes qu'un examen attentif fait apercevoir, et qu'il est impossible de soumettre au calcul.

Les actions de l'Océan, de l'atmosphère et des météores, les tremblements de terre et les éruptions de volcans, agitent sans cesse la surface terrestre, et doivent y opérer à la longue des changements considérables. La température des climats, le volume de l'atmosphère, et la proportion des gaz qui la constituent, peuvent varier d'une manière insensible. Les instruments et les moyens propres à déterminer ces variations étant nouveaux, l'observation n'a pu jusqu'ici rien nous apprendre à cet égard. Mais il est très peu vraisemblable que les causes, qui absorbent et renouvellent les gaz constitutifs de notre air, en maintiennent exactement les quantités respectives. Une longue suite de siècles fera connaître les altérations qu'éprouvent tous ces éléments si essentiels à la conservation des êtres organisés. Quoique les monuments historiques ne remontent pas à une très haute antiquité, ils nous offrent cependant d'assez grands changements survenus par l'action lente et continue des agents naturels. En fouillant dans les entrailles de la terre, on découvre de nombreux débris d'une nature jadis vivante et toute différente de la nature actuelle. D'ailleurs, si la terre entière a été primitivement fluide, comme tout paraît l'indiquer, on conçoit qu'en passant de cet état à celui qu'elle a maintenant, sa surface a dû éprouver de prodigieux changements. Le ciel même, malgré l'ordre de ses mouvements, n'est pas inaltérable. La résistance de la lumière et des autres fluides éthérés et l'attraction des étoiles doivent, après un très grand nombre de siècles, considérablement altérer les mouvements planétaires. Les variations déjà observées dans les étoiles et dans la forme des nébuleuses font pressentir celles que le temps développera dans le système de ces grands corps. On peut représenter les états successifs de l'univers par une courbe dont le temps serait l'abscisse, et dont les ordonnées exprimeraient ces divers états. Connaissant à peine un élément de cette courbe, nous sommes loin de pouvoir remonter à son origine; et si, pour reposer l'imagination toujours inquiète d'ignorer la cause des phénomènes qui l'intéressent, on hasarde quelques conjectures, il est sage de ne les représenter qu'avec une extrême réserve.

Il existe dans l'estimation des probabilités un genre d'illusions qui, dépendant spécialement des lois de l'organisation intellectuelle, exige, pour s'en garantir, un examen approfondi de ces lois. Le désir de pénétrer dans l'avenir, et les rapports de quelques événements remarquables avec les prédictions des astrologues, des devins et des augures, avec les pressentiments et les songes, avec les nombres et les jours réputés heureux ou malheureux, ont donné naissance à une foule de préjugés encore très répandus. On ne réfléchit point au grand nombre de non-coïncidences qui n'ont fait aucune impression, ou que l'on ignore. Cependant, il est nécessaire de les connaître, pour apprécier la probabilité des causes auxquelles on attribue les coïncidences. Cette connaissance confirmerait, sans doute, ce que la raison nous dicte à l'égard de ces préjugés. Ainsi, le philosophe de l'antiquité, auquel on montrait dans un temple, pour exalter la puissance du dieu qu'on y adorait, les *ex voto* de tous ceux qui après l'avoir invoqué s'étaient sauvés du naufrage, fit une remarque conforme au calcul des probabilités, en observant qu'il ne voyait point inscrits les noms de ceux qui, malgré cette invocation, avaient péri. Cicéron a réfuté tous ces préjugés avec beaucoup de raison et d'éloquence, dans son *Traité de la Divination*, qu'il termine par un passage que je vais citer; car on aime à retrouver chez les anciens les traits de la raison universelle qui, après avoir dissipé tous les préjugés par sa lumière, deviendra l'unique fondement des institutions humaines.

« Il faut, dit l'orateur romain, rejeter la divination par les songes, et tous les préjugés semblables. La superstition partout répandue a subjugué la plupart des esprits et s'est emparée de la faiblesse des hommes. C'est ce que nous avons développé dans nos livres sur la nature des dieux et spécialement dans cet ouvrage persuadé que nous ferons une chose utile aux autres et à nous-même, si nous parvenons à détruire la superstition. Cependant (et je désire surtout qu'à cet égard ma pensée soit bien comprise), en détruisant la superstition, je suis loin de vouloir ébranler la religion. La sagesse nous prescrit de maintenir les institutions et les cérémonies de nos ancêtres, touchant le culte des dieux. D'ailleurs, la beauté de l'univers et l'ordre des choses célestes nous forcent à reconnaître quelque nature supérieure qui doit être remarquée et admirée du genre humain. Mais autant il convient de propager la religion qui est jointe à la connaissance de la nature, autant il faut travailler à extirper la superstition. Car elle vous tourmente, vous presse et vous poursuit sans cesse en tous lieux. Si vous consultez un devin ou un présage, si vous immolez une victime, si vous regardez le vol d'un oiseau, si vous rencontrez un chaldéen, ou un aruspice, s'il éclaire, s'il tonne, si la foudre tombe, enfin s'il naît ou se manifeste une espèce de prodige, toutes choses dont souvent quelqu'une doit arriver, alors la superstition qui vous domine ne vous laisse point de repos. Le sommeil même, ce refuge des mortels dans leurs peines et dans leurs travaux, devient par elle un nouveau sujet d'inquiétudes et de frayeurs. »

Tous ces préjugés et les frayeurs qu'ils inspirent tiennent à des causes physiologiques qui continuent quelquefois d'agir fortement, après que la raison nous a désabusés. Mais la répétition d'actes contraires à ces préjugés peut toujours les détruire. C'est ce que nous allons établir par les considérations suivantes.

Aux limites de la Physiologie visible commence une autre Physiologie dont les phénomènes beaucoup plus variés que ceux de la première sont, comme eux, assujettis à des lois qu'il est très important de connaître. Cette Physiologie, que nous désignerons sous le nom de *Psychologie*, est sans doute une continuation de la Physiologie visible. Les nerfs, dont les filaments se perdent dans la substance médullaire du cerveau, y propagent les impressions qu'ils reçoivent des objets extérieurs, et ils y laissent des impressions permanentes qui modifient d'une manière inconnue le *sensorium* ou siège de la sensation et de la pensée [1]. Les sens extérieurs ne peuvent rien apprendre sur la nature de ces modifications étonnantes par leur infinie variété, et par la distinction et l'ordre qu'elles conservent dans le petit espace qui les renferment, modifications dont les phénomènes si variés de la lumière et de l'électricité nous donnent quelque idée. Mais en appliquant aux observations du sens interne, qui peut seul les apercevoir, la méthode dont on a fait usage pour les observations des sens externes, on pourra porter dans la théorie de l'entendement humain la même exactitude que dans les autres branches de la Philosophie naturelle.

Déjà quelques-uns des principes [2] de Psychologie

1. Les considérations suivantes sont entièrement indépendantes du lieu de ce siège et de sa nature.

2. Je désigne ici par la dénomination de *principes* les rapports généraux des phénomènes.

ont été reconnus et développés avec succès. Telle est la tendance de tous les êtres semblablement organisés à se mettre entre eux en harmonie. Cette tendance qui constitue la *sympathie* existe même entre des animaux d'espèces diverses : elle diminue à mesure que leur organisation est plus dissemblable. Parmi les êtres doués d'une même organisation, quelques-uns se coordonnent plus promptement entre-eux qu'avec les autres. La nature inorganique nous offre de semblables phénomènes : deux pendules ou deux montres dont la marche est très peu différente, étant placées sur un même support, finissent par avoir exactement la même marche ; et dans un système de cordes sonores, les vibrations de l'une d'elles font résonner toutes ses harmoniques. Ces effets, dont les causes bien connues ont été soumises au calcul, donnent une idée juste de la sympathie qui dépend de causes bien plus compliquées.

Un sentiment agréable accompagne presque toujours les mouvements sympathiques. Dans la plupart des espèces d'aninaux, les individus s'attachent ainsi les uns aux autres et se réunissent en sociétés. Dans l'espèce humaine, les imaginations fortes ressentent un vrai bonheur à dominer les imaginations faibles qui n'en ressentent pas moins à leur obéir. Les sentiments sympathiques, excités à la fois dans un grand nombre d'individus, s'accroissent par leur réaction mutuelle, comme on l'observe au théâtre. Le plaisir qui en résulte rapproche les personnes d'opinions semblables, que leur réunion exalte quelquefois jusqu'au fanatisme. De là naissent les sectes, la ferveur qu'elles excitent, et la rapidité de leur propagation. Elles offrent dans l'histoire les plus étonnants et les plus funestes exemples du pouvoir de la sympathie. On a souvent lieu de remarquer la facilité avec laquelle les mouvements sympathiques, tels que le rire, se communiquent par la simple vue, sans le concours d'aucune autre cause dans ceux qui les reçoivent. L'influence de la sympathie sur le sensorium est incomparablement plus puissante ; les vibrations qu'elle y excite, lorsqu'elles sont extrêmes, produisent en réagissant sur l'économie animale des effets extraordinaires, que l'on a dans les siècles de superstition attribués à des agents surnaturels, et qui par leur singularité méritent l'attention des observateurs.

La tendance à l'imitation existe même à l'égard des objets de l'imagination. Placés dans une voiture qui nous paraît se diriger vers un obstacle, nous imitons involontairement le mouvement qu'elle doit prendre pour l'éviter. On peut concevoir que l'idée de ce mouvement et la tendance à l'imiter correspondent à des mouvements du sensorium, dont le premier produit le second, à peu près comme les vibrations d'une corde sonore font vibrer ses harmoniques. On explique ainsi comment l'idée de la chute dans un précipice fortement imprimée par la peur, peut y faire tomber celui qui le traverse sur une planche étroite qu'il parcourrait d'un pas ferme, si elle était posée dans toute sa longueur sur la terre. Je connais des personnes qui éprouvent une telle excitation à se précipiter d'une grande hauteur où elles se voient élevées, qu'elles sont forcées pour y résister d'augmenter les précautions prises pour les retenir, et cependant bien propres à les rassurer.

Par une noble prérogative de l'espèce humaine, le récit d'actions grandes et vertueuses nous enflamme et nous porte à les imiter. Mais quelques individus tiennent de leur organisation, ou de pernicieux exemples, des penchants funestes qu'excite vivement le récit d'une action criminelle devenue l'objet de l'attention publique. Sous ce rapport, la publicité des crimes n'est pas sans danger.

La commisération, la bienveillance et beaucoup d'autres sentiments dérivent de la sympathie. Par elle, on ressent les maux d'autrui et l'on partage le contentement du malheureux qu'on soulage. Mais je ne veux ici qu'exposer les principes de Psychologie, sans entrer dans le développement de leurs conséquences[1].

L'un de ces principes, le plus fécond de tous, est celui de la liaison de toutes les choses qui ont eu dans le sensorium une existence simultanée, ou régulièrement successive, liaison qui par le retour de l'une d'elles rappelle les autres. Les objets que nous avons déjà vus réveillent les traces des choses qui, dans la première vue, leur étaient associées. Ces traces réveillent semblablement celle des autres objets, et ainsi de suite, en sorte qu'à l'occasion d'une chose présente nous pouvons en rappeler une infinité d'autres, et arrêter notre attention sur celles que nous voulons considérer. A ce principe se rattache l'emploi des signes et des langues pour le rappel des sensations et des idées, pour la formation de l'analyse des idées complexes, abstraites et générales, et pour le raisonnement. Plusieurs philosophes ont bien développé cet objet qui, jusqu'à pré-

1. La narration que Montaigne fait dans ses Essais de l'amitié qui existait entre lui et La Boëtie, offre un exemple bien remarquable d'un genre de sympathie extrêmement rare.

sent, constitue la partie réelle de la Métaphysique.

C'est en vertu de ce principe que l'on parvient à estimer les distances à la simple vue. Une comparaison souvent répétée du mètre avec diverses distances qui en contiennent des nombres entiers, imprime dans la mémoire ces traces associées aux nombres de mètres qui leur correspondent. La vue d'une distance que l'on veut apprécier réveille ces traces ; et si l'une d'elles s'adapte exactement ou à fort peu près à l'impression de la distance que l'on a sous les yeux, on juge que cette distance renferme le nombre de mètres associé dans la mémoire à la trace qui paraît lui être égale. C'est encore ainsi que l'on parvient à estimer le poids des corps en les soupesant.

On peut établir en principe de Psychologie que les impressions souvent répétées d'un même objet sur divers sens modifient le sensorium, de manière que l'impression intérieure correspondante à l'impression extérieure de l'objet sur un seul sens devient très différente de ce qu'elle était à l'origine. Développons ce principe, et pour cela considérons un aveugle de naissance, auquel on vient d'abaisser la cataracte. L'image de l'objet qui se peint sur sa rétine produit dans son sensorium une impression que je nommerai *seconde image*, sans prétendre l'assimiler à la première, ni rien affirmer sur sa nature. Cette seconde image n'est pas d'abord une représentation fidèle de l'objet. Mais la comparaison habituelle des impressions de cet objet par le tact avec celle qu'il produit par la vue finit, en modifiant le sensorium, par rendre la seconde image conforme à la nature représentée fidèlement par le toucher. L'image peinte sur la rétine ne change point, mais l'image intérieure qu'elle fait naître n'est plus la même, comme les expériences faites sur plusieurs aveugles de naissance, auxquels on avait rendu la vue, l'ont prouvé.

C'est principalement dans l'enfance que le sensorium acquiert ces modifications. L'enfant comparant sans cesse les impressions qu'il reçoit d'un même objet, par les organes de la vue et du toucher, rectifie les impressions de la vue. Il dispose son sensorium à donner aux objets visibles la forme indiquée par le tact dont les impressions s'associent intimement avec celles de la vue, qui les rappelent toujours. Alors les objets visibles sont aussi fidèlement représentés que les objets tactiles. Un rayon lumineux devient pour la vue, ce qu'est un bâton pour le toucher. Par ce moyen, le premier de ces sens étend beaucoup plus loin que le second la sphère des objets de ses impressions. Mais la voûte céleste elle-même, à laquelle nous attachons les astres, est encore très bornée, et ce n'est que par une longue suite d'observations et de calculs que nous sommes parvenus à reconnaître les grandes distances de ces corps, et à les éloigner indéfiniment dans l'immensité de l'espace.

Il paraît que dans plusieurs espèces d'animaux la disposition du sensorium qui nous fait apprécier les distances est naturelle. Mais l'homme, pour lequel la nature a remplacé presque en tout l'instinct par l'intelligence, a besoin pour le suppléer d'observations et de comparaisons qui servent merveilleusement à développer ses facultés intellectuelles et à lui assurer par ce développement l'empire de la terre.

Les images intérieures ne sont donc pas les effets d'une cause unique : elles résultent, soit des impressions reçues simultanément par le même sens ou par des sens différents, soit des impressions intérieures rappelées par la mémoire. L'influence réciproque de ces impressions est un principe psychologique fécond en conséquences. Développons quelques-unes des principales.

Qu'un observateur placé dans une profonde obscurité voie, à des distances différentes, deux globes lumineux d'un même diamètre, ils lui paraîtront d'inégale grandeur. Leurs images intérieures seront proportionnelles aux images correspondantes, peintes sur la rétine. Mais si, l'obscurité venant à cesser, il aperçoit en même temps que les globes tout l'espace intermédiaire, cette vue agrandit l'image intérieure du globe le plus éloigné, et la rend presque égale à celle de l'autre globe. C'est ainsi qu'un homme, vu aux distances de deux et de quatre mètres, nous paraît de la même grandeur : son image intérieure ne varie point, quoique l'une des images peintes sur la rétine soit double de l'autre. C'est encore par l'impression des objets intermédiaires que la lune à l'horizon nous semble plus grande qu'au zénith. On aperçoit au-dessus d'une branche voisine de l'œil un objet que l'on rapporte au loin, et qui paraît fort grand. On vient ensuite à reconnaître le lien qui l'unit à la branche : sur-le-champ, la perception de ce lien change l'image intérieure et la réduit à une dimension beaucoup moindre. Toutes ces choses ne sont point de simples jugements, comme quelques métaphysiciens l'ont pensé : elles sont des effets physiologiques dépendants des dispositions que le sensorium a contractées par la comparaison habituelle des impressions d'un même objet sur les organes de plusieurs sens, et spécialement sur ceux du toucher et de la vue.

L'influence des traces, rappelées par la mémoire, sur les impressions qu'excitent les objets extérieurs, se fait remarquer dans un grand nombre de cas. On voit de loin des lettres, sans pouvoir distinguer le mot qu'elles expriment. Si quelqu'un prononce ce mot, ou si quelque circonstance en rappelle la mémoire, aussitôt l'image intérieure de ces lettres ainsi rappelées se superpose, si je puis ainsi dire, à l'image confuse produite par l'impression des caractères extérieurs et la rend distincte. La voix d'un acteur que vous entendez confusément devient distincte, lorsque vous lisez ce qu'il récite. La vue des caractères rapelle les traces des sons qui leur répondent, et ces traces, se mêlant aux sons confus de la voix, les font distinguer. La peur transforme souvent de cette manière les objets, qu'une trop faible lumière ne fait pas reconnaître, en objets effrayants qui ont avec eux de l'analogie. L'image de ces derniers objets, fortement retracée dans le sensorium par la crainte, se rend propre l'impression des objets extérieurs. Il est important de se garantir de cette cause d'illusion dans les conséquences que l'on tire d'observations de choses qui ne font qu'une impression très légère : telles sont les observations de la dégradation de la lumière à la surface des planètes et des satellites, d'où l'on a conclu l'existence et l'intensité de leurs atmosphères, et leurs mouvements de rotation. Il est souvent à craindre que des images intérieures ne s'assimilent ces impressions et le penchant qui nous porte à croire à l'existence des choses que représentent les impressions reçues par les sens.

Ce penchant remarquable tient à un caractère particulier, qui distingue les impressions venant du dehors des traces produites par l'imagination, ou rappelées par la mémoire. Mais il arrive quelquefois par un désordre du sensorium, ou des organes qui agissent sur lui, que ces traces ont le caractère et la vivacité des impressions extérieures : alors, on juge présents leurs objets, on est visionnaire. Le calme et les ténèbres de la nuit favorisent ces illusions qui dans le sommeil sont complètes et forment les rêves dont on aura une juste idée, si l'on conçoit que les traces des objets qui se présentent à notre imagination dans l'obscurité acquièrent une grande intensité pendant le sommeil.

Tout porte à croire que dans les somnambules quelques-uns des sens ne sont pas complètement endormis. Si le sens du toucher, par exemple, reste encore un peu sensible au contact des objets extérieurs, les impressions faibles qu'il en reçoit, transmises au sensorium, peuvent en se combinant avec les images du rêve d'un somnanbule les modifier et diriger ses mouvements. En examinant d'après cette considération les récits bien avérés des choses singulières opérées par les somnambules, il m'a paru que l'on pouvait en donner une explication fort simple.

Quelquefois les visionnaires croient entendre parler les personnages qu'ils se figurent, et ils ont avec eux une conversation suivie : les ouvrages des médecins sont remplis de faits de ce genre.

Charles Bonnet cite, comme l'ayant souvent observé, son aïeul maternel, « vieillard, dit-il, plein de santé, qui, indépendamment de toute impression du dehors, aperçoit de temps en temps devant lui des figures d'hommes, de femmes, d'oiseaux, de voitures, de bâtiments, etc. Il voit ces figures se donner différents mouvements, s'approcher, s'éloigner, fuir, diminuer et augmenter de grandeur, paraître, disparaître, reparaître. Il voit des bâtiments s'élever sous ses yeux, etc. Mais il ne prend point ses visions pour des réalités : sa raison s'en amuse. Il ignore d'un moment à l'autre quelle vision va s'offrir à lui. Son cerveau est un théâtre qui exécute des scènes d'autant plus surprenantes pour le spectateur, qu'il ne les a point prévues. » En lisant l'histoire de Jeanne d'Arc, on est forcé de reconnaître une visionnaire de bonne foi dans cette fille admirable, dont l'exaltation courageuse contribua si puissamment à délivrer la France de ses ennemis. Il est vraisemblable que plusieurs de ceux qui se sont annoncés comme ayant reçu leurs doctrines d'un être surnaturel étaient visionnaires : ils ont d'autant mieux persuadé les autres, qu'ils étaient eux-mêmes persuadés. Les fraudes pieuses et les moyens violents, dont ensuite ils ont fait usage, leur ont paru justifiés par l'intention de propager ce qu'ils jugeaient être des vérités nécessaires aux hommes.

Un caractère particulier distingue des produits de l'imagination les traces rappelées par la mémoire, et qui sont dues aux impressions des objets extérieurs. Il nous porte, comme par instinct, à reconnaître l'existence passée de ces objets dans l'ordre que la mémoire nous présente. Les expériences que nous faisons, à chaque instant, de la vérité des conséquences que nous en tirons pour nous conduire fortifient ce penchant. Quel est le mécanisme, qui dans cette opération du sensorium détermine notre jugement? nous l'ignorons et nous ne pouvons en observer que les effets. En vertu de ce mécanisme les traces de la mémoire, quoique faibles, nous font apprécier leur intensité primitive que nous pouvons ainsi comparer aux impression semblables d'objets présents. Nous jugeons de cette manière qu'une couleur que nous avons vue, la veille, était plus vive que celle qui frappe maintenant notre vue.

Les impressions qui accompagnent les traces de la mémoire servent à nous en rappeler les causes. Ainsi, lorsqu'au souvenir d'une chose qui nous a été dite se joint le souvenir de la confiance que nous avons donnée au narrateur, si son nom nous échappe, nous le retrouvons en rappelant successivement les noms de ceux qui nous ont entretenus, jusqu'à ce que nous parvenions au nom qui nous a inspiré cette confiance.

Les impressions reçues dans l'enfance se conservent jusque dans l'extrême vieillesse, et se renouvellent alors même que des impressions profondes de l'âge mûr sont entièrement effacées. Il semble que les premières impressions gravées profondément dans le sensorium n'attendent pour reparaître que l'affaiblissement des impressions subséquentes, par l'âge ou par la maladie, à peu près comme les astres qu'effaçait la clarté du jour se montrent dans la nuit ou dans les éclipses de soleil.

Les traces de la mémoire acquièrent de l'intensité par l'effet du temps et à notre insu. Les choses que l'on apprend, le soir, se gravent dans le sensorium pendant le sommeil et se retiennent facilement par ce moyen. J'ai observé plusieurs fois qu'en cessant de penser pendant quelques jours à des matières très compliquées, elles me devenaient faciles lorsque je les considérais de nouveau.

Si nous revoyons un objet qui nous avait frappés par sa grandeur, longtemps après que la vue fréquente d'objets du même genre, beaucoup plus grands, a diminué l'impression de grandeur qu'ils font éprouver, nous sommes surpris de le trouver fort au-dessous de son impression conservée dans la mémoire.

Quelques hommes sont doués d'une mémoire prodigieuse. L'exactitude avec laquelle ils répètent de longs discours qu'ils viennent d'entendre nous étonne. Mais lorsqu'on réfléchit à tout ce que renferme la mémoire de la plupart des hommes, on est bien plus étonné que tant de choses y soient placées sans confusion. Considérez un chanteur sur la scène : sa mémoire lui rappelle chaque mot dans son rôle, le ton, la mesure et le geste qui doivent l'accompagner. Un nouveau rôle succède-t-il au premier, celui-ci semble comme effacé de sa mémoire qui retrace dans l'ordre convenable toutes les parties du second rôle, et qui rappellerait de la même manière les divers rôles que le chanteur a étudiés. Ces traces dont le nombre est immense, ou du moins les dispositions propres à les faire naître, existent à la fois dans son sensorium sans se confondre, et l'acteur peut les rappeler à sa volonté. Je dois répéter ici que par les mots *trace*, *image*, *vibrations*, etc., je n'entends exprimer que des phénomènes du sensorium, sans rien affirmer sur leur nature et sur leurs causes, comme en mécanique on n'exprime que des effets par les mots *force*, *attraction*, *affinité*, etc.

Les opérations du sensorium et les mouvements qu'il fait exécuter deviennent plus faciles et comme naturels par de fréquentes répétitions. De ce principe psychologique découlent nos habitudes. En se combinant avec la sympathie, il produit les coutumes, les mœurs et leurs étranges variétés. Il fait qu'une chose généralement reçue chez un peuple est regardée par un autre avec horreur. Les combats de gladiateurs, dont les Romains aimaient passionnément le spectacle, et les sacrifices humains qui souillent les annales des nations, nous paraîtraient horribles. Quand on considère l'état déplorable des esclaves, l'avilissement des Parias dans l'Inde, et l'absurdité de tant de croyances contraires à la raison et au témoignage de tous nos sens, on est affligé de voir jusqu'à quel point l'habitude de l'esclavage et les préjugés ont dégradé l'espèce humaine.

Cette disposition, que la fréquence des répétitions donne au sensorium, rend très difficile la distinction des habitudes acquises d'avec les penchants qui, dans l'homme, tiennent à son organisation; car il est naturel de penser que l'instinct, si étendu et si puissant chez les animaux, n'est pas nul dans l'espèce humaine, et que l'attachement d'une mère à son enfant en dérive. La double influence de l'habitude et de la sympathie modifie ces penchants : souvent elles les fortifie, quelquefois elle les dénature au point de leur substituer des penchants contraires.

Plusieurs observations faites sur l'homme et sur les animaux, et qu'il est bien important de continuer, portent à croire que les modifications du sensorium, auxquelles l'habitude a donné une grande consistance, se transmettent des pères aux enfants par voie de génération, comme plusieurs dispositions organiques. Une disposition originelle à tous les mouvements extérieurs et intérieurs qui accompagnent les actes habituels explique, de la manière la plus simple, l'empire que les habitudes enracinées par les siècles excercent sur tout un peuple, et la facilité de leur communication aux enfants, lors même qu'elles sont les plus contraires à la raison et aux droits imprescriptibles de la nature humaine.

La facilité qu'un exercice fréquent donne aux organes est telle qu'ils continuent souvent d'eux-mêmes les mouvements que la volonté leur imprime. Lorsqu'en marchant nous sommes fortement occupés d'une idée, la cause qui renouvelle à chaque instant notre mouvement agit sans le concours de notre volonté, et sans que nous en ayons la conscience. On a vu des personnes surprises en marchant par le sommeil, continuer leur route et ne se réveiller que par la rencontre d'un obstacle. Il paraît qu'en vertu d'une disposition que la volonté de marcher donne au système moteur la marche continue, à peu près comme le mouvement d'une montre est entretenu par le développement de son ressort spiral. Un dérangement dans l'économie animale peut produire cette disposition. Alors la marche est involontaire, et je tiens d'un médecin éclairé que dans une maladie de ce genre qu'il avait traitée le malade ne pouvait s'arrêter qu'en se retenant à un point fixe. Les observations des maladies peuvent ainsi répandre un grand jour sur la Psychologie, quand les médecins joignent aux connaissances de leur art et des sciences accessoires l'esprit d'exactitude et de critique que donne l'étude des Mathématiques et spécialement de la science des probabilités.

Le sensorium peut recevoir des impressions trop faibles pour être senties, mais suffisantes pour déterminer des actions dont nous ignorons la cause. Barbeu-Dubourg, traducteur français des Œuvres de Franklin, rapporte dans sa traduction le fait suivant qu'il tenait d'un marchand de Paris : « Un jour, dit-il, que cette honnête homme marchait dans les rues de Saint-Germain, songeant à des affaires fort sérieuses, il ne put s'empêcher de moduler tout bas, chemin faisant, l'air d'une ancienne chanson qu'il avait oubliée depuis bien des années. Arrivé à deux cents pas de là, il commença à entendre dans la place publique un aveugle jouer ce même air sur son violon ; et il imagina que c'était une perception légère, *une semi-perception* du son de cet instrument, affaibli par l'éloignement, qui avait monté ses organes sur ce ton d'une manière insensible à lui-même. Il assure que depuis ce temps il s'est donné souvent le plaisir de suggérer des airs à son gré à un atelier d'ouvrières, sans pouvoir être entendu d'elles. Lorsqu'il cessait un moment de les entendre chanter, il fredonnait tout bas l'air qu'il voulait qu'elles chantassent, et cela ne manquait presque jamais de leur arriver, sans qu'elles l'eussent sensiblement entendu ou qu'aucune d'elles s'en doutât. »

D'après ce que nous avons dit sur l'influence réciproque des traces du sensorium, on conçoit que la musique, par de fréquentes répétitions, peut communiquer à nos mouvements la régularité de sa mesure. C'est ce que l'on observe dans la danse et dans divers exercices, où la précision des mouvements ainsi régularisés nous semble extraordinaire. Par cette régularité, la musique rend généralement plus faciles les mouvements que plusieurs personnes exécutent à la fois.

Un phénomène psychologique très remarquable est la grande influence de l'attention sur les traces du sensorium ; elle les grave profondément dans la mémoire et elle en accroît la vivacité, en même temps qu'elle affaiblit les impressions concomitantes. Si nous regardons fixement un objet, pour y démêler quelques particularités, l'attention peut nous rendre insensibles aux impressions que d'autres objets font en même temps sur la rétine. Par elle, les images des choses que nous voulons comparer acquièrent l'intensité nécessaire pour que leurs rapports occupent seuls notre pensée. Elle réveille les traces de la mémoire qui peuvent servir à cette comparaison, et par là elle devient le plus puissant ressort de l'intelligence humaine.

L'attention donnée fréquemment à une qualité particulière des objets finit par douer les organes d'une exquise sensibilité qui fait reconnaître cette qualité, lorsqu'elle devient insensible au commun des hommes.

Ces principes expliquent les singuliers effets des panoramas. Quand les règles de la perspective y sont bien observées, les objets se peignent sur la rétine comme s'ils étaient réels. Le spectateur est donc alors dans l'état que ferait naître la réalité des objets. Mais la perspective n'est jamais assez exacte, pour que l'identité soit parfaite. D'ailleurs les impressions étrangères, quoique faibles, se mêlant aux sensations principales que produit la perspective, nuisent d'abord à l'illusion. L'attention donnée au panorama les efface, mais il faut pour cela un temps plus ou moins long, dépendant des dispositions du sensorium et de la perfection du panorama. Dans tous ceux que j'ai vus, un intervalle de quelques minutes m'a été nécessaire pour acquérir une illusion complète.

Le principe suivant de Psychologie explique un grand nombre de phénomènes qui ont un rapport direct avec l'objet de cet ouvrage. « Si l'on exécute fréquemment les actes qui découlent d'une modification particulière du sensorium, leur réaction sur cet organe peut, non-seulement accroître cette modification, mais quelquefois lui donner naissance. » Ainsi le mouvement de la main qui tient une longue chaîne suspendue se propage le long de la chaîne jusqu'à son extrémité inférieure; et si, la chaîne étant parvenue au repos, on met en mouvement cette extrémité, la vibration remonte jusqu'à la main qu'elle fait mouvoir à son tour. Ces mouvements réciproques deviennent faciles par la fréquence de leurs répétitions.

Les effets de ce principe sur la croyance sont remarquables. La croyance ou l'adhésion que nous donnons à une proposition est ordinairement fondée sur l'évidence, sur le témoignage des sens, ou sur des probabilités : dans ce dernier cas, son degré de force dépend de celui de la probabilité, qui dépend elle-même des données que chaque individu peut avoir sur l'objet de son jugement.

Nous agissons souvent en vertu de notre croyance, sans avoir besoin d'en rappeler les preuves. La croyance est donc une modification du sensorium, qui subsiste indépendamment de ces preuves quelquefois entièrement oubliées, et qui nous détermine à produire les actes qui en sont les conséquences. Suivant le principe que nous venons d'exposer, une répétition fréquente de ces actes peut faire naître cette modification, surtout s'ils sont répétés à la fois par un grand nombre de personnes ; car alors, à la force de leur réaction se joint le pouvoir de l'imitation, suite nécessaire de la sympathie. Quand ces actes sont un devoir que les circonstances nous imposent, la tendance de l'économie animale à prendre l'état le plus favorable à notre bien-être nous dispose encore à la croyance qui les fait exécuter avec plaisir. Peu d'hommes résistent à l'action de toutes ces causes.

Pascal a bien développé ces effets dans un article de ses Pensées, qui a ce singulier titre, *qu'il est difficile de démontrer l'existence de Dieu par les lumières naturelles, mais que le plus sûr est de la croire.* Il s'exprime ainsi en s'adressant à un incrédule. « Vous voulez aller à la foi, et vous n'en savez pas le chemin; vous voulez guérir de l'infidélité, et vous en demandez le remède. Apprenez-le de ceux qui ont été tels que vous, et qui n'ont présentement aucun doute. Ils savent ce chemin que vous voudriez suivre, et ils sont guéris d'un mal dont vous voulez guérir. Suivez la manière par où ils ont commencé. Imitez leurs actions extérieures, si vous ne pouvez encore entrer dans leurs dispositions intérieures; quittez ces vains amusements qui vous occupent tout entier. J'aurais bientôt quitté ces plaisirs, dites-vous, si j'avais la foi. Et moi je vous dis que vous auriez bientôt la foi si vous aviez quitté ces plaisirs. Or c'est à vous à commencer. Si je pouvais, je vous donnerais la foi: je ne le puis, ni par conséquent éprouver la vérité de ce que vous dites; mais vous pouvez bien quitter ces plaisirs, et éprouver si ce que je vous dis est vrai.

Il ne faut pas se méconnaître ; nous sommes corps autant qu'esprit; et de là vient que l'instrument par lequel la persuasion se fait n'est pas la seule démonstration. Combien y a-t-il peu de choses démontrées? Les preuves ne convainquent que l'esprit : la coutume fait nos preuves les plus fortes. Elle incline les sens qui entraînent l'esprit sans qu'il y pense. Qui a démontré qu'il fera demain jour, et que nous mourrons? et qu'y a-t-il de plus universellement cru? C'est donc la coutume qui nous en persuade; c'est elle qui fait tant de turcs et de païens; c'est elle qui fait les métiers, les soldats, etc. Il est vrai qu'il ne faut pas commencer par elle, pour trouver la vérité; mais il faut avoir recours à elle, quand une fois l'esprit a vu où est la vérité, afin de nous abreuver et de nous teindre de cette croyance qui nous échappe à toute heure : car d'en avoir toujours les preuves présentes, c'est trop d'affaires. Il faut acquérir une croyance plus facile, qui est celle de l'habitude qui sans violence, sans art, sans argument, nous fait croire les choses, et incline toutes nos puissances à cette croyance, en sorte que notre âme y tombe naturellement. Ce n'est pas assez de ne croire que par la force de la conviction, si les sens nous portent à croire le contraire. Il faut donc faire marcher nos deux pièces ensemble : l'esprit, par les raisons qu'il suffit d'avoir vues une fois en sa vie, et les sens, par la coutume, et en ne leur permettant pas de s'incliner au contraire ».

Le moyen que Pascal propose pour la conversion d'un incrédule peut être employé avec succès pour détruire un préjugé reçu dès l'enfance et enraciné par l'habitude. Ces sortes de préjugés naissent souvent de la plus faible cause dans les imaginations actives. Qu'une personne, attachant au mot *gauche* une idée de malheur, fasse journellement de la main droite une chose que l'on puisse exécuter indifféremment de l'une ou de l'autre main, cette habitude peut accroître la répugnance à se servir pour cela de la main gauche, au point de rendre la raison impuissante contre ce préjugé. Il est naturel de croire qu'Auguste, doué d'une raison supérieure à tant d'égards, s'est reproché quelquefois sa faiblesse de n'oser se mettre en route, le lendemain d'un jour de foire, et qu'il a voulu la surmonter. Mais au moment d'entreprendre un voyage dans l'un de ces jours réputés malheureux, il a pu se dire que *le plus sûr* était de le différer, augmentant ainsi sa répugnance par l'habitude d'y céder. La répétition fréquente d'actes contraires à ces préjugés doit, à la longue, les affaiblir et les faire entièrement disparaître.

L'attachement que l'on porte aux personnes qu'on a souvent obligées découle du principe que nous venons de développer. La répétition fréquente d'actes en leur faveur accroît et fait même naître quelquefois le sentiment dont ils sont la suite naturelle. Les actes, que le goût d'une chose nous fait exécuter fréquemment, augmentent l'intensité de ce goût et le transforment souvent en passion.

On voit par ce qui précède, combien notre croyance dépend de nos habitudes. Accoutumés à juger et à nous conduire d'après un certain genre de probabilités, nous donnons à ces probabilités notre assentiment, comme par instinct, et elles nous déterminent avec plus de force que des probabilités bien supérieures, résultats de la réflexion ou du calcul. Pour diminuer autant qu'il est possible cette cause d'illusion, il faut appeler l'imagination et les sens au secours de la raison. Que l'on figure par des lignes les probabilités respectives, on sentira beaucoup mieux leur différence. Une ligne qui représenterait la probabilité du témoignage sur lequel un fait extraordinaire est appuyé, placée à côté de la ligne qui représenterait l'invraisemblance de ce fait, rendrait très sensible la probabilité de l'erreur du témoignage; comme un tableau, dans lequel les hauteurs des montagnes sont rapprochées, donne une idée frappante des rapports de ces hauteurs. Ce moyen peut être employé dans plusieurs cas avec succès. Pour rendre sensible l'immensité de l'univers, que l'on représente par une quantité presque imperceptible, par un dixième de millimètre, la plus grande étendue de la France en longueur, la distance du soleil à la terre sera de quatorze mètres, celle de l'étoile la plus proche surpassera un million et demi de mètres, c'est-à-dire sept ou huit fois le rayon du plus grand horizon que l'œil puisse embrasser du point le plus élevé. On n'aura encore ainsi qu'une très faible image de la grandeur de l'univers qui s'étend infiniment au-delà des plus brillantes étoiles, comme le prouve ce nombre prodigieux d'étoiles placées les unes au-delà des autres et se dérobant à la vue dans la profondeur des cieux. Mais toute faible qu'elle est, cette image suffit pour nous faire sentir l'absurdité des idées de prééminence de l'homme sur toute la nature, idées dont on a tiré de si étranges conséquences.

Nous établirons enfin, comme principe de Psychologie, l'exagération des probabilités par les passions. La chose que l'on craint, ou que l'on désire vivement, nous semble par cela même plus probable. Son image fortement retracée dans le sensorium affaiblit l'impression des probabilités contraires, et quelquefois les efface au point de faire croire la chose arrivée. La réflexion et le temps, en diminuant la vivacité de ces sentiments, rendent à l'esprit le calme nécessaire pour bien apprécier la probabilité des choses.

Les vibrations du sensorium doivent être, comme tous les mouvements, assujetties aux lois de la Dynamique, et cela est confirmé par l'expérience. Les mouvements qu'elles impriment au système musculaire, et que ce système communique aux corps étrangers, sont comme dans le développement des ressorts tels, que le centre commun de gravité de notre corps et de ceux qu'il fait mouvoir reste immobile. Ces vibrations se superposent les unes aux autres, comme on voit les ondulations des fluides se mêler sans se confondre. Elles se communiquent aux individus, comme les vibrations d'un corps sonore aux corps qui l'environnent. Les idées complexes se forment de leurs idées simples, comme le flux de la mer se compose des flux partiels que produisent le soleil et la lune. L'hésitation entre des motifs opposés est un équilibre de forces égales. Les changements brusques, que l'on produit dans le sensorium, éprouvent la résistance qu'un système matériel oppose à des changements semblables; et si l'on veut éviter les secousses et ne pas perdre de force vive, il faut agir, comme dans ce système, par nuances insensibles. Une attention forte et continue épuise le sensorium, comme une longue suite de commotions épuise une pile voltaïque, ou l'organe électrique des poissons. Presque toutes les comparaisons que nous tirons des objets matériels, pour rendre sensibles les choses intellectuelles, sont au fond des identités.

Je désire que les considérations précédentes, tout imparfaites qu'elles sont, puissent attirer l'attention des observateurs philosophes sur les lois du sensorium ou du monde intellectuel, lois qu'il nous importe autant d'approfondir que celles du monde physique. On a imaginé des hypothèses à peu près semblables, pour expliquer les phénomènes de ces deux mondes. Mais les fondements de ces hypothèses échappant à tous nos moyens d'observation et de calcul, on peut à leur égard dire avec Montaigne, que *l'ignorance et l'incuriosité sont un mol et doux chevet, pour reposer une tête bien faite.*

Des divers moyens d'approcher de la certitude.

L'induction, l'analogie, des hypothèses fondées sur les faits et rectifiées sans cesse par de nouvelles observations, un tact heureux donné par la nature et fortifié par des comparaisons nombreuses de ses indications avec l'expérience, tels sont les principaux moyens de parvenir à la vérité.

Si l'on considère avec attention la série des objets de même nature, on aperçoit entre eux et dans leurs changements des rapports qui se manifestent de plus en plus à mesure que la série se prolonge, et qui, en s'étendant et se généralisent sans cesse, conduisent enfin au principe dont ils dérivent. Mais souvent ces rapports sont enveloppés de tant de circonstances étrangères, qu'il faut une grande sagacité pour les démêler et pour remonter à ce principe : c'est en cela que consiste le véritable génie des sciences. L'Analyse et la Philosophie naturelle doivent leurs plus importantes découvertes à ce moyen fécond que l'on nomme *induction*. Newton lui a été redevable de son théorème du binôme et du principe de la gravitation universelle. Il est difficile d'apprécier la probabilité des résultats de l'induction qui se fonde sur ce que les rapports les plus simples sont les plus communs : c'est ce qui se vérifie dans les formules de l'Analyse, et ce que l'on retrouve dans les phénomènes naturels, dans la cristallisation et dans les combinaisons chimiques. Cette simplicité de rapports ne paraîtra point étonnante, si l'on considère que tous les effets de la nature ne sont que les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois immuables.

Cependant l'induction, en faisant découvrir les principes généraux des sciences, ne suffit pas pour les établir en rigueur. Il faut toujours les confirmer par des démonstrations, ou par des expériences décisives, car l'histoire des sciences nous montre que l'induction a quelquefois conduit à des résultats inexacts. Je citerai pour exemple un théorème de Fermat sur les nombres premiers. Ce grand géomètre, qui avait profondément médité sur leur théorie, cherchait une formule qui, ne renfermant que des nombres premiers, donnât directement un nombre premier plus grand qu'aucun nombre assignable. L'induction le conduisit à penser que deux, élevé à une puissance qui était elle-même une puissance de deux, formait avec l'unité un nombre premier. Ainsi deux, élevé au carré plus un, forme le nombre premier cinq ; deux, élevé à la seconde puissance de deux, ou seize, forme avec un le nombre premier dix-sept. Il trouva que cela était encore vrai pour la huitième et la seizième puissance de deux, augmentées de l'unité, et cette induction appuyée de plusieurs considérations arithmétiques lui fit regarder ce résultat comme général. Cependant il avoua qu'il ne l'avait pas démontré. En effet, Euler a reconnu que cela cesse d'avoir lieu pour la trente-deuxième puissance de deux, qui, augmentée de l'unité, donne 4.294.967.297, nombre divisible par 641.

Nous jugeons par induction que si des événements divers, des mouvements par exemple, paraissent constamment et depuis longtemps liés par un rapport simple, ils continueront sans cesse d'y être assujettis, et nous en concluons par la théorie des probabilités que ce rapport est dû, non au hasard, mais à une cause régulière. Ainsi l'égalité des mouvements de rotation et de révolution de la lune, celle des mouvements des nœuds de l'orbite et de l'équateur lunaire, et la coïncidence de ces nœuds; le rapport singulier des mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, suivant lequel la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à deux angles droits; l'égalité de l'intervalle des marées à celui des passages de la lune au méridien; le retour des plus grandes marées avec les syzygies, et des plus petites avec les quadratures; toutes ces choses, qui se maintiennent depuis qu'on les observe, indiquent avec une vraisemblance extrême l'existence de causes constantes que les géomètres sont heureusement parvenus à rattacher à la loi de la pesanteur universelle, et dont la connaissance rend certaine la perpétuité de ces rapports.

Le chancelier Bacon, promoteur si éloquent de la vraie méthode philosophique, a fait de l'induction un abus bien étrange, pour prouver l'immobilité de la terre.

Voici comme il raisonne dans le *Novum Organum*, son plus bel ouvrage. Le mouvement des astres, d'orient en occident, est d'autant plus prompt qu'ils sont plus éloignés de la terre. Ce mouvement est le plus rapide pour les étoiles; il se ralentit un peu pour Saturne, un peu plus pour Jupiter, et ainsi de suite, jusqu'à la lune et aux comètes les moins élevées. Il est encore perceptible dans l'atmosphère, surtout entre les tropiques, à cause des grands cercles que les molécules de l'air y décrivent; enfin il est presque insensible pour l'Océan, il est donc nul pour la terre. Mais cette induction prouve seulement que Saturne et les astres qui lui sont inférieurs ont des mouvements propres, contraires au mouvement réel ou apparent qui emporte toute la sphère céleste d'orient en occident, et que ces mouvements paraissent plus lents pour les astres plus éloignés, ce qui est conforme aux lois de l'Optique. Bacon aurait dû être frappé de l'inconcevable vitesse qu'il faut supposer aux astres, pour accomplir leur révolution diurne, si la terre est immobile, et de l'extrême simplicité avec laquelle sa rotation explique comment des corps aussi distants les uns des autres que les étoiles, le soleil, les planètes et la lune, semblent tous assujettis à cette révolution. Quant à l'océan et à l'atmosphère, il ne devait point assimiler leur mouvement à celui des astres, qui sont détachés de la terre; au lieu que l'air et la mer, faisant partie du globe terrestre, ils doivent participer à son mouvement ou à son repos. Il est singulier que Bacon, porté aux grandes vues par son génie, n'ait pas été entraîné par l'idée majestueuse que le système de Copernic offre de l'univers. Il pouvait cependant trouver en faveur de ce système de fortes analogies dans les découvertes de Galilée, qui lui étaient connues. Il a donné pour la recherche de la vérité le précepte et non l'exemple. Mais en insistant avec toute la force de la raison et de l'éloquence sur la nécessité d'abandonner les subtilités insignifiantes de l'école, pour se livrer aux observations et aux expériences, et en indiquant la vraie méthode de s'élever aux causes générales des phénomènes, ce grand philosophe a contribué aux progrès immenses que l'esprit humain a faits dans le beau siècle où il a términé sa carrière.

L'analogie est fondée sur la probabilité que les choses semblables ont des causes du même genre et produisent les mêmes effets. Plus la similitude est parfaite, plus cette probabilité augmente. Ainsi nous jugeons sans aucun doute que des êtres pourvus des mêmes organes, exécutant les mêmes choses, éprouvent les mêmes sensations et sont mus par les mêmes désirs. La probabilité que les animaux, qui se rapprochent de nous par leurs organes, ont des sensations analogues aux nôtres, quoiqu'un peu inférieure à celle qui est relative aux individus de notre espèce, est encore excessivement grande, et il a fallu toute l'influence des préjugés religieux, pour faire penser à quelques philosophes que les animaux sont de purs automates. La probabilité de l'existence du sentiment décroît, à mesure que la similitude des organes avec les nôtres diminue, mais elle est toujours très forte, même pour les insectes. En voyant ceux d'une même espèce exécuter des choses fort compliquées, exactement de la même manière, de générations en générations et sans les avoir apprises, on est porté à croire qu'ils agissent par une sorte d'affinité, analogue à celle qui rapproche les molécules des cristaux, mais qui, se mêlant au sentiment attaché à toute organisation animale, produit avec la régularité des combinaisons chimiques des combinaisons beaucoup plus singulières : on pourrait peut-être nommer *affinité animale* ce mélange des affinités électives et du sentiment. Quoiqu'il existe beaucoup d'analogie entre l'organisation des plantes et celle des animaux, elle ne me paraît pas cependant suffisante pour étendre aux végétaux la faculté de sentir, mais rien n'autorise à la leur refuser.

Le soleil faisant éclore, par l'action bienfaisante de sa lumière et de sa chaleur, les animaux et les plantes qui couvrent la terre, nous jugeons par l'analogie qu'il produit des effets semblables sur les autres planètes; car il n'est pas naturel de penser que la matière, dont nous voyons l'activité se développer en tant de façons, soit stérile sur une aussi grosse planète que Jupiter qui, comme le globe terrestre, a ses jours, ses nuits et ses années, et sur lequel les observations indiquent des changements qui supposent des forces très actives. Cependant, ce serait donner trop d'extension à l'analogie que d'en conclure la similitude des habitants des planètes et de la terre. L'homme fait pour la température dont il jouit, et pour l'élément qu'il respire, ne pourrait pas, selon toute apparence, vivre sur les autres planètes. Mais ne doit-il pas y avoir une infinité d'organisations relatives aux diverses constitutions des globes de cet univers? Si la seule différence des éléments et des climats met tant de variété dans les productions terrestres, combien plus doivent différer celles des diverses planètes et de leurs satellites! L'imagination la plus active ne peut s'en former au cune idée, mais leur existence est très vraisemblable.

Nous sommes conduits par une forte analogie à regarder les étoiles comme autant de soleils doués, ainsi que le nôtre, d'un pouvoir attractif proportionnel à la masse et réciproque au carré des distances. Car ce pouvoir étant démontré pour tous les corps du système solaire, et pour leurs plus petites molécules, il paraît appartenir à toute la matière. Déjà les mouvements des petites étoiles que l'on a nommées *doubles*, à cause de leur rapprochement, paraissent l'indiquer : un siècle au plus d'observations précises, en constatant leurs mouvements de révolution les unes autour des autres, mettra hors de doute leurs attractions réciproques.

L'analogie qui nous porte à faire de chaque étoile le centre d'un système planétaire est beaucoup moins forte que la précédente; mais elle acquiert de la vraisemblance par l'hypothèse que nous avons proposée sur la formation des étoiles et du soleil, car, dans cette hypothèse, chaque étoile ayant été comme le soleil primitivement environnée d'une vaste atmosphère, il est naturel d'attribuer à cette atmosphère les mêmes effets qu'à l'atmosphère solaire, et de supposer qu'elle a produit, en se condensant, des planètes et des satellites.

Un grand nombre de découvertes dans les sciences sont dues à l'analogie. Je citerai comme une des plus remarquables la découverte de l'électricité atmosphérique, à laquelle on a été conduit par l'analogie des phénomènes électriques avec les effets du tonnerre.

La méthode la plus sûre, qui puisse nous guider dans la recherche de la vérité, consiste à s'élever par induction des phénomènes aux lois, et des lois aux forces. Les lois sont les rapports qui lient entre eux les phénomènes particuliers : quand elles ont fait connaître le principe général des forces dont elles dérivent, on le vérifie soit par des expériences directes, lorsque cela est possible, soit en examinant s'il satisfait aux phénomènes connus; et si par une rigoureuse analyse on les voit tous découler de ce principe, jusque dans leurs moindres détails, si d'ailleurs ils sont très variés et très nombreux, la science alors acquiert le plus haut degré de certitude et de perfection qu'elle puisse atteindre. Telle est devenue l'Astronomie par la découverte de la pesanteur universelle. L'histoire des sciences fait voir que cette marche lente et pénible de l'induction n'a pas toujours été celle des inventeurs. L'imagination impatiente de remonter aux causes se plaît à créer des hypothèses, et souvent elle dénature les faits pour les plier à son ouvrage : alors les hypothèses sont dangereuses. Mais quand on ne les envisage que comme des moyens de lier entre eux les phénomènes, pour en découvrir les lois, lorsqu'en évitant de leur attribuer de la réalité, on les rectifie sans cesse par de nouvelles observations, elles peuvent conduire aux véritables causes, ou du moins nous mettre à portée de conclure des phénomènes observés ceux que des circonstances données doivent faire éclore.

Si l'on essayait toutes les hypothèses que l'on peut former sur la cause des phénomènes, on parviendrait par voie d'exclusion à la véritable. Ce moyen a été employé avec succès; quelquefois on est arrivé à plusieurs hypothèses qui expliquaient également bien tous les faits connus, et entre lesquelles les savants se sont partagés, jusqu'à ce que des observations décisives aient fait connaître la véritable. Alors il est intéressant pour l'histoire de l'esprit humain de revenir sur ces hypothèses, de voir comment elles parvenaient à expliquer un grand nombre de faits, et de rechercher les changements qu'elles doivent subir, pour rentrer dans celle de la nature. C'est ainsi que le système de Ptolémée, qui n'est que la réalisation des apparences célestes, se transforme dans l'hypothèse du mouvement des planètes autour du soleil, en y rendant égaux et parallèles à l'orbe solaire les cercles et les épicycles que Ptolémée fait décrire annuellement et dont il laisse la grandeur indéterminée. Il suffit ensuite, pour changer cette hypothèse dans le vrai système du monde, de transporter, en sens contraire, à la terre le mouvement apparent du soleil.

Il est presque toujours impossible de soumettre au calcul la probabilité des résultats obtenus par ces divers moyens : c'est ce qui a lieu pareillement pour les faits historiques. Mais l'ensemble des phénomènes expliqués ou des témoignages est quelquefois tel que, sans pouvoir en apprécier la probabilité, on ne peut raisonnablement se permettre aucun doute à leur égard. Dans les autres cas, il est prudent de ne les admettre qu'avec beaucoup de réserve.

Notice historique sur le Calcul des Probabilités.

Depuis longtemps on a déterminé dans les jeux les plus simples les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs : les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. Mais personne, avant Pascal et Fermat, n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul, et n'avait résolu des questions de ce genre un peu compliquées. C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités, dont la découverte peut être mise au rang des choses remarquables qui ont illustré le XVII^e siècle, celui de tous qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Le principal problème qu'ils résolurent par des voies différentes consiste, comme on l'a vu précédemment, à partager équitablement l'enjeu entre des joueurs dont les adresses sont égales, et qui conviennent de quitter une partie avant qu'elle finisse, la condition du jeu étant que pour gagner la partie il faut atteindre, le premier, un nombre donné de points différent pour chacun des joueurs. Il est clair que le partage doit se faire proportionnellement aux probabilités respectives des joueurs, de gagner cette partie, probabilités dépendantes des nombres de points qui leur manquent encore. La méthode de Pascal est fort ingénieuse, et n'est au fond que l'équation aux différences partielles de ce problème, appliquée à déterminer les probabilitées successives des joueurs en allant des nombres les plus petits aux suivants. Cette méthode est limitée au cas de deux joueurs, celle de Fermat, fondée sur les combinaisons, s'étend à un nombre quelconque de joueurs. Pascal crut d'abord qu'elle était comme la sienne restreinte à deux joueurs, ce qui établit entre eux une discussion à la fin de laquelle Pascal reconnut la généralité de la méthode de Fermat.

Huygens réunit les divers problèmes que l'on avait déjà résolus et en ajouta de nouveaux dans un petit Traité, le premier qui ait paru sur cette matière, et qui a pour titre : *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Plusieurs géomètres s'en occupèrent ensuite : Hudde, le grand pensionnaire Witt en Hollande et Halley en Angleterre appliquèrent le calcul aux probabilités de la vie humaine, et Halley publia pour cet objet la première table de mortalité. Vers le même temps, Jacques Bernoulli proposa aux géomètres divers problèmes de probabilité dont il donna depuis des solutions. Enfin il composa son bel ouvrage intitulé *Ars conjectandi*, qui ne parut que sept ans après sa mort, arrivée en 1706. La science des probabilités est beaucoup plus approfondie dans cet ouvrage que dans celui d'Huyghens : l'auteur y donne une théorie générale des combinaisons et des suites, et l'applique à plusieurs questions difficiles concernant les hasards. Cet ouvrage est encore remarquable par la justesse et la finesse des vues, par l'emploi de la formule du binôme dans ce genre de questions, et par la démonstration de ce théorème, savoir, qu'en multipliant indéfiniment les observations et les expériences, le rapport des événements de diverses natures approche de celui de leurs possibilités respectives, dans des limites dont l'intervalle se reserre de plus en plus, à mesure qu'ils se multiplient, et devient moindre qu'aucune quantité assignable. Ce théorème est très utile pour reconnaître par les observations les lois et les causes des phénomènes. Bernoulli attachait avec raison une grande importance à sa démonstration, qu'il dit avoir méditée pendant vingt années.

Dans l'intervalle de la mort de Jacques Bernoulli à la publication de son ouvrage, Montmort et Moivre firent paraître deux traités sur le calcul des probabilités. Celui de Montmort a pour titre *Essai sur les Jeux de hasard,* il contient de nombreuses applications de ce calcul aux divers jeux. L'auteur y a joint dans la seconde édition quelques lettres, dans lesquelles Nicolas Bernoulli donne des solutions ingénieuses de plusieurs problèmes difficiles. Le traité de Moivre, postérieur à celui de Montmort, parut d'abord dans les Transactions Philosophiques de l'année 1711. Ensuite l'auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné successivement dans les trois éditions qu'il en a données. Cet ouvrage est principalement fondé sur la formule du binôme, et les problèmes qu'il contient ont, ainsi que leurs solutions, une grande généralité. Mais ce qui le distingue, est la théorie des suites réccurentes et leur usage dans ces matières. Cette théorie est l'intégration des équations linéaires aux différences finies à coefficients constants, intégration à laquelle Moivre parvient d'une manière très heureuse.

Moivre a repris dans son ouvrage le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de celui de leurs possibilités respectives, il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports est contenue dans des limites données. Pour cela, il détermine le rapport du plus grand terme du développement d'une puissance très élevée du binôme à la somme de tous ses termes, et le logarithme hyperbolique de l'excès de ce terme sur les termes qui en sont très voisins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considérable de facteurs, son calcul numérique devient impraticable. Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un théorème de Stirling sur le terme moyen du binôme élevé à une haute puissance, théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il extrêmement frappé de ce résultat que Stirling avait déduit de l'expression de la circonférence en produits infinis, expression à laquelle Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient le germe de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.

Plusieurs savants, parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Sussmilch, Messène, Moheau, Price, Baily et Duvillard, ont réuni un grand nombre de données précieuses sur la population, les naissances, les mariages et la mortalité. Ils ont donné des formules et des tables relatives aux rentes viagères, aux tontines, aux assurances, etc. Mais dans cette courte notice je ne puis qu'indiquer ces travaux utiles, pour m'attacher aux idées originales. De ce nombre est la distinction des espérances mathématique et morale, et le principe ingénieux que Daniel Bernoulli a donné pour soumettre celle-ci à l'analyse. Telle est encore l'application heureuse qu'il a faite du calcul des probabilités à l'inoculation. On doit surtout placer au nombre de ces idées originales la considération directe des possibilités des événements tirées des événements observés. Jacques Bernoulli et Moivre supposaient ces possibilités connues, et ils cherchaient la probabilité que le résultat des expériences à faire approchera de plus en plus de les représenter. Bayes, dans les Transactions Philosophiques de l'année 1763, a cherché directement la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites sont comprises dans les limites données, et il y est parvenu d'une manière fine et très ingénieuse, quoiqu'un peu embarrassée. Cet objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, conclue des événements observés, théorie dont j'exposai quelques années après les principes, avec la remarque de l'influence des inégalités qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales. Quoique l'on ignore quels sont les événements simples que ces inégalités favorisent, cependant cette ignorance même accroît souvent la probabilité des événements composés.

En généralisant l'Analyse et les problèmes concernant les probabilités, je fus conduit au calcul des différences finies partielles que Lagrange a traité depuis par une méthode fort simple, et dont il a fait d'élégantes applications à ce genre de problèmes. La théorie des fonctions génératrices, que je donnai vers le même temps, comprend ces objets parmi ceux qu'elle embrasse, et s'adapte d'elle-même et avec la plus grande généralité aux questions de probabilité les plus difficiles. Elle détermine encore, par des approximations très convergentes, les valeurs des fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs ; et en faisant voir que la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon entre le plus souvent dans ces valeurs, elle montre qu'une infinité d'autres transcendantes peuvent s'y introduire.

On a encore soumis au calcul des probabilités les témoignages, les votes et les décisions des assemblées électorales et délibérantes, et les jugements des tribunaux. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles. Mais la solution de problèmes plus simples, et qui ont avec elles beaucoup d'analogie, peut souvent répandre sur ces questions difficiles et importantes de grandes lumières, que la sûreté du calcul rend toujours préférables aux raisonnements les plus spécieux.

L'une des plus intéressantes applications du calcul des probabilités concerne les milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Plusieurs géomètres s'en sont occupés, et Lagrange a publié dans les Mémoires de Turin une belle méthode pour déterminer ces milieux, quand la loi des erreurs des observations est connue. J'ai donné pour le même objet une méthode fondée sur un artifice singulier qui peut être employé avec avantage dans d'autres questions d'analyse, et qui, en permettant d'étendre indéfiniment dans tout le cours d'un long calcul des fonctions qui doivent être limitées par la nature du problème, indique les modifications que chaque terme du résultat final doit recevoir en vertu de ces limitations. On a vu précédemment que chaque observation fournit une équation de condition du premier degré, qui peut toujours être disposée de manière que tous ses termes soient dans le premier membre, le second étant zéro. L'usage de ces équations est une des causes principales de la grande précision de nos tables astronomiques, parce que l'on a pu ainsi faire concourir un nombre immense d'excellentes observations à la fixation de leurs éléments. Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément à déterminer, Cotes avait prescrit de préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de l'élément inconnu fût positif dans chacune d'elles, et d'ajouter ensuite toutes ces équations pour former une équation finale, d'où l'on tire la valeur de cet élément. La règle de Cotes fut suivie par tous les calculateurs. Mais quand il fallait déterminer plusieurs éléments, on n'avait aucune règle fixe pour combiner les équations de condition, de manière à obtenir les équations finales nécessaires : seulement, on choisissait pour chaque élément les observations les plus propres à le déterminer. Ce fut pour obvier à ces tâtonnements que MM. Legendre et Gauss imaginèrent d'ajouter les carrés des premiers membres des équations de condition, et d'en rendre la somme un *minimum*, en y faisant varier chaque élément inconnu : par ce moyen on obtient directement autant d'équations finales qu'il y a d'éléments. Mais les valeurs déterminées par ces équations, méritent-elles la préférence sur toutes celles que l'on peut obtenir par d'autres moyens? C'est ce que le calcul des probabilités pouvait seul apprendre. Je l'appliquai donc à cet objet important, et je parvins par une analyse délicate à une règle qui renferme la précédente, et qui réunit à l'avantage de donner par un procédé régulier les éléments cherchés celui de les faire sortir avec le plus d'évidence de l'ensemble des observations, et d'en déterminer les valeurs qui ne laissent à craindre que les plus petites erreurs possibles.

On n'a cependant encore qu'une connaissance imparfaite des résultats obtenus, tant que la loi des erreurs dont ils sont suceptibles n'est pas connue : il faut pouvoir assigner la probabilité que ces erreurs sont contenues dans des limites données, ce qui revient à déterminer ce que j'ai nommé *poids* d'un résultat. L'Analyse conduit à des formules générales et simples pour cet objet. J'ai appliqué cette Analyse aux résultats des observations géodésiques. Le problème général consiste à déterminer les probabilités que les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions linéaires des erreurs d'un très grand nombre d'observations sont renfermées dans des limites quelconques.

La loi de possibilité des erreurs des observations introduit dans les expressions de ces probabilités une constante dont la valeur semble exiger la connaissance de cette loi presque toujours inconnue. Heureusement, cette constante peut être déterminée par les observations mêmes. Dans la recherche des éléments astronomiques, elle est donnée par la somme des carrés des différences entre chaque observation et le calcul. Les erreurs également probables étant proportionnelles à la racine carrée de cette somme, on peut par la comparaison de ces carrés apprécier l'exactitude relative des diverses tables d'un même astre. Dans les opérations géodésiques, ces carrés sont remplacés par les carrés des erreurs des sommes observées des trois angles de chaque triangle. La comparaison des carrés de ces erreurs fera donc juger de la précison relative des instruments avec lesquels on a mesuré les angles. On voit, par cette comparaison, l'avantage du cercle répétiteur sur les instruments qu'il a remplacés dans la Géodésie.

Il existe souvent dans les observations plusieurs sources d'erreurs : ainsi les positions des astres étant déterminées au moyen de la lunette méridienne et du cercle, tous deux supceptibles d'erreurs dont la loi de probabilité ne doit pas être supposée la même, les éléments que l'on déduit de ces positions sont affectés de ces erreurs. Les équations de condition que l'on forme pour avoir ces éléments contiennent les erreurs de chaque instrument, et elles y ont des coefficients différents. Le système le plus avantageux des facteurs par lesquels on doit multiplier respectivement ces équations, pour obtenir par la réunion des produits autant d'équations finales qu'il y a d'éléments à déterminer, n'est plus alors celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition. L'analyse dont j'ai fait usage conduit facilement, quel que soit le nombre des sources d'erreur, au système de facteurs qui donne les résultats les plus avantageux ou dans lesquels une même erreur est moins probable que dans tout autre système. La même analyse détermine les lois de probabilité des erreurs de ces résultats. Ces formules renferment autant de constantes inconnues qu'il y a de sources d'erreur, et qui dépendent des lois de probabilité de ces erreurs. On a vu que, dans le cas d'une source unique, on peut déterminer cette constante, en formant la somme des carrés des résidus de chaque équation de condition, lorsqu'on y a substitué les valeurs trouvées pour les éléments. Un procédé semblable donne généralement les valeurs de ces constantes, quel que soit leur nombre, ce qui complète l'application du calcul des probabilités aux résultats des observations.

Je dois ici faire une remarque importante. La petite incertitude que les observations, quand elles ne sont pas très multipliées, laissent sur les valeurs des constantes dont je viens de parler, rend un peu incertaines les probabilités déterminées par l'analyse. Mais il suffit presque toujours de connaître si la probabilité que les erreurs des résultats obtenus sont renfermées dans d'étroites limites approche extrêmement de l'unité; et quand cela n'est pas, il suffit de savoir jusqu'à quel point on doit multiplier les observations, pour acquérir une probabilité telle qu'il ne reste sur la bonté des résultats aucun doute raisonnable. Les formules analytiques des probabilités remplissent parfaitement cet objet, et, sous ce rapport, elles peuvent être envisagées comme le complément nécessaire des sciences fondées sur un ensemble d'observations susceptibles d'erreur. Elles sont même indispensables pour résoudre un grand nombre de questions dans les sciences naturelles et morales. Les causes régulières des phénomènes sont le plus souvent, ou inconnues, ou trop compliquées pour être soumises au calcul : souvent encore leur action est troublée par des causes accidentelles et irrégulières; mais elle reste toujours empreinte dans les événements produits par toutes ces causes, et elle y apporte des modifications qu'une longue suite d'observations peut déterminer. L'Analyse des probabilités développe ces modifications, elle assigne la probabilité de leurs causes, et elle indique les moyens d'accroître de plus en plus cette probabilité. Ainsi au milieu des causes irrégulières qui agitent l'atmosphère, les changements périodiques de la chaleur solaire, du jour à la nuit et de l'hiver à l'été, produisent dans la pression de cette grande masse fluide, et dans la hauteur correspondante du baromètre, des oscillations diurnes et annuelles que de nombreuses observations barométriques ont fait connaître avec une probabilité au moins égale à celle des faits que nous regardons comme certains. C'est encore ainsi que la série des événements historiques nous montre l'action constante des grands principes de la morale, au milieu des passions et des intérêts divers qui agitent en tous sens les sociétés. Il est remarquable qu'une science qui a commencé par la considération des jeux se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines.

J'ai rassemblé toutes ces méthodes dans ma *Théorie analytique des Probabilités*, où je me suis proposé d'exposer de la manière la plus générale les principes et l'Analyse du Calcul des Probabilités, ainsi que les solutions des problèmes les plus intéressants et les plus difficiles que ce calcul présente.

On voit par cet Essai que la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul : elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. Elle ne laisse rien d'arbitraire dans le choix des opinions et des parties à prendre, toutes les fois que l'on peut, à son moyen, déterminer le choix le plus avantageux. Par là, elle devient le supplément le plus heureux à l'ignorance et à la faiblesse de l'esprit humain. Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçu et qu'elle peut recevoir encore par son application aux questions les plus importantes de la Philosophie naturelle et des sciences morales; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.

FIN DU DEUXIÈME ET DERNIER VOLUME

TABLE DES MATIÈRES

LA ROCHE-SUR-YON. — IMPRIMERIE CENTRALE DE L'OUEST.