

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник



Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 652 din 8 iulie 2011.

Manualul este elaborat conform curriculumului disciplinar și finanțat din sursele Fondului Special pentru Manuale.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Школа/Лицей				
Учебник №				
Год пользования	Фамилия и имя учащегося	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года определяется оценками: *отлично, хорошо, удовлетворительно или плохо.*

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii *Prut Internațional*.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE

Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UST

Olga Șpunteco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chișinău

Comisia de evaluare:

Dumitru Cozma, doctor, conferențiar universitar, UST

Valeriu Baltag, doctor, grad didactic superior, Liceul Academiei de Științe a Moldovei, Chișinău

Radion Blându, profesor, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu”, Bălți

Nichita Holban, profesor, grad didactic I, Liceul Teoretic „Vasile Alecsandri”, Chișinău

Vasile Cosovan, profesor, grad didactic I, Liceul Teoretic „Ion Creangă”, Fălești

Traducere din limba română: *Antonina Erhan*

Redactor: *Andrei Braicov*

Corector: *Larisa Nosacenco*

Copertă: *Adrian Grosu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

© Editura *Prut Internațional*, 2017

© I. Achiri, A. Braicov, O. Șpunteco, 2017

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD 2051

Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Акири, Ион

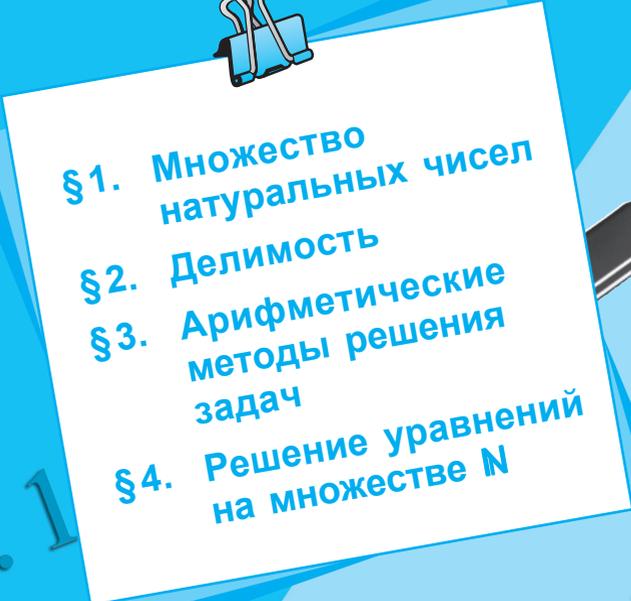
Математика: Учебник: 6 класс / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; comisia de evaluare: Dumitru Cozma [et al.]; trad. din limba română: Antonina Erhan; М-во просвещения Республики Молдова. Ed. a 2-a. – Chișinău: *Prut Internațional*, 2017 (F.E.-P. „Tipografia Centrală”). – 244 p.

ISBN 978-9975-54-319-4

51(075.3)

A 394

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОВТОРЕНИЕ И ДОПОЛНЕНИЯ

- 
- §1. Множество натуральных чисел
 - §2. Делимость
 - §3. Арифметические методы решения задач
 - §4. Решение уравнений на множестве \mathbb{N}



1

2

3

4

5

$a : 1$

$a : 5$

$a : 2$

... '101 '001 '000 '11 '01 '6' '8' '9'
'2' '3' '4' '5' '6' '7' '8' '9'

§1 Множество натуральных чисел

1.1. Истинные высказывания. Ложные высказывания. Повторение и дополнения



Все высказывания
Мудреца являются
истинными.



Злой Волшебник
постоянно лжет.



О фразах Королевского
Шута нельзя сказать,
истинны они или ложны.

Какому из этих персонажей может принадлежать утверждение?

- а) *Время нельзя остановить.*
- б) *Веселое время.*
- в) *Время можно остановить.*

Обоснуйте ответ.



Вспомним

Высказыванием (математическим) называется предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Если высказывание истинно, то говорят, что его истинностное значение – „истина“ (обозначают „И“ или „1“). Если высказывание ложно, то говорят, что его истинностное значение – „ложь“ (обозначают „Л“ или „0“).

Исследуем и узнаем

1 Определите истинностное значение высказывания:

① В Республике Молдова учебный год начинается 1 сентября.

• Вставьте частицу *не* перед сказуемым в высказывании ①.

Запишите полученное высказывание и определите его истинностное значение.

② . –



Возьмите на заметку

Высказывание ② является **отрицанием высказывания** ①.

Отрицание высказывания получается приписыванием частицы **не** перед сказуемым.

Отрицание истинного высказывания является ложным высказыванием, отрицание ложного высказывания является истинным высказыванием.

Применяем и объясняем

Сформулируйте:

- истинное высказывание и его отрицание;
- ложное высказывание и его отрицание.

Исследуем и узнаем

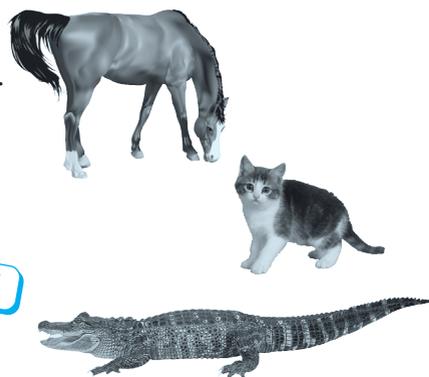
- Высказывания бывают *общими* и *частными*.

У всех животных, изображенных на рисунке, есть хвост.

И

У лошади есть хвост.

И



2 Определите истинностное значение высказываний:

- Все животные, изображенные на рисунке, умеют плавать.
 - Крокодил умеет плавать.
 - Некоторые животные, изображенные на рисунке, умеют плавать.
- Какие из высказываний а), б), в) являются общими? А какие – частными?

- Сформулируйте: а) истинное общее высказывание; б) истинное частное высказывание.

3 Впишите одно из слов: „Все“ или „Некоторые“, чтобы получить истинные высказывания.

- ученики нашего класса любят математику.
- четные числа делятся на 2.
- натуральные числа больше 10.

Возьмите на заметку

Из **простых высказываний** при помощи слов *и; или; не; если..., то...* можно образовать **сложное высказывание**.

4 Впишите одно из выражений „Не больше“, „Не меньше“, „Любое“, „Существуют“.

а) 5 упражнений должен решать каждый ученик на уроке математики.

б) четные числа и нечетные числа.

в) число, у которого цифра единиц равна 5, делится на 5.

5 Впишите одно из слов: „Некоторые“ или „Все“.

а) одноклассники являются друзьями.

б) числа – простые.

в) натуральные числа больше 0.

г) элементы множества $A = \{a, b, c\}$ принадлежат множеству $B = \{1, a, 5, c\}$.

• Определите истинностное значение полученных высказываний.

6 Приведите по одному примеру истинного и ложного высказывания для каждого из выражений: „Не больше“, „Не меньше“, „Любое“, „Существует“, „Некоторые“, „Все“.

• а) Определите истинностное значение простых высказываний:

Число 8 делится на 2 без остатка.

Число 8 делится на 3 без остатка.

б) Составьте сложные высказывания: ① и ②; ① или ②; Если ①, то ②; Если ②, то ① и определите их истинностное значение.

Обсудите полученные результаты.

• Сформулируйте:

а) два простых высказывания;

б) два сложных высказывания.

1.2. Множества. Действия над множествами

1 Какому из множеств принадлежит дерево? Кузнечик? Гномик?

A – множество насекомых;

B – множество сказочных персонажей;

C – множество растений;

D – множество живой природы.



Назовите еще по два элемента, принадлежащих множествам A , B , C или D .



Вспомним

Множество – это совокупность объектов, объединяемых по некоторому признаку. Эти объекты называются **элементами множества**. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C, D, \dots . Элементы множества записываются в фигурных скобках:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством**. Обозначается \emptyset .

РАБОТА В ПАРАХ!



2 Даны множества:

$$M = \{a, b, c, d\};$$

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 3\};$$

A – множество дней недели;

B – множество выходных дней недели.



\emptyset – пустое множество

- Определите способ задания каждого множества.
- Укажите конечные и бесконечные множества.
- Найдите $\text{card } M$, $\text{card } A$ и $\text{card } \emptyset$.



Вспомним

Число элементов множества M называется **кардиналом множества M** . Обозначается: $\text{card } M$.

$$\text{card } \emptyset = 0.$$

г) Задайте множества A и B перечислением их элементов:

$$A = \{ \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square \};$$

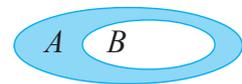
$$B = \{ \square, \square \}.$$



Вспомним

Множество B называется **подмножеством** множества A , если любой элемент множества B является также элементом множества A .

$$B \subset A$$



Множества A и B называются **равными множествами**, если они состоят из одних и тех же элементов.

3 Рассмотрите рисунок.



Заполните пропуски, чтобы получить истинные высказывания:

$$[FE] \cap [CD] = [CE]$$

$$[FE] \cup [CD] = [FD]$$

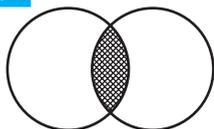
$$[FC] \cap [ED] = \square$$

$$[CE] \cup [ED] = \square$$



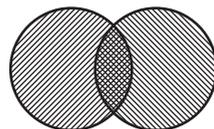
Вспомним

$A \cap B$



Пересечением множеств A и B является новое множество $A \cap B$, которое содержит общие элементы множеств A и B .

$A \cup B$



Объединением множеств A и B является новое множество $A \cup B$, которое содержит элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A или B .

4 Проанализируйте и заполните таблицу:

Множества			
A	B		
Множество книг домашней библиотеки	Множество учебников библиотеки		$B \subset A$
Множество птиц			$A \cap B = \emptyset$
$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$		$A \cup B =$ <input type="text"/> $A \cap B =$ <input type="text"/>

Исследуем и узнаем

$A = \{n, p, u, v, e, t\}$, $B = \{c, o, v, e, t\}$, $C = \{n, u, p\}$.

$C \subset A$, $n \notin B$, $u \notin B$, $p \notin B$.

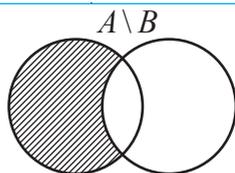
C – множество элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

C – разность множеств A и B .



Возьмите на заметку

Разностью множеств A и B является новое множество $A \setminus B$, которое содержит элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B .



Решаем и поясняем

5 Даны множества: $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 2 < x < 5\}$.
Найдите множество $A \setminus B$.

Решение:

Так как $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{3, 4\}$, то получим:

$$A \setminus B = \{0, 1, 2, \square, \square, \square\}.$$

- 6 а) Задайте множества перечислением их элементов:
 A – множество учебных предметов в вашем классе;
 B – множество ваших любимых учебных предметов.

б) Найдите: $C = A \setminus B$.

Решение:

а) $A = \{ \text{_____} \};$

$B = \{ \text{_____} \}.$

б) $C = \{ \text{_____} \}.$



Надеемся, что *математика* $\notin C$.

1.3. Множество натуральных чисел



Вспомним

Множество натуральных чисел обозначают через \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Множество натуральных чисел бесконечно.

Множество ненулевых натуральных чисел обозначают через \mathbb{N}^* .

Решаем и поясняем

1 Приведите два примера бесконечных подмножеств множества \mathbb{N} :

- а) словесным описанием;
 б) указав характеристическое свойство их элементов.

Решение:

а) M – множество четных натуральных чисел.

$A = \text{_____}.$

б) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 15\}.$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \text{_____}\}.$

2 Истинно или Ложно?

$M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 2\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}.$

а) $M \cup B = \mathbb{N}^*$ – Ложно

б) $M \cup B = \mathbb{N} - \text{_____}$

в) $M \subset \mathbb{N}$ – Истинно

г) $B \subset \mathbb{N}^*$ – _____



Упражнения и задачи



1. Определите истинностное значение высказывания:
а) Земля вращается вокруг своей оси. б) $2 > 5$.
в) Число 3 является делителем числа 81.
 2. Сформулируйте отрицание высказываний из упражнения 1 и определите их истинностное значение.
 3. Определите истинностное значение высказывания:
а) Все планеты Солнечной Системы вращаются вокруг Солнца.
б) Земля вращается вокруг Солнца.
в) Все реки впадают в Черное море.
г) Днестр впадает в Черное море.
д) Некоторые млекопитающие обитают на суше.
е) Все грибы съедобные.
ж) Все птицы могут летать.
- 
4. Какие из высказываний упражнения 3 являются общими?
 5. Впишите одно из слов: „Все“ или „Некоторые“, чтобы получить истинные высказывания:
а) люди умеют плавать;
б) месяцы имеют более 27 дней;
в) дети любят сладости;
г) натуральные числа, у которых цифра единиц равна 0, делятся на 10.
 6. Впишите одно из выражений: „Не больше“, „Хотя бы“, „Любое“, „Существуют“, „Все“, „Некоторые“:
а) конечные и бесконечные множества;
б) конечное множество имеет кардинал;
в) один элемент из множества $\{0, 3, 5, 7\}$ является нечетным числом;
г) могут получить оценку 10 по математике;
д) попугаи разговаривают;
е) одноклассники занимаются спортом.
 7. Назовите два элемента, которые принадлежат:
а) множеству зимних месяцев; б) множеству спортивных игр;
в) множеству деревьев; г) множеству предметов, имеющих форму шара.
 8. а) Пусть A – множество трехзначных чисел, каждое из которых состоит из цифр 2, 5 и 7, причем эти цифры в записи данных чисел не повторяются. Перечислите элементы множества A .
б) Найдите $\text{card } A$.

9. а) Пусть B – множество дробей, числитель которых равен 1, а знаменатель – ненулевое однозначное натуральное число. Перечислите элементы множества B .
 б) Найдите $\text{card } B$.
10. а) Задайте множество $M = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 15\}$ перечислением его элементов.
 б) Найдите $\text{card } M$.
11. Дополните пропуски, чтобы получить истинные высказывания:
 а) $A \cap \emptyset = \square$; б) $A \cup \emptyset = \square$; в) $A \cup A = \square$; г) $A \cap A = \square$.
12. Даны множества: $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{2, 4, 8\}$, $K = \{1, 3, 5, 7\}$.
 Найдите:
 а) $A \cup B$; б) $A \cup K$; в) $B \cup C$; г) $C \cup K$; д) $A \cap B$; е) $C \cap B$;
 ж) $B \cap K$; з) $C \cap K$; и) $A \setminus K$; к) $C \setminus A$; л) $K \setminus B$; м) $A \setminus K$.

13. Красная Шапочка несла бабушке пирожки: 3 с капустой, 4 с яблоками и 3 с мясом.

По дороге она съела два пирожка. Определите, какие из высказываний истинны, а какие ложны:

- а) Бабушке не достанется пирожков с мясом.
 б) Бабушке достанется хотя бы один пирожок с капустой.
 в) Бабушке достанется одинаковое количество пирожков всех видов.



14. Истинно или Ложно?

- а) Если у человека повышенная температура, то он болен.
 б) Если человек болен, то у него повышенная температура.
 в) Если число a больше числа b , то число a расположено на числовой оси правее числа b .
 г) Если число a расположено на числовой оси правее числа b , то число a больше числа b .



15. Прочитайте простые высказывания:

- 1) Собаке надели намордник. 2) Собаку ведут на поводке.

Из этих простых высказываний при помощи слов „не“; „и“; „или“ составьте истинные сложные высказывания для каждого рисунка: ①–③.

①



②



③



16. $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 17\}$. Запишите подмножество множества A , состоящее из:
- четных чисел;
 - нечетных чисел;
 - чисел, являющихся точными квадратами натуральных чисел.

17. Дано множество: $M = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3} \right\}$.

Найдите:

- $M \cap \mathbb{N}$;
 - $M \cap \mathbb{N}^*$;
 - $M \setminus \mathbb{N}$.
18. В саду растут 50 кустов роз. Раду полил половину кустов и Родика полила половину кустов. В результате оказалось, что три куста роз были политы дважды. Сколько кустов роз остались без полива?

19. Изобразите на прямой и найдите пересечение фигур:
- $[AB] \cap [AB]$;
 - $[AB \cap AB]$;
 - $[AB] \cap AB$.

20. Пусть D_{12} – множество делителей числа 12, B – множество нечетных чисел меньше 12, C – множество четных чисел меньше 12.

Найдите:

- $D_{12} \cup B$;
 - $D_{12} \cap C$;
 - $B \cap C$;
 - $D_{12} \setminus B$;
 - $D_{12} \setminus C$.
21. Каждый ученик лицея изучает или французский язык, или английский язык, или оба языка. Сколько учеников в лицее, если 320 из них изучают французский язык, 280 – английский язык, а 190 учеников изучают оба языка?



22. Исследуем:

Даны множества A , B и M и высказывания:

① Все элементы множества M принадлежат множеству A и множеству B .

② Все общие элементы множеств A и B принадлежат множеству M .

а) Запишите три множества A , B и M , для которых высказывания ① и ② являются истинными.

б) Запишите три множества A , B и M , для которых высказывание ① – истинно, а высказывание ② – ложно.

в) Известно, что высказывания ① и ② истинны. Определите истинностное значение высказывания:

- Если любой элемент x принадлежит множеству M , то $x \in A$.
- Если любой элемент y принадлежит множеству M , то $y \in B$.
- $M \subset A$.
- $M = A \cap B$.
- $A \subset M$.

§2 Делимость

2.1. Делитель. Кратное



Вспомним

1 Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф хотят купить яблоки. Общая масса яблок в обоих ящиках одинаковая. Какой ящик надо выбрать пороссятам, чтобы каждому из них досталось одинаковое количество яблок?



15 яблок

①



20 яблок

②

Решение:

15 яблок можно поделить поровну между 3 пороссятами.

Обозначаем:

$$15 : 3 \text{ или } 3 | 15$$

Читаем:

15 *кратно* 3
3 *делит* 15

20 яблок нельзя поделить поровну между 3 пороссятами.

Обозначаем:

$$20 \not\div 3 \text{ или } 3 \nmid 20$$

Читаем:

20 *не кратно* 3
3 *не делит* 20



Вспомним

- Натуральное число a **делится** на натуральное число b , если существует натуральное число c такое, что $a = b \cdot c$.

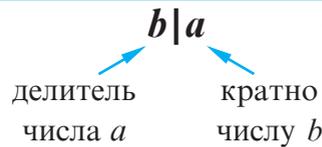
Обозначаем: $a : b$.

Говорят: b **делитель** числа a , или b **делит** число a .

Обозначаем: $b | a$.

- Натуральное число a **кратно** натуральному числу b , если a делится без остатка на b .

Очевидно, что если b делит a , то a кратно b .



Применяем и объясняем

2 Сколько делителей и сколько кратных у числа 12?

Решение:

Так как 12 делится на 1, 2, 3, 4, 6 и 12, то число 12 имеет шесть делителей. Каждое из чисел 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ... делится без остатка на 12.

Заметим, что любое число вида $12 \cdot n$, где $n \in \mathbb{N}$, делится без остатка на 12.

Следовательно, число 12 имеет бесконечно много кратных.

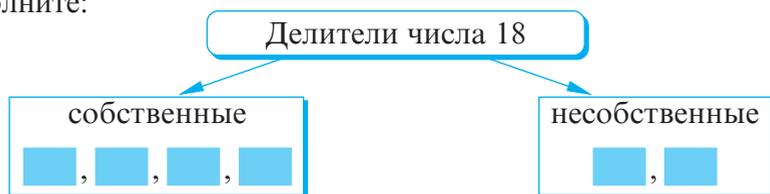
Ответ: 6 делителей и бесконечно много кратных.

Возьмите на заметку

- ♦ Множество делителей натурального числа n конечно и обозначается D_n .
 - ♦ Множество кратных натурального числа n бесконечно и обозначается M_n .
- Значит, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, \dots\}$.

Замечание. Любое натуральное число n делится на 1 и на n . Числа 1 и n называются **несобственными делителями** числа n , остальные делители этого числа называются **собственными**.

- Заполните:



2.2. Признаки делимости

1 Для каждой корзины выберите соответствующие числа.

12, 30, 21, 56, 100, 370, 80, 48, 35, 79, 64, 95

Корзины:

- Числа, которые делятся на 2
- Числа, которые делятся на 5
- Числа, которые делятся на 10

Вспомним

- Натуральное число **делится на 2** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8.
- Натуральное число **делится на 5** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0 или 5.
- Натуральное число **делится на 10** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0.

Исследуем и узнаем

2 Какой цифрой может оканчиваться запись числа, делящегося на 3?

Решение:

Рассмотрим несколько чисел, кратных числу 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Ответ: Любой цифрой.

3 Рассмотрите и заполните пропуски:

81, 268, 873, 100, 108, 78, 95

Числа, делящиеся на 3

81

Числа, сумма цифр
которых делится на 3

81

- Сделайте вывод.
- Решите задачу 3, исследуя делимость на 9. Сделайте вывод.

Возьмите на заметку

- ♦ Натуральное число **делится на 3** тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.
- ♦ Натуральное число **делится на 9** тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9.

Применяем и объясняем

Используя признаки делимости, выберите числа, которые делятся на:

а) 3;

б) 9.

384

567

421

1234

8883

288

3456

234

Образец:

$168 : 3$, так как
 $1 + 6 + 8 = 15$,
а $15 : 3$.

4 Определите истинностное значение высказывания:

- Все числа, делящиеся на 9, делятся на 3.
- Все числа, делящиеся на 3, делятся на 9.
- Некоторые числа, делящиеся на 3, делятся и на 9.

2.3. Простые числа. Составные числа.

Разложение чисел на простые множители

1 Рассмотрите числа. Помогите Наф-Нафу выбрать числа, которые не имеют собственных делителей (то есть числа, которые делятся только сами на себя и на 1):

53

42

38

27

485

43

39

71

81

19

Решение:

Числа 53, 71, 43, 19 делятся только сами на себя и на 1.

Такие числа называют **простыми числами**.

Каждое из чисел 42, 38, 81, 27, 39 имеет более 2 делителей. Например, 42 делится на 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Такие числа называют **составными числами**.





Возьмите на заметку

- ♦ Натуральное число n называется **простым числом**, если оно имеет только два делителя: 1 и n .
- ♦ Натуральное число n называется **составным числом**, если оно имеет более двух делителей.

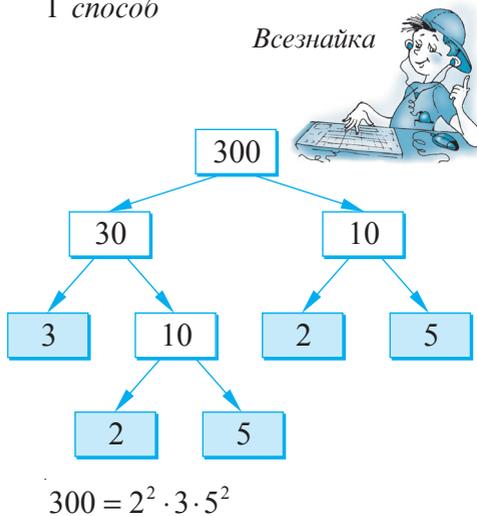
Замечание. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, так как оно делится только на 1.

Применяем и объясняем

• Дополните последовательность такими числами, чтобы получить ряд первых десяти простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, , , .

2 Обратите внимание, как Всезнайка и Многознайка разложили на простые множители число 300.

1 способ



2 способ

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	



Многознайка

- ① Число, записанное слева, делим на самое маленькое возможное простое число и под делимым записываем полученное частное.
- ② Повторяем шаг ① до тех пор, пока не получим в частном 1.

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Задания для понимания

- Разложите на простые множители число: а) 420; б) 1200.

2.4. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Исследуем и узнаем

1 В период зимних праздников один из магазинов приготовил одинаковые подарки, состоящие из конфет „Метеорит“ и „До-ре-ми“. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 120 конфет „Метеорит“ и 144 конфет „До-ре-ми“?

Решение:

Каждое из чисел 120 и 144 должно делиться на число подарков. Поэтому выпишем все делители каждого из чисел.

$$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, \mathbf{24}, 30, 60, 120\}.$$

$$D_{144} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, \mathbf{24}, 36, 72, 144\}.$$

Видим, что наибольшим числом, которое делит числа 120 и 144, является 24. Значит, можно составить не больше 24 подарков.

Говорим, что число 24 является *наибольшим общим делителем* чисел 120 и 144.

Ответ: 24 подарка.



Возьмите на заметку

- ◆ **Наибольшим общим делителем (НОД)** натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b . Обозначаем: (a, b) .
- ◆ Если $(a, b) = 1$, то числа a и b называют **взаимно простыми**.

2 Найдите НОД чисел 450 и 1050.

Решение:

① Разложим на простые множители каждое число:

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow 450 = \underline{2} \cdot \underline{3^2} \cdot \underline{5^2}$$

$$\begin{array}{r|l} 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow 1050 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5^2} \cdot 7$$

② Найдем произведение общих простых делителей с наименьшими показателями степени.

$$(450, 1050) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150.$$

Замечание. Если b делит a , то $(a, b) = (b, a) = b$.

Исследуем и узнаем

3 Какое наименьшее количество уток может быть в стае, если на пруд они идут по 8 в ряду, а назад возвращаются по 6 в ряду?

Решение:

Число уток должно делиться на 6 и на 8.

Запишем несколько чисел, кратных 6 и 8.

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\},$$

$$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}.$$

Заметим, что наименьшим числом, кратным числам 6 и 8, является 24.

Значит, в стае не меньше 24 уток.

Ответ: 24 утки.



Говорим, что число 24 является *наименьшим общим кратным* чисел 6 и 8.
 Обозначаем: $[6, 8] = 24$.

Возьмите на заметку

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b называется наименьшее ненулевое натуральное число, которое делится на числа a и b .

Обозначаем: $[a, b]$.

4 Найдите НОК чисел 144 и 150.

Решение:

① Разложим на простые множители каждое число.

$$\begin{array}{r|l}
 144 & 2 \\
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \longrightarrow 144 = \underline{2^4} \cdot \underline{3^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 150 & 2 \\
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \longrightarrow 150 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5^2}$$

② Найдем произведение всех простых делителей данных чисел с наибольшими показателями степени:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3\,600, \text{ или} \\
 [144, 150] = 3\,600.$$

Ответ: $[144, 150] = 3600$.

Замечание. Можно показать, что $[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$ для любых ненулевых чисел.

Действительно, $(144, 150) = 6$ и $\frac{144 \cdot 150}{6} = 3\,600$.

Запомните

$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$

$(144, 150)$ $[144, 150]$

Упражнения и задачи

1. Выберите числа, которые делятся на: а) 2; б) 5; в) 10.

- | | | | | | |
|-----|-----|----|-----|-------|------|
| 421 | 500 | 36 | 970 | 4000 | 2615 |
| 360 | 995 | 59 | 45 | 70225 | |

2. Запишите все двузначные натуральные числа:
а) которые делятся на 2 и на 5; б) которые делятся на 10;
в) которые делятся на 5, но не делятся на 10.

3. Найдите частное и остаток от деления:
а) $2456 : 5$; б) $3149 : 2$; в) $2783 : 10$; г) $1234 : 3$; д) $43210 : 9$.

4. Найдите числа меньше 30, каждое из которых равно сумме всех своих делителей, не считая самого числа.

5. Применив соответствующий признак делимости, выберите числа, которые делятся на: а) 3; б) 9.

436 199 11211 2880 6666
7728 91917 46438 5423 6485

6. Найдите собственные делители числа: а) 36; б) 48; в) 126; г) 416; д) 500.

7. Найдите все двузначные числа, кратные: а) 21; б) 18; в) 35; г) 19.

8. Выберите простые числа:

177 311 137 267 123 211 163

9. Разложите на простые множители числа:

а) 36; б) 80; в) 100; г) 136; д) 240.

10. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 12 и 20; б) 27 и 72; в) 60 и 64;
г) 96 и 36; д) 360 и 840; е) 84 и 112.

11. Сократите дробь:

а) $\frac{315}{320}$; б) $\frac{48}{124}$; в) $\frac{360}{420}$; г) $\frac{312}{390}$.

12. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 5 и 8; б) 45 и 9; в) 27 и 45; г) 12 и 18; д) 33 и 39; е) 64 и 48.

13. Не выполняя деление, найдите остаток от деления числа 123456789 на:

а) 2; б) 5; в) 10; г) 3; д) 9.

14. Найдите все числа вида:

а) $\overline{123a}$, делящиеся на 3; б) $\overline{25ab}$, делящиеся на 9;
в) $\overline{63bc}$, делящиеся и на 9, и на 10.

15. Найдите три числа, запись которых состоит:

а) из цифр 1 и 0 и которые делятся на 3;
б) из цифр 2 и 3 и которые делятся на 3;
в) из цифры 3 и которые делятся на 9;
г) из цифр 1 и 4 и которые делятся на 9.

16. Истинно или Ложно?

- а) Произведение двух нечетных чисел является нечетным числом.
- б) Квадрат четного числа – нечетное число.
- в) Куб нечетного числа – четное число.
- г) Куб четного числа – четное число.



17. Две маршрутки отправляются в 6:00 с одной и той же остановки. Первая маршрутка возвращается на эту остановку через каждые 45 минут, а вторая – через каждый час. Во сколько снова встретятся эти две маршрутки на той же остановке?

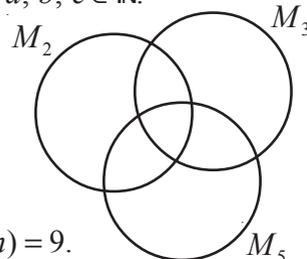
18. Чему равен остаток от деления числа n на 6, если число $n + 4$ кратно 6?

19. Истинно или Ложно?

- а) Сумма двух четных чисел является четным числом.
- б) Разность двух нечетных чисел является нечетным числом.
- в) Если $c | a$ и $c | b$, то $c | (a + b)$, для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$.
- г) Если натуральное число делится на 5, то оно делится и на 10.
- д) Если натуральное число делится на 2 и на 5, то оно делится и на 10.
- е) Если $c | (a + b)$, то $c | a$ и $c | b$, для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$.



20. Перечертите диаграммы и впишите в соответствующие места числа:
5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 30.



21. Найдите натуральные числа m и n , зная, что:

- а) $m + n = 24$ и $(m, n) = 8$; б) $m + n = 45$ и $(m, n) = 9$.

22. Даны множества: $A = \{x \in \mathbb{N} | x : 6 \text{ и } x < 50\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x : 3 \text{ и } x < 50\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} | x : 2 \text{ и } x < 50\}$.

Определите истинностное значение высказывания:

- а) $B \subset A$; б) $A \subset C$; в) $B \cup C = A$; г) $B \cap C = A$; д) $\{2, 3, 6\} \subset B \cup C$.

23. 10 мая одновременно из одного порта вышли три теплохода. Первый теплоход возвращается в порт через каждые 4 недели, второй – через каждые 6 недель, третий – через каждые 3 недели. Какого числа они снова встретятся в этом порту?

24. Докажите, что натуральное число делится на:

- а) 4, если число, составленное из двух последних цифр данного числа, делится на 4;
- б) 8, если число, составленное из трех последних цифр данного числа, делится на 8.

25. Найдите наименьшее натуральное число, которое поочередно при делении на 7, 8, 9 дает в остатке 5, 6, 7 соответственно.

§ 3 Арифметические методы решения задач

3.1. Графический метод

Решаем и поясняем

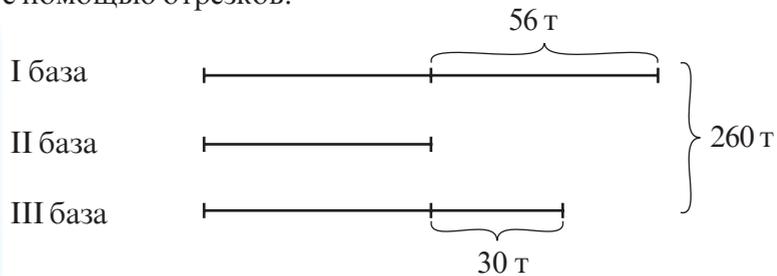
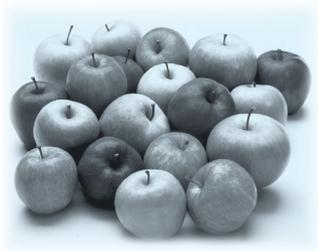
1 Всего на 3 базах было 260 т яблок. На первой базе было на 56 т яблок больше, чем на второй, а на третьей – на 30 т больше, чем на второй базе. Сколько тонн яблок было на каждой базе?

Представим неизвестные и зафиксируем связь между величинами, заданными в задаче с помощью рисунка.



Решение:

① Изобразим с помощью отрезков:



② Вычислим сумму значений равных частей:

$$260 - 56 - 30 = 174 \text{ (т).}$$

③ Найдем, сколько тонн яблок было на II базе (значение одной части):

$$174 : 3 = 58 \text{ (т).}$$

④ Найдем, сколько тонн яблок было на I базе:

$$58 + 56 = 114 \text{ (т).}$$

⑤ Найдем, сколько тонн яблок было на III базе:

$$58 + 30 = 88 \text{ (т).}$$

Проверка: $114 + 58 + 88 = 260 \text{ (т)}$ – И.

Ответ: I база – 114 т;

II база – 58 т;

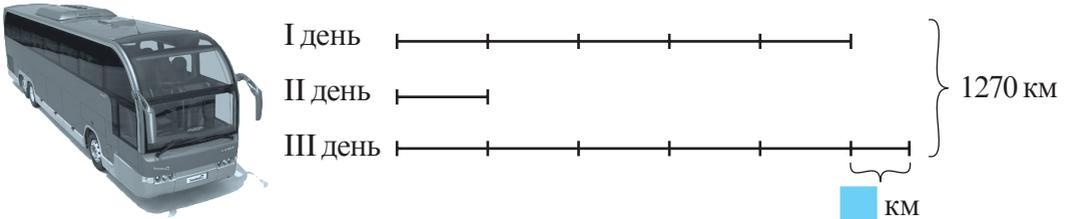
III база – 88 т.

Дополняем и поясняем

2 Автобус преодолел расстояние в 1270 км за три дня. В первый день он прошел расстояние в 5 раз больше, чем во второй, а в третий – на 60 км больше, чем в первый день. Сколько километров проехал автобус каждый день?

Решение:

① Изобразим с помощью отрезков



② $1270 - \square = \square$ (км) – сумма значений равных частей.

③ $5 + 1 + 5 = 11$ (равных частей).

④ $1210 : 11 = \square$ (км) – II день.

⑤ $\square \cdot 5 = \square$ (км) – I день.

⑥ $\square \cdot 5 + 60 = \square$ (км) – III день.

Проверка: $\square + \square + \square = 1270$ (км) (\square).

Ответ: I день – \square км; II день – \square км; III день – \square км.

3.2. Метод сведения к единице

Решаем и поясняем

1 За 12 коробок конфет заплатили 432 лея. Сколько стоят 8 таких коробок конфет?

Решение:

Применим схему:

12 коробок	432 лея
1 коробка	$432 : 12 = 36$ (леев)
8 коробок	$36 \cdot 8 = 288$ (леев)

Значит, цена одной коробки равна 36 леям, а 8 коробок стоят 288 леев.

Ответ: 288 леев.

Сводим сравнение величин из условия задачи к их сравнению с одной из величин, принятой за единицу.



Дополняем и поясняем

2 Для празднования Рождества одна семья купила индюка, гуся, 3 курицы и 5 цыплят. Известно, что цена одного цыпленка равна 32 леям. Сколько заплатили за всю покупку, если индюк стоит столько же, сколько гусь и 2 курицы, гусь – как одна курица плюс 20 лей, а курица – как 3 цыпленка.



Решение:

Для решения задачи примем за единицу цену цыпленка.

Тогда одна курица стоит $3 \cdot 32 = 96$ (леев).

За гуся заплатили $3 \cdot 96 + 20 = \square + 20 = \square$ (леев).

За индюка: $\square + 2 \cdot 96 = \square$ (леев).

За всю покупку заплатили:

$$\square + \square + 3 \cdot 96 + 5 \cdot 32 = \square \text{ (леев).}$$

Ответ: \square лея.

3.3. Метод обратного хода

Решаем и поясняем

1 Вика задумала число. Она умножила его на 2, потом отняла 5, полученный результат умножила на 3, разделила на 6, затем прибавила к частному 4 и получила 28. Какое число задумала Вика?

Решаем задачу, начиная с конца ее условия.



Решение:

$$\text{Имеем: } \square \cdot 2 - 5 \rightarrow \square \cdot 3 \rightarrow \square : 6 + 4 \rightarrow 28$$

Восстановим число, начиная решение с конца условия:

$$28 \xrightarrow{-4} 24 \xrightarrow{\cdot 6} 144 \xrightarrow{:3} 48 \xrightarrow{+5} 53 \xrightarrow{:2} 26,5$$

Ответ: 26,5.

Дополняем и поясняем

2 В первый день турист шел 6 часов, во второй день он прошел 30 км, в третий день на 20 км больше, чем во второй, а в четвертый день турист шел 5 часов со скоростью 8 км/ч. Всего он преодолел 180 км. С какой скоростью тронулся в путь турист в первый день?

Решение:

Начнем решение задачи с конца условия:

① В четвертый день турист прошел: $5 \cdot 8 = 40$ (км).

② В третий день: $20 + 30 = 50$ (км).

③ За II, III, IV дни вместе:

$$30 + \square + \square = \square \text{ (км)}.$$

④ В первый день он прошел: $180 - \square = \square$ (км).

⑤ В первый день турист тронулся в путь со скоростью:

$$\square : 6 = \square \text{ (км/ч)}.$$

Проверка: $\square + \square + \square + \square = \square$ (км).

Ответ: \square км/ч.



3.4. Метод фальшивой гипотезы

Исследуем и узнаем

1 На лугу пасутся гуси и овцы, всего 98 голов и 252 ноги. Сколько гусей и сколько овец пасутся на лугу?



Решение:

① Предположим, что на лугу пасутся только гуси. Тогда, если есть 98 голов, то имеем $98 \cdot 2 = 196$ (ног).

② Сравнивая с условием задачи, получим: $252 - 196 = 56$, то есть на 56 ног больше.

③ Такой результат мы получили, предположив, что на лугу пасутся только гуси.

④ Учитывая, что у овец не 2, а 4 ноги и то, что у нас получилось на 56 ног больше, найдем, сколько овец пасутся на лугу: $56 : 2 = 28$ (овец).

⑤ Найдем, сколько гусей пасутся на лугу: $98 - 28 = 70$ (гусей).

Проверка: $28 \cdot 4 + 70 \cdot 2 = 252$.

Ответ: 28 овец, 70 гусей.

Дополняем и поясняем

2 На 730 леев можно купить 22 книги, по 25 леев и по 40 леев. Сколько книг каждого вида можно купить?

Решение:

① Предположим, что все книги стоят по 40 леев.

Тогда за все 22 книги надо заплатить: $22 \cdot 40 = 880$ (леев).

② Сравнивая с заданной суммой денег, получим:

$880 - 730 =$ (то есть на леев больше).

③ Такой результат мы получили, предположив, что все книги стоят по 40 леев.

④ Найдем, сколько книг по 25 леев было куплено:

: $(40 - 25) =$ (книг).

⑤ Найдем, сколько книг по 40 леев было куплено:

$22 -$ = (книг).

Проверка: · + · = 730 (леев).

Ответ: книг по 25 леев; книг по 40 леев.

Обобщаем

Суть метода заключается в том, что начинают, как правило, с вопроса задачи, сделав произвольное предположение относительно искомым величин, не противореча условию задачи. Далее данная задача решается на основе сделанного предположения до тех пор, пока не будет получен результат, не соотносимый с условием задачи: либо больше, либо меньше, чем дано в условии. Этот результат (на основе предположения) сравнивается с тем, что дано в условии задачи. Из полученных несоответствий делаем правильный вывод по решению задачи.

Упражнения и задачи



1. Решите задачи графическим методом:

а) Вербку длиной 74 м разрезали на две части. Длина первой части на 16 м длиннее второй. Чему равна длина каждой части?

б) Масса трех металлических деталей равна 155 кг. Первая деталь на 28 кг тяжелее второй, а третья на 22 кг тяжелее второй. Какова масса каждой детали?

2. Решите задачи методом сведения к единице:

а) Стоимость 12 книг по одинаковой цене составляет 816 леев. Сколько стоят 5 таких книг?

б) Света купила 18 альбомов и 24 книги по той же цене. За все она рассчиталась банкнотой в 500 леев и получила сдачу 17 леев. Сколько стоит один альбом и сколько стоит одна книга?

3. Решите задачу методом обратного хода.

От удвоенного числа отняли 10, полученный результат умножили на 6, затем прибавили 5, разделили на 8 и получили 22. Найдите искомое число.

4. Решите задачи **1** и **2** из раздела **3.4**, сделав другое предположение.

5. Решите задачи методом фальшивой гипотезы:

а) Фермер продавал цыплят и кроликов: всего 20 голов и 68 ног. Сколько цыплят и сколько кроликов выставил на продажу фермер?

б) В 22 книгах по 50 и по 90 страниц, всего 1340 страниц. Сколько всего книг содержат 50 страниц и сколько – 90 страниц?



6. Решите задачи графическим методом:

а) Отцу 44 года, а сыну 16 лет. Сколько лет назад отец был в 3 раза старше сына?

б) В библиотеке 458 книг на трех языках. Книг на испанском языке на 50 меньше, чем книг на французском, и в два раза меньше, чем на английском. Сколько книг на каждом языке в библиотеке?

7. Решите задачу методом сведения к единице:

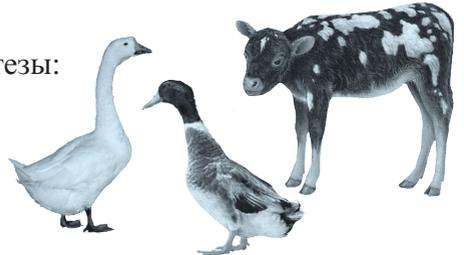
За 10 дней 6 рабочих выкопали ров длиной 420 м. Какой длины ров могут выкопать за 8 дней 10 рабочих с той же производительностью труда?

8. Решите задачу методом обратного хода:

Домохозяйка продавала на рынке дыни. Первый покупатель купил половину всех дынь и еще полдыни. Второй купил половину того, что осталось и еще полдыни. Третий покупатель купил половину того, что осталось и еще полдыни. Так домохозяйка продала все дыни. Сколько всего дынь было у нее?

9. Решите задачу методом фальшивой гипотезы:

На ферме есть гуси, утки и телята: всего 120 голов и 280 ног. Известно, что число гусей в три раза больше, чем уток. Найдите, сколько гусей, уток и телят на ферме.



10. В классе девочек в три раза больше, чем мальчиков. Может ли быть в этом классе 34 ученика? А 36 учеников? Сколько учеников должно быть в классе, чтобы задача имела решение? Найдите несколько вариантов ответа.

11. а) Составьте задачу, которую можно решить:

- 1) графическим методом; 2) методом сведения к единице;
3) методом обратного хода; 4) методом фальшивой гипотезы.

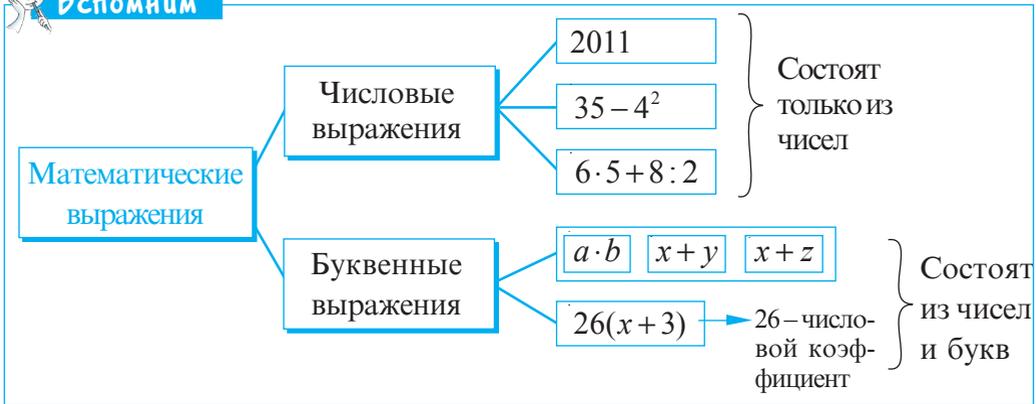
б) Предложите одноклассникам решить составленные задачи.

§4 Решение уравнений на множестве \mathbb{N}

4.1. Математические выражения



Вспомним



Обобщаем

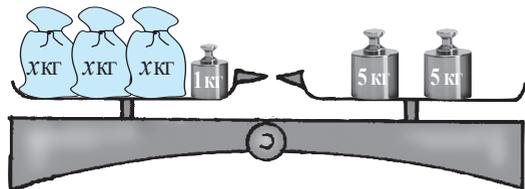
- ① Числовой коэффициент обычно пишут перед буквенными множителями. $\rightarrow 2 \cdot (x + 8) \cdot 3 = 6(x + 8).$
- ② Коэффициент, равный 1, принято опускать. Обоснуйте. $\rightarrow x \cdot 1 = x$
 $3 \cdot a \cdot 1 \cdot b = 3ab$
- ③ Если выполнить действия, указанные в числовом выражении, то получится число, которое называют **значением выражения**. $\rightarrow 125 : 5 - 3^2 \cdot 2 = 25 - 18 = 7.$
- ④ Буквенное выражение можно преобразовать в числовое выражение, подставив вместо букв числа. \rightarrow В выражении $3x + 2y$, подставляя $x = 8$ и $y = 4$, получаем $3 \cdot 8 + 2 \cdot 4.$

4.2. Уравнения



Вспомним

Рассмотрите рисунок и заполните пропуски.
Так как весы находятся в равновесии, то получим:



$$3 \cdot \boxed{} + 1 = 10$$

Левая часть уравнения Правая часть уравнения

\leftarrow уравнение с одним неизвестным

Решаем и поясняем

1 Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $3x+1=10$.

Решение:

$3x+1 = 10$ ← Левая часть уравнения – сумма $3x+1$, с одним неизвестным.
Левая часть уравнения Правая часть уравнения

$3x = 10 - 1$ ← Чтобы найти неизвестное число, вычтем из суммы известное слагаемое.

$3x = 9$ ← Левая часть – произведение $3x$, а неизвестное число x является одним из множителей.

$x = 9 : 3$ ← Чтобы найти неизвестный множитель x , разделим произведение 9 на известный множитель 3.

$x = 3 \in \mathbb{N}$ ← Получим число 3 и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} (так как уравнение решается на множестве натуральных чисел).

$3 \cdot 3 + 1 = 10$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение в истинное равенство при подстановке полученного числа.
 $10 = 10$

Ответ: $S = \{3\}$. ← Записываем ответ.

Возьмите на заметку

- ♦ Уравнением с одним неизвестным называется равенство, содержащее одно неизвестное.
- ♦ Значение неизвестного, при котором уравнение превращается в истинное равенство, называется **решением уравнения**.
- ♦ **Решить уравнение** – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.
- ♦ Множество решений уравнения обозначается через S .
- ♦ Если уравнение не имеет решений, то $S = \emptyset$.

Уравнение имеет решение на \mathbb{N} .

Уравнение не имеет решений на \mathbb{N} .



2 Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $4a-3=18$.

Решение:

$4a-3 = 18$ ← Левая часть уравнения – разность.

$4a = 18 + 3$ ← Чтобы найти уменьшаемое, складываем

$4a = 21$ ← Левая часть уравнения – , а неизвестное число a является одним из множителей.

$a = 21 : 4$ ← Чтобы найти неизвестный множитель a , разделим произведение на известный множитель.

$a = 5,25 \notin \mathbb{N}$ ← Получим число 5,25, которое не принадлежит множеству \mathbb{N} .

Вывод ← Уравнение не имеет решений на множестве \mathbb{N} .

Ответ: $S = \emptyset$. ← Записываем ответ.

3 Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $16 : (2z) = 8$.

Решение:

$16 : (2z) = 8$ ← Левая часть уравнения – частное.

$2z = 16 : 8$ ← Чтобы найти , разделим на .

$2z = 2$ ← Чтобы найти , разделим на .

$z = 1 \in \mathbb{N}$ ← Получим значение неизвестного и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} .

$16 : (2 \cdot 1) = 8$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение в истинное равенство при подстановке полученного значения.
 $8 = 8$

Ответ: $S = \{1\}$. ← Записываем ответ.

4 Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $6x - 18 = 0$.

Решение:

$6x - 18 = 0$ ← Левая часть уравнения – это разность.

$6x = 18 + 0$ ← Чтобы найти уменьшаемое, складываем
или $6x = 18$ с .

$x = 18 : 6$ ← Чтобы найти неизвестный множитель , разделим на .

$x = 3 \in \mathbb{N}$ ← Получим число 3 и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} .

$6 \cdot 3 - 18 = 0$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение при подстановке полученного значения в истинное равенство.
 $0 = 0$

Ответ: $S = \{3\}$. ← Записываем ответ.

Упражнения и задачи



1. Даны математические выражения: $2x$; $35 - z$; 0 ; $5a - b$; $7^3 \cdot 2 + 3$; $5^3 + y$; $3(5 + 2 \cdot 4)$; $8ab$; $5(12 + 3z)$; x^2z ; $18 - 3 \cdot 5$. Выпишите:
- а) числовые выражения; б) буквенные выражения.

2. Найдите значение выражения:

а) $2(x - 4)$ при $x = 5$;

б) $3 : z$ при $z = 6$;

в) $3x + 1$ при $x = 0,5$;

г) $4x$ при $x = \frac{1}{2}$;

д) $5(a + b)$ при $a = 2$, $b = 1,2$;

е) $7a + b$ при $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}$.

3. Выполните подстановку и установите, решением каких уравнений является число: 1) 4; 2) 10:

а) $3 + x = 28 : 4$;

б) $5(x + 2) = 32$;

в) $2a - 3 = 17$;

г) $120 : z = 12$;

д) $8y + 6 = 42 - 4$;

е) $20 + 3t = 100 : 2$.

4. Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение:

$x + 5 = 8$

$12x = 60$

$3y - 12 = 0$

$a - 10 = 2$

$120 : z = 40$

4

5

3

12

10

5. Решите на множестве \mathbb{N} уравнения и выполните проверку:

а) $x + 18 = 24$;

б) $a + 35 = 20$;

в) $8z = 160$;

г) $5y = 18$;

д) $x : 12 = 96$;

е) $t : 6 = 100$;

ж) $9x - 1 = 0$;

з) $4x - 20 = 0$.



6. Перечертите и заполните таблицу:

x	8	0	3^3	$\frac{1}{2}$	10	3,5	1	$\frac{3}{4}$
$3(4x - 1)$	93							
$16x^2 + 10$								



7. На кондитерской фабрике было x коробок и y конфет. В каждую коробку помещается не более 20 конфет. Объясните, что могут означать в этом случае выражения: а) $20x$; б) $y : x$.

8. Используя данные таблицы, составьте уравнения, затем решите их на множестве \mathbb{N} :

а)

Слагаемое	215	?	24,06
Слагаемое	?	2011	6,84
Сумма	729	3405	?

б)

Уменьшаемое	688	?	144,28
Вычитаемое	?	2012	68,28
Разность	12	20	?

в)

Множитель	14	?	42,5
Множитель	?	41	14
Произведение	350	451	?

г)

Делимое	688	?	68,4
Делитель	?	15	10
Частное	43	420	?

9. Составьте уравнение по каждой цепочке действий, затем решите его на множестве \mathbb{N} :

а) $x \xrightarrow{\cdot 6} \square \xrightarrow{-2} 124$

б) $t \xrightarrow{+5} \square \xrightarrow{\cdot 4} 100$

в) $z \xrightarrow{-10} \square \xrightarrow{:2} 55$

г) $a \xrightarrow{:8} \square \xrightarrow{\cdot 10} 160$

10. Сереже 7 лет, а его брату Максиму 1 год. Сколько лет будет Сереже, когда его возраст будет в два раза больше возраста Максима?



11. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение:

а) $3(1 - 2x) + 8 = 32$;

б) $60 : (3y + 2) = 12$;

в) $1 - 3(8x - 4) = 1$;

г) $1605 + 4(3 - x) = 2011$.

12. Решите задачу сначала арифметическим методом, затем уравнением:

а) Автосалон за год продал 68 автомобилей марки BMW и марки Ford. Автомобилей марки BMW продали на 12 больше, чем автомобилей марки Ford. Сколько автомобилей марки BMW было продано?



б) В домашней библиотеке Миши всего 124 книги, на русском и английском языках. Книг на русском языке в 3 раза больше, чем на английском. Сколько книг на русском языке в домашней библиотеке Миши?

в) Сколько пассажиров было в поезде, если на станции вышла половина пассажиров, зашло 28 человек и в поезде стало 124 пассажира?

13. Впишите такое число, при котором решением полученного уравнения:

а) $6 \blacksquare - 3x = 210$ будет число 5; б) $4 \cdot (1 + \blacksquare x) = x$ будет число 8.

14. Составьте задачу по данному уравнению:

а) $2(x - 3) = 216$; б) $5 - 3x = x + 1$; в) $280 : x = 155 - 85$.

15. Решите на множестве \mathbb{N}^* уравнение:

а) $(2x - 4) : (3x) = 10$; б) $2x^2 = x(2x + 1) - 25$.

Задания для осмысления

1. Что называется математическим высказыванием? Приведите примеры предложений, которые не являются высказываниями.
2. Приведите по три примера истинного и ложного высказывания из разных областей знания.
3. Сформулируйте истинное высказывание, а затем его отрицание.
4. Для каждого из слов *и; или; не; если... то...* приведите по одному примеру истинного и ложного высказывания.
5. Приведите примеры из повседневной жизни для каждого из выражений: „Не больше“, „Хотя бы“, „Любое“, „Существует“.
6. Сформулируйте одно общее и три частных высказываний, следующих из общего.

7. Приведите три частных высказывания из:
 а) биологии; б) физики; в) русской литературы.
 Сформулируйте общее высказывание, которое следует из частных.
8. Приведите примеры множеств из разных областей знания.
9. *Истинно* или *Ложно*?
 Кардинал множества учеников вашего класса равен 30.
10. Какие соотношения между множествами вы знаете?
11. Какие действия над множествами вы изучили?
12. Прочтите:
 $B \subset A$; $B = A$; $A \cap B$; $B \cup A$;
 $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \cup B = \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$.
13. Приведите примеры множеств A и B из повседневной жизни таких, что:
 а) $A \cup B = \emptyset$; б) $A \cap B = \emptyset$.
14. Существует ли такое число, которое и кратно некоторому числу и является его делителем?
15. При каком условии число делится на 2? А на 3? На 5? На 9? На 10?
16. Какие числа называются простыми? А какие составными?
17. Существуют ли простые четные числа?
18. Какое число называют общим делителем двух чисел? А какое число называют общим кратным этих чисел?
19. Как найти наибольший общий делитель двух чисел? А наименьшее общее кратное?
20. Составьте по одной задаче, которую можно решить:
 а) графическим методом; б) методом сведения к единице;
 в) методом обратного хода; г) методом фальшивой гипотезы.
21. Что такое уравнение?
22. Что значит решить уравнение на множестве \mathbb{N} ?
23. Приведите пример уравнения, которое не имеет решений на множестве \mathbb{N} .
24. Составьте по одному уравнению каждого из изученных видов и решите их.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. Дано множество:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 < x < 70 \text{ и } x : 3\}$.
 а) *Истинно* или *Ложно*? **1**
 „Натуральное число кратно 3 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 3“.
 б) Задайте множество A перечислением его элементов. **3**
 в) Выберите одно четное число и одно нечетное число среди элементов множества A и найдите их НОД. **7**

2. Макс и его дедушка вместе собрали 100 кг слив. Сливы были распределены по 12 кг в каждый из ящиков, имеющихся у дедушки, и осталось еще 16 кг.
 а) Впишите натуральное число: **1**
 $\square^4 = 16$.
 б) Определите, сколько ящиков было у дедушки. **6**
 в) Найдите сумму денег, которую получит дедушка после продажи всех ящиков со сливами по цене 8 леев/кг. **3**

3. Решите задачу арифметическим методом. **6**
 Фермер выращивает поросят и голубей, всего 51 голова и 132 ноги. Найдите, сколько поросят и сколько голубей у фермера.

II вариант

1. Дано множество:
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 80 < x < 100 \text{ и } x : 9\}$.
 а) *Истинно* или *Ложно*?
 „Натуральное число кратно 9 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 9“.
 б) Задайте множество B перечислением его элементов.
 в) Выберите одно четное число и одно нечетное число среди элементов множества B и найдите их НОК.

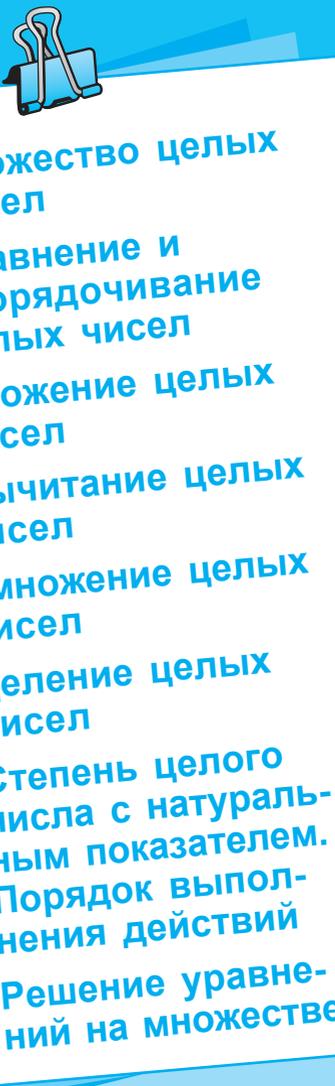
2. Дана и ее бабушка вместе собрали 106 кг огурцов. Огурцы были распределены по 14 кг в каждый из ящиков, имеющихся у бабушки, и осталось еще 8 кг.
 а) Впишите натуральное число:
 $\square^3 = 8$.
 б) Определите, сколько ящиков было у бабушки.
 в) Найдите сумму денег, которую получит бабушка после продажи всех ящиков с огурцами по цене 7 леев/кг.

3. Решите задачу арифметическим методом.
 В жилом доме есть двухкомнатные и четырехкомнатные квартиры. Найдите, сколько двухкомнатных и сколько четырехкомнатных квартир, если всего в доме 45 квартир и 140 комнат.

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

- 
- §1. Множество целых чисел
 - §2. Сравнение и упорядочивание целых чисел
 - §3. Сложение целых чисел
 - §4. Вычитание целых чисел
 - §5. Умножение целых чисел
 - §6. Деление целых чисел
 - §7. Степень целого числа с натуральным показателем. Порядок выполнения действий
 - §8. Решение уравнений на множестве Z

1

2

3

4

5



1.1. Целые числа

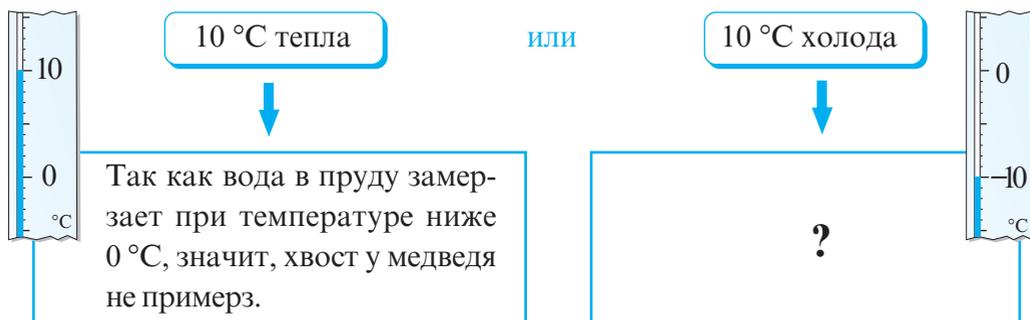
Исследуем и узнаем

1 ...И опустил медведь свой хвост в пруд, захотел и он поймать много рыбы. Прождал так медведь всю ночь, думая о предстоящей трапезе. К утру температура воздуха достигла $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Примерз ли у медведя хвост?

Решение:

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать, что показывает термометр:



О температуре $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ тепла говорят: $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ выше нуля (или плюс $10\text{ }^{\circ}\text{C}$) и записывают: $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Эта температура **положительная**.

О температуре $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ холода говорят: $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ниже нуля (или минус $10\text{ }^{\circ}\text{C}$) и записывают: $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Эта температура **отрицательная**.

2 Рассмотрите рисунки и определите, каким словом необходимо дополнить предложение, чтобы получить истинное высказывание:



Зимой, как правило, температура воздуха в Молдове .



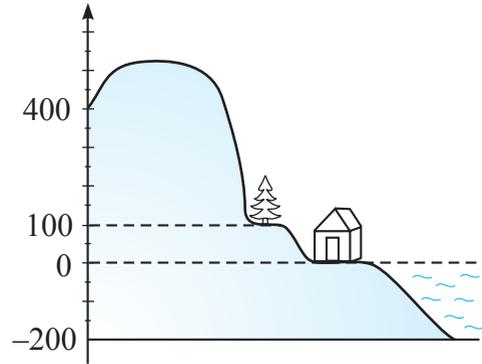
Летом, как правило, температура воздуха в Молдове .

Замечаем

Положительные и отрицательные числа используются в географии при обозначении расположения объектов относительно уровня моря.

В банковских операциях, как правило, доходы обозначают положительными числами, а расходы – отрицательными числами.

Если перед целым числом стоит знак „-“, то говорим, что целое число – **отрицательное**.



Если перед целым числом стоит знак „+“, то говорим, что целое число – **положительное**.

Отрицательные целые числа:
..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1

Нуль



Положительные целые числа:
+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, ...

ни положительное,
ни отрицательное число

Знак „+“ перед положительным числом можно опустить.

Возьмите на заметку

Целые отрицательные числа, 0 и целые положительные числа образуют **множество целых чисел**. Множество целых чисел обозначается через \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Множество $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ называется **множеством целых ненулевых чисел**.

Из истории

Долгое время отрицательные числа не использовались в вычислениях. Их считали „ложными“ числами и говорили, что они „меньше, чем ничего (ноль)“. Первыми, кто стал ассоциировать положительные числа с имуществом, а отрицательные – с долгами, были индусы. Китайцы для написания чисел использовали цвета: красный – для положительных чисел, черный – для отрицательных.

В Европе отрицательные числа получили признание как действительно существующие лишь в первой половине XVIII века.

В наше время отрицательные числа являются частью повседневной жизни.

1.2. Числовая ось. Противоположные числа

Исследуем и узнаем

1 Диана, прочитав в одной из книг об античных математиках, узнала, что Птоломей жил во II веке, Пифагор – в VI веке до н.э., а Эвклид – в III веке до н.э. Она захотела узнать, кто жил раньше. Для этого Диана расположила указанные века на хронологической оси (лента времени).

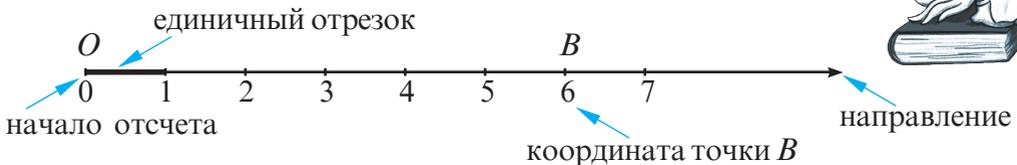


Ответ: .

Замечаем

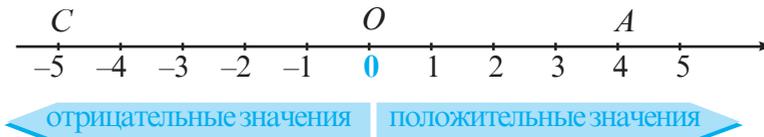
На хронологической оси отмечено начало отсчета (рождение Христа), направление и единичный отрезок (век).

В V классе я построил такую числовую ось.



Дополним числовую ось, построенную в V классе, отметив слева от точки O числа $-1, -2, -3, \dots$

Числовая ось



Возьмите на заметку

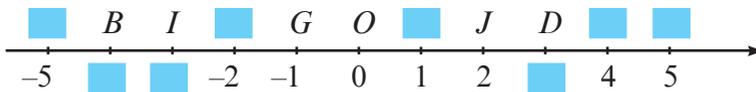
Прямую с выбранными на ней началом отсчета, направлением и единичным отрезком называют **числовой осью** (или **координатной прямой**).

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА



- ① Постройте числовую ось.
- ② Отметьте на ней точки:
 $A(-2)$, $B(-4)$, $C(1)$, $D(3)$, $E(4)$, $F(-5)$, $G(-1)$, $H(5)$, $I(-3)$, $J(2)$.
- ③ Назовите пары точек, равноудаленных от начала отсчета.
В чем отличие координат точек каждой пары?

Решение:



Пары точек, равноудаленных от начала отсчета:

$F(-5)$ и \square , $B(-4)$ и \square , \square и $D(3)$, \square и $J(2)$, \square и \square .

Координаты каждой пары отличаются знаком.

Числа 1 и -1 называются **противоположными**.

Противоположными числами являются: -5 и 5 ; \square и \square ; \square и \square ;

\square и \square ; \square и \square .

Возьмите на заметку

- ♦ Для каждого целого ненулевого числа a числа a и $-a$ называются **противоположными**. Противоположные числа отличаются друг от друга только знаками.
Противоположным числу a является число $-a$, а противоположным числу $-a$ является число a .
Число 0 противоположно самому себе.
- ♦ Множество целых чисел состоит из нуля, множества ненулевых натуральных чисел и чисел, противоположных им.

Примеры:

Если $a = 2$, то $-a = -2$.

Если $a = -5$, то $-a = -(-5) = 5$.

Применяем

- 3 Используя результаты практической работы, назовите число, противоположное числу: 11, 17, -12 , -23 , 1411, -695 .

1.3. Модуль целого числа

1 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА



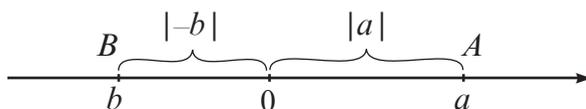
- ① Постройте числовую ось.
- ② Отметьте на ней точки $A(-4)$, $B(3)$, $C(-5)$, $D(5)$.
- ③ Найдите расстояния OA , OB , OC и OD , где O – начало отсчета.
- ④ Перечертите таблицу в тетрадь и заполните ее по образцу.

Точка	Координата	Отрезок	Длина отрезка (Расстояние от заданной точки до точки O)
A	-4	OA	4
B			
C			
D			



Возьмите на заметку

Расстояние от начала отсчета (точки O) до точки $A(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, называется **модулем** (или **абсолютным значением** числа a) и обозначается через $|a|$.



Применяем

2 Используя результаты практической работы, вычислите:

$$|-4| = 4$$

$$|5| = \blacksquare$$

$$|-21| = \blacksquare$$

$$|3| = \blacksquare$$

$$|-8| = 8$$

$$|2005| = \blacksquare$$

$$|-5| = \blacksquare$$

$$|17| = 17$$

$$|0| = \blacksquare$$

3 Даны целые противоположные числа:

а) -5 и 5 ;

б) -80 и 80 ;

в) 18 и -18 .

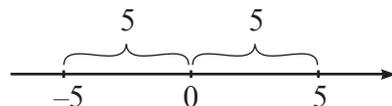
Найдите модули этих чисел. Что вы заметили?

Решение:

а) $|-5| = 5$, и $|5| = 5$. Значит, $|-5| = |5|$.

б) $|-80| = \blacksquare$, и $|80| = \blacksquare$. Значит, \blacksquare .

в) $|18| = \blacksquare$, и $|-18| = \blacksquare$. Значит, \blacksquare .

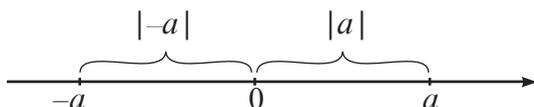


Возьмите на заметку

♦ Абсолютное значение (или модуль) любого целого числа является неотрицательным числом.

♦ Для любого целого числа a : $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0; \\ 0, & \text{если } a = 0; \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

♦ Модули противоположных чисел равны: $|-a| = |a|$



Упражнения и задачи

1. Прочтите целые числа:

$-3000, -100, -24, -12, -2, 0, 12, 78, 2005, 30007$.

2. Запишите с помощью цифр целые числа:

„минус девяносто девять“, „плюс пятнадцать“, „минус две тысячи пятьдесят“, „минус шесть миллионов“, „плюс двадцать миллиардов“.

3. Среди чисел $-11, 28, -33, 0, 69, -101, 202, -205, 44, -78, 27, 303, 0, 1012, -600, 99$ укажите числа:

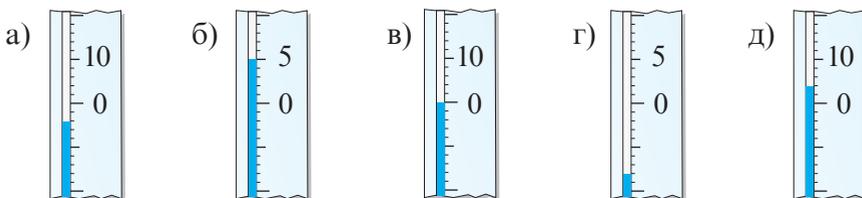
а) отрицательные;

б) положительные;

в) неотрицательные;

г) неположительные.

4. Прочтите показания термометров, изображенных на рисунке:



5. Истинно или Ложно?



а) $-5 \notin \mathbb{Z}$;

б) $17 \notin \mathbb{Z}$;

в) $28 \in \mathbb{N}$;

г) $4\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}^*$;

д) $0 \in \mathbb{Z}^*$;

е) $-1 \notin \mathbb{N}$.

6. Постройте в тетради вертикальную прямую и отметьте на ней точку O . Отметьте на этой прямой точки A, B, C, D , если:

а) точка A на 8 клеток выше точки O ;

- б) точка D на 5 клеток ниже точки O ;
- в) точка C на 6 клеток ниже точки A ;
- г) точка D на 4 клетки выше точки B .

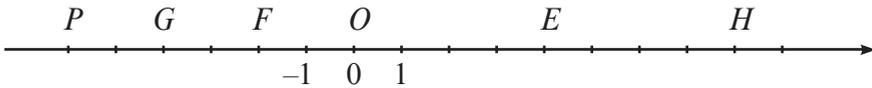
7. Рассмотрите домашний термометр для измерения температуры тела. Какую температуру он показывает: положительную или отрицательную? Обоснуйте ответ.

8. Нарисуйте шкалу термометра и отметьте на ней температуру:

- а) -5°C ; б) $+6^{\circ}\text{C}$; в) -4°C ; г) $+2^{\circ}\text{C}$; д) -1°C .

9. а) Отметьте на числовой оси целые числа: $-6, 7, 8, -8, 9, -10$.

б) Рассмотрите числовую ось и определите координаты точек E, F, G, H, P .



10. Запишите целые числа, которые от начала отсчета на числовой оси расположены на расстоянии:

- а) 11 единиц; б) 65 единиц;
- в) 78 единиц; г) 100 единиц.

11. Отметьте на числовой оси точки: $A(-7), B(-9), C(10), D(6)$.

12. Назовите три целых числа, расположенных на числовой оси:

- а) правее числа 15; б) левее числа -13 ;
- в) правее числа -18 ; г) левее числа -5 ;
- д) между числами -3 и 5 ; е) между числами -1 и 8 .

13. Запишите числа, противоположные целым числам:

- а) $-65, 18, -22, -30, 11, 100, -2011, 0$;
- б) $100, -81, -36, 48, -99, 0, 33, -2012$.

14. *Истинно* или *Ложно*?



- а) Противоположным числу 17 является -17 .
- б) Противоположным числу -5 является -5 .
- в) Противоположным числу 8 является -3 .
- г) Противоположным числу -25 является 25.

15. На каком расстоянии от пункта O находится автомобиль, если он доехал до пункта:

- а) A ; б) B ?



16. Перечертите и заполните таблицу:

a	5	-8		72	0		
$-a$			-3			-23	7



17. Найдите расстояние от точки отсчета до точки:

- а) $A(20)$; б) $B(-8)$; в) $C(-123)$; г) $D(129)$;
д) $O(0)$; е) $F(-79)$; ж) $G(2023)$; з) $H(-411)$.

18. Найдите абсолютную величину числа:

- а) 19; б) -33; в) -87; г) 104;
д) -1222; е) 69; ж) -215; з) -98.

19. Дополните:

- а) если $a \in \{-11, -9, -5, 6, 29, 388\}$, то $|a| \in \{\text{■}\}$;
б) если $a \in \{33, -9, -55, 44, -66, 77, -88\}$, то $|a| \in \{\text{■}\}$.

20. Отметьте на числовой оси точки, модуль которых равен:

- а) 6; б) 7; в) 0; г) 8; д) 5.

21. Сережа поднялся на лифте шестнадцатизэтажного дома на 7 этаж, затем он переместился еще на 5 этажей. На какой этаж попал Сережа? Обоснуйте ответ.

22. Запишите элементы множества:

- а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 5\}$; б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 7\}$;
в) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 8\}$; г) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 6\}$.

23. Истинно или Ложно?

- а) $\{-7, 0, 1\} \subset \mathbb{N}$; б) $\{11, -3, 0\} \subset \mathbb{Z}^*$;
в) $\{-5, -1, 0\} \subset \mathbb{Z}$; г) $\{0, 5, 7\} \subset \mathbb{N}^*$;
д) $\{-2, 1, 7\} \subset \mathbb{Z}^*$; е) $\{1, 8, 100\} \subset \mathbb{Z}$.



24. Из повседневной жизни приведите примеры применения положительных и отрицательных чисел.

25. Назовите целые числа, расположенные на числовой оси между числами:

- а) 10,5 и 29,1; б) -5 и 12,4; в) -35 и -21;
г) 11,2 и 31,8; д) -8 и 10,04; е) -46 и -31.

26. Запишите все натуральные числа меньше 9 и числа, противоположные им.

27. В каком направлении и на сколько единиц надо переместить предмет из точки:
- а) $A(-5)$ до точки $B(3)$; б) $C(6)$ до точки $D(-2)$?
28. После перемещения предмета из точки A в отрицательном направлении на 4 единицы он оказался в точке $B(-2)$. Найдите координаты точки A .
29. После перемещения некоторого предмета из точки C в положительном направлении на 7 единиц он попал в точку $D(3)$. Найдите координаты точки C .
30. Дополните:
- а) если $m \in \{0, -2, 5, -10\}$, то $-m \in \{ \quad \}$;
- б) если $k \in \{-3, 2, -7, 11\}$, то $-k \in \{ \quad \}$;
- в) если $a \in \{-9, 3, -1, 8\}$, то $-(-a) \in \{ \quad \}$.
31. Впишите число, чтобы получить истинное высказывание:
- а) $-(-35) = \quad$; б) $17 = \quad$;
- в) $-(-201) = \quad$; г) $126 = \quad$.
32. Найдите x , если:
- а) $|x| = 15$; б) $|x| = 123$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = 63$; д) $|x| = 2012$.
33. Найдите число:
- а) положительное, модуль которого равен: 1) 48; 2) 55; 3) 101; 4) 465;
- б) отрицательное, модуль которого равен: 1) 35; 2) 511; 3) 696; 4) 1001.
34. Определите число с наибольшим модулем:
- а) $-7, 18, -35, 22, -14$; б) $64, -19, 59, -63, 33$.
35. Впишите один из знаков сравнения ($<$, $=$ или $>$), чтобы получить истинное высказывание:
- а) $|-7| \quad \bullet \quad |8|$; б) $|25| \quad \bullet \quad |-13|$;
- в) $|-11| \quad \bullet \quad 10$; г) $|-66| \quad \bullet \quad |66|$;
- д) $|-102| \quad \bullet \quad |-98|$; е) $|15| \quad \bullet \quad |-35|$.
36. Вычислите:
- а) $|-18| + |17| - |-30| \cdot 0$; б) $|28| - |-14| + |-55| \cdot 0$;
- в) $|68| : |-2| + |29| - |-15|$; г) $|-102| : |-3| + |91| - |-69|$.
37. Перечертите рисунок и отметьте начало отсчета. Назовите координаты точек C, D, E ?



38. Даны множества:

а) $A = \{-4, -(-5), 0, 7, 21\}$ и $B = \{5, -(-7), 18, -8, 15\}$;

б) $A = \{17, -11, 18, -(-8), 25\}$ и $A = \{-13, -(-9), 8, -(-25)\}$.

Найдите: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

39. Найдите число a , если:

а) $-(-a) = 12$; б) $-a = -(17)$; в) $a = -\{-[-(-25)]\}$.

40. Отметьте на числовой оси целые числа x , удовлетворяющие условию:

а) $|x| \leq 5$; б) $|x| \leq 6$; в) $|x| < 7$; г) $|x| < 8$.

41. Запишите три целых значения x , удовлетворяющие условию:

а) $x < 0$ и $|x| < 7$; б) $x > 0$ и $|x| \leq 5$.

42. Запишите элементы множества:

а) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$; б) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 1\}$;

в) $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$; г) $D = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 4\}$.

43. Даны множества:

а) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 9\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 8\}$;

б) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 8\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 7\}$.

Найдите: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

44. Найдите $|x|$, если расстояние между точками $B(x)$ и $C(-x)$ равно 8 единицам измерения.

45. *Истинно* или *Ложно*?



1) Если $a < 0$, то $|a| = a$.

2) Если $|a| = -a$, то $a = 0$.

3) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

4) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

§ 2 Сравнение и упорядочивание целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Рассмотрите рисунки и поставьте необходимый знак сравнения:

19 ● 28

3 ● -5

-14 ● -9

2 Сравните целые числа: а) 32 и 24; б) 8 и -15; в) -19 и -11.

Решение:

Отметим заданные числа на числовой оси:



а) Число 32 расположено правее числа 24. Значит, 32 ● 24.

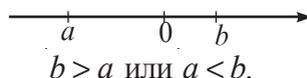
б) Число 8 расположено правее числа -13. Значит, 8 ● -13.

в) Число -19 расположено числа -11. Значит, -19 ● -11.



Возьмите на заметку

♦ Из двух чисел, изображенных на числовой оси, больше то, которое расположено правее другого.



♦ Любое отрицательное целое число меньше любого положительного целого числа.

♦ Ноль меньше любого положительного целого числа:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

♦ Ноль больше любого отрицательного целого числа:

$$\dots -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0.$$

3 Сравните:

а) $17 \bullet 15$, $|17| \bullet |15|$;

б) $100 \bullet 200$, $|100| \bullet |200|$;

в) $-7 \bullet -4$, $|-7| \bullet |-4|$;

г) $-98 \bullet -5$, $|-98| \bullet |-5|$.



Возьмите на заметку

Из двух положительных целых чисел больше то, модуль которого больше.

Из двух отрицательных целых чисел больше то, модуль которого меньше.

Упражнения и задачи



1. Отметьте на числовой оси числа 6, 2, -4, -8, 10, 3, -5 и определите:

а) числа, больше 0;

б) числа, меньше 0;

в) наибольшее число;

г) наименьшее число.

2. Запишите в виде неравенства высказывание:

а) Число 111 – положительное.

б) Число -200 – отрицательное.

в) Число x – положительное.

г) Число y – неотрицательное.

3. Впишите один из знаков сравнения (<, = или >):

а) $25 \bullet 17$;

б) $-19 \bullet 6$;

в) $-15 \bullet -4$;

г) $-7 \bullet 0$;

д) $11 \bullet -(-11)$;

е) $-24 \bullet -23$;

ж) $16 \bullet -1$;

з) $8 \bullet -(-8)$.



4. Запишите числа в порядке возрастания:

а) 31, -27, -1, 0, 14, -17, 63, -3;

б) 44, -33, 22, -11, 0, 19, 54, -4.

5. В Бельцах и Кагуле измеряли температуру воздуха в декабре. Результаты указаны в таблице:

Город \ Дата	1	5	10	15	20	25
Кагул	0 °C	-5 °C	-10 °C	-12 °C	-16 °C	-19 °C
Бельцы	-2 °C	-8 °C	-10 °C	-15 °C	-18 °C	-17 °C

а) Сравните температуру воздуха в Бельцах и Кагуле за эти дни. В каком городе было теплее?

б) Какой из дней был самый холодный в этих городах? А самый теплый?



6. Определите, между какими соседними целыми числами заключено число:

а) -5;

б) -17;

в) 7;

г) 22;

д) 0,5;

е) 18,25.

Образец:

а) Между -6 и -4.

Пишем: $-6 < -5 < -4$.

7. Какая из температур выше?

а) $a = 10^\circ\text{C}$, $b = 15^\circ\text{C}$;

б) $a = 21^\circ\text{C}$, $b = 19^\circ\text{C}$;

в) $a = 18^\circ\text{C}$, $b = -14^\circ\text{C}$;

г) $a = 12^\circ\text{C}$, $b = -5^\circ\text{C}$.

8. Впишите такую цифру, чтобы получить истинное высказывание:

а) $-6481 < -648$;

б) -4 $78 > -4278$;

в) $1608 < 160$;

г) 45 $6 > 4546$.

9. Запишите пять последовательных целых чисел:

а) меньше 1;

б) меньше -2;

в) меньше -6;

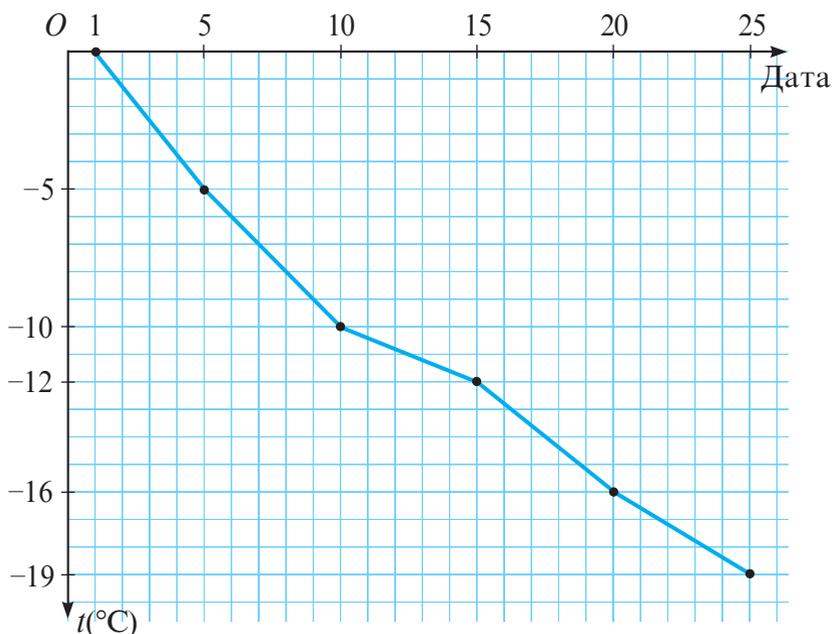
г) больше -4.

10. Запишите числа в порядке возрастания:

а) -24, 16, $-|-18|$, $-(-15)$, $|63|$, -19, 21;

б) -48, 32, $|-61|$, $-|23|$, $|35|$, $-(-17)$, -61.

11. Дима изобразил температуру, зарегистрированную в Кагуле (см. таблицу упражнения 5), с помощью следующей схемы:



Учитывая, что температура постоянно понижалась, определите, в какие дни могла быть следующая температура:

- а) $-4°C$; б) $-14°C$.

Изобразите с помощью диаграммы температуру, зарегистрированную в Бельцах (см. таблицу упражнения 5).

12. Для каких целых чисел a верно высказывание $a + |a| > 0$?
13. Известно, что целые числа m и n являются отрицательными. Сравните числа:
- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| а) $-m$ и n ; | б) $- n $ и n ; | в) $ m $ и m ; |
| г) $ n $ и m ; | д) $-n$ и $ n $; | е) $ m $ и $-m$. |
14. На числовой оси даны точки $A(a)$ и $B(b)$.



Можно ли определить:

- а) какое из чисел a и b больше ;
 б) модуль какого из чисел a и b больше?

§3 Сложение целых чисел

3.1. Сложение целых чисел с одинаковыми знаками

Исследуем и узнаем

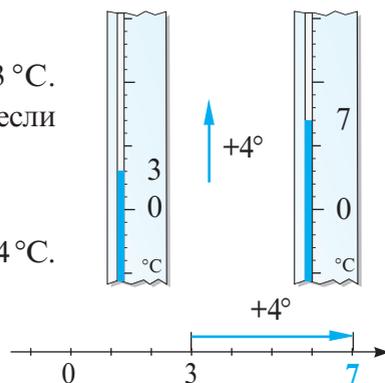
1 Утром температура воздуха была $+3^{\circ}\text{C}$. Какой стала температура воздуха в полдень, если она поднялась на 4°C ?

Решение:

Обозначим повышение температуры через $+4^{\circ}\text{C}$.

Получим: $(+3) + (+4) = 3 + 4 = 7$.

Ответ: $+7^{\circ}\text{C}$.



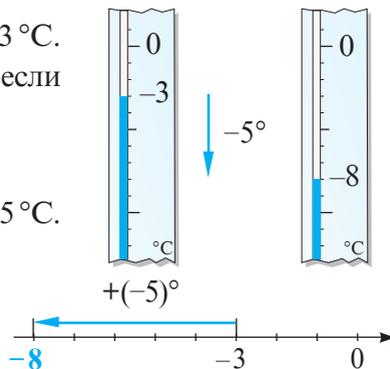
2 Вечером температура воздуха была -3°C . Какой стала температура воздуха к полуночи, если она понизилась на 5°C ?

Решение:

Обозначим понижение температуры через -5°C .

Получим: $-3 + (-5) = \blacksquare$.

Ответ: $\blacksquare^{\circ}\text{C}$.



3 Муравей переместился по числовой оси из точки O в отрицательном направлении сначала на 3 единицы, затем еще на единицу и оказался в точке C .

Найдите координаты точки C .

Решение:

$-3 + (\blacksquare) = \blacksquare$.

Ответ: $C(\blacksquare)$.

Можно решить и так:

$$\begin{aligned} -3 + (-1) &= \\ &= -(|-3| + |-1|) = \\ &= -(3 + 1) = -4. \end{aligned}$$



Возьмите на заметку

Чтобы сложить два целых числа с одинаковыми знаками, надо:

- ① сложить их модули;
- ② поставить перед полученным числом общий знак.

3.2. Сложение целых чисел с разными знаками

Исследуем и узнаем

1 Коля и Саша играли в компьютерные игры. У Коли 7 выигрышей и 8 проигрышей, а у Саши – 6 выигрышей и 4 проигрыша. Кто выиграл, если каждый проигрыш аннулирует один выигрыш?

Решение:

Обозначим число выигрышей через положительные числа, а число проигрышей через отрицательные.

Число проигрышей у Коли на единицу больше, чем выигрышей.

Получим: $(+7) + (-8) = -1$.

Число выигрышей у Саши на 2 больше, чем проигрышей:

Получим: $(6) + (-4) = \blacksquare$.

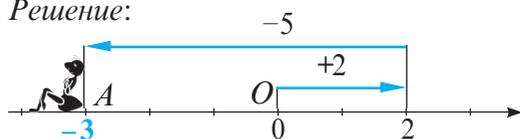
Ответ: \blacksquare .



2 Муравей переместился по числовой оси из точки O в положительном направлении сначала на 2 единицы, затем еще на 5 единиц в отрицательном направлении и оказался в точке A .

Найдите координаты точки A .

Решение:



$$+2 + (-5) = -3.$$

Ответ: -3 .

Я решил так:

$$+2 + (-5) = -(|-5| - |+2|) =$$
$$= -(5 - 2) = -3$$

$$+8 + (-2) = +(8 - 2) = +6$$

$$-7 + (+3) = -(7 - 3) = -4$$



Возьмите на заметку

Чтобы сложить два целых числа с разными знаками, надо:

- 1 из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
- 2 поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

• Объясните, почему $+3 + (-3) = 0$.

Возьмите на заметку

Сумма двух противоположных целых чисел равна нулю:

$$a + (-a) = 0, \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

3.3. Свойства сложения целых чисел

Исследуем и узнаем

1 а) Рассмотрите таблицу. Подставьте вместо a и b целые числа и проверьте истинность выводов, записанных в таблице.

a	b	$a + b$	$b + a$	Вывод
-6	4	$-6 + (+4) = -2$	$+4 + (-6) = -2$	$a + b = b + a, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$
-4	0	$-4 + 0 = -4$	$0 + (-4) = -4$	$a + 0 = 0 + a = a, a \in \mathbb{Z}$

б) Рассмотрите таблицу. Подставьте вместо a, b и c целые числа и проверьте истинность вывода, записанного в таблице.

a	b	c	$a + (b + c)$	$(a + b) + c$	Вывод
-2	+7	-3	$-2 + (+7 + (-3)) =$ $= -2 + (+4) = 2$	$(-2 + (+7)) + (-3) =$ $= 5 + (-3) = 2$	$a + (b + c) = (a + b) + c,$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Свойства сложения целых чисел

1° Сложение целых чисел коммутативно:

$$a + b = b + a \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Z}.$$

2° Сложение целых чисел ассоциативно:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

3° Целое число 0 является нейтральным элементом сложения целых чисел:

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

4° Для каждого целого числа a есть только одно противоположное ему число $-a, -a \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$a + (-a) = -a + a = 0 \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

Применяем

2 Вычислите $((-2) + (-3)) + 3$.

Решение:

$$\underbrace{((-2) + (-3)) + 3}_{\text{свойство 2°}} = (-2) + (-3 + 3) = -2 + 0 = -2.$$

свойство 2°

Упражнения и задачи



1. Выполните с помощью числовой оси сложение:

а) $+3 + (+7)$;

б) $-2 + (-6)$;

в) $-1 + (-8)$;

г) $+6 + (+1)$;

д) $-4 + (-9)$;

е) $-8 + (-2)$.

2. Вычислите:

а) $-11 + (-120)$;

б) $-18 + (-17)$;

в) $+13 + (+34)$;

г) $-15 + (-27)$;

д) $+56 + (+27)$;

е) $-32 + (-181)$.

3. Вечером температура воздуха была -6°C . Какой стала температура воздуха утром, если в течение ночи она понизилась на 5°C ?

4. Запишите число в виде суммы двух целых чисел:

а) -100 ;

б) -29 ;

в) -13 ;

г) -999 .

?	?
?	?

5. Впишите в таблицу 4 числа так, чтобы сумма любых двух чисел была отрицательной.

6. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(-4) + \square = -6$;

б) $\square + (-2) = -12$;

в) $-3 + \square = -11$;

г) $\square + (-7) = -20$.

7. Отметьте на числовой оси точку $A(-4)$. Затем отметьте точку:

а) $B(b)$, где $b = -4 + 2$;

б) $C(c)$, где $c = -4 + 5$;

в) $D(d)$, где $d = -4 + (-1)$;

г) $M(m)$, где $m = -4 + 4$.

8. Вычислите:

а) $-8 + 2$;

б) $12 + (-14)$;

в) $-16 + 15$;

г) $-6 + 17$;

д) $21 + (-9)$;

е) $-121 + 98$;

ж) $137 + (-112)$;

з) $-291 + 290$.

9. Запишите в виде суммы двух целых чисел с разными знаками число:

а) -2 ;

б) 3 ;

в) -5 ;

г) 0 ;

д) 7 ;

е) -1 .

10. Впишите такое целое число, чтобы полученное высказывание было истинным:

а) $2 + \square = -7$;

б) $\square + (-3) = -1$;

в) $-3 + \square = 3$;

г) $0 + \square = -6$;

д) $-8 + \square = 0$;

е) $-11 + \square = -11$.

11. Перечертите и заполните таблицу:

a	-10	5	-17	0	-8	-20	-13
b	12	-7	17	-3	-4	19	-10
$a + b$							



12. Вычислите:

- а) $89 + (-62)$; б) $-89 + (-62)$; в) $-89 + 62$; г) $27 + (-43)$;
д) $-136 + (-49)$; е) $-186 + 236$; ж) $-98 + (-59)$; з) $-43 + (-57)$;
и) $-64 + 75$; к) $-139 + 123$; л) $45 + (-105)$; м) $-82 + (-69)$.

13. Найдите значение выражения $x + y$, если:

- а) $x = 171$, $y = 112$; б) $x = -213$, $y = -67$;
в) $x = -47$, $y = -133$; г) $x = -59$, $y = -241$.

14. Вычислите:

- а) $(-4) + (-5) + (-6) + 2 + 3 + 4$; б) $(-7) + (-8) + (-4) + 15 + 4$;
в) $17 + (-12) + 18 + (-13) + 19 + (-14)$.

15. Сравните:

- а) $-99 + 100$ ● 0; б) $-20 + 17$ ● 0;
в) $82 + (-89) + 8$ ● 0; г) $-114 + 114$ ● 0.



16. Вычислите, применив свойства сложения:

- а) $-14 + (-16 + 20)$; б) $(-18 + (-11)) + (-12)$;
в) $19 + (-13) + 3 + (-19)$; г) $-28 + (-17) + (-12) + 17$.

17. Найдите значение выражения $a + (-38) + (-65) + b$, если:

- а) $a = 28$, $b = -25$; б) $a = -85$, $b = -12$.

18. Дополните таблицу тремя различными числами так, чтобы сумма любых двух чисел была отрицательной.

7	?
?	?

19. Впишите такое число, чтобы полученное высказывание было истинным:

- а) $627 + \square = 0$; б) $217 + 325 + \square = 325$;
в) $\square + 215 + \square = 215$; г) $\square + 2000 + \square = 300$.

20. Найдите сумму всех целых чисел от -99 до 100 .

21. При каких условиях равенство $x + y + z + t = 0$ является истинным, если x и z – противоположные целые числа?

22. Найдите сумму наибольшего положительного целого числа, состоящего из трех различных цифр и наименьшего отрицательного числа, состоящего из:

- а) 3 различных цифр; б) 5 различных цифр; в) 6 различных цифр.

§4 Вычитание целых чисел

4.1. Вычитание целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Коля попросил своего младшего брата Мишу выполнить вычитание: $4 - 7$. Миша удивился и ответил, что не существует такого числа, которое бы равнялось разности $4 - 7$.

Коля объяснил Мише, что действительно не существует такого натурального числа, но его легко можно найти среди целых чисел.

• Рассмотрев решение следующей задачи, вы поймете, как Коля объяснил Мише выполнение вычитания $4 - 7$.

$$4 - 7 = ?$$



2 Вечером температура воздуха была 4°C . Какой стала температура воздуха утром, если она понизилась на 7°C ?

Решение:

1 способ

Пусть x – искомое значение температуры.

Так как температура понизилась на 7°C , то она стала меньше на 7°C , значит, $4 - 7 = x$, где $4 = x + 7$.

$$x = -3, \text{ так как } -3 + 7 = 4.$$

Таким образом, $4 - 7 = -3$.

Ответ: -3°C .

Разностью двух целых чисел a и b

называется такое целое число

$$c = a - b, \text{ что } a = c + b.$$

$$a - b = c$$

уменьшаемое

вычитаемое

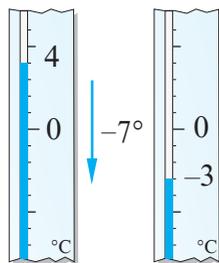
разность (остаток)

2 способ

Обозначим понижение температуры через -7°C .

Получим:

$$4 + (-7) = -3.$$



$$4 - 7 = 4 + (-7) = -3.$$



3 За бортом космического корабля работает космонавт. Часть скафандра, куда попадают солнечные лучи, имеет температуру $+140^{\circ}\text{C}$, а теневая часть -130°C . Найдите разность между температурами.



Решение:

$140 - (-130) = x$. Найдем число x такое, что $x + (-130) = 140$.

$x = \square$, так как $\square + (-130) = 140$.

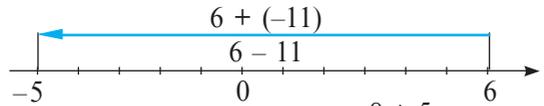
Ответ: $\square^{\circ}\text{C}$.



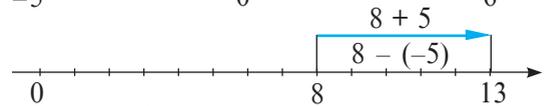
$$140 - (-130) = 140 + 130 = 270$$

• Рассмотрите и объясните следующие вычитания:

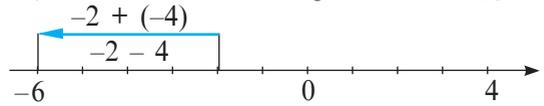
$$6 - 11 = 6 + (-11) = -5;$$



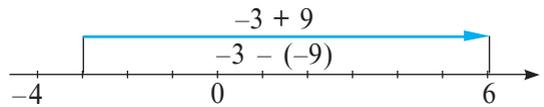
$$8 - (-5) = 8 + 5 = 13;$$



$$-2 - 4 = -2 + (-4) = -6;$$



$$-3 - (-9) = -3 + 9 = 6.$$



Возьмите на заметку

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

4.2. Расстояние между двумя точками на числовой оси (дополнительно)

Исследуем и узнаем

1 Муравей переместился по числовой оси из точки $A(a)$ в точку $B(b)$. Найдите, какое расстояние преодолел муравей, если:

а) $a = 2$, $b = 6$;

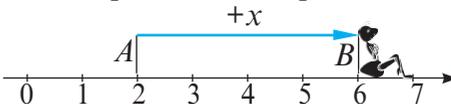
б) $a = -2$, $b = 5$;

в) $a = -1$, $b = -4$.

Решение:

Обозначим расстояние через $AB = x$.

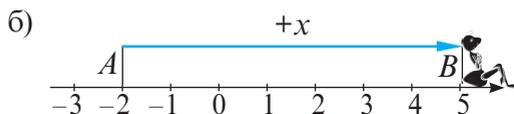
а)



$$2 + x = 6$$

$$x = 4$$

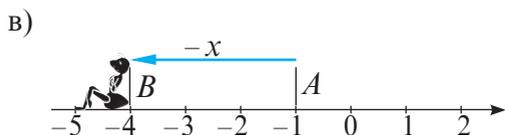
$$AB = 6 - 2 = 4$$



$$-2 + x = 5$$

$$x = \square$$

$$AB = 5 - \square = \square + \square = \square$$



$$-1 + (-x) = -4$$

$$x = \square$$

$$AB = -1 - \square = \square + \square = \square$$

Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на числовой оси вычисляется по формуле: $AB = |a - b|$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

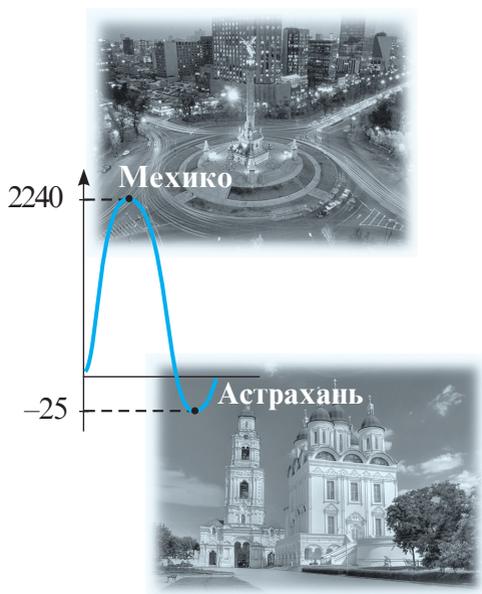
Применяем

2 Город Астрахань расположен ниже уровня моря на 25 м, а город Мехико – на высоте 2 240 м над уровнем моря. На сколько метров выше уровня города Астрахань расположен город Мехико?

Решение:

$$2240 - (-25) = 2240 + 25 = 2265 \text{ (м).}$$

Ответ: 2265 м.



Упражнения и задачи

1. Продолжите:

а) $-1 - 5 = -1 + (-5) = \dots$;

в) $7 - (-10) = 7 + 10 = \dots$;

д) $-15 - 15 = -15 + \dots = \dots$;

ж) $24 - (-9) = 24 + \dots = \dots$;

б) $2 - 9 = 2 + (-9) = \dots$;

г) $-4 - (-3) = -4 + 3 = \dots$;

е) $11 - 18 = 11 + \dots = \dots$;

з) $-15 - (-23) = -15 + \dots = \dots$

2. Выполните действия:

а) $-13 - 6$;

б) $40 - 52$;

в) $-17 - (-17)$;

г) $-16 - 9$;

д) $12 - 26$;

е) $8 - (-31)$;

ж) $0 - (-13)$;

з) $0 - 22$;

и) $34 - (-12)$.



3. Впишите число так, чтобы полученное высказывание было истинным:

а) $0 - \square = -8$;

б) $10 - \square = -2$;

в) $\square - 4 = -1$;

г) $\square - 10 = -7$;

д) $-3 - \square = 6$;

е) $9 - \square = 15$;

ж) $0 - \square = 7$;

з) $\square - (-3) = -4$;

и) $\square - (-12) = 14$.

4. Уменьшите каждое из чисел на 25.

а) \square 18;

б) \square 0;

в) \square -6;

г) \square 1;

д) \square 24.

5. Перечертите и заполните таблицу:

a	8	0	-4	-15	1	-18
b	-13	-7	-16	4	15	0
$a - b$						
$b - a$						



6. Найдите расстояние AB между точками $A(a)$ и $B(b)$, если:

а) $a = -5, b = 3$;

б) $a = 1, b = 10$;

в) $a = -7, b = -8$.

7. Самая низкая температура на Земле (-89°C) была зарегистрирована в Антарктиде, а самая высокая (58°C) – в Африке. Найдите



разность между самой высокой и самой низкой температурами на Земле.



8. Вычислите:

а) $-12 - 8 + 7$;

б) $9 - 16 - 3$;

в) $25 - 28 - 7$;

г) $-7 - 15 - 21$;

д) $6 - 14 + 8$;

е) $-9 - 7 + 11$.

9. Найдите значение числового выражения:

а) $-3 - 8 + 12 - 4 + 11$;

б) $4 - 5 + 11 - 9 - 4$;

в) $9 - 2 - 8 + 4 - 21$;

г) $-16 - 7 + 32 - 21 + 17$;

д) $-16 + 9 + 27 - 11 - 8$.

10. Найдите значение выражения $x - y + z$, если:

а) $x = -3, y = -7, z = -12$;

б) $x = 9, y = 12, z = -8$;

в) $x = -21, y = -6, z = 17$.

11. Впишите один из знаков (+ или -), чтобы полученное высказывание стало истинным:

а) $72 \bullet (-53) = 125$;

в) $-37 \bullet (-64) = -101$;

д) $-61 \bullet 9 = -70$;



б) $96 \bullet 81 = -45$;

г) $-49 \bullet 17 = -32$;

е) $74 \bullet (-26) = 100$.

12. Какая из точек, B или C , расположена на числовой оси дальше от точки $A(-12)$, если:

а) $B(-6), C(-16)$;

б) $B(3), C(-27)$?

13. Перечертите и заполните таблицу:

a	b	$a - b$	$b - a$	$ a - b $	$ b - a $
-6	-9				
12	19				
-10	4				
5	-11				



14. Может ли разность двух чисел быть больше их суммы?

Обоснуйте ответ, приведя примеры.

15. Подставьте вместо \bullet один из знаков (+ или -), а вместо \blacksquare такое число, чтобы полученное высказывание стало истинным:

а) $(\bullet 24) + (\bullet \blacksquare) = -12$;

б) $(\bullet \blacksquare) - (\bullet 10) = 22$;

в) $-15 - (\bullet \blacksquare) = 0$;

г) $(\bullet 9) + (+4) = -\blacksquare$.



16. Даны числа $A(-12), B(-4)$ на числовой оси. Найдите координаты точки C и длину отрезка AC , если точка B – середина этого отрезка.

§5 Умножение целых чисел

5.1. Умножение целых чисел

Исследуем и узнаем

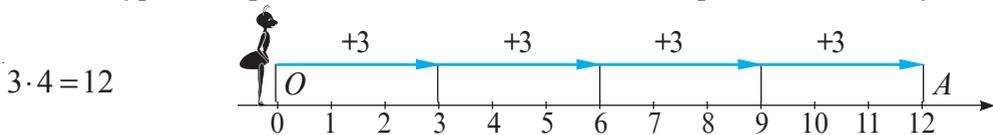
1 Муравей перемещается по числовой оси со скоростью 3 единицы в минуту. Сейчас он находится в начале отсчета.

- В какую точку переместится муравей через 4 минуты?
- В какой точке находился муравей 4 минуты назад?

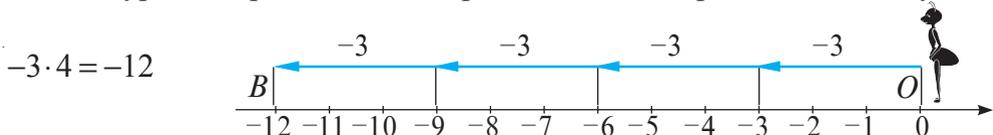
Решение:

а) Пусть скорость муравья в положительном направлении равна 3 единицам/мин, а в отрицательном равна -3 единицам/мин.

① Если муравей перемещается в положительном направлении, то получим:

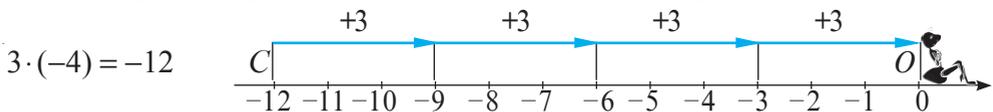


② Если муравей перемещается в отрицательном направлении, то получим:

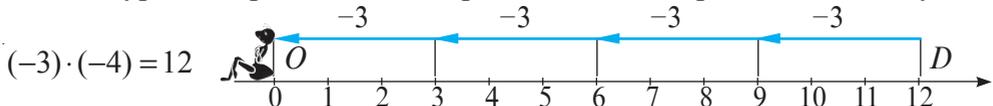


б) Обозначим 4 минуты назад через -4 .

① Если муравей перемещается в положительном направлении, то получим:



② Если муравей перемещается в отрицательном направлении, то получим:



Ответ: а) ① $A(12)$; ② $B(-12)$; б) ① $C(-12)$; ② $D(12)$.

Возьмите на заметку

Чтобы перемножить два целых числа с разными знаками, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак минус (-).

Чтобы перемножить два целых числа с одинаковыми знаками, надо перемножить их модули.

$$-7 \cdot 8 = -|7| \cdot |8| = -56;$$

$$9 \cdot (-5) = -|9| \cdot |-5| = -45.$$

$$+5 \cdot (+4) = |5| \cdot |4| = 20;$$

$$-6 \cdot (-4) = |-6| \cdot |-4| = 24.$$

Зависимость знака произведения двух целых ненулевых чисел от знаков множителей можно вывести при помощи таблицы знаков:



Знак числа a	Знак числа b	Знак числа $a \cdot b$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+



2 Рассмотрите приведенные примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

$$\begin{aligned} -8 \cdot 1 &= -8 \\ 3 \cdot 1 &= 3 \end{aligned}$$

При умножении целого числа на 1 получим это же число.

$$\begin{aligned} -1 \cdot 5 &= -5 \\ -7 \cdot (-1) &= 7 \end{aligned}$$

При умножении целого числа на (-1) получим число, противоположное данному.

$$\begin{aligned} -3 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot (-9) &= 0 \end{aligned}$$

Умножение любого целого числа на нуль дает в результате 0.

5.2. Свойства умножения

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-2) &= -12 \\ -2 \cdot 6 &= -12 \\ 6 \cdot (-2) &= -2 \cdot 6 \end{aligned}$$

1° Коммутативность:
 $a \cdot b = b \cdot a$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} -15 \cdot (4 \cdot 7) &= -420 \\ (-15 \cdot 4) \cdot 7 &= -420 \\ -15 \cdot (4 \cdot 7) &= (-15 \cdot 4) \cdot 7 \end{aligned}$$

2° Ассоциативность:
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 7 \cdot (-2 + 12) &= 70 \\ 7 \cdot (-2) + 7 \cdot 12 &= 70 \\ 7 \cdot (-2 + 12) &= 7 \cdot (-2) + 7 \cdot 12 \end{aligned}$$

3° Дистрибутивность умножения относительно сложения:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} -19 \cdot 1 &= -19 \\ 1 \cdot (-46) &= -46 \end{aligned}$$

4° Число 1 – нейтральный элемент умножения:
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, для любого $a \in \mathbb{Z}$.

• Подставьте вместо букв a , b и c любые целые числа и проверьте истинность свойств.

Применяем

Вычислите: а) $(-4) \cdot 53 \cdot (-25)$; б) $7 \cdot (-93) + 7 \cdot 92$.

Решение:

$$\text{а) } \underbrace{(-4) \cdot 53 \cdot (-25)}_{\text{свойство 1}^\circ} = 53 \cdot (-4) \cdot (-25) = 53 \cdot 4 \cdot 25 = 53 \cdot 100 = 5300.$$

$$\text{б) } \underbrace{7 \cdot (-93) + 7 \cdot 92}_{\text{свойство 3}^\circ} = 7 \cdot (-93 + 92) = 7 \cdot (-1) = -7.$$

Упражнения и задачи



1. Уровень воды в Днестре меняется каждый день на 2 см.

Сегодня четверг и уровень воды составляет 424 см.

а) Каким будет уровень воды в воскресенье, если вода поднимается?

б) Каким был уровень воды в понедельник, если уровень понизился?

2. Вычислите:

а) $6 \cdot (-9)$;

б) $(-15) \cdot 7$;

в) $(-4) \cdot (-11)$;

г) $-1 \cdot 17$;

д) $(-12) \cdot 0$;

е) $-6 \cdot (-9)$;

ж) $0 \cdot (-27)$;

з) $(-14) \cdot (-3)$;

и) $21 \cdot (-6)$.

3. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните ее:

a	8	-7	-4	-52	-1	-12	-6
b	-3	9	-31	0	-75	3	-15
$a \cdot b$							



4. Запишите число в виде произведения двух целых чисел:

а) -28;

б) -12;

в) -7;

г) 0;

д) -1.

5. Определите знак произведения (+ или -) и впишите один из знаков сравнения ($>$, $<$ или $=$), чтобы получить истинное высказывание.

а) $(-12) \cdot (-57) \cdot (-81)$ ● 0;

б) $(-48) \cdot (+21) \cdot (-36)$ ● 0;

в) $(-15) \cdot (+15) \cdot (-25)$ ● 0;

г) $(-521) \cdot (-152) \cdot 0$ ● 0.



6. Найдите $-15a$, если:

- а) $a = -2$; б) $a = -1$; в) $a = 0$; г) $a = 7$.

7. Вычислите:

- а) $20 \cdot 18 \cdot (-5)$; б) $(-2) \cdot (-35) \cdot (-8)$;
в) $(-54) \cdot (-82) \cdot 0$; г) $(-24) \cdot 8 \cdot (-5)$.

8. Найдите произведение:

- а) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; б) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$.



9. Не выполняя действий, определите знак произведения:

- а) $(-5 - 6 - 7 - 8 - 9) \cdot (-55)$;
б) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot (-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)$.

10. Запишите число -24 в виде произведения:

- а) двух множителей; б) трех множителей; в) четырех множителей.

11. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

- а) $-32 \cdot \blacksquare = 96$; б) $\blacksquare \cdot (-7) = 84$;
в) $\blacksquare \cdot 13 = -65$; г) $-9 \cdot \blacksquare = -108$.

12. Применяя свойства умножения, вычислите наиболее рациональным способом:

- а) $(-21) \cdot (-8) \cdot 3 \cdot (-25)$; б) $(-5) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (-4)$;
в) $(-13) \cdot 52 + 48 \cdot (-13)$; г) $29 \cdot (-125) - 29 \cdot (-124)$.

13. Найдите значение выражения:

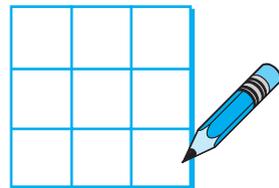
- а) $-3m + 5$, если $m = 7$; б) $2 - 5n$, если $n = -6$;
в) $4ab + 2$, если $a = 3$, $b = -1$; г) $143 - 15xy$, если $x = -12$, $y = 0$.



14. Найдите произведение всех целых чисел от -20 до 15 .

15. Сумма двух ненулевых целых чисел равна нулю. Какой знак будет у произведения этих чисел?

16. Впишите числа $-1, 2, -3, -4, 5, -6, -7, 8, -9$ так, чтобы произведение чисел по любой горизонтали, вертикали и диагонали было положительным.



§6 Деление целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Температура воздуха в предгорье равна 0°C . При подъеме на гору на каждом километре она понижается на 2°C . На какую высоту поднялся альпинист, если температура воздуха составляет -6°C ?

Решение:

Обозначим понижение температуры на 2°C через -2°C .

Вычислим: $-6 : (-2) = 3$, так как $3 \cdot (-2) = -6$.

Ответ: 3 км.



2 Рассмотрите примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

Разделить целое число -6 на целое число -2 означает найти такое число, которое при умножении на -2 даст -6 .

делимое делитель частное

$$-18 : (-6) = +3,$$

так как $+3 \cdot (-6) = -18$

$$+24 : (-4) = -6,$$

так как $-6 \cdot (-4) = +24$

$$-21 : (+7) = -3,$$

так как $-3 \cdot 7 = -21$

Частное двух целых чисел с одинаковыми знаками является положительным числом.

Частное двух целых чисел с разными знаками является отрицательным числом.

Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя.

$$|-18 : (-6)| = |-18| : |-6| = |+3|$$

$$|+24| : |-4| = |-6|$$

$$|a : b| = |a| : |b|, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

$$|-21| : |+7| = |-3|$$

Знак частного в зависимости от знака делимого и делителя можно вывести при помощи таблицы знаков.

• Сравните с таблицей знаков произведения двух целых чисел.

Знак числа a	Знак числа b	Знак числа $a : b$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

3 Рассмотрите примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

$$\begin{aligned} -6 : 1 &= -6 \\ 5 : 1 &= 5 \end{aligned}$$

При делении целого числа на 1 получим это же число, то есть делимое.

$$\begin{aligned} -3 : (-1) &= 3 \\ 7 : (-1) &= -7 \end{aligned}$$

При делении целого числа на -1 получим число, противоположное данному.

$$\begin{aligned} 0 : 5 &= 0 \\ 0 : (-8) &= 0 \end{aligned}$$

При делении нуля на любое ненулевое целое число получим 0.

Деление на нуль не имеет смысла.

$$~~a : 0~~$$

Упражнения и задачи



1. Вычислите и выполните проверку умножением.

а) $-15 : 3$;

б) $21 : (-7)$;

в) $-24 : (-8)$;

г) $0 : (-4)$.

2. Выполните действие:

а) $78 : (-6)$;

б) $-52 : (-13)$;

в) $-84 : 12$;

г) $96 : (-8)$;

д) $57 : (-3)$;

е) $-108 : 4$;

ж) $0 : (-32)$;

з) $-51 : (-1)$;

и) $-121 : 11$.

3. Перечертите и заполните таблицу:

a	-41	0	-64	-17	125	-63
b	41	-37	-16	-1	-5	-3
$a : b$						



4. Найдите значение $-48 : a$, если:

а) $a = -3$;

б) $a = 12$;

в) $a = -8$;

г) $a = 6$.

5. Найдите значение $a : (-3)$, если:

а) $a = -27$;

б) $a = 36$;

в) $a = 0$;

г) $a = -108$.

6. Вычислите:

а) $(23 - 32) : (-3)$;

б) $(-12 + 36) : (-8)$;

в) $(-15 - 29) : 11$;

г) $(-7 - (-21)) : (-7)$.

7. Перечертите и заполните таблицу:

a	17	-13		53		
b	-3		-3		-1	-26
$a \cdot b$		65	-39	-53	1	0



8. В холодильной камере в 8:00 часов температура была 0°C . Но с каждым часом температура понижается на 3°C . Какое время покажут часы, когда температура будет -12°C ?

9. Вычислите:

а) $(-29 \cdot 4) : 4$;

б) $(31 \cdot (-6)) : 31$;

в) $(-7 \cdot 25) : (-7)$;

г) $(-3 \cdot (-10)) : 10$.

10. Перечертите и заполните таблицу. Сделайте вывод.

a	-68	57	-116	0
b	-17	-3	29	-19
$ a : b $				
$ a : b $				



11. Подставьте вместо a , b и c ненулевые целые числа и определите, какие из следующих равенств ложны:

а) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$;

б) $(a \cdot b) : c = (a \cdot c) : b$;

в) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$;

г) $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$.

12. Подставьте вместо \bullet одно из арифметических действий (+; -; ; :), чтобы получить истинное высказывание.

а) $1 \bullet 2 \bullet 3 = -1$;

б) $-1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 = 1$;

в) $-1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 = -1$.



7.1. Степень целого числа с натуральным показателем

Исследуем и узнаем

Умножение ненулевых натуральных чисел можно записать в виде степени:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ множителя}} = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = (+3)^4$$

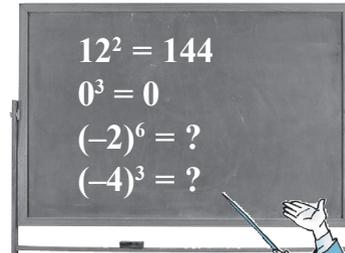
Читаем:

„3 в четвертой степени“, или „3 в четвертой“.

$$11^3 = \underbrace{11 \cdot 11 \cdot 11}_{3 \text{ множителя}}$$

Читаем:

„11 в третьей степени“, или „11 в кубе“.



А умножение равных отрицательных чисел?

$$\underbrace{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}_{6 \text{ множителей}} = (-5)^6$$



Умножение равных множителей – это **действие возведения в степень**:

$(-5)^6$ – это степень с основанием -5 и показателем 6.

Читаем: „ -5 в шестой степени“, или „ -5 в шестой“.

Обобщаем

Степень целого числа с натуральным показателем

Для любого ненулевого целого числа a и натурального числа n :

• $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ для $n > 1$.

• $a^1 = a$.

• $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

• 0^0 – не имеет смысла.

Поясняем

Для $a, n \in \mathbb{N}^*$:

1) $(+a)^n = +a^n = a^n$

$(+10)^4 = 10^4$.

2) $(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n \text{ – четное} \\ -a^n, & \text{если } n \text{ – нечетное} \end{cases}$

$(-5)^2 = 25 = 5^2$.

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8 = -2^3$.

Поясняем, читаем и дополняем

- а) $(-12)^{25}$ → „-12 в 25-й степени“, -12 – основание степени;
или „-12 в 25-й“; 25 – показатель степени.
- б) 2011^6 → „2011 в 6-й степени“, 2011 – основание степени;
или „2011 в 6-й“; 6 – показатель степени.
- в) $(-21)^2$ → „ “, – основание степени;
или „ “; – показатель степени.
- г) $(-100)^3$ → „ “, – основание степени;
или „ “; – показатель степени.

Применяем и объясняем

1. $\underbrace{(+10) \cdot (+10) \cdot (+10) \cdot (+10)}_{4 \text{ множителя}} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ → 10 – основание степени,
4 – показатель степени
2. $88^3 = \underbrace{\quad \cdot \quad \cdot \quad}_{3 \text{ множителя}}$ → – основание степени,
 – показатель степени.
3. $\underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{5 \text{ множителей}} = (-2)^5$ → – основание степени,
 – показатель степени.
4. $\underbrace{(-16)^7 = (-16) \cdot (-16) \cdot (-16) \cdot (-16) \cdot (-16) \cdot (-16) \cdot (-16)}_{7 \text{ множителей}}$ → – основание степени,
 – показатель степени.

Памятка

$\underbrace{(-) \cdot (-) \cdot \dots \cdot (-) \cdot (-)}_{n \text{ четное}} = +$	→	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
$\underbrace{(-) \cdot (-) \cdot \dots \cdot (-) \cdot (-)}_{n \text{ нечетное}} = -$	→	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

7.2. Порядок выполнения действий

Решаем и поясняем

Вычислите: $60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 12^3$.

Решение:

$$\begin{aligned} & 60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 12^3 = \\ & = 60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 1728 = \\ & = 60 - 400 + 2 \cdot 1728 = \\ & = \underline{60 - 400} + 3456 = \\ & = \underline{-340 + 3456} = \\ & = 3116. \end{aligned}$$

Обратите внимание на порядок выполнения действий.

Что знаем? Что узнаем?

- Сложение и вычитание – это действия первого порядка.
- Умножение и деление – это действия второго порядка.
- Возведение в степень – это действие третьего порядка.

$$\rightarrow 30 + 60 - 15 = 75$$

$$\rightarrow 7 \cdot 10 : 14 = 5$$

$$\rightarrow 45 + 2 \cdot 3 - 14^2 = -145$$

Возьмите на заметку

- ◆ В выражении со скобками в первую очередь выполняются действия в скобках.
- ◆ В выражениях без скобок действия одного порядка выполняются в порядке их следования в записи.
- ◆ Если в выражении без скобок встречаются действия разных порядков, то сначала выполняются действия III порядка, затем II порядка и в последнюю очередь – I порядка.

В математическом выражении могут быть:

- квадратные скобки []
- круглые скобки ()
- фигурные скобки { }

• Вычислите:

$$\{18 - [6 - 5 \cdot (20 - 18)]\} - 2010.$$

Сначала выполняем действия в круглых скобках, потом в квадратных скобках, затем в фигурных скобках.

Упражнения и задачи



1. 16 участников слета математиков разделили на 4 группы, по 4 ученика в каждой группе. У каждого ученика было по 4 набора с 4 геометрическими фигурами. Сколько всего геометрических фигур было?

2. а) Для каждой степени определите основание степени и показатель степени:

$$4^5, (-3)^{28}; 0^4; 3^{10}; a^b; x^5; 16^y; 3^{2012}; (-2)^x; 1^{999}; 42^1; 18; (-16)^4; 4^0.$$

б) Есть ли среди них степени с одинаковыми основаниями? А с одинаковыми показателями?

3. Выполните действие:

а) 458^0 ;

б) $(-15)^4$;

в) $(-1)^{2011}$;

г) 1^{2999} ;

д) $(-7)^3$;

е) $(-60)^2$;

ж) 10^4 ;

з) $(-10)^7$.

4. Сравните:

а) 2^5 ● $(-2)^5$;

в) $(-3)^4$ ● $(-9)^2$;



б) 6^2 ● $(-3)^4$;

г) 14^5 ● $(-2)^5$.

5. Выполните действие:

а) $6 \cdot (-3) + 15 - 8^2$;

б) $12 : (-3) - 6 + (-10)^3$;

в) $(-5)^5 \cdot [6 - 2 \cdot (-18)]$;

г) $\{6 - (4 \cdot [(-2) - 10])\} + 8^2$.

6. Вычислите:

а) $144 : (-12) + 7 \cdot (-2)^3 + 2010$;

б) $(-88) : (-4) - 125 : (-5)^2 - 380$;

в) $\{6 - [282 \cdot (-1) - (44 : 11 - 18)]\} - 644$;

г) $25^2 : (-5)^2 - \{42 + 3 \cdot [6 - (3^3 \cdot 5 + 11)]\}$.



7. Народная русская задача:

*Шли семь старцев,
У каждого старца по семь костылей,
На каждом костыле по семь сучков,
На каждом сучке по семь кошелей,
В каждом кошеле по семь пирогов,
В каждом пироге по семь ягод.*

Сколько всего ягод?

8. Расставьте квадратные и круглые скобки так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $24 : (-4) - 68 + (-4)^3 - 20 = -30$. б) $16 \cdot (-2)^3 - 44 - 78 - 30 = -124$.

9. Покажите, что последней цифрой квадрата некоторого числа может быть 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

10. Запишите числа, квадраты которых расположены между 11 и 101.

11. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

а) $4^3 = \blacksquare$; б) $(-9)^6 = \blacksquare$; в) $25^5 = \blacksquare$; г) $(-36)^8 = \blacksquare$.

12. Расположите:

а) в порядке возрастания числа $-41, 12, -7, (-3)^4, -5^3, (-3)^5, 0, 25$;

б) в порядке убывания числа $-1, 2011, -78, (-4)^3, (-2)^6, 2, -3^0, 14$.

13. Не используя знаки математических действий, запишите наибольшее возможное число при помощи:

а) трех цифр 2;

б) трех цифр 3.

14. Составьте числовое выражение, используя скобки так, чтобы при вычислении значения этого выражения действия выполнялись в следующем порядке:

а) сложение, деление, умножение и возведение в степень;

б) возведение в степень, деление, вычитание и опять деление;

в) вычитание, умножение, возведение в степень и опять вычитание.

15. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение:

а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = -1$; в) $x^3 = -8$.

§8 Решение уравнений на множестве \mathbb{Z}

Исследуем и узнаем

1 Учительница попросила Мишу решить уравнение $4x+12=0$ на множестве \mathbb{N} , затем на множестве \mathbb{Z} .

Поможем Мише решить данное уравнение.

Решение:

На множестве \mathbb{N} :

$$4x+12=0$$

$$4x=0-12$$

$$4x=-12$$

$$x=-3 \notin \mathbb{N}$$

Ответ: $S = \emptyset$.

На множестве \mathbb{Z} :

$$4x+12=0$$

$$4x=0-12$$

$$4x=-12$$

$$x=-3 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $4 \cdot (-3) + 12 = 0$ (И)

Ответ: $S = \{-3\}$.

Уравнение
не имеет
решений на \mathbb{N} .

Уравнение
имеет
решения на \mathbb{Z} .



Что знаем? Что узнаем?

Решить уравнение на числовом множестве означает найти решение данного уравнения, которое принадлежит заданному множеству.

Решаем и поясняем

2 Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x - 75 = -25$;

б) $x : (-8) = 9$;

в) $(-625) : x = 25$;

г) $81 \cdot x = -324$;

д) $3x - 81 = 6$;

е) $-2x + 92 = 4$.

Решение:

а) $x - 75 = -25$

$$x = -25 + 75$$

$$x = 50 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $50 - 75 = -25$ (И)

Ответ: $S = \{50\}$.

б) $x : (-8) = 9$

$$x = 9 \cdot (-8)$$

$$x = -72 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $(-72) : (-8) = 9$ (И)

Ответ: $S = \{-72\}$.

в) $(-625) : x = 25$

$$x = (-625) : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square : \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

г) $81 \cdot x = -324$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square \cdot \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

д) $3x - 81 = 6$

$$3x = 6 + \square$$

$$3x = \square$$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square - \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

е) $-2x + 92 = 4$

$$-2x = 4 - \square$$

$$-2x = \square$$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square + \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

Применяем и объясняем

3 Решите уравнение $2x + 5 = -1$ на множестве $A = \{-5, -3, 0, 1\}$.

Решение:

Для $x = -5$ имеем $2 \cdot (-5) + 5 = -1$ — Ложно.

Значит, число -5 не является решением этого уравнения.

Для $x = -3$ имеем $2 \cdot (-3) + 5 = -1$ — Истинно.

Значит, число -3 является решением этого уравнения.

Для $x = 0$ имеем $2 \cdot \square + 5 = -1$ — \square .

Значит, число 0 \square решение этого уравнения.

Для $x = 1$ имеем $2 \cdot \square + 5 = -1$ — \square .

Значит, число 1 \square решение этого уравнения.

Ответ: $S = \{\square\}$.

Упражнения и задачи



1. Определите, какой из элементов множества $A = \{-5, -2, -1, 0, 4, 10\}$ является решением уравнения:

а) $-x - 4 = 1$;

б) $2x - 6 = -6$;

в) $(-200) : x = -20$;

г) $x \cdot (-15) = 30$;

д) $1 - 3x = x + 1$;

е) $10 + 2x = 0$.

2. Решите задачу с помощью уравнения. Сколько было марок у Иры, если известно, что она отдала Марии 15 марок и у нее осталось 44?

3. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x - 2 = -5$;

б) $y - 25 = 60$;

в) $z - 100 = -2012$.

4. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x + 70 = -100$; б) $y + 8 = 2000$; в) $z + 29 = -718$.

5. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3 \cdot x = 81$; б) $(-11) \cdot y = 121$; в) $(-35) \cdot z = -210$.

6. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x : (-8) = -20$; б) $y : 38 = 10$; в) $z : (-19) = -18$.

7. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3x + 72 = 0$; б) $-8y + 800 = 0$; в) $22z + 440 = 0$.



8. Впишите такое целое число, чтобы полученное уравнение имело указанное множество решений:

а) $\blacksquare x - 70 = 0$; $S = \{5\}$; б) $(-5)y - \blacksquare = 8$; $S = \{0\}$;

в) $\blacksquare : z = 84$; $S = \{-3\}$; г) $x : \blacksquare = 25$; $S = \{-100\}$.

9. Решите:

1) на множестве \mathbb{N} уравнение:

2) на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3x - 4 = 6 - x$;

б) $1 - 8x = x - 5$;

в) $3 + y = -2y - 60$.

10. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $7x - 12 = |(-4)^2|$;

б) $5 : z = |-5^0|$;

в) $y : (-12) = |(-6)^3|$.



11. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $(x - 12) + (16 - 2x) = 14$;

б) $(x + 25) - (x - 12) = 13$;

в) $2x - 6 = 14 - 2x$;

г) $(44 - x) + (x - 35) = 0$.

12. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $|x| = 18$;

б) $|x| = -2$;

в) $|2x - 3| = 7$;

г) $|5 - 8x| = 35$.

13. Составьте задачу, которую можно решить при помощи уравнения:

а) $3 - 5x = -7$;

б) $-10x + 4 = -96$.

Задания для осмысления

1. Объясните включение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
2. Приведите примеры положительных и отрицательных чисел из разных областей знания: физики, биологии, географии, истории, литературы, экономики и т. д.
3. Что такое числовая ось?
4. Какое число противоположно числу:
 - а) -2011 ;
 - б) 2012 ;
 - в) 0 ?
5. Что называют модулем числа?
6. Какое расстояние выражает модуль целого числа?
7. Какие свойства модуля вы знаете?
8. В каких случаях мы используем модуль числа?
9. Как сравнивают целые числа?
10. Истинно ли высказывание:
Любое натуральное число больше любого целого числа?
11. Дополните, чтобы получить истинное высказывание:
Любое натуральное число больше
12. Какие случаи возможны при сложении целых чисел? Как мы поступаем в каждом из них?
13. Как вычитают целые числа?
14. *Истинно* или *Ложно*?
 - а) $-7 - 5 = -2$;
 - б) $-120 - (-18) = -138$;
 - в) $82 - (-12) = 94$.
15. В чем заключаются правила знаков? В каких случаях мы их применяем?
16. Сформулируйте правила знаков.
17. Как перемножаются целые числа? Как возвести целое число в степень с натуральным показателем?

18. Как делятся целые числа?
19. Действительно ли при делении двух целых чисел в частном всегда получается целое число? Приведите примеры.
20. Какие свойства действий с целыми числами вы знаете?
21. Каков порядок выполнения действий и что означают скобки при вычислениях с целыми числами?
22. Что значит решить уравнение на множестве \mathbb{Z} ?
23. Приведите по примеру для каждого из видов изученных уравнений.
24. Составьте по задаче, которые можно решить при помощи изученных уравнений.
25. Приведите пример уравнения, которое не имеет решения на множестве \mathbb{Z} .

Упражнения и задачи на повторение



1. Отметьте на числовой оси точки: $A(-2)$; $B(-7)$; $C(5)$; $D(2)$.
2. Постройте числовую ось. Отметьте на ней точку $M(-2)$ и точки, расположенные на расстоянии 7 единиц от точки M . Запишите координаты этих точек.
3. Расположите числа в порядке убывания: -9 ; 3 ; 5 ; -4 ; 0 ; -10 ; 12 .
4. Вычислите наиболее рациональным способом:
 - а) $-9 + (-13) + 17 + (-6) + 11$;
 - б) $14 + (-8) + (-25) + 12 + 7$;
 - в) $43 - 60 + 12 + 39 - 21$.
5. Найдите сумму всех целых чисел, расположенных на числовой оси между числами -5 и 7 .
6. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x + 7 = 3$;	б) $6 - x = 15$;	в) $-2 - x = -5$;
г) $16 - x = -4$;	д) $11 - x = 14$;	е) $-x + 4 = -9$.
7. Вычислите:

а) $(7 - 20) \cdot (-3 + 5)$;	б) $(-5 - 7) : (-6 + 2)$;	в) $-21 : 7 + [42 : (-6)]$.
--------------------------------	----------------------------	------------------------------

8. Заполните таблицу:

a	4	-8	-1	5	-10
$-a-3$					
$-5+a$					
$a \cdot (-3)$					
$-5 \cdot a$					
$-a \cdot 6$					



9. Истинно или Ложно?

Числа a и b являются целыми.

- а) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.
- б) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.
- в) Если $a = -b$, то $|a| = |b|$.
- г) Если $|a| = |b|$, то $a = b$ или $a = -b$.



10. Впишите такие числа, чтобы каждое число, начиная с третьего, равнялось сумме двух предшествующих ему чисел.

							2	0		
--	--	--	--	--	--	--	---	---	--	--

11. Вычислите:

- а) $-7 + |-3| - (-4) - 5$;
- б) $4 + (-6) - |-4| - 3$;
- в) $-2 - |-5| + (-6) - (-2)$.

12. Истинно или Ложно?

Если a – целое неотрицательное число, то:

- а) $2 + a > 2$;
- б) $-3 + a > 0$;
- в) $a + a < a$;
- г) $a + a > 0$.



13. Вычислите:

- а) $-52 : (19 - 32) - 2 \cdot [18 + 44 : (-11)]$;
- б) $[25 - 24 : (11 - 14)] \cdot [-9 + 8 : (27 - 35)]$.

14. Вычислите: $\frac{98 \cdot (-15)}{-14 \cdot (20 - 4 \cdot 10)}$.



15. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

- а) $|x| + 3 = 8$;
- б) $|x| - 3 = 4$;
- в) $|x| - 6 = -8$;
- г) $15 - |x| = 9$;
- д) $|x + 3| = 1$;
- е) $|x - 7| = 10$.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. Дано множество:
 $M = \{-6, 3, -2, -3, 5\}$.
 - а) Найдите наибольшее число, принадлежащее множеству M . **1**
 - б) Найдите элемент множества M , имеющий наименьший модуль. **1**
 - в) Найдите элементы множества M , имеющие равные модули. **1**
 - г) Расположите в порядке возрастания числа:
 $(-6)^2, 3^4, (-2)^5, 5^2, (-3)^3$. **6**
2. Даны точки $A(-4), B(6), C(-1), D(3)$.
 - а) Расположите точки A, B, C, D на числовой оси. **4**
 - б) Запишите все целые числа, расположенные на оси между числами -1 и 3 . **3**
 - в) Какую координату имеет точка K , если K – середина отрезка AB ? **3**
3. Выполните действия:
 - а) $-75 + 39$; **2**
 - б) $-53 - 27$; **2**
 - в) $-15 \cdot 61$; **2**
 - г) $-52 : (-4)$. **2**
4. В результате засухи уровень воды в озере понизился на 16 см. После того, как прошел дождь, уровень повысился на 9 см и стал составлять 658 см. Каков был уровень воды в озере до засухи?
 - а) Решите задачу при помощи уравнения. **4**
 - б) Решите задачу по действиям. **4**

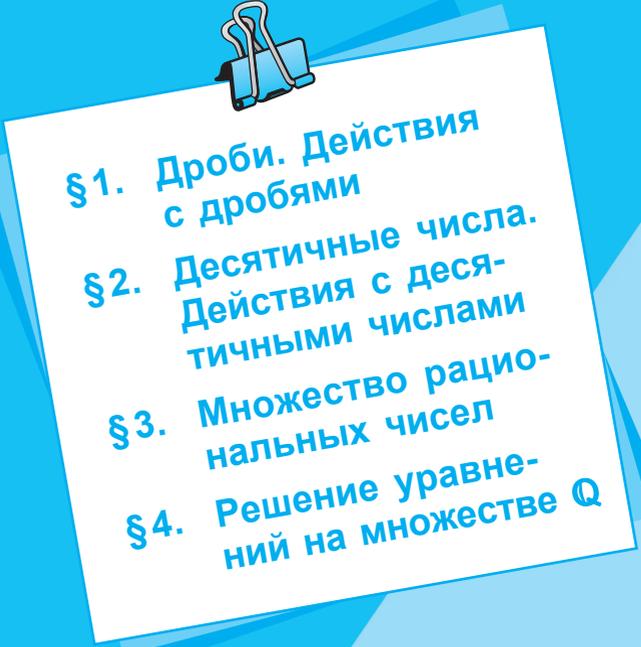
II вариант

1. Дано множество:
 $A = \{-4, -1, 2, -5, 4\}$.
 - а) Найдите наименьшее число, принадлежащее множеству A .
 - б) Найдите элемент множества A , имеющий наибольший модуль.
 - в) Найдите элементы множества A , имеющие равные модули.
 - г) Расположите в порядке убывания числа:
 $(-5)^2, 4^2, (-4)^3, 2^5, (-1)^8$.
2. Даны точки $M(-6), N(1), L(-3), P(4)$.
 - а) Расположите точки M, N, L, P на числовой оси.
 - б) Запишите все целые числа, расположенные на оси между числами -3 и 1 .
 - в) Какую координату имеет точка D , если D – середина отрезка MP ?
3. Выполните действия:
 - а) $29 + (-18)$;
 - б) $-34 - 76$;
 - в) $-14 \cdot (-83)$;
 - г) $-72 : 18$.
4. В ночь на 10 февраля температура воздуха упала на 12°C , а за день повысилась на 4°C и стала составлять 7°C . Какой была температура 9 февраля вечером?
 - а) Решите задачу при помощи уравнения.
 - б) Решите задачу по действиям.

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	35–34	33–32	31–27	26–22	21–17	16–12	11–9	8–6	5–3	2–0

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- 
- §1. Дроби. Действия с дробями
 - §2. Десятичные числа. Действия с десятичными числами
 - §3. Множество рациональных чисел
 - §4. Решение уравнений на множестве \mathbb{Q}

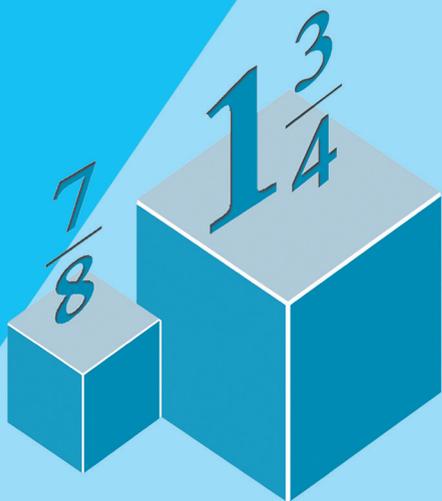
1

2



4

5



§1 Дроби. Действия с дробями

1.1. Понятие дроби. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Что знаем? Что узнаем?

1 Аня отметила в календаре выходные дни и дни каникул в ноябре и выяснила, что $\frac{2}{5}$ дней в ноябре не надо посещать школу.

Правы ли Аня?

Решение:

В ноябре 30 дней. Из них всего 12 дней каникул и выходных, что составляет $\frac{12}{30}$ месяца.



Числитель дроби → $\frac{12}{30} \stackrel{(6)}{=} \frac{12 : \boxed{6}}{30 : \boxed{6}} = \frac{2}{5}$

Знаменатель дроби →

$6 = (12; 30)$

Знаменатель и числитель дроби можно умножить или разделить на одно и то же ненулевое натуральное число.

Ответ: Аня была права.

Применяем и объясняем

2 Применяя основное свойство дроби или сокращение дроби, заполните пропуски так, чтобы получить равные дроби.

$$\frac{18}{\square} \quad \frac{\square}{9} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{2}{\square} \quad \frac{\square}{6} \quad \frac{5}{15} \rightarrow \frac{6}{18} \stackrel{(6)}{=} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$



Вспомним

- Две дроби называются **равными**, если они представляют одну и ту же часть от целого. Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны, если $a \cdot d = b \cdot c$. Обозначаем: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- **Основное свойство дроби.** Числитель и знаменатель дроби можно умножить на одно и то же ненулевое натуральное число.

- **Сократить дробь** – значит, разделить числитель и знаменатель дроби на одно и то же ненулевое натуральное число.
- Применяв основное свойство дроби или сокращая дробь, получим дробь, равную исходной.

Применяем и объясняем

$$\frac{6}{18} = \frac{5}{15} \text{ – И, так как } 6 \cdot 15 = 18 \cdot 5 \text{ – И}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \text{ – Л, так как } 2 \cdot 9 \neq \square \cdot \square.$$

Вспомним и повторим

3 Выделите целую часть из дроби $\frac{11}{8}$.

Решение:



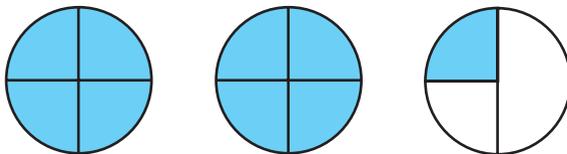
$$\frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$$

$$\frac{11}{8} = 11 : 8 = 1 \text{ (ост. 3)}$$

Число $1\frac{3}{8}$ содержит целую часть, равную 1, и дробную часть $\frac{3}{8}$.

4 Запишите в виде неправильной дроби $2\frac{1}{4}$.

Решение:



$$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

Возьмите на заметку

Чтобы выделить целую часть из дроби, надо разделить числитель дроби на ее знаменатель.

- 1 Частное будет целой частью.
- 2 Остаток (если он ненулевой) дает новый числитель.
- 3 Знаменатель остается без изменений.

Возьмите на заметку

Чтобы представить число с целой и дробной частью в виде неправильной дроби, надо:

- 1 умножить его целую часть на знаменатель дробной части и к полученному произведению прибавить числитель дробной части;
- 2 записать дробь, числитель которой равен числу, полученному в пункте 1, а знаменатель дробной части оставить без изменений.

1.2. Сложение дробей

Что знаем? Что узнаем?

1 Мамонтенок на корабле преодолел расстояние от Антарктиды до Африки за 3 дня. В первый день было пройдено $\frac{3}{12}$ пути, во второй день — $\frac{5}{12}$ пути. Какая часть пути была преодолена мамонтенком за эти два дня?

Решение:

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3+5}{12} = \frac{8}{12} \stackrel{(4)}{=} \frac{2}{3} \text{ (пути).}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$ пути.



Вспомним

Чтобы сложить две дроби с одинаковыми знаменателями, складывают только числители, а знаменатель оставляют тем же: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Замечаем и делаем выводы

2 Мама купила на рынке пчелиный мед двух видов: липовый в банке емкостью $\frac{1}{2}$ литра и майский в банке емкостью $\frac{3}{4}$ литра.



Сколько литров меда купила мама?

Решение:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \text{ (литра).}$$

Ответ: $1\frac{1}{4}$ литра.

Возьмите на заметку

Чтобы сложить две дроби с разными знаменателями, надо:

- 1 привести эти дроби к общему знаменателю;
- 2 выполнить сложение получившихся дробей с одинаковыми знаменателями.

а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$;

15 = [3; 5]

б) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$.

12 = [4; 3]

Замечаем и делаем выводы

3 На вершине скалы, расположенной на расстоянии $43\frac{2}{3}$ м над уровнем моря, построили маяк. На высоте $20\frac{1}{2}$ м от основания маяка установили фонарь. На каком расстоянии от уровня моря находится фонарь?



Решение:

$$43\frac{2}{3} + 20\frac{1}{2} = 43 + \frac{2}{3} + 20 + \frac{1}{2} = (43 + 20) + \left(\overset{2)}{\frac{2}{3}} + \overset{3)}{\frac{1}{2}} \right) =$$

$6 = [3, 2]$

$$= 63 + \frac{7}{6} = 63 + 1\frac{1}{6} = (63 + 1) + \frac{1}{6} = 64 + \frac{1}{6} = 64\frac{1}{6}.$$

↓
неправильная дробь

Ответ: $64\frac{1}{6}$ м.

Применяем и объясняем

$$4\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4} = 4\overset{2)}{\frac{5}{6}} + 2\overset{3)}{\frac{3}{4}} = 4\frac{10}{12} + 2\frac{\square}{12} = 6\frac{\square}{12} = \square\frac{\square}{\square}$$

$12 = [6, 4]$

Замечание. Число, состоящее из целой и дробной части, еще называют смешанным числом.

Возьмите на заметку

Чтобы сложить два смешанных числа (то есть числа, состоящие из целой и дробной части), надо:

- ① привести дробные части этих чисел к общему знаменателю;
- ② отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно дробных частей;
- ③ если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, то надо выделить целую часть из этой дроби и прибавить ее к целой части, полученной в шаге ②.

Из истории

В Древнем Египте все дроби записывали в виде суммы дробей вида $\frac{1}{n}$.

Например, вместо $\frac{8}{15}$ записывали $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. Исключение делалось только для дроби $\frac{2}{3}$.

Иногда такая запись была удобна. В папирусе Ахмеса (египетского фараона, 1562–1537 до н.э.) есть такая задача: „Разделить поровну 7 хлебов между восемью людьми“.

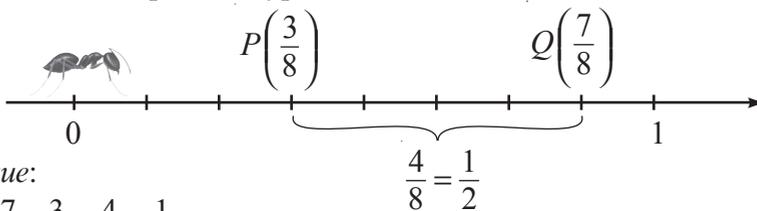
Если каждый хлеб разделить на 8 частей, то надо будет сделать 49 порезов. Египтяне решили эту задачу более рационально: дробь $\frac{7}{8}$ записали в виде суммы $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Значит, каждому человеку надо дать половину хлеба, четверть хлеба и восьмую часть хлеба; поэтому четыре хлеба режем пополам, два хлеба на 4 части, а один хлеб на 8 равных частей. Затем каждый человек получает соответствующие части.



1.3. Вычитание дробей

Что знаем? Что узнаем?

1 Муравей по числовой оси переместился из точки $P\left(\frac{3}{8}\right)$ в точку $Q\left(\frac{7}{8}\right)$. Какое расстояние прошел муравей?



Решение:

$$PQ = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Возьмите на заметку

Чтобы вычесть две дроби с одинаковыми знаменателями, из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби, а знаменатель оставляют тем же:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Замечаем и делаем выводы

2 Из пол-литрового пакета кефира в чашку налили $\frac{1}{5}$ литра.

Сколько литров кефира осталось в пакете?

Решение:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10} \text{ (л)}$$

$$[2; 5] = 10$$

Ответ: $\frac{3}{10}$ л.



Возьмите на заметку

Чтобы **вычесть две дроби с разными знаменателями**, надо:

- 1 привести эти дроби к общему знаменателю;
- 2 выполнить вычитание получившихся дробей с одинаковыми знаменателями.

3 Дональд Даг весит $27\frac{1}{5}$ фунта, а его друг Мики Маус легче на $3\frac{7}{10}$ фунта. Сколько весит Мики Маус?

Решение:

$$27\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10} = 27\overset{2 < 7}{\frac{2}{10}} - 3\frac{7}{10} = 26\frac{12}{10} - 3\frac{7}{10} =$$

$$[5; 10] = 10$$

неправильная дробь

$$= (26 - 3) + \left(\frac{12}{10} - \frac{7}{10}\right) = 23\frac{5}{10} = 23\frac{1}{2} \text{ (фунта).}$$

Ответ: $23\frac{1}{2}$ (фунта).



1 фунт \approx 0,5 кг

Возьмите на заметку

Чтобы выполнить **вычитание двух смешанных чисел**, надо:

- 1 привести дробные части этих чисел к общему знаменателю. Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то надо превратить ее в неправильную дробь, уменьшив на единицу ее целую часть;
- 2 отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных частей.

Решаем и поясняем

$$5\frac{1}{6} - 2\frac{5}{9} = 5\overset{3)}{1}\frac{1}{6} - 2\overset{2)}{5}\frac{5}{9} = 5\frac{3}{18} - 2\frac{10}{18} = 4\frac{\boxed{18}}{18} - 2\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$$

$[6; 9] = 18$

↓
неправильная дробь

1.4. Умножение дробей

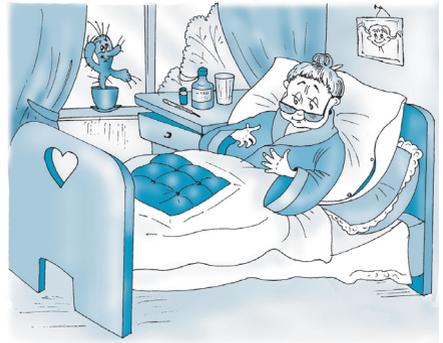
Замечаем и делаем выводы

1 У Лены заболела бабушка. Врач прописал ей таблетки, которые надо принимать 5 дней по $\frac{1}{2}$ таблетки 3 раза в день. В пластинке 8 таблеток. Сколько пластинок надо купить Лене для своей бабушки?

Решение:

В день бабушка должна принимать по:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ (таблеток).}$$



$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ (таблеток)}$$

Возьмите на заметку

Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо числитель дроби умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \text{ где } a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*.$$

За 5 дней бабушка должна будет принять:

$$1\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ (таблеток).}$$

Ответ: Лена должна будет купить одну пластинку таблеток.

Возьмите на заметку

Чтобы умножить смешанное число на натуральное число, надо записать смешанное число в виде неправильной дроби, а затем воспользоваться правилом умножения дроби на число.

РАБОТА В ПАРАХ!



- Вычислите
- Выполните умножение, переводя десятичные числа в дроби
- Что вы заметили?

$$0,3 \cdot 0,7 = \square$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{\square}{\square}$$

Решаем и замечаем

2 Длина прямоугольника $DFMN$ равна $a = \frac{3}{5}$ дм, а ширина $b = \frac{1}{2}$ дм.

Чему равна площадь прямоугольника?

Решение:

$$S = a \cdot b$$

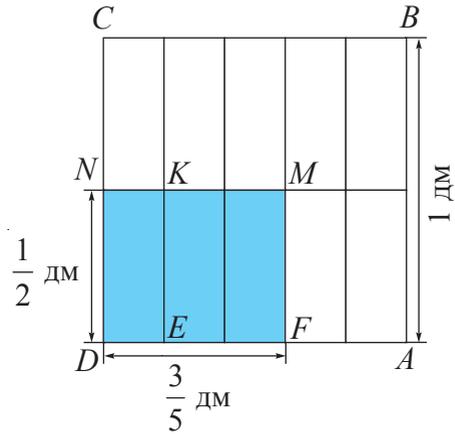
$$S_{DFMN} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ (дм}^2\text{)}$$

$ABCD$ – квадрат

$$S_{ABCD} = 1 \text{ дм}^2$$

$$S_{DEKN} = \frac{1}{10} \text{ дм}^2$$

$$S_{DFMN} = \frac{3}{10} \text{ дм}^2$$



Значит, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$ (дм²).

Ответ: $S = \frac{3}{10}$ дм².

Возьмите на заметку

Чтобы умножить дробь на дробь, надо:

- 1 найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- 2 первое произведение записать в числитель, а второе в знаменатель.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ для любых } a, c \in \mathbb{N}; b, d \in \mathbb{N}^*.$$

1.5. Взаимно обратные числа (дроби)

Исследуем и узнаем

РАБОТА В ПАРАХ!



- Вычислите: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \square$; $\frac{15}{8} \cdot \frac{8}{15} = \square$; $3 \cdot \frac{1}{3} = \square$.
- $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \square$; $\frac{1}{2} \cdot 2 = \square$; $1\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \square$.

- Что вы заметили?

Возьмите на заметку

Два числа (две дроби) a и b называются **взаимно обратными**, если их произведение равно 1, то есть $a \cdot b = 1$. В этом случае число a называется **обратным** числу b , а b – **обратным** числу a .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \text{ для любых } a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Замечание. Дробью, обратной дроби $\frac{a}{b}$, будет дробь $\frac{b}{a}$. Числом, обратным ненулевому натуральному числу a , будет число $\frac{1}{a}$, так как $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Решаем и поясняем

Дополните высказывание

Числом, обратным числу

- $\frac{5}{9}$ будет число $\frac{9}{\square}$
- $3 = \frac{3}{1}$ будет число $\frac{\square}{3}$
- $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ будет число $\frac{\square}{\square}$
- $1,6 = \frac{16}{10}$ будет число $\frac{\square}{\square}$

Возьмите на заметку

Чтобы получить дробь, обратную данной, надо поменять местами числитель и знаменатель заданной дроби (то есть перевернуть дробь).



Найдите:

- число, у которого нет взаимно обратного числа;
- число, которое взаимно обратно самому себе.



Кто быстрее найдет как можно больше пар взаимно обратных чисел из элементов множества M ?

$$M = \left\{ 0,1; 0,2; 0,3; 0; \frac{7}{8}; \frac{5}{12}; \frac{12}{16}; 1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{5}; 1\frac{1}{7}; 2,5; 3\frac{1}{3}; 5 \right\}$$

1.6. Деление дробей

Исследуем и узнаем

РАБОТА В ПАРАХ!



• Найдите число x , которое является решением уравнения:

а) $\frac{1}{2} \cdot x = 1;$

б) $x \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$

в) $\frac{3}{5} \cdot x = \frac{3}{10};$

г) $x \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$

• Рассмотрите решение уравнения г).

$$x \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

$$x = \frac{10}{21} : \frac{5}{7}$$

$$x \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \quad | \cdot \frac{7}{5}$$

$$x \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5}$$

$$x = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5}; \quad x = \frac{10 \cdot 7}{21 \cdot 5}; \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{21} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5}$$

Обе части уравнения можно умножить на одно и то же ненулевое число.

Меняем деление на умножение!

Возьмите на заметку

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ для любых } a \in \mathbb{N}, b, c, d \in \mathbb{N}^*.$$

Применяем

Мама сварила вишневое варенье, взяв $4\frac{1}{5}$ кг сахара на $3\frac{1}{2}$ кг вишни. Варенье получилось очень вкусным, и мама захотела узнать, сколько килограммов сахара приходится на 1 кг вишни. Как ей поступить?



Применяем и объясняем

2 Илья потратил $\frac{3}{4}$ денег со счета своего мобильного телефона.

$\frac{2}{3}$ из них были потрачены на передачу СМС-сообщений. Какую часть денег со счета Илья потратил на передачу СМС-сообщений?



Решение:

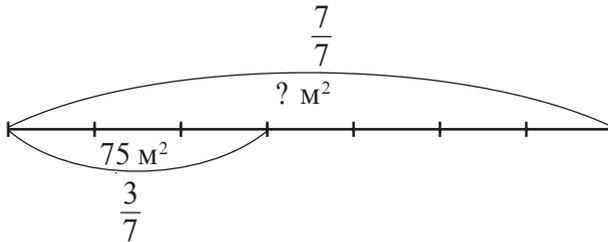
$$\frac{2}{3} \text{ от } \frac{3}{4} \text{ равно } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{4}.$$

Ответ: $\frac{2}{4}$ денег со счета мобильного телефона.

1.8. Нахождение числа по его дроби

Исследуем и узнаем

1 В первый день рабочий покрасил 75 м^2 поверхности стены, что составляет $\frac{3}{7}$ от всей площади, которую нужно покрасить. Чему равна площадь всей поверхности стены?



$$75 : 3 = 25 \text{ (м}^2\text{)} - \text{составляет одна часть;}$$

$$25 \cdot 7 = 175 \text{ (м}^2\text{)} - \text{вся поверхность.}$$

Решение задачи можно записать следующим образом:

$$(75 : 3) \cdot 7 = 175 \text{ (м}^2\text{)} \text{ или } 75 : \frac{3}{7} = 175 \text{ (м}^2\text{)}.$$

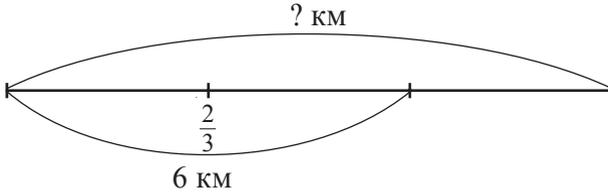
Возьмите на заметку

Чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

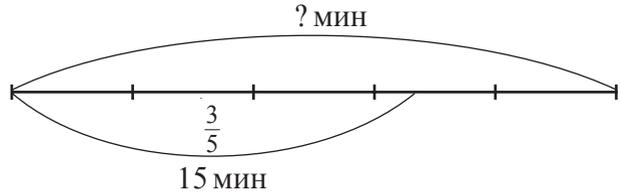


Составьте и решите задачу, используя данные рисунка.

2



3



Упражнения и задачи



- Нарисуйте квадрат со стороной 4 см. Закрасьте $\frac{3}{4}$ квадрата.
- Выберите дроби, равные дроби $\frac{4}{5}$:
 $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{16}{40}$.
- 
 Истинно или Ложно?
 а) $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$; б) $\frac{14}{24} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{7}{9} = \frac{56}{72}$; г) $\frac{3}{4} = \frac{9}{6}$.
- Сократите дробь до несократимой дроби:
 а) $\frac{25}{75}$; б) $\frac{12}{15}$; в) $\frac{33}{44}$; г) $\frac{100}{250}$; д) $\frac{45}{60}$; е) $\frac{49}{63}$.
- Выделите целую часть из дроби:
 а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{28}{11}$; в) $\frac{49}{3}$; г) $\frac{25}{7}$; д) $\frac{44}{19}$; е) $\frac{131}{42}$.
- Запишите в виде неправильной дроби смешанное число:
 а) $3\frac{2}{5}$; б) $4\frac{3}{7}$; в) $7\frac{3}{4}$; г) $2\frac{5}{9}$; д) $10\frac{3}{8}$.
- Запишите в виде дроби десятичное число:
 а) 0,5; б) 0,3; в) 1,52; г) 1,03; д) 2,15; е) 7,125.

8. Запишите дробь со знаменателем 24, равную данной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{3}{8}$; г) $\frac{7}{12}$; д) $\frac{10}{48}$.

9. Вычислите и упростите полученный результат:

а) $\frac{3}{14} + \frac{5}{14}$; б) $\frac{7}{15} + \frac{2}{15}$; в) $\frac{5}{18} + \frac{4}{18}$; г) $\frac{13}{54} + \frac{5}{54}$.

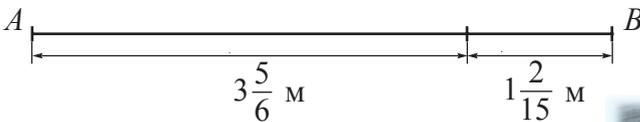
10. Вычислите:

а) $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6} + \frac{1}{24}$; г) $\frac{5}{9} + \frac{2}{3}$;
д) $\frac{4}{5} + \frac{8}{15}$; е) $\frac{1}{4} + \frac{5}{7}$; ж) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; з) $\frac{2}{7} + \frac{3}{8}$;
и) $\frac{7}{25} + \frac{4}{10}$; к) $\frac{13}{18} + \frac{5}{12}$; л) $\frac{7}{18} + \frac{2}{15}$; м) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$.

11. Выполните действие:

а) $9\frac{3}{4} + 3\frac{1}{6}$; б) $7\frac{8}{15} + 8\frac{17}{20}$; в) $11\frac{7}{12} + 6\frac{11}{18}$; г) $7\frac{3}{8} + 11\frac{7}{12}$;
д) $3\frac{5}{9} + 1\frac{7}{12}$; е) $3\frac{1}{7} + \frac{4}{5}$; ж) $3\frac{1}{14} + 2\frac{4}{21}$.

12. Используя данные рисунка, найдите длину отрезка AB :

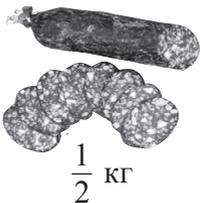


13. Скорость яхты $23\frac{3}{8}$ км/ч, а скорость течения реки $2\frac{1}{2}$ км/ч. С какой скоростью движется яхта по течению?



14. После того как из ведра взяли $2\frac{3}{4}$ литра воды, в нем осталось $3\frac{2}{5}$ литра. Сколько литров воды было в ведре первоначально?

15. Дима купил $\frac{1}{2}$ кг колбасы, $\frac{1}{4}$ кг сыра и $1\frac{3}{5}$ кг овощей. Сколько всего килограммов продуктов купил Дима?



16. Вычислите и упростите полученный результат:

а) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$; б) $\frac{9}{16} - \frac{1}{16}$; в) $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$; г) $\frac{11}{5} - \frac{6}{5}$.

17. Вычислите:

а) $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$; б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$; в) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; г) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; д) $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$;
е) $\frac{3}{5} - \frac{3}{7}$; ж) $\frac{2}{9} - \frac{1}{6}$; з) $\frac{5}{12} - \frac{2}{9}$; и) $\frac{7}{20} - \frac{2}{15}$; к) $\frac{5}{6} - \frac{1}{8}$.

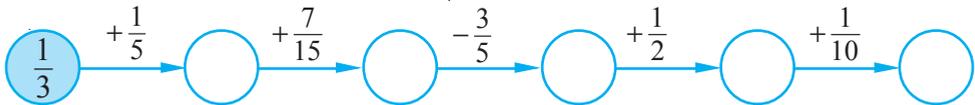
18. Выполните действие:

а) $8\frac{3}{7} - 2\frac{2}{5}$; б) $3\frac{11}{15} - 1\frac{7}{10}$; в) $1 - \frac{5}{12}$; г) $8 - \frac{6}{11}$;
д) $6 - 1\frac{2}{9}$; е) $2\frac{1}{18} - \frac{1}{9}$; ж) $6\frac{3}{8} - 2\frac{3}{4}$; з) $4\frac{2}{15} - 3\frac{5}{12}$.

19. Масса кирпича до обжига составляет $4\frac{1}{2}$ кг. После обжига в печи его масса уменьшилась на $1\frac{5}{6}$ кг. Какова масса кирпича после обжига?

20. Сережа, Даша и Никита собрали $32\frac{5}{18}$ кг винограда. Сережа и Никита вместе собрали $24\frac{5}{6}$ кг. Сколько килограммов винограда собрала Даша?

21. Восстановите цепочку действий:



22. Миша прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал $\frac{2}{7}$ книги, во второй день — $\frac{1}{3}$ книги, а в третий день — оставшуюся часть. Какую часть книги Миша прочитал в третий день?

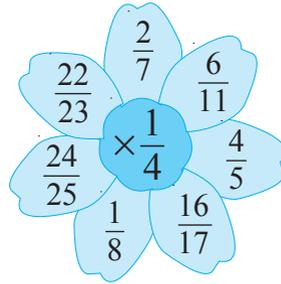
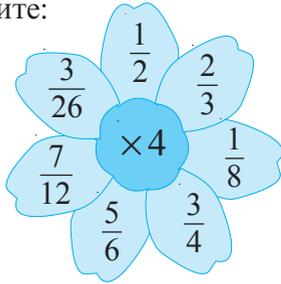
23. Вычислите:

а) $\frac{5}{21} - \frac{3}{14} + \frac{2}{7}$; б) $\frac{9}{20} + \frac{7}{10} - \frac{2}{15}$; в) $\frac{11}{20} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$.

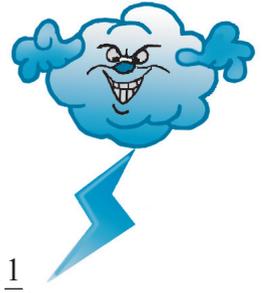
24. Выполните действие:

а) $\frac{3}{5} \cdot 7$; б) $\frac{2}{7} \cdot 6$; в) $9 \cdot \frac{2}{15}$; г) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$; д) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10}$;
е) $\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{4}$; ж) $\frac{5}{18} \cdot \frac{7}{10}$; з) $\frac{3}{20} \cdot \frac{5}{6}$; и) $\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{8}$; к) $\frac{16}{25} \cdot \frac{35}{48}$.

25. Вычислите:



26. Скорость звука – $\frac{1}{3}$ км/с. На каком расстоянии от грозы находился Миша, если он услышал раскаты грома через 18 секунд после вспышки молнии?



27. Выполните действие:

а) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}$; б) $1\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8}$; г) $4\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{3}$.

28. Найдите значение выражения:

а) $2\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}$; б) $3\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{7}$.



29. Ракета, скорость которой 8 км/с, становится искусственным спутником Земли. Если скорость ракеты увеличить в $2\frac{7}{8}$ раза, то она навсегда покинет Солнечную систему. Найдите эту скорость.

30. Длина прямоугольника равна $3\frac{1}{5}$ м, а ширина в $1\frac{1}{4}$ раза больше длины. Чему равна площадь прямоугольника?

31. Заполните таблицу:

m	2	$1\frac{1}{5}$	$\frac{5}{8}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{9}$
n	$\frac{3}{4}$	10	$\frac{16}{35}$	0,3	$1\frac{4}{5}$
$m \cdot n$					



32. Проверьте, являются ли числа взаимно обратными:

а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$; б) $\frac{25}{9}$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{21}$ и 7; г) $1\frac{2}{3}$ и 0,6.

33. Запишите число, обратное числу:

- а) $\frac{3}{5}$; б) 11; в) $7\frac{2}{3}$; г) 0,12; д) $3\frac{3}{5}$; е) 3,6.

34. Выполните действие:

- а) $\frac{6}{11} : \frac{9}{22}$; б) $\frac{12}{13} : \frac{4}{39}$; в) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$; г) $\frac{3}{4} : \frac{21}{40}$; д) $56 : \frac{8}{11}$;
е) $1\frac{5}{13} : 6$; ж) $\frac{7}{9} : 2\frac{1}{3}$; з) $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$; и) $9\frac{4}{5} : 4\frac{2}{3}$; к) $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9}$.

35. Периметр квадрата равен $\frac{10}{13}$ м. Чему равна сторона квадрата?

36. Найдите скорость поезда, если $50\frac{2}{5}$ км он прошел за $\frac{8}{15}$ часа.

37. Том весит $7\frac{1}{5}$ кг, а Джери – в 12 раз легче.

Сколько они весят вместе?



38. Найдите:

- а) $\frac{2}{3}$ от 27; б) $\frac{1}{4}$ от 40; в) $\frac{3}{8}$ от 16; г) $\frac{5}{6}$ от 42;
д) $\frac{3}{5}$ от 12; е) $\frac{2}{7}$ от 20; ж) $\frac{1}{3}$ от $\frac{3}{2}$; з) $\frac{3}{4}$ от $\frac{8}{9}$.

39. Автомобиль должен проехать 240 км. Какое расстояние проехал автомобиль, если оно составляет $\frac{2}{3}$ пути?

40. Масса муравья составляет $\frac{1}{10}$ от массы груза, который он может нести. Какова масса муравья, если он может нести $\frac{7}{250}$ г груза?



41. Размер обуви составляет $\frac{3}{2}$ длины стопы. Какой размер обуви носит Миша, если длина его стопы равна 24 см?

42. В автопробеге участвовали 48 автомобилей. $\frac{5}{8}$ из них дошли до финиша. Сколько автомобилей сошли с дистанции?

43. Треть расстояния между двумя населенными пунктами составляет 7 км. Чему равно расстояние между этими пунктами?

44. Найдите число:

- а) $\frac{7}{10}$ которого равны 21; б) $\frac{3}{4}$ которого равны 12;
в) $\frac{8}{9}$ которого равны 24; г) $\frac{3}{2}$ которого равны 15.

45. За булочку Света заплатила $4\frac{1}{2}$ лей. Сколько денег было у Светы, если за булочку она заплатила $\frac{1}{4}$ всех денег?

46. Только 12 учеников 6 „А“ класса занимаются спортом, что составляет $\frac{3}{7}$ учеников класса. Сколько всего учеников в этом классе?



47. Впишите числа так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\frac{\square}{\square}^{(4)} + \frac{\square}{\square}^{(3)} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}$;

б) $\frac{\square}{\square}^{(3)} + \frac{\square}{\square}^{(2)} = \frac{15+14}{36} = \frac{29}{36}$;

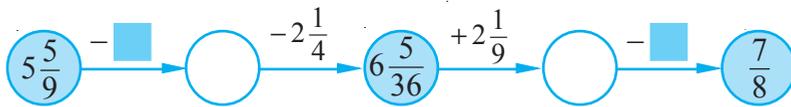
в) $\frac{\square}{\square}^{(10)} - \frac{\square}{\square}^{(6)} = \frac{10-6}{30} = \frac{2}{15}$;

г) $\frac{\square}{\square}^{(3)} - \frac{\square}{\square}^{(2)} = \frac{15-14}{18} = \frac{1}{18}$.

48. Вычислите:

а) $\frac{9}{50} + \frac{2}{75} - \frac{3}{100}$; б) $\frac{8}{21} + \frac{11}{24} - \frac{5}{27}$; в) $2\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - 1\frac{13}{15}$; г) $5\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3}$.

49. Восстановите цепочку действий:



50. Вычислите:

а) $\frac{7}{10} + \frac{7}{9} \cdot \frac{27}{35}$;

б) $\frac{5}{14} + \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{21}$;

в) $\frac{3}{16} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{35}$;

г) $1 + \frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{6}$;

д) $\frac{5}{12} - \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{16}$;

е) $2 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7}$.

51. Найдите значение выражения:

а) $1\frac{3}{25} \cdot 2\frac{1}{7} - 2\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{95}$;

б) $4\frac{7}{12} \cdot 1\frac{3}{11} + 1\frac{1}{15} \cdot 1\frac{11}{64}$.

52. Папа купил $4\frac{3}{5}$ кг апельсинов по цене $12\frac{1}{2}$ лей/кг и $8\frac{1}{4}$ кг яблок по цене $6\frac{1}{3}$ лей/кг. За какие фрукты папа заплатил больше и на сколько?

53. Запишите число, обратное числу, равному:

а) сумме чисел $\frac{3}{18}$ и $\frac{7}{12}$;

б) частному чисел $\frac{7}{20}$ и $\frac{13}{50}$;

в) разности чисел $8\frac{3}{4}$ и $7\frac{5}{6}$;

г) произведению чисел $1\frac{1}{15}$ и $4\frac{5}{16}$.

54. Перечертите и заполните таблицу:

Скорость		$11\frac{1}{2}$ км/ч	$15\frac{2}{3}$ км/ч
Время	$\frac{3}{4}$ ч	$2\frac{2}{3}$ ч	
Расстояние	$2\frac{2}{5}$ км		4,7 км



55. Впишите один из знаков действий, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\frac{6}{7} \bullet 1\frac{1}{6} = 1$; б) $3 \bullet 2\frac{2}{11} = \frac{9}{11}$; в) $\frac{2}{9} \bullet \frac{5}{9} = \frac{2}{5}$; г) $1,2 \bullet \frac{5}{6} = 1$.

56. В первом ящике $18\frac{2}{3}$ кг яблок, что на $3\frac{5}{6}$ кг больше, чем во втором ящике. Сколько килограммов яблок в третьем ящике, если всего в трех ящиках $50\frac{1}{9}$ кг яблок?

57. Вычислите:

а) $\left(2\frac{3}{8} + 3\frac{7}{24}\right) : \left(4\frac{2}{3} - 1\frac{1}{8}\right)$; б) $\left(5\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3}\right) : \left(7\frac{7}{12} - 2\frac{1}{4}\right)$.

58. Длина маршрута автобуса равна $20\frac{1}{4}$ км.

Рейс длится $\frac{7}{10}$ часа. Автобус движется со скоростью 45 км/ч и делает 10 остановок. Сколько времени в среднем затрачивается на одну остановку?



59. У торговца Махлюшкина имеется на продажу 366 кг овощей. $\frac{4}{9}$ овощей составляет картофель, $\frac{7}{24}$ овощей – морковь, а остальное лук. Сколько килограммов лука у торговца Махлюшкина?

60. До привала туристы прошли $\frac{3}{4}$ запланированного пути, а после привала еще $\frac{1}{3}$ пути, пройденного до привала. Прошли ли туристы запланированный путь?

61. Собрали 10 кг грибов. $\frac{3}{4}$ грибов замариновали, $\frac{1}{5}$ грибов высушили, а из остальных грибов сварили суп. Сколько килограммов грибов пошло на суп?

62. В первый день в школьную библиотеку завезли $\frac{7}{15}$ новых учебников, а во второй день – остальные 56 учебников. Сколько всего новых учебников привезли в библиотеку за два дня?

63. Ширина прямоугольника равна 102 см, что составляет $\frac{17}{18}$ от его длины. Найдите периметр и площадь прямоугольника.



64. Запишите дробь в виде разности двух дробей, числитель которых равен 1:

- а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{2}{63}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{28}$.

65. Выполните действия:

а) $\left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4}\right) : \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{7}{9}\right)$;

б) $2\frac{2}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{7} - 1\frac{39}{73} \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{1}{16}\right)$.

66. Впишите в таблицу такие числа, чтобы произведения чисел по горизонтали, по вертикали и по диагонали были равны между собой:

а)

$\frac{1}{32}$		
	$\frac{1}{16}$	
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$

б)

$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$
	1	



67. В прямоугольном листе картона, длина которого $2\frac{1}{4}$ дм и ширина $\frac{2}{3}$ дм, вырезали два одинаковых квадрата со стороной $\frac{1}{3}$ дм. Чему равна площадь оставшейся части?



68. Стену с измерениями $3\frac{1}{2}$ м и $2\frac{4}{5}$ м необходимо оклеить обоями. Сколько рулонов обоев длиной 13 м и шириной 50 см для этого необходимо?

69. Когда у Пифагора, древнегреческого математика и философа, спросили, сколько у него учеников, он ответил: „Половина моих учеников изучает математику, четвертая часть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют 3 оратора“.
- Сколько учеников было у Пифагора?



Пифагор
(570–500 гг. до н.э.)

70. За завтраком мама Димы выпила $\frac{1}{6}$ чашки кофе, затем долила в чашку молока. Затем отпила $\frac{1}{3}$ от чашки и опять долила молоко. После этого она выпила еще половину чашки и опять долила молоко. В конце она выпила все содержимое чашки. Чего мама выпила больше: кофе или молока?
71. Три мушкетера, после того как исполнили свой долг перед Францией, зашли в таверну. Они отобедали и заказали на десерт персики. Так как они были уставшими, то уснули до того, как им принесли блюдо с персиками. Первым проснулся Атос. Увидев персики в блюде, он съел $\frac{1}{3}$ всех персиков и опять уснул. Затем проснулся Портос. Увидев персики и подумав, что их еще никто не ел, он съел $\frac{1}{3}$ персиков и опять уснул. Третьим проснулся Арамис и тоже съел $\frac{1}{3}$ персиков. Затем уснул и он. Пока мушкетеры спали, трактирщик отнес блюдо, на котором осталось 8 персиков, на кухню. Сколько персиков было на блюде первоначально?



§ 2 Десятичные числа. Действия с десятичными числами

2.1. Десятичные числа. Сравнение десятичных чисел



Вспомним

$$3 \frac{27}{100} = 3,27 \quad \leftarrow \text{десятичное число}$$

целая часть дробная часть

Пишем:

$$12,735$$

↓ ↓ ↓
десятые сотые тысячные

Читаем:

Двенадцать целых и семьсот тридцать пять тысячных, или:
Двенадцать, запятая, семьсот тридцать пять.

$$5,2 = 5,20 = 5,200 \quad \rightarrow$$

В конце десятичного числа можно приписывать любое количество нулей.

На соревнованиях по плаванию немецкий спортсмен проплыл 100 м за 52,8 с, а испанский – за 52,87 с. У кого из спортсменов результат лучше?

Решение:

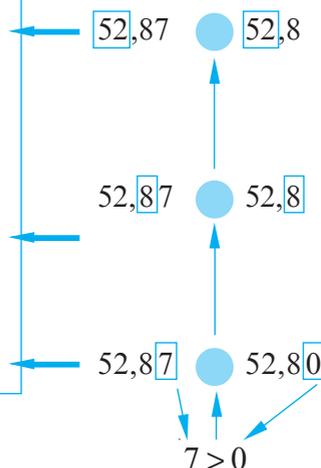
Результат лучше у того спортсмена, который проплыл данное расстояние за более короткое время.



Сравниваем

Чтобы сравнить два десятичных числа:

- ① сначала сравниваем их целые части:
 - а) больше то число, у которого целая часть больше;
 - б) если целые части равны, то:
- ② сравниваем десятые:
 - а) больше то десятичное число, у которого число десятых больше;
 - б) если десятые равны, то:
- ③ сравниваем сотые и т. д.



Получаем: $52,87 > 52,8$. Значит, результат немецкого спортсмена лучше.

Применяем

- Запишите названия рек в порядке возрастания их длин.

Название реки	Длина реки (тыс./км)
Днепр	2,201
Днестр	1,352
Дунай	2,857



2.2. Сложение десятичных чисел

Заяц Барни в феврале съел 28,7 кг моркови, а в марте – 32,46 кг. Сколько килограммов моркови съел Барни за эти два месяца?

Решение:

$$28,7 \text{ кг} + 32,46 \text{ кг} = \boxed{} \text{ кг}$$

$$\begin{array}{r} 28,7\boxed{0} \\ + 32,46 \\ \hline \end{array}$$

Ответ: $\boxed{}$ кг.



Вспомним

Чтобы сложить два десятичных числа, надо:

- 1 записать одно число под другим следующим образом: целая часть под целой частью, запятая под запятой, дробная часть под дробной частью и дописать нули в дробной части, чтобы уравнять количество знаков после запятой в обоих числах;
- 2 выполнить сложение, не обращая внимания на запятую;
- 3 поставить в ответе запятую под запятыми.

$$\begin{array}{r} 125,8\boxed{0} \\ + 12,03 \\ \hline 137,83 \end{array}$$

2.3. Вычитание десятичных чисел

Среднемесячная прибыль с первой фирмы Скруджа Макдака составляет 483,86 тысячи долларов, а со второй – на 16,4 тысячи долларов меньше. Какова среднемесячная прибыль со второй фирмы?

Решение:

$$438,86 - 16,4 = \square \text{ тысячи долларов.}$$

$$\begin{array}{r} 438,86 \\ - 16,40 \\ \hline \square\square, \square\square \end{array}$$



Ответ: \square тысячи долларов.



Вспомним

Чтобы выполнить **вычитание двух десятичных чисел**, надо:

- ① записать одно число под другим следующим образом: целая часть – под целой частью, запятая – под запятой, дробная часть – под дробной частью;
- ② дописать, если это необходимо, нули в дробной части, чтобы уравнять количество знаков после запятой в обоих числах;
- ③ выполнить вычитание, не обращая внимания на запятую;
- ④ поставить в ответе запятую под запятыми.

$$\begin{array}{r} 141,21 \\ - 30,80 \\ \hline 110,41 \end{array}$$

2.4. Умножение десятичных чисел

Применяем



В январе семья Ботнару израсходовала 225 кВт электроэнергии. 1кВт электроэнергии стоит 1,33 лея. Сколько леев должна заплатить семья Ботнару за использованную электроэнергию в январе?

Решение:

$$1,33 \cdot 225 = \square \text{ леев.}$$

Ответ: \square леев.

$$\begin{array}{r} 1,33 \\ \times 225 \\ \hline 665 \\ 266 \\ \hline \square\square,25 \end{array}$$

← 2 десятичных знака

2 Фермер засеял пшеницей участок площадью 25,6 га. С каждого гектара он в среднем собрал 27,8 ц пшеницы. Сколько центнеров пшеницы фермер собрал со всего участка?



Решение:

$$27,8 \cdot 25,6 = \square \text{ ц}$$



Ответ: \square ц.

Возьмите на заметку

Чтобы **перемножить** два десятичных числа надо:

- ① выполнить умножение, не обращая внимания на запятую;
- ② в полученном произведении отделить запятой справа столько десятичных знаков, сколько их в обоих множителях.

2.5. Деление десятичного числа на натуральное число

Исследуем и узнаем

Мария любит делать мэрцишоры. Для этого она разрежала 11,2 дм красной нити на 8 частей равной длины. Какова длина одного отрезка нитки?



Решение:

$$11,2 \text{ дм} = 112 \text{ см.}$$

$$112 \text{ см} : 8 = 14 \text{ см} = 1,4 \text{ дм.}$$

$$\text{Значит, } 11,2 \text{ дм} : 8 = 1,4 \text{ дм.}$$

Делим:

$$\begin{array}{r} 11,2 \\ - 8 \\ \hline 3 \\ - 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \\ \hline 1,4 \end{array}$$

Заканчиваем делить целую часть.

$$11,2 : 8 = 1,4$$

делимое делитель частное

Ответ: 1,4 дм.

Возьмите на заметку

Чтобы разделить десятичное число на натуральное число, надо:

- 1) выполнить деление, не обращая внимания на запятую;
- 2) поставить запятую в частном сразу, как только заканчивается деление целой части.

Решаем

$$0,25 : 5 = \square$$

$$\begin{array}{r} 0,25 \quad | \quad 5 \\ - 0 \\ \hline 2 \\ - 0 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

Возьмите на заметку

В случае, когда целая часть делимого меньше делителя, в частном записывают нуль целых.

Применяем

• Рассмотрите и дополните пропуски:

$$1) \begin{array}{r} 2,56 \quad | \quad 4 \\ - 0 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{r} 12,72 \quad | \quad 2 \\ - \square \\ \hline 7 \\ - \\ \hline \\ - \\ \hline \end{array}$$

$$3) \begin{array}{r} 1,14 \quad | \quad 3 \\ - \square \\ \hline \\ - \\ \hline \\ - \\ \hline \end{array}$$

2.6. Деление десятичного числа на десятичное число

Исследуем и узнаем

Чтобы не опоздать на турнир, рыцарь должен проскатать на лошади 36,72 км за 3,6 ч. С какой скоростью должна скакать лошадь?

Решение:

$$36,72 : 3,6 = \frac{36,72}{3,6} = \frac{36,72 \cdot 10}{3,6 \cdot 10} = \frac{367,2}{36} =$$

отношение применение
основного свойства
отношения

$$= 367,2 : 36 = 10,2 \text{ (км/ч).}$$

Ответ: 10,2 км/ч.



Обозначение:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\begin{array}{r} 36,72 \quad | \quad 3,6 \\ - 36 \\ \hline 07 \\ - 0 \\ \hline 72 \\ - 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

Возьмите на заметку

Чтобы разделить десятичное число на десятичное число, надо:

- 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько знаков, сколько их после запятой в делителе;
- 2) выполнить деление десятичного числа на натуральное число, полученное при переносе запятой.

$$\begin{array}{l} \triangle, \triangle \triangle : \triangle, \triangle = \triangle \triangle, \triangle : \triangle \triangle \\ \triangle, \triangle 0 : \triangle, \triangle \triangle = \triangle \triangle 0 : \triangle \triangle \triangle \end{array}$$

Применяем

• Проанализируйте и заполните пропуски:

1)
$$\begin{array}{r} 41,58 \\ - 5,4 \\ \hline 8 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 2,091 \\ - 0,41 \\ \hline 209 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 25,200 \\ - 2,25 \\ \hline 0 \end{array}$$

2.7. Периодические десятичные числа

Исследуем и узнаем

1) Выполните действие:

а) $2,8 : 2,1$;

б) $2,7 : 1,1$;

в) $36,1 : 2,25$;

г) $0,9 : 2,2$.

2) Обсудите полученные результаты.

3) Проанализируйте и заполните пропуски:



4) Запишите результаты, полученные в пункте 1), в виде периодических десятичных чисел.

Возьмите на заметку

Числа $2,(8)$; $35,(21)$; $0,(115)$ называются **чистыми периодическими десятичными числами**.

Числа $0,7(23)$; $6,25(3)$; $21,56(7)$ называются **смешанными периодическими десятичными числами**.

Период периодического десятичного числа – это число, записанное в его скобках.

Применяем

$$\bullet 2 : 3 = 0,666\dots = 0,(\underline{\quad});$$

период

$$\bullet 15 : 11 = \underline{\quad} = \underline{\quad},(\underline{\quad}\underline{\quad});$$

период

$$\bullet 14 : 12 = \underline{\quad} = 1, \underline{\quad}(\underline{\quad}\underline{\quad});$$

период

$$\bullet 63 : 22 = \underline{\quad} = \underline{\quad},(\underline{\quad}\underline{\quad}).$$

период

Возьмите на заметку

Периодические десятичные числа являются бесконечными десятичными числами.

2.8. Обращение чистого периодического десятичного числа в дробь

Исследуем и узнаем

1 Запишите дробь в виде периодического десятичного числа:

$$\bullet \frac{2}{9} = 0,2222\dots = 0,(\underline{2});$$

одна цифра одна цифра

$$\bullet \frac{11}{99} = 0,111111\dots = 0,(\underline{11});$$

две цифры две цифры

$$\bullet \frac{5}{999} = 0,005005\dots = 0,(\underline{005}).$$

три цифры три цифры

2 Запишите чистое периодическое десятичное число в виде дроби:

$$\bullet 0,(\underline{7}) = 0,7777\dots = \frac{7}{9};$$

одна цифра одна цифра

$$\bullet 0,(\underline{15}) = 0,151515\dots = \frac{15^3}{99} = \frac{5}{33};$$

две цифры две цифры

$$\bullet 1,(\underline{235}) = 1,235235235\dots = 1\frac{235}{999} = \frac{1234}{999}.$$

три цифры три цифры

Обобщаем

- ① Если целая часть чистого периодического десятичного числа равна 0, то оно обращается в дробь, числитель которой равен периоду этого числа, а знаменатель равен натуральному числу, состоящему из столько цифр 9, сколько цифр в периоде чистого периодического десятичного числа.

$$0,(17) = \frac{17}{99}.$$

- ② Если целая часть чистого периодического десятичного числа отлична от 0, то оно обращается в дробь, которая равна сумме целой части и дроби, полученной из дробной части заданного чистого периодического десятичного числа.

$$2,(05) = 2 + 0,(05) = 2 + \frac{5}{99} = 2\frac{5}{99} = \frac{203}{99}.$$

- ③ Полученная дробь сокращается, как правило, до несократимой дроби.

2.9. Обращение смешанного периодического десятичного числа в дробь

Исследуем и узнаем

I способ

$$\bullet 0,1(16) = \frac{1,(16)}{10} = \frac{1\frac{16}{99}}{10} = \frac{115}{10} = \frac{115}{990} \Big| = \frac{116-1}{990};$$

одна цифра две цифры две цифры одна цифра

$$\bullet 0,21(03) = \frac{21,(03)}{100} = \frac{21\frac{3}{99}}{100} = \frac{2082}{9900} \Big| = \frac{2103-21}{9900};$$

две цифры две цифры две цифры две цифры

$$\bullet 10,5(2) = 10 + 0,5(2) = 10 + \frac{\quad}{\quad} = 10\frac{\quad}{\quad} = \quad.$$

II способ

$$\bullet 0,2(35) = \frac{235-2}{990} = \frac{233}{990};$$

$$\bullet 0,16(2) = \frac{162-16}{900} = \frac{146}{900};$$

$$\bullet 5,3(01) = 5 + 0,3(01) = 5 + \frac{\quad - \quad}{\quad} = \quad.$$

Обобщаем

- ① Если целая часть смешанного периодического десятичного числа равна 0, то оно обращается в дробь. Числитель этой дроби равен разности между натуральным числом, записанным последовательно непериодической частью и периодом этого числа, и числом, стоящим перед периодом, а знаменатель равен натуральному числу, последовательно записанному столькоими цифрами 9, сколько цифр в периоде, и столькоими нулями, сколько цифр в непериодической части.

$$0,2(31) = \frac{231 - 2}{990}.$$

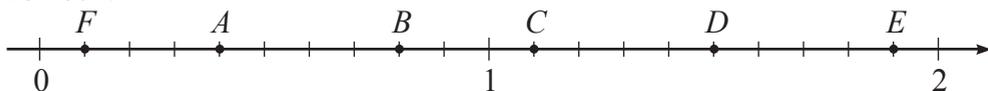
- ② Если целая часть смешанного периодического десятичного числа отлична от 0, то оно обращается в дробь, которая равна сумме целой части и дроби, полученной из дробной части заданного смешанного периодического десятичного числа.

$$2,3(11) = 2 + 0,3(11) = 2 + \frac{311 - 3}{990} = 2 + \frac{308}{990} = \frac{2288}{990}.$$

Упражнения и задачи



1. Определите координаты точек A, B, C, D, E, F , изображенных на числовой оси:



2. Отметьте точки $A(0,2)$, $B(0,7)$, $C(1,3)$ и $D(1,6)$ на числовой оси, взяв за единицу длины отрезка длину 10-ти клеток.
3. Запишите названия океанов в порядке убывания их максимальных глубин:

Океан	Максимальная глубина (км)
Атлантический	3,597
Индийский	3,711
Арктический	1,225
Тихий	3,976



4. Расположите числа в порядке возрастания: 3,6; 3,59; 3,545; 3,67; 3,06; 3,059.
5. Между какими двумя последовательными натуральными числами на числовой оси расположено число: а) 3,27; б) 7,98; в) 25,01; г) 0,03?

6. Сравните числа:

- а) $7,45 \bullet 7,43$; б) $2,08 \bullet 2,8$; в) $31,12 \bullet 31,120$.



7. Выполните действие:

- а) $4,52 + 11,6$; б) $3,008 + 12,25$; в) $18,354 + 12,29$; г) $8,97 + 7,062$.

8. Скорость лодки $24,8$ км/ч, а скорость течения реки $1,3$ км/ч. Найдите скорость лодки, движущейся по течению реки.

9. Кот Матроскин на завтрак съел $0,15$ кг сметаны, а на обед – на $0,1$ кг больше. Сколько всего сметаны съел кот Матроскин?



10. Выполните действие:

- а) $4,57 + 15,72 + 3,1$; б) $3,008 + 7,015 + 2,4$;
в) $3,07 + 12,803 + 0,026$; г) $21,3 + 2,13 + 0,213$.

11. Выполните действие:

- а) $52,307 - 15,02$; б) $12,93 - 6,27$; в) $112,79 - 20,9$; г) $8,21 - 7,396$.

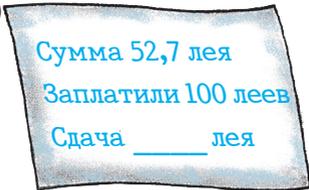
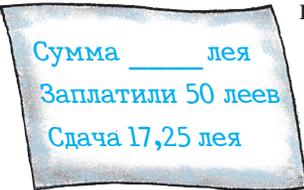
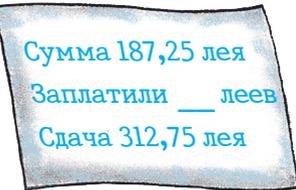
12. Запишите каждое из чисел $2,7$; $0,12$; $23,176$ в виде:

- а) суммы двух десятичных чисел; б) разности двух десятичных чисел.

13. Вычислите и проверьте результат, применив сложение.

- а) $4,97 - 2,08$; б) $16,01 - 15,98$; в) $2,001 - 1,9$; г) $0,2 - 0,107$.

14. Заполните платежный чек:

- а)  б)  в) 

15. Масса бочки с маслом $250,1$ кг. Найдите массу пустой бочки, если масло весит $202,4$ кг.

16. Найдите значение выражения:

- а) $0,07 + 12,56 - 9,002$; б) $4,15 - 2,7 + 0,028$;
в) $18,86 - 4,09 + 7,003$; г) $2,19 - 0,219 + 0,339$.

17. Поставьте запятую, пропущенную в произведении:

- а) $37,2 \cdot 168 = 62496$; б) $37,2 \cdot 16,8 = 62496$;
в) $37,2 \cdot 0,168 = 62496$; г) $37,2 \cdot 1,68 = 62496$;
д) $0,372 \cdot 16,8 = 62496$; е) $3,72 \cdot 1,68 = 62496$.

18. Выполните действие:

а) $0,32 \cdot 1,9$;

б) $1,26 \cdot 0,29$;

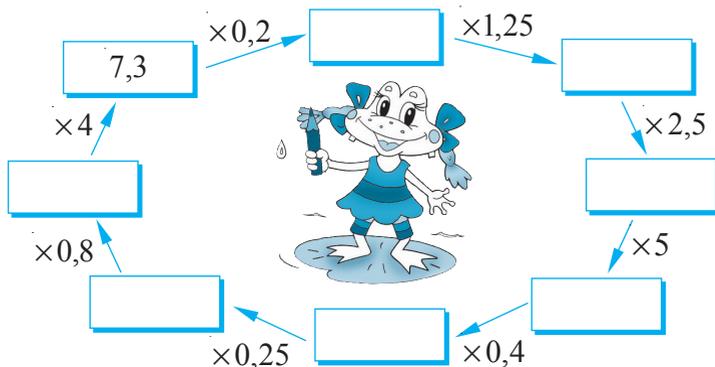
в) $7,4 \cdot 0,065$;

г) $2,02 \cdot 0,23$;

д) $0,016 \cdot 1,5$;

е) $6,132 \cdot 3,2$.

19. Помогите
Квакуше
заполнить
рамки:



20. Длина человеческого волоса увеличивается на 0,44 мм в день.
Насколько длиннее будут волосы через 30 дней?

21. Найдите сумму, разность и произведение чисел: 14,25 и 7,8.

22. Стороны прямоугольного участка – 3,8 м и 6,7 м соответственно.
Найдите периметр и площадь участка.

23. Выполните действие:

а) $13,8 : 4$;

б) $8,68 : 7$;

в) $169,2 : 8$;

г) $78,2 : 4$;

д) $11,34 : 42$;

е) $14 : 112$;

ж) $9,044 : 38$;

з) $53,4 : 15$.

24. За 5 кг конфет заплатили 281 лей. Сколько стоят 3 кг таких конфет?

25. За 3 часа автотурист проехал 211,5 км. Какое расстояние он преодолет за 5 часов, если будет двигаться с той же скоростью?

26. Выполните действие:

а) $9,6 : 1,2$;

б) $8,4 : 0,12$;

в) $0,52 : 1,3$;

г) $2,002 : 0,91$;

д) $5,84 : 0,8$;

е) $0,648 : 0,036$;

ж) $0,696 : 0,33$;

з) $48 : 0,016$.

27. В первый день яхта прошла 333,9 км за 12,6 ч.
Во второй день – 29 8,2 км за 10,5 ч. В какой из этих дней яхта двигалась с большей скоростью?



28. Выполните действие и запишите результат в виде периодического десятичного числа:

а) $24,16 : 11$;

б) $12,4 : 37$;

в) $0,9 : 2,2$;

г) $0,5 : 1,3$;

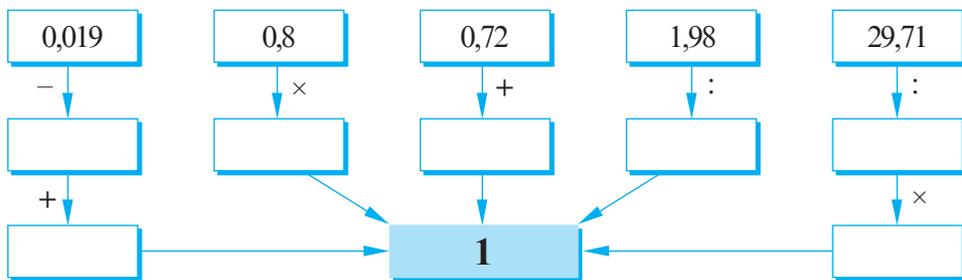
д) $64,45 : 19$;

е) $0,267 : 0,18$;

ж) $1,24 : 2,7$;

з) $0,632 : 1,8$.

29. Впишите соответствующие числа, чтобы в результате получить 1:



30. Обратите чистое периодическое десятичное число в дробь:

- а) 0,(15); б) 0,(231); в) 2,(9); г) 12,(12).

31. Обратите смешанное периодическое десятичное число в дробь:

- а) 2,3(4); б) 16,1(8); в) 30,0(18); г) 12,12(12).

32. Запишите все натуральные числа, расположенные на числовой оси, между числами: а) 1,003 и 6,96; б) 0,02 и 5,001.

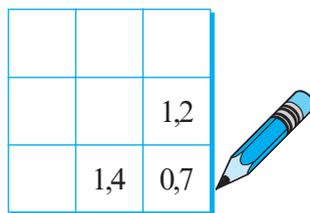
33. Впишите такую цифру, чтобы получить истинное высказывание:

- а) $2, \blacksquare 1 < 2,02$; б) $6,215 > 6,2 \blacksquare 8$; в) $5,4 \blacksquare 8 > 5,49$;
 г) $3,7 \blacksquare > 3,78$; д) $1,1 \blacksquare 8 > 1,192$; е) $1,895 < 1, \blacksquare 957$.

34. Из села Албинуца до села Фрумушика можно проехать по разным дорогам. Какой путь самый короткий?



35. Впишите такие числа, чтобы сумма чисел по горизонтали, по вертикали и по диагонали была равна 3:



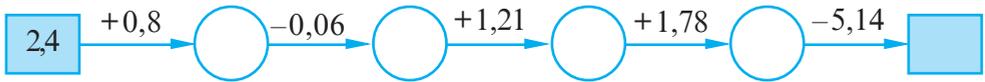
36. Впишите соответствующие цифры:

- а)
$$\begin{array}{r} 17, \blacksquare 4 \\ + \blacksquare \blacksquare, 5 \blacksquare \\ \hline 105,23 \end{array}$$
 б)
$$\begin{array}{r} \blacksquare, 53 \blacksquare \\ + 6,9 \blacksquare 8 \\ \hline 20, \blacksquare 27 \\ \blacksquare 0,041 \end{array}$$

37. Впишите соответствующие цифры:

- а)
$$\begin{array}{r} 72, \blacksquare \blacksquare \\ - 3 \blacksquare, 59 \\ \hline \blacksquare 2,69 \end{array}$$
 б)
$$\begin{array}{r} 9 \blacksquare, 7 \blacksquare 5 \\ - \blacksquare 4, \blacksquare 6 \blacksquare \\ \hline 34,841 \end{array}$$

38. Восстановите цепочку действий:



39. Впишите соответствующий знак сравнения:

а) $49,41 + 0,0009$ ● $49,42 - 0,001$;

б) $0,7001 + 0,0039$ ● $0,7431 - 0,039$;

в) $67,002 - 56,003$ ● $10,0999 + 0,8991$.



40. *Магия чисел!*

Числа 2,75 и 8 обладают следующим свойством: их произведение равно сумме их цифр.

$$2,75 \cdot 8 = 2 + 7 + 5 + 8 = 22.$$

Найдите хотя бы еще одну пару чисел, обладающих таким же свойством.

41. Вычислите:

а) $5,6 \cdot 0,08 + 2,23 \cdot 2,4$;

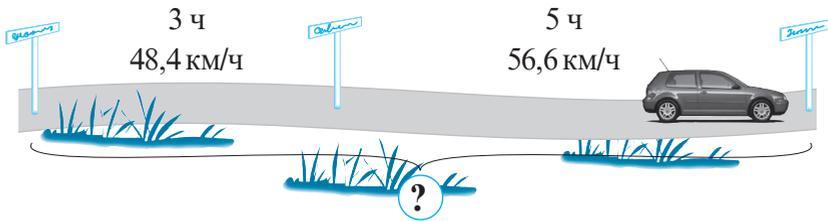
б) $(46 - 34,17) \cdot 0,09$;

в) $(3,126 - 1,7) \cdot (0,15 + 7,4)$;

г) $(9,38 + 5,12) \cdot (8,4 - 3,24)$.

42. Хозяйка продала 15,8 кг вишни по цене 8,5 лея/кг и 20,6 кг слив по цене 7,5 лея/кг. За какие фрукты хозяйка выручила больше денег и на сколько?

43. Составьте и решите задачу, используя данные рисунка.



44. В таблице приведены суточные нормы белков, жиров и углеводов на 1 килограмм веса ребенка в возрасте 11–15 лет.

Белки	Жиры	Углеводы
2,6 г	2,3 г	10,4 г



Вычислите, сколько белков, жиров и углеводов:

а) необходимо в день ребенку, вес которого 36,9 кг;

б) необходимо в день вам.

45. Впишите знаки арифметических действий:

$$1,8 \text{ } \bullet \text{ } 0,5 \text{ } \bullet \text{ } 0,2 = 2,5;$$

$$1,8 \text{ } \bullet \text{ } 0,5 \text{ } \bullet \text{ } 0,2 = 1,5;$$

$$1,8 \text{ } \bullet \text{ } 0,5 \text{ } \bullet \text{ } 0,2 = 0,26;$$

$$1,8 \text{ } \bullet \text{ } 0,5 \text{ } \bullet \text{ } 0,2 = 0,46;$$

$$1,8 \text{ } \bullet \text{ } 0,5 \text{ } \bullet \text{ } 0,2 = 1,9.$$

46. Найдите значение выражения:

а) $40 - (2,0592 : 0,072 - 19,63)$;

б) $50 - (2,3256 : 0,068 - 9,38)$;

в) $7,67 : 0,65 - (0,394 + 0,7688) : 0,57$;

г) $6,63 : 0,85 - (34 - 30,9248) : 0,62$.

47. Восстановите цепочку вычислений:



48. Из отрезка проволоки сделали треугольник со сторонами 7,5 см, 8,3 см и 9,4 см. Если из того же отрезка проволоки сделать квадрат, какой длины будет его сторона?

49. Основанием пирамиды Хеопса является квадрат со стороной 230 м. Восхищенные туристы двигаются со скоростью 0,32 м/с. Успеют ли они обойти всю пирамиду за один час?



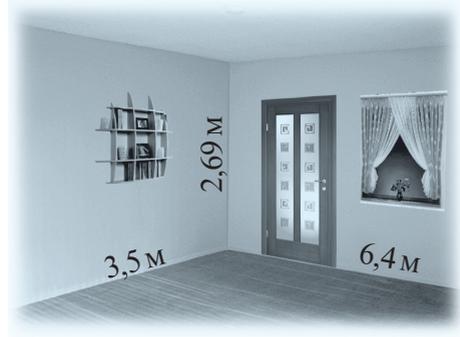
50. Какая из кошечек, белая или черная, раньше разбудит собаку? На сколько минут раньше?



51. На рисунке указаны измерения комнаты Даши. Учитывая, что пол комнаты прямоугольный, и используя данные рисунка, определите:

а) сколько квадратных метров ковролина необходимо, чтобы покрыть весь пол;

б) сколько рулонов обоев понадобится, чтобы оклеить три стены комнаты (без стены с окном и дверью), если длина одного рулона обоев 10 м, а ширина 0,55 м?



52. Запишите периодическое десятичное число в виде дроби:

а) $123,(18)$;

б) $6,02(78)$;

в) $2,(135)$;

г) $16,2(14)$;

д) $6,25(8)$;

е) $30,02(78)$.

53. Составьте задание, подобное заданию 19 (с. 112), используя умножение десятичных чисел.

54. а) Ювелир поделил золотую проволоку на две части одинаковой массы. Из одной части он изготовил цепочку из 80 одинаковых звеньев, а из другой – цепочку из 100 одинаковых звеньев. Масса одного звена первой цепочки 0,12 г. Какова масса одного звена второй цепочки?

б) Составьте и решите задачу, подобную задаче пункта а), в которой надо найти число звеньев первой цепочки.

55. Из одного улья одновременно вылетели в противоположных направлениях две пчелы. Через 0,15 часа расстояние между ними составило 6,3 км. Скорость одной из пчел 21,6 км/ч. Найдите скорость второй пчелы.



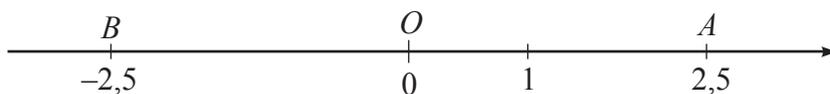
3.1. Понятие рационального числа

Исследуем и узнаем

• Петя увидел на мамином рабочем столе один из бухгалтерских документов – еженедельный отчет. Заметив записи, он удивился, потому что был знаком только с целыми отрицательными числами.

Поразмыслив минуту, он построил числовую ось. Отметил на этой оси сначала точку $A(2,5)$. Затем построил слева от начала отсчета O отрезок OB , конгруэнтный отрезку OA , и записал $B(-2,5)$.

Дата	Доходы. Расходы (тысяч леев)
7.02	+25,7
8.02	-2,5
9.02	+17,3
10.02	+9,9
11.02	-3,2
12.02	+11,08



Числа $-2,5$ и $2,5$ являются противоположными.

Числа, противоположные положительным десятичным числам, являются отрицательными десятичными числами.

Практическая работа

- ① Постройте числовую ось и обозначьте начало отсчета точкой O .
- ② Отметьте на этой числовой оси точки: $M\left(\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{4}\right)$.
- ③ Постройте слева от точки O отрезок OF , конгруэнтный отрезку OM .
- ④ Запишите координату точки F .
- ⑤ Отметьте на этой же числовой оси точки: $K\left(-\frac{3}{4}\right)$, $E\left(-\frac{3}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{4}\right)$.
- ⑥ Определите пары противоположных чисел.

Числа $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$ являются отрицательными числами.

Вспомним

• Выберите из множества $\left\{5; 1\frac{3}{8}; -\frac{1}{5}; 2,3; -21; 21,1; -\frac{5}{3}; -3; -0,7\right\}$:

а) целые числа; б) дроби и смешанные числа; в) десятичные числа.

Решение:

Целые числа			Дроби и смешанные числа			Десятичные числа		
5	-21	-3	$1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	2,3	-0,7	21,1
$\frac{5}{1}$	$\frac{-21}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{-7}{10}$	$\frac{211}{10}$

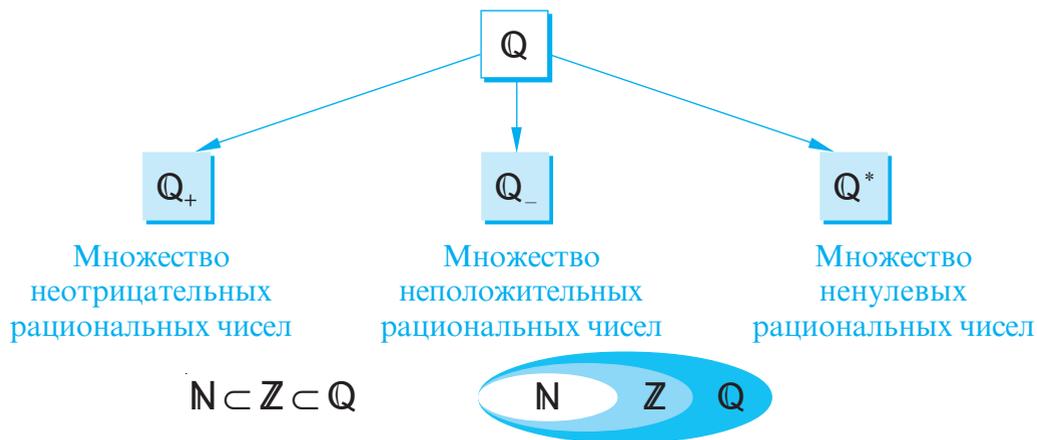
Все эти числа являются рациональными числами.



Возьмите на заметку

Число называют **рациональным**, если его можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}^*$.

Множество рациональных чисел обозначают через \mathbb{Q} .



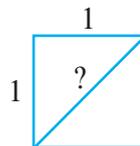
Решаем

• Впишите одно из множеств \mathbb{Q}_+ , \mathbb{Q}_- , \mathbb{Z}^* , чтобы получить истинное высказывание:

а) $\frac{1}{2} \in \square$; б) $-\frac{7}{8} \in \square$; в) $-2 \notin \square$; г) $0 \notin \square$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Долгое время рациональные числа не имели названия. Они получили свое название только после того, как появились другие виды чисел. Древнегреческие математики обнаружили, что для измерения длины диагонали квадрата со стороной, равной 1, недостаточно только целых чисел и дробей.

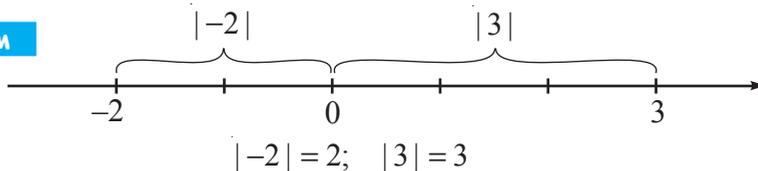


Неизвестные новые числа называли иррациональными, а уже известные – рациональными числами.

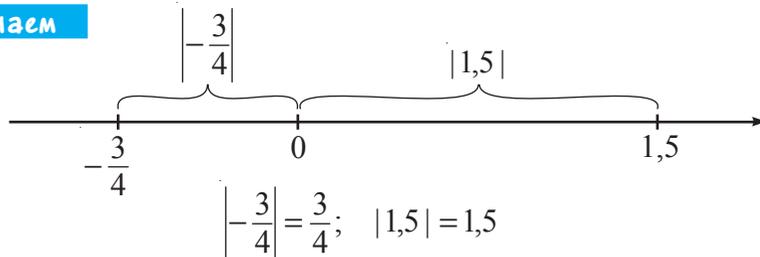
3.2. Модуль рационального числа. Свойства



Вспомним



Исследуем и узнаем



Возьмите на заметку

Расстояние от начала отсчета (точки O) до точки $A(a)$, $a \in \mathbb{Q}$, называется **модулем** (или **абсолютным значением**) рационального числа a и обозначается как $|a|$.

Применяем

• Проанализируйте и заполните пропуски:

$$\left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}; \quad |5,3| = 5,3; \quad |-5,23| = \square; \quad \left| 1\frac{3}{5} \right| = \square;$$

$$|-0,01| = \square; \quad \left| -\frac{7}{8} \right| = \square; \quad \left| \frac{7}{8} \right| = \square; \quad |0| = \square.$$



Возьмите на заметку

Для любого рационального числа a верно:

$$\bullet |a| \geq 0 \quad \bullet |a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \quad \bullet |-a| = |a|$$

Возьмите на заметку

- ① Если знаменатель несократимой дроби не имеет простых делителей, кроме 2 и 5, то эту дробь можно записать в виде конечного десятичного числа.
- ② Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то эту дробь можно записать в виде периодического десятичного числа.

3.4. Сравнение рациональных чисел

Исследуем и узнаем

1 Олег с Мишей помогли дедушке вскопать участок. Олег вскопал 0,4 участка, а Миша – $\frac{3}{8}$ участка. Кто из внуков вскопал большую часть?

Решение:

Сравним числа 0,4 и $\frac{3}{8}$.



I способ

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \quad \bullet \quad \frac{3}{8}$$

$$\frac{16}{40} \quad \bullet \quad \frac{15}{40}$$

$$16 > 15$$



II способ

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

$$0,4 \quad \bullet \quad 0,375$$

Ответ: вскопал большую часть.

Возьмите на заметку

Положительные рациональные числа сравниваются так же, как положительные дроби или положительные десятичные числа.

2 Сравните числа:

а) $-\frac{7}{12}$ и $-\frac{9}{16}$;

б) $0,(23)$ и $-\frac{11}{19}$;

в) $-7\frac{1}{8}$ и 0 .

Решение:

а) $-\frac{7}{12}$ и $-\frac{9}{16}$

меняем знак

$|\frac{7}{12}|$ и $|\frac{9}{16}|$

$\frac{7}{12}$ и $\frac{9}{16}$

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

б) $0,(23) > -\frac{11}{19}$

в) $-7\frac{1}{8} < 0$

Любое отрицательное число меньше любого положительного числа или нуля.

3.5. Округление рациональных чисел



Вспомним

В свой день рождения Аня узнала, что на почте ее ждет посылка, которую ей прислала ее подруга из Англии. Посылка весит 3 фунта. Нужна ли будет Ане помощь брата, чтобы принести посылку домой?

1 фунт = 0,45359237 кг

Решение:

1 фунт = $0,45359237$ кг $\approx 0,5$ кг

округляем до десятых

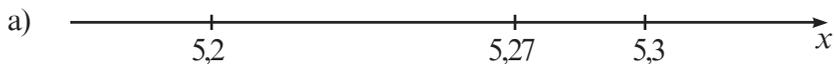
$0,5 \cdot 3 = 1,5$ (кг)

3 фунта $\approx 1,5$ кг.

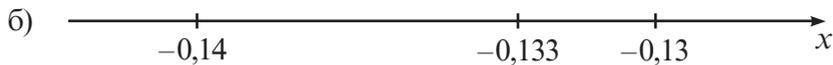
Ответ: Аня сможет сама принести посылку домой.



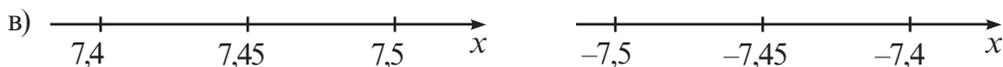
Исследуем и узнаем



$$5,2\overset{\textcircled{+1}}{7} \approx 5,3$$



$$-0,13\overset{\textcircled{3}}{3} \approx -0,13$$



$$7,4\overset{\textcircled{5}}{5} \approx 7,5$$

$$-7,4\overset{\textcircled{5}}{5} \approx -7,4$$

Возьмите на заметку

- ① Округлением рационального числа до заданного разряда является число этого разряда, расположенное на числовой оси более близко к данному рациональному числу.
- ② Если рациональное число равноудалено на числовой оси от двух последовательных чисел одного и того же разряда, до которого выполняется округление, то округлением будет большее из них.

Решаем

• Рассмотрите и дополните таблицу:

Рациональное число	Округление		
	до целого	до десятых	до сотых
0,813	1	0,8	0,81
$2\frac{19}{40}$			
-1,365	-1	-1,4	-1,36
-22,727			
0,1(8)	0	0,2	0,19
$-6\frac{2}{3}$			
$12\frac{1}{8}$			



3.6. Сложение и вычитание рациональных чисел

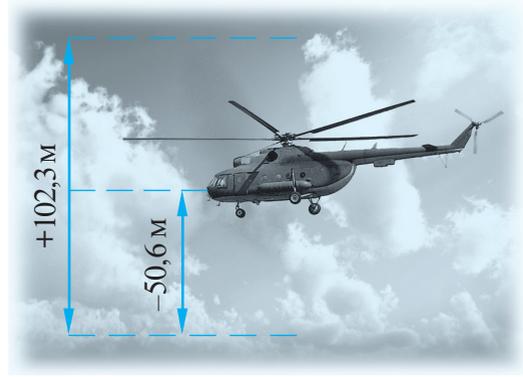
Решаем

1 Вертолет сначала снизил высоту на 50,6 м, а затем поднялся на 102,3 м. Как изменилась высота полета после таких маневров пилота?

Решение:

$$-50,6 + 102,3 = +51,7 \text{ (м)}.$$

Ответ: Высота полета увеличилась на 51,7 м.

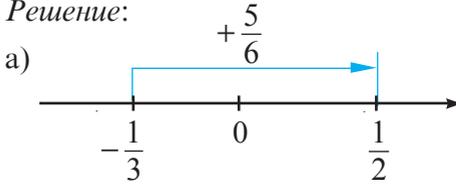


Исследуем и узнаем

2 Выполните действия: а) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$;

б) $-0,2 + (-1,4)$.

Решение:



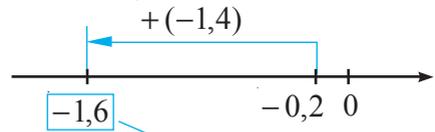
$$-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \quad \left|\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

б)



$$-0,2 + (-1,4) = -1,6$$

$$|-0,2| = 0,2 \quad |-1,4| = 1,4$$

$$0,2 + 1,4 = 1,6$$

$$-0,2 + (-1,4) = -1,6$$

Возьмите на заметку

1 Чтобы сложить два рациональных числа с одинаковыми знаками, надо сложить их модули и поставить перед полученным результатом их общий знак.

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3};$$

$$0,25 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2 Чтобы сложить два рациональных числа с разными знаками, надо:

- 1) из большего модуля вычесть меньший;
- 2) поставить перед полученным результатом знак того числа, модуль которого больше.

$$-3\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{10} = -3,4.$$

3 Выполните действие: а) $-12,78 - 8,56$; б) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{7}{12}\right)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } -12,78 - 8,56 &= \\ &= -12,78 + (-8,56) = \\ &= -\square. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } -\frac{5}{9} - \left(-\frac{7}{12}\right) &= -\frac{5}{9} + \frac{7}{12} = \\ &= -\frac{\square}{36} + \frac{\square}{36} = \frac{\square}{\square}. \end{aligned}$$

Возьмите на заметку

Чтобы выполнить **вычитание двух рациональных чисел**, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Замечание. Сумма и разность двух рациональных чисел есть число рациональное.

3.7. Свойства сложения

Исследуем и узнаем

РАБОТА В ПАРАХ!



1 Заполните таблицу:

a	b	$a + b$	$b + a$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$		
$-0,4$	$-2,7$		

• Вывод: $a + b = \square$

2 Заполните таблицу:

a	b	c	$a + (b + c)$	$(a + b) + c$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$		
$-0,03$	$-0,75$	$-0,25$		

• Вывод: $a + (b + c) = \square$

3 Выполните действие:

а) $\frac{5}{11} + 0 = \square$; б) $-\frac{2}{7} + 0 = \square$; в) $0 + (-0,15) = \square$.

• Сделайте вывод.

4 Выполните действие:

а) $-\frac{3}{17} + \frac{3}{17} = \square$; б) $0,31 + (-0,31) = \square$; в) $\frac{2}{13} + \left(-\frac{2}{13}\right) = \square$.

• Сделайте вывод.

Обобщаем

Свойства сложения рациональных чисел

1° Сложение рациональных чисел коммутативно:

$$a + b = b + a, \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Q}.$$

2° Сложение рациональных чисел ассоциативно:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

3° Число 0 является нейтральным элементом сложения рациональных чисел:

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ для любого } a \in \mathbb{Q}.$$

4° Для любого рационального числа a существует только одно противоположное ему число, равное $-a$, причем $a + (-a) = -a + a = 0$.

Применяем

Завершите вычисление:

а) $-\frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{4}{15} = -\frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{7}\right) = 0 + \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{\square}{\square};$

б) $(0,01 + (-3,2)) + 3,2 = 0,01 + (\square + \square) = 0,01 + \square = \square.$

3.8. Раскрытие скобок

Исследуем и узнаем

1 Выполните действие:

а) $7,1 + (2,9 + 3,1);$

б) $7,1 + 2,9 + 3,1;$

в) $6,3 + (-5,3 + 2,2);$

г) $6,3 - 5,3 + 2,2.$

Завершите решение и сравните полученные результаты:

а) $7,1 + (2,9 + 3,1) = 7,1 + \square = \square;$ б) $7,1 + 2,9 + 3,1 = \square.$

$$a + (b + c) = a + b + c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Завершите решение и сравните полученные результаты:

в) $6,3 + (-5,3 + 2,2) = 6,3 + (\square) = \square;$ г) $6,3 - 5,3 + 2,2 = \square.$

$$a + (-b + c) = a - b + c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Обобщаем

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак плюс (+), знаки слагаемых, стоящих в скобках, сохраняются:

$$+(a - b + c) = a - b + c.$$

Применяем

2 Вычислите: $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} - 2\right)$.

Проанализируйте и закончите решение.

$$-\frac{1}{2} + \left(\ominus \frac{3}{2} \ominus 2\right) = -\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus 2 = \square \oplus 2 = \square.$$

Исследуем и узнаем

3 Вычислите:

а) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6} - 9\right)$;

б) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 9$;

в) $0,03 - (0,03 + 2,72)$;

г) $0,03 - 0,03 - 2,72$.

Завершите решение и сравните полученные результаты:

а) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6} - 9\right) = \frac{5}{6} - (\square) = \square$;

б) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 9 = \square + 9 = \square$.

$$a - (-b - c) = a + b + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

в) $0,03 - (0,03 + 2,72) = 0,03 - \square = \square$;

г) $0,03 - 0,03 - 2,72 = \square - 2,72 = \square$.

$$a - (b + c) = a - b - c, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Обобщаем

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак минус (-), знак каждого слагаемого, стоящего в скобках, меняется на противоположный:

$$-(a + b - c) = -a - b + c.$$

Применяем

4 Вычислите: $0,1 - (-0,9 + 101)$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

$$0,1 - (-0,9 + 101) = 0,1 + 0,9 \oplus 101 = \square \oplus 101 = \square.$$

3.9. Умножение и деление рациональных чисел

Исследуем и узнаем

1 Температура тела летучей мыши может опуститься до $-6,6^{\circ}\text{C}$. Найдите, до скольких градусов может опуститься температура тела ящерицы, если известно, что она составляет $\frac{2}{3}$ от минимальной температуры тела летучей мыши.



Решение:

$$-6,6 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{66}{10} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{44}{10} = -4,4$$

(градусов).

Возьмите на заметку

Произведение двух рациональных чисел a и b положительно, если числа a и b одного знака.

•	$(+) \cdot (+) = +$
•	$(+) \cdot (-) = -$
•	$(-) \cdot (+) = -$
•	$(-) \cdot (-) = +$

Произведение двух рациональных чисел a и b отрицательно, если числа a и b разного знака.

Применяем

2 Вычислите: а) $-1,2 \cdot (-17,5)$; б) $-\frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

а) $-1,2 \cdot (-17,5) = \square \cdot \square = \square$;

б) $-\frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square}$.

Замечание. Произведение двух рациональных чисел есть число рациональное.

Исследуем и узнаем

3 Днем температура воздуха была $-8,5^{\circ}\text{C}$, что составляет $\frac{5}{6}$ температуры, которая была ночью. Какой была температура воздуха ночью?

Решение:

$$-8,5 : \frac{5}{6} = -8,5 \cdot \frac{6}{5} = -\frac{85}{10} \cdot \frac{6}{5} = -10,2 \text{ (градусов по Цельсию).}$$

Ответ: $-10,2^{\circ}\text{C}$.



Возьмите на заметку

Частное двух рациональных чисел a и b положительно, если числа a и b одного знака.

$$\begin{aligned} (+) : (+) &= + \\ (-) : (-) &= + \\ (-) : (+) &= - \\ (+) : (-) &= - \end{aligned}$$

Частное двух рациональных чисел a и b отрицательно, если числа a и b разного знака.

Применяем

2 Вычислите: а) $-1\frac{3}{7} : \left(-\frac{5}{21}\right)$; б) $0,2 : (-1,1)$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

а) $-1\frac{3}{7} : \left(-\frac{5}{21}\right) = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \square$;

б) $0,2 : (-1,1) = -\square : \square = -\square$.

Замечание. Частное двух рациональных чисел есть число рациональное.

3.10. Свойства умножения

Исследуем и узнаем

РАБОТА В ПАРАХ!



1 Заполните таблицу:

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
-0,8	1,5		
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{7}$		
1	-1,23		
$-\frac{9}{17}$	1		



Вывод: $a \cdot b = \square \cdot \square$;
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = \square$

2 Подставьте вместо a , b и c произвольные рациональные числа и проверьте формулы:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q};$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q};$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$



Возьмите на заметку

Свойства умножения рациональных чисел

1° Умножение рациональных чисел коммутативно:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Q}.$$

2° Умножение рациональных чисел ассоциативно:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

3° Число 1 является нейтральным элементом умножения рациональных чисел:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ для любого } a \in \mathbb{Q}.$$

4° Умножение рациональных чисел дистрибутивно относительно сложения и вычитания: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, для любых $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Из свойства 4° следуют правила вынесения общего множителя за скобки и раскрытия скобок.

Вынесение общего множителя

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Раскрытие скобок

Применяем

• Вычислите рациональным способом, применив свойства умножения:

а) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{5}$; б) $-2,7 \cdot 0,54 - 2,7 \cdot 0,46$; в) $-\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{9}\right)$.

Проанализируйте и закончите вычисления:

а) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{5} = -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{13} = -\square \cdot \frac{7}{13} = -\frac{\square}{\square}$.

б) Выносим общий множитель $-2,7$:

$$-2,7 \cdot 0,54 - 2,7 \cdot 0,46 = -2,7 \cdot (0,54 \oplus 0,46) = -2,7 \cdot \square = -\square.$$

в) Раскрываем скобки:

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{9}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = -\square + \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = -\square + \frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square}.$$

Всезнайка применяет свойства умножения для выполнения быстрых вычислений:

$$3\frac{2}{5} \cdot 5 = \left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot 5 = 15 + 2 = 17$$

$$12 \cdot 1,5 = 12 \cdot (1 + 0,5) = 12 + 6 = 18$$



Всезнайка

Попробуйте и вы:

$$2\frac{2}{3} \cdot 6 = \left(\square + \frac{\square}{\square}\right) \cdot 6 = \square + \square = \square.$$

$$14 \cdot 2,5 = 14 \cdot (\square + \square) = \square + \square = \square.$$

3.11. Степень рационального числа с натуральным показателем



Вспомним

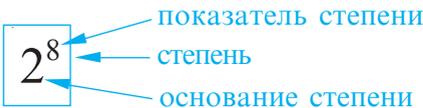
Сотрудникам одной фирмы предложили оригинальный метод оплаты труда: за один час работы в день – 2 лея. Каждый следующий час – оплата удваивается. Какой будет дневная оплата сотрудника фирмы, если он проработает 8 часов?

Решение:

$$2 \cdot 2 = 2^8 = 256 \text{ (леев).}$$

Ответ: 256 леев.

Найдите, какую сумму денег потеряет сотрудник, если он уйдет с работы на час раньше.



Читаем:
Два в восьмой степени.

Исследуем и узнаем

$$(1,5)^3 = 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 3,375;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81};$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32.$$

Возьмите на заметку

Степенью рационального числа a с натуральным показателем n , $n \in \mathbb{N}^*$, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$$\begin{array}{l|l} a^1 = a & a^0 = 1 \\ a \in \mathbb{Q} & a \in \mathbb{Q}^* \\ \hline 0^0 - \text{не имеет} & \text{смысла} \end{array}$$

РАБОТА В ПАРАХ!



Определите знак степени:

$$(-1,73)^4 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^6 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$



$$\left(-\frac{7}{9}\right)^7 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$

$$(-0,03)^3 \text{ } \bullet \text{ } 0.$$

• Сделайте вывод

Решаем

• Рассмотрите и заполните таблицу:

Произведение	Степень	Основание степени	Показатель степени	Значение степени
$(-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2)$	$(-0,2)^3$	-0,2	3	-0,008
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$				
		$-\frac{2}{3}$	4	
	$\left(1\frac{1}{2}\right)^5$			



Возьмите на заметку

В выражениях без скобок возведение в степень является приоритетным.

Применяем

$$\begin{aligned} -6\frac{2}{5} \cdot 1\frac{9}{16} + \left(-2\frac{1}{4}\right)^2 &= -\frac{\blacksquare}{\blacksquare} \cdot \frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \left(-\frac{\blacksquare}{\blacksquare}\right)^2 = -\frac{\blacksquare}{\blacksquare} \cdot \frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \\ &= -\frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = -\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = -\frac{\blacksquare}{\blacksquare}. \end{aligned}$$

3.12. Среднее арифметическое

Исследуем и узнаем

1 Чтобы составить расписание дня, Даша записывала в течение недели время, необходимое для выполнения домашней работы. Сколько времени, в среднем, в день тратит Даша на выполнение домашней работы?

Решение:

$$\frac{1,3 + 1,5 + 2 + 1,2 + 1,5}{5} = 1,5 \text{ (часа).}$$

Ответ: 1,5 часа.

День недели	Время (в часах)
Понедельник	1,3
Вторник	1,5
Среда	2
Четверг	1,2
Пятница	1,5

Чтобы ответить на вопрос задачи, мы вычислили среднее арифметическое чисел, данных в таблице.

Возьмите на заметку

Средним арифметическим рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называется результат деления суммы этих чисел на число слагаемых:

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

Применяем

2 Всезнайка изобразил с помощью графика изменение температуры воздуха в муниципии Кишинэу за первые 10 дней марта (см. рисунок). Какой, в среднем, была температура воздуха за эти 10 дней?



Решение:

$$t_m = \frac{1 + (-2) + (-1) + 1 + 0 + 3 + 2 + 2 + 5 + 4}{10} = \text{■} \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Ответ: ■ °C.

РАБОТА В ПАРАХ!



- 3** а) Найдите среднее арифметическое a_m чисел 2,7 и $-1,3$.
 б) Отметьте на числовой оси точки $A(2, 7)$; $B(-1, 3)$ и $C(a_m)$.
 в) Где на отрезке AB расположена точка C ? Сделайте вывод.

Упражнения и задачи



- Отметьте на числовой оси точки: $A(2)$; $B(-1,5)$; $C\left(-2\frac{1}{4}\right)$; $D\left(\frac{5}{4}\right)$.
- Запишите числа, противоположные данным: $5,1$; $-0,25$; $-\frac{7}{8}$; $1\frac{3}{7}$; $2,7$; $-3\frac{1}{9}$.
- Найдите: а) $-a$, если $a \in \{-3,1; 1\frac{5}{6}; -2,03; 0\}$;
 б) b , если $-b \in \left\{-6,2; 3\frac{1}{3}; -0,1; \frac{29}{28}\right\}$;
 в) $-(-c)$, если $c \in \left\{\frac{13}{15}; -1,3; -2,52; 0\right\}$.

4. Перечертите таблицу и впишите в каждую ячейку знак \in , если точка принадлежит указанному множеству, или знак \notin , если точка не принадлежит этому множеству:

-3,5	$1\frac{1}{6}$	-21	37	0	$-\frac{7}{11}$	0,003	
							\mathbb{N}
							\mathbb{Z}^*
							\mathbb{Q}_+
							\mathbb{Q}_-



5. Запишите все целые числа, расположенные на числовой оси между числами:

а) 3,7 и 5,1; б) -0,135 и 1,02; в) $-1\frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{3}$; г) $-\frac{15}{4}$ и $\frac{8}{3}$.

6. Найдите модуль числа:

а) 1,3; б) $-\frac{1}{12}$; в) -0,25; г) $1\frac{3}{5}$; д) $\frac{7}{9}$; е) $-4\frac{6}{11}$.

7. Найдите $|a|$, если:

а) $a = -2,3$; б) $a = \frac{31}{48}$; в) $a = -7\frac{2}{7}$; г) 0,75.

8. Найдите значение выражения:

а) $|-7,2| + |3,4|$; б) $|-1,7| - |-0,8|$; в) $|-1,6| \cdot |-6,4|$;
 г) $\left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{3}{16}\right|$; д) $\left|-\frac{5}{6}\right| \cdot \left|\frac{3}{20}\right|$; е) $|-56| : |0,7|$.

9. Запишите десятичное число в виде несократимой дроби:

а) 12,2; б) 0,25; в) 0,05; г) -3,08;
 д) 0,875; е) -0,48; ж) -1,92; з) 0,375.

10. Запишите десятичное число в виде смешанного числа:

а) 1,5; б) -3,2; в) 5,25; г) -3,125; д) -7,005; е) 4,0125.

11. Запишите дробь в виде десятичного числа:

а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{18}{5}$; д) $\frac{11}{4}$; е) $\frac{7}{20}$; ж) $\frac{1}{25}$.

12. Дано множество: $M = \left\{ \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{3}{25}, \frac{6}{11}, \frac{17}{50}, \frac{13}{30} \right\}$.

- а) Определите множество A , $A \subset M$, состоящее из дробей, которые можно записать в виде непериодического десятичного числа.
 б) Запишите элементы множества A в виде десятичного числа.
 в) Определите множество B , $B \subset M$, состоящее из дробей, которые можно записать в виде периодического десятичного числа.

г) Запишите элементы множества B в виде периодического десятичного числа.

д) Определите, какие из высказываний истинны, а какие ложны:

1) $A \cap B = \emptyset$;

2) $A \cup B = M$.



13. Заполните таблицу:

Частное	Несократимая дробь	Десятичное число
10 : 6	$\frac{5}{3}$	1,(6)
9 : 11		
	$\frac{35}{9}$	
		1,35



14. Сравните числа:

а) $-1,1$ \bullet $-1,09$;



б) $-\frac{5}{7}$ \bullet $-\frac{9}{14}$;

в) $0,2$ \bullet $0,2011$;

г) $2,67$ \bullet $2,(6)$.

15. Расположите в порядке возрастания числа:

$-4,9$; $2\frac{1}{3}$; $2,3$; $-4,901$; $-2\frac{1}{2}$; $-2,6$; 0 .

16. Расположите в порядке убывания числа:

$-3,7$; 0 ; $5,11$; $-3\frac{3}{5}$; $0,1(2)$; $0,12$; $5\frac{14}{125}$.

17. Впишите такую цифру, чтобы получить истинное высказывание:

а) $-2,02 < -2, \blacksquare 1$;

б) $-3,4 \blacksquare 6 > -3,415$;

в) $-11,1 \blacksquare < -11,18$;

г) $-2 \blacksquare ,09 < -27,1$.

18. Между какими последовательными целыми числами на числовой оси расположено число:

а) $5\frac{3}{11}$;

б) $-2\frac{9}{13}$;

в) $-9,3$;

г) $-11\frac{2}{3}$;

д) $0,324$;

е) $-0,12?$

Образец:
 $3 < 3\frac{1}{3} < 4$.

19. Учитель записал на доске несколько примеров на сравнение, но на перемене кто-то из учеников стер некоторые цифры. На уроке учитель сказал, что данные числа можно сравнить, не восстанавливая примеры. Сравните:

а) $-3,3$ $\star\star$ и $-3,2$ $\star\star\star$; б) $-0,518$ и $-0,517$ $\star\star\star$;

в) $-\star, \star\star$ и 0 ;

г) $-\star, \star\star\star$ и $\star, \star\star\star$.



20. Впишите необходимый знак сравнения:

- а) $|-1,6|$ 0 ; б) $\left|-\frac{3}{8}\right|$ $-\frac{3}{8}$;
 в) $1,56$ $|-1,56|$; г) $-0,09$ $|-0,001|$.



21.



ИЛ-86

$v \approx 15,23$ км/мин



Боинг 373

$v \approx 15,47$ км/мин

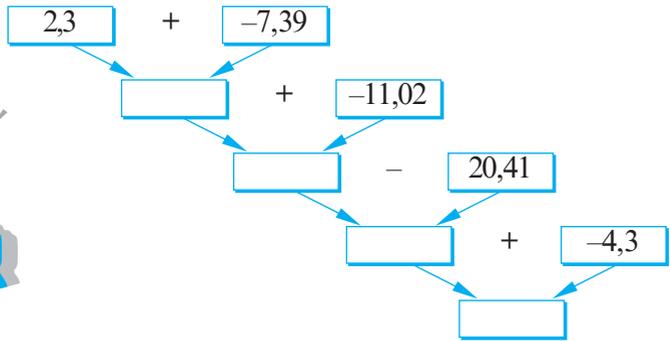
- а) До какого разряда округлили средние скорости самолетов, изображенных на рисунке?
 б) Найдите средние скорости самолетов в км/ч и округлите полученные результаты до целых.
22. Округлите:
 а) до десятых числа: 3,46; -2,17; 0,052; -1,65; 2,(3).
 б) до сотых числа: 25,729; -31,047; -0,171; 6,725; 4,3(6); 4,(36).
23. Перечертите и заполните таблицу:

Число	Округление числа до		
	целых	десятых	сотых
2,365			
-1,884			
-61,753			
0,6(4)			
2,(17)			



24. Впишите такую цифру, чтобы получить истинное высказывание:
 а) $21,5 \blacksquare \approx 21,6$; б) $-3,92 \blacksquare \approx -3,92$; в) $71,0 \blacksquare \approx 71,1$; г) $-5,2 \blacksquare \approx -5,3$.
25. Вычислите:
- а) $-4,1+1,6$; б) $2,8-5,5$; в) $-2,3-1,4$; г) $4-5,9$;
 д) $\frac{2}{15}-\frac{3}{10}$; е) $-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$; ж) $-\frac{3}{7}-\frac{20}{21}$; з) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$;
 и) $-3\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)$; к) $-2\frac{3}{8}-1\frac{7}{10}$; л) $-5\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}$; м) $4\frac{3}{7}-8\frac{9}{14}$;
 н) $-2\frac{3}{4}-\left(-3\frac{2}{5}\right)$; о) $3\frac{7}{9}-1\frac{1}{12}$; п) $2\frac{5}{8}-3\frac{5}{6}$; р) $-1\frac{3}{4}+2\frac{7}{8}$.

26. Выполните вычисления по схеме:

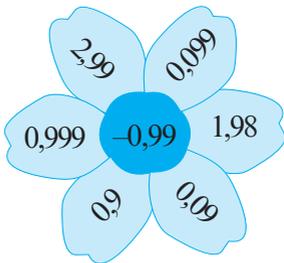


27. Восстановите цепочку вычислений:

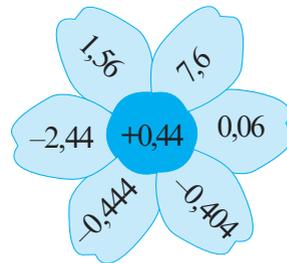


28. Вычислите:

а)



б)



29. Кто быстрее найдет строчку, столбец и диагональ с числами, сумма которых равна указанному числу?

1,2

а)

-3,2	1,5	0,5
4,4	1,6	-4,7
1,1	-4,3	2,8

$-\frac{1}{8}$

б)

$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$
$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{5}{8}$

30. Вычислите рациональным способом:

а) $-3,72 + 5,26 + 2,72$;

б) $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right)$;

в) $(0,39 - 10,56) + 10,56$;

г) $-3,78 + 9,84 + 1,78 - 20,84$.

31. Раскройте скобки и выполните действия:

а) $-3,8 - (-8,1 + 3,9)$;

б) $7,5 + (-8,4 - 2,1)$;

в) $-\frac{7}{8} - \left(1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$;

г) $\frac{4}{9} - \left(-1\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\right)$;

д) $-8,76 - (-3,25 - 10,76)$;

е) $-6,19 + (-1,5 + 5,19)$;

ж) $-\frac{9}{20} - \left(-\frac{11}{20} - \frac{5}{6}\right)$;

з) $\frac{17}{28} + \frac{5}{18} - \left(\frac{3}{28} - \frac{13}{18}\right)$.

32. Вычислите:

а) $-1,2 \cdot (-0,8)$;

б) $-12,5 \cdot 3,6$;

в) $-5,6 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$;

г) $\frac{2}{9} \cdot \left(-1\frac{2}{7}\right)$;

д) $1,2 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$;

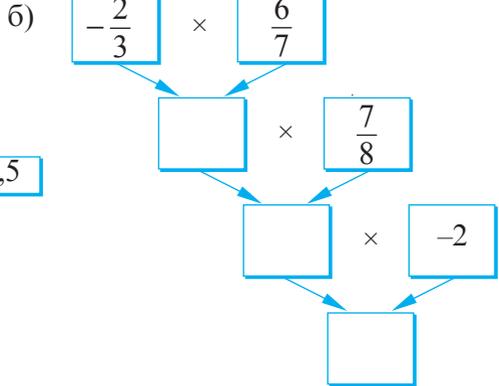
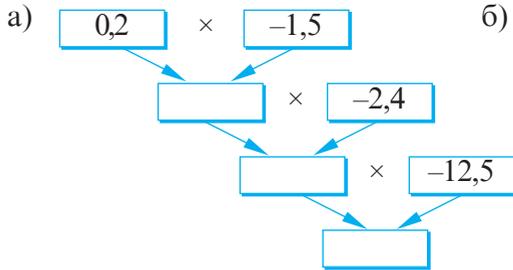
е) $-4\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$.

33. Перечертите и заполните таблицу:

a	-3	$-0,3$	$0,25$	$\frac{3}{8}$	$-1\frac{1}{4}$
$-0,2a$					



34. Выполните вычисления по схеме:



35. Вычислите:

а) $-2,4 : 0,8$;

б) $8,4 : (-0,42)$;

в) $-8,64 : (-1,2)$;

г) $-4\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$;

д) $\left(-5\frac{1}{7}\right) : \left(-1\frac{2}{7}\right)$;

е) $-0,78 : \left(-2\frac{3}{5}\right)$.

36. Сколько стоит 1 кг печенья, если за $5\frac{5}{6}$ кг заплатили 52,5 лев?

37. У дедушки Вани есть 5 ульев. Со всех ульев он собрал 182,5 кг меда. Сколько килограммов меда в среднем собрал дедушка с одного улья?

38. Вычислите рациональным способом:

а) $0,4 \cdot 3,56 \cdot (-2,5)$;

б) $0,2 \cdot (-12,51) \cdot 5$;

в) $3,6 \cdot 0,03 + 6,4 \cdot 0,03$;

г) $-12,3 \cdot 0,054 + (-12,3) \cdot 0,054$.

39. Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $-\frac{2}{3} \cdot 0,4 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,6;$

б) $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right);$

в) $2,7 \cdot 1,9 - 3,7 \cdot 1,9;$

г) $1,4 \cdot 0,9 - 1,4 \cdot 5,9.$

40. Запишите в виде степени:

а) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3};$

б) $(-1,3) \cdot (-1,3) \cdot (-1,3);$

в) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right).$

41. Истинно или Ложно?

а) $(-2,1)^2 = (2,1)^2;$

б) $(-5,3)^4 = -(5,3)^4;$

в) $\left(-\frac{7}{8}\right)^3 < 0;$

г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 > 0;$

д) $(-25)^3 < (-25)^2;$



42. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{15};$

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 16;$

в) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1\frac{1}{5};$

г) $\left(\frac{5}{9} - \frac{3}{7}\right)^0.$

43. Найдите среднее арифметическое числа:

а) 10,3 и 9,8;

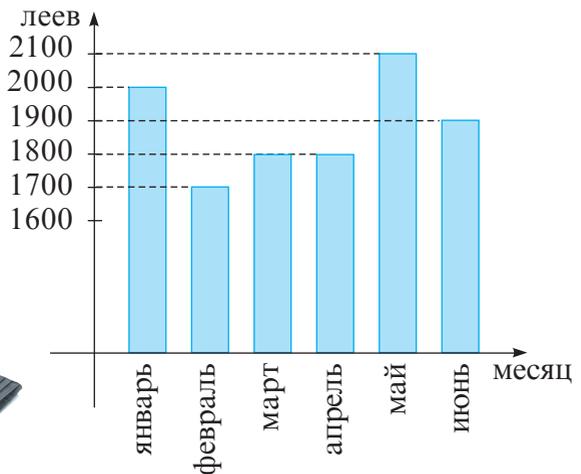
б) $1\frac{1}{7}$ и $2\frac{3}{7};$

в) 3,8; 3,9; 4,3.

44. Вычислите среднее арифметическое ваших оценок за I семестр учебного года. Округлите результат до десятых.

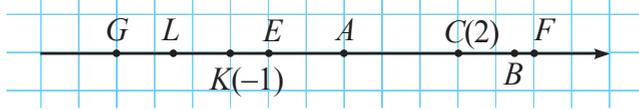
45. В декабре Рома заплатил за использованные минуты мобильного телефона 22 лей, в январе – 31 лей, в феврале – 20 лев. Сколько платит в среднем в месяц за минуты на телефоне Рома? Округлите ответ до десятых.

46. На диаграмме представлены полугодие затраты семьи Смирновых на питание. Сколько в среднем в месяц тратит семья на питание?





47. Перечертите числовую ось:



Определите и укажите начало отсчета данной оси, единичный отрезок, координаты точек G, L, E, A, B, F .

48. Даны числа: $5,7; -7,3; -\frac{3}{4}; 7\frac{1}{3}; -0,02$.

Запишите:

а) противоположные им числа;

б) обратные им числа.

49. Дано множество: $M = \left\{ -4\frac{2}{7}; -3,4; -2; -1; -\frac{3}{5}; 0; \frac{9}{11}; 2\frac{1}{4}; 3,75; 4 \right\}$.

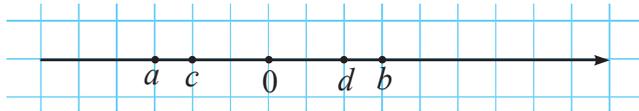
Определите множество $A, A \subset M$, если известно, что:

а) $A \subset \mathbb{Z}$; б) $A \subset \mathbb{N}$; в) $A \subset \mathbb{Q}^*$; г) $A \subset \mathbb{Q}_+$; д) $A \subset \mathbb{Q}_-$.

50. Запишите числа в порядке возрастания их модулей:

$-3,5; 0; -\frac{7}{9}; 0,7; -0,007; 1,3$.

51. На числовой оси отмечены числа: a, b, c и d .



Впишите соответствующий знак сравнения:

$b \bullet d$; $c \bullet d$; $a \bullet c$; $a \bullet b$; $d \bullet 0$;

$-a \bullet c$; $a \bullet 0$; $-b \bullet d$; $-b \bullet 0$; $0 \bullet -a$.



52. Найдите рациональное число a , если известно, что:

а) $|a|=3,1$; б) $|a|=\frac{5}{13}$; в) $|a|=0$;

г) $|a|=2,(3)$; д) $|a|=-1\frac{1}{3}$; е) $|a|=0,99$.

53. Отметьте на числовой оси числа, модули которых:

а) $2,5$; б) $\frac{1}{2}$; в) $3\frac{1}{4}$.

54. Запишите числа в виде периодического десятичного числа:

а) $\frac{43}{111}$; б) $\frac{37}{18}$; в) $2\frac{8}{15}$; г) $9\frac{2}{3}$.

55. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

- а) $-2 < \blacksquare < 2$; б) $0,86 < \blacksquare < 0,862$; в) $1,4 < \blacksquare < 1,5$;
 г) $-3,19 < \blacksquare < -3,18$; д) $\frac{2}{5} < \blacksquare < \frac{2}{3}$; е) $-\frac{1}{2} < \blacksquare < -\frac{1}{4}$.

56. Даны множества:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1,2 \leq x \leq 3,7\} \text{ и } B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{24}{11} < x < \frac{5}{13}\right\}.$$

Найдите: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

57. Расположите числа в порядке возрастания:

$$0,466; \frac{7}{15}; 0,4(63); 0,4637; 0,(46).$$

58. Сравните числа: а) $0,(545) \bullet \frac{6}{11}$;

б) $-2\frac{2}{9} \bullet -2,(212)$;

в) $-7\frac{8}{11} \bullet -7,(72)$.



59. Истинно или Ложно?



а) Если $a > 2$, то $a > 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

б) Если $a < 3$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

в) Если $a > -10$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

г) Если $-3,2 < a < -0,1$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

Для ложных высказываний приведите по одному примеру, показывающему, что высказывание не истинно.

60. Запишите каждое из чисел $-\frac{2}{3}$ и $-7,8$ в виде суммы:

а) двух отрицательных чисел;

б) чисел с разными знаками.

61. Вычислите, переводя слагаемые в десятичные числа:

а) $-2\frac{1}{2} - 0,254$; б) $-\frac{3}{4} + 0,35$; в) $-4,39 + 4\frac{2}{5}$; г) $\frac{5}{8} - 1,1$.

62. Подставьте вместо \star знак плюс (+) или минус (-), чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\star 0,9) + (\star 3,7) = -2,8$; б) $\left(\star \frac{2}{7}\right) + \left(\star \frac{8}{21}\right) = -\frac{2}{3}$.

63. Впишите пропущенное слагаемое, чтобы получить истинное высказывание:

а) $-2,3 + (-7,7) + \blacksquare = 0$;

б) $\frac{5}{12} + \left(-\frac{3}{8}\right) + \blacksquare = 0$.

64. Найдите значение выражения, если известно, что $a = -3,2$ и $b = 1,8$:
 а) $a + b$; б) $|a| + b$; в) $a + |b|$; г) $|a + b|$; д) $|a| + |b|$.

65. Сравните значения выражений $|a| + |b|$ и $|a + b|$, если:

а) $a = -2,8$, $b = 1,3$; б) $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$; в) $a = 7,1$, $b = 4,8$.

Какими должны быть числа a и b , чтобы $|a + b| = |a| + |b|$?

66. Используя числовую ось, найдите расстояние между точками A и B , если:

а) $A(-3,7)$, $B(-2,8)$; б) $A\left(\frac{2}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{20}\right)$; в) $A(-0,3)$, $B(7,1)$.

67. Вычислите рациональным способом:

а) $\frac{7}{16} - \frac{11}{42} - \frac{9}{16} + \frac{17}{42}$; б) $-3\frac{5}{11} + 1\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6} - 4\frac{6}{11}$;
 в) $-1,23 + 2,14 + 7,38 - 5,77 + 1,62$; г) $-9,39 + 0,74 - 10,61 + 3,26 + 6,25$.

68. Раскройте скобки и выполните действия:

а) $\left(-3\frac{5}{8} + 7,6\right) - \left(10,8 - 8\frac{3}{4}\right)$; б) $-\left(5\frac{4}{9} - 6\frac{5}{12}\right) + \left(-3\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)$;
 в) $\left(4,8 - 5\frac{3}{14}\right) - \left(-4\frac{3}{35} + 4\frac{8}{35}\right)$; г) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$.

69. **Магия чисел!**

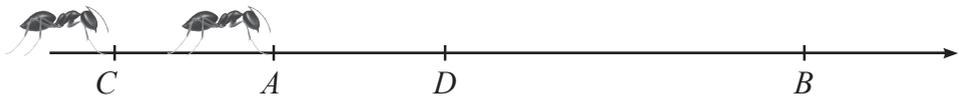
$5 + \frac{5}{4} = 5 \cdot \frac{5}{4}$; $3,5 + 1,4 = 3,5 \cdot 1,4$; $3 + 1,5 = 3 \cdot 1,5$.

Найдите другие пары таких чисел.

70. Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $-4,8 \cdot 8,9 + 8,9 \cdot (-5,2)$; б) $-1,2 \cdot \left(-7\frac{9}{13}\right) - (-1,2) \cdot 2\frac{4}{13}$;
 в) $-2\frac{3}{7} \cdot 2\frac{4}{5} + \left(-2\frac{3}{7}\right) \cdot 4\frac{1}{5}$; г) $-32,3 \cdot 7\frac{10}{13} + 2\frac{3}{13} \cdot (-32,3)$.

71. Два муравья передвигаются по числовой оси. Первый муравей прошел расстояние от точки $A(-7,2)$ до точки $B(2,8)$ за 5 секунд, а второй муравей – от точки $C(-10,1)$ до точки $D(-4,1)$ за 2 секунды. Какой муравей двигался с большей скоростью?



72. Выполните действия:

а) $\left(-3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{4}\right)$; б) $\left(5\frac{3}{8} - 7\frac{5}{27}\right) : \left(-3\frac{2}{3}\right)$; в) $1,8 \cdot \frac{2}{9} + 1,8 : \frac{2}{9}$.

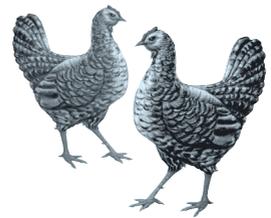
73. Найдите значение выражения:

а) $\left(6,75 - 4,5 \cdot 1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;

б) $\left(-\frac{5}{12} - \frac{13}{20}\right)^2 \cdot \left(-1\frac{13}{32}\right)$;

в) $\left(-\frac{11}{18} + \left(-2\frac{2}{9}\right) \cdot (-0,2)\right)^3 \cdot (-1,2)$.

74. В школьной секции по волейболу двум игрокам по 11 лет, трем – по 12 лет и одному игроку 14 лет. Какой средний возраст игроков волейбольной секции?



75. Масса четырех цыплят равна 5,5 кг, а шести – 7,4 кг. Найдите средний вес одного цыпленка.

76. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча один из игроков был удален с поля. После этого средний возраст оставшихся игроков снизился до 21 года. Сколько лет выбывшему игроку?

77. Зная, что a и b – рациональные числа, определите истинностное значение высказываний:

а) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

б) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

в) Если $a = -b$, то $|a| = |b|$.

г) Если $a = b$, то $|a| = b$.



78. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\frac{1}{3} < \blacksquare < \frac{1}{2}$;

б) $-\frac{1}{4} < \blacksquare < -\frac{1}{3}$.

79. Запишите выражение $a + b - c - d$ в виде:

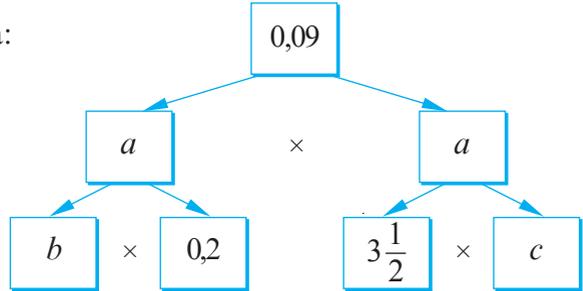
а) суммы, где $a + b$ – первое слагаемое;

б) разности, где $a + b$ – уменьшаемое.

80. Известно, что a, b, c – ненулевые отрицательные рациональные числа. Каким будет знак значения выражения $ab - 100c$?

81. Частное двух чисел равно -1 . Чему равна сумма этих чисел?

82. Впишите необходимые числа:



83. Расположите в порядке возрастания значения выражений:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2; (-1)^3; (-0,4)^2; \left(-2\frac{1}{2}\right)^2; \left(5\frac{7}{11}\right)^0; \left(-2\frac{1}{3}\right)^3; \left(-2\frac{1}{2}\right)^3.$$

84. Чему равно минимальное значение выражения:

а) $(a - 0,5)^2 - 7,2$; б) $4,3 + (x + 1,1)^4$?

85. Семь гномов сидят вокруг костра. Известно, что рост каждого гнома равен среднему арифметическому ростов двух гномов, сидящих рядом. Докажите, что все гномы одного роста.



86. В баскетбольной команде 5 человек. Их средний рост 2,04 м. После того как одного члена команды заменили новым игроком, средний рост игроков команды вырос до 2,08 м. Какой рост у нового игрока, если рост выбывшего равен среднему арифметическому ростов игроков команды?



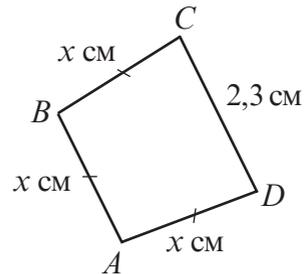
87. В Стране Лилипутов Гулливер выше лилипута в 12 раз, а в Стране Великанов Гулливер ниже великана в 12 раз. Можно ли утверждать, что рост Гулливера равен среднему арифметическому ростов лилипута и великана?

§4 Решение уравнений на множестве \mathbb{Q}

Исследуем и узнаем

1 Три стороны четырехугольника $ABCD$ конгруэнтны, а длина четвертой стороны 2,3 см. Чему равна длина каждой из конгруэнтных сторон, если периметр четырехугольника 8 см?

Решение:



$$P = AB + BC + CD + AD$$

$$3x + 2,3 = 8 \quad \leftarrow \text{уравнение}$$

↑
неизвестное

↑
неизвестное
слагаемое

↑
сумма

$$3x + 2,3 = 8$$

Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

$$3x = 8 - 2,3$$

$$3x = 5,7$$

↑
↑
неизвестный множитель произведение

Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель.

$$x = 5,7 : 3;$$

$$x = 1,9 \text{ (см).}$$

Ответ: 1,9 см.



2 Решите на множестве \mathbb{Q} уравнение:

а) $2 \cdot (0,5x + 1) = -7,2;$

б) $\frac{1}{5}x + \frac{4}{15}x = \frac{7}{30};$

в) $-\frac{2}{3} : x = \frac{1}{9}, \quad x \neq 0;$

г) $(3x - 1,8) : 2,4 = 3,2.$

Рассмотрите и допишите

Решение:

$$а) 2 \cdot \underbrace{(0,5x+1)}_{\substack{\text{неизвестный} \\ \text{множитель}}} = \underbrace{-7,2}_{\text{произведение}}$$

$$0,5x + 1 = -7,2 : \square$$

$$\underbrace{0,5x}_{\substack{\text{неизвестное} \\ \text{слагаемое}}} + 1 = \square_{\text{сумма}}$$

$$0,5x = \square \ominus 1$$

$$\underbrace{0,5x}_{\substack{\text{неизвестный} \\ \text{множитель}}} = \square_{\text{произведение}}$$

$$x = \square \ominus 0,5$$

$$x = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{ \square \}.$$

$$в) \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\text{делимое}} : \underbrace{x}_{\text{делитель}} = \underbrace{\frac{1}{9}}_{\text{частное}}, x \neq 0$$

$$x = -\frac{2}{3} : \frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{2}{3} \cdot \square$$

$$x = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{ \square \}.$$

$$б) \frac{1}{5}x + \frac{4}{15}x = \frac{7}{30} \rightarrow \text{Выносим общий множитель за скобку.}$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} \right) = \frac{7}{30}$$

$$x \cdot \square = \frac{7}{30}$$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \cdot \square$$

$$x = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{ \square \}.$$

$$г) \underbrace{(3x-1,8)}_{\substack{\text{неизвестное} \\ \text{делимое}}} : \underbrace{2,4}_{\text{делитель}} = \underbrace{3,2}_{\text{частное}}$$

$$3x - 1,8 = -3,2 \cdot 2,4$$

$$\underbrace{3x}_{\substack{\text{неизвестное} \\ \text{уменьшаемое}}} - \underbrace{1,8}_{\text{вычитаемое}} = \square_{\text{разность}}$$

$$3x = \square + 1,8$$

$$3x = \square$$

$$x = \square \ominus 3$$

$$x = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{ \square \}.$$

Упражнения и задачи



1. Решите на множестве \mathbb{Q} уравнение:

а) $\frac{2}{3}x = 46;$

б) $x \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) = 18;$

в) $1 - \frac{1}{5}x = 0,5;$

г) $\frac{1}{5}x - 1,3 = 1;$

д) $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{2}{3};$

е) $5 - 2x = -2,6;$

ж) $3,6 : x = 1,2;$

з) $2,3x + 1,2x = 7.$

2. Является ли число $\frac{1}{2}$ решением уравнения:

а) $1,5 + x = 2$;

б) $2x - 3 = -2$;

в) $\left(2x + \frac{1}{3}\right) : 4 = \frac{1}{3}$;

г) $7,2 : x = 3,6$?

3. Решите на множестве \mathbb{Q} уравнение и выполните проверку:

а) $0,47x - 0,14x = 1,65$;

б) $(4x - 1) : 3 = -\frac{1}{3}$;

в) $\frac{7}{9}x - \frac{2}{3}x = 2$;

г) $-3 \cdot (2 - 15x) = -6$.

4. Составьте и решите уравнение по данным задачи:

а) Даша задумала число, прибавила к нему 2,7 и получила 12,3. Какое число задумала Даша?

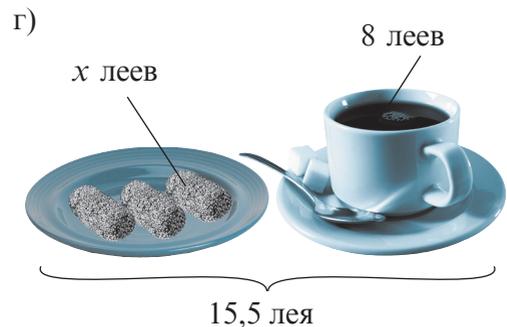
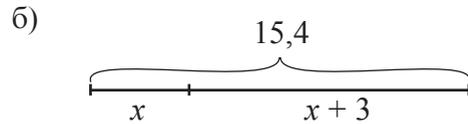
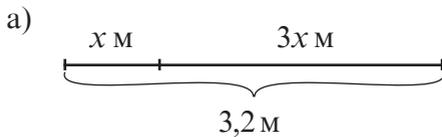
б) Аня задумала число, поделила его на 6 и получила $-\frac{2}{3}$. Какое число задумала Аня?

5. Перечертите и заполните таблицу:

$2x - 3$	-2	-1	0	1	2
x					



6. Составьте и решите задачу по данным рисунка:



7. Веревку длиной $3\frac{5}{6}$ м разрезали на две части. Длина одного отрезка на полметра больше другого. Найдите длину каждого отрезка.

8. Маша и Лена вместе собрали 24,6 кг клубники. Сколько килограммов клубники собрала каждая из девочек, если Маша собрала на 4,6 кг меньше Лены?



9. За телевизор и CD-плеер заплатили 5076 леев. Сколько стоит CD-плеер, если он на 950 леев дешевле телевизора?

10. Периметр квадрата на $2\frac{1}{4}$ м больше длины его стороны. Найдите площадь квадрата.

11. Фермер продавал на рынке гогошары и сладкий перец. Цена гогошаров в два раза больше цены сладкого перца. Сколько стоит килограмм гогошаров, если за проданные 52 кг гогошаров и 76,5 кг сладкого перца фермер выручил 1 083 лея?

12. Петя проехал $\frac{2}{5}$ горки на ногах, а потом упал и еще 8,4 м проехал на спине. Чему равна длина горки?



13. Учащиеся ежедневно следили за температурой воздуха в период с 15 по 19 апреля. Они установили, что в среднем температура воздуха в эти дни была 17,5°C. Какой была температура воздуха 15 апреля и 19 апреля, если ежедневно она повышалась на 1,5°C?



ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

14. Маленький Мук и Королевский Скороход соревновались в беге на дорожке длиной 30 км, которая проходила вокруг большого луга. По условиям состязания выиграет тот, кто обгонит другого, пробежав на один круг больше. Скороход пробегает круг за 10 минут, а Маленький Мук – за 6 минут. Оба стартуют одновременно из одного и того же места.



Через сколько минут Маленький Мук победит?

Задания для осмысления

1. Что называется дробью? Какое число называется смешанным?
2. Какие виды дробей вы знаете? Какие дроби называются равными?
3. В чем заключается основное свойство дроби? Что значит сократить дробь?
4. Что надо сделать, чтобы выделить целую часть из дроби? Приведите примеры.
5. Как сложить дроби с одинаковыми знаменателями? А с разными знаменателями?
6. Как сложить смешанные числа?
7. Что общего у действия *вычитание дробей* и действия *сложение дробей*? Обоснуйте ответ.
8. Как выполнить умножение двух дробей? А двух смешанных чисел?
9. Есть ли у числа 0 число, ему обратное? Какое число обратно самому себе?
10. Как найти дробь от числа?
11. Как найти число по данному значению его дроби?
12. Из каких частей состоит десятичное число?
13. Как сравнивают два десятичных числа?
14. Как выполняется сложение десятичных чисел? А вычитание?
15. Как выполняется умножение десятичных чисел? Возведение в степень с натуральным показателем?
16. Какие виды периодических десятичных чисел вы знаете? Приведите примеры.
17. Приведите примеры применения десятичных чисел из разных областей: физики, биологии, географии, истории, экономики и т. д.
18. Как обратить периодическое десятичное число в дробь?
19. Объясните включение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
20. Какие свойства модуля рационального числа вы знаете?
21. Какие виды записей рациональных чисел вы знаете?
22. Как выполняется сложение рациональных чисел? Вычитание? А умножение? Деление? А возведение в степень с натуральным показателем?
23. Какие свойства действий рациональных чисел вы знаете?
24. Как вычисляется среднее арифметическое чисел?

25. Приведите из повседневной жизни примеры применения среднего арифметического.
26. Каков порядок выполнения действий и какова значимость скобок в вычислениях с рациональными числами?
27. Что значит решить уравнение на множестве \mathbb{Q} ?

Упражнения и задачи на повторение



1. Вычислите: а) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$; б) $\frac{15}{16} - \frac{3}{4}$; в) $-\frac{3}{14} + \frac{2}{21}$;
 г) $1\frac{3}{7} - \frac{2}{3}$; д) $4,32 - 2\frac{1}{2}$; е) $1\frac{1}{8} + (-1,15)$; ж) $\frac{9}{20} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)$.
2. Вычислите:
 а) $1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$; б) $2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{3}$; в) $-5\frac{5}{11} \cdot 2\frac{1}{5}$; г) $-\frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{26}{27}\right)$;
 д) $\frac{8}{15} : 5\frac{1}{3}$; е) $-5\frac{5}{6} : \left(-3\frac{8}{9}\right)$; ж) $-4\frac{1}{8} : 2\frac{7}{16}$; з) $\frac{7}{25} : 1,4$.
3. Найдите значение выражения:
 а) $\left|3\frac{1}{2}\right| - |-3,5| + \left|-2\frac{1}{3}\right| - \left|\frac{7}{3}\right|$; б) $|-6,4| - \left|\frac{5}{8}\right| + |-0,625| - \left|\frac{32}{5}\right|$.
4. Во дворе росло 70 роз, $\frac{3}{14}$ из которых были красного цвета. Сколько роз красного цвета росло во дворе?
5. 12 учеников из 6 „А“ класса занимаются спортом. Сколько учеников учатся в этом классе, если те, кто занимается спортом, составляют $\frac{3}{8}$ от учеников всего класса?
6. Впишите числа, чтобы получить истинное высказывание:
 а) : 0,07 = 5; б) · 0,8 = 5,6; в) 0,2 : = 4;
 г) -6,1 · = 1,83; д) -4,06 : = -0,203; е) · 5,3 = -6,413.
7. Расположив в порядке возрастания числа, вы узнаете фамилию автора следующих слов: „Никто не научился думать, читая чужие мысли. Можно научиться думать, только думая самостоятельно“.
- 1,(2) $-\frac{101}{100}$ $\frac{5}{4}$ -1,06 $(1,1)^2$ $\frac{2}{3}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$
- К М У Э С Е Н И

8. Вычислите рациональным способом:

а) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{5} + 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} - 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{5}$;

б) $4\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{8} + 3\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} + 1\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}$.

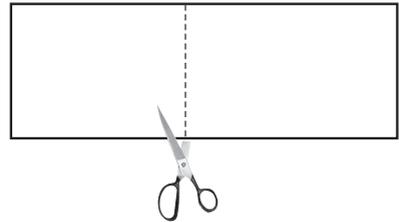
9. Найдите значение выражения: а) $\left(16,5 - 13\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{6}{11} + 2,2 \left(\frac{8}{33} - \frac{1}{11}\right) + 3\frac{2}{11}$;

б) $\left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147} - \left(0,6 : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2}$.

10. На птицефабрике выращивают кур, уток и индюков. Количество уток составляет 0,42 количества всех птиц, а количество индюков — $\frac{9}{28}$ количества всех уток. Сколько всего птиц на этой птицефабрике, если индюков 54?



11. Лист картона прямоугольной формы, длина которого 41,3 см, надо разрезать на два прямоугольника равной ширины так, чтобы длина одного из прямоугольников была на 3,7 см больше длины другого. Какой будет длина каждого из прямоугольников?



12. Решите на множестве \mathbb{Q} уравнение:

а) $|x| - 1,3 = 1,2$;

б) $15 - |x| = -9$;

в) $|x| + 3,7 = 7$;

г) $|x + 1,3| = 2$;

д) $|x - 0,16| = 0,16$;

е) $|2,6 - x| = 5,1$.



ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

13. Турист проходит расстояние от пункта A до пункта B и обратно за 3 ч 41 мин.

Дорога (см. рисунок) от пункта A до пункта B состоит из трех частей: подъем, равнинный участок и спуск.



Скорость туриста на подъеме — 4 км/ч, на равнине — 5 км/ч, а на спуске — 6 км/ч. Расстояние между пунктами A и B составляет 9 км. Каково расстояние между пунктами C и D ?

I вариант

1. Даны числа:

$$2,3; \frac{2}{5}; -1,25; 1\frac{1}{4}; 2,5; 2, (3); -\frac{4}{5}.$$

а) Впишите один из знаков сравнения (<, =, >), чтобы полученное высказывание было истинным:

$$2,3 \bigcirc 2, (3).$$

б) Выпишите противоположные числа.

в) Выпишите взаимно обратные числа и обоснуйте ответ.

г) Найдите среднее арифметическое чисел: $\frac{2}{5}; -1,25; 2,5$.

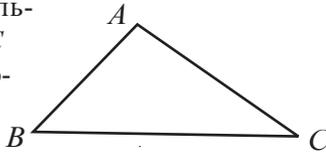
2. Выполните действия:

а) $6\frac{5}{8} + 1\frac{7}{12};$ б) $-\frac{11}{12} + \frac{7}{8};$

в) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \frac{8}{25};$ г) $\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}.$

3. В треугольнике ABC

длина стороны AB равна



$72,6$ м и составляет $\frac{3}{4}$ длины стороны AC .

а) Найдите длину стороны AC .

б) Зная, что периметр треугольника ABC равен 300 м, найдите длину стороны BC .

в) Три новых дома расположены в вершинах треугольника ABC . К дому в вершине C проведен интернет. Требуется проложить кабель от дома в вершине C к домам в вершинах A и B . Существует два проекта: 1) по отрезкам CB и CA ; 2) по отрезкам CA и AB . Какой проект более выгодный? Сколько метров кабеля можно сэкономить?

II вариант

1. Даны числа:

$$3,6; \frac{5}{8}; 2,75; -2\frac{3}{4}; 1,6; 3, (6); 1,3.$$

а) Впишите один из знаков сравнения (<, =, >), чтобы полученное высказывание было истинным:

$$3,6 \bigcirc 3, (6).$$

б) Выпишите противоположные числа.

в) Выпишите взаимно обратные числа и обоснуйте ответ.

г) Найдите среднее арифметическое чисел: $-2\frac{3}{4}; 1,6; 1,3$.

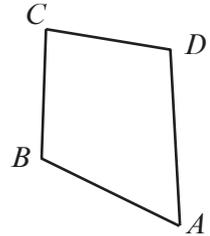
2. Выполните действия:

а) $1\frac{8}{9} + 3\frac{4}{15};$ б) $-\frac{7}{16} + \frac{5}{24};$

в) $\frac{12}{35} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right);$ г) $\frac{11}{12} : 1\frac{7}{15}.$

3. В четырехугольнике $ABCD$

длина стороны AB равна $2,1$ км и составляет $\frac{7}{8}$ длины стороны AD .



а) Найдите длину стороны AD .

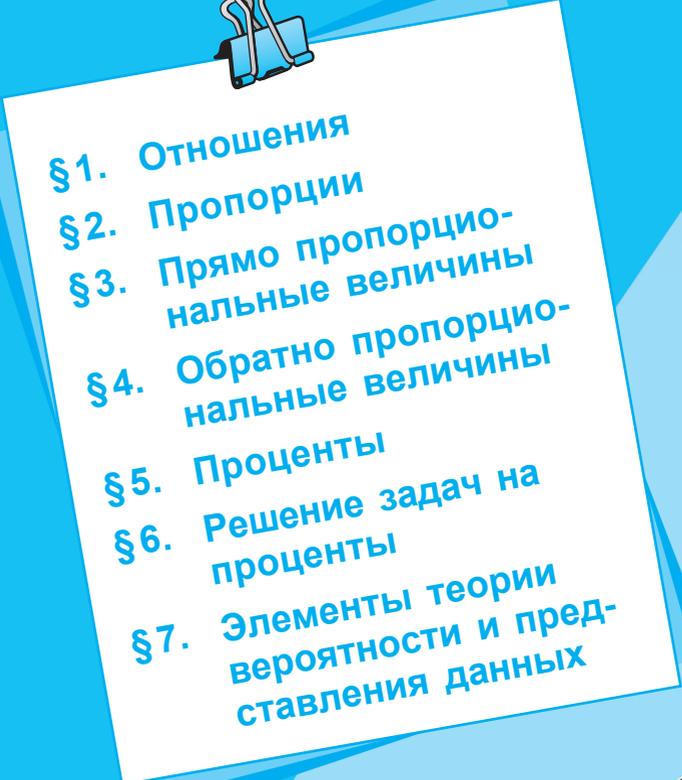
б) Зная, что $BC = 1,8$ км, а периметр четырехугольника равен $7,55$ км, найдите длину стороны CD .

в) Дом Ани находится в вершине A четырехугольника $ABCD$, а школа – в вершине C . От дома Ани до школы можно доехать двумя троллейбусными маршрутами: 1) от остановки в пункте A до B и от B до C ; 2) от A до остановки в пункте D и от D до C . Какой маршрут короче и на сколько километров?

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

- 
- §1. Отношения
 - §2. Пропорции
 - §3. Прямо пропорциональные величины
 - §4. Обратно пропорциональные величины
 - §5. Проценты
 - §6. Решение задач на проценты
 - §7. Элементы теории вероятности и представления данных

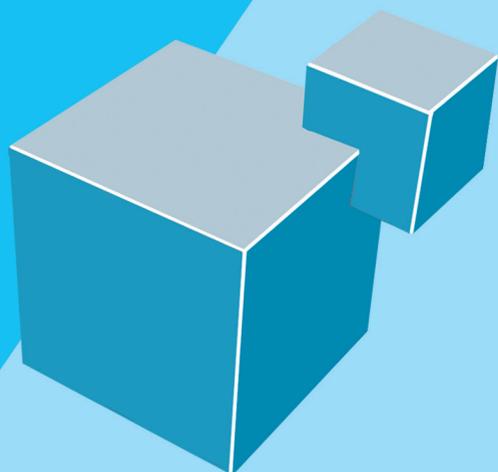
1

2

3

4

5



§1 Отношения



Вспомним

1 Для приготовления варенья из черной смородины на 9 кг свежей ягоды приходится 7,5 кг сахара.

а) Чему равно значение отношения количества ягод к количеству сахара?

б) Сколько сахара понадобится для 12 кг свежих ягод?

Решение:

а)

Члены отношения $\frac{9}{7,5}$ = 1,2

Отношение

Значение отношения



б) Пусть x – необходимое количество сахара.

Тогда $\frac{12}{x} = 1,2$. Следовательно, $x = 12 : 1,2 = 10$ (кг).

Ответ: а) 1,2; б) 10 кг.

• Чему будет равно значение отношения, которое получится при умножении каждого члена отношения $\frac{9}{7,5}$ на 3?



Вспомним

- ♦ Выражение $\frac{a}{b}$, где a и b – рациональные числа, $b \neq 0$, называется **отношением**.
- ♦ **Значением отношения** $\frac{a}{b}$ является результат деления $a : b$.
- ♦ Два **отношения равны**, если их значения равны.
- ♦ **Основное свойство отношения:** каждый член отношения можно умножить на одно и то же ненулевое натуральное число.
- ♦ **Сократить отношение** на ненулевое число, значит, разделить каждый член отношения на одно и то же ненулевое натуральное число.
- ♦ Применение основного свойства или сокращение отношения не меняет его значения.

Замечание. Пара отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, где $a \in \mathbb{Q}$, $b, c \in \mathbb{Q}^*$, может быть записана кратко: $a : b : c$. В этом случае говорят, что числа a , b и c относятся как $a : b : c$.

• *Истинно* или *Ложно*?

- Любая дробь – это отношение.
- Любое отношение – это дробь.



Замечаем и поясняем

2 Из 1,5457 тонны руды получается 188,5 кг меди. Чему равно значение отношения количества руды к количеству полученной меди?

Решение:

$$\frac{1545,7}{188,5} = 8,2$$

Ответ: 8,2.

$$1,5457 \text{ т} = 1545,7 \text{ кг}$$

Возьмите на заметку

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения значения их отношения надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Применяем

• Найдите значение отношения:

- а) 120 м и 800 см; б) 600 кг и 300 г; в) 2 160 мин и 12 ч.



Вспомним

3 Рассмотрите рисунок и определите, какой из драгоценных металлов тяжелее: золото или серебро (оба слитка имеют форму кубоида).

Золото

$$L = 5 \text{ см}$$

$$l = 2 \text{ см}$$

$$h = 1 \text{ см}$$



Серебро

$$L = 5 \text{ см}$$

$$l = 2 \text{ см}$$

$$h = 2 \text{ см}$$



Решение:

1 Вычислим объем тел:

$$V_{\text{золота}} = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_{\text{серебра}} = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ (см}^3\text{)}.$$

2 Вычислим вес 1 см³ металла, то есть

плотность металла:

$$\text{Золото: } \begin{array}{l} \text{Масса} \longrightarrow \frac{193 \text{ г}}{10 \text{ см}^3} = 19,3 \text{ г/см}^3 \longleftarrow \text{Плотность} \\ \text{Объем} \longrightarrow \end{array}$$

$$\text{Серебро: } \frac{208 \text{ г}}{20 \text{ см}^3} = 10,4 \text{ г/см}^3$$

$$19,3 > 10,4$$

Ответ: Золото тяжелее серебра.

$$V_{\text{куб}} = L \cdot l \cdot h$$



Возьмите на заметку

- ♦ Отношение двух разноименных величин образует новую величину. Значение такой величины называется **единичным отношением**.
- ♦ Единичное отношение массы металла к его объему – это **плотность** металла, обозначается греческой буквой ρ (читается как „ро“).

$$\text{Плотность } (\rho) = \frac{\text{Масса } (m)}{\text{Объем } (V)}$$

- ♦ Единичное отношение стоимости товара к его количеству или массе – это **цена** товара.

$$\text{Цена } (c) = \frac{\text{Стоимость } (P)}{\text{Масса } (m)}$$

- ♦ Единичное отношение пройденного телом расстояния ко времени его движения – это **скорость** движения тела.

$$\text{Скорость } (v) = \frac{\text{Расстояние } (s)}{\text{Время } (t)}$$

Применяем

- Какова цена сахара, если 25 кг сахара стоят 365 лев?
- Какова средняя скорость автомобиля, если время, за которое он проходит 385 км, составляет 3 ч 30 мин?

Упражнения и задачи



1. Вычислите значение отношения:

а) $\frac{9}{1,6}$; б) $\frac{4,92}{1,23}$; в) $\frac{23,32}{8,8}$; г) $\frac{50,4}{7,2}$.

2. Умножьте на 4 числитель и знаменатель отношений из упражнения 1 и вычислите значение полученных отношений.

3. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\frac{11}{2,2} = \frac{33}{\square} = \frac{\square}{3,3} = \frac{2,75}{\square} = \frac{\square}{0,44}$; б) $\frac{\square}{33,2} = \frac{20,7}{\square} = \frac{18}{8} = \frac{7,2}{\square} = \frac{\square}{0,32}$.

4. Вычислите значение отношения:

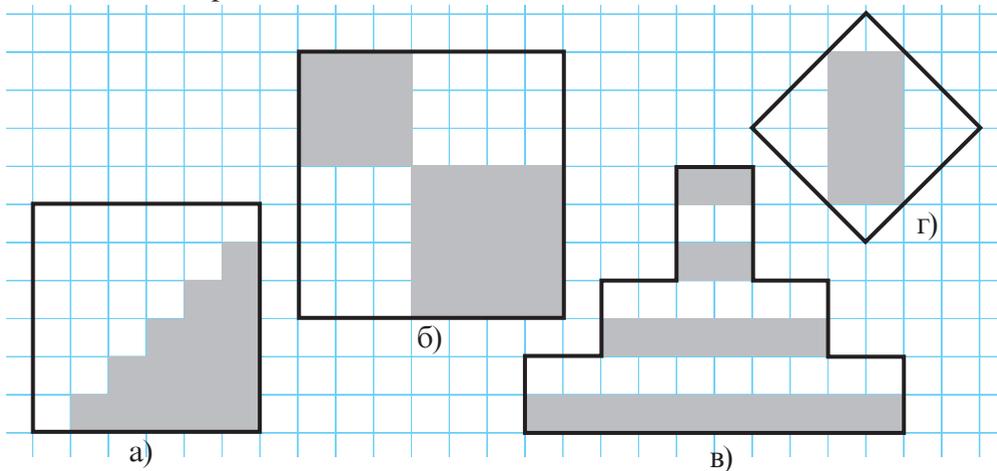
а) 3 кг и 150 г; б) 2,5 м и 125 мм; в) 6 ч и 45 мин; г) 14 см и 50 м.

5. Сравните отношения:

а) $\frac{7}{11}$ и $\frac{8}{11,5}$; б) $\frac{3,6}{0,6}$ и $\frac{10,2}{1,7}$; в) $\frac{9,6}{4,2}$ и $\frac{11,1}{5,2}$; г) $\frac{1}{7,8}$ и $\frac{2}{10,9}$.

6. В классе 32 ученика, из них 12 мальчиков. Чему равно отношение числа мальчиков к числу девочек?

7. Вычислите значение отношения площади закрашенных квадратов к площади незакрашенных:



8. Как изменится значение отношения, если увеличить в 3,5 раза только один из членов отношения? Рассмотрите оба случая.
9. Чему равна плотность тела: а) объем которого 3 см^3 , а масса $12,42 \text{ г}$; б) объем которого $0,07 \text{ м}^3$, а масса 91 кг ; в) объем которого $8,4 \text{ м}^3$, а масса $54,6 \text{ т}$?

10. Какова цена яблок, если за $3,5 \text{ кг}$ заплатили $36 \text{ леев } 75 \text{ банов}$?

11. Вычислите значение отношения:

а) $\frac{3m+4n}{4n}$, если $\frac{m}{n} = 2,4$; б) $\frac{5b}{5b-2a}$, если $\frac{a}{b} = 5$.

12. Найдите значение отношения площадей двух прямоугольников с измерениями: $2,5 \text{ см}$, 4 см и 3 см , 6 см .

13. Запишите отношение, значение которого:

а) $0,2$; б) $1,4$; в) $0,(7)$; г) $4,(5)$.

14. С какой средней скоростью движется поезд, если расстояние 1050 км он проезжает за 12 ч и 30 мин ?

15. Точка C принадлежит отрезку AB , длина которого составляет 15 см , причем $\frac{AC}{BC} = 0,875$. Найдите AC и BC .

16. Какова ежемесячная зарплата господина Петрова, если она относится к сумме минимальной потребительской корзины в 1760 леев как $7:4$?

17. Представьте число 459 в виде суммы трех чисел, которые относятся как $1:2:6$.

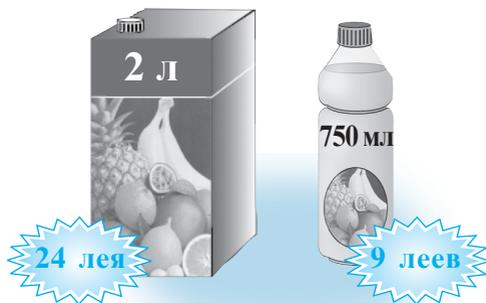
18. Представьте число 459 в виде суммы трех чисел, которые относятся как $3:2:4$.

§2 Пропорции

Исследуем и узнаем

1 Господин Копейкин решил купить сок из тропических фруктов и, как всегда, подешевле. Рассмотрите данные рисунка и помогите ему выбрать.

Решение:



$$750 \text{ мл} = 0,75 \text{ л}$$

Какая цена ниже?

$$\begin{array}{l} 2 \text{ л} \quad \text{—} \quad 24 \text{ лея} \\ 0,75 \text{ л} \quad \text{—} \quad 9 \text{ леев} \end{array}$$

$$\text{Цена} = \frac{\text{Стоимость}}{\text{Количество}}$$

$$\frac{24 \text{ лея}}{2 \text{ л}}$$



$$\frac{9 \text{ леев}}{0,75 \text{ л}}$$

$$\downarrow$$

леев/л

$$\downarrow$$

леев/л.

Равенство $\frac{24}{2} = \frac{9}{0,75}$ является **пропорцией**.

Возьмите на заметку

- ♦ Равенство двух отношений называется **пропорцией**.
- ♦ Четыре числа, образующие пропорцию, называются **членами пропорции**.
- ♦ Числа a и d пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называются **крайними членами**, а числа b и c – **средними**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a : b = c : d$$

■ крайние
■ средние

Читаем: „ a так относится к b , как c относится к d ”.

2 Сравните произведение крайних и произведение средних членов пропорции:

$$\text{а) } \frac{18}{6} = \frac{1,2}{0,4}; \quad \text{б) } \frac{2,5}{5} = \frac{5}{10}$$

Решение:

$$\text{а) } \frac{18}{6} = \frac{1,2}{0,4} \rightarrow \begin{array}{l} 18 \cdot 0,4 = \\ 6 \cdot 1,2 = \end{array} 7,2$$

$$\text{б) } \frac{2,5}{5} = \frac{5}{10} \rightarrow \begin{array}{l} \square \cdot \square = \\ \square \cdot \square = \end{array} \square$$

**Возьмите на заметку****Основное свойство пропорции**

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних, то есть, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Применяем

3 Найдите неизвестный член пропорции: $\frac{0,3}{0,2} = \frac{x}{40}$.

Решение:

Используя основное свойство пропорции, получим: $0,3 \cdot 40 = 0,2 \cdot x$.

Отсюда: $x = \frac{0,3 \cdot 40}{0,2} = 60$.

Ответ: $x = 60$.

- 4** а) Можно ли из чисел 4, 36, 18, 8 составить пропорцию?
б) А из чисел 16, 2, 4, 12?

Решение:

1 Расположим числа в порядке возрастания:

а) 4, 8, 18, 36;

б) 2, 4, 12, 16.

2 Сравним произведение наибольшего и наименьшего числа с произведением двух других чисел:

$$\begin{array}{ccc} \text{а) } 4 \cdot 36 & = & 8 \cdot 18 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 144 & = & 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{б) } 2 \cdot 16 & \neq & 4 \cdot 12 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 32 & \neq & 48 \end{array}$$

Ответ: а) Да, можно составить. Напри-

мер, пропорцию $\frac{4}{8} = \frac{18}{36}$.

б) Нет, нельзя составить.

• Составьте и другие пропорции из чисел: 4, 8, 18, 36.

**Возьмите на заметку**

Из четырех чисел можно составить пропорцию тогда и только тогда, когда произведение наименьшего и наибольшего чисел равно произведению двух других чисел.

5 Масштаб карты равен $1 : 25\,000\,000$.

Чему равно расстояние между Кишинэу и Варшавой, если на карте оно составляет 3,5 см?

Решение:

Пусть x – искомое расстояние.
Составляем пропорцию:

$$\frac{1}{25\,000\,000} = \frac{3,5}{x}$$



$$x = 3,5 \cdot 25\,000\,000 \text{ (см)} = 87\,500\,000 \text{ (см)} = 875 \text{ (км)}.$$

Ответ: 875 км.



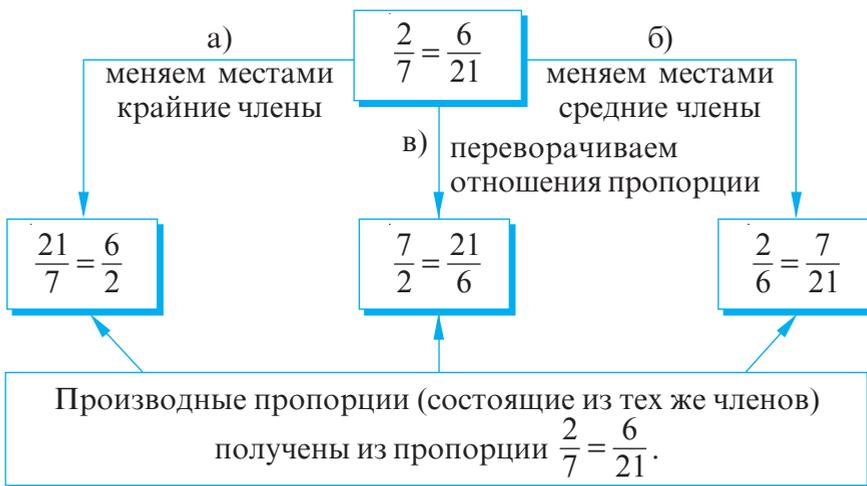
Масштабом карты (или рисунка) называется отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности.

Значит, если масштаб рисунка $1 : a$, то реальные размеры будут в a раз больше нарисованных.

6 Дана пропорция $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$. Что получится, если:

- поменять местами крайние члены;
- поменять местами средние члены;
- перевернуть отношения пропорции?

Решение:



• Обратите внимание на правила и составьте производные пропорции, которые можно получить из пропорции $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$.

Приравниваем одно из отношений к отношению, числитель которого равен сумме числителей отношений, а знаменатель – сумме знаменателей:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

Прибавляем числители к знаменателям:

$$\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

Прибавляем знаменатели к числителям:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Вычитаем из знаменателей числители:

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \quad (a < b)$$

Вычитаем из числителей знаменатели: $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (a > b)$

Упражнения и задачи



1. Назовите крайние и средние члены пропорции:

а) $\frac{4}{9} = \frac{2}{4,5}$; б) $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$; в) $\frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{6} = \frac{21}{1,8}$?

2. Составьте пропорции из отношений:

а) $\frac{1}{4}$, $\frac{0,3}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{0,5}{10}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{0,3}{1,2}$, $\frac{10}{22,5}$, $\frac{1,5}{2}$,

б) $\frac{1,4}{0,2}$, $\frac{7}{0,28}$, $\frac{1,8}{6}$, $\frac{0,09}{0,3}$, $\frac{0,63}{0,09}$, $\frac{6}{1,8}$, $\frac{2}{0,08}$, $\frac{30}{9}$.

3. Запишите пропорцию, значение каждого отношения которой будет равно:

а) 3; б) 5; в) 0,4; г) 1,5; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{6}{5}$; ж) 1.

4. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{2}{x} = \frac{8}{4}$; б) $\frac{x}{27} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{5} = \frac{5}{x}$; г) $\frac{9}{0,8} = \frac{x}{1,6}$; д) $\frac{x}{4} = \frac{3}{10}$.

5. РАБОТА В ПАРАХ!



Ежик составляет пропорции, умножая или деля числитель и знаменатель отношения на любое ненулевое число. Составьте и вы пропорции, используя отношения:



- а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{8}{5}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{0,6}{1,2}$.

6. Данные числа являются членами некоторой пропорции. Запишите эту пропорцию:

- а) $\boxed{6,2}$ $\boxed{6,4}$ $\boxed{6,08}$ $\boxed{5,89}$ б) $\boxed{37,8}$ $\boxed{21}$ $\boxed{44}$ $\boxed{79,2}$
 в) $\boxed{1080}$ $\boxed{675}$ $\boxed{1240}$ $\boxed{1984}$ г) $\boxed{0,06}$ $\boxed{0,4}$ $\boxed{0,3}$ $\boxed{0,08}$

• Сколько решений у этой задачи?

7. Используя равенство произведений, составьте пропорции:

- а) $6 \cdot 16 = 48 \cdot 2$; б) $12 \cdot 12 = 18 \cdot 8$;
 в) $2,4 \cdot 5,8 = 3,48 \cdot 4$; г) $0,9 \cdot 0,27 = 0,81 \cdot 0,3$.

8. Можно ли составить пропорцию из данных чисел?

- а) $\boxed{6}$ $\boxed{18}$ $\boxed{15}$ $\boxed{5}$; б) $\boxed{14}$ $\boxed{50}$ $\boxed{10}$ $\boxed{70}$;
 в) $\boxed{16}$ $\boxed{20}$ $\boxed{30}$ $\boxed{14}$; г) $\boxed{7,5}$ $\boxed{1,2}$ $\boxed{15}$ $\boxed{0,6}$;
 д) $\boxed{8}$ $\boxed{6}$ $\boxed{15}$ $\boxed{18}$.

9. Компания „Роснефть“ за 24 часа продала 9 700 000 барелей нефти, получив при этом прибыль в 523 800 000 \$, а компания „Парсойл“ продала за это же время 6 400 000 барелей нефти, получив 345 600 000 \$.

а) Впишите данные задачи, чтобы получить пропорцию:

$$\frac{523\ 800\ 000}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}};$$

б) Что представляет собой величина каждого соотношения пропорции?

10. Пусть d – расстояние на карте между населенными пунктами A и B . Найдите реальное расстояние AB на местности, если:

а) $d = 15$ см при масштабе $1 : 10000$;

б) $d = 6,5$ см при масштабе $1 : 20000$;

в) $d = 8$ см при масштабе $1 : 50000$;

г) $d = 5,5$ см при масштабе $1 : 30000$.



11. Составьте производные пропорции (состоящие из тех же членов) из пропорции:

а) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$;

в) $\frac{0,4}{1,6} = \frac{1,2}{4,8}$;

г) $\frac{52}{65} = \frac{4}{5}$.

12. Вычислите:

а) $15 + \frac{bc}{ad}$, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

б) ac и bd , если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2$ и $a \cdot b \cdot c \cdot d = 900$.

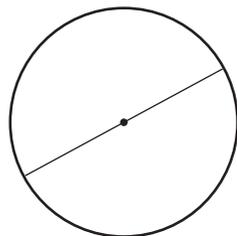
13. Значение отношения длины окружности к ее диаметру приблизительно равно $\frac{22}{7}$. Вычислите (приблизительно):

а) длину окружности, диаметр которой 10 см;

б) длину окружности, диаметр которой 1 см;

в) диаметр окружности, длина которой 10 см;

г) радиус окружности, длина которой 1 см.



14. Докажите, что если члены пропорции являются натуральными числами, то их произведение – это точный квадрат.

15. Измерьте соответствующую длину на рисунке и найдите эту длину в действительности:



Масштаб $1 : 400$



Масштаб $1 : 95$

16. Нарисуйте окружающие вас предметы в масштабе $1 : 200$.

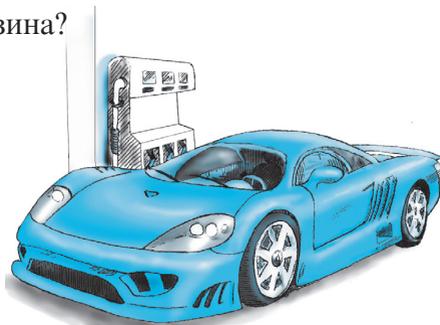
§ 3 Прямо пропорциональные величины

Исследуем и узнаем

1 Литр бензина стоит 15,3 лея.
Сколько стоят: 10 л; 20 л; 15 л; 25 л бензина?

Решение:

Количество бензина (л)	Стоимость (леев)
a	b
$\times 10 \left(\begin{array}{l} 1 \\ 10 \end{array} \right)$ $\times 2 \left(\begin{array}{l} 20 \end{array} \right) \times 15$ 15 25	$\times 10 \left(\begin{array}{l} 15,3 \\ 153 \end{array} \right)$ $\times 2 \left(\begin{array}{l} 306 \end{array} \right) \times 15$ 229,5 ...



• Допишите решение задачи.

2 Улитка ползет со средней скоростью 0,15 м/мин. Какое расстояние преодолит улитка за: 3 мин; 4 мин; 5 мин; 7 мин?

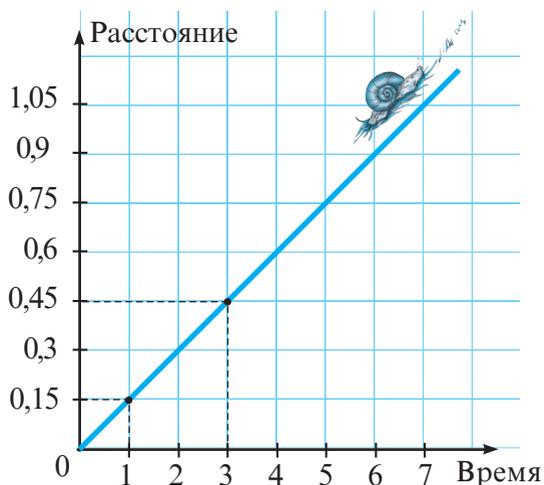
Решение:

1 способ

$v = 0,15 \text{ м/мин}$	
Время (мин)	Расстояние (м)
t	s
$1 \left. \begin{array}{l} \\ 3 \end{array} \right\} \times 3$ 3	$0,15 \left. \begin{array}{l} \\ 0,45 \end{array} \right\} \times 3$ 0,45
4	...
...	...



2 способ



• Допишите решение задачи по схеме.

- Какое расстояние проползет улитка за 6 мин? А за 3,5 мин?
- Как изменится расстояние, пройденное улиткой, если увеличить время: в 3 раза; в 4 раза; в 6 раз?
- Как изменится значение отношения $\frac{S}{t}$?

Возьмите на заметку

Две взаимосвязанные величины a и b называются **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) a в несколько раз другая величина b увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Значение отношения $\frac{b}{a}$ не изменится.

Следовательно, количество бензина и его стоимость являются прямо пропорциональными величинами (при постоянной цене).

Время и пройденное расстояние являются прямо пропорциональными величинами (при постоянной скорости).

3 Принтер печатает за 3 мин 21 страницу. Сколько страниц напечатает принтер за 10 мин?

Решение:

① Запишем кратко условие задачи в виде схемы:

↓	3 мин	—	21 страница	↓
↓	10 мин	—	x страниц	↓

② *1 способ*

Простое правило трех (для прямо пропорциональных величин):

$$\frac{3}{10} = \frac{21}{x}$$

$$x = \frac{\quad}{\quad}$$

Время и количество страниц являются прямо пропорциональными величинами.

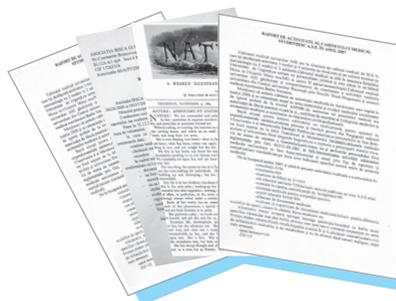
③ *Ответ:* страниц.

2 способ

Метод приведения к единице:

$$1 \text{ мин} \text{ — } \frac{21}{\quad} = \quad \text{ страниц}$$

$$10 \text{ мин} \text{ — } \quad \cdot 10 \text{ страниц}$$



ХОТИТЕ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ?

4 Три друга – Роман Рублев, Дмитрий Полушкин и Андрей Полоницей – решили открыть свой бизнес. При этом каждый вложил в дело соответствующую сумму денег (капитал): 1 600 леев, 2 000 леев, 1 800 леев. Прибыль от их бизнеса составила 16 200 леев. Как им поделить эти деньги между собой?



Решение:

Подсчитаем весь капитал: $1\,600 + 2\,000 + 1\,800 = 5\,400$ (леев).

Подсчитаем, во сколько раз прибыль больше вложенной суммы:

$$16\,200 : 5\,400 = 3 \text{ (раза).}$$

Каждый вложенный лей „вырос“ в 3 раза.

$$\text{Значит, } 1\,600 \cdot 3 = 4\,800 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Роман}$$

$$2\,000 \cdot 3 = 6\,000 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Дмитрий}$$

$$1\,800 \cdot 3 = 5\,400 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Андрей}$$

Замечаем

$$\frac{4\,800}{1\,600} = \frac{6\,000}{2\,000} = \frac{5\,400}{1\,800} \text{ – последовательность равных отношений.}$$

$$3 = \frac{4\,800}{1\,600} = \frac{6\,000}{2\,000} = \frac{5\,400}{1\,800} = \frac{4\,800 + 6\,000 + 5\,400}{1\,600 + 2\,000 + 1\,800} = \frac{16\,200}{5\,400}.$$

Возьмите на заметку

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k \neq 0$, то говорим, что между последовательностями a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n существует **прямая пропорциональность** и

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k.$$

Следовательно, между последовательностью суммы денег, вложенной в бизнес (1 600 леев, 2 000 леев, 1 800 леев), и последовательностью суммы денег прибыли, полученной каждым (4 800 леев, 6 000 леев, 5 400 леев), существует прямая пропорциональность.

5 Разделите отрезок в 18 см на три части, прямо пропорциональные числам: 2, 3, 4.

Решение:

Пусть x, y, z – последовательность искомым длин ($x + y + z = 18$).

Тогда между последовательностями x , y , z и 2, 3, 4 существует прямая пропорциональность.

$$\text{Значит, } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2.$$

Получим: $x = 4$ (см),
 $y = 6$ (см),
 $z = 8$ (см).



Упражнения и задачи



1. Определите, являются ли величины a и b , данные в таблице, прямо пропорциональными.

а)

a	2	4	6	10	12
b	3	6	9	15	18

б)

a	0,2	0,6	1,8	3,2
b	5	15	50	80

в)

a	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
b	20	40	45	48

г)

a	8	4,2	66	1
b	$\frac{4}{3}$	0,7	11	$\frac{1}{6}$

2. Заполните таблицу:

а)

Количество мешков с мукой	Вес (кг)
1	60
3	...
5	...
...	480
9	...
...	660

б)

Количество батончиков	Стоимость (леев)
1	2,5
4	...
...	15
7	...
...	27,5
9	...

в)

Расстояние (км)	Количество бензина (л)
100	7
50	...
150	...
...	17,5
350	...
...	22,75

г)

Площадь (м ²)	Количество краски (кг)
8	1
10	...
15	...
...	2,5
...	7,5
30	...



3. *Истинно или Ложно?*



- а) Площадь прямоугольника прямо пропорциональна длине каждой из его сторон.
- б) Периметр прямоугольника прямо пропорционален длине каждой из его сторон.
- в) Площадь и периметр прямоугольника – прямо пропорциональные величины.
- г) Площадь и длина стороны квадрата – прямо пропорциональные величины.

4. Тракторист вспахивает 49 гектаров пашни за 4 дня. За сколько дней тракторист вспашет:

- а) 73,5 гектара;
- б) 122,5 гектара?

5. 5 л масла весят 4 кг.

- а) Сколько килограммов масла вместится в 12-литровое ведро? А в 180 л бочку? А 250 мл стакан?
- б) Какова вместимость 700-граммовой банки масла? А 3-килограммового бидона с маслом?

6. Электронасос выкачивает из колодца 30 л воды за 12 с.

- а) За какое время наполнится водой 800-литровая бочка? А 1000-литровая бочка?
- б) Сколько воды выкачивает насос за 10 с? А за 18 с? А за 2 мин?

7. Дина выписала из кулинарной книги список продуктов, необходимых для приготовления 4 порций салата „Нежность“. Какое количество продуктов понадобится Дине для приготовления 6 порций салата? А для 10 порций?

300 г капусты
100 г колбасы
6 яиц
100 г ветчины
80 г майонеза
2 луковицы

8. а) В 100 г черной смородины содержится 250 мг витамина С. Сколько граммов витамина С содержится в 2 кг черной смородины?

- б) Суточная норма витамина С для взрослого человека составляет 0,05 г. Какое количество черной смородины надо съесть взрослому человеку, чтобы получить суточную норму витамина С?

9. Проба сплава нескольких драгоценных металлов – это количество граммов драгоценного металла в килограмме сплава. Какое количество чистого золота содержится в 16 г золотого браслета, если его проба:

- а) 585;
- б) 958?



10. Составьте и решите задачу по схеме:

а) 3,5 кг – 44,8 лея
14,5 кг – ? леев
? кг – 160 леев

б) 12 костюмов – 44 м
25 костюмов – ? м
? костюмов – 110 м

11. Из 40 л молока получается 15 кг творога.

а) Сколько творога получится из 100 л молока? А из 60 л?

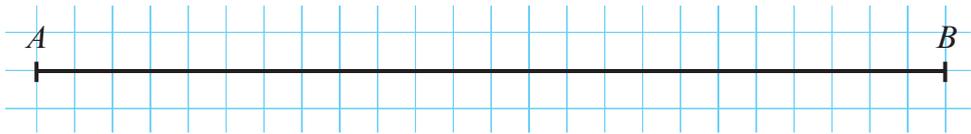
б) Сколько необходимо молока, чтобы получить 112,5 кг творога?

А 22,5 кг?

12. Составьте задачу для каждой из таблиц задания 2.

13. Разделите отрезок AB на 3 части, прямо пропорциональные числам:

а) 6, 2, 4; б) 10, 9, 5.



14. а) Разделите число 4960 на части, прямо пропорциональные числам 8, 15, 17.

б) Разделите число 9200 на части, прямо пропорциональные числам 1,75; 2,75; $3\frac{1}{6}$.



15. Найдите числа x , y , z , зная, что они прямо пропорциональны числам 3,4 и 5, а $x + y = 35$.

16. Три брата получили в наследство 90 000 долларов, которые по завещанию надо разделить следующим образом: первому – половину того, что получит второй, третьему – $\frac{3}{2}$ того, что получит второй. Какую сумму денег получит каждый из братьев?



ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

17. Среднее арифметическое четырех чисел – 34. Найдите эти числа, если известно, что они прямо пропорциональны четырем простым натуральным числам?

§ 4 Обратнo пропорциональные величины

Исследуем и узнаем

1 Скаковая лошадь проходит расстояние в 40 км за час. Это же расстояние спортсмен преодолевает за 2 часа, мотоциклист – за 30 мин, а автомобилист – за 20 мин. Вычислите скорость каждого.

Решение:

$S = 40 \text{ км}$	
Время (ч)	Скорость (км/ч)
t	v
$\times 2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) : 2$	$: 2 \left(\begin{array}{c} 40 \\ 20 \end{array} \right) \times 2$
0,5	80
$\frac{1}{3}$...



40 км/ч



20 км/ч



80 км/ч



км/ч

20 мин = $\frac{1}{3}$ ч.

- Как изменится скорость, если время: увеличить в 2 раза; уменьшить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?
- Как изменится произведение $t \cdot v$?

Возьмите на заметку

Две взаимосвязанные величины a и b называются **обратно пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) a в несколько раз, другая величина b уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Значение произведения ab не изменяется.

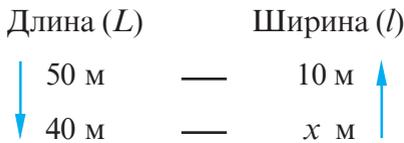
Следовательно, время и скорость являются обратно пропорциональными величинами (при постоянном расстоянии).

2 Фермер решил оградить сеткой участок прямоугольной формы (вдоль водного канала). Сначала он хотел сделать его подлинней, взяв длину 50 м и ширину 10 м. Увидев, что сетки ему не хватает, он решил уменьшить длину до 40 м, при этом периметр участка уменьшился достаточно, чтобы хватило сетки. Какой теперь будет ширина участка, если его площадь не изменилась?



Решение:

① Запишем кратко условие задачи в виде схемы:



Произведение длины (L) на ширину (l) равно площади (S), являющейся постоянной. Значит, L и l – обратно пропорциональные величины.

1 способ

② Простое правило трех (для обратно пропорциональных величин):

$$\frac{50}{40} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 10}{40} = 12,5 \text{ (м)}$$

2 способ

② Вычислим площадь:

$$S = 50 \text{ м} \cdot 10 \text{ м} = 500 \text{ м}^2$$

③ Вычислим ширину:

$$l = \frac{S}{L} = \frac{500 \text{ м}^2}{40 \text{ м}} = 12,5 \text{ м}$$

• Насколько уменьшилась длина забора из сетки?

ХОТИТЕ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ?

3 Первая бригада рабочих выполняет работу за 2 дня, вторая бригада выполняет эту же работу за 3 дня, а третья – за 4 дня. Сколько человек в каждой бригаде, если всего 156 рабочих, и все они работают с одинаковой производительностью?

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I бригада} - x \text{ рабочих} \\ \text{II бригада} - y \text{ рабочих} \\ \text{III бригада} - z \text{ рабочих} \end{array} \right\} 156 \text{ рабочих}$$

Тогда один рабочий выполняет работу за $2x$ дней (или $3y$ дней, или $4z$ дней).

Получим: $2x = 3y = 4z$.

Делим каждое равенство на [2,3,4], т. е. на 12:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{156}{13} = 12.$$

Получим: $\frac{x}{6} = 12 \quad \rightarrow \quad x = 72 \text{ (м)}$

$\frac{\blacksquare}{4} = \blacksquare \quad \rightarrow \quad y = \blacksquare \text{ (м)}$

$\frac{\blacksquare}{3} = \blacksquare \quad \rightarrow \quad z = \blacksquare \text{ (м)}$

Ответ: 72 рабочих в I бригаде, \blacksquare – во II бригаде, \blacksquare – в III бригаде.

Заметим, что $2 \cdot 72 = 3 \cdot 48 = 4 \cdot 36 = 144$. Говорим, что числовая последовательность 2, 3, 4 обратно пропорциональна числовой последовательности 72, 48, 36.

Возьмите на заметку

Числовые последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n являются **обратно пропорциональными**, если $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n$.

Замечаем

Если последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n прямо (обратно) пропорциональны, то последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}$ обратно (прямо) пропорциональны.

Упражнения и задачи



1. Определите, являются ли величины a и b , данные в таблицах, обратно пропорциональными:

а)

a	14	210	7	4	33,6
b	12	0,8	24	42	5

б)

a	1	3	5	7	9
b	11	9	7	5	3

в)

a	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
b	32	16	8	4	2

г)

a	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{5}{8}$	1,25
b	$\frac{5}{6}$	$\frac{15}{8}$	2,5	2	1

2. Заполните таблицу:

а)

Сумма: 2520 леев	
Количество человек	Сумма денег на человека
5	504
8	...
...	630
...	360
14	...
28	...

б)

Сумма: 187,5 лея	
Цена (леев/кг)	Количество (кг)
7,5	25
...	5
15	...
3,75	...
...	3
31,25	...

в)

Масса: 800 кг	
Плотность (кг/м ³)	Объем (м ³)
1000	0,8
125	...
160	...
400	...
...	1,6
...	1,28

г)

Количество бензина: 20 л	
Расход (л) на 1 км	Расстояние (км)
0,1	200
0,05	...
0,16	...
...	250
...	50
0,25	...



3. Истинно или Ложно?



- а) Количество одинаковых кранов, наполняющих водой бассейн обратно пропорционально времени наполнения бассейна.
- б) Количество отличников класса обратно пропорционально остальному количеству учащихся этого класса.
- в) В произведении двух чисел обратно пропорциональными являются множители.
- г) Количество сока, взятого из банки, обратно пропорционально количеству оставшегося сока.

4. Велосипедист проехал некоторое расстояние за 4 ч со средней скоростью 24 км/ч. С какой средней скоростью должен ехать велосипедист, чтобы преодолеть это расстояние за 3 ч?
5. 8 комбайнов могут убрать с поля пшеницу за 6 дней. За сколько дней уберут ту же пшеницу 12 комбайнов?
6. 10 рабочих выполняют работу за 9 дней. Сколько рабочих понадобится, чтобы выполнить работу за 6 дней?

14. Трактор, автобус и автомобиль проехали по 180 км каждый.

а) Заполните таблицу:

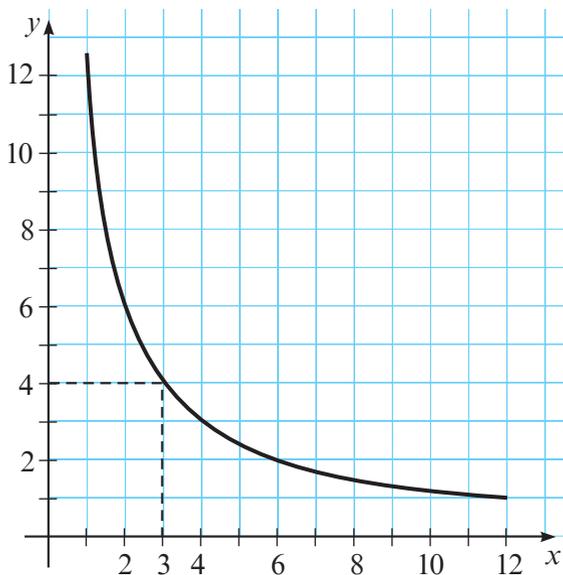
	Трактор	Автобус	Автомобиль
Скорость	30 км/ч		
Время		3 часа	2 часа

б) Являются ли скорость и время обратно пропорциональными?

в) Приведите другие примеры обратно пропорциональных величин из различных областей знаний.

15. Данный рисунок показывает зависимость между величинами x и y .

Например, если $x = 3$, то $y = 4$.



а) Запишите формулу, выражающую эту зависимость.

б) Какими величинами являются x и y ?

в) Запишите данные рисунка в виде таблицы:

x	1	2	3	4	...
y	12	?	4	?	...

16. Постройте рисунок, как в задании 14, для зависимости $y = \frac{8}{x}$.

17. Одно и то же расстояние Денис проходит за 3 ч, а Никита за 2 ч. Отправившись навстречу друг другу, они встретились в момент, когда Никита уже прошел 7 км 200 м. Какое расстояние до встречи преодолел Денис?

§ 5 Проценты

Исследуем и узнаем

1 Кто лучше всех?



В нашем классе
8 отличников,
а в вашем – 7.
Значит, мы лучшие!

Ты неправ! В вашем
классе всего
25 учеников, а в
нашем только 20!



Скажите, кто прав: Степа или Даша?

① Какую часть от всех учеников составляют отличники?

$$\begin{array}{c} 8 \text{ из } 25 \\ \downarrow \\ \frac{8}{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7 \text{ из } 20 \\ \downarrow \\ \frac{7}{20} \end{array}$$

② В каком классе отличники составляют большую часть?

$$\frac{8}{25}$$

$$\frac{7}{20}$$

$$4) \frac{8}{25} = \frac{\square}{100}$$



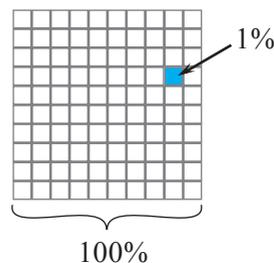
$$\frac{\square}{100} = 5) \frac{7}{20}$$

Так как $\frac{\square}{100} > \frac{\square}{100}$, то следует, что $\frac{8}{25} > \frac{7}{20}$. Значит, Степа права.

Отношение $\frac{32}{100}$ еще записывают как 32% и читают „32 процента“ (или „32 к ста“).

Возьмите на заметку

Отношение вида $\frac{p}{100}$ еще записывают как $p\%$, читают: „ p процентов“ (или „ p к ста“) и называют **процентным отношением**. Слово „процент“ происходит от латинского слова *pro centum*, означающего „поделить на сотню“. Значит, один процент это „сотая часть“: $1\% = \frac{1}{100}$.



Пример:

Один процент от 10 леев составляют 10 банов.

Любое число процентов можно записать в виде отношения или десятичного числа, и наоборот.

Пример:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$40\% = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

$$0,18 = \frac{18}{100} = 18\%$$

Можно проще:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\%,$$
$$0,18 = 0,18 \cdot 100\% = 18\%.$$



Возьмите на заметку

Чтобы выразить отношение (или десятичное число) в процентах, надо его значение умножить на 100%.

2 Сколько процентов составляют 40 см от 2 м?

Решение:

Выразим сначала длины одной единицей измерения: 2 м = см.

$$\frac{40}{\text{input}} \cdot 100\% = \text{input} \%$$

Ответ: 40 см составляют % от 2 м.

Возьмите на заметку

Для того чтобы найти, сколько процентов (p) составляет число n от другого числа m , надо умножить значение отношения $\frac{n}{m}$ на 100%:

$$p = \frac{n}{m} \cdot 100\%.$$

**ИЗ
ИСТОРИИ**

Проценты использовали индусы еще в V веке. И это естественно, так как в Индии уже тогда была известна десятичная система счисления. В Европе десятичные числа, а вместе с ними и проценты, стали использоваться только в XVI веке, благодаря нидерландскому математику Симону Стивену (1548–1620).

Иногда, если необходимы более точные измерения, применяют тысячные доли, вместо процентов. Тысячная доля – это дробь $\frac{1}{1000}$ и обозначается 1 ‰.

Таким образом, $0,1\% = 1\text{‰}$ и читается: „промилле“.

Проценты чаще всего используют в бизнесе, банковских и финансовых операциях и т. д.

Промилле применяют в фармацевтике и в других областях, где нужны более точные расчеты.

Упражнения и задачи



1. Прочитайте: 11% , $4,8\%$, $\frac{5}{100}$, $\frac{9,4}{100}$.

2. Запишите цифрами:

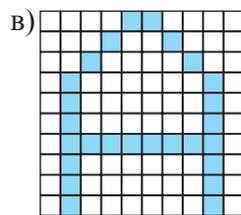
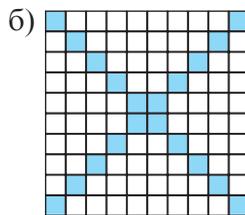
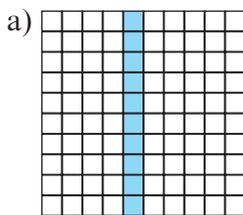
а) пятьдесят к ста;

б) шестьдесят процентов;

в) два, запятая, три к ста;

г) три десятых процента.

3. Сколько процентов от всего рисунка составляет закрашенная часть?



4. Нарисуйте в тетради квадрат со стороной в 10 клеточек. Закрасьте:

а) 25% квадрата;

б) $6,5\%$ квадрата;

в) 12% квадрата;

г) 100% квадрата.

5. Сколько процентов составляет:

а) половина;

б) четверть;

в) три четверти;

г) одна десятая;

д) половина одной сотой;

е) одна тысячная?

6. а) Мальчики составляют 38% учащихся класса. Какой процент составляют девочки этого класса?

б) Пчелиный мед содержит 17% воды. Сколько процентов составляет сухая часть меда?

в) Если $1,11\%$ детей не любят мороженое, то сколько процентов детей любят эту сладость?

7. Переведите в проценты:

а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{4}$;

в) $\frac{3}{4}$;

г) $\frac{2}{5}$;

д) $\frac{12}{25}$;

е) $\frac{9}{20}$;

ж) $\frac{1}{200}$;

з) $\frac{27}{50}$;

и) $\frac{3}{400}$;

к) $1\frac{3}{4}$;

л) $1\frac{1}{2}$;

м) $\frac{3}{8}$.

Образец:

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

8. Переведите десятичные числа в проценты:

Образец:

$$0,24 = \frac{24}{100} = 24\%;$$

$$2,17 = \frac{217}{100} = 217\%.$$

- а) 0,04; б) 0,5; в) 0,25;
 г) 0,97; д) 1,01; е) 2,23;
 ж) 0,204; з) 6,791; и) 0,(3);
 к) 0,(6); л) 5,123; м) 1.

9. Запишите в виде несократимых дробей проценты:

- а) 75%; б) 40%; в) 24%;
 г) 100%; д) 50%; е) 60%;
 ж) 15%; з) 5%; и) 150%;
 к) $\frac{1}{2}\%$; л) $\frac{1}{4}\%$;
 м) $\frac{3}{4}\%$; н) 220%.

Образец:

$$48\% = \frac{48}{100} = \frac{12}{25};$$

$$\frac{1}{5}\% = 0,2\% = \frac{0,2}{100} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}.$$

10. Переведите проценты в десятичные числа:

- а) 3%; б) 7 %;
 в) 18%; г) 44%;
 д) 0,9%; е) 0,25%;
 ж) 39,4%; з) 62,1%;
 и) 41,59%; к) 56,48%.

Образец:

$$14\% = \frac{14}{100} = 0,14;$$

$$16,5\% = \frac{16,5}{100} = 0,165;$$

$$301,19\% = 3,0119.$$

11. Перечертите и заполните таблицу:

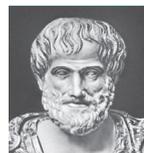
Десятичное число	0,26		0,49			7,82	
Проценты	26%	69%			143%		
Несократимая дробь	$\frac{13}{50}$			$\frac{4}{25}$			$\frac{2}{3}$



12. Сколько процентов составляют:

- а) 22 кг от 100 кг; б) 20 м от 50 м;
 в) 15 мин от часа; г) 75 банов от 2 леев;
 д) 6 мм от 12 м; е) 3 л от 300 л;
 ж) 0,4 кг от 500 г; з) 120 мин от 2 ч;
 и) 6 с от часа?

13. Расшифруйте имя одного из самых известных античных философов.



Код



	Л	С	Р	Т	А	О	И	Е	Ь
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	

				С						
10%	25%	4%	50%	20%	5%	20%	2%	100%	1%	

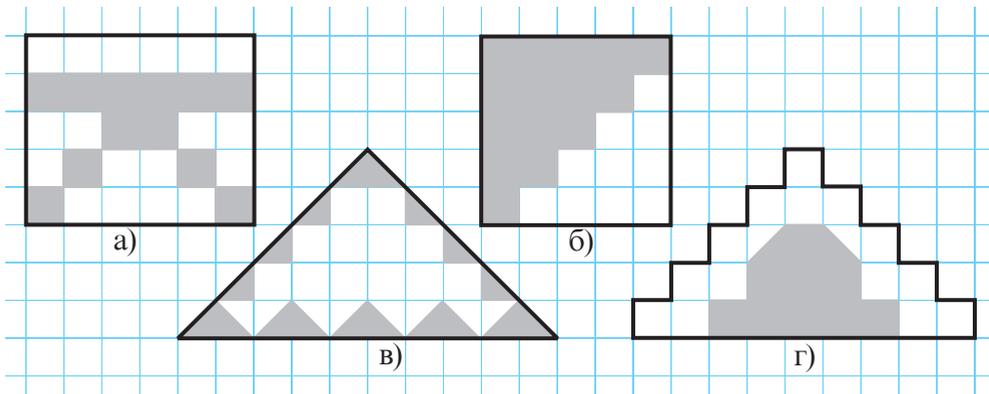
14. Округлите до целого числа процентов:

- а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{9}$;
 г) $\frac{3,5}{8}$; д) $\frac{2}{6,6}$; е) $\frac{5}{7}$.

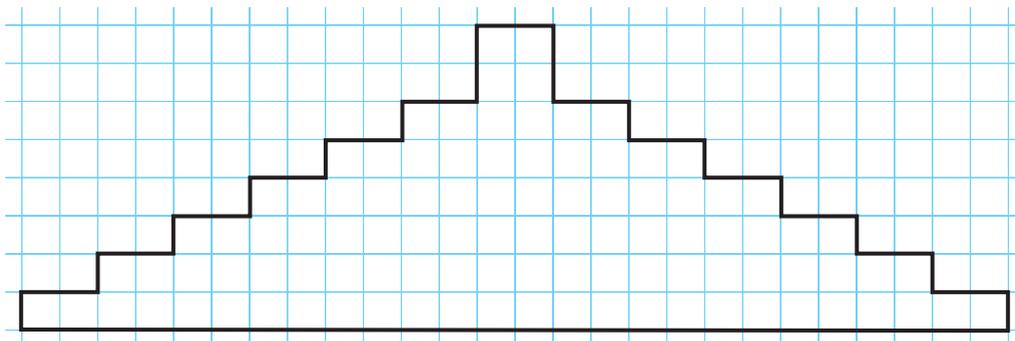
Образец:
 $\frac{2}{3} = 0,(\overline{6}) \approx 67\%$;
 $\frac{3}{11} = 0,(\overline{27}) \approx 27\%$.

15. Сколько процентов составляет длина стороны квадрата от его периметра?

16. Сколько процентов от всей площади фигуры закрашено?



17. Перечертите фигуру и закрасьте 16% ее площади.



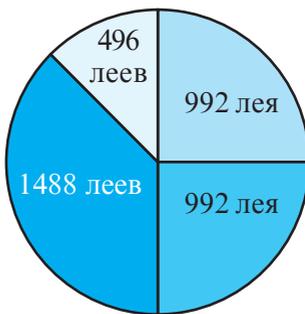
18. Расположите в порядке возрастания:

а) 0,76; 34%; $\frac{3}{4}$; 74%; 0,36;

б) 133%; $\frac{4}{3}$; 1,34; $1\frac{1}{4}$; 124%.

19. Цена проезда в маршрутке выросла с 2 до 3 леев. На сколько процентов увеличилась цена проезда?

20. Месячный доход семьи был израсходован согласно данным диаграммы.



-  коммунальные услуги
-  продукты питания
-  одежда
-  другие расходы

а) Сколько процентов от общего дохода составляют расходы на коммунальные услуги?

б) Сколько процентов от расходов на продукты питания составляют расходы на коммунальные услуги? А на одежду?

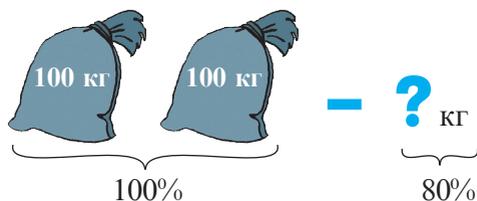
21. На выборах председателя „Детского парламента“ школы 112 учащихся проголосовали за Колю Иванова, 336 учащихся – за Витю Петрова, а остальные 224 учащихся – за Лену Сидорову. Выборы считаются состоявшимися, если за одного кандидата проголосует не меньше 40%.

а) Определите, состоялись ли выборы?

б) Представьте полученные результаты в виде круговой диаграммы (см. задание 20).

§6 Решение задач на проценты

1 При производстве муки из пшеницы получают 80% муки, остальное – отруби. Сколько муки получится из 200 кг пшеницы?



Решение:

80% от 200 кг пшеницы составляют $\frac{80}{100} \cdot 200 = \text{■}$ (кг).

Ответ: ■ кг.

Как найти процент $p\%$ от числа n ?

Нужно найти число $\frac{p}{100} \cdot n$.

2 15% ежемесячного дохода семьи составляют 900 леев. Каков месячный доход семьи?



Решение:

1 способ

Метод приведения к единице:

Если 15% дохода составляют 900 леев, то 1% дохода составляют:

$$900 \text{ леев} : 15 = 60 \text{ леев.}$$

Значит,

$$\text{доход: } 100 \cdot \text{■} \text{ леев} = \text{■} \text{ леев.}$$

Ответ: ■ леев.

2 способ

Простое правило трех:

$$\begin{array}{ccc} 15\% & \text{—} & 900 \text{ леев} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% & \text{—} & x \text{ леев} \end{array}$$

$$\frac{15}{100} = \frac{\text{■}}{\text{■}}$$

$$x = \frac{100 \cdot \text{■}}{\text{■}} = \text{■} \text{ (леев).}$$

Как найти число, зная, что число t составляет $p\%$ от искомого числа?

Нужно найти число $\frac{100}{p} \cdot t$.

3 Гонорар исполнителя поп-музыки Дореми составляет 20% доходов от продаж его дисков. 15% гонорара облагаются налогом. Какой процент от общей прибыли составляет налог?

Решение:

Гонорар $\rightarrow 20\% = \frac{20}{100}$ общей прибыли.

Налог $\rightarrow 15\% = \frac{15}{100}$ гонорара,

то есть $\frac{15}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{\square}{\square} = \square\%$ прибыли.

Ответ: $\square\%$.



Как найти $q\%$ от $p\%$?

Нужно найти $\frac{q \cdot p}{100}\%$.

4 С 1 апреля зарплата господина Чернова выросла на 20%. Какова сейчас его зарплата, если до 1 апреля она составляла 2400 леев?

Решение:

На сколько выросла зарплата?

$\frac{20}{100} \cdot 2400$ леев = \square леев.

Какова новая зарплата?

$2400 + \square = \square$ леев.

Ответ:

Можно и так:

$$2400 + \frac{20}{100} \cdot 2400 = \left(\frac{100 + 20}{100} \right) \cdot 2400.$$

Как увеличить или уменьшить значение n на $p\%$?

Если увеличить, то нужно найти $\frac{100 + p}{100} \cdot n$.

Если уменьшить, то нужно найти $\frac{100 - p}{100} \cdot n$.



Упражнения и задачи



1. Вычислите:

- | | | |
|------------------------|---------------------|---------------------|
| а) 1% от 200; | б) 10% от 40; | в) 25% от 80; |
| г) 75% от 64; | д) 50% от 3 леев; | е) 4% от 150 см; |
| ж) 9% от 200 долларов; | з) 120% от 120; | и) 95% от 360; |
| к) 160% от 160; | л) 77% от 500 леев; | м) 140% от 99 леев. |

2. Найдите число, если:

- а) 25% от него равны 60;
- б) 50% от него равны 100;
- в) 75% от него равны 96;
- г) 90% от него равны 720;
- д) 15% от него равны 12;
- е) 175% от него равны 140;
- ж) 125% от него равны 250;
- з) 4,8% от него равны 6;
- и) 3,6% от него равны 8,1.

Образец:

$$\text{а) } \frac{60}{25} \cdot 100 = 240.$$

Проверка:

$$25\% \text{ от } 240 \Rightarrow \frac{25}{100} \cdot 240 = 60.$$

3. Выполните вычисления:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| а) увеличьте 200 леев на 50%; | б) уменьшите 160 леев на 25%; |
| в) увеличьте 80 м на 75%; | г) уменьшите 120 см на 40%; |
| д) увеличьте 10000 леев на 3%; | е) уменьшите 15000 леев на 8%; |
| ж) уменьшите 1 м на 0,1%; | з) уменьшите 2 л на 0,5%. |

4. Сравните:

- | | | |
|--------------------|---|--------------------|
| а) 70% от 150 см | ● | 60% от 2 м; |
| б) 25% от 10 кг | ● | 40% от 6000 г; |
| в) 15% от 800 леев | ● | 24% от 600 леев; |
| г) 50% от 1 дам | ● | 75% от 0,2 гм; |
| д) 125% от 2 часов | ● | 10% от одного дня; |
| е) 6% от 240 л | ● | 96% от 15000 мл. |



5. Вычислите:

- а) 10% от 50%; б) 25% от 40%; в) 50% от 50%; г) 10% от 90%.

6. Впишите соответствующий знак сравнения:

- а) 25% от 50 ● 50% от 25;
б) 15% от 36 ● 36% от 15;
в) 20% от 40 ● 40% от 20;
г) 1% от 101 ● 101% от 1.



7. *Истинно* или *Ложно*?



- а) Если число увеличить на 20%, затем получившееся число уменьшить на 20%, то в результате получим первоначальное число.
- б) Если число сначала увеличить на 20%, затем на 40%, то получим то же число, которое сначала увеличили на 40%, затем на 20%.
- в) Если число уменьшить сначала на 30%, затем на 40%, то получим то же число, которое уменьшили сразу на 70%.
- г) 150% от 200 равно 200% от 150.
- д) В Республике Молдова 28% населения составляют дети, 31% – люди пенсионного возраста, 42% – остальное население.
8. В прошлом году рост Миши составил 1 м 40 см. С тех пор он вырос на 5%. Каков его рост сейчас?
9. Из 3 473 900 жителей Республики Молдова 28% составляют дети. Сколько детей в нашей стране?
10. Во время выборов в парламент на избирательные участки пришли 1 641 600 избирателей, что составило 60% от числа жителей, имеющих право голоса. Сколько жителей Молдовы имеют право голоса?
-
11. При замерзании объем воды увеличивается на 9%. На сколько процентов меньше получим воды, если разморозить лед?
12. Цена на мясо увеличилась на 25%. Сколько килограммов мяса можно купить сейчас на ту сумму денег, на которую раньше можно было приобрести 1 кг мяса?
13. После стирки ширина покрывала уменьшилась на 0,5%, а его длина – на 1%. На сколько процентов уменьшилась площадь покрывала?
14. Цена на товар сначала поднялась на 30%, затем еще на 20%. На сколько процентов от первоначальной цены подорожал товар?

15. Из 1 000 учащихся школы одну четверть составляют мальчики. Во вторую смену учатся 300 учащихся, из которых 60% – мальчики. Сколько процентов от всех мальчиков составляют мальчики, обучающиеся во вторую смену?

16. Зарплата господина Морару повысилась на 225 леев, то есть на 15%. Какая зарплата была у господина Морару до повышения?

17. Цена пылесоса уменьшилась на 210 леев, то есть на 35%. Какой была цена пылесоса до скидки?

18. 70% учащихся класса посещают кружок математики, 85% – танцевальный кружок. Каков минимальный процент учащихся, посещающих оба кружка?

19. Вычислите: а) $66\frac{2}{3}\%$ от 66,6. б) $33\frac{1}{3}\%$ от $33\frac{1}{3}$.

20. Банк принимает деньги на хранение и в конце года обновляет счет соответствующими годовыми процентами. Заполните таблицу:

Владелец счета	Первоначальная сумма (леев)	Годовой процент	Период хранения (год)	Окончательная сумма на счету
Иван Чернов	20 000	10%	2	24 200
Роман Белов	15 000	14%	?	22 223,16
Анна Петрова	200 000	?	4	243 101,25
Влад Сидоров	64 000	8%	2	?
Сергей Борисов	120 000	12%	?	150 528
Артем Смирнов	?	10%	5	644 204

21. а) Если x составляет 40% от y , то сколько процентов составляет y от x ?

б) Если x составляет 120% от y , то сколько процентов составляет y от x ?

в) Если x составляет 25% от $\frac{2}{3}y$, то сколько процентов составляет y от x ?

г) Если $\frac{1}{4}x$ составляет 125% от $\frac{3}{2}y$, то сколько процентов составляет y от x ?

22. Олег и Дима одновременно вышли из одного дома по направлению к школе. Шаг у Олега шире на 20%, а у Димы количество шагов за тот же интервал времени на 20% больше. Кто из них первым придет в школу?

7.1. Элементы теории вероятности

Исследуем и узнаем

1 Бросают игральную кость. Каковы шансы (вероятность) выпадения грани с:

- 8 очками;
- 4 очками;
- количеством очков меньше 7?

Решение:

Бросание игральной кости – это **эксперимент**. В результате этого эксперимента могут наступить или не наступить события, связанные с этим экспериментом.

- Событие „Выпадет грань с 8 очками“ не имеет шансов (вероятности) наступить, так как на каждой грани игральной кости не больше 6 очков. Говорим, что это событие *невозможное*, а шанс (вероятность) наступления равен 0.
- Событие „Выпадет грань с 4 очками“ имеет шанс (вероятность) наступить. Говорим, что это событие *возможно* (или *случайно*).
- Событие „Выпадет грань с количеством очков меньше 7“ обязательно наступит, поэтому говорим, что это событие *достоверно*, а шанс (вероятность) наступления равен 1.



Возьмите на заметку

В жизни встречаются разные **эксперименты**. Результат эксперимента называется **событием**. События могут быть:

- ♦ достоверными → Шанс (вероятность) наступления равен 1.
- ♦ невозможными → Шанс (вероятность) наступления равен 0.
- ♦ случайными → Шанс (вероятность) наступления равен числу больше 0, но меньше 1.

Решаем и поясняем

В барабане одинаковое количество белых и черных шаров. Из барабана наугад извлекают один шар. Дополните предложения:

- Событие „Извлечен белый шар“ является _____ событием.

- 2) Событие „Извлечен черный шар“ является событием.
- 3) Событие „Извлечен зеленый шар“ является событием.
- 3) Шансы (вероятность) наступления событий 1) и 2) равны .

7.2. Представление данных

Исследуем и узнаем

2 Ученики VI класса получили следующие оценки за выполнение контрольной работы по математике: две „4“, шесть „5“, четыре „6“, четыре „7“, три „8“, две „9“ и четыре „10“. Представьте в виде таблицы данные об оценках за контрольную работу.

Решение:

Оценка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
К-во оценок	0	0	0	2	6	4	4	3	2	4

В таблице записаны результаты проведения контрольной работы по математике в VI классе. В этом случае говорят, что выполнен *статистический анализ, сбор и регистрация данных*.



Возьмите на заметку

Математическая статистика – это наука, занимающаяся сбором, регистрацией, обработкой, анализом и интерпретацией данных, относящихся к некоторому явлению (из экономики, социальной жизни, метеорологии, сельского хозяйства, биологии и др.).

Статистические данные можно представить с помощью:

- таблиц;
- графиков (рис. 3);
- диаграмм (квадратных, столбчатых, круговых и др.) (рис.1, рис.2, рис. 4).

Решаем и поясняем

• Представьте с помощью столбчатого графика результаты проведения контрольной работы по математике из задачи **2**.

Решение:

Графическое представление дано на рисунке 1. Проанализируйте этот рисунок.

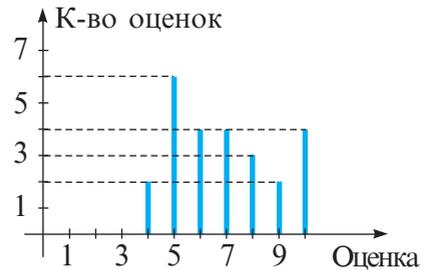


Рис. 1

3 В школьной библиотеке 50% книг на русском языке, 25% на румынском, 10% на английском и 15% книг на французском языке.

Представьте эти данные с помощью круговой диаграммы.

Решение:

Графическое представление дано на рисунке 2.

Проанализируйте этот рисунок.

На графике, изображенном на рисунке 3, представлено помесячное количество сока, изготовленного на заводе за первое полугодие 2017 года.

Проанализируйте этот график. Прокомментируйте создавшуюся ситуацию на заводе в первом полугодии. Какие рекомендации вы можете дать администрации завода?



Рис. 2



Рис. 3

Упражнения и задачи



- Приведите по два примера экспериментов и событий, связанных с этими экспериментами (достоверных, невозможных, случайных).
- Провели эксперимент „Бросание баскетбольного мяча в корзину“.
 - Сформулируйте события, связанные с этим экспериментом.
 - Являются ли эти события достоверными? Невозможными? Случайными?
 - Каковы шансы наступления сформулированных событий.
- В коробке 12 красных и 12 синих карандашей. Наугад взяли один карандаш из коробки.
 - Сформулируйте события, связанные с этим экспериментом.
 - Определите шансы наступления каждого события. Сделайте выводы.
- Приведите примеры экспериментов и определите возможные события, связанные с этими экспериментами.

5. В коробке с леденцами красного, желтого и зеленого цвета половина конфет красного цвета, четверть – желтого цвета, а остальные – зеленого. Наугад извлекается одна конфета.
- Какой из этих цветов более вероятен при извлечении одного леденца?
 - У конфет какого цвета одинаковые шансы быть извлеченными?
6. Соберите статистические данные относительно роста учащихся вашего класса. Представьте полученные данные:
- в виде таблицы;
 - в виде столбчатого графика.

7. На рисунке 4 представлены в виде столбчатой диаграммы продажи учебников в книжном магазине за неделю.
- Сколько всего было продано учебников?
 - Найдите процент проданных учебников за каждый день.
 - В какой день было продано больше всего учебников?

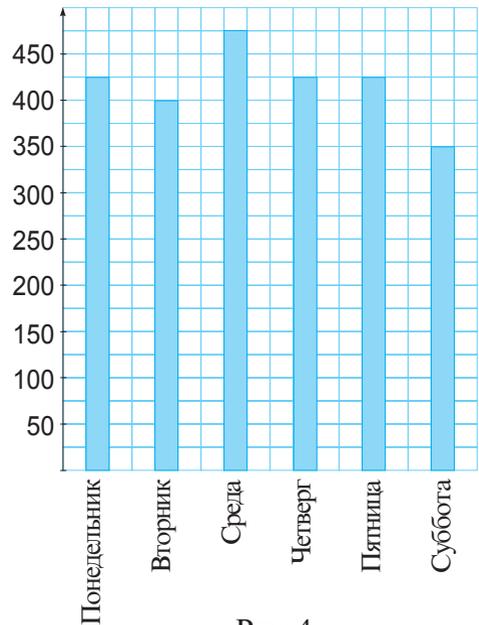


Рис. 4

8. В таблице представлено количество пациентов поликлиники за один день.
- Представьте в виде столбчатой диаграммы эти статистические данные.
 - Вычислите процент пациентов за каждый период времени.
 - В какой период времени поликлинику посетила бóльшая часть пациентов: до обеда (до 13 часов) или после него? На сколько процентов больше?

Период времени	К-во пациентов
с 9 до 10	88
с 10 до 11	102
с 11 до 12	185
с 12 до 13	80
с 13 до 14	110
с 14 до 15	164
с 15 до 16	76
с 16 до 17	58

9. Монету бросают 20 раз.
- Определите события, связанные с выпадением орла или решки при бросании монеты.
 - Каковы шансы наступления данных событий?
 - Повторите этот эксперимент еще 20 раз. Сделайте вывод.

10. Бросают игральную кость.
- Сформулируйте хотя бы 6 случайных событий этого эксперимента.
 - Сформулируйте хотя бы 3 достоверных события этого эксперимента.
 - Сформулируйте хотя бы 2 невозможных события этого эксперимента.

11. Из 24 сыгранных матчей футбольным клубом „Удача“ 11 матчей выиграно и 8 ничьих. Из 24 сыгранных матчей футбольным клубом „Успех“ 14 матчей выиграно и 5 ничьих. За каждую победу команда получает 3 очка, а за ничью – 1 очко. Осталось сыграть 5 матчей. Какой из двух футбольных клубов имеет больше шансов занять первое место в чемпионате?

12. Имеют ли равные шансы наступления следующие события, связанные с экспериментом „Бросание игральной кости“:

- „выпадут 8 очков“ и „выпадут 12 очков“;
- „выпадет 2 очка“ и „выпадут 6 очков“;
- „выпадет четное число очков“ и „выпадет нечетное число очков“?

13. В коттеджном поселке 350 домов: 210 из них – одноэтажные дома, 120 – двухэтажные дома и 20 – трехэтажные.

- Представьте эти данные в виде таблицы.
- Представьте эти данные с помощью столбчатой диаграммы.

14. **Практическая работа.** Определите количество разноуровневых домов вашего квартала и представьте полученные данные с помощью столбчатой диаграммы.

15. **Практическая работа.** Представьте в виде круговой диаграммы в процентах наличие в вашей домашней библиотеке книг, изданных на разных языках.

16. На диаграммах, изображенных на рисунке 5, допущены ошибки.

Найдите их и постройте правильные диаграммы.

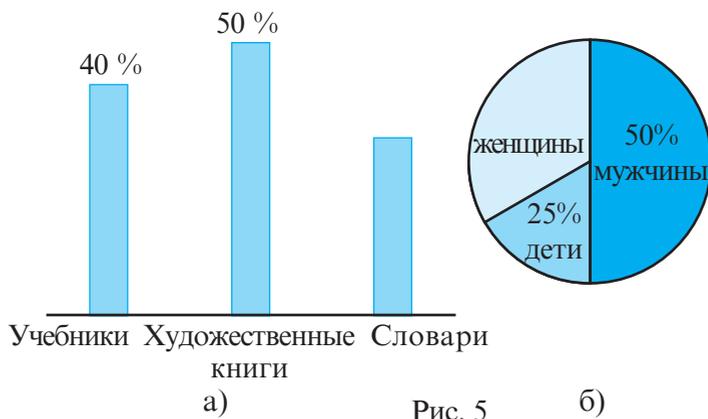


Рис. 5

- 17.** Представьте в виде столбчатой диаграммы следующие данные:
- расстояние от Солнца до планеты Меркурий ≈ 58 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Венера ≈ 108 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Земля ≈ 150 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Марс ≈ 228 миллионов км.
- (Возьмите за 1 см 10 миллионов км.)
- 18.** а) Представьте в виде столбчатой диаграммы следующие данные:
- длина реки Днестр – 1 400 км;
 - длина реки Днепр – 2 200 км;
 - длина реки Дон – 1 900 км;
 - длина реки Волга – 3 500 км.
- б) Определите, по территории каких стран протекает каждая река.
- в) Найдите, округлив до десятых, во сколько раз Днестр короче Днепра.
- г) Определите, округлив до десятых, во сколько раз Волга длиннее Днепра.

-
- 19.** Представьте следующие данные в виде круговой диаграммы, а затем в виде столбчатой:
- а) В селе 120 домов, из которых 25 – покрыты шифером, 35 – черепицей, а у 60 домовы крыши дощатые.
- б) В коробке с цветными карандашами 12 красных, 8 синих, 5 черных и 15 желтых карандашей.
- 20.** В урне 50 шаров, пронумерованных числами 1,2,3,...,50. Выбирают наугад один шар. Какое из событий имеет больше шансов наступить:
- 1) „Выбрали шар с числом, которое при делении на 5 дает в остатке 1“;
 - 2) „Выбрали шар с числом, которое является точным квадратом“.
- 21.** Приведите три примера экспериментов, события которых имеют равные шансы произойти.
- 22.** Представьте в виде столбчатой диаграммы количество учащихся во всех классах вашей школы.
- 23.** Проведите какое-либо исследование с одноклассниками и представьте полученные данные наиболее удобным способом.

Задания для осмысления

1. Что называют отношением двух чисел?
2. Приведите примеры отношений из повседневной жизни.
3. Спросите у родителей и укажите, чему равно отношение количества сахара к фруктам, использованным для приготовления варенья, компота.
4. Чем отличается отношение от дроби?
5. Сформулируйте примеры отношений из физики, экономики, геометрии, кулинарии.
6. Что представляет собой пропорция?
7. Запишите все пропорции, которые можно получить из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
8. В каком случае из четырех ненулевых чисел можно получить верную пропорцию?
9. Приведите свои примеры пропорций из разных областей знания.
10. Какие величины называются прямо пропорциональными?
11. Приведите примеры прямо пропорциональных величин из разных областей знания.
12. Дополните предложения, чтобы получить истинные высказывания:
 - а) „Зарплата родителей прямо пропорциональна ...“
 - б) „Расстояние, пройденное автомобилем, прямо пропорционально ... и ...“
13. Составьте задачу, которую можно решить, используя *Простое правило трех*.
14. Какие величины называются обратно пропорциональными?
15. Приведите примеры обратно пропорциональных величин из разных областей знания.
16. Что такое 1%?
17. Верно ли, что $\frac{3}{4} = 75\%$? Обоснуйте ответ.
18. „Газ в Республике Молдова подорожал на 12%“. Объясните смысл этого высказывания.
19. Какие типы задач на проценты вы знаете?
20. Как найти процент $p\%$ от числа n ?
21. Как найти число, зная, что число m составляет $p\%$ от искомого числа?

22. Как найти $q\%$ от $p\%$?
23. Составьте задачу по каждому типу задач на проценты.
24. Приведите примеры применения процентов в разных областях знания.
25. Для чего нужны проценты?
26. Приведите примеры событий: достоверных, невозможных, возможных.
27. Как можно представить статистические данные?

Упражнения и задачи на повторение



1. Вычислите значение отношения:

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{7}{2}$; в) $\frac{0,504}{1,4}$; г) $\frac{4,35}{2,9}$.

2. Запишите три отношения, равные отношению:

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{1,2}{0,4}$; г) $\frac{0,1}{11,1}$.

3. Сравните числа a и b , если:

а) $\frac{a}{b} = 0,93$; б) $\frac{a}{b} = \frac{2,015}{2,104}$; в) $a = 1,6b$;
 г) $b = 0,99a$; д) $\frac{b}{a} > 1$; е) $\frac{a}{b} < 1$.

4. Найдите значение отношения между:

- а) количеством дней в январе и в августе;
- б) количеством дней недели и дней весенних месяцев;
- в) своим ростом и ростом соседа по парте;
- г) количеством страниц в учебниках по математике и физике.

5. Сравните с помощью отношения:

- а) возраст родителей;
- б) свой вес и вес соседа по парте;
- в) измерения учебника по математике;
- г) валютный курс доллара и евро.

6. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\frac{5}{6} = \frac{20}{\square} = \frac{\square}{36} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{9}$; б) $\frac{\square}{0,5} = \frac{7}{\square} = \frac{\square}{2} = \frac{8,4}{\square} = \frac{\square}{9,6} = \frac{49}{7}$;
 в) $\frac{9}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{12}{16} = \frac{\square}{22}$; г) $\frac{1}{\square} = \frac{2}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{4}{6}$.

7. Сравните цены.

- а) 3 кг пшеничной муки стоят 26 леев, а 2 кг кукурузной муки – 17 леев.
 б) 1,5 л томатного сока стоят 11,4 лея, а 2 л яблочного сока – 14,6 лея.
 в) 0,8 м² керамической плитки стоят 65 леев, а 1,2 м² паркета – 98 леев.
 г) 5 м железной трубы стоят 140 леев, а 3 м оцинкованной трубы – 100 леев.

8. Восстановите пропорцию:

а) $\frac{8}{9} = \frac{\square}{18}$; б) $\frac{\square}{6} = \frac{5}{4}$; в) $\frac{2,4}{\square} = \frac{4}{1,6}$; г) $\frac{10}{0,4} = \frac{2}{\square}$.

9. Определите, являются ли данные числа членами пропорции:

а) $\boxed{18} \quad \boxed{4} \quad \boxed{2} \quad \boxed{9}$; б) $\boxed{1} \quad \boxed{7} \quad \boxed{3} \quad \boxed{21}$;
 в) $\boxed{8} \quad \boxed{\frac{2}{9}} \quad \boxed{\frac{1}{3}} \quad \boxed{7}$; г) $\boxed{12} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6} \quad \boxed{10}$.

10. Из 25 л молока получают 3 л сметаны.

- а) Сколько сметаны получится из 75 л молока? А из 180 л? А из 500 мл?
 б) Сколько молока потребуется, чтобы получить 4,5 л сметаны?
 А 600 мл? А 500 мл?

11. Фермер вскопал землю вокруг 5 деревьев за 30 минут. Если он будет продолжать работать в том же темпе, за какое время он вскопает землю вокруг 150 деревьев?

12. В таблице представлены данные о скорости и времени прохождения одного и того же расстояния разными видами транспорта. Перечертите и заполните таблицу:

Скорость (км/ч)	40			90	120	50	10			200
Время (ч)	3	2	4					6	8	

13. Девочки составляют 55% всех учеников школы. Чему равно отношение числа мальчиков к числу девочек?

14. Запишите в процентном отношении:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{9}{10}$; г) $\frac{15}{2}$; д) 0,91; е) 2,14; ж) $1\frac{1}{4}$; з) $2\frac{5}{8}$.

15. Сколько процентов составляют:

а) 5 от 12; б) $\frac{4}{9}$ от $\frac{2}{3}$; в) 25 от 40; г) $1\frac{1}{3}$ от $2\frac{1}{9}$?

16. а) Уменьшите сумму в 180 леев на 15%.

б) Уменьшите сумму в 240 леев на 20%.

в) Увеличьте сумму в 2100 леев на 25%.

г) Увеличьте сумму в 1480 леев на 30%.

17. Из 2 500 семян взошли 2 175. Найдите процент всхожести семян.
18. Провели эксперимент: „Выбрали наугад одну цифру“. Приведите два примера событий: а) достоверных; б) невозможных.
19. В коробке 16 зеленых и 14 синих карандашей. Какое из событий имеет больше шансов наступить:
A: „Извлекли наугад зеленый карандаш“ или *B*: „Извлекли наугад синий карандаш“?



20. Телевизор потребляет 180 W (читаем „ватт“) электроэнергии за 3 часа. Сколько электроэнергии будет израсходовано работающим телевизором за 5 часов? А за 8 часов?
21. Фотографию размером 5 см на 6 см пропорционально увеличили таким образом, что ее длина стала 108 мм. Какова теперь ширина фотографии?
22. В таблице указаны тарифы телефонных переговоров для двух пакетов.

Пакет	Включенные минуты	Абонемент (леев)	Тариф за дополнительные минуты (банов)
Стандарт	300	24	9,6
Эконом	200	6	24

Господин Копейкин за месяц в среднем расходует 200 мин телефонного времени, а его квартирант Иван – 250 мин в среднем.

- а) Какой пакет более удобен для них?
 б) Какую сумму денег должен заплатить каждый из них за телефон? (Рассмотрите оба случая.)
23. Увидев персидский ковер размером 3 м на 4 м и стоимостью 4 080 леев и индийский ковер размером 2,5 м на 4,5 м стоимостью 3 825 леев, господин Копейкин сделал вывод, что персидский ковер дороже индийского (хотя их периметры одинаковы!). Прав ли господин Копейкин?
24. Известно, что $\frac{x}{y} = 3,4$ и $\frac{z}{y} = 17$. Найдите $\frac{x}{z}$.
25. Отношение двух натуральных чисел $-\frac{2}{3}$, а их разность -3 . Найдите эти числа.



26. Произведение двух натуральных чисел – 96, а значение их отношения – 1,5. Найдите эти числа.
27. Значение отношения двух чисел – 5,92, а их сумма – 17,3. Найдите эти числа.
28. Величины x и y прямо пропорциональны. Зная, что если $x = 8$, то $y = 3$, найдите:
- а) значение y , если $x = 12$; б) значение y , если $x = 2$;
 в) значение x , если $y = 30$; г) значение x , если $y = 0,9$.
29. Величины u и v обратно пропорциональны. Зная, что если $u = 12$, то $v = 20$, найдите:
- а) значение v , если $u = 5$; б) значение v , если $u = 8$;
 в) значение u , если $v = 60$; г) значение u , если $v = 3$.
30. Зарплата рабочего составляла 1 600 леев. Сейчас он получает 2 320 леев. На сколько процентов выросла зарплата рабочего?
31. Зарплата учителя составляла 1 800 леев. Ее повысили на 35%. Какова теперь зарплата учителя?
32. **Практическая работа.** Проведите экскурсию в школьной библиотеке и определите число книг, изданных на разных языках. Представьте полученные данные при помощи:
- а) таблицы; б) круговой диаграммы; в) столбчатой диаграммы.
33. Приведите примеры использования представления данных вашими родителями в их профессиональной деятельности.
-
34. Миша потратил 20% всей суммы своих денег. На сколько процентов он должен увеличить оставшуюся сумму денег, чтобы получить первоначальную сумму?
35. Одно число составляет 80% от другого числа. Сколько процентов составляет второе число от: а) первого; б) их суммы?
36. Зная, что $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 5$, найдите: а) $\frac{x+y+z}{a+b+c}$; б) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.
37. Дана пропорция: $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Найдите:
- а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x}{x+y}$; в) $\frac{x+2}{y+9}$; г) $\frac{3x+4y}{4y}$.
38. Дана пропорция $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$. Найдите каждое из отношений пропорции, если $a+b = 27$.

ИТОВОГОЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. В соревновании участвуют 80 спортсменов, из которых $\frac{3}{5}$ – девушки.

а) *Истинно* или *Ложно*?

„ $\frac{3}{5}$ – рациональное число.”

б) Определите, какой процент от всех спортсменов составляют девушки.

в) Вычислите значение отношения между количеством юношей и количеством девушек, участвующих в одном из забегов, если в этом забеге участвовало на 12 девушек меньше, чем общее количество девушек.

2. Даны числа: 6; 0,4 и 1,6. Впишите такое число, чтобы полученное высказывание стало истинным:

$$” \frac{6}{0,4} = \frac{\square}{16} . ”$$

Обоснуйте ответ!

3. Масштаб карты равен 1:5000000. Найдите расстояние от города Бричень до муниципия Кишинэу, если на карте оно равно 4,8 см.

4. В V классе 30 учащихся, в VI – 28 учащихся, в VII – 32 учащихся, в VIII – 30 учащихся, а в IX классе – 36 учащихся.

а) Представьте эти статистические данные в виде таблицы.

б) Представьте в виде столбчатой диаграммы эти статистические данные.

II вариант

1. В олимпиаде участвуют 60 учащихся, из которых $\frac{3}{4}$ – юноши.

а) *Истинно* или *Ложно*?

„60 – целое число.”

б) Определите, какой процент от всех участников составляют юноши.

в) Вычислите значение отношения между количеством юношей и количеством девушек, участвующих на одном из этапов олимпиады, если на этом этапе участвовало на 8 юношей меньше, чем общее количество юношей.

2. Даны числа: 8; 0,5 и 2,5. Впишите такое число, чтобы полученное высказывание стало истинным:

$$” \frac{8}{\square} = \frac{0,5}{2,5} . ”$$

Обоснуйте ответ!

3. Масштаб карты равен 1:4000000. Найдите расстояние от муниципия Кишинэу до города Кахул, если на карте оно равно 4,3 см.

4. В V классе 18 учащихся, в VI – 24 учащихся, в VII – 30 учащихся, в VIII – 18 учащихся, а в IX классе – 28 учащихся.

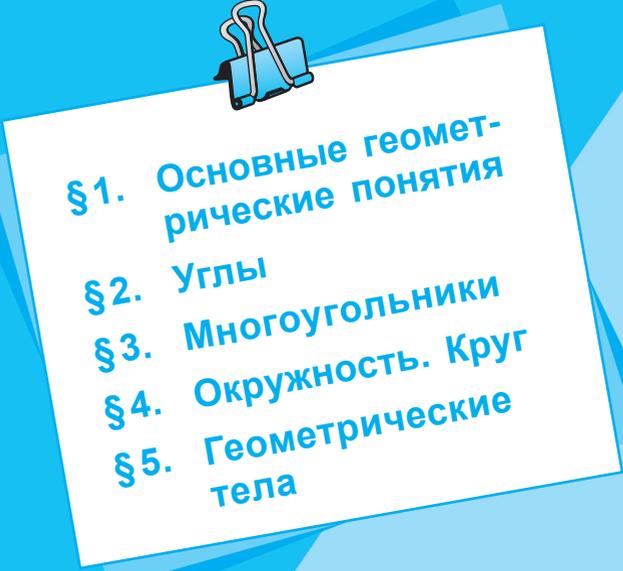
а) Представьте эти статистические данные в виде таблицы.

б) Представьте в виде столбчатой диаграммы эти статистические данные.

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

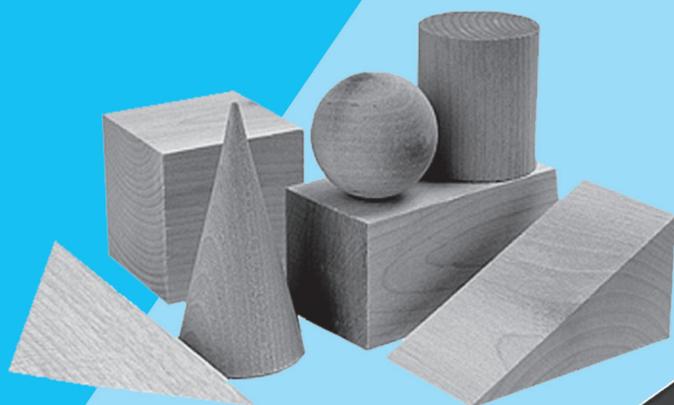
- 
- §1. Основные геометрические понятия
 - §2. Углы
 - §3. Многоугольники
 - §4. Окружность. Круг
 - §5. Геометрические тела

1

2

3

4



§1 Основные геометрические понятия

1.1. Геометрические понятия

Что знаем? Что узнаем?

1 Рассмотрите рисунки и обратите внимание на ассоциации, проведенные Всезнайкой.



- Линия горизонта → **прямая**
- Населенные пункты на карте → **точки**
- Луч света → **полупрямая**
- Траектория полета Кишинэу–Бухарест → **отрезок**
- Рельсы → **параллельные прямые**

- Объясните понятие *геометрическая фигура*.
- Какая геометрическая фигура является самой простой?



Вспомним

- ♦ **Геометрическая фигура** – это множество точек.
- ♦ **Точка** – самая простая геометрическая фигура.

Изображаем:

$A \cdot$ или \times B

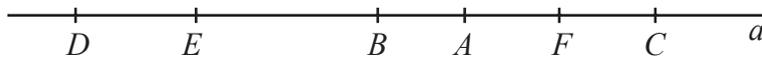
- ♦ **Прямая** не имеет ограничений.

Изображаем:

$\underline{\hspace{2cm}}$ a или $\underline{\hspace{0.5cm}A\hspace{0.5cm}B\hspace{0.5cm}}$ или $\underline{\hspace{0.5cm}M\hspace{0.5cm}N\hspace{0.5cm}}$

- Три и более точки, лежащие на одной прямой, называются **коллинеарными**.
- Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, называются **параллельными прямыми**.
- Две прямые называются **пересекающимися прямыми**, если у них есть одна общая точка.

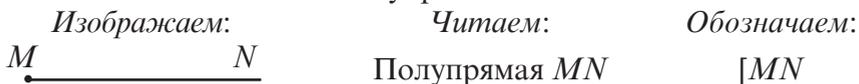
2 Рассмотрите рисунок и заполните пропуски:



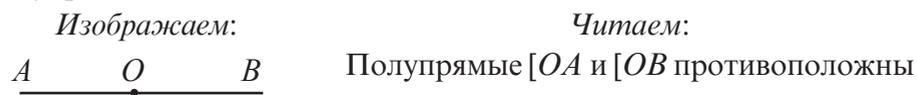
- а) Точка A расположена *между* точками и .
- б) Точки A и C расположены *по разные стороны* от точки .
- в) Точки A, B, E, D расположены *по одну сторону* от точки .
- г) Точки расположены по одну сторону от точки B .
- д) Часть прямой a , ограниченная точкой B и состоящая из всех точек прямой a , расположенных по одну сторону с точкой A , называется .

Возьмите на заметку

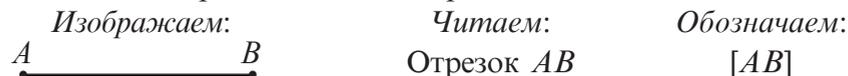
- ♦ **Полупрямая** – это часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от некоторой точки, которая называется **началом** этой полупрямой.



- ♦ Точка O , принадлежащая прямой, делит эту прямую на две **противоположные полупрямые**. Данная точка является **началом** этих полупрямых.



- ♦ **Отрезком** называется часть прямой, заключенная между двумя точками. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**.



3 С какой геометрической фигурой ассоциируется поверхность воды озера в безветренный день?

Поясняем

Поверхность воды озера (без волн) похожа на часть плоскости.

Возьмите на заметку

Плоскость не имеет ограничений. *Изображаем* плоскость α (альфа):

Если прямая лежит в плоскости, то она разбивает эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями**.



4 Истинно или Ложно?

Одно из высказываний ложно. Найдите его и объясните свой выбор с помощью рисунка.

- Через одну точку можно провести бесконечное множество прямых.
- Через две различные точки можно провести только одну прямую.
- Конгруэнтные отрезки имеют равные длины.
- Если каждая из прямых a и b параллельна прямой c , то прямые a и b параллельны.
- Если каждая из прямых a и b пересекает прямую c , то прямые a и b тоже пересекаются.



1.2. Обозначения и изображения

Исследуем и узнаем

1 Обратите внимание, как читаются обозначения.

Обозначаем:	Читаем:	Изображаем:
$A \in d$	Точка A принадлежит прямой d .	
$A \notin d$	Точка A не принадлежит прямой d .	
$\{A, B, C\} \subset d$	Точки A, B, C принадлежат прямой d .	
$A \in \alpha$	Точка A принадлежит плоскости α .	
$a \subset \alpha$	Прямая a принадлежит плоскости α .	
$[BC$	Полупрямая BC с началом в точке B .	
$a \parallel b$	Прямые a и b параллельны.	
$a \not\parallel b$	Прямые a и b не параллельны.	
$a \cap b = \{M\}$	Прямые a и b пересекаются в точке M .	
$a \perp b$	Прямые a и b перпендикулярны.	

Обозначаем:	Читаем:	Изображаем:
$[AB] \equiv [CD]$	Отрезки AB и CD конгруэнтны.	
$AB > CD$	Длина отрезка AB больше длины отрезка CD .	
$A = B$	Точки A и B совпадают.	

Применяем и объясняем

2 Прочтите, затем изобразите рисунком:

- $[MN] \cap [KP] = \{E\}$;
- $AB \parallel d$;
- $C \notin AB$.



3 Задача для чемпионов

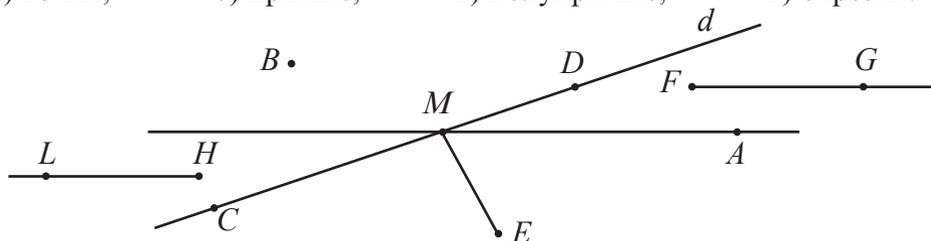
Как при помощи математических символов можно записать высказывание: „Точки M , N и K коллинеарны“?

Упражнения и задачи



1. Рассмотрите рисунок и определите:

- точки;
- прямые;
- полупрямые;
- отрезки.



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и заполните пропуски:

- Прямую d можно обозначить и как .
- Полупрямые и противоположны.
- Точки коллинеарны.
- Точка принадлежит прямой , а точки не принадлежат этой прямой.
- Прямые и пересекаются в точке .

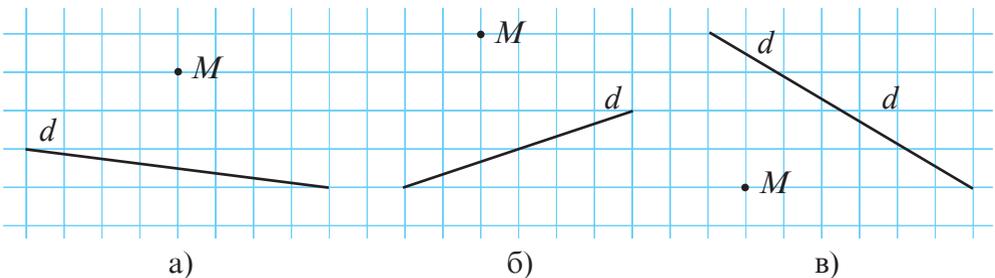
3. Постройте и обозначьте:
- прямую и точку, принадлежащую ей;
 - отрезок и точку, не принадлежащую ему;
 - полупрямую и параллельный ей отрезок;
 - пять точек, каждые три из которых неколлинеарные.
4. Обозначьте множество всех точек прямой:
- расположенных между точками A и B этой прямой;
 - расположенных по ту сторону от точки A (этой прямой), что и точка B (этой прямой).
5. Прочтите: а) $M \in [AB]$; б) $N \notin [EF]$; в) $d \cap [MN] = \{K\}$;
 г) $b \parallel BC$; д) $AB \perp l$; е) $M \notin \alpha$; ж) $b \subset \beta$.
6. Рассмотрите рисунок и выберите отрезки, длина которых:
- не больше 6 см;
 - не меньше 3 см;
 - от 3 см до 6 см;
 - не больше $4\frac{1}{2}$ см.



7. Рассмотрите рисунок задания 6 и определите:
- $[AC] \cap [BD]$;
 - $[BC] \cup [CE]$;
 - $[AD] \setminus [BE]$;
 - $[BC \cap [FE]$;
 - $[AB \cup [DC]$;
 - $[BF] \cap [CB]$.
8. Точки A , B и C коллинеарны и расположены в данном порядке. Найдите длину отрезка:
- AB , если $AC = 20$ см, $BC = 0,12$ дм;
 - AC , если $AB = 9$ см, $BC = 1,5$ дм;
 - BC , если $AB = 1,4$ см, $AC = 4,1$ дм;
 - AC , если $AB = 2BC = 10,8$ см.



9. Перечертите рисунок. Используя линейку и угольник, проведите через точку M одну прямую, параллельную прямой d , а другую – перпендикулярную прямой d .



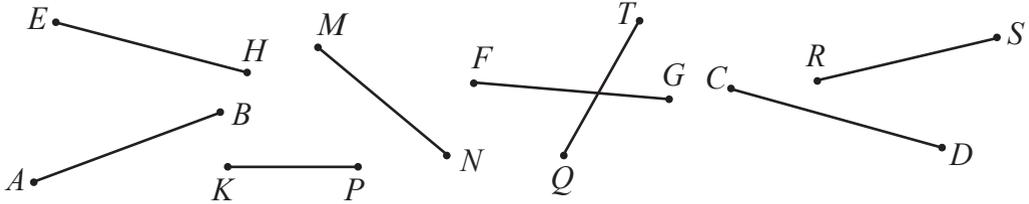
10. Сравните длины отрезков при помощи циркуля:

а) AB и CD ;

б) MN и KP ;

в) FG и EH ;

г) RS и TQ .



11. Сколькими способами можно обозначить прямую, изображенную на рисунке?



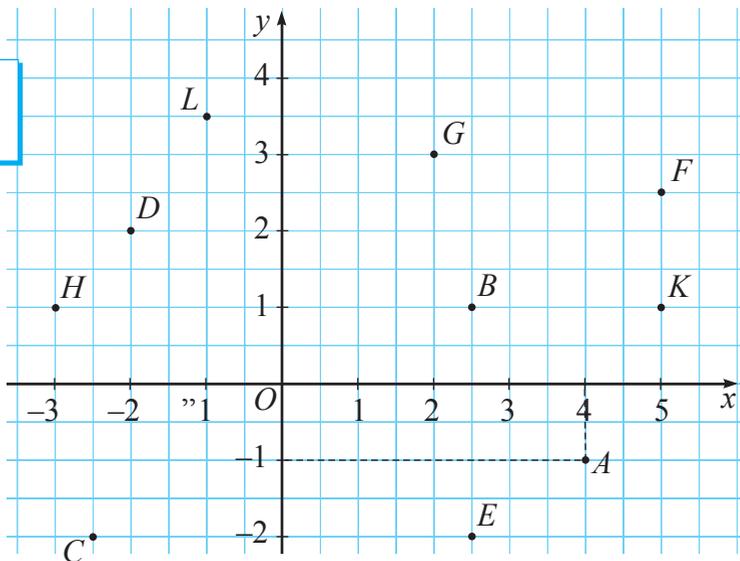
12. Точки A , B и C коллинеарны и расположены в данном порядке. Вычислите расстояние между серединами отрезков AB и BC , если $AB = 24$ см и $BC = 16$ см.

13. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой. Найдите BC , если $AB = 16$ см, а расстояние между серединами данных отрезков 14 см.

14. Точки A , B и C неколлинеарны. Через каждые две из них провели прямую. На сколько частей делят плоскость проведенные прямые?

15*. Числовые оси Ox и Oy перпендикулярны (см. рисунок). Обозначение $A(4; -1)$ читается как: „Точка A имеет координаты 4 и -1 ”. Это означает, что прямая, параллельная Oy и проходящая через точку A , пересекает ось Ox в точке деления 4, а прямая, параллельная Ox и проходящая через точку A , пересекает ось Oy в точке деления -1 . Аналогично определите координаты других точек, отмеченных на рисунке.

Образец:
 $B(2,5; 1)$.



§ 2 Углы

2.1. Классификация углов

Что знаем? Что узнаем?

1 Прочитайте загадку Многознайки и отгадайте, о какой геометрической фигуре идет речь.

У человека два плеча,
А в сутках – день и ночь.
Как назвали два луча
С началом в общей точке?



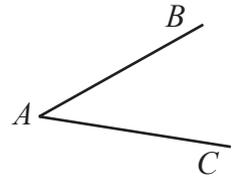
• Как называется инструмент в руках у Многознайки и что можно с его помощью построить?



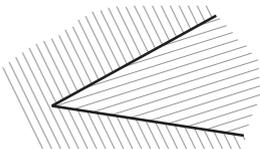
Вспомним

♦ **Углом** называется геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми (**стороны угла**) с общим началом (**вершина угла**).

Угол, образованный полупрямыми $[AB$ и $[AC$ обозначается как $\angle BAC$.



♦ **Внутренняя область угла** – это множество точек, заключенных между сторонами угла. Остальные точки образуют **внешнюю область угла**.

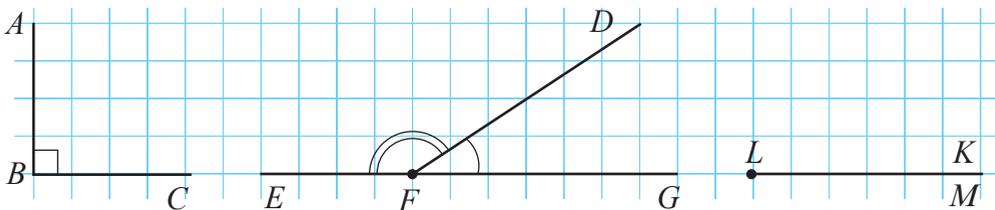


– внутренняя область угла BAC



– внешняя область угла BAC

2 Рассмотрите рисунок и впишите одно из слов: *нулевой, развернутый, острый, прямой, тупой*.



Угол $\angle ABC$

Угол $\angle DFG$

Угол $\angle DFE$

Угол $\angle EFG$

Угол $\angle KLM$

• Запишите упомянутые углы в порядке возрастания их величин.

2.2. Градусная мера углов

Исследуем и узнаем

1 Если учесть, что два различных отрезка отличаются друг от друга длинами, то в действительности при сравнении этих отрезков мы сравниваем их длины.

А как сравнить два угла?

Из V класса знаем, что „раскрытие“ угла соответствует его величине. Значит, чем больше „раскрытие“ угла, тем больше **его величина**. Следовательно, из всех углов развернутый угол имеет наибольшую величину.

Возьмите на заметку

Величину угла A обозначаем $m(\angle A)$.

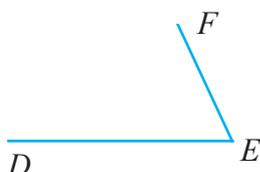
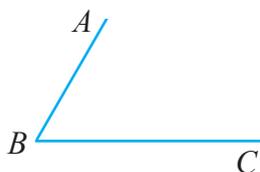
Два угла называются **конгруэнтными**, если у них равные величины.

Если углы A и B конгруэнтны, то обозначаем $\angle A \equiv \angle B$.

Замечание. Конгруэнтные углы при наложении совпадают.

• Во сколько раз величина прямого угла меньше величины развернутого угла? Обоснуйте.

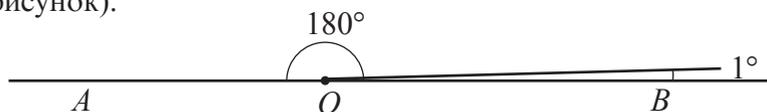
2 Маше надо сравнить величины углов ABC и DEF .



Прочитайте следующее правило и помогите Маше справиться с заданием.

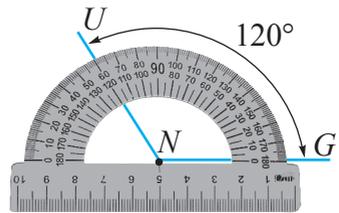
Возьмите на заметку

♦ Чтобы получить единицу измерения углов, развернутый угол „разделили“ на 180 равных частей и посчитали, что одна часть (из 180) имеет величину, равную **одному градусу**, и обозначили как 1° (см. рисунок).



- Значит, величина развернутого угла равна 180° .
- Величина прямого угла равна 90° (читаем: „90 градусов“).

- ♦ Чтобы определить величину произвольного угла, надо найти, сколько углов 1° „вмещаются” в этот угол. Наиболее используемым инструментом для измерения углов является **транспортир**. Чтобы измерить величину угла, располагаем транспортир так, чтобы вершина угла совпала с центром полуокружности транспортира, а одна из сторон угла проходила через деление 0. Таким образом, другая сторона угла пройдет через деление, показывающее величину угла.



Величина угла UNG , изображенного на рисунке, равна 120° .

Обозначаем: $m(\angle UNG) = 120^\circ$.

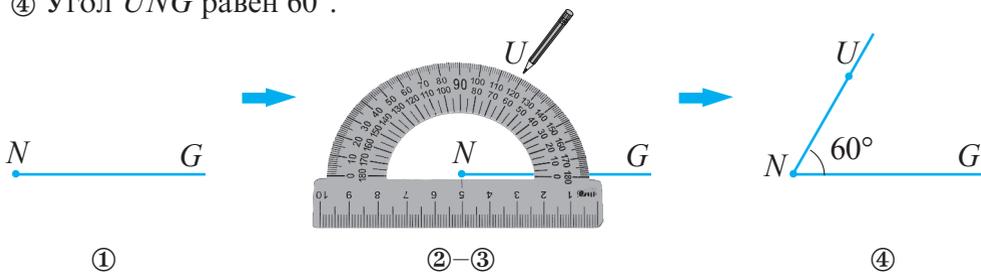
Практическая работа

- Используйте транспортир для решения задачи Маши.

3 Как с помощью транспортира построить угол 60° ?

Решение:

- 1 Строим полупрямую $[NG$.
- 2 Располагаем транспортир так, чтобы центр его полуокружности совпал с точкой N , а полупрямая $[NG$ проходила через деление 0.
- 3 Отмечаем точку U напротив деления 60.
- 4 Угол UNG равен 60° .



Практическая работа

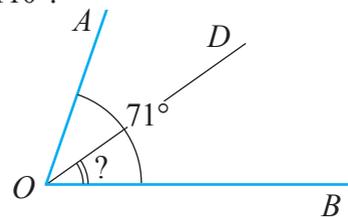
- Аналогично постройте угол: а) в 45° ; б) в 110° .

- 4 Полупрямая $[OD$ делит угол AOB на два конгруэнтных угла. Чему равна величина угла AOD , если $m(\angle AOB) = 71^\circ$?

Решение:

Очевидно, можно посчитать, что $m(\angle AOD) = 71^\circ : 2 = 30,5^\circ$.

Но что означает $0,5^\circ$?



Поясняем

Для того чтобы более точно измерять углы, используют единицы измерения меньше одного градуса.

Таким образом, $\frac{1}{60}$ градуса называется **минутой** (обозначается $'$), а $\frac{1}{60}$ минуты называется **секундой** (обозначается $''$).

Следовательно, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Таким образом, $30,5^\circ = 30^\circ 30'$.

Ответ: $m(\angle AOD) = 30^\circ 30'$.

Применяем

4 Вычислите:

а) $24^\circ 52' 48'' + 33^\circ 49' 27''$;

б) $61^\circ 32' 43'' + 47^\circ 36' 58''$.

Решение:

а) $24^\circ 52' 48'' + 33^\circ 49' 27'' = 57^\circ 101' 75'' = 57^\circ 102' 15''$.

$75'' = 60'' + 15'' = 1' 15''$

$102' = 60' + 42' = 1^\circ 42'$

б) $61^\circ 32' 43'' - 47^\circ 36' 58'' = 61^\circ 31' 103'' - 47^\circ 36' 58'' =$

$32' = 31' + 60''$

$61^\circ = 60^\circ + 60'$

$= 60^\circ 91' 103'' - 47^\circ 36' 58'' = 13^\circ 55' 45''$.

Упражнения и задачи



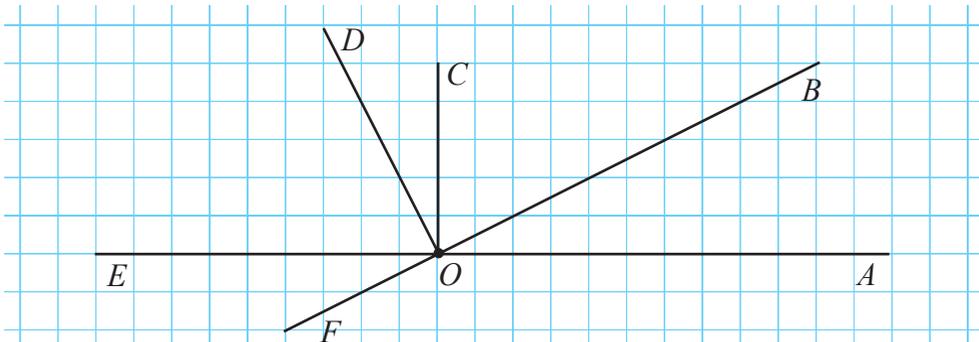
1. Рассмотрите рисунок и определите углы:

а) острые;

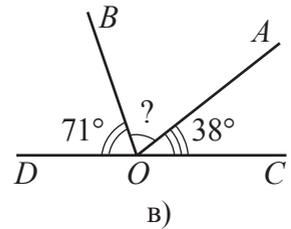
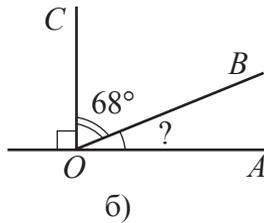
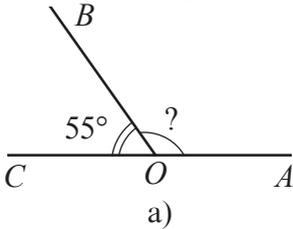
б) тупые;

в) развернутые;

г) прямые.



2. Постройте углы:
- ABC и CBD так, чтобы полупрямые BD и BA были противоположными;
 - ABC и DBE так, чтобы каждая из пар полупрямых BE и BC , BA и BD образовывала противоположные полупрямые.
3. Постройте два угла, у которых:
- общая вершина, но разные стороны;
 - одна сторона общая, а две другие – противоположные полупрямые.
 - одна сторона общая, а две другие – взаимно перпендикулярные.
4. Определите вид угла, если известно, что его величина равна:
- 90° ;
 - 180° ;
 - 60° ;
 - 135° ;
 - 0° ;
 - 87° .
5. Постройте угол, равный:
- 40° ;
 - 135° ;
 - 80° ;
 - 155° .
6. Угол какого вида описывает минутная стрелка часов за:
- 15 мин;
 - 30 мин;
 - 25 мин;
 - 10 мин?
7. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла AOB :

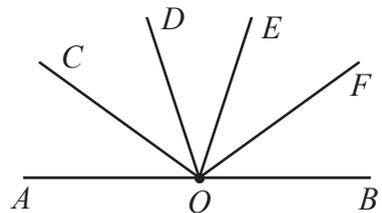


8. За какое время минутная стрелка часов описывает угол величиной в:
- 30° ;
 - 60° ;
 - 135° ;
 - 1° ?
9. Вычислите:
- $39^\circ 24' + 25^\circ 43'$;
 - $67^\circ 18' + 15^\circ 24'$;
 - $51^\circ 40' - 27^\circ 33'$;
 - $120^\circ - 116^\circ 52'$.

10. Развернутый угол AOB , изображенный на рисунке, разделили четырьмя полупрямыми на 5 конгруэнтных углов.

Найдите:

- $m(\angle AOC)$;
- $m(\angle COE)$;
- $m(\angle BOC)$;
- $m(\angle FOC)$.



11. Постройте с помощью линейки и карандаша угол:

- больше 90° ;
- меньше 90° .

Найдите величину построенного угла.

12. Вычислите:

- а) $45^\circ : 2$; б) $97^\circ : 2$; в) $2 \cdot 75^\circ 38'$; г) $2 \cdot 67^\circ 29'$.

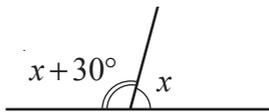
13. Переведите в градусы, минуты и секунды:

- а) $40,15^\circ$; б) $34,45^\circ$; в) $89,22^\circ$; г) $76,18^\circ$.

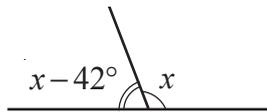
Образец:

$$\begin{aligned} 54,26^\circ &= 54^\circ + 0,26^\circ = 54^\circ + (60 \cdot 0,26)' = 54^\circ + 15,6' = \\ &= 54^\circ 15' + (60 \cdot 0,6)'' = 54^\circ 15' + 36'' = 54^\circ 15' 36''. \end{aligned}$$

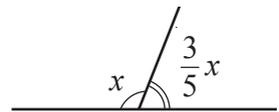
14. Рассмотрите рисунок и найдите значение x :



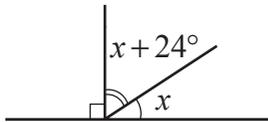
а)



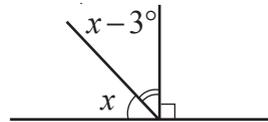
б)



в)

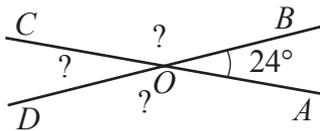


г)

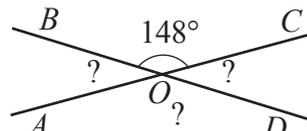


д)

15. Рассмотрите рисунок и найдите величины неизвестных углов. Сделайте вывод.

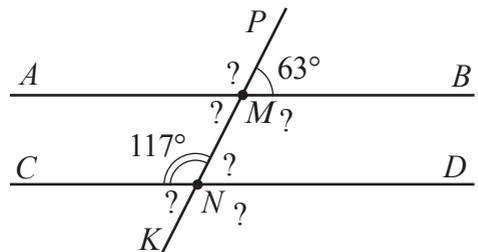


а)



б)

16. Прямые AB и CD , изображенные на рисунке, параллельны. Найдите неизвестные величины углов. Сделайте вывод.

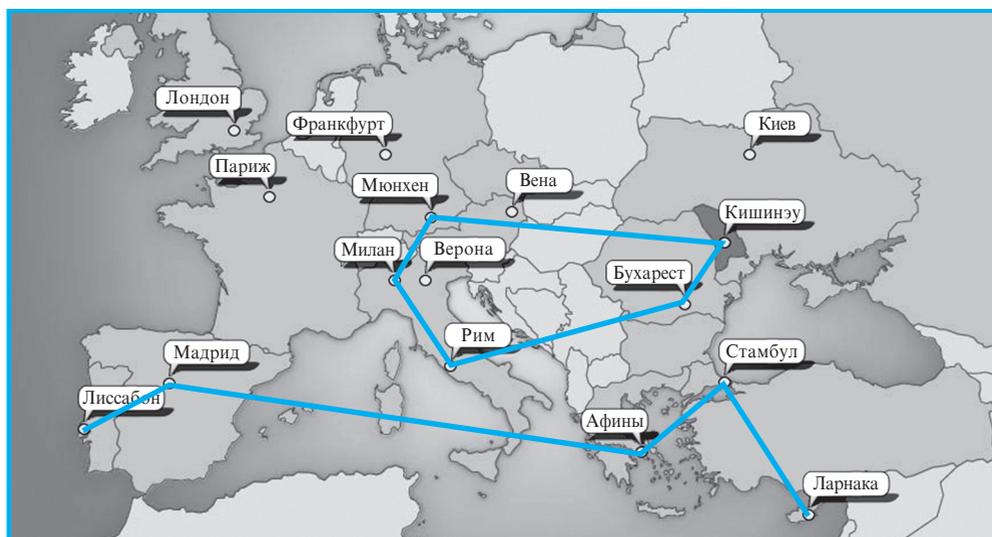


§3 Многоугольники

3.1. Ломаные линии. Многоугольники

Исследуем и узнаем

1 Рассмотрите рисунок.



С какой геометрической фигурой можно ассоциировать траекторию полета:

- а) Ларнака, Стамбул, Афины, Мадрид, Лиссабон;
- б) Кишинэу, Бухарест, Рим, Милан, Мюнхен, Кишинэу?

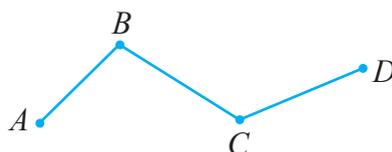
Решение:

а) Траектория полета по курсу Ларнака, Стамбул, Афины, Мадрид, Лиссабон описывает **незамкнутую ломаную линию с вершинами** в указанных городах.

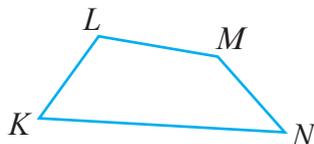
б) Траектория полета по курсу Кишинэу, Бухарест, Рим, Милан, Мюнхен, Кишинэу описывает **замкнутую ломаную линию**.

Возьмите на заметку

- ◆ Отрезки, из которых образована ломаная линия, называются **сторонами** (или **звеньями**), а концы отрезков – **вершинами** этой ломаной.
- ◆ Любые три последовательные вершины **ломаной линии** неколлинеарны.
- ◆ **Незамкнутая ломаная линия** имеет лишь две вершины, из которых исходят по одной стороне.



- ♦ Из всех вершин **замкнутой ломаной линии** исходят по две стороны.
- ♦ Ломаную линию обозначают, указав ее вершины в порядке их следования.
На рисунках изображены: незамкнутая ломаная линия $ABCD$ и замкнутая ломаная линия $KLMN$.



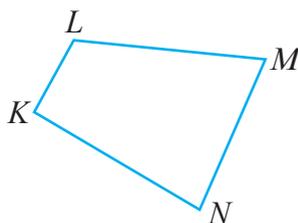
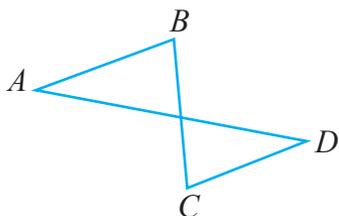
2 Постройте замкнутую ломаную линию:

а) с 4-мя сторонами, две из которых не имеют общих вершин, а две другие пересекаются;

б) с 4-мя сторонами, которые пересекаются лишь в вершинах линии.

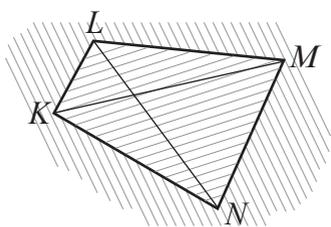
Решение:

а) Строим ломаную линию $ABCD$. б) Строим ломаную линию $KLMN$.



Возьмите на заметку

- ♦ Замкнутая ломаная, стороны которой не имеют других общих точек, кроме ее вершин, называется **многоугольником**.
Ломаная линия $KLMN$, построенная в пункте б) (задание 2), является многоугольником с 4-мя сторонами. Точки K, L, M, N являются вершинами данного многоугольника.
- ♦ **Диагональю** выпуклого многоугольника называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной и той же стороне.
- ♦ Часть плоскости, ограниченной сторонами многоугольника, называется **внутренней областью многоугольника**. Остальная часть плоскости называется **внешней областью многоугольника**.



$[KM], [LN]$ – диагонали многоугольника $KLMN$



– внутренняя область многоугольника $KLMN$



– внешняя область многоугольника $KLMN$.

3.2. Виды многоугольников

Что знаем? Что узнаем?

1 Как называется многоугольник с 3-мя сторонами? Какие многоугольники с 4-мя сторонами вам известны?

Решение:

Треугольник – это многоугольник с 3-мя сторонами. В предыдущих классах были рассмотрены квадраты и прямоугольники, которые являются многоугольниками с 4-мя сторонами. Существуют и другие виды многоугольников с 4-мя сторонами.

Возьмите на заметку

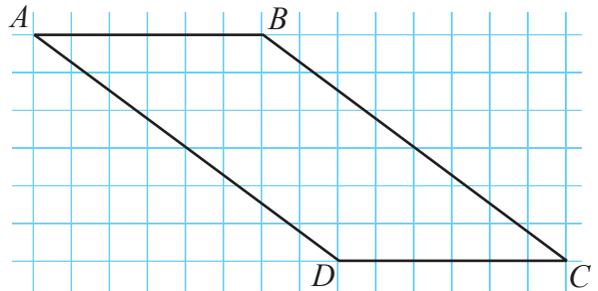
- Многоугольники классифицируются по количеству сторон или углов: треугольники – это многоугольники с 3-мя сторонами; четырехугольники – это многоугольники с 4-мя сторонами; пятиугольники – это многоугольники с 5-ю сторонами; шестиугольники – это многоугольники с 6-ю сторонами.

2 Постройте четырехугольник с двумя параллельными и конгруэнтными сторонами. Измерьте длины других двух сторон, затем определите взаимное расположение прямых, которые содержат эти стороны.

Решение:

У четырехугольника $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Измерив их, получим, что $AD = BC = 5$ см.

При помощи двух линеек убеждаемся, что прямые AD и BC не пересекаются. Следовательно, пара сторон AD и BC обладает теми же свойствами, что и пара сторон AB и CD : они конгруэнтны и параллельны.



Возьмите на заметку

- Четырехугольник, у которого две стороны параллельны и конгруэнтны, называется **параллелограммом**. У **параллелограмма** две пары параллельных и конгруэнтных сторон.
- Ромб** – это параллелограмм, у которого стороны конгруэнтны.
- Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**.



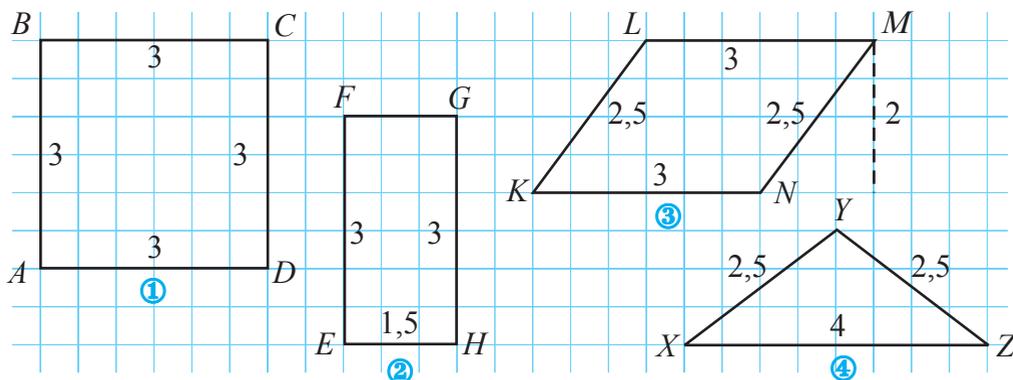
3 Рассмотрите схему и обратите внимание на виды параллелограммов:



• Как называется параллелограмм, который одновременно является и ромбом и прямоугольником?

3.3. Периметр многоугольника

Рассмотрите рисунки. Вычислите периметр каждого многоугольника.



Решение:

$$\mathcal{P}_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)}.$$

$$\mathcal{P}_{EFGH} = 2EF + 2FG = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1,5 = 9 \text{ (см)}.$$

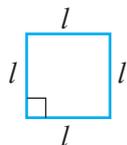
$$\mathcal{P}_{KLMN} = 2KL + 2LM = 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 3 = 11 \text{ (см)}.$$

$$\mathcal{P}_{XYZ} = XY + YZ + XZ = 2,5 + 2,5 + 4 = 9 \text{ (см)}.$$

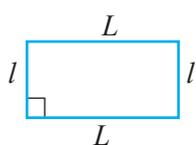


Вспомним

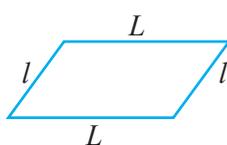
Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон.



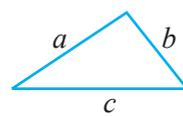
$$\mathcal{P}_{\square} = 4 \cdot l$$



$$\mathcal{P}_{\square} = 2(L + l)$$



$$\mathcal{P}_{\square} = 2(L + l)$$



$$\mathcal{P}_{\triangle} = a + b + c$$

3.4. Площадь квадрата. Площадь прямоугольника

Что знаем? Что узнаем?

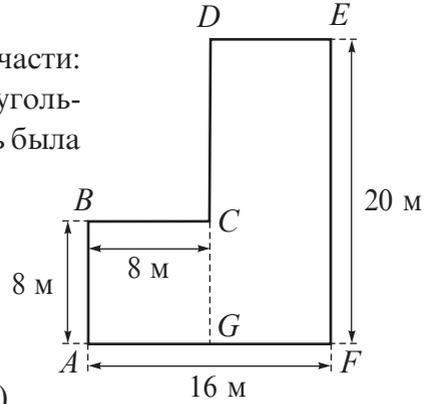
1 Фермер поделил свой участок на две части: одна имеет форму квадрата, другая – прямоугольника (см. рисунок справа). Меньшая площадь была засеяна луком, а бóльшая – чесноком.

Какая площадь была засеяна луком, а какая – чесноком?

Решение:

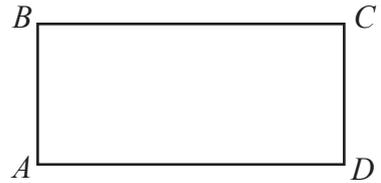
- ① $S_{ABCG} = AB^2 = 8^2 = 64 \text{ (м}^2\text{)}$.
- ② $DE = AF - AG = AF - BC = 16 - 8 = 8 \text{ (м)}$.
- ③ $S_{DEFG} = DE \cdot EF = 8 \cdot 20 = 160 \text{ (м}^2\text{)}$.
- ④ Заметим, что $S_{DEFG} > S_{ABCG}$, так как $160 > 64$.

Ответ: 64 м^2 – засеяны луком; 160 м^2 – чесноком.



Дополняем и поясняем

2 Периметр прямоугольника равен 96 м. Зная, что ширина прямоугольника составляет 50% его длины, найдите площадь прямоугольника.



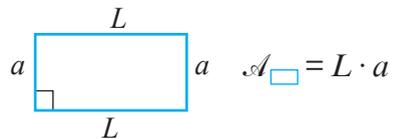
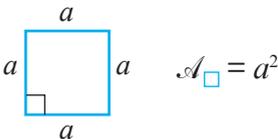
Решение:

- ① Так как AB составляет 50% от BC , то $BC = 2AB$.
- ② $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + 2AB) = 2 \cdot 3 \cdot AB = 6AB$.
- ③ $P_{ABCD} = 96 \text{ м}$, значит, $6AB = 96 \text{ м}$.
- ④ $AB = \square : \square \text{ (м)}$.
- ⑤ $BC = 2AB = 2 \cdot \square = \square \text{ (м)}$.
- ⑥ $S_{ABCD} = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \square \text{ м}^2$.

Ответ: $\square \text{ м}^2$.

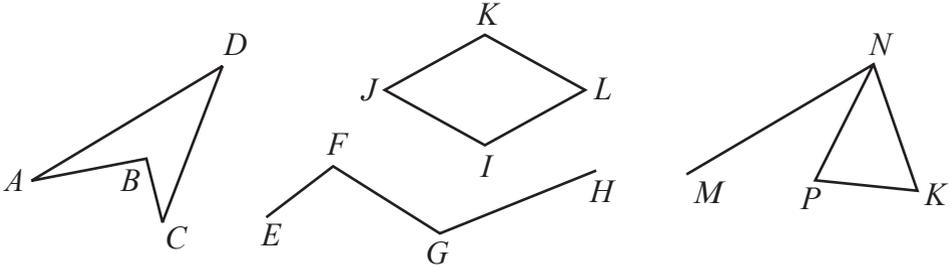


Возьмите на заметку

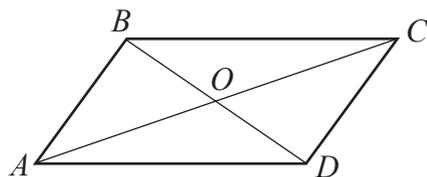


Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок. Определите: а) незамкнутые ломаные линии; б) замкнутые ломаные линии; в) многоугольники.



2. Постройте:
- замкнутую ломаную линию с 5-ю сторонами;
 - незамкнутую ломаную линию с 6-ю сторонами;
 - многоугольник с 5-ю сторонами;
 - замкнутую ломаную линию с 5-ю сторонами, не являющуюся многоугольником.
3. Постройте:
- параллелограмм со сторонами, равными 6 см и 8 см;
 - трапецию с основаниями, равными 3 см и 5 см;
 - ромб с диагоналями, равными 4 см и 7 см;
 - квадрат с диагоналями, равными 5 см.
4. Найдите периметр многоугольника, длины сторон которого:
- 3 см; 4,2 см; 5,8 см; 6 см;
 - $\frac{2}{3}$ см; $\frac{4}{3}$ см; 1 см; 1,5 см.
5. Сколько диагоналей у многоугольника:
- с 5-ю сторонами;
 - с 6-ю сторонами?
6. Найдите площадь квадрата со стороной, равной:
- 8 см;
 - $3\frac{1}{4}$ см;
 - 2,05 см;
 - 7,(3) см.
7. Найдите площадь прямоугольника со сторонами, равными:
- 6 см и 10 см;
 - 8,5 см и 2,4 см;
 - $4\frac{1}{6}$ см и 12 см.
8. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Заполните пропуски:
- $BC \parallel$;
 - \cap = $\{O\}$;
 - $[AB] \equiv$;
 - $\equiv [OC]$.





9. Какими общими свойствами обладают:

- а) параллелограмм и трапеция;
- б) параллелограмм и прямоугольник;
- в) ромб и квадрат;
- г) квадрат и прямоугольник?

10. Постройте параллелограмм $KLMN$.

Используя транспортир, измерьте углы, затем заполните пропуски:

- а) $\angle K \equiv$;
 - б) $\angle N \equiv$;
 - в) $m(\angle K) + m(\angle N) =$.
- Сделайте вывод.

11. Найдите периметр:

- а) треугольника со сторонами, равными $3\frac{1}{2}$ см; 4,6 см и 5,9 см;
- б) квадрата со стороной, равной 2,(7) см;
- в) прямоугольника со сторонами, равными 25,6 см и 34,3 см;
- г) ромба со стороной, равной $5\frac{1}{9}$ см.

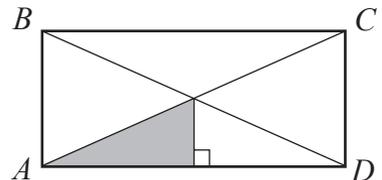


12. Улица прямоугольной формы была покрыта асфальтом. Найдите площадь заасфальтированной улицы, если ее длина равна 0,75 км, а ширина 10,5 м.

13. Бригада рабочих смонтировала 32 окна, каждое из которых имеет форму прямоугольника с измерениями 45 см и 75 см. Тариф оплаты монтажа одного квадратного метра окна – 80 леев. Найдите стоимость всей работы.

14. Сумма длин всех сторон четырехугольника – 66 дм. Найдите длину каждой стороны, зная, что эти длины равны последовательным числам.

15. Закрашенная площадь прямоугольника равна 12 см^2 . Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



16. Составьте задачи на:

- а) применение периметра прямоугольника и площадь квадрата;
- б) применение площадей квадрата и прямоугольника.

§4 Окружность. Круг

4.1. Элементы окружности

Что знаем? Что узнаем?

1 Рассмотрите рисунок. Какую геометрическую фигуру начертил коньками на льду каждый из ребят?



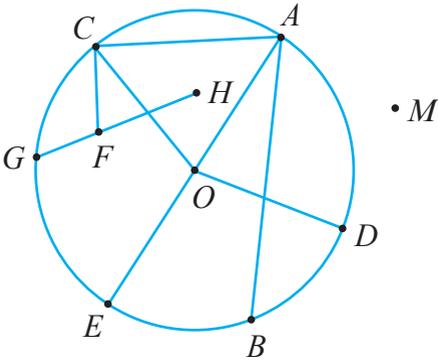
Поясняем

У Анны получилась **незамкнутая кривая линия**.

Денис изобразил **замкнутую кривую линию**.

Миша начертил **окружность**.

2 Рассмотрите рисунок (точка O – центр окружности) и заполните пропуски.



Вспомним

- ♦ Все точки окружности равноудалены от одной заданной точки, называемой **центром окружности**.
- ♦ Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется **радиусом**.
- ♦ Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**.
- ♦ Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
- ♦ Для построения окружности используем **циркуль**.

а) $OA = \square = OE = \square$.

б) $[OD] \equiv \square \equiv \square$.

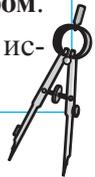
в) Отрезки \square являются радиусами окружности.

г) Отрезок \square – диаметр окружности.

д) Отрезки \square являются хордами окружности.

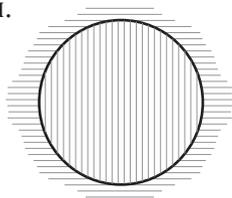
е) Точки \square принадлежат внутренней области окружности.

ж) Точки \square не принадлежат окружности.



Возьмите на заметку

- ♦ Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **внутренней областью этой окружности**.
Другая часть плоскости называется **внешней областью окружности**.
- ♦ Окружность, объединенная со своей внутренней областью, называется **кругом**.



– внутренняя область окружности



– внешняя область окружности

4.2. Длина окружности. Площадь круга

Исследуем и узнаем

1 Миша при помощи портняжного метра измерил диаметр d основания и длину L окружности основания двух емкостей. Вычислите приблизительное значение отношения $\frac{L}{d}$ для каждой емкости.

Что вы заметили?



$$L \approx 79,8 \text{ см}, d \approx 25,4 \text{ см}$$



$$L \approx 59,7 \text{ см}, d \approx 19 \text{ см}$$



Решение:

$$\textcircled{1} \frac{L}{d} \approx \frac{79,8}{25,4} \approx 3,14.$$

$$\textcircled{2} \frac{L}{d} \approx \frac{59,7}{19} \approx 3,14.$$

Возьмите на заметку

- ♦ Отношение длины окружности к длине ее диаметра является числом постоянным (не рациональным). Его обозначают греческой буквой π (читается „Пи“).

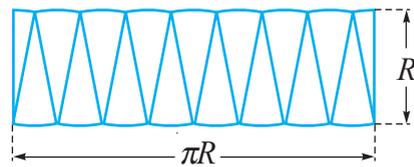
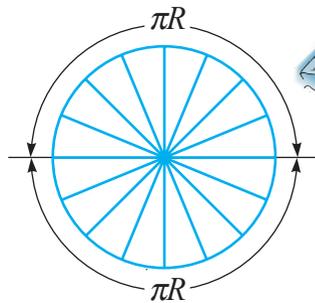
$$\pi \approx 3,1416.$$

- ♦ Длину любой окружности можно найти по формуле $L = \pi \cdot d$, где d – диаметр окружности. Если известен радиус R окружности, то длину этой окружности можно вычислить по формуле $L = 2 \cdot \pi \cdot R$.

- Найдите приблизительное значение длины окружности радиуса 5 см.

2 Всезнайка вывел формулу площади круга. Обратите внимание на ход его действий:

- Разделил круг на секторы.
- Расположил секторы таким образом, чтобы получить поверхность, похожую на прямоугольник с измерениями, приблизительно равными πR и R (см. рисунок справа).
- Площадь полученного прямоугольника равна $\pi R \cdot R = \pi R^2$.
- Следовательно, площадь круга можно вычислить по формуле: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.



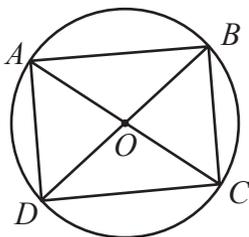
Возьмите на заметку

Площадь круга вычисляется по формуле: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.

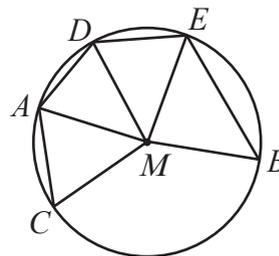
- Найдите приблизительное значение площади круга радиуса 10 см.

Упражнения и задачи

1. Постройте:
 - а) незамкнутую кривую;
 - б) замкнутую кривую;
 - в) окружность радиуса 4 см.
2. Рассмотрите рисунок и укажите элементы окружности (радиусы, хорды, диаметры, центр):

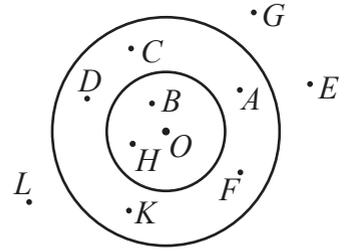


а)



б)

3. Рассмотрите рисунок (точка O – центр окружностей). Найдите множество:
- M – множество точек, которые принадлежат внутренней области малого круга;
 - N – множество точек, которые принадлежат внешней области большого круга;
 - P – множество точек, которые принадлежат внутренней области большого круга и внешней области малого круга;
 - Q – множество точек, которые принадлежат внешней области малого круга.



4. Постройте окружность радиуса 4 см и точку M , расположенную на расстоянии 7 см от центра окружности. Отметьте точки на окружности, расположенные на расстоянии:

- а) 5 см от точки M ; б) 7 см от точки M ; в) 11 см от точки M .

5. Вычислите длину окружности радиуса:

- а) 4 см; б) $\frac{6}{\pi}$ см; в) 0,(4) см; г) $3\frac{2}{3}$ см.

6. Вычислите длину окружности, диаметр которой равен:

- а) 10 см; б) $6\frac{2}{5}$ см; в) 2,2(6) см; г) $\frac{1}{\pi}$ см.

7. Вычислите площадь круга радиуса:

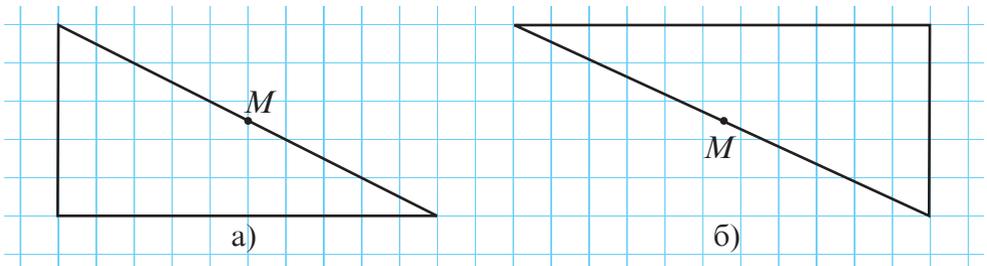
- а) 10 см; б) $\frac{3}{4}$ см; в) 2,(3) см; г) $\frac{2}{\pi}$ см.

8. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен:

- а) 8 см; б) $1\frac{2}{5}$ см; в) $\frac{10}{\pi}$ см; г) 4,(4) см.

9. Точка M является серединой стороны, на которой она отмечена. Сравните при помощи циркуля расстояния от точки M до вершин треугольника. Сделайте вывод.

Перечертите рисунок, затем постройте окружность с центром в точке M , проходящую через вершины треугольника.



10. Постройте две окружности, чтобы расстояние между их центрами было:
- равно сумме их радиусов;
 - равно разности их радиусов;
 - больше, чем сумма их радиусов.

11. Радиус окружности равен 10 см. Точка O – центр окружности. Каково положение точки M относительно окружности, если:
 а) $MO = 7,5$ см; б) $MO = 10$ см; в) $MO = 12$ см; г) $MO = 5\frac{2}{3}$ см?

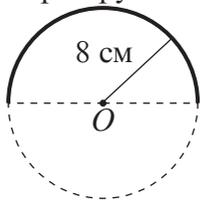
12. Сколько общих точек имеют две окружности, если расстояние между их центрами равно 8 см, а их радиусы равны:
 а) 5 см и 6 см; б) $2\frac{1}{4}$ см и $5\frac{3}{5}$ см; в) 4,(8) см и 3,(2) см;
 г) 2 см и 6 см; д) 3 см и $4\frac{1}{7}$ см?

13. Истинно или Ложно?

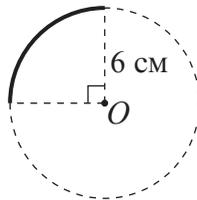
- а) Любой диаметр разбивает окружность на две полуокружности.
 б) Диаметр окружности в два раза меньше радиуса этой окружности.
 в) Две окружности одного радиуса при наложении совпадают.
 г) Хорда окружности – это отрезок, определенный двумя точками окружности.
 д) Не существует окружности с несколькими диаметрами.
 е) Две окружности могут иметь только одну общую точку.
 ж) Две окружности могут иметь 3 общие точки.
 з) Прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек.



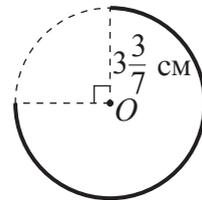
14. Рассмотрите рисунок и вычислите часть длины окружности (точка O – центр окружности):



а)



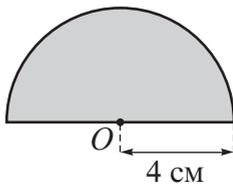
б)



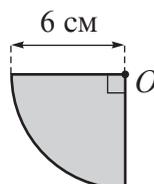
в)

15. Постройте отрезок AB длиной 3 см, затем окружность, проходящую через точки A и B . Сколько решений имеет задача?

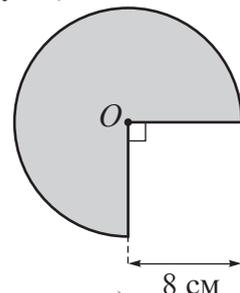
16. Рассмотрите рисунок и вычислите часть площади круга (точка O – центр круга):



а)



б)



в)

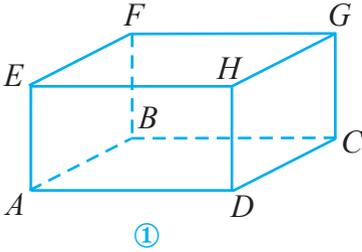
§ 5 Геометрические тела

5.1. Куб, кубоид, пирамида



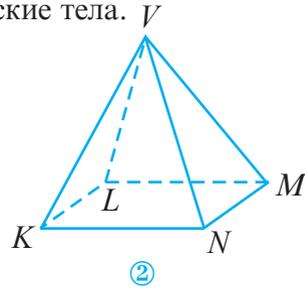
Вспомним

1 Рассмотрите изображенные геометрические тела.



Кубоид

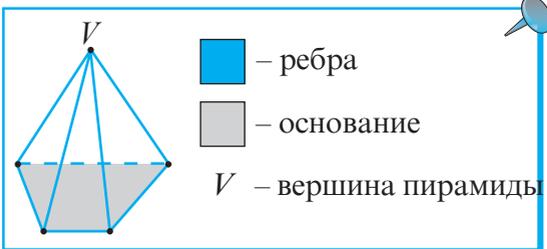
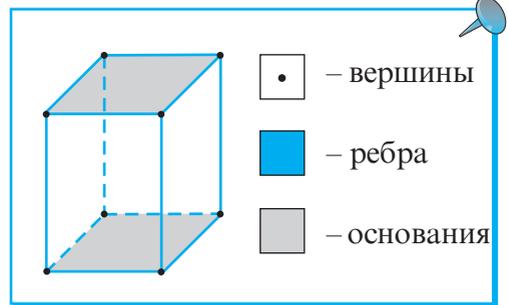
(прямоугольный параллелепипед)



Пирамида

Заполните пропуски:

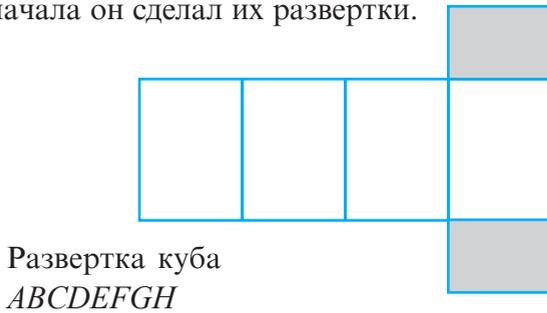
- ✓ Кубоид $ABCDEFGH$ имеет основания, боковых граней, вершин, 12 .
- ✓ Боковыми гранями кубоида являются .
- ✓ ограничены конгруэнтными прямоугольниками.



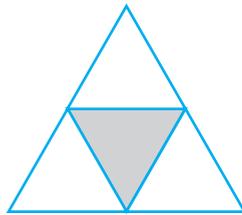
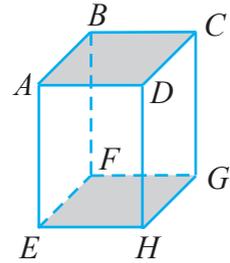
- ✓ Пирамида $VKLMN$ имеет одно основание, вершин, и 8 .
- ✓ является основанием пирамиды $VKLMN$.
- ✓ Основанием четырехугольной пирамиды является .
- ✓ Кубоид с конгруэнтными ребрами называется .

Исследуем и узнаем

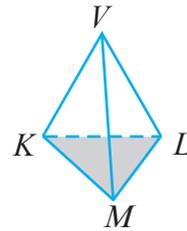
2 Всезайка смастерил из картона два геометрических тела. Для этого сначала он сделал их развертки.



Развертка куба
 $ABCDEFGH$



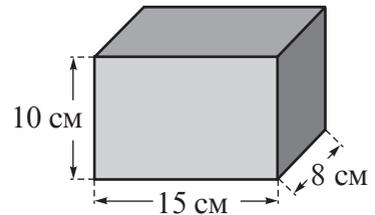
Развертка пирамиды $VKLM$



- Постройте другие развертки геометрических тел из задания 2.
- Начертите развертку куба, ребро которого равно 3 см.

Применяем

3 Кубоид, изображенный на рисунке справа, выполнен из картона. Найдите площадь \mathcal{A} всей поверхности развертки кубоида и площадь кубоида.



Решение:

Развертка кубоида состоит из 6 прямоугольных поверхностей:

- две с измерениями 8 см и 15 см;
- две с измерениями 10 см и 15 см;
- две с измерениями 8 см и 10 см.

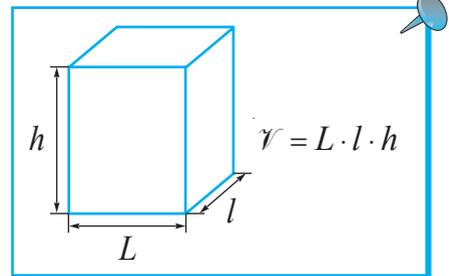
Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot 10 \cdot 15 + 2 \cdot 8 \cdot 10 = \\ &= 2(8 \cdot 15 + 10 \cdot 15 + 8 \cdot 10) = 700 (\text{см}^2). \end{aligned}$$

Объем кубоида равен произведению трех его измерений.

$$V = 8 \cdot 10 \cdot 15 = 1200 (\text{см}^3).$$

Ответ: $\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 700 \text{ см}^2$, $V = 1200 \text{ см}^3$.



Возьмите на заметку

Площадь полной поверхности ($A_{\text{полн.}}$) кубоида равна сумме площадей всех граней кубоида и вычисляется по формуле:

$$A_{\text{полн.}} = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h),$$

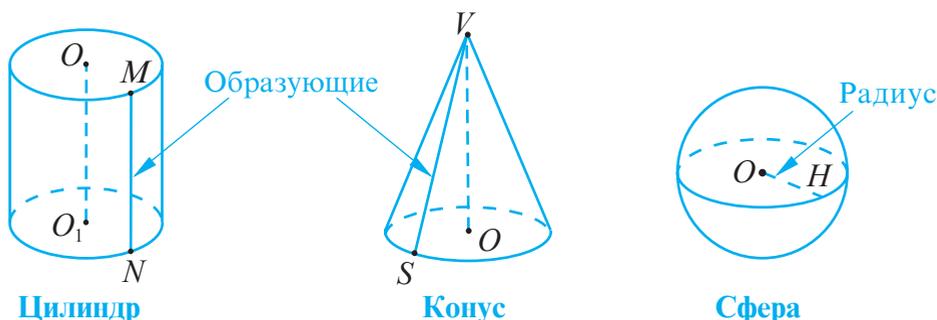
где L , l и h являются измерениями кубоида.

- Вычислите площадь полной поверхности и объем кубоида с измерениями 9 см, 6 см и $4\frac{1}{3}$ см.

5.2. Круглые тела

Что знаем? Что узнаем?

1 Рассмотрите изображенные геометрические тела.



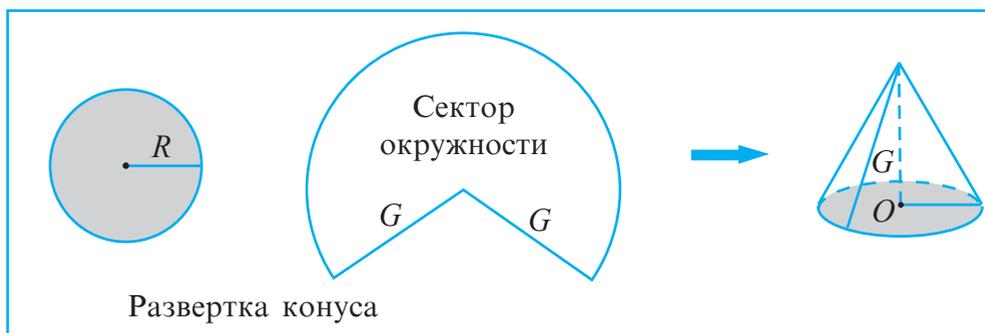
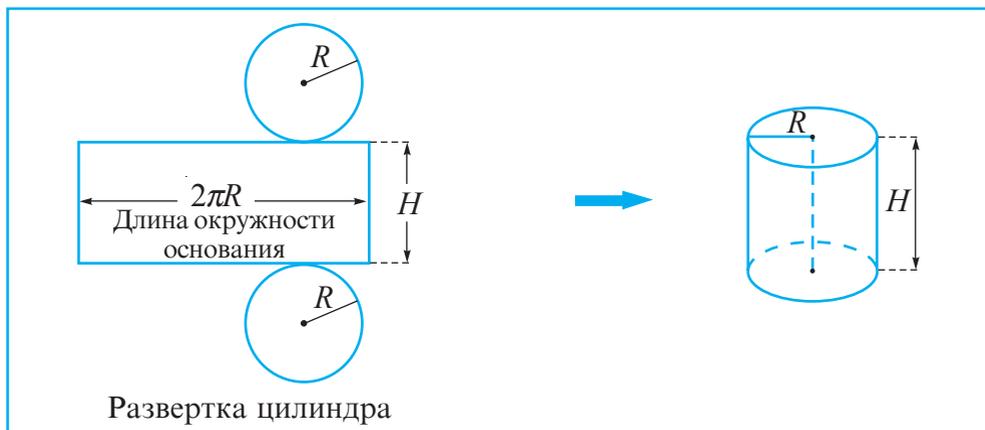
Заполните пропуски:

- ✓ Цилиндр имеет основания – круги одинакового радиуса, лежащие в параллельных плоскостях.
- ✓ Основание конуса – .
- ✓ Все точки равноудалены от одной точки, называемой .
- ✓ Радиус сферы – это отрезок, соединяющий с одной точкой сферы.
- ✓ Отрезок является высотой цилиндра, а отрезок – высотой конуса.

Возьмите на заметку

- ♦ **Образующей цилиндра** называется отрезок, соединяющий любые две точки окружностей оснований цилиндра и параллельный прямой, проходящей через центры этих оснований.
- ♦ **Образующей конуса** называется любой отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой, принадлежащей окружности основания конуса.

2 Рассмотрите развертки цилиндра и конуса.



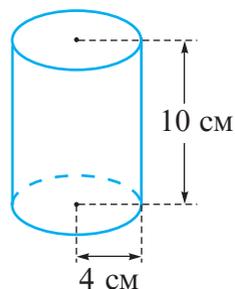
- Начертите развертку:
 - а) цилиндра, высота которого равна 5 см, а радиус основания 3 см;
 - б) конуса с образующей, равной 4 см, и радиусом основания 2,5 см.

Применяем

3 Найдите площадь поверхности развертки цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания 4 см.

Решение:

Развертка цилиндра (по условию задачи) состоит из прямоугольника с измерениями $2\pi \cdot 4$ см, 10 см и из двух окружностей радиуса 4 см.



$$S_{\circ} = \pi R^2$$

$$S_{\square} = L \cdot l$$

Следовательно,

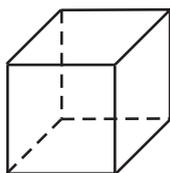
$$S = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = \pi(80 + 32) = 112\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $112\pi \text{ см}^2$.

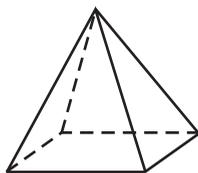
Упражнения и задачи



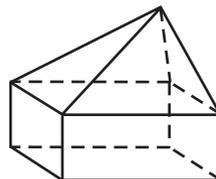
1. Рассмотрите рисунок и сосчитайте, сколько ребер у геометрического тела:



а)



б)



в)

2. Рассмотрите рисунок задания 1 и сосчитайте, сколько граней у каждого из геометрических тел.

3. Установите, сколько вершин у призмы:

- а) четырехугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной.

4. Найдите объем куба, ребро которого равно:

- а) 10 см; б) $2\frac{2}{3}$ см; в) 4,(6) см.

5. Найдите объем кубоида, измерения которого равны:

- а) 3 см, 5 см, 8 см; б) 4 см, $3\frac{1}{4}$ см, 8 см; в) 9 см, 6,(3) см, 7 см.

6. Найдите площадь полной поверхности куба, ребро которого равно:

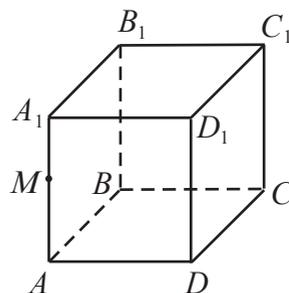
- а) 8 см; б) $5\frac{1}{6}$ см; в) 2,1(3) см.

7. Найдите площадь полной поверхности кубоида, измерения которого:

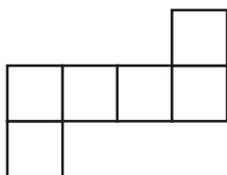
- а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 4 см, 6 см, $2\frac{1}{6}$ см; в) 9,(4) см, 12 см, 9 см.

8. На рисунке изображен куб. Укажите:

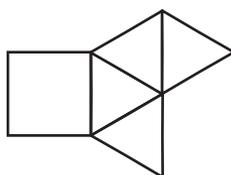
- а) прямые, параллельные AD ;
 б) прямые, параллельные DC ;
 в) прямые, пересекающиеся в точке B ;
 г) три неколлинеарные точки;
 д) пары прямых, которые не параллельны и не пересекаются.



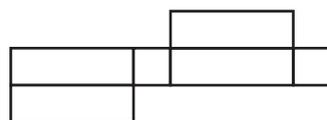
9. Развертки каких геометрических тел изображены на рисунке?



а)



б)



в)

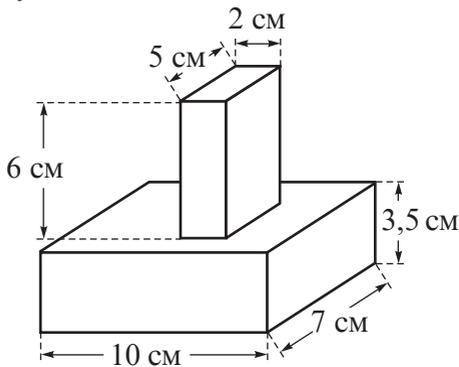
10. Начертите развертку:

- а) куба, ребро которого равно 5 см;
- б) кубоида, измерения которого 4 см, 5 см, 6 см соответственно;
- в) треугольной призмы, ребра оснований которой равны 3 см, а боковые ребра – 5 см.

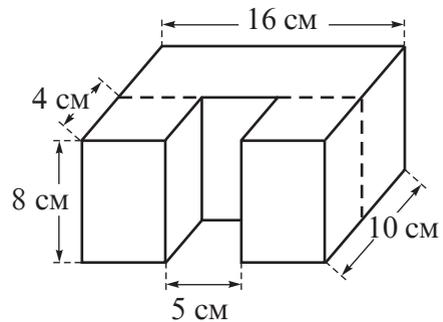
11. Начертите развертку цилиндра:

- а) с радиусом оснований, равным 4 см, и высотой 3 см;
- б) с диаметром оснований, равным 7 см, и высотой 4 см;
- в) высота которого конгруэнтна диаметру оснований и равна 5 см.

12. Найдите объем тел, изображенных на рисунке, которые состоят из кубоидов:



а)



б)

- 13. Бассейн имеет форму кубоида, длина и ширина которого равны 10 м и 15 м соответственно. Какова глубина бассейна, если его вместимость $352,5 \text{ м}^3$?
- 14. Амбар имеет форму кубоида, измерения которого равны 20,5 м, 6 м и 5 м соответственно. Сколько сена можно в нем хранить, если 1 м^3 сена весит 52 кг?
- 15. Миша вырезает кубики с ребром 2 см из бруска, имеющего форму кубоида, с измерениями 12 см, 16 см, 10 см. Какую длину будет иметь фигура, полученная из последовательно сложенных кубиков?
- 16. Найдите массу железного бруска, который имеет форму кубоида с измерениями, равными 6 см, 10 см, 15 см соответственно, если плотность железа $7,8 \text{ г/см}^3$.

17. Зная, что плотность железа $7,8 \text{ г/см}^3$, найдите длину ребра железного куба, если его масса:
- а) 975 г; б) 121 кг 875 г; в) 62,4 кг.



18. Деревянный кубоид имеет измерения 16 см, 10 см, 12 см. Какой максимальный объем будет иметь куб, сделанный из данного кубоида?



19. Мыло имеет форму кубоида, измерения которого равны 8 см, 4 см и 2 см соответственно. После 7 дней использования мыла все измерения уменьшились в 2 раза. На сколько дней хватит оставшегося куска мыла?

Задания для осмысления

1. Какие основные геометрические понятия вы знаете?
2. Как обозначаются основные геометрические понятия?
3. Приведите примеры из окружающей среды ассоциаций с прямыми, точками, отрезками, параллельными прямыми, перпендикулярными прямыми, пересекающимися прямыми.
4. Какие отрезки называются конгруэнтными? Как они обозначаются?
5. Для чего используют линейку с делениями? А угольник? Циркуль?
6. С каким новым измерительным инструментом вы познакомились в VI классе? Для чего он нужен?
7. Как классифицируются углы?
8. Какие единицы измерения углов вы знаете?
9. Какие углы называются конгруэнтными? Как они обозначаются?
10. Какие виды ломаных линий вы знаете?
11. Что представляет собой многоугольник?

12. Какой многоугольник является самым простым?
13. Как классифицируются многоугольники?
14. Назовите элементы многоугольника.
15. Как классифицируются четырехугольники?
16. Чем отличается параллелограмм от трапеции?
17. В чем сходство квадрата и ромба?
18. Как классифицируются параллелограммы?
19. Что значит найти периметр многоугольника?
20. Как найти площадь квадрата? А площадь прямоугольника?
21. Как строится окружность? Какие элементы окружности вы знаете?
22. Чем отличаются окружность и круг?
23. Как найти длину окружности? А площадь круга?
24. Что вы знаете о числе π ?
25. Какие геометрические тела вы знаете?
26. Какие элементы куба, кубоида, пирамиды вы знаете?
27. Начертите несколько вариантов развертки куба, кубоида, пирамиды.
28. Как вычислить объем куба? А кубоида?
29. Какие плоские геометрические фигуры являются элементами изученных геометрических тел?
30. Какой вид имеют развертки круглых тел?
31. Какие элементы изученных круглых тел вы знаете?
32. Как вычисляются площади полных поверхностей изученных геометрических тел?
33. Приведите примеры строений, которые представляют собой изученные геометрические тела.

Упражнения и задачи на повторение



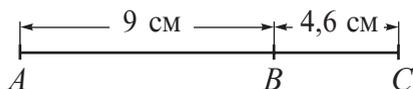
1. Постройте и обозначьте:

- две пересекающиеся прямые;
- два параллельных отрезка, пересеченные полупрямой;
- параллелограмм;
- ромб;
- трапецию, у которой боковые стороны конгруэнтны.

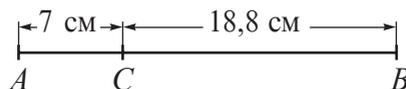
2. Прочитайте, а затем изобразите с помощью рисунка:

- $M \in [CD]$, $CD \parallel AB$;
- $\{X, Y, Z\} \subset MN$, $MN \cap AB = \{Y\}$;
- $[BA \perp [BC$, $[KM \parallel [BC$, $K \in [BA$.
- $AB \parallel CD$, $KP \cap AB = \{M\}$, $KP \cap CD = \{N\}$.

3. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC .



а)



б)

4. Определите вид угла, зная, что его величина:

- 21° ;
- 99° ;
- 135° ;
- 88° ;
- 180° .

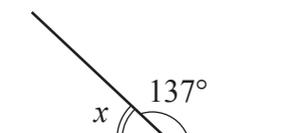
5. Угол какого вида описывает часовая стрелка часов, показывая:

- 3 часа;
- 6 часов;
- 2 часа;
- 5 часов?

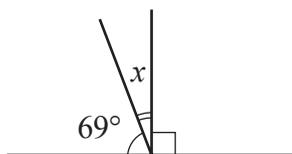
6. Вычислите:

- $44^\circ 38' 15'' + 29^\circ 46' 28''$;
- $66^\circ 58' 11'' + 17^\circ 24' 43''$;
- $100^\circ 50' 42'' - 83^\circ 55' 28''$;
- $108^\circ 12' 14'' - 57^\circ 57' 16''$.

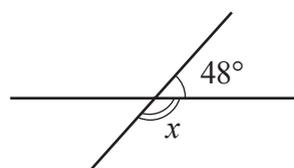
7. Рассмотрите рисунок и найдите значение x :



а)



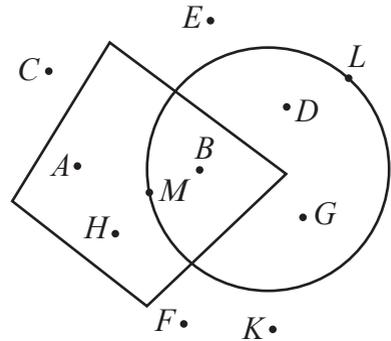
б)



в)

8. Постройте:
- незамкнутую ломаную линию с 6-ю сторонами;
 - замкнутую ломаную линию с 5-ю вершинами;
 - замкнутую ломаную линию, которая не является многоугольником.
9. Найдите длину стороны пятиугольника, если известно, что все его стороны конгруэнтны, а периметр – 1,8 дм.

10. Рассмотрите рисунок, затем выберите точки, которые:



- принадлежат внутренней области четырехугольника и внешней области окружности;
- принадлежат окружности и внешней области четырехугольника;
- принадлежат внутренним областям обеих фигур;
- принадлежат внешним областям обеих фигур.

11. Вычислите периметр:

- ромба, стороны которого равны 8,3 см;
- прямоугольника, стороны которого равны 6 см и 2,4 см;
- параллелограмма, стороны которого равны 7,5 см и 3,8 см;
- квадрата, сторона которого равна 9,(2) см.

12. Вычислите площадь:

- квадрата со стороной 6,1 см;
- прямоугольника со сторонами 5 см и 8,2 см;
- ромба с диагоналями 0,75 см и 4 см;
- квадрата, периметр которого равен 1 м.

13. Найдите площадь круга, радиус которого равен:

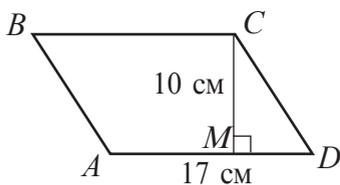
- $\frac{8}{\pi}$ см;
- 14 см;
- $\frac{1}{20}$ м.

14. Найдите объем кубоида, измерения которого равны:

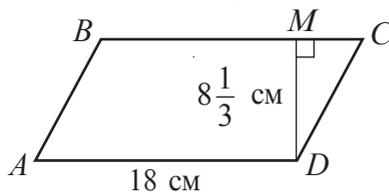
- 10 см, 11 см, 12 см;
- 4 см, $\frac{1}{8}$ см, 8 см.

15. Найдите площадь полной поверхности кубоида из задания 14.

16. Рассмотрите рисунок и вычислите площадь параллелограмма $ABCD$:



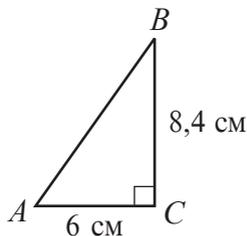
а)



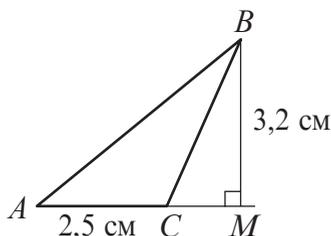
б)

Указание: Сведите решение задачи к нахождению площади прямоугольника.

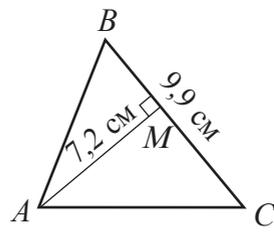
17. Рассмотрите рисунок и вычислите площадь треугольника ABC :



а)



б)

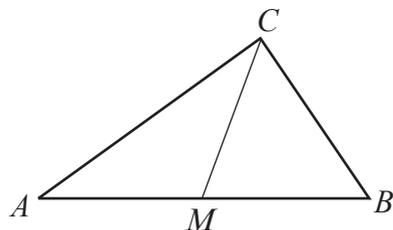


в)

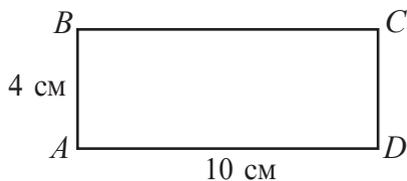
Указание: Сведите решение задачи к нахождению площади прямоугольника.

18. Найдите длины сторон прямоугольника, площадь которого равна 192 см^2 , если известно, что они относятся как $3 : 4$.

19. Докажите, что если точка M является серединой стороны AB треугольника ABC , то площади треугольников AMC и BMC равны.



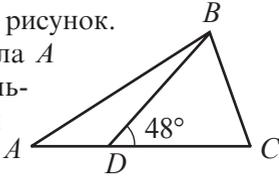
20. Рассмотрите рисунок и объясните, как можно разделить прямоугольник $ABCD$ на две части, площади которых относятся как $2 : 3$.



I вариант

1. Рассмотрите рисунок.

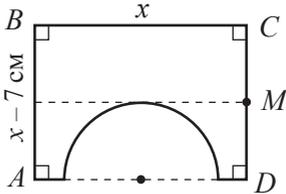
Величина угла A на $15^\circ 45'$ меньше величины угла ADB .



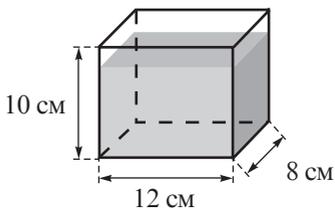
Допишите:

- а) Точки A, D и C – ...
 б) Полупрямые ... и ... – противоположные.
 в) $m(\angle BDA) = \dots$
 г) $m(\angle A) = \dots$

2. На рисунке $ABCD$ – прямоугольник, а точка M – середина стороны CD .



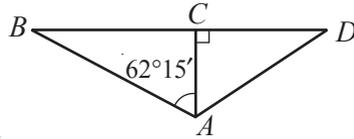
- а) Вычислите диаметр круга, частью которого является полукруг, изображенный на рисунке, если $x = 25,4$ см.
 б) Найдите периметр фигуры.
 в) Вычислите площадь фигуры.
3. В сосуд, имеющий форму кубоида с измерениями 12 см, 8 см и 10 см залили масло (смотри рисунок).



- а) Определите, на какую высоту поднимется уровень масла в сосуде, если оно занимает объем 864 см^3 ?
 б) Сколько процентов объема кубоида занимает масло?
 в) Сколько весит масло, если 10 см^3 масла весят 8 г?

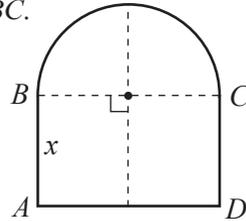
II вариант

1. Рассмотрите рисунок.

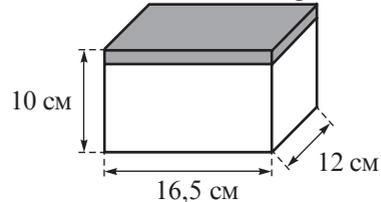


Допишите:

- а) $[CB \cup \dots = BD$.
 б) $AB \cap CD = \dots$
 в) $m(\angle ACB) + m(\angle ACD) = \dots$
 г) $m(\angle ACB) = m(\angle BAC) + \dots$
2. На рисунке $ABCD$ – прямоугольник и $AB = 0,6BC$.



- а) Вычислите диаметр круга, частью которого является полукруг, изображенный на рисунке, если $x = 14,4$ см.
 б) Найдите периметр фигуры.
 в) Вычислите площадь фигуры.
3. Слой шоколада на торте, имеющего форму кубоида (смотри рисунок), занимает 15% объема торта.



- а) Вычислите объем торта.
 б) Определите объем шоколада?
 в) Сколько весит шоколад, если 10 см^3 шоколада весят 13 г?

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Глава 1

§ 1. 1. а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно. 3. а) Истинно; б) Истинно; в) Ложно; г) Истинно; д) Истинно; е) Ложно; ж) Ложно.

8. а) $A = \{257; 275; 527; 725; 572; 752\}$; б) $\text{card } A = 6$.

10. а) $M = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$; б) $\text{card } M = 12$.

12. а) $\{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; б) $\{1; 3; 4; 5; 7\}$; д) $\{5\}$; з) \emptyset ; и) $\{4\}$; к) $\{2; 8\}$.

13. а) Ложно; б) Истинно; в) Ложно. 14. а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно; г) Истинно. 16. а) $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$; б) $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$;

в) $\{0; 1; 4; 9; 16\}$. 17. а) $\{0; 1; 2\}$; б) $\{1; 2\}$; в) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right\}$. 18. 3 куста.

20. а) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$; б) $\{2; 4; 6\}$; в) \emptyset ; г) $\{2; 4; 6; 12\}$; д) $\{1; 3; 12\}$. 21. 410 учеников.

§ 2. 2. а) $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$; в) $\{15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95\}$.

3. а) $2456 : 5 = 491$, остаток 1; г) $1234 : 3 = 411$, остаток 1. 4. 6; 28. 5. а) 11211, 2880, 6666, 7728, 91917; б) 2880, 91917. 6. а) 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18; б) 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24; д) 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250. 7. б) 18, 36, 54, 72, 90;

в) 35, 70; г) 19, 38, 57, 76, 95. 8. 311, 137, 211, 163. 9. б) $2^4 \cdot 5$; г) $2^3 \cdot 17$;

д) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$. 10. б) 9; г) 12; д) 120. 11. б) $\frac{12}{31}$; в) $\frac{6}{7}$; г) $\frac{4}{5}$. 12. б) 45; в) 135; г) 36;

д) 429; е) 192. 14. а) 1230, 1233, 1236, 1239; б) 2502, 2511, 2520, 2529, 2538, ..., 2592; в) 6300, 6390. 16. а) И; б) Л; в) Л; г) И. 17. В 9:00. 18. 2. 19. а) И; б) Л;

в) И; г) Л; д) И; е) Л. 21. а) 8 и 16; б) 9 и 36 или 18 и 27. 22. а) Л; б) И; в) Л; г) И; д) И. 23. Через 12 недель, то есть 2 августа. 25. 502.

§ 3. 1. а) 29 м и 45 м; б) 63 кг, 35 кг и 57 кг. 2. а) 340 леев; б) 1 альбом стоит

11,5 лея; книга стоит 11,5 лея. 3. 19,25. 5. а) 6 цыплят и 14 кроликов; б) 16 книг по 50 страниц и 6 книг по 90 страниц. 6. а) 2 года; б) 102 книги на испанском языке,

152 книги на французском языке и 204 книги на английском языке. 7. 560 м. 8. 7 дынь. 9. 20 телят, 25 уток и 75 гусей.

§ 4. 2. в) 2,5; г) 2; д) 16; е) 6. 3. 2) в); г); е). 5. б) $S = \emptyset$; г) $S = \emptyset$; е) $S = \{600\}$; ж) $S = \emptyset$; з) $S = \{5\}$. 9. б) $(t+5) \cdot 4 = 100$; $S = \{20\}$; г) $a : 8 \cdot 10 = 160$; $S = \{128\}$.

11. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{1\}$; в) $S = \emptyset$; г) $S = \emptyset$. 12. а) 40 автомобилей марки BMW; б) 93 книги на русском языке; в) 192 пассажира. 15. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{25\}$.

§1. 5. а) Ложно; в) Истинно; г) Ложно; д) Ложно; е) Истинно. 13. а) 65, -18, 22, 30, -11, -100, 2011, 0. 17. а) 20; б) 8; в) 123; д) 0; з) 411. 18. а) 19; б) 33; в) 87; ж) 215; з) 98. 19. а) {5; 6; 9; 11; 29; 388}. 22. а) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; г) $D = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. 23. а) Ложно; б) Ложно; в) Истинно. 25. д) -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 28. $A(2)$. 30. а) {0, 2, -5, 10}; в) {-9, 3, -1, 8}. 32. а) $x = 15$ или $x = -15$; б) $x = 123$ или $x = -123$; в) $x = 0$; г) $x = 63$ или $x = -63$. 34. а) -35; б) 64. 36. а) 35; б) 14; в) 48. 38. а) 1) {-4; 0; 5; 7; 21; 18; -8; 15}; 2) {5; 7}; 3) {-4; 0; 21}; 4) {18; -8; 15}. 39. а) $a = 12$; б) $a = 17$; в) $a = 25$. 42. а) $A = \{-2; 1; 0; 1; 2\}$; б) $B = \{-1; 0; 1\}$.

§2. 6. б) $-18 < -17 < -16$; г) $21 < 22 < 23$; е) $18 < 18,25 < 19$. 10. а) -24, -19, -18, 15, 16, 21, 63. 12. $a > 0$. 14. а) $b > a$; б) Невозможно определить.

§3. 1. а) 10; б) -8; в) -9; г) 7. 2. а) -131; б) -35; г) -42. 6. а) -2; б) -10; в) -8; г) -13. 8. а) -6; б) -2; в) -1; г) 11; д) 12; е) -23; ж) 25; з) -1. 10. а) -9; б) 2; в) 6; г) -6; д) 8; е) 0. 12. а) 27; б) -151; в) -27; г) -16; д) -185. 13. б) -280; в) -180. 14. а) -6; б) 0; в) 15. 16. а) -10; б) -41; в) -10; г) -40. 17. а) -100; б) -200. 20. 100. 22. а) 0; б) -97 778; в) -986 667.

§4. 2. а) -19; б) -12; в) 0; г) -25; д) -14; е) 39; ж) 13; з) -22; и) 46. 3. а) 8; б) 12; в) 3; г) 3; д) -9; е) -6; ж) -7; з) -7; и) 2. 6. а) $AB = 8$; б) $AB = 9$; в) $AB = 1$. 9. а) 8; б) -3; в) -18; г) 5; д) 1. 10. а) -8; б) -11; в) 2. 16. $C(4)$ и $AC = 16$.

§5. 2. а) -54; б) -105; в) 44; г) -17; д) 0. 7. а) -1 800; б) -560; в) 0; г) 960. 8. а) 1; б) -32. 11. а) -3; б) -12; в) -5; г) 12. 12. а) -12 600; б) 1 000; в) -1 300; г) -29. 13. а) -16; б) 32; в) -10; г) 143.

§6. 2. а) -13; б) 4; в) -7; г) -12; д) -19; е) -27; ж) 0; з) 51; и) -11. 4. а) 16; б) -4; в) 6; г) -8. 6. а) 3; б) -3; в) -4; г) -2. 8. В 12:00. 9. а) -29; б) -6; в) 25; г) 3.

§7. 3. а) 1; б) 50 625; в) -1; г) 1; д) -343; е) 3 600; ж) 10 000. 5. а) -67; б) -1 010; г) 118. 6. а) 1 942; б) -363; в) -370. 15. а) $S = \{-2; 2\}$; б) $S = \emptyset$; в) $x = \{-2\}$.

§ 8. 3. а) $S = \{-3\}$; б) $S = \{85\}$; в) $S = \{-1912\}$. 4. а) $S = \{-170\}$; б) $S = \{1992\}$; в) $S = \{-747\}$. 5. а) $S = \{27\}$; б) $S = \{-11\}$; в) $S = \{6\}$. 6. а) $S = \{160\}$; б) $S = \{380\}$; в) $S = \{342\}$. 7. а) $S = \{-24\}$; б) $S = \{100\}$; в) $S = \{-20\}$. 10. а) $S = \{4\}$; б) $S = \{5\}$; в) $S = \{-2592\}$. 11. а) $S = \{-10\}$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \{5\}$; г) $S = \emptyset$. 12. а) $S = \{-18; 18\}$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \{-2; 5\}$; г) $S = \{5\}$.

Глава 3

§ 1. 3. а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно; г) Ложно. 4. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $\frac{7}{9}$. 5. а) $1\frac{2}{5}$; б) $2\frac{6}{11}$; в) $16\frac{1}{3}$; г) $3\frac{4}{7}$; д) $2\frac{6}{19}$; е) $3\frac{5}{42}$. 6. а) $\frac{17}{5}$; б) $\frac{31}{7}$; в) $\frac{31}{4}$; г) $\frac{23}{9}$; д) $\frac{83}{8}$. 7. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{38}{25}$; г) $\frac{103}{100}$; д) $\frac{43}{20}$; е) $\frac{57}{8}$. 9. а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$. 10. а) $1\frac{3}{8}$; б) $1\frac{1}{4}$; в) $\frac{7}{8}$; е) $\frac{27}{28}$; и) $\frac{17}{25}$; л) $\frac{47}{90}$. 11. а) $12\frac{11}{12}$; в) $18\frac{7}{36}$; ж) $5\frac{11}{42}$. 12. $AB = 4\frac{29}{30}$ м. 13. $25\frac{7}{8}$ км/ч. 14. $6\frac{3}{20}$ л. 15. $2\frac{7}{20}$ кг. 16. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 1. 17. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{13}{28}$; е) $\frac{6}{35}$; ж) $\frac{1}{18}$; з) $\frac{7}{36}$; и) $\frac{13}{60}$; к) $\frac{17}{24}$. 18. а) $6\frac{1}{35}$; б) $2\frac{1}{30}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $7\frac{5}{11}$; ж) $3\frac{5}{8}$; з) $\frac{43}{60}$. 19. $2\frac{2}{3}$ кг. 20. $7\frac{4}{9}$ кг. 22. $\frac{8}{21}$. 23. а) $\frac{13}{42}$; б) $1\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{10}$. 24. а) $4\frac{1}{5}$; б) $1\frac{5}{7}$; в) $1\frac{1}{5}$; г) $\frac{3}{10}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{21}{44}$; ж) $\frac{7}{36}$; з) $\frac{1}{8}$; и) $\frac{3}{10}$; к) $\frac{7}{15}$. 27. а) $4\frac{3}{8}$; б) $4\frac{8}{9}$; в) $2\frac{5}{8}$; г) $37\frac{1}{2}$. 28. а) $2\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) 0. 29. 23 км/ч. 30. $12\frac{4}{5}$ м². 34. а) $1\frac{1}{3}$; б) 9; в) 4; г) $1\frac{3}{7}$; д) 77; е) $\frac{3}{13}$; ж) $\frac{1}{3}$; з) 2; и) $2\frac{1}{10}$; к) $3\frac{3}{7}$. 35. $\frac{25}{676}$ м². 36. $94\frac{1}{2}$ км/ч. 37. $7\frac{4}{5}$ кг. 38. а) 18; б) 10; в) 6; е) $5\frac{5}{7}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) $\frac{2}{3}$. 39. 160 км. 41. 36. 42. 18 автомобилей. 43. 21 км. 44. а) 30; б) 16; в) 27; г) 10. 45. 18 леев. 46. 28 учеников. 48. а) $\frac{53}{300}$; б) $\frac{989}{1512}$; в) $1\frac{3}{5}$; г) $1\frac{1}{2}$. 50. а) $1\frac{3}{10}$; б) $\frac{9}{14}$; в) $\frac{3}{14}$; г) $2\frac{1}{10}$; д) $\frac{1}{4}$; е) 1. 51. а) $1\frac{4}{5}$; б) $7\frac{1}{12}$. 56. $16\frac{11}{18}$ кг. 57. а) $1\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$. 58. $1\frac{1}{2}$ мин. 59. $96\frac{7}{12}$ кг. 60. Да. 61. $\frac{1}{2}$ кг.

62. 105 учебников. 63. $\mathcal{P} = 420$ см; $\mathcal{A} = 11\,016$ см². 65. а) 58,5; б) $\frac{7}{13}$.

67. $1\frac{5}{18}$ дм². 68. 2 рулона. 69. 28 учеников. 70. Одинаковое количество.

71. 27 персиков.

§2. 7. а) 16,12; б) 15,258; в) 30,644; г) 16,032. 8. 26,1 км/ч. 9. 0,4 кг.

10. а) 23,39; б) 12,423; в) 15,899; г) 23,643. 11. а) 37,287; б) 6,66; в) 91,89; г) 0,814. 15. 47,7 кг. 16. а) 3,628; б) 1,478; в) 21,773; г) 2,31. 18. а) 0,608; б) 0,3654; д) 0,024. 22. $\mathcal{P} = 21$ м; $\mathcal{A} = 25,46$ м². 23. а) 3,45; г) 19,55;

е) 0,125; ж) 0,238. 24. 168 леев 60 банов. 25. 352,5 км. 26. а) 8; г) 2,2; е) 18; з) 3 000. 27. Во второй день. 28. а) 2,19(63); б) 0,3(351); в) 0,4(09); г) 0,(384615);

д) 3,39(2105); е) 1,48(3); ж) 0,4(592); з) 0,35(1). 41. а) 5,8; б) 1,0647; в) 10,7663; г) 74,82. 42. За сливы, на 20 леев 20 банов. 46. а) 31,03; б) 25,18;

в) 9,76; г) 2,84. 48. 6,3 см. 49. Да. 51. а) 22,4 м²; б) 7 рулонов. 54. а) 0,096 г.

55. 20,4 км/ч.

§3. 8. а) 10,6; б) 0,9; в) 10,24; г) $\frac{29}{48}$; д) $\frac{1}{8}$; е) 80. 9. а) $\frac{61}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{20}$;

г) $-\frac{77}{25}$; д) $\frac{7}{8}$; е) $-\frac{12}{25}$; ж) $-\frac{48}{25}$; з) $\frac{3}{8}$. 10. а) $1\frac{1}{2}$; б) $-3\frac{1}{5}$; в) $5\frac{1}{4}$; г) $-3\frac{1}{8}$;

д) $-7\frac{1}{200}$; е) $4\frac{1}{80}$. 11. д) 2,75; е) 0,35; ж) 0,04. 12. а) $A = \left\{ \frac{5}{8}; \frac{3}{25}; \frac{17}{50} \right\}$;

в) $B = \left\{ \frac{7}{12}; \frac{6}{11}; \frac{13}{30} \right\}$; г) $B = \{0,58(3); 0,(54); 0,4(3)\}$. 25. а) - 2,5; в) - 3,7;

г) - 1,9; д) $-\frac{1}{6}$; е) $\frac{3}{20}$; ж) $-1\frac{8}{21}$; и) $-2\frac{11}{12}$; к) $-4\frac{3}{40}$; л) $-4\frac{3}{14}$; м) $\frac{13}{20}$;

н) $-1\frac{5}{24}$; о) $1\frac{1}{8}$. 30. а) 4,26; б) $\frac{7}{12}$; в) 0,39; г) - 13. 31. а) 0,4; в) $-2\frac{1}{8}$;

г) 1; з) $1\frac{1}{2}$. 32. а) 0,96; б) - 45; в) 2,4; г) $-\frac{2}{7}$; е) - 6. 35. а) - 3; б) - 20;

в) 7,2; г) - 9; д) 4; е) 0,3. 36. 9 леев. 37. 36,5 кг. 42. а) $\frac{44}{45}$; б) - 2; в) $\frac{5}{6}$.

45. $\approx 24,3$ лея. 46. ≈ 1883 лея. 54. а) 0,(387); б) 2,0(5); в) 2,5(3); г) 9,(6).

56. а) $\{-1; 0\}$; б) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. 61. а) - 2,754; б) - 0,4; в) 0,01;

г) - 0,475. 64. а) - 1,4; б) 5; в) - 1,4; г) 1,4; д) 5. 68. а) $1\frac{37}{40}$; б) $-3\frac{1}{4}$;

в) $-\frac{39}{70}$; г) $\frac{4}{5}$. 71. Второй муравей. 73. а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{180}$. 74. 12 лет.

75. 1,29 кг. 76. 32 года. 84. а) - 7,2; б) 4,3. 86. 2,06 м. 87. Нет.

§ 4. 1. а) $S = \{69\}$; б) $S = \{-24\}$; в) $S = \{2,5\}$; г) $S = \{11,5\}$; д) $S = \{-4\}$; е) $S = \{3,8\}$; ж) $S = \{3\}$; з) $S = \{2\}$. 3. а) $S = \{5\}$; б) $S = \{0\}$; в) $S = \{18\}$; г) $S = \{0\}$. 8. 14,6 кг; 10 кг. 9. 2063 лея. 10. $\frac{9}{16}$ м². 11. 12 леев. 12. 14 м. 13. 14,5° и 20,5°. 14. 15 мин.

Упражнения и задачи на повторение

8. а) 1; б) $5\frac{5}{8}$. 9. а) 5; б) 4,1. 12. а) $S = \{-2,5; 2,5\}$; б) $S = \{-24; 24\}$; в) $S = \{-3,3; 3,3\}$; г) $S = \{-3,3; 0,7\}$; е) $S = \{-2,5; 7,7\}$. 13. 4 км.

Глава 4

§ 1. 1. а) 5,625; б) 4; в) 2,65; г) 7. 4. а) 20; б) 20; в) 8; г) 0,0028. 6. 0,6. 7. а) $\frac{5}{7}$; б) 1,041(6); в) 1,(1); г) 0,8. 9. а) 4,14 г/см³; б) 1 300 кг/м³; в) 6 500 кг/м³. 10. 10,5 лея. 11. а) 2,8; б) -1. 12. 0,(5). 14. 84 км/ч. 15. $AC = 7$ см, $BC = 8$ см. 16. 3080 леев. 17. $459 = 51 + 102 + 306$. 18. $954 = 318 + 212 + 424$.

§ 2. 4. а) 1; б) 18; в) 12,5; г) 18; д) 1,2. 6. Задача имеет 4 решения. Одно из решений: а) $\frac{5,89}{6,08} = \frac{6,2}{6,4}$; б) $\frac{21}{37,8} = \frac{44}{79,2}$; в) $\frac{675}{1080} = \frac{1240}{1984}$; г) $\frac{0,06}{0,08} = \frac{0,3}{0,4}$. 7. б) $\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$. 8. а) Да, так как $5 \cdot 18 = 6 \cdot 15$; б) Да; в) Нет; г) Да; д) Нет. 10. а) 1,5 км; б) 1,3 км; в) 4 км; г) 1,65 км. 12. а) 16; б) $ac = 60$, $bd = 15$. 13. а) $\approx 31,43$ см; б) $\approx 3,14$ см; в) ≈ 3 , (18) см; г) $\approx 0,16$ см. 15. а) 20 м; б) 5,7 м.

§ 3. 1. а) Да; б) Нет; в) Да; г) Да. 3. а) Истинно; б) Ложно; в) Ложно; г) Истинно. 4. а) 6 дней; б) 10 дней. 5. а) 9,6 кг; 144 кг; 200 г; б) 0,875 л; 3,75 л. 6. а) 5 мин 20 с; 6 мин 40 с; б) 25 л; 45 л; 300 л. 7. Для 6 порций: 450 г капусты, 150 г колбасы, 9 яиц, 150 г ветчины, 120 г майонеза, 3 луковицы. 8. а) 5 г; б) 20 г. 9. а) 9,36 г; б) 15,328 г. 11. а) 37,5 кг; 22,5 кг; б) 300 л; 60 л. 14. а) $4960 = 992 + 1860 + 2108$; б) $9200 = 2100 + 3300 + 3800$. 15. 15, 20, 25. 16. 15000, 30000, 45000. 17. 16, 24, 40, 56.

§ 4. 1. а) Да; б) Нет; в) Да; г) Да. 3. а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно; г) Ложно. 4. 32 км/ч. 5. 4 дня. 6. 15 рабочих. 7. а) 12 ч; 4 ч; 48 ч; б) 16 человек; 3 человека; 48 человек. 8. а) 10 мин; б) 6 мин 40 с. 9. а) 75; б) 20; в) 50. 10. а) 48; б) 45; в) 72. 11. 20. 12. 4 мин 48 с. 15. а) $y = \frac{12}{x}$. 17. 4 км 800 м.

§5. 3. а) 10%; б) 20%; в) 26%. **5.** а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 10%; д) 0,5%; е) 0,1%. **6.** а) 62%; б) 83%; в) 98,89%. **7.** а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 40%; д) 48%; е) 45%; ж) 0,5%; з) 54%; и) 0,75%; к) 175%; л) 150%; м) 37,5%. **8.** а) 4%; б) 50%; в) 25%; г) 97%; д) 101%; е) 223%; ж) 20,4%; з) 679,1%; и) 33,(3)%; к) 66,(6)%; л) 512,3%; м) 100%. **9.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{6}{25}$; г) 1; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{3}{5}$; ж) $\frac{3}{20}$; з) $\frac{1}{20}$; и) $\frac{13}{2}$; к) $\frac{1}{200}$; л) $\frac{1}{400}$; м) $\frac{3}{400}$; н) $\frac{11}{5}$. **10.** а) 0,03; б) 0,07; в) 0,18; г) 0,44; д) 0,009; е) 0,0025; ж) 0,394; з) 0,621; и) 0,4159; к) 0,5648. **12.** а) 22%; б) 40%; в) 25%; г) 37,5%; д) 0,05%; е) 1%; ж) 80%; з) 100%; и) 0,1(6)%. **13.** АРИСТОТЕЛЬ. **15.** 25%. **16.** а) 40%; б) 60%; в) 36%; г) 40%. **19.** 50%. **20.** а) 37,5%; б) 150%; 100%. **21.** а) Да.

§6. 1. а) 2; б) 4; в) 20; г) 48; д) 1,5 лея; е) 6 см; ж) 18 долларов; з) 144; и) 342; к) 256; л) 385; м) 138,6. **2.** б) 200; в) 128; г) 800; д) 80; е) 80; ж) 200; з) 125; и) 225. **3.** а) 300 леев; б) 120 леев; в) 140 м; г) 72 см; д) 10 300 леев; е) 13 800 леев; ж) 1 м 1 мм; з) 1 л 90 мл. **5.** а) 5%; б) 10%; в) 25%; г) 9%. **7.** а) Ложно; б) Истинно; в) Ложно; г) Истинно; д) Ложно. **8.** 1 м 47 см. **9.** 972 692. **10.** 2736 000. **11.** $\approx 8,26\%$. **12.** 800 г. **13.** 1,495%. **14.** На 56%. **15.** 72%. **16.** 1500 леев. **17.** 1000 леев. **18.** 60%. **19.** а) 44,4; б) $11\frac{1}{9}$. **21.** а) 250%; б) 83,(3)%; в) 600%; г) 13,(3)%. **22.** Они пройдут одновременно.

Упражнения и задачи на повторение

1. а) 0,4; б) 3,5; в) 0,36; г) 1,5. **3.** а) $a < b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$; д) $a < b$; е) $a < b$. **4.** а) 1; б) 13. **6.** а) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24} = \frac{30}{36} = \frac{10}{12} = \frac{7,5}{9}$. б) $\frac{3,5}{0,5} = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{8,4}{1,2} = \frac{67,2}{9,6} = \frac{49}{7}$. **7.** а) Пшеничная мука дороже; б) томатный сок дороже; в) керамическая плитка дешевле; г) цинковая труба дороже. **8.** а) $\frac{8}{9} = \frac{16}{18}$; б) $\frac{7,5}{6} = \frac{5}{4}$; в) $\frac{2,4}{0,96} = \frac{4}{1,6}$; г) $\frac{10}{0,4} = \frac{2}{0,08}$. **9.** а) Да; б) Да; в) Нет; г) Да. **10.** а) 9 л; 21,6 л; 60 л; б) 37,5 л; 5 л; $4\frac{1}{6}$ л. **11.** 15 часов. **13.** $\frac{9}{11}$. **14.** а) 25%; б) 28%; в) 90%; г) 750%; д) 91%; е) 214%; ж) 125%; з) 262,5%. **15.** а) 41,(6)%; б) 66,(6)%; в) 62,5%; г) $63\frac{3}{19}\%$. **16.** а) 153 лея; б) 192 лея; в) 2625 леев; г) 1924 лея. **17.** 87%. **20.** 300 W; 480 W. **21.** 9 см. **22.** а) Стандарт;

б) В случае с пакетом „Стандарт“ господин Копейкин должен заплатить 17,07 лея, а Иван – 21,33 лея. В случае с пакетом „Эконом“ господин Копейкин должен заплатить 29,33 лея, а Иван – 36,67 лея. **23.** Цена ковров одинакова: 340 леев/м². **24.** 0,2. **25.** 6 и 9. **26.** 8 и 12. **27.** 14,8 и 2,5. **28.** а) 4,5; б) 0,75; в) 80; г) 2,4. **29.** а) 48; б) 30; в) 4; г) 80. **30.** 45%. **31.** 2430 леев. **34.** На 25%. **35.** а) 125%; б) 44,(4)%. **36.** а) 5; б) 25. **37.** а) $1\frac{2}{9}$; б) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{2}{9}$; г) $1\frac{1}{6}$. **38.** $a = 12$, $b = 15$.

Глава 5

§1. 8. а) 18,8 см; б) 24 см; в) 39,6 см; г) 16,2 см. **11.** 12 способов: $AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC$. **12.** 20 см. **13.** 12 см. **14. 7.** **15.** $C(-2,5; -2)$, $D(-2; 2)$, $E(2,5; -2)$, $F(5; 2,5)$, $G(2; 3)$, $H(-3; 1)$, $L(-1; 4,5)$, $K(5; 1)$.

§2. 6. а) 90°; б) 180°; в) 150°; г) 60°. **7.** а) 125°; б) 22°; в) 71°. **8.** а) 5 мин; б) 10 мин; в) 22 мин 30 с; г) 10 с. **9.** а) 65°7'; б) 82°42'; в) 24°7'; г) 3°8'. **10.** а) 36°; б) 72°; в) 144°; г) 108°. **12.** а) 22°30'; б) 48°30'; в) 151°16'; г) 134°58'. **13.** а) 40°9'; б) 34°27'; в) 89°13'12". **14.** а) 75°; б) 111°; в) 112°30'; г) 33°; д) 46°30'. **15.** а) $m(\angle BOC) = m(\angle AOD) = 156^\circ$, $m(\angle COD) = 24^\circ$. **16.** $m(\angle AMN) = m(\angle MND) = m(\angle CNK) = 63^\circ$, $m(\angle AMP) = m(\angle BMN) = m(\angle CNM) = m(\angle DNK) = 117^\circ$.

§3. 4. а) 19 см; б) 4,5 см. **5.** а) 5; б) 9. **6.** а) 64 см²; б) $10\frac{9}{6}$ см²; в) 4,2025 см²; г) 53,(7) см². **7.** а) 60 см²; б) 20,4 см²; в) 50 см². **11.** а) 14 см; б) 11,(1) см; в) 119,8 см; г) 20,(4) см.

§4. 6. б) $12,8\pi$ см; в) $4,5(3)\pi$ см; г) 2 см. **7.** б) $\frac{9}{16}\pi$ см²; в) $5,(4)\pi$ см²; г) $\frac{4}{\pi}$ см². **8.** б) $0,49\pi$ см²; в) $\frac{25}{\pi}$ см²; г) $4\frac{76}{81}$ см². **11.** а) Принадлежит внутренней области окружности; б) принадлежит окружности; в) принадлежит внешней области окружности; г) принадлежит внутренней области окружности. **12.** а) 2; б) 0; в) 2; г) 1; д) 0. **14.** а) 8π см; б) 3π см; в) $5\frac{1}{7}\pi$ см. **16.** а) 8π см²; б) 9π см²; в) 48π см².

§5. 4. б) 18,(962) см³; в) 101,(629) см³. **5.** б) 104 см³; в) 399 см³. **6.** б) 160,1(6) см²; в) 27,30(6) см². **7.** б) 91,(3) см²; в) 612,(6) см². **12.** а) 305 см³; б) 1120 см³. **13.** 2,35 м. **14.** 31 980 кг. **15.** 4,8 м. **16.** ≈ 7 кг 20 г. **17.** а) 5 см; б) 25 см; в) 20 см. **18.** 1000 см³. **19.** На один день.

Содержание

Глава 1. Натуральные числа.

Повторение и дополнения

§ 1. Множество натуральных чисел	4
§ 2. Делимость	13
§ 3. Арифметические методы решения задач	21
§ 4. Решение уравнений на множестве \mathbb{N}	27
<i>Задания для осмысления</i>	32
<i>Проверочная работа</i>	34

Глава 2. Целые числа

§ 1. Множество целых чисел	36
§ 2. Сравнение и упорядочивание целых чисел	46
§ 3. Сложение целых чисел	50
§ 4. Вычитание целых чисел	55
§ 5. Умножение целых чисел	60
§ 6. Деление целых чисел	64
§ 7. Степень целого числа с натуральным показателем. Порядок выполнения действий	67
§ 8. Решение уравнений на множестве \mathbb{Z}	72
<i>Задания для осмысления</i>	75
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	76
<i>Проверочная работа</i>	78

Глава 3. Рациональные числа

§ 1. Дроби. Действия с дробями	80
§ 2. Десятичные числа. Действия с десятичными числами	102

§ 3. Множество рациональных чисел	117
§ 4. Решение уравнений на множестве \mathbb{Q}	145
<i>Задания для осмысления</i>	149
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	150
<i>Проверочная работа</i>	152

Глава 4. Отношения и пропорции

§ 1. Отношения	154
§ 2. Пропорции	158
§ 3. Прямо пропорциональные величины	164
§ 4. Обрато пропорциональные величины	170
§ 5. Проценты	176
§ 6. Решение задач на проценты	182
§ 7. Элементы теории вероятности и представление данных	187
<i>Задания для осмысления</i>	193
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	194
<i>Проверочная работа</i>	198

Глава 5. Элементы геометрии

§ 1. Основные геометрические понятия	200
§ 2. Углы	206
§ 3. Многоугольники	212
§ 4. Окружность. Круг	219
§ 5. Геометрические тела	224
<i>Задания для осмысления</i>	230
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	232
<i>Проверочная работа</i>	235
Ответы	236