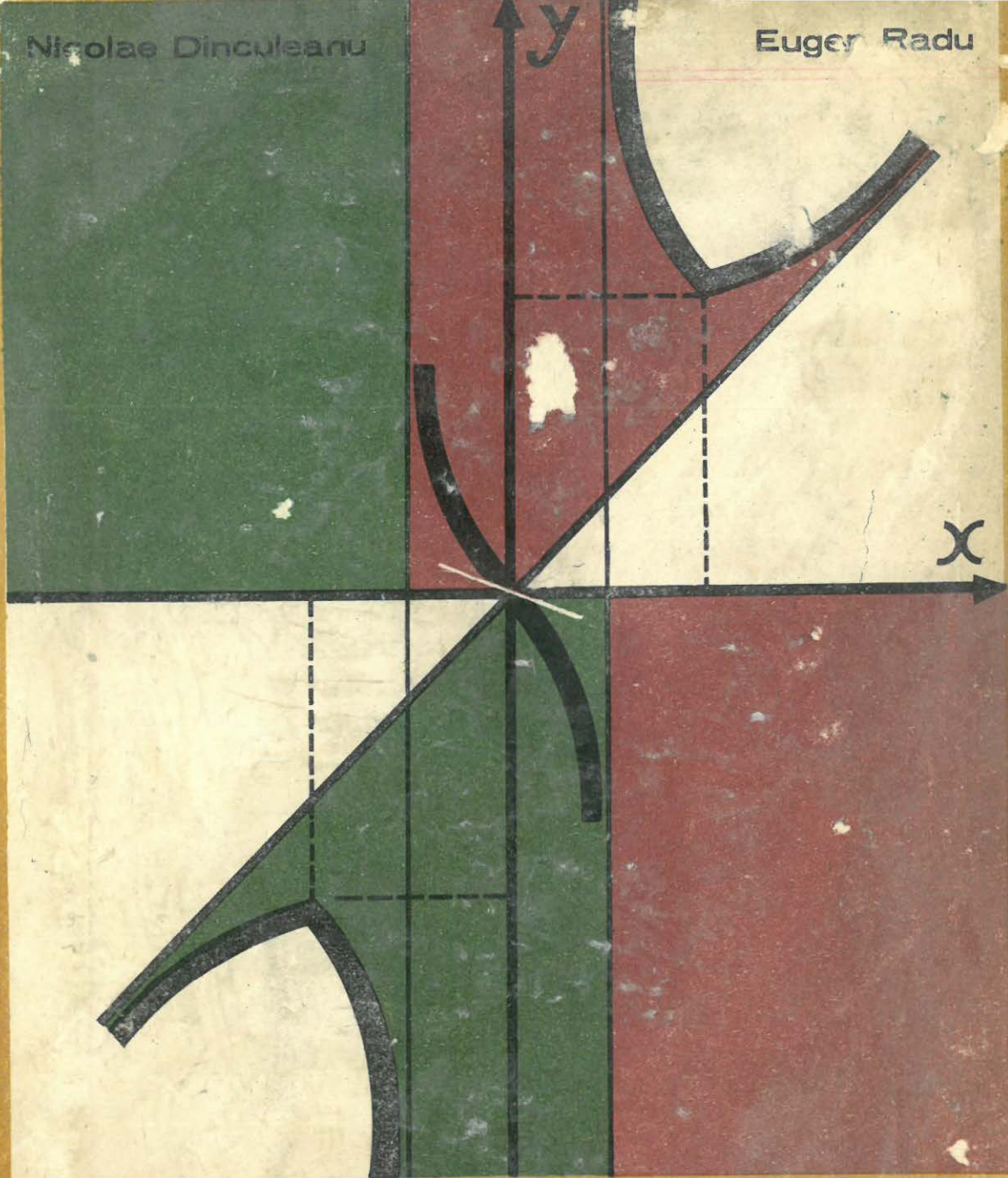


Nicolae Dinculeanu

Eugen Radu



# Elemente de analiză matematică

Manual pentru anul III liceu, secția reală și licee de specialitate

Nicolae Dinculeanu  
prof. univ.

Eugen Radu  
conf. univ.

# Elemente de analiză matematică

Manual pentru anul III liceu, secția reală  
și licee de specialitate



Editura didactică și pedagogică, București



Referenți: conf. univ. Ion Filimon  
prof. Corneliu Popescu

La elaborarea manualului autorii  
au participat în părți egale.

Redactor: prof. Eugenia Pantelimon  
Tehnoredactor: Prodan Hinea  
Coperta: Gheorghe Butu

## Capitolul

### I

## Mulțimi. Numere reale. Funcții

În clasele anterioare au fost expuse unele cunoștințe despre mulțimi, numere reale și funcții. În acest capitol vor fi revăzute aceste cunoștințe și vor fi introduse câteva noțiuni noi (produs cartezian, vecinătăți, restricții și extensii de funcții, funcții compuse etc.). Vor fi studiate, de asemenea, progresele aritmetice și progresele geometrice.

### § 1. Mulțimi

#### 1. Mulțimi și elemente

Mulțimile sînt formate din obiecte (de orice fel, fie obiecte fizice, fie obiecte ale gândirii). Obiectele din care este formată o mulțime se numesc *elementele* mulțimii. Elementele unei mulțimi sînt diferite unele de altele.

Mulțimile și elementele se notează prin litere și alte semne. O literă poate indica fie un element determinat, fie un element *arbitrar*, oarecare nedeterminat, al unei mulțimi. Un element arbitrar se mai numește *variabilă* a mulțimii (sau, încă, *argument* sau *element generic* al mulțimii).

O mulțime definită prin indicarea elementelor sale  $a, b, c, \dots$  se notează  $\{a, b, c, \dots\}$ , fără ca ordinea în care sînt scrise elementele să aibă vreo importanță. Astfel, de exemplu:  $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\}$ .

O mulțime definită prin indicarea unei proprietăți  $P$  pe care o au toate elementele mulțimii și pe care au o au alte obiecte se notează  $\{x \mid x \text{ are proprietatea } P\}$ .

#### 2. Apartenență și incluziune

Dacă  $a$  este un element al unei mulțimi,  $M$ , se spune că  $a$  aparține mulțimii  $M$  și se scrie  $a \in M$ . Dacă  $b$  nu aparține lui  $M$ , se scrie  $b \notin M$ .

Dacă orice element al unei mulțimi  $A$  este și element al unei mulțimi  $B$ , se spune că  $A$  este *conținută* în  $B$ , sau că  $A$  este *inclusă* în  $B$ , și se scrie  $A \subset B$ . Se mai spune că  $A$  este o *parte* sau o *submulțime* a lui  $B$ . Se spune, de asemenea, că

$B$  conține sau include pe  $A$  și se scrie  $B \supset A$ . Dacă  $A$  nu este inclusă în  $B$ , se scrie  $A \not\subset B$ .

Dacă  $A \subset B$  și  $B \subset A$ , atunci  $A = B$ .

Mulțimea vidă  $\emptyset$  nu conține nici un element. Mulțimea vidă este conținută în orice mulțime.

### 3. Reuniune și intersecție

Reuniunea a două mulțimi  $A$  și  $B$  este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile  $A$  și  $B$  și se notează  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Intersecția mulțimilor  $A$  și  $B$  este mulțimea elementelor comune ambelor mulțimi  $A$  și  $B$  și se notează  $A \cap B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Dacă  $A \cap B = \emptyset$ , se spune că  $A$  și  $B$  sunt *disjuncte*.

Pentru mai multe mulțimi  $A, B, C, \dots$  (în număr finit sau infinit), se definește în mod asemănător reuniunea lor — ca fiind mulțimea elementelor ce aparțin cel puțin uneia din mulțimile  $A, B, C, \dots$  — și intersecția lor — ca fiind mulțimea elementelor comune tuturor mulțimilor  $A, B, C, \dots$ .

Pentru  $n$  mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , reuniunea lor se notează  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  sau  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ , iar intersecția lor se notează  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  sau  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

Pentru un șir de mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , reuniunea lor se notează  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , iar intersecția lor se notează  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

### 4. Diferența. Complementara

Diferența a două mulțimi  $A$  și  $B$  este mulțimea elementelor ce aparțin lui  $A$ , dar nu aparțin lui  $B$ , și se notează  $A \setminus B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Dacă  $A \cap B = \emptyset$ , atunci  $A \setminus B = A$ ; dacă  $A \subset B$ , atunci  $A \setminus B = \emptyset$ .

Dacă  $B \subset A$ , diferența  $A \setminus B$  se mai numește *complementarea* lui  $B$  în raport cu  $A$  și se notează  ${}_A C B$ . Dacă mulțimea  $A$  este subînțeleasă, complementara lui  $B$  în raport cu  $A$  se notează  $CB$  și se numește, mai simplu, complementara lui  $B$ .

### 5. Produsul cartezian

Produsul cartezian a două mulțimi  $A, B$  (în această ordine) este mulțimea care are ca elemente toate perechile de forma  $(x, y)$ , în care primul element  $x$  al perechii aparține mulțimii  $A$ , iar al doilea element  $y$  al perechii aparține mulțimii  $B$ . Produsul cartezian al mulțimilor  $A, B$  (în această ordine) se notează  $A \times B$ :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

$A$  și  $B$  se numesc *factorii* produsului cartezian  $A \times B$ ;  $A$  este primul factor, iar  $B$  al doilea factor;  $x$  și  $y$  se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* elementului  $(x, y) \in A \times B$ ;  $x$  este prima coordonată, sau prima proiecție, iar  $y$  a doua coordonată, sau a doua proiecție.

Două elemente  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$  ale produsului cartezian  $A \times B$  sînt egale dacă și numai dacă au același prim element și același al doilea element.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ și } y_1 = y_2.$$

În general,  $A \times B \neq B \times A$ .

*Exemplu.*

Să luăm  $A = \{1, 2, 5\}$  și  $B = \{0, 3\}$ . Avem

$$A \times B = \{1, 2, 5\} \times \{0, 3\} = \{(1, 0), (2, 0), (5, 0), (1, 3), (2, 3), (5, 3)\},$$

$$B \times A = \{0, 3\} \times \{1, 2, 5\} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}.$$

Dacă însă  $A = B$ , atunci  $A \times B = B \times A$ ; în acest caz, produsul cartezian  $A \times A$  se notează  $A^2$ :

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}.$$

Se definește în mod asemănător produsul cartezian a  $n$  mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (în această ordine) ca fiind format din toate grupele  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  elemente, în care primul element  $x_1$  al grupeii aparține primei mulțimi  $A_1$ , al doilea element  $x_2$  al grupeii aparține mulțimii  $A_2$  etc. Produsul cartezian al mulțimilor  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se notează  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Produsul cartezian  $A \times A \times \dots \times A$  a  $n$  factori egali cu  $A$  se notează  $A^n$ .

## § 2. Numere reale

Numerele reale formează „materia primă” a *analizei matematice*.

Mulțimea numerelor reale se notează cu  $R$ . Se notează, de asemenea: cu  $Q$  mulțimea numerelor raționale, cu  $Z$  mulțimea numerelor întregi și cu  $N$  mulțimea numerelor naturale. Avem  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .



## I. Structura algebrică

Cu numerele reale se pot efectua două operații: adunarea și înmulțirea. Operația de adunare face să corespundă fiecărei perechi  $(x, y)$  de numere reale un număr real notat  $x + y$  și numit *suma* lui  $x$  cu  $y$ . Adunarea are proprietățile următoare:

- 1)  $x + y = y + x$  (adunarea este comutativă);
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (adunarea este asociativă);
- 3)  $x + 0 = x$  (0 este elementul neutru pentru adunare);
- 4)  $x + (-x) = 0$  (orice număr  $x$  are un opus,  $-x$ ).

Operația de înmulțire face să corespundă fiecărei perechi  $(x, y)$  de numere reale un număr real notat  $x \cdot y$  sau  $xy$  și numit *produsul* lui  $x$  cu  $y$ . Înmulțirea are proprietățile următoare:

- 5)  $xy = yx$  (înmulțirea este comutativă);
- 6)  $(xy)z = x(yz)$  (înmulțirea este asociativă);
- 7)  $x \cdot 1 = x$  (1 este element neutru pentru înmulțire);
- 8)  $xx^{-1} = 1$ , dacă  $x \neq 0$  (orice număr  $x \neq 0$  are invers).

Cele două operații sunt legate prin proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare:

$$9) x(y + z) = xy + xz.$$

Așadar, mulțimea numerelor reale este un *corp* pentru operațiile de adunare și înmulțire.

Din cele 9 proprietăți de mai sus se deduc toate proprietățile algebrice ale numerelor reale.

Suma  $x + (-y)$  se mai scrie  $x - y$  și se numește *diferența* dintre  $x$  și  $y$ . Produsul  $x \cdot y^{-1}$ , unde  $y \neq 0$ , se scrie  $\frac{x}{y}$  sau  $x/y$  și se numește *cîtuș* dintre  $x$  și  $y$ . Operația de scădere nu trebuie considerată ca fiind distinctă de operația de adunare, și, de asemenea, operația de împărțire nu trebuie considerată ca distinctă de operația de înmulțire.

Reținem că împărțirea cu 0 nu este definită (se mai spune că împărțirea cu 0 este o operație fără sens).

## 2. Structura de ordine

După cum se știe, oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$  avem una și numai una din următoarele trei posibilități:

$$x < y \text{ (} x \text{ este mai mic decît } y \text{), } x = y, x > y \text{ (} x \text{ este mai mare decît } y \text{)}.$$

Dacă  $x$  nu este mai mare decît  $y$ , atunci  $x$  poate fi mai mic decît  $y$  sau egal cu  $y$ ; se scrie  $x \leq y$  ( $x$  este mai mic sau egal cu  $y$ ). De asemenea, dacă  $x$  nu este mai mic decît  $y$ , atunci  $x$  poate fi mai mare decît  $y$  sau egal cu  $y$ ; se scrie  $x \geq y$  ( $x$  este mai mare sau egal cu  $y$ ). Rezultă că avem  $x \leq y$  dacă și numai dacă are loc una din relațiile:  $x = y$  sau  $x < y$ .

## Exemple.

$$3 \leq 3, 3 \leq 5, 3 < 5, 0 \geq 0, 2 \geq 0, 2 > 0.$$

Numerele  $x \geq 0$  se numesc numere *pozitive*, iar numerele  $x \leq 0$  se numesc numere *negative*. Rezultă că 0 este în același timp și pozitiv și negativ.

Numerele  $x > 0$  se numesc numere *strict pozitive*, iar numerele  $x < 0$  se numesc numere *strict negative*. Rezultă că numerele strict pozitive sînt în același timp numere pozitive. Singurul număr pozitiv care nu este strict pozitiv este 0.

Proprietățile relației de ordine „ $x \leq y$ ”:

- 1)  $x \leq x$  (este reflexivă);
- 2)  $x \leq y$  și  $y \leq x \Rightarrow x = y$  (este antisimetrică);
- 3)  $x \leq y$  și  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (este tranzitivă).

Relația de ordine este legată de operațiile de adunare și înmulțire prin următoarele proprietăți:

- 4)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- 5)  $x \leq y \Rightarrow \begin{cases} xz \leq yz, \text{ dacă } z \geq 0; \\ xz \geq yz, \text{ dacă } z \leq 0; \end{cases}$
- 6)  $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ .

**Observații.** Proprietățile 3, 4 și 5 sînt adevărate și dacă se înlocuiesc semnele  $\leq$  și  $\geq$ , respectiv cu  $<$  și  $>$ .

În legătură cu proprietatea 6, se observă că dacă  $x < y$  și  $x < 0$ ,  $y > 0$ , atunci  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$  (de exemplu  $-2 < 3$  și  $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$ ); dacă însă  $x \leq y < 0$ , avem, de asemenea,  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ .

Fînd date  $n$  numere reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cel mai mare dintre ele se notează  $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , iar cel mai mic se notează  $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

## Exemple.

$$\max(3, 1, 5) = 5; \min(3, 1, 5) = 1.$$

În legătură cu relația de ordine menționăm următoarele două proprietăți:

I) (Axioma lui Arhimede). Oricare ar fi numerele reale  $\alpha > 0$  și  $\beta$ , se poate găsi un număr natural  $n$ , astfel încît  $n\alpha > \beta$ .

În particular, pentru  $\alpha = 1$  rezultă că:

Oricare ar fi numărul real  $\beta$  se poate găsi  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încît  $n > \beta$ .

II) Între două numere reale  $a < b$  există totdeauna un număr rațional  $r$ ,  $a < r < b$ .

Urmează că între două numere reale  $a < b$  există o infinitate de numere raționale. Într-adevăr, între  $a$  și  $b$  există un număr rațional  $r$ ; între  $r$  și  $b$  există un număr rațional  $r_1$  etc.

### 3. Modulul

Modulul sau valoarea absolută a unui număr  $x$  se notează  $|x|$  și se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -x, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Rezultă că  $|x| = \max(-x, x)$ ; deci  $x \leq |x|$  și  $-x \leq |x|$ .

*Exemple.*

$$|7| = 7; |0,5| = 0,5; |-3| = 3; \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}; |0| = 0.$$

Modulul are proprietățile următoare:

- I)  $|x| \geq 0$ ;  $|0| = 0$ ;  
 $|x| > 0$  dacă și numai dacă  $x \neq 0$ ;  
 II)  $|-x| = |x|$ .  
 III)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (inegalitatea triunghiului).

(Modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor.)

Pentru demonstrare, se consideră succesiv cele patru cazuri posibile:

a) Dacă  $x \geq 0$  și  $y \geq 0$ , atunci  $x + y \geq 0$ , și inegalitatea devine o egalitate:

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

b) Dacă  $x \leq 0$  și  $y \leq 0$ , atunci  $x + y \leq 0$  și inegalitatea este, de asemenea, verificată cu egalitate:

$$|x + y| = -x - y = -x + (-y) = |x| + |y|.$$

c) Dacă  $x \geq 0$  și  $y \leq 0$ , atunci  $|x| = x$  și  $|y| = -y$ ; dacă  $x + y \geq 0$ , atunci:

$$|x + y| = x + y \leq x = |x| \leq |x| + |y|;$$

dacă  $x + y \leq 0$ , atunci:

$$|x + y| = -x - y = -x + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|.$$

d) Cazul  $x \leq 0$  și  $y \geq 0$  nu diferă de cel precedent.

*Exemplu.*

$$|-8 + 3| \leq |-8| + |3|, \text{ deoarece } |-8 + 3| = |-5| = 5, \text{ iar } |-8| + |3| = 8 + 3 = 11.$$

$$\text{III')} \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$$

(Modulul diferenței este mai mic sau egal cu suma modulelor).

Intr-adevăr:

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

*Exemplu.*

$$|12 - 7| \leq |12| + |7|, \text{ deoarece } |12 - 7| = |5| = 5, \text{ iar } |12| + |7| = 12 + 7 = 19.$$

$$\text{IV)} \quad |xy| = |x| \cdot |y|.$$

(Modulul produsului este egal cu produsul modulelor.)

$$\text{IV')} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ de unde } y \neq 0.$$

(Modulul cîntului este egal cu cîntul modulelor.)

$$\text{V)} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(Modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal cu modulul diferenței.)

Pentru demonstrare se aplică inegalitatea triunghiului întii numerelor  $x - y$  și  $y$ , apoi numerelor  $y - x$  și  $x$ :

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

deci:

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

În mod analog:

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Deoarece  $||x| - |y||$  este egal cu unul din numerele  $|x| - |y|$  sau  $|y| - |x|$ , rezultă:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

*Exemplu.*

$$||-3| - |-5|| \leq |-3 - (-5)|, \text{ deoarece}$$

$$||-3| - |-5|| = |3 - 5| = |-2| = 2, \text{ iar } |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2.$$

$$\text{V')} \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

(Modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal cu modulul sumei.)

Pentru demonstrare se procedează ca în cazul precedent, aplicînd inegalitatea triunghiului mai întii numerelor  $x + y$  și  $-y$ , și apoi numerelor  $y + x$  și  $-x$ .

*Exemplu.*

$$||-3| - |-5|| \leq |-3 + (-5)|, \text{ deoarece}$$

$$||-3| - |-5|| = 2, \text{ iar } |-3 + (-5)| = |-3 - 5| = |-8| = 8$$

VI)

$$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c.$$

Să presupunem mai întâi că  $|x| < c$ . Deoarece  $x \leq |x|$ , rezultă  $x < c$ . Pe de altă parte, dacă  $x \leq -c$ , atunci  $-x \geq c$  și deoarece  $|x| \geq -x$ , ar rezulta  $|x| \geq c$ , ceea ce ar contrazice ipoteza; așadar  $x > -c$ , adică  $-c < x$ , și deci  $-c < x < c$ .

Reciproc, să presupunem  $-c < x < c$ . Prin înmulțire cu  $-1$ , deducem atunci că avem, de asemenea,  $-c < -x < c$ . Dacă  $x$  este pozitiv, atunci  $|x| = x$ , deci  $|x| < c$ . Dacă  $x$  este negativ, atunci  $|x| = -x$ , și deci, de asemenea,  $|x| < c$ .

*Exemplu.*

$|-3| < 7$  este echivalent cu  $-7 < -3 < 7$  și cu  $-7 < 3 < 7$ .

**Observație.** În proprietatea VI se poate înlocui semnul  $<$  cu semnul  $\leq$ :

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c.$$

#### 4. Inegalitatea lui Bernoulli

Dacă  $a \geq 0$  și  $n$  este număr natural, atunci

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Într-adevăr, dezvoltând  $(1+a)^n$  după formula binomului lui Newton, obținem:

$$\begin{aligned} (1+a)^n &= 1 + C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \dots + a^n = \\ &= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \dots + a^n \geq 1 + na \end{aligned}$$

(v. generalizarea la exercițiul 22 de la sfârșitul capitolului).

**Aplicații:** 1) Dacă  $a \geq 2$  și  $n \in \mathbb{N}$ , atunci:

$$a^n \geq n+1.$$

Într-adevăr, luând  $A = a - 1$ , avem  $A \geq 1$ , și  $a = A + 1$ , deci

$$a^n = (1+A)^n \geq 1+nA \geq 1+n.$$

*Exemple.*

$$2^n \geq n+1; \quad 10^n \geq n+1; \quad \pi^n \geq n+1.$$

**Rezultă:**

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}; \quad \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \text{ etc.}$$

2) Dacă  $a > 1$ , și  $\alpha \in \mathbb{R}$ , există un număr natural  $n$ , astfel încât:

$$a^n > \alpha.$$



Fig. 1

Într-adevăr, luând  $A = a - 1$ , avem  $a = A + 1$  și  $A > 0$ . Folosind axioma lui Arhimede, se poate găsi deci un număr natural  $n$  astfel încât  $nA > \alpha$ . Atunci

$$a^n = (1+A)^n \geq 1+nA > 1+\alpha > \alpha.$$

*Exemplu.*

$a = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = 10^5$ ; rezultă  $A = \frac{1}{2}$ . Luând, de exemplu,  $n = 10^6$ , se obține  $nA = 5 \cdot 10^5 > 10^5$

$$\text{deci } \left(\frac{3}{2}\right)^{10^6} > 10^5.$$

#### 5. Reprezentarea numerelor prin puncte de dreaptă

Din geometria analitică se știe că numerele reale pot fi puse în corespondență biunivocă cu punctele unei drepte pe care au fost alese un punct  $O$  (originea), un sens pozitiv și o unitate de lungime.

Dacă în această corespondență  $M$  este punctul care corespunde numărului  $x$ ; numărul  $x$  se numește *abscisa* punctului  $M$  (fig. 1). Dacă  $M$  și  $N$  sînt două puncte ale drepte, de abscise respectiv  $x$  și  $y$ , distanța dintre  $M$  și  $N$  este egală cu modulul diferenței absciselor  $|x - y|$ . Numărul  $|x|$  reprezintă distanța de la  $M$  la originea  $O$ .

Dată fiind corespondența biunivocă dintre numerele reale și punctele unei drepte, se identifică un punct  $M$  cu abscisa sa  $x$ . Astfel, vom spune „punctul  $x$ ”, înțelegînd prin aceasta „punctul care are abscisa  $x$ ”. De exemplu, vom spune: punctul 0, punctul  $-2$ , punctul  $\frac{3}{4}$ , punctul  $\sqrt{2}$ , punctul  $-\sqrt[3]{5}$ , punctul  $\pi$  etc.

#### 6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan

Fîind date două drepte perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$ , pe care au fost alese o aceeași origine  $O$ , o aceeași unitate de lungime și cite un sens pozitiv, se stabilește o corespondență biunivocă între punctele  $P$  din plan și perechile ordonate  $(x, y)$  de numere



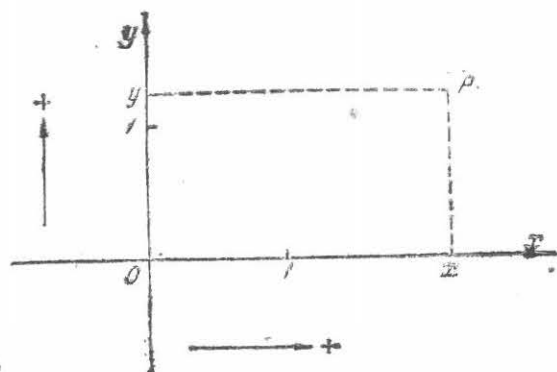


Fig. 2

reale. Numerele  $x$  și  $y$  se numesc *coordonatele* punctului  $P$ ;  $x$  este *abscisa* lui  $P$ , iar  $y$  este *ordonata* lui  $P$  (fig. 2).

Datorită acestei corespondențe biunivoce, se identifică un punct  $P$  cu perechea coordonatelor sale  $(x, y)$ . În loc de „punctul  $P$ ” vom spune, de asemenea, „punctul  $(x, y)$ ”.

**Observație.** Perechile de numere reale  $(x, y)$  sînt elemente ale produsului cartezian  $R^2 = R \times R$  al dreptei reale  $R$  cu ea însăși. Prin identificarea punctelor din plan cu perechile de numere reale, planul însuși se identifică cu produsul cartezian  $R^2$ .

## 7. Intervale

Cele mai simple mulțimi de numere reale sînt *intervalele*. Acestea se împart în: *intervale mărginite* și *intervale nemărginite*.

Un interval mărginit este format din toate punctele  $x$  cuprinse între două numere  $a$  și  $b$ . Punctele  $a$  și  $b$  se numesc *extremitățile* (sau *capetele*) intervalului și pot să aparțină sau să nu aparțină intervalului. Astfel, dacă  $a < b$ :

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$  este interval deschis;

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$  este interval închis;

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  este interval închis la stînga și deschis la dreapta;

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$  este interval deschis la stînga și închis la dreapta.

Dacă  $a = b$ , atunci  $(a, a) = \emptyset$ ,  $[a, a] = \{a, a\} = \{a\}$  și  $[a, a] = \{a\}$ .

Intervalele nemărginite sînt semidreptele și dreapta întregă:

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$  (semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$  (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$  (semidreaptă deschisă nemărginită la stînga);

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$  (semidreaptă închisă nemărginită la stînga).

Dreapta întregă  $R$  se mai notează  $(-\infty, +\infty)$ .

## 8. Vecinătățile unui punct

Se numește *vecinătate* a unui punct  $x$  orice *interval deschis*  $(a, b)$  care conține punctul  $x$ , adică astfel încît  $a < x < b$ .

Rezultă că un interval deschis este vecinătate a oricărui punct  $y$  al său.

Cu cît intervalul  $(a, b)$  este mai mic, cu atît punctele sale sînt „mai apropiate” sau „mai vecine” de  $x$ .

Punctul  $x$  are atîtea vecinătăți cîte intervale deschise care îl conțin există.

Vecinătățile lui  $x$  de forma  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , cu  $\varepsilon > 0$ , se numesc *vecinătăți simetrice* ale lui  $x$ .

Orice vecinătate a lui  $x$  conține o vecinătate simetrică a lui  $x$  (fig. 3).

**Observație.** Noțiunea de vecinătate trebuie raportată totdeauna la un anumit punct. Astfel, nu are sens să spunem „intervalul  $(0, 1)$  este o vecinătate”, ci, de exemplu, „intervalul  $(0, 1)$  este o vecinătate a punctului  $\frac{1}{3}$ ”.

**Exemple.**

1) Intervalele  $(-1, 1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-1\,000, \frac{1}{2})$ ,  $(-\pi, 530)$ ,  $(-\frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^3})$  sînt toate vecinătăți ale lui 0.

Oricare din aceste vecinătăți ale lui 0 conține vecinătăți simetrice ale acestui punct. De

exemplu:  $(-1\,000, \frac{1}{2}) \supset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ;  $(-\frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^3}) \supset (\frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^5}) \supset (-\frac{1}{10^8}, \frac{1}{10^8})$ .

2) Intervalele  $(-1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{3}, 5)$  sînt toate vecinătăți ale lui  $\frac{1}{2}$ .

3) Intervalul închis  $[0, 1]$  nu este vecinătate nici a lui 0, nici a lui 1, dar conține vecinătăți ale oricărui punct  $x$  din interiorul său, anume  $x \in (0, 1) \supset [0, 1]$ .

## § 3. Funcții

### 1. Definiția funcției. Notății și denumiri

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi. Dacă fiecărui element al mulțimii  $E$  facem să-i corespundă un element, și numai unul, din mulțimea  $F$ , spunem că am definit o funcție pe  $E$  cu valori în  $F$ , sau o aplicație a lui  $E$  în  $F$  (sau, încă, o transformare a lui  $E$  în  $F$ ).

O funcție se notează cu o literă, de exemplu  $f$  (sau  $g$ ,  $h$ ,  $\varphi$  etc.), sau prin alte semne.



Fig. 3

Dacă  $f$  este o funcție definită pe  $E$  cu valori în  $F$ , se folosește notația:

$$f: E \rightarrow F \text{ sau } E \xrightarrow{f} F.$$

Noțiunea de funcție comportă trei elemente:

1) O mulțime  $E$  pe care funcția este definită. Mulțimea  $E$  se numește *domeniul de definiție* sau mulțimea de definiție a funcției;

2) O mulțime  $F$  în care funcția ia valori;

3) O *corespondență* de la elementele mulțimii  $E$  la cele ale lui  $F$ .

Pentru a defini complet o funcție, trebuie precizate toate cele trei elemente

Două funcții sînt egale dacă: sînt definite pe aceeași mulțime  $E$ , iau valori în aceeași mulțime  $F$  și stabilesc aceeași corespondență.

Dacă elementul  $a \in E$  îi corespunde prin funcția  $f$  elementul  $b$  din  $F$ , spunem că  $b$  este *imagea* lui  $a$  prin funcția  $f$ , sau că  $b$  este *transformatul* lui  $a$  prin funcția  $f$ , sau că  $b$  este *valoarea* funcției  $f$  în  $a$ ; elementul  $b$  se mai notează  $f(a)$ .

*Exemple.*

1) O funcție *constantă*  $f: E \rightarrow F$  face să corespundă fiecărui  $x$  din  $E$  un același element  $a \in F$ .

$$f(x) = a, \text{ pentru orice } x \in E.$$

2) Aplicația *identică* a mulțimii  $E$  este funcția  $f: E \rightarrow E$  definită prin egalitatea:

$$f(x) = x, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Aplicația identică a lui  $E$  se notează uneori  $\text{Id}_E$ .

## 2. Argumentul unei funcții

Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. O variabilă  $x$  a domeniului de definiție se numește, de asemenea, *variabilă independentă* a funcției  $f$  sau *argument* al funcției  $f$ . Pentru a pune în evidență argumentul  $x$  al funcției  $f$ , se folosește adesea notația  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in E$  sau, uneori, chiar  $f(x)$  în loc de  $f$ .

Argumentul unei funcții se poate nota și cu alte litere (de exemplu  $t$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $o$  etc.).

## 3. Imagini de mulțimi. Aplicații surjective.

Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Dacă  $A$  este o parte a lui  $E$ , mulțimea imaginilor  $f(x)$  ale punctelor  $x$  din  $A$  se notează  $f(A)$  și se numește *imagea* lui  $A$  prin funcția  $f$ :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Rezultă că  $f(A) \subset F$ , deoarece  $f(x) \in F$  pentru fiecare  $x \in A$ .

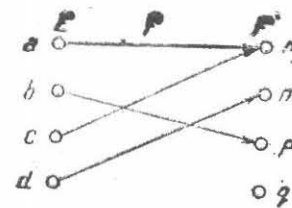


Fig. 4

În particular, luând  $A = E$ , avem  $f(E) \subset F$ . Mulțimea  $f(E)$  se numește *mulțimea valorilor* lui  $f$  și diferă, în general, de mulțimea  $F$  în care funcția ia valori.

*Exemplu* (fig. 4).

Dacă  $A = \{a, b\}$ , atunci  $f(A) = \{m, n\}$ .

Dacă  $A = \{a, c\}$ , atunci  $f(A) = \{m\}$ ,

$$f(E) = \{m, n, p\}.$$

Dacă mulțimea valorilor lui  $f$  este egală cu mulțimea în care  $f$  ia valori, adică dacă  $f(E) = F$ , se spune că  $f$  este o *aplicație* a lui  $E$  pe  $F$ , sau o *aplicație surjectivă*, sau o *surjecție*.

Funcția din exemplul precedent nu este o surjecție.

*Observație.* O funcție  $f: E \rightarrow F$  se poate totdeauna înlocui cu o aplicație surjectivă  $f_1: E \rightarrow f(E)$ , restringînd mulțimea în care ia valori, de la  $F$  la  $f(E)$ .

## 4. Graficul unei funcții

Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Să considerăm toate perechile  $(x, f(x))$  ale produsului cartezian  $E \times F$ , în care primul element  $x$  al perechii este în  $E$ , iar al doilea element  $f(x)$  al perechii este valoarea funcției  $f$  în  $x$ .

Mulțimea tuturor perechilor de acest fel se numește *graficul funcției*  $f$  și se notează  $G_f$ :

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

$G_f$  este o submulțime a produsului cartezian  $E \times F$ , și este format din acele puncte  $(x, y) \in E \times F$  pentru care ordonata  $y$  este valoarea funcției  $f$  în  $x$ , deci care verifică ecuația:

$$y = f(x), x \in E.$$

Această ecuație se numește *ecuația graficului* funcției  $f$ . Așadar:

$$G_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \times F, y = f(x)\}.$$

Ținînd seama de modul în care s-a definit egalitatea funcțiilor, rezultă că *două funcții sînt egale dacă și numai dacă au același grafic*.

## 5. Restricții de funcții. Extensii

Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție și  $A$  o parte a lui  $E$ . Să considerăm corespondența  $x \rightarrow f(x)$  stabilită de funcția  $f$  doar pentru elementele  $x$  din  $A$ . Această corespondență de la  $A$  la  $F$  definește o aplicație a lui  $A$  în  $F$ , care se numește *restricția lui  $f$  la mulțimea  $A$* , și se notează  $f_A$  (sau  $f|_A$ ). Așadar, funcția  $f_A: A \rightarrow F$  este definită de egalitatea:

$$f_A(x) = f(x), \text{ pentru } x \in A.$$

Funcția  $f$  se numește o *prelungire* sau o *extensie* a funcției  $f_A$  de la mulțimea  $A$  la  $E$ . Funcția  $f_A$  poate fi restricția a două funcții diferite  $f$  și  $g$ . Rezultă că o funcție definită pe  $A$  are, în general, mai multe prelungiri la  $E$ .

**Observație.** Funcțiile  $f$  și  $f_A$  stabilesc aceeași corespondență pe mulțimea  $A$ ; totuși, aceste două funcții sînt diferite pentru că au domenii de definiție diferite.

*Exemplu* (fig. 5).

Funcțiile  $f$  și  $g$  sînt diferite, dar au aceeași restricție  $h$  la mulțimea  $A$ .

## 6. Aplicații biunivoce

Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Se spune că  $f$  este o *funcție biunivocă* sau o *aplicație injectivă*, sau o *injecție*, dacă în puncte diferite ia valori diferite:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

sau, ceea ce este același lucru:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Spunem că  $f$  este o *aplicație bijectivă* sau o *bijecție*, dacă este o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ , adică dacă este în același timp o surjecție și o injecție:

$$(f(E) = F) \text{ și } (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

**Observație.** Orice injecție  $f: E \rightarrow F$  poate fi înlocuită cu o bijecție  $f_1: E \rightarrow f(E)$ .

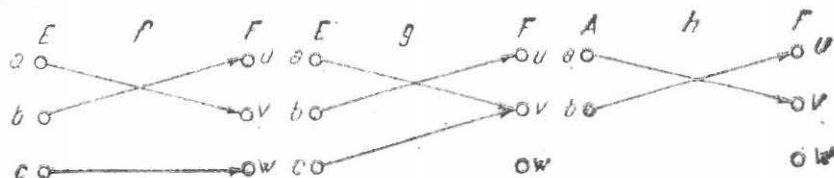


Fig. 5



Fig. 6

O aplicație bijectivă a mulțimii  $E$  pe ea însăși se numește *permutare* a lui  $E$ . Un exemplu de permutare este aplicația identică  $\text{Id}_E$  a lui  $E$ . Reamintim că dacă  $E$  are  $n$  elemente, numărul permutărilor sale este  $n!$ .

*Exemplu* (fig. 6).

## 7. Funcții compuse

O operație prin care se obțin funcții noi plecînd de la funcții date este operația de *compunere* a funcțiilor.

Fie  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  două funcții astfel încît prima funcție,  $f$ , ia valori în aceeași mulțime  $F$  pe care este definită cea de-a doua funcție,  $g$ .

Un element oarecare  $x$  din  $E$  este transformat de funcția  $f$  în elementul  $f(x)$  din  $F$ ; mai departe, acesta este transformat de funcția  $g$  în elementul  $g(f(x))$  din  $G$ . În acest fel putem stabili o corespondență  $x \rightarrow g(f(x))$  direct de la  $E$  la  $G$ :

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G, \\ x &\rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)), \\ x &\longrightarrow g(f(x)). \end{aligned}$$

Această corespondență definește o nouă aplicație a lui  $E$  în  $G$ , notată  $g \circ f$  și numită *funcția compusă* a lui  $g$  cu  $f$ :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)), \text{ pentru } x \in E, \\ (g \circ f) &\text{ se citește: } g \text{ compus cu } f. \end{aligned}$$

Se definește în mod asemănător funcția compusă a mai multor funcții.

**Observație.** Dacă notăm cu  $y$  argumentul funcției  $g$ , iar funcția însăși cu  $g(y)$ , atunci funcția compusă se obține înlocuind argumentul  $y$  cu funcția  $f(x)$ .

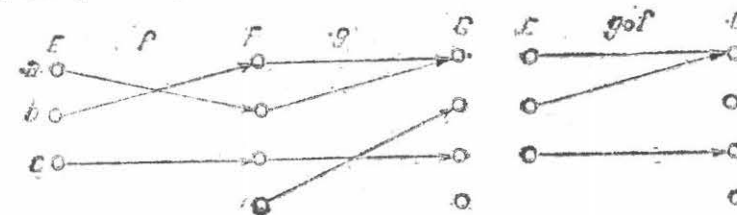


Fig. 7

**Exemplu** (fig. 7).

**Observație.** 1) Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Să considerăm aplicațiile identice  $\text{Id}_E: E \rightarrow E$  și  $\text{Id}_F: F \rightarrow F$ .

Se observă că avem:

$$f \circ \text{Id}_E = f; \text{Id}_F \circ f = f.$$

În particular, pentru funcțiile  $f: E \rightarrow E$ , avem:

$$f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f.$$

Deci pentru operația de compunere a funcțiilor  $f: E \rightarrow E$  funcția  $\text{Id}_E$  joacă același rol ca și 1 pentru înmulțirea numerelor.

2) Dacă  $f: E \rightarrow E'$  și  $g: F \rightarrow G$  sînt două funcții și dacă  $E'$  nu este conținută în  $F$ , cele două funcții nu se pot compune. Dar dacă o parte din valorile funcției  $f$  se află în mulțimea de definiție  $F$  a lui  $g$ , se consideră submulțimea:

$$A = \{x \mid x \in E, f(x) \in F\},$$

se consideră apoi restricția  $f_A: A \rightarrow F$  a lui  $f$  la  $A$ , și se compun funcțiile  $g$  și  $f_A$ , obținându-se funcția compusă  $g \circ f_A: A \rightarrow G$ . Deoarece:

$$(g \circ f_A)(x) = g(f_A(x)) = g(f(x)), \text{ pentru } x \in A,$$

se obișnuiește să se spună că  $g \circ f_A$  s-a obținut prin compunerea lui  $g$  cu  $f$ .

**Exemplu** (fig. 8).

## 8. Funcții reciproce

Fie  $f: E \rightarrow F$  o aplicație bijectivă:

$$(f(E) = F) \text{ și } (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Aceasta înseamnă că orice element  $y$  din  $F$  este imaginea prin  $f$  a unui element  $x$  din  $E$  și numai a unuiu. În acest fel putem stabili o corespondență  $y \rightarrow x$  de la  $F$  la  $E$ , anume:

fiecărui  $y \in F$  îi corespunde acel element unic  $x \in E$  pentru care  $f(x) = y$ .

Această corespondență definește o aplicație a lui  $F$  în  $E$ , numită *funcția reciprocă* (sau *încersă*) a lui  $f$  și notată  $f^{-1}$ . Așadar:  $f^{-1}: F \rightarrow E$  și

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

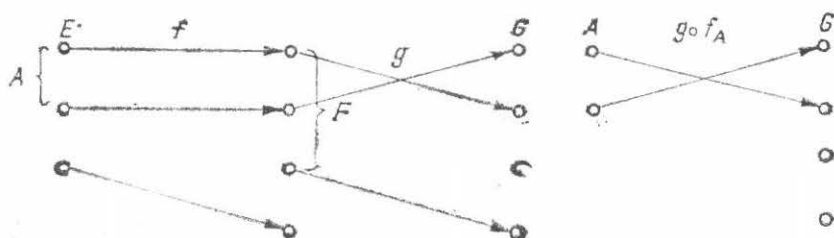


Fig. 8

Funcția reciprocă  $f^{-1}$  este, de asemenea, o bijecție, și reciproca ei este  $f$ .

Compunând cele două funcții  $f$  și  $f^{-1}$  obținem:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, y \in F$$

și:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, x \in E,$$

adică:

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \text{ și } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E.$$

Dacă  $E = F$ , atunci  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ .

**Observație.** Pentru operația de compunere a permutărilor lui  $E$ , funcția reciprocă joacă același rol ca și inversul unui număr  $\neq 0$  pentru înmulțire.

## § 4. Funcții reale de variabilă reală

O funcție  $f: E \rightarrow F$ , unde  $E$  și  $F$  sînt mulțimi de numere reale, se numește *funcție reală* (sau *funcție numerică*) *de variabilă reală*.

Mulțimea în care ia valori o astfel de funcție, poate fi considerată întreaga dreaptă reală  $R$  și, din acest motiv, poate să nu mai fie specificată. În schimb, domeniul de definiție trebuie precizat în fiecare caz în parte.

Deoarece în manualul de față vor interveni în continuare numai funcții reale de variabilă reală, acestea vor fi numite, mai simplu, funcții.

### 1. Funcții monotone

Fie  $E \subset R$  și  $f: E \rightarrow R$  o funcție (reală de variabilă reală).

Spunem că funcția  $f$  este *crescătoare* pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă oricare ar fi punctele  $x_1 < x_2$  din  $A$ , avem  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Spunem că  $f$  este *strict crescătoare* pe  $A$  dacă oricare ar fi punctele  $x_1 < x_2$  din  $A$ , avem  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Dacă funcția  $f$  este crescătoare sau strict crescătoare, pe întreg domeniul său de definiție, atunci  $f$  va fi numită, mai simplu, funcție crescătoare, respectiv funcție strict crescătoare.

Evident, orice funcție strict crescătoare este în același timp o funcție crescătoare (dar nu și reciproc).

Observăm că o funcție crescătoare este caracterizată prin aceea că sensul inegalităților este același, atât pentru valorile argumentului cît și pentru valorile corespunzătoare ale funcției. Așadar, o funcție crescătoare se poate defini, de asemenea, prin



condiția: dacă  $x_1 > x_2$ , atunci  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ; iar o funcție strict crescătoare se poate defini prin condiția: dacă  $x_1 > x_2$ , atunci  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Spunem că funcția  $f$  este *descrescătoare* pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă oricare ar fi punctele  $x_1 < x_2$  din  $A$ , avem  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Spunem că  $f$  este *strict descrescătoare* pe  $A$ , dacă oricare ar fi  $x_1 < x_2$  din  $A$ , avem  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Dacă  $f$  este descrescătoare sau strict descrescătoare pe întreg domeniul său de definiție, atunci  $f$  va fi numită, mai simplu, funcție descrescătoare, respectiv funcție strict descrescătoare.

Orice funcție strict descrescătoare este în același timp o funcție descrescătoare.

Funcțiile descrescătoare sînt caracterizate prin aceea că sensul inegalității pentru valorile argumentului se inversează pentru valorile corespunzătoare ale funcției. Așadar, o funcție descrescătoare se poate defini prin condiția: dacă  $x_1 > x_2$ , atunci  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ; iar o funcție strict descrescătoare se poate defini prin condiția: dacă  $x_1 > x_2$ , atunci  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Funcțiile crescătoare și funcțiile descrescătoare se numesc funcții *monotone*; funcțiile strict crescătoare și cele strict descrescătoare se numesc funcții *strict monotone*. Evident, orice funcție strict monotona este o funcție monotona.

Funcțiile constante sînt în același timp crescătoare și descrescătoare (și sînt singurele funcții care au această proprietate).

I) Funcțiile strict monotone sînt injective.

Într-adevăr, dacă  $x_1 \neq x_2$ , atunci, de exemplu,  $x_1 < x_2$ ; deci avem fie  $f(x_1) < f(x_2)$ , fie  $f(x_1) > f(x_2)$ , după cum  $f$  este strict crescătoare sau strict descrescătoare, și deci, în ambele cazuri,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Urmează că:

II) O funcție strict monotona și surjectivă  $f: E \rightarrow F$  este bijectivă, deci are funcție reciprocă  $f^{-1}: F \rightarrow E$ .

Funcția reciprocă  $f^{-1}$  este, de asemenea, strict monotona, și anume:

III) Dacă  $f$  este strict crescătoare, atunci și  $f^{-1}$  este strict crescătoare, iar dacă  $f$  este strict descrescătoare, atunci și  $f^{-1}$  este strict descrescătoare.

Să presupunem, de exemplu, că  $f$  este strict crescătoare și să arătăm că  $f^{-1}$  este, de asemenea, strict crescătoare. Fie  $y_1 < y_2$  două puncte din  $F$ ; trebuie să arătăm că  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ .

Să notăm  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  și  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ; deci  $f(x_1) = y_1$  și  $f(x_2) = y_2$ . Să observăm că, deoarece  $f$  este injectivă și  $y_1 \neq y_2$ , avem  $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ . Dacă am avea  $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ ,

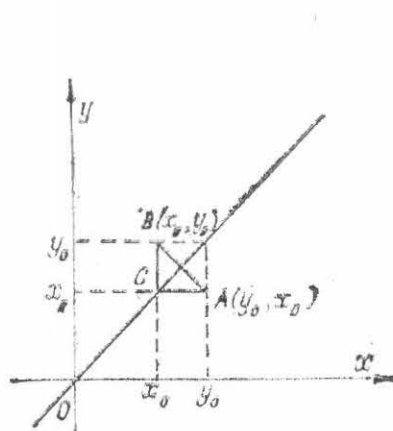


Fig. 9

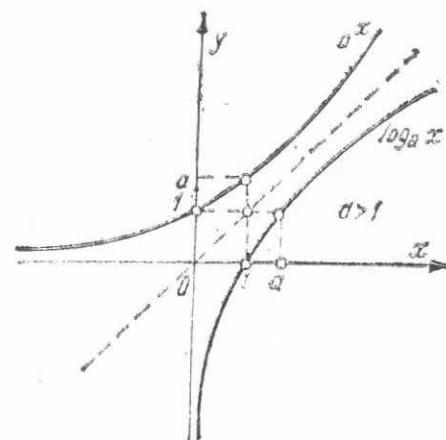


Fig. 10

adică  $x_1 > x_2$ , atunci, din faptul că  $f$  este strict crescătoare, ar rezulta  $f(x_1) > f(x_2)$ , adică  $y_1 > y_2$ , ceea ce ar contrazice ipoteza.

Urmează că  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ , deci  $f^{-1}$  este strict crescătoare.

IV) Graficele funcțiilor  $f$  și  $f^{-1}$  sînt simetrice față de prima bisectoare.

Într-adevăr, dacă  $y_0 = f(x_0)$ , deci  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , punctul  $(x_0, y_0)$  se află pe graficul lui  $f$ , iar punctul  $(y_0, x_0)$  se află pe graficul lui  $f^{-1}$ ; punctele  $(x_0, y_0)$  și  $(y_0, x_0)$  sînt simetrice față de prima bisectoare (fig. 9), deoarece prima bisectoare este bisectoare în triunghiul isoscel (și dreptunghic)  $ACE$ .

*Exemplu.*

Se știe că funcția exponențială  $f(x) = a^x$  și funcția logaritmică  $g(x) = \log_a x$  sînt reciproce una alteia. Graficele lor sînt simetrice față de prima bisectoare (fig. 10).

## 2. Operații algebrice cu funcții reale

a) Fie  $A \subset R$ ,  $B \subset R$  și  $f: A \rightarrow R$ ,  $g: B \rightarrow R$  două funcții. Fie  $x \in R$ . Ca să putem efectua suma  $f(x) + g(x)$ , diferența  $f(x) - g(x)$  sau produsul  $f(x)g(x)$ , trebuie, mai întii, ca ambele numere  $f(x)$  și  $g(x)$  să fie definite, adică atât funcția  $f$  cît și funcția  $g$  să fie definite în punctul  $x$  sau, cu alte cuvinte,  $x$  să aparțină și domeniului de definiție  $A$  al lui  $f$ , și domeniului de definiție  $B$  al lui  $g$ ; așadar,  $x$  trebuie să fie un punct comun lui  $A$  și  $B$ , adică să aparțină intersecției  $A \cap B$ .

Suma  $s = f + g$  a funcțiilor  $f$  și  $g$  este definită pe intersecția  $A \cap B$  a domeniilor lor de definiție prin egalitatea:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Diferența  $d = f - g$  este definită pe  $A \cap B$  prin egalitatea:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Produsul  $p = fg$  este definit pe  $A \cap B$  prin egalitatea:

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

Dacă  $A$  și  $B$  sînt disjuncte, funcțiile  $f + g$ ,  $f - g$  și  $fg$  nu pot fi definite.

### Exemple.

1) Fie funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $A = (0, +\infty)$  și funcția  $g(x) = \sqrt{-x}$  definită pe  $B = (-\infty, 0]$ . Deoarece  $A$  și  $B$  nu au puncte comune ( $A \cap B = \emptyset$ ), funcțiile  $f + g$ ,  $f - g$  și  $fg$  nu pot fi definite.

2) Fie funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $A = (0, +\infty)$  și funcția  $g(x) = \sqrt{x-1}$  definită pe  $B = [1, +\infty)$ . Domeniul de definiție al funcțiilor  $\ln x + \sqrt{x-1}$ ,  $\ln x - \sqrt{x-1}$  și  $\sqrt{x-1} \ln x$  este mulțimea  $A \cap B = [1, +\infty)$ .

**Observație.** Prin adunarea unei funcții  $f(x)$  cu funcția constantă  $\varphi(x) \equiv 0$  se obține tot funcția  $f(x)$ , deci pentru adunarea funcțiilor, funcția  $\varphi(x) \equiv 0$  joacă același rol ca și 0 pentru adunarea numerelor.

De asemenea, prin înmulțirea unei funcții  $f(x)$  cu funcția constantă  $\psi(x) \equiv 1$ , se obține tot funcția  $f(x)$ , deci pentru înmulțirea funcțiilor, funcția  $\psi(x) \equiv 1$  joacă același rol ca și 1 pentru înmulțirea numerelor.

b) Dacă  $f: A \rightarrow R$  este o funcție și  $a$  este un număr, atunci produsul  $af(x)$  este definit pentru orice punct  $x \in A$ .

Funcția  $h = af$  este definită, ca și  $f$ , pe mulțimea  $A$ , prin egalitatea:

$$(af)(x) = af(x), \text{ pentru } x \in A.$$

c) Fie  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow R$  două funcții. Fie  $x \in R$ . Pentru a putea efectua împărțirea  $\frac{f(x)}{g(x)}$  este necesar, pe de o parte, ca ambele numere  $f(x)$  și  $g(x)$  să fie definite, deci  $x \in A \cap B$ , iar pe de altă parte, ca  $g(x) \neq 0$ , deoarece împărțirea cu 0 nu are sens.

Domeniul de definiție al funcției  $c = \frac{f}{g}$  se obține deci înlăturînd din intersecția  $A \cap B$  toate punctele în care se anulează funcția  $g$  de la numitor, iar funcția  $c = \frac{f}{g}$  este definită pe această mulțime prin egalitatea:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ pentru } x \in A \cap B, g(x) \neq 0.$$

### Exemplu.

Fie funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $A = (0, \infty)$  și funcția  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  definită pe  $B = [-1, 1]$ . Avem  $A \cap B = (0, 1]$  și  $g(1) = 0$ , deci domeniul de definiție al funcției  $c = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$  este  $A \cap B \setminus \{1\} = (0, 1)$ .

## 2. Funcții elementare

În analiza matematică sînt numite *funcții elementare* următoarele funcții: polinoamele, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile circulare directe ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ) și funcțiile circulare reciproce ( $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arccotg}$ ), precum și funcțiile obținute din acestea prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare.

Dacă domeniul de definiție al unei funcții elementare nu este precizat, se subînțelege că el este format din *toate* punctele  $x$  pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția. Acesta este *domeniul maxim* de definiție al funcției. O funcție elementară poate însă fi considerată definită doar pe o parte a domeniului maxim de definiție.

Să considerăm acum, pe rînd, clasele de funcții elementare, pentru a le preciza.

### a) Polinoame

Polinoamele (sau funcțiile polinomiale) sînt funcțiile de forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

unde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sînt numere reale și se numesc coeficienții polinomului. Dacă  $a_n \neq 0$ , polinomul este de gradul  $n$ .

Deoarece exponenții puterilor lui  $x$  sînt numere naturale,  $x$  poate fi orice număr real. Așadar, domeniul de definiție al unui polinom poate fi orice mulțime de numere reale. Domeniul maxim de definiție este toată dreapta  $R$ .

### Exemple.

1) Polinoamele de gradul zero sînt funcțiile constante  $f(x) \equiv a$ , care au ca grafic o dreaptă paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 11).

2) Polinoamele de gradul întâi sînt funcțiile liniare  $f(x) = ax + b$ , care au ca grafic o dreaptă (fig. 12). Dacă  $a = 1$  și  $b = 0$ , se obține funcția identică  $f(x) = x$  al cărei grafic este prima bisecătoare (fig. 13). Dacă  $a = -1$  și  $b = 0$  se obține funcția  $f(x) = -x$  al cărei grafic este bisecătoarea a doua (fig. 14).

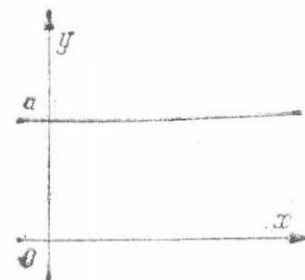


Fig. 11

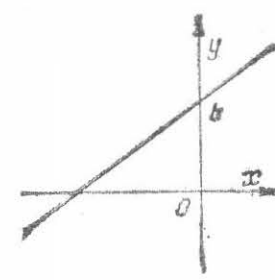


Fig. 12

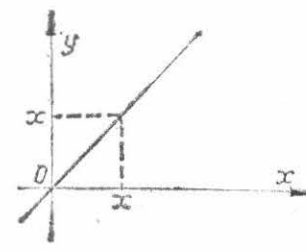


Fig. 13

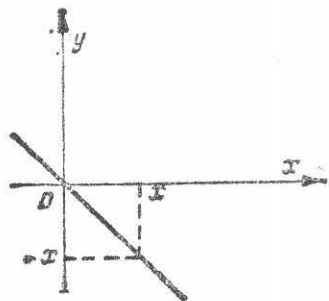


Fig. 14

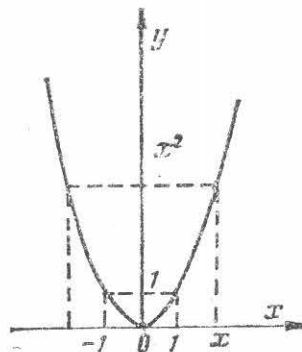


Fig. 15

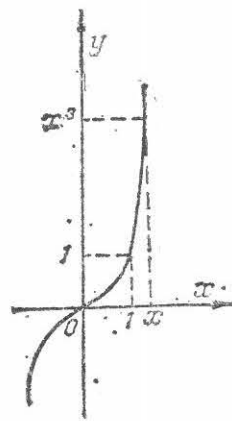


Fig. 16

3) Funcția polinomială  $f(x) = x^2$  are numai valori pozitive (fig. 15).

4) Funcția polinomială  $f(x) = x^3$  are valori negative pentru  $x \leq 0$  și valori pozitive pentru  $x \geq 0$  (fig. 16).

#### b) Funcții raționale

Funcțiile raționale sînt rapoarte de polinoame, deci sînt de forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Domeniul maxim de definiție  $E$  se obține scoțînd de pe dreaptă punctele în care se anulează numitorul:

$$E = R \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}.$$

Dacă numitorul  $Q$  este de gradul zero, funcția rațională este un polinom. Printre funcțiile raționale, polinoamele au proprietăți asemănătoare cu cele pe care le au numerele întregi printre numerele raționale; de aceea, polinoamele se numesc *funcții raționale întregi*.

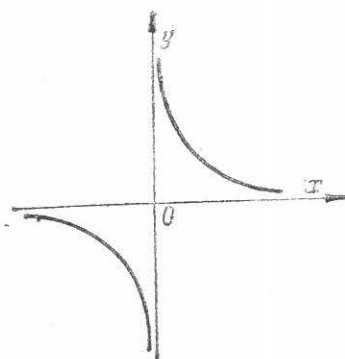


Fig. 17

#### Exemple.

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  are domeniul maxim de definiție  $R \setminus \{0\}$ , și are ca grafic o hiperbolă (fig. 17).

2)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$  are domeniul maxim de definiție  $R \setminus \{-1, 1\}$ .

3)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ . Numitorul acestei funcții nu are nici o rădăcină reală, deci domeniul maxim de definiție este  $R$ .

#### c) Funcția radical

Funcția radical este de forma  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , unde  $n$  este un număr natural oarecare.

Dacă  $n$  este par,  $n = 2k$ , pentru ca radicalul  $\sqrt[n]{x}$  să aibă sens, trebuie ca  $x \geq 0$ ; așadar, domeniul maxim de definiție al funcției radical  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  este semidreapta  $[0, +\infty)$ :

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty).$$

Dacă  $n$  este impar,  $n = 2k - 1$ , natural, radicalul  $\sqrt[n]{x}$  are sens pentru orice  $x \in R$ ; așadar, domeniul maxim de definiție al funcției radical  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  este toată dreapta  $R$ :

$$f: R \rightarrow R.$$

Dacă  $n = 1$ , funcția  $\sqrt[1]{x}$  coincide cu funcția identică  $f(x) = x$ .

#### d) Funcția putere

Funcția putere este de forma  $f(x) = x^\alpha$ , unde  $\alpha$  este un număr real oarecare.

Dacă  $\alpha = 0$ , se obține funcția constantă  $f(x) \equiv 1$ ; dacă  $\alpha$  este un număr natural  $n$ , se obține polinomul particular  $f(x) = x^n$ ; dacă  $\alpha = -n$ , se obține funcția rațională  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ .

Dacă  $\alpha$  nu este întreg, pentru ca puterea  $x^\alpha$  să aibă sens, trebuie ca  $x > 0$ ; deci domeniul maxim de definiție este semidreapta deschisă  $(0, +\infty)$ . În acest caz, funcția ia numai valori strict pozitive, deoarece  $x^\alpha > 0$  dacă  $x > 0$ . Așadar,

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty).$$

În plus, dacă  $\alpha > 0$  funcția  $f(x) = x^\alpha$  este definită și în  $x = 0$  și anume  $f(0) = 0$ .

Observație. Vor fi întâlnite mai frecvent funcții putere  $f(x) = x^r$  cu exponent rațional  $r = \frac{m}{n}$  cu  $n > 0$ . Pentru  $x > 0$ , acestea pot fi scrise sub forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m}.$$

Să observăm însă că, dacă  $m$  este par, sau dacă  $n$  este impar, radicalul  $\sqrt[n]{x^m}$  are sens și pentru  $x < 0$ ; așadar, trebuie făcută distincție între funcția putere  $x^r$  și funcția  $\sqrt[n]{x^m}$ , deoarece domeniul maxim de definiție al funcției  $x^r$  este  $(0, +\infty)$  respectiv  $[0, +\infty)$  după cum  $m \leq 0$  respectiv  $m > 0$ , iar cel al funcției  $\sqrt[n]{x^m}$  este (dacă  $m$  este par sau  $n$  este impar)  $R \setminus \{0\}$  respectiv  $R$ , după cum  $m \leq 0$  respectiv  $m > 0$ .

#### e) Funcția exponențială

Funcția exponențială (fig. 18, 19) este de forma  $f(x) = a^x$ , unde  $a > 0$  și  $a \neq 1$ ; domeniul său maxim de definiție fiind toată dreapta. Funcția exponențială ia numai valori strict pozitive:

$$f: R \rightarrow (0, +\infty).$$

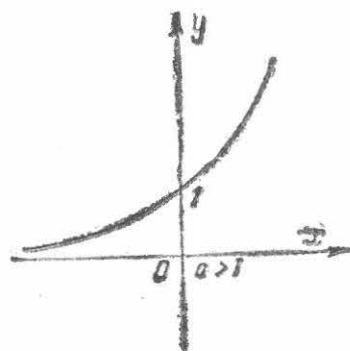


Fig. 18

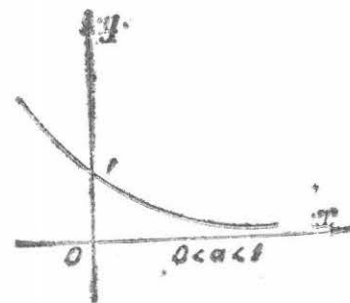


Fig. 19

### f) Funcția logaritmică

Funcția logaritmică (fig. 20, 21) este  $f(x) = \log_a x$  cu baza  $a > 0$  și  $a \neq 1$ . Această funcție este reciproca funcției exponențiale  $g(x) = a^x$ . Domeniul maxim de definiție este semidreapta  $(0, +\infty)$  (logaritmul au sens doar pentru numerele strict pozitive). Funcția logaritmică poate lua și valori pozitive, și valori negative:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow R.$$

### g) Funcția sin și funcția arcsin

Funcția sinus (fig. 22) sau  $\sin$ ,  $f(x) = \sin x$  are domeniul maxim de definiție toată dreapta  $R$  și ia valori cuprinse între  $-1$  și  $1$ :

$$\sin : R \rightarrow [-1, 1].$$

Această funcție nu este bijectivă și, prin urmare, nu are reciprocă. Să considerăm însă restricția funcției  $\sin$  la intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , și s-o notăm  $f_1$ :

$$f_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], f_1(x) = \sin x.$$

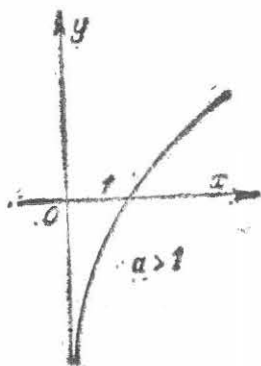


Fig. 20

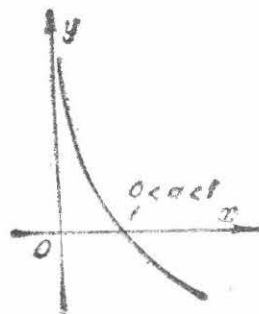


Fig. 21

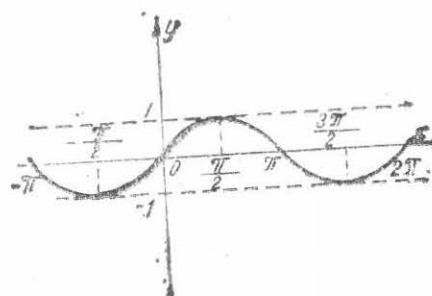


Fig. 22

Această funcție este strict crescătoare și surjectivă, deci bijectivă, și deci admite o funcție reciprocă  $f_1^{-1}$ , care se notează arcsin:

$$f_1^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Funcția arcsin (fig. 23) este, de asemenea, strict crescătoare și avem:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \text{pentru } -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \text{pentru } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

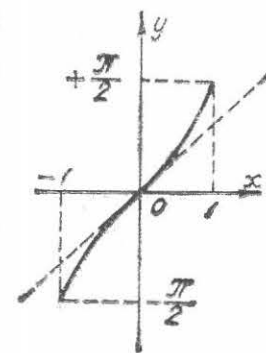


Fig. 23

Observație. Funcția  $\sin$  este strict monotonă și pe alte intervale; de exemplu: pe  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  este strict descrescătoare, pe  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$  este strict crescătoare etc. Pe fiecare din aceste intervale se poate considera cîte o funcție reciprocă. Dacă notăm cu  $f_2$  restricția funcției  $\sin$  la intervalul  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $f_2$  are o funcție reciprocă  $f_2^{-1}$  (fig. 24); dacă notăm cu  $f_3$  restricția funcției  $\sin$  la intervalul  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ ,  $f_3$  are o funcție reciprocă,  $f_3^{-1}$  (fig. 25).

Funcțiile diferite  $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}$  sînt, respectiv, reciprokele funcțiilor diferite,  $f_1, f_2, f_3$ . Dintre toate aceste funcții reciproce, numai funcția  $f_1^{-1}$ , care este reciprocă funcției  $f_1(x) = \sin x$ , definită pe intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , se notează arcsin.

Considerații analoage se pot face și pentru celelalte funcții circulare.

### h) Funcția cos și funcția arccos

Funcția cosinus (fig. 26) sau  $\cos$ ,  $f(x) = \cos x$ , are domeniul maxim de definiție toată dreapta și ia valori între  $-1$  și  $1$ :

$$\cos : R \rightarrow [-1, 1].$$

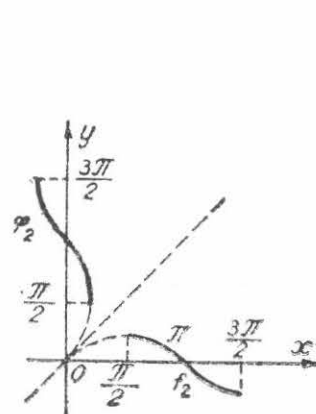


Fig. 24

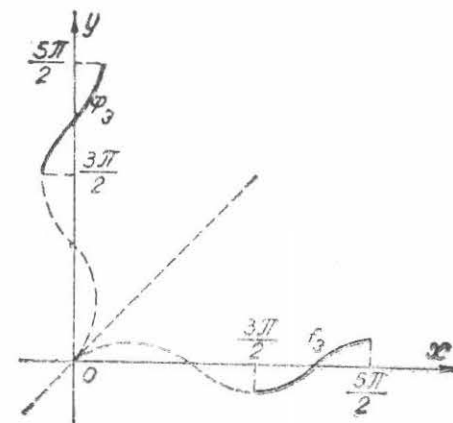


Fig. 25



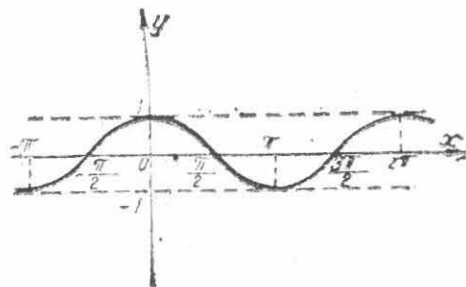


Fig. 26

Funcția  $\cos$  nu este strict monotonă, dar restricția  $f_1$  a sa la intervalul  $[0, \pi]$  este strict descrescătoare și surjectivă:

$$f_1 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1],$$

deci admite o funcție reciprocă  $f_1^{-1}$ , care se notează arccos:

$$f_1^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Funcția  $\arccos$  (fig. 27) este, de asemenea, strict descrescătoare și avem:

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ pentru } -1 \leq x \leq 1,$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ pentru } 0 \leq x \leq \pi.$$

i) Funcția tangentă și funcția arctangentă

Funcția tangentă (fig. 28) sau  $\operatorname{tg}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , poate fi definită numai în punctele  $x$  pentru care  $\cos x \neq 0$ . Deoarece funcția  $\cos$  se anulează în punctele de forma  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, urmează că domeniul maxim de definiție al funcției tangentă este  $E = R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$ . Funcția tangentă ia orice valoare reală, deci:

$$\operatorname{tg} : R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\} \rightarrow R.$$

Funcția tangentă nu este strict monotonă, dar restricția sa  $f_1$  la intervalul deschis  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  este strict crescătoare și surjectivă:

$$f_1 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R,$$

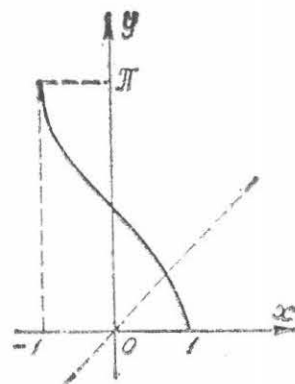


Fig. 27

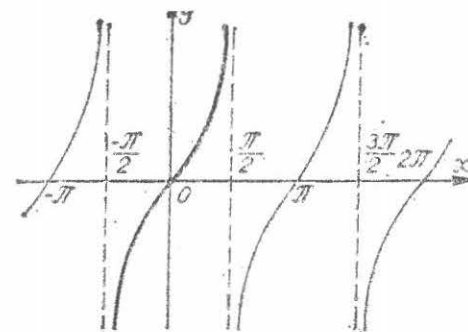


Fig. 28

deci admite o funcție reciprocă  $f_1^{-1}$  numită arctangentă și notată  $\operatorname{arctg}$ .

$$f_1^{-1} = \operatorname{arctg} : R \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Funcția  $\operatorname{arctg}$  (fig. 29) este strict crescătoare și avem:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ pentru } x \in R;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ pentru } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

j) Funcția cotangentă și funcția arccotangentă

Funcția cotangentă (fig. 30) sau  $\operatorname{ctg}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , poate fi definită numai în punctele  $x$  în care  $\sin x \neq 0$ . Deoarece funcția  $\sin$  se anulează în punctele de forma  $k\pi$ ,  $k$  întreg, domeniul maxim de definiție al funcției  $\operatorname{ctg}$  este  $E = R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$ . Funcția  $\operatorname{ctg}$  ia orice valoare reală, deci:

$$\operatorname{ctg} : R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\} \rightarrow R.$$

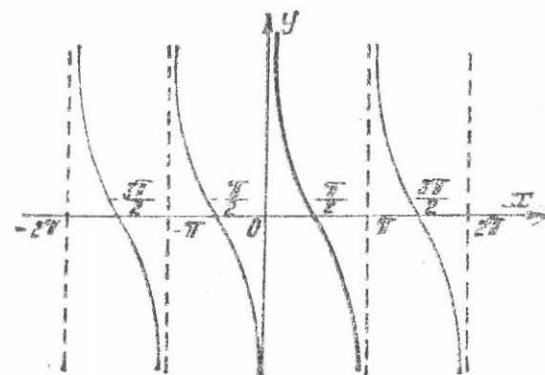


Fig. 30

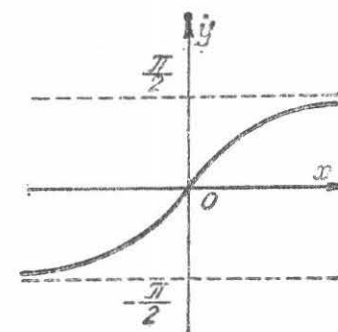


Fig. 29

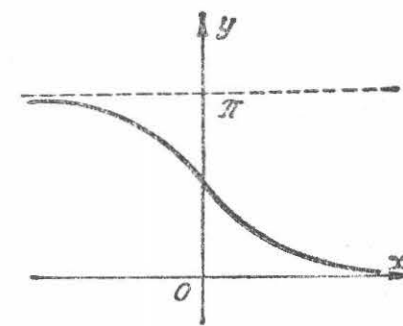


Fig. 31

Funcția ctg nu este strict monotonă, dar restricția sa  $f_1$  la intervalul deschis  $(0, \pi)$  este strict descrescătoare și surjectivă:

$$f_1 : (0, \pi) \rightarrow R,$$

deci admite o funcție reciprocă  $f_1^{-1}$  numită arccotangentă și notată arctg:

$$f_1^{-1} = \text{arctg} : R \rightarrow (0, \pi).$$

Funcția arctg (fig. 31) este strict descrescătoare și avem:

$$\text{ctg}(\text{arctg } x) = x, \text{ pentru } x \in R;$$

$$\text{arctg}(\text{ctg } x) = x, \text{ pentru } 0 < x < \pi.$$

## § 5. Progresii

### 1. Progresii aritmetice

Se numește *progresie aritmetică* o succesiune finită de numere:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

în care fiecare număr  $a_i$  cu  $i \geq 2$  se obține din cel precedent prin adăugarea unui același număr  $r$ :

$$a_i = a_{i-1} + r, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se numesc *termenii* progresiei:  $a_1$  este primul termen, iar  $a_n$  este ultimul termen al progresiei. Numărul  $r$  se numește *rația* progresiei.

Pentru a pune în evidență că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  formează o progresie aritmetică, se scrie:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n.$$

#### Exemple.

- 1)  $\div 1, 2, 3, \dots, 7; r = 1, n = 7.$
- 2)  $\div 1, 3, 5, \dots, 25; r = 2, n = 13.$
- 3)  $\div -2, -4, -6, \dots, -100; r = -2, n = 50.$
- 4)  $\div 3, 3, \dots, 3; r = 0, n \text{ oarecare}.$

O progresie aritmetică este perfect determinată dacă se cunosc:

- primul termen,  $a_1$ ;
- ultimul termen,  $a_n$ ;
- numărul termenilor,  $n$ ;
- rația,  $r$ .

Aceste patru numere nu sînt independente. Între ele există o anumită relație. Cunoscînd trei dintre cele patru numere și folosind această relație, putem determina pe al patrulea.

1)

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Demonstrația se face prin inducție completă. Pentru  $n = 1$ , adică pentru o progresie formată dintr-un singur număr  $a_1$  egalitatea este evident adevărată.

Presupunînd egalitatea adevărată pentru progresii cu  $n$  termeni, ea rămîne adevărată și pentru progresii cu  $n + 1$  termeni:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr.$$

#### Exemple.

1) Fie:

$$\div 1, 3, 5, \dots, a_n,$$

o progresie cu  $a_1 = 1$ ,  $r = 2$  și  $n = 1004$ . Să se determine ultimul termen  $a_n$ .

Avem:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + 1003 \cdot 2 = 2007.$$

2) În exemplul de mai sus, fie  $a_n = 5557$ . Să se determine numărul termenilor.

Avem:

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{r} = \frac{5557 - 1}{2} = 2778;$$

de unde  $n = 2779$ .

3) Fie:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n,$$

cu  $a_1 = 5$ ,  $a_n = 65$  și  $n = 25$ . Să se determine rația  $r$  și termenul  $a_5$ .

Avem:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{65 - 5}{24} = \frac{5}{2}$$

și  $a_5 = a_1 + (5 - 1)r = 5 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 15.$

4) Să se determine progresia aritmetică:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_{21},$$

știind că  $a_5 = 2$  și  $a_9 = 6$ .

Avem:

$$a_1 + 4r = a_5 = 2,$$

$$a_1 + 8r = a_9 = 6.$$

Rezolvînd acest sistem, rezultă  $a_1 = -2$ ,  $r = 1$  și  $a_{21} = a_1 + 20r = -2 + 20 = 18.$

Un alt element util în studiul unei progresii aritmetice:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n,$$

este suma termenilor săi:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$S_n$  se mai numește *suma progresiei*. Suma  $S_n$  se calculează cu formula următoare:

11)

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Pentru demonstrație observăm, mai întâi, că suma a doi termeni egal depărtați de extremi este constantă și egală cu  $a_1 + a_n$ .

Într-adevăr:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + (a_n - r) = a_1 + a_n$$

și, în general,

$$a_{1+i} + a_{n-i} = a_1 + ir + (a_n - ir) = a_1 + a_n$$

Atunci:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_n$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$$a_n + a_1 = a_1 + a_n$$

Adunând membru cu membru aceste  $n$  egalități, obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

de unde:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

*Exemple.*

1) Suma primelor  $n$  numere naturale este:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Într-adevăr,  $a_1 = 1$  și  $a_n = n$ . În particular  $S_{105} = 5565$ .

2) Suma primelor  $n$  numere naturale impare este un pătrat perfect.

Într-adevăr, suma progresiei aritmetice:

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1,$$

este:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

3) Suma pătratelor primelor  $n$  numere naturale este:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pentru demonstrație se pleacă de la identitatea:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Dănd lui  $k$ , succesiv, valorile  $1, 2, \dots, n$ , se obțin următoarele  $n$  egalități:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Adunând membru cu membru și efectuând reducerile posibile, rezultă:

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n,$$

deci:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3(1 + 2 + \dots + n)}{3} = \\ &= \frac{n+1}{3} \left( n^2 + 2n - \frac{3n}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

De exemplu:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 23^2 = \frac{23 \cdot 24 \cdot 47}{6} = 4324.$$

4) Fie:

$$-a_1, a_2, \dots, a_n,$$

cu  $a_1 = 3$  și  $r = 2$ . Să se calculeze suma  $S_{13}$  a primilor 13 termeni.

Avem întâi:

$$a_{13} = a_1 + 12r = 3 + 12 \cdot 2 = 27$$

și apoi:

$$S_{13} = \frac{(a_1 + a_{13})13}{2} = \frac{(3 + 27)13}{2} = 195.$$

5) Să se afle numărul  $n$  al termenilor și ultimul termen  $a_n$  al unei progresii aritmetice cunoscând  $a_1 = 3$ ,  $r = 2$  și suma  $S_n = 120$ .

Avem sistemul:

$$\begin{cases} a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 \\ 120 = \frac{(3 + a_n)n}{2} \end{cases}$$

Eliminând pe  $a_n$ , obținem:

$$n^2 + 2n - 120 = 0.$$

Singura soluție acceptabilă ( $n$  număr natural) este  $n = 10$ . Rezultă atunci  $a_{10} = 21$ .

## 2. Progresii geometrice

Se numește *progresie geometrică* o succesiune finită de numere:

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

în care fiecare număr  $a_i$  cu  $i \geq 2$  se obține din cel precedent prin înmulțirea cu același număr  $r$ :

$$a_i = a_{i-1} r, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se numesc *termenii* progresiei, iar  $r$  se numește *rația* progresiei.

Pentru a pune în evidență că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  formează o progresie geometrică, se scrie:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n.$$

*Exemple.*

1)  $\div 2, 4, 8, 16, 32; r = 2, n = 5.$

2)  $\div 2, 6, 18, 54; r = 3, n = 4.$

3)  $\div \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{243}; r = -\frac{1}{3}, n = 5.$

4)  $\div 3, 3, \dots, 3; r = 1, n$  oarecare.

Ca și pentru progresiile aritmetice, vom demonstra două formule care dau ultimul termen  $a_n$  și respectiv suma  $S_n$  a unei progresii geometrice.

I) 
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Demonstrația se face imediat, prin inducție completă.

II) 
$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}, \text{ dacă } r \neq 1.$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 r + \dots + a_1 r^{n-1} = \\ &= a_1(1 + r + \dots + r^{n-1}) = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

*Exemple.*

1) Fie progresia geometrică:

$$\div 2, 6, 18, \dots, a_{300},$$

cu  $r = 3$ .

Avem, de exemplu:

$$a_{17} = 2 \cdot 3^{16} \text{ și } a_{205} = 2 \cdot 3^{204}.$$

2) Fie:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_{16}$$

o progresie geometrică cu  $a_6 = 3$  și  $a_9 = 12$ . Să se determine  $a_{16}$ .

Avem:  $a_6 = a_1 r^5$  și  $a_9 = a_1 r^8$ , deci:

$$\begin{cases} a_1 r^5 = 3 \\ a_1 r^8 = 12 \end{cases}$$

Rezultă  $r^3 = 4$ . Singura soluție reală este  $r = \sqrt[3]{4}$ . Deducem că  $a_1 = \frac{a^6}{r^5} = \frac{3}{4\sqrt[3]{16}}$  și  $a_{16} = a_1 r^{15} = \frac{3 \cdot 4^4}{\sqrt[3]{16}}.$

3) Fie:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n$$

o progresie geometrică cu  $a_1 = 2$  și  $r = 3$ . Să se calculeze suma  $S_5$  a primilor 5 termeni.

Avem:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 242.$$

4) Fiind dată rația  $r = \frac{1}{4}$  și suma  $S_6 = 2730$  a unei progresii geometrice cu 6 termeni,

să se afle primul și ultimul termen al progresiei.

Avem:

$$2730 = a_1 \frac{1-\frac{1}{4^6}}{1-\frac{1}{4}} = a_1 \frac{4^6-1}{4^6-4^5},$$

deci:

$$a_1 = 2730 \frac{4^6-4^5}{4^6-1} = 2048.$$

și:

$$a_6 = a_1 r^5 = 2048 \cdot \frac{1}{4^5} = 2.$$

## Exerciții

1) Fie  $P_1$  mulțimea paralelogramelor,  $P_2$  mulțimea dreptunghiurilor,  $P_3$  mulțimea romburilor și  $P_4$  mulțimea pătratelor. Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi și apoi să se determine:  $P_1 \cup P_3$ ,  $P_1 \cup P_4$ ,  $P_2 \cup P_4$ ,  $P_2 \cap P_4$ ,  $P_2 \cap P_3$ ,  $P_3 \cap P_4$ .

2) Notînd:  $N$  — mulțimea numerelor naturale,  $M_1 = \{2n \mid n \in N\}$ ,  $M_2 = \{3n \mid n \in N\}$ ,  $M_3 = \{6n \mid n \in N\}$ ,  $M_4 = \{3n+1 \mid n \in N\}$ ,  $M_5 = \{3n+2 \mid n \in N\}$ ,  $M_6$  — mulțimea soluțiilor ecuației  $x^2 - 9x + 18 = 0$ , să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi și să se determine:  $M_1 \cap M_2$ ,  $M_1 \cup M_3$ ,  $M_1 \cap M_3$ ,  $M_1 \cup M_6$ ,  $M_2 \cap M_6$ ,  $M_4 \cup M_5$ ,  $M_3 \cap M_6$ ,  $(M_1 \cap M_3) \cup M_2$ ,  $M_1 \cap (M_3 \cup M_2)$ ; să se arate că  $(M_1 \cup M_3) \cap M_6 = (M_1 \cap M_6) \cup (M_3 \cap M_6)$  și  $(M_4 \cup M_5) \cap M_6 = (M_4 \cap M_6) \cup (M_5 \cap M_6)$ .

3) Să se demonstreze egalitățile:

a)  $A \cup (A \cap B) = A$ ; b)  $A \cap (A \cup B) = A$ ; c)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;

d)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

[Ultimele două egalități exprimă proprietatea de *distributivitate* a operațiilor de reuniune și intersecție una față de cealaltă.]

4) Fie  $E$  o mulțime și  $A, B$  părți ale lui  $E$ . Considerînd complementarele în raport cu  $E$ , să se demonstreze egalitățile:

a)  $\mathbf{C}(A \cup B) = (\mathbf{C}A) \cap (\mathbf{C}B)$ ; b)  $\mathbf{C}(A \cap B) = (\mathbf{C}A) \cup (\mathbf{C}B)$ .

[Aceste două egalități poartă numele de *formulele lui Morgan*.]

5) Să se demonstreze egalitățile:

a)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ; b)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ;

c)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ; d)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ .

6) Fie  $A = \{-1, 0, 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 5\}$ . Să se determine  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $(A \times B) \cap (B \times A)$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ .



7) Să se demonstreze că  $A \times B \subset C \times D$ , dacă și numai dacă  $A \subset C$  și  $B \subset D$ .

8) Să se demonstreze egalitatea:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C).$$

9) Fie  $a$  și  $b$  două numere strict pozitive. Se știe că media armonică, media geometrică și media aritmetică a acestor numere se definesc în modul următor:

$$m_{arm} = \frac{2ab}{a+b}, \quad m_g = \sqrt{ab}, \quad m_{arit} = \frac{a+b}{2}.$$

Să se demonstreze inegalitățile:

$$a) m_{arm} \leq m_g \leq m_{arit}; \quad b) m_{arit} - m_g \geq m_g - m_{arm}.$$

10) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele pozitive  $a, b, c$ , au loc inegalitățile:

$$a) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca;$$

$$b) ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

11) Cu notațiile de la exercițiul 9) să se demonstreze că, dacă  $0 < a < b$ , au loc inegalitățile:

$$a) m_{arit} - m_{arm} \leq \frac{(b-a)^2}{4a}; \quad b) m_{arit} - m_g \leq \frac{(b-a)^2}{8a}.$$

12) Să se demonstreze că oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

13) Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , are loc inegalitatea (Cauchy — Buniakovski—Schwarz):

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Să se generalizeze:

14) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale strict pozitive  $a, b, c, r, s, t$ , are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{r}{a} + \frac{s}{b} + \frac{t}{c}\right) \frac{a}{r} + \frac{b}{s} + \frac{c}{t} \geq 9.$$

15) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ , are loc inegalitatea (Minkovski):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

16) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$  ( $a \neq b$ ), au loc egalitățile:

$$\frac{a+b+|b-a|}{2} = \max(a, b)$$

și:

$$\frac{a+b-|b-a|}{2} = \min(a, b).$$

17) Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul real  $a$ , au loc inegalitățile:

$$a) \left|a + \frac{1}{a}\right| > 1 \quad (a \neq 0); \quad b) \left|\frac{2a-1}{a^2+1}\right| < 2.$$

18) Să se rezolve ecuațiile:

$$a) 3|x| - 5 = 1 - 7|x|;$$

$$b) \frac{|x|+2}{2} = 3|x|+4;$$

$$c) |x|-2 = 5|x|-1;$$

$$d) -5|x|+8 = 7-3x;$$

$$e) 3|x|+1 = 5x-2;$$

$$f) 5|x|+1 = 2x-3;$$

$$g) |x+1| = 3|x|;$$

$$h) 2x-3 = |x-5|+1;$$

$$i) |\cos x| = \cos x+1;$$

$$j) |\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x+2.$$

19) Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$a) \begin{cases} |x| + |y| = 12; \\ x + y = 2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 2|x| + 3|y| = 13 \\ |x+y| = 5. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |x| + |y| = 13 \\ |3x+y| = 19 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} |x| + y = 11 \\ x + |y| = 3. \end{cases}$$

20) Să se discute, în raport cu valorile lui  $a, b, c$ , ecuațiile:

$$a) a|x| = b,$$

$$b) a|x| + bx = c.$$

21) Să se rezolve inegalitățile:

$$a) |x+3| \leq 5;$$

$$b) |2x-4| < |x-4|;$$

$$c) |x-1| + |x| > 4;$$

$$d) |x^2-3x+2| < |x+2|.$$

22) Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de același semn și mai mari sau egale cu  $-1$ , are loc inegalitatea:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_n.$$

Să se deducă apoi că oricare ar fi  $a \geq -1$  și  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea:

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

[Generalizarea inegalității de la nr. 4, § 2. De fapt, această inegalitate poate fi încă generalizată, și anume se demonstrează (v. § 27, nr. 3, exemplul 6) că oricare ar fi  $a \geq -1$  și numărul real  $\alpha \geq 1$ , avem:

$$(1+a)^\alpha \geq 1+\alpha a.$$

23) Fie  $E = \{-1, 0, 2, 3\}$  și  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  (unde  $\mathbb{R}$  este mulțimea numerelor reale) funcția definită prin egalitatea  $f(x) = 3x^2 + x - 1$ . Fie  $A = \{-1, 0\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{0, 2, 3\}$ . Să se determine mulțimea valorilor lui  $f$  și imaginile mulțimilor  $A, B, C$  prin această funcție.

24) Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție și  $A, B$  părți ale lui  $E$ . Să se demonstreze relațiile:

$$a) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \quad b) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

25) Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Să se demonstreze că  $G_f = E \times F$ , dacă și numai dacă mulțimea  $F$  este formată dintr-un singur element.

26) Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Să se determine restricțiile lui  $f$  la mulțimile:  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \{-3, -2, 0\}$ ,  $C = \{-2, -\frac{3}{2}, 1, \sqrt{2}\}$ . Să se determine apoi  $f_A(\{1, 5\})$ ,  $f_B(\{-2, 0\})$ ,  $f_C(\{-\frac{3}{2}, 1, \sqrt{2}\})$ .

27) Fie  $f: \left\{-1, \frac{5}{2}\right\} \rightarrow R$  funcția definită prin egalitatea  $f(x) = x^2$ . Să se determine o prelungire  $\tilde{f}$  a lui  $f$  la  $R$ , astfel încât  $\tilde{f}(0) = 7$ ,  $\tilde{f}(\sqrt{2}) = -2$ . Să se arate prin exemple că există mai multe astfel de prelungiri.

28) Fie mulțimile  $E = \{-1, 1\}$ ,  $F = \{-5, 1, 9\}$  și  $f: E \rightarrow R$ ,  $g: F \rightarrow R$  funcțiile definite, respectiv, prin egalitățile  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 3x - 1$ . Să se arate că se poate defini funcția compusă  $g \circ f: E \rightarrow R$ . Să se determine această funcție și mulțimea valorilor sale.

29) Fie mulțimile  $E = \{-2, 1, 3\}$ ,  $F = \{-2, 0, 1, 9\}$  și  $f: E \rightarrow R$ ,  $g: F \rightarrow R$  funcțiile definite, respectiv, prin egalitățile  $f(x) = x^2$  și  $g(x) = 2x^3 + 1$ . Să se determine cea mai mare submulțime  $A$  a lui  $E$ , astfel încât să poată fi definită funcția compusă  $g \circ f_A$ . Să se determine apoi această funcție și mulțimea valorilor sale.

30) Fie  $f: E \rightarrow F$ ;  $g: F \rightarrow G$ ;  $h: G \rightarrow H$  trei funcții. Să se arate că  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . [Deci, operația de compunere a funcțiilor este asociativă. Rezultă că în loc de  $h \circ (g \circ f)$  sau  $(h \circ g) \circ f$  se poate scrie fără primejdie de echivoc  $h \circ g \circ f$ .]

31) Fie mulțimile  $E = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ ,  $F = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 0, 7\right\}$ ,  $G = \left\{-4, -\frac{9}{4}, 3, \sqrt{10}\right\}$  și  $f: E \rightarrow R$ ,  $g: F \rightarrow R$ ,  $h: G \rightarrow R$ , funcțiile definite, respectiv, prin egalitățile  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7x + 3$ ,  $h(x) = \frac{2-x}{3}$ . Să se arate că se poate defini funcția compusă  $h \circ g \circ f: E \rightarrow R$ . Să se determine această funcție și mulțimea valorilor sale. Să se determine imaginile prin  $h \circ g \circ f$  ale părților  $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$  și  $B = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$  ale lui  $E$ .

32) Fie mulțimea  $E = \{-1, 1\}$  și surjecția  $f: E \rightarrow f(E)$ , definită prin egalitatea  $f(x) = 4x + 7$ . Să se arate că  $f$  este bijectivă și să se determine reciproca sa. Să se arate că prelungirea  $\tilde{f}$  a lui  $f$  la  $R$  definită în modul următor:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 4x + 7, & \text{dacă } x \in E; \\ -4x + 7, & \text{dacă } x \in R \setminus E \end{cases}$$

este o funcție care aplică  $R$  pe  $R$ . Să se determine  $\tilde{f}^{-1}$ .

33) Fie mulțimile  $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $F = \{0, 1, 4\}$ ,  $G = \{-3, -1, 5\}$  și submulțimea  $A = \{0, 1, 2\}$  a lui  $E$ . Să se arate că funcțiile  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  definite prin egalitățile  $f(x) = x^2$ , respectiv  $g(x) = 2x - 3$  sint surjective. Să se arate apoi că  $g \circ f_A: A \rightarrow G$  este o bijectie și să se determine reciproca sa.

34) Fie  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  două bijecții. Să se demonstreze că funcția compusă  $g \circ f: E \rightarrow G$  este, de asemenea, o bijectie și că  $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ .

35) Să se determine o funcție reală  $f(x) = a + bc^x$ , astfel încât:  $f(0) = 15$ ,  $f(2) = 30$ ,  $f(4) = 90$ .

36) Să se stabilească domeniul maxim pe care pot fi definite funcțiile următoare:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-5)\sqrt[4]{x^2-4}}$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-2}}$$

$$c) f(x) = \log_2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4x}}$$

$$d) f(x) = \log_3 \operatorname{tg}(2x+1);$$

$$e) f(x) = \arcsin \frac{x}{1+x^2};$$

$$f) f(x) = \arccos(x^2+2x);$$

$$g) f(x) = \log_4 (\log_1 \log_7 (2x+1));$$

$$h) f(x) = \lg \sqrt{\frac{x+|x+2|}{2}}$$

$$i) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{(\lg x - 1) + \lg x - 3}; \quad j) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{dacă } x \text{ este rațional } \neq \pm 1; \\ \ln x, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

37) Pentru perechile de funcții  $f, g$  care urmează, să se stabilească domeniile maxime pe care pot fi definite funcțiile  $f+g, fg, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$ .

$$a) \begin{cases} f(x) = \log_2 \left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{definită pe } [0, 5]; \\ g(x) = x^3 - 1, & \text{definită pe } [-3, 2]. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x+1}, & \text{definită pe } (0, 2); \\ g(x) = \ln(3x-1), & \text{definită pe } \left(\frac{1}{3}, 5\right). \end{cases}$$

38) Fie funcțiile  $f: R \rightarrow R$  și  $g: R \rightarrow R$  definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Să se determine funcțiile  $f+g$  și  $fg$ .

39) Fie funcțiile  $f: R \rightarrow R$  și  $g: R \rightarrow R$  definite, respectiv, prin egalitățile:  $f(x) = x^2$  și  $g(x) = 2x$ . Să se determine  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ .

40) Fie funcțiile  $f: R \rightarrow R$ ,  $g: R \rightarrow R$ ,  $h: (0, +\infty) \rightarrow R$  definite, respectiv, prin egalitățile:  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = \sin 2x$ ,  $h(x) = \ln 3x$ . Să se determine părțile  $A, B$  ale dreptei reale astfel încât să poată fi definită funcția compusă  $h \circ g \circ B \circ f_A$ . Să se determine această funcție.

41) Fie funcțiile  $f: R \rightarrow R$  și  $g: R \rightarrow R$  definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 1-x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = x^2.$$

Să se determine  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ .

42) Fie funcția  $f: R \rightarrow R$  definită prin egalitatea  $f(x) = x^2 - 2x$ . Să se arate că  $f$  nu este o bijectie și să se determine apoi intervalele pe care restricțiile funcției admit reciproce.

43) Fie  $E = R \setminus \{-1\}$  și surjecția  $f: E \rightarrow f(E)$  definită prin egalitatea  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ . Să se arate că  $f$  este o permutare a lui  $E$  și că  $\widehat{f} = f$ . Să se verifice egalitățile  $f \circ f = f \circ \widehat{f} = \widehat{f} \circ f = \operatorname{Id}_E$ . Să se examineze cazul general al funcției definită prin egalitatea:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

44) Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o progresie aritmetică.

a) Dacă  $a_1 = 23$ ,  $a_n = 5$ ,  $r = -2$ , să se determine  $n$  și  $S_n$ .

b) Dacă  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 39$ ,  $S_n = 210$ , să se determine  $r$  și  $n$ .

c) Dacă  $a_n = 199$ ,  $n = 100$ ,  $S_n = 10\,000$ , să se determine  $a_1$  și  $r$ .

d) Dacă  $a_n = 18$ ,  $r = 2$ ,  $S_n = 88$ , să se determine  $a_1$  și  $n$ .

e) Dacă  $a_3 = 8$ ,  $a_4 = 5$ ,  $S_n = 28$ , să se determine  $n$ .

f) Dacă  $n \geq 5$ ,  $a_2 + a_4 = 16$ ,  $a_1 a_5 = 28$ , să se determine  $a_1$  și  $r$ .

g) Dacă  $n \geq 8$ ,  $S_2 + S_4 = 33$ ,  $a_1 a_5 = 46$ , să se determine  $a_1$  și  $r$ .

h) Dacă  $n = 4$ ,  $r = 4$  și  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 585$ , să se determine progresia.

45) Să se demonstreze că suma cuburilor primelor  $n$  numere naturale este  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

46) Să se demonstreze că succesiunea de numere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie aritmetică dacă și numai dacă  $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ , oricare ar fi  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ .

47) a) Să se demonstreze că dacă  $a, b, c$  sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci  $a' = a^2 + ab + b^2$ ,  $b' = a^2 + ac + c^2$ ,  $c' = b^2 + bc + c^2$  sunt, de asemenea, trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Să se demonstreze că dacă  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  ( $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ) sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci  $a' = \frac{b+c}{a}$ ,  $b' = \frac{a+c}{b}$ ,  $c' = \frac{a+b}{c}$  sunt, de asemenea, trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

48) Fie progresia aritmetică  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cu rația  $r$  și doi termeni consecutivi  $a_j, a_{j+1}$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ) ai progresiei. Să se determine  $m$  numere reale  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$ , astfel încât succesiunea  $a_j, a'_1, a'_2, \dots, a'_m, a_{j+1}$  să fie, de asemenea, o progresie aritmetică.

Aplicație:  $a_1 = 2$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,  $j = 4$ ,  $m = 3$ .

[Numerele  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$  sînt numite uneori medii aritmetice inserate între  $a_j$  și  $a_{j+1}$ .]

49) Fie progresia aritmetică  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Între termenii  $a_j, a_{j+1}$  se inserează pentru fiecare  $j = 1, 2, \dots, n-1$  câte  $m$  medii aritmetice. Să se calculeze suma tuturor acestor medii.

50) Să se insereze între primii doi termeni ai progresiei aritmetice 6, 20, 34, 48 cel mai mic număr de medii aritmetice  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$ , astfel încît numărul 12 să fie termen al progresiei 6,  $a'_1, \dots, a'_m, 20$ .

51) Să se determine o progresie aritmetică  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , astfel încît  $S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$  și  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$ .

52) Să se demonstreze că dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie aritmetică cu rația  $r \neq 0$ , atunci au loc egalitățile:

$$a) a_1 + a_n + 2 \sum_{k=2}^{n-1} a_k = \frac{a_n^2 - a_1^2}{r};$$

$$b) \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} = \frac{a_n^3 - a_1^3 - (n-1)r^2}{3r}$$

53) Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o progresie geometrică.

a) Dacă  $a_n = 1280$ ,  $a_1 = 5$ ,  $n = 9$ , să se determine  $r$  și  $S_n$ .

b) Dacă  $a_n = 384$ ,  $r = 2$ ,  $n = 8$ , să se determine  $a_1$  și  $S_n$ .

c) Dacă  $r = \frac{1}{4}$ ,  $n = 6$ ,  $S_n = 2730$ , să se determine  $a_3$  și  $a_5$ .

d) Dacă  $a_4 = 135$ ,  $a_7 = 3645$ ,  $n = 12$ , să se determine  $S_n$ .

e) Dacă  $n = 2$ ,  $S_n = 221$ ,  $a_3 - a_1 = 136$ , să se determine progresia.

f) Dacă  $n = 7$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 = 26$ ,  $a_5 + a_6 + a_7 = 2106$ , să se determine progresia.

54) Fie progresia geometrică  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cu rația  $r$ , și doi termeni consecutivi  $a_j, a_{j+1}$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ) ai progresiei. Să se determine  $m$  numere reale  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$ , astfel încît succesiunea  $a_j, a'_1, a'_2, \dots, a'_m, a_{j+1}$  să fie, de asemenea, o progresie geometrică.

Aplicație:  $a_1 = 161$ ,  $r = 27$ ,  $j = 1$ ,  $m = 2$ .

[Numerele  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$  sînt numite uneori medii geometrice inserate între  $a_j$  și  $a_{j+1}$ .]

55) Să se calculeze sumele:

$$a) \sum_{k=1}^n \log_b a \cdot \sum_{k=1}^n \log_b a^k \quad (b > 0, b \neq 1; a > 0, a \neq 1);$$

$$b) \left( \sum_{k=1}^n \frac{a}{(1+3\alpha)^k} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \log_b a^{(1+3\alpha)^k} \right), \quad (b > 0, b \neq 1; a > 0; \alpha \neq -\frac{1}{3}).$$

56) Să se demonstreze că:

1° dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie geometrică, atunci  $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ , oricare ar fi  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ ;

2° dacă  $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$  oricare ar fi  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ , și dacă, în plus:  $(a_{n-1} = 0) \Rightarrow (a_n = 0)$ , atunci succesiunea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie geometrică.

57) Fie  $a_1, a_2, a_3$  o progresie aritmetică. Știind că  $S_3 = 30$  și că succesiunea  $a_1 - 5, a_2 - 4, a_3$  este o progresie geometrică, să se determine numerele  $a_1, a_2, a_3$ .

58) Să se determine patru numere naturale  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , știind că succesiunea  $n_1, n_2, n_3$  este o progresie aritmetică, succesiunea  $n_2, n_3, n_4$  este o progresie geometrică,  $n_1 + n_4 = 37$  și  $n_2 + n_3 = 36$ .

59) Fie  $a, b, c, d$  o progresie aritmetică. Știind că succesiunea  $a-2, b-6, c-7, d-2$  este o progresie geometrică, să se determine numerele  $a, b, c, d$ .

60) Fie  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  o progresie geometrică. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left( \sum_{k=1}^{2n+1} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k \right) = a_1 \sum_{k=1}^{2n+1} a_{2k-1}.$$

# Capitolul

## II

### Șiruri

După cum se știe, în clasele anterioare s-a simțit nevoia folosirii șirurilor, de exemplu, la algebră — pentru aproximarea numerelor cu fracții zecimale — și la geometrie — pentru definirea lungimii cercului și a ariei discului circular, a ariilor unor suprafețe în spațiu și a volumelor unor corpuri etc. Numeroase probleme de algebră, geometrie și fizică impun studiul noțiunii de șir și de limită a unui șir. În același timp, după cum se va vedea mai departe în manualul de față, șirurile intervin în mod esențial atunci când se definesc alte noțiuni fundamentale ale analizei matematice, ca: limite de funcții, continuitate, derivată.

### § 6. Generalități

#### 1. Definiția șirurilor

În mod obișnuit, prin *șir* se înțelege o infinitate de numere — distincte sau nu — scrise unul după altul.

Cel mai simplu șir este *șirul numerelor naturale*:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

format din toate numerele naturale, scrise în ordine crescătoare. Cu aceleași numere putem forma și alte șiruri, de exemplu șirul:

$$2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$$

Ceea ce deosebește șirurile de mai sus este faptul că, deși sînt formate din aceleași numere, acestea ocupă poziții diferite în cele două șiruri. Astfel, de exemplu, numărul 4 ocupă în primul șir locul al patrulea (de la stînga spre dreapta), iar în al doilea șir locul al treilea.

Șirul

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$$

este deosebit de șirurile precedente și prin faptul că numerele se repetă.

Trebuie precizat faptul important că un șir nu este o mulțime. Într-adevăr, într-un șir un număr se poate repeta, în timp ce elementele unei mulțimi sînt distincte între ele; de asemenea, elementele unei mulțimi sînt concepute fără nici un fel de ordonare a lor, în timp ce la un șir este esențial locul pe care îl ocupă fiecare număr, ordinea în care sînt scrise numerele în șir.

În general, un șir se scrie astfel:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

sau prescurtat:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sau, mai simplu:  $(a_n)$ .

Se poate folosi orice altă literă, în locul literei  $a$ .

Numerele din care este format un șir se numesc *termenii* șirului. Indicele arată poziția sau rangul unui termen în șir. Astfel:  $a_1$  este primul termen,  $a_2$  este al doilea termen, ...,  $a_n$  este al  $n$ -lea termen al șirului. Termenul  $a_n$ , în care indicele  $n$  nu este precizat, se numește, de obicei, termenul general al șirului.

Prin precizarea rangului termenilor cu ajutorul indicilor, am stabilit, de fapt, o corespondență

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & \dots & n & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & & a_n & \end{array}$$

de la mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale la o parte a mulțimii numerelor reale; această corespondență definește o funcție  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Sîntem conduși astfel la definiția precisă a șirului.

**Definiție.** Se numește *șir* orice funcție definită pe mulțimea numerelor naturale.

Mulțimea în care funcția șir ia valori poate fi o mulțime oarecare  $E$ .

Pentru a preciza mulțimea în care ia valori, un șir  $f: \mathbb{N} \rightarrow E$  va fi numit „șir de elemente ale mulțimii  $E$ ”.

În restul manualului vom considera numai *șiruri de numere reale*; acestea vor fi numite, mai simplu, *șiruri*.

Spunem că un șir este *constant*, dacă are toți termenii egali, adică dacă este de forma:

$$a, a, a, \dots$$

*Exemple de șiruri.*

$$1) 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots;$$

$$2) 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^n, \dots \text{ (șirul puterilor naturale ale lui 10);}$$

$$3) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \text{ (șirul inverselor numerelor naturale);}$$

$$4) -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots;$$

$$5) \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \text{ (șirul inverselor puterilor naturale ale lui 2);}$$

$$6) 1, 1, 1, 1, \dots \text{ (șir constant);}$$

$$7) 0, 0, 0, 0, \dots \text{ (șir constant);}$$

$$8) 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots;$$

9) 0,3; 0,33; 0,333; ... (șirul fracțiilor care aproximează numărul  $\frac{1}{3}$ ).

Se observă că, în fiecare din aceste exemple, termenii șirului se succed după o anumită regulă (sau lege).

Pentru ca un șir să fie definit, este suficient să se dea primul termen și o regulă de succesiune din care să rezulte cum se obține succesorul oricărui termen. Tot astfel se poate defini un șir dând termenul general  $a_n$ , ca o „expresie” care îl conține pe  $n$ , astfel încât particularizând pe  $n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) se obțin succesiv termenii  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ai șirului.

### Exemple.

1) Șirul definit prin legea  $a_n = n$  este:

1, 2, 3, ...,  $n$ , ... (șirul numerelor naturale).

2) Șirul definit prin  $a_n = 2n - 1$  este:

1, 3, 5, ...,  $2n - 1$ , ... (șirul numerelor naturale impare).

3) Șirul cu termenul general  $a_n = \frac{1}{10^n}$  este:

$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$

4) Șirul definit prin  $a_n = \frac{1}{10^{n+1}}$  este:

$\frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^{n+1}}, \dots$

5) Șirul definit prin  $a_n = 4$  (sau  $a_n = 4 \cdot 1^n$ ) este  
4, 4, 4, ..., 4, ... (și constant).

6) Șirul definit prin  $a_n = \frac{2n}{n+3}$  este:

$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2n}{n+3}, \dots$

7) Șirul definit prin  $a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2}$  este

0, 1, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...

Desigur, regula prin care se definește un șir nu constă întotdeauna în a da pe  $a_n$  ca o „expresie simplă” care îl conține pe  $n$ . Ca exemplu putem considera funcția șir care asociază fiecărui număr  $n \in \mathbb{N}$ , numărul  $a_n$  al numerelor naturale mai mici decât  $n$  și prime cu  $n$  (acesta este indicatorul lui Euler al numărului  $n$ ). În tabelul de mai jos sînt calculați primii 8 termeni ai șirului astfel definit.

| $n$ | Numerele mai mici decât $n$<br>și prime cu $n$ | $a_n$ |
|-----|------------------------------------------------|-------|
| 1   | —                                              | 0     |
| 2   | 1                                              | 1     |
| 3   | 1, 2                                           | 2     |
| 4   | 1, 3                                           | 2     |
| 5   | 1, 2, 3, 4                                     | 4     |
| 6   | 1, 5                                           | 2     |
| 7   | 1, 2, 3, 4, 5, 6                               | 6     |
| 8   | 1, 3, 5, 7                                     | 4     |

## 2. Șiruri mărginite

Se spune că un șir  $(a_n)$  este *mărginit*, dacă există un interval mărginit  $[a, \beta]$  care conține toți termenii șirului:

$$a \leq a_n \leq \beta, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Orice interval  $[a, \beta]$  este conținut într-un interval mai mare, cu centrul în 0, de forma  $[-M, M]$ . Așadar, în definiția precedentă se pot folosi numai intervalele cu centrul în 0. Condiția  $-M \leq a_n \leq M$  este echivalentă cu  $|a_n| \leq M$ . Așadar:

Șirul  $(a_n)$  este mărginit dacă și numai dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât să avem:

$$|a_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

### Exemple de șiruri mărginite.

1)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ , deoarece  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ ;

2)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^4}, \dots$ , deoarece  $|a_n| \leq 1$ ;

3) 1, 0, 1, 0, ..., deoarece, de exemplu,  $-2 \leq a_n \leq 5$ ;

4) orice șir constant

$a, a, a, \dots$

Șirurile care nu sînt mărginite se numesc șiruri *nemărginite*. Un șir este deci nemărginit, dacă nici un interval mărginit nu conține toți termenii șirului, adică dacă în afara fiecărui interval mărginit există cel puțin un termen al șirului; sau, încă, dacă oricare ar fi numărul  $M > 0$ , există în șir un termen  $a_n$  astfel încît  $|a_n| > M$ .

### Exemple de șiruri nemărginite.

1) 1, 2, 3, ...,  $n$ , ...

2) -1, -2, -3, ...,  $-n$ , ...

3) 1, -1, 2, -2, ...,  $n$ ,  $-n$ , ...

## 3. Șiruri monotone

Se spune că un șir  $(a_n)$  este *crescător* dacă fiecare termen este mai mic sau egal cu succesorul său:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

adică:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$



Șirul  $(a_n)$  este descrescător, dacă fiecare termen este mai mare sau egal cu succesorul său:

$$a_n \geq a_{n+1}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

adică:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

Șirurile crescătoare și cele descrescătoare se numesc șiruri monotone.

*Exemple.*

- |                                                                |                    |
|----------------------------------------------------------------|--------------------|
| 1) 1, 2, 3, ..., n, ...                                        | este crescător.    |
| 2) -1, -2, -3, ..., -n, ...                                    | este descrescător. |
| 3) 1, $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , ..., $\frac{1}{n}$ , ... | este descrescător. |
| 4) 1, 1, 2, 2, 3, 3, ...                                       | este crescător.    |
| 5) Un șir constant                                             |                    |

$$a, a, a, \dots$$

este în același timp crescător și descrescător.

- |                                                                                                                                    |                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 6) 1, -2, 3, -4, ...                                                                                                               | nu este monotôn. |
| 7) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...                                                                                                           | nu este monotôn. |
| 8) $\frac{1}{2}$ , $\frac{2}{1}$ , $\frac{2}{3}$ , $\frac{3}{2}$ , ..., $\frac{n-1}{n}$ , $\frac{n}{n-1}$ , $\frac{n+1}{n}$ , ..., | nu este monotôn. |

Următoarele două propoziții sînt utile în aplicații:

1) Dacă  $a > 1$ , șirul

$$a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

este crescător și nemărginit.

Într-adevăr, prin înmulțire cu numărul strict pozitiv  $a^n$  în inegalitatea  $a > 1$ , obținem:

$$a^{n+1} > a^n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

deci șirul este crescător.

Pe de altă parte, o consecință a inegalității lui Bernoulli afirmă că oricare ar fi  $\beta > 0$ , există un număr  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încît  $a^n > \beta$ . Deci, termenii șirului nu pot fi cuprinși în nici un interval mărginit  $(\alpha, \beta)$ : deci șirul este nemărginit.

În particular, șirurile:

$$2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$$

$$10, 10^2, \dots, 10^n, \dots$$

$$\sqrt{5}, (\sqrt{5})^2, \dots, (\sqrt{5})^n, \dots$$

sînt crescătoare și nemărginite,

II) Oricare ar fi  $\alpha > 0$  rațional, șirul

$$1^\alpha, 2^\alpha, \dots, n^\alpha, \dots$$

este crescător și nemărginit.

Șirul este evident crescător. Să demonstrăm că este nemărginit. Pentru aceasta vom considera un interval mărginit  $(a, b)$  oarecare, și vom arăta că termenii șirului nu pot fi toți cuprinși în acest interval.

Fie  $\alpha = \frac{p}{q}$  cu numitorul  $q$  natural. Folosind axioma lui Arhimede, deducem că există un număr natural  $m$  astfel încît  $mp > bq$ . Punînd apoi  $m + 1 = n$  și folosind inegalitatea lui Bernoulli, obținem:

$$n^p = (1 + m)^p > 1 + pm > bq,$$

de unde:

$$n^\alpha = n^{\frac{p}{q}} > b,$$

adică  $n^\alpha$  nu se află cuprins în intervalul  $(a, b)$ .

În particular șirurile

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

$$1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, \dots, n^{10}, \dots$$

$$\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{n}, \dots$$

sînt crescătoare și nemărginite.

## § 7. Șiruri convergente

### 1. Un exemplu de șir convergent

Să considerăm șirul cu termenul general  $a_n = \frac{n+1}{n}$ , adică șirul:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{100}{99}, \dots, \frac{1000}{999}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

Se observă ușor că termenii acestui șir se apropie din ce în ce mai mult de 1, pe măsură ce rangul lor crește. Putem realiza ca termenii șirului să fie cît dorim de apropiați de 1, dacă rangul lor este suficient de mare. Se poate spune că termenii șirului se „îngîmădesc” către 1.

Vom încerca să exprimăm această constatare intuitivă printr-o formulare matematică precisă.

Pentru aceasta vom alege, după voie, o vecinătate  $V$  a lui 1 și vom arăta că există un rang începînd de la care toți termenii șirului se află în această vecinătate a lui 1. Știm că în vecinătatea  $V$  se află o vecinătate simetrică  $V'$  a lui 1 de forma:

$$V' = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \text{ cu } \varepsilon > 0 \text{ (fig. 32).}$$

Să observăm că  $a_n \in V'$  înseamnă:

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon,$$

adică:

$$-\varepsilon < a_n - 1 < \varepsilon$$

sau

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Dar, deoarece:

$$a_n - 1 = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n},$$

condiția  $a_n \in V'$  este echivalentă cu condiția  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Conform axiomei lui Arhimede există un număr natural  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ . (Putem lua  $n_0$ , de exemplu, cel mai mic număr natural care depășește pe  $\frac{1}{\varepsilon}$ .) Acesta este rangul căutat. Într-adevăr, începând de la rangul  $n_0$ , adică pentru orice număr natural  $n \geq n_0$ , avem  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , deci  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , și deci  $a_n \in V' \subset V$ .

În afara vecinătății  $V$  se află cel mult primii  $n_0$  termeni (eventual mai puțini), care sînt în număr finit.

Desigur, există vecinătăți ale lui 1, de exemplu,  $V = (0,5)$ , care conțin toți termenii șirului.

Pe de altă parte, cu cît vecinătatea lui 1 este mai mică, cu atît ea conține mai puțini termeni, deci în afara sa se află mai mulți termeni, însă totdeauna în număr finit. Astfel, dacă luăm, de exemplu,  $\varepsilon = 0,5$  și vecinătatea  $V_{0,5} = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  a lui 1, în afara ei se află doar primii doi termeni ai șirului; dacă luăm  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  și vecinătatea  $V_{10^{-1}} = \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ , în afara ei se află primii 10 termeni:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{11}{10} \notin V_{10^{-1}} \text{ și } \frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \dots \in V_{10^{-1}}.$$

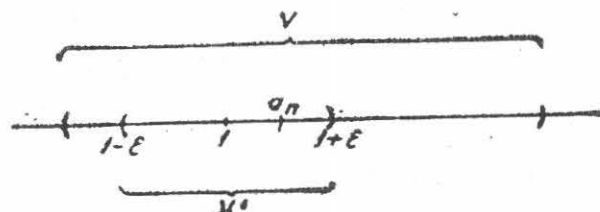


Fig. 32

dacă alegem  $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$ , și vecinătatea  $V_{10^{-7}} = \left(1 - \frac{1}{10^7}, 1 + \frac{1}{10^7}\right)$ , a lui 1, în afara ei se află „mult mai mulți” termeni, anume primele zece milioane de termeni:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{10^7 + 1}{10^7} \notin V_{10^{-7}} \text{ și } \frac{10^7 + 2}{10^7 + 1}, \frac{10^7 + 3}{10^7 + 2}, \dots \in V_{10^{-7}}.$$

Dacă alegem vecinătăți ale lui 1 și mai mici, în afara lor se vor afla și mai mulți termeni, însă totdeauna în număr finit.

Așadar:

În afara oricărei vecinătăți a lui 1 se află (cel mult) un număr finit de termeni ai șirului  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ;

sau, ceea ce este același lucru:

Fiecare vecinătate a lui 1 conține toți termenii șirului  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ , exceptînd (eventual) un număr finit dintre ei.

Aceasta este formularea matematică a faptului intuit la început, anume că termenii șirului  $(a_n)$  se apropie necontenit de 1. Se spune că șirul  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$  tinde către 1 sau că are ca limită pe 1.

Se poate arăta, ca mai sus, că șirul cu termenul general  $b_n = \frac{n}{n+1}$ :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{99}{100}, \dots, \frac{999}{1000}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

tinde către 1, în același înțeles în care șirul  $(a_n)$  tinde către 1, adică: fiecare vecinătate a lui 1 conține toți termenii șirului  $(b_n)$ , exceptînd (eventual) un număr finit dintre ei.

Șirul  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$  este descrescător; termenii săi se apropie de 1 de la dreapta. Șirul inverselor  $\left(\frac{n}{n+1}\right)$  este crescător; termenii săi se apropie de 1 de la stînga.

Este însă posibilă apropierea de 1 și considerînd șiruri care nu sînt neapărat monotone, sau ai căror termeni nu sînt situați toți de aceeași parte a lui 1. De exemplu, intercalînd termenii șirurilor precedente, într-un mod arbitrar, se obține un nou șir ai cărui termeni se apropie de 1 și de la stînga și de la dreapta; astfel, șirul  $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  se apropie de 1 din ambele părți.

## 2. Definiția limitei

Considerațiile făcute asupra șirului din exemplul de mai sus conduc la următoarea

**Definiție.** Spunem că un număr  $a$  este limită a unui șir  $(a_n)$ , dacă: orice vecinătate a lui  $a$  conține toți termenii șirului, exceptînd (eventual) un număr finit de termeni.

Această definiție poate fi formulată și în modul următor:

Numărul  $a$  este limită a șirului  $(a_n)$  dacă:

în afara oricărei vecinătăți a lui  $a$  se află (cel mult) un număr finit de termeni ai șirului.

Șirurile care au limită se numesc *șiruri convergente*.

Șirurile care nu au limită se numesc *șiruri divergente*.

Dacă  $a$  este limită a șirului  $(a_n)$ , spunem că „șirul  $(a_n)$  este convergent către  $a$ ” sau că „șirul  $(a_n)$  tinde către  $a$ ” și scriem:

$$a_n \rightarrow a \text{ (se citește: } a_n \text{ tinde către } a),$$

sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ (se citește: limită de } a_n \text{ când } n \text{ tinde către infinit este egal cu } a).$$

$$\text{Uneori vom scrie doar: } \lim_n a_n = a \text{ sau, mai simplu: } \lim a_n = a.$$

### Exemple.

1) Cel mai simplu exemplu de șir convergent este un șir *constant*:

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

Acest șir are ca limită numărul  $a$  însuși. Într-adevăr, deoarece toți termenii șirului sînt egali cu  $a$ , fiecare vecinătate a lui  $a$  conține toți termenii șirului.

Așadar, dacă  $a_n = a$  pentru orice  $n$ , avem  $\lim a_n = a$ , adică:

$$\lim_n a = a.$$

$$\text{De exemplu: } \lim_n 5 = 5, \lim_n (-3) = -3.$$

2) Din exemplele examinate la nr. 1 al acestui paragraf, rezultă:

$$\lim_n \frac{n+1}{n} = 1 \text{ și } \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

3) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = a$$

și, în general

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} = a.$$

Într-adevăr, șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Șirul  $(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  se scrie:

$$a_2, a_3, a_4, \dots$$

În general, șirul  $(a_{n+p})_{n \in \mathbb{N}}$  se scrie:

$$a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, \dots$$



Fig. 33

Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , în afara fiecărei vecinătăți  $V$  a lui  $a$ , se află un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ , deci, cu atât mai mult, un număr finit de termeni ai șirurilor  $(a_{n+1}), \dots, (a_{n+p})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Rezultă că și aceste șiruri tind către  $a$ .

Raționînd în mod asemănător, deducem că, reciproc: dacă pentru un anumit  $p \in \mathbb{N}$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} = a$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

4) Șirul numerelor naturale  $1, 2, 3, \dots$  este divergent. Anume, vom arăta că nici un număr real nu este limită a acestui șir. Într-adevăr, fie  $a$  un număr oarecare și  $V = \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$  o vecinătate a lui  $a$ , de lungime 1. În vecinătatea  $V$  se află un singur număr natural, dacă  $a > \frac{1}{2}$ , și nici un număr natural, dacă  $a \leq \frac{1}{2}$ ; deci în afara lui  $V$  se află o infinitate de numere naturale, și deci  $a$  nu este limită a șirului numerelor naturale.

5) Șirul

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

este divergent. Să arătăm mai întâi că 1 nu este limită a acestui șir. Pentru aceasta să alegem vecinătatea  $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  a lui 1 (fig. 33). În afara lui  $V$  se află o infinitate de termeni ai șirului, și anume toți termenii egali cu 0; deci 1 nu este limită a șirului. La fel se arată că 0 nu este limită a șirului alegînd, de exemplu, vecinătatea  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  a lui 0. În ceea ce privește orice alt număr  $a$ , putem alege o vecinătate a lui  $a$  care să nu conțină nici pe 1 nici pe 0, deci care să nu conțină nici un termen din șir; deci  $a$  nu este limită a șirului.

Neavînd nici o limită, șirul considerat este divergent.

6) La fel se arată că șirul

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

este divergent.

O primă proprietate a șirurilor convergente este dată de următoarea propoziție.

1) Un șir convergent are o singură limită.

Într-adevăr, să presupunem că  $a_n \rightarrow a$ . Dacă  $a'$  este un număr oarecare diferit de  $a$ , atunci putem găsi o vecinătate  $V$  a lui  $a$  și o vecinătate  $V'$  a lui  $a'$ , fără puncte comune. De exemplu, dacă  $a < a'$ , și dacă notăm  $\alpha = a' - a$ , putem lua:

$$V = \left(a - \frac{\alpha}{3}, a + \frac{\alpha}{3}\right) \text{ și } V' = \left(a' - \frac{\alpha}{3}, a' + \frac{\alpha}{3}\right) \text{ (fig. 34).}$$



Fig. 34

În  $V$  se află toți termenii șirului, exceptând un număr finit dintre ei; deci în afara lui  $V$  se află o infinitate de termeni și deci  $a'$  nu este limită a șirului  $(a_n)$ . Așadar  $a$  este singura limită a șirului  $(a_n)$ .

Datorită unicității limitei unui șir convergent vom spune în continuare „limită a șirului  $(a_n)$ ” în loc de „limită a șirului  $(a_n)$ ”.

Din definiția limitei se obțin imediat și următoarele două propoziții:

**II) Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent, se obține tot un șir convergent către aceeași limită.**

Într-adevăr, poziția pe dreaptă a termenilor șirului nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică. În afara fiecărei vecinătăți a limitei se află un număr finit de termeni ai șirului inițial și același număr de termeni ai șirului modificat; deci noul șir are aceeași limită ca și șirul inițial.

**III) Prin adăugarea sau prin înlăturarea unui număr finit de termeni, un șir convergent rămâne convergent către aceeași limită.**

Într-adevăr, în afara fiecărei vecinătăți a limitei se află tot un număr finit de termeni ai noului șir.

### 3. Teorema de convergență cu $\varepsilon$

Teorema următoare dă o condiție echivalentă de convergență a unui șir și este folosită pentru demonstrarea unor proprietăți importante ale șirurilor convergente. Demonstrația acestei teoreme este un prim exemplu de demonstrație mai dificilă în analiza matematică.

**Teorema 1.**  $a_n \rightarrow a$  dacă și numai dacă:

pentru fiecare număr  $\varepsilon > 0$  (oricât de mic) se poate găsi un rang  $n_\varepsilon$  (care depinde de  $\varepsilon$ ), astfel încît pentru toți termenii  $a_n$  de rang mai mare ( $n \geq n_\varepsilon$ ) să avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

**Demonstrație.** Să observăm mai întâi că:

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Să presupunem, în primul rînd, că  $a_n \rightarrow a$  și să verificăm condiția din enunțul teoremei. Pentru aceasta ne alegem, după voie (sau, în limbajul folosit în matematică, în mod arbitrar) un număr  $\varepsilon > 0$ . Considerăm apoi vecinătatea  $V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  a lui  $a$ . În afara lui  $V$  se află doar un număr finit de termeni; fie  $n'$  cel mai mare rang al acestora. Urmează că toți termenii  $a_n$  cu rangul  $n > n'$  se află în  $V$ . Prin urmare,

dacă alegem, de exemplu,  $n_\varepsilon = n' + 1$ , atunci pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$  avem  $a_n \in V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , adică:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Așadar, în ipoteza că  $a_n \rightarrow a$ , am demonstrat că: oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , putem găsi un rang  $n_\varepsilon$ , astfel încît pentru orice rang  $n \geq n_\varepsilon$  să avem  $|a_n - a| < \varepsilon$ , și prima parte a teoremei este demonstrată.

Reciproc, să presupunem îndeplinită condiția din enunțul teoremei și să demonstrăm că  $a_n \rightarrow a$ .

Pentru aceasta să alegem în mod arbitrar o vecinătate  $V$  a lui  $a$ . Aceasta conține o vecinătate simetrică  $V'$  a lui  $a$ , de forma  $V' = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  cu  $\varepsilon > 0$ . Conform ipotezei, pentru acest număr  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon$  astfel încît pentru  $n \geq n_\varepsilon$  să avem  $|a_n - a| < \varepsilon$ ; atunci  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = V' \subset V$ . În afara lui  $V$  se află cel mult primii  $n_\varepsilon - 1$  termeni (eventual o parte dintre aceștia se află tot în  $V$ ) care sînt în număr finit.

Așadar, presupunînd condiția teoremei îndeplinită, am demonstrat că:

în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ , adică  $a_n \rightarrow a$ , și partea a doua a teoremei este, de asemenea, demonstrată. Prin aceasta, teorema însăși este complet demonstrată.

**Observație.** Deoarece condiția din definiția limitei:

Orice vecinătate a lui  $a$  conține toți termenii șirului, exceptînd un număr finit dintre ei este echivalentă cu condiția din enunțul teoremei.

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon$  astfel încît oricare ar fi  $n \geq n_\varepsilon$  să avem  $|a_n - a| < \varepsilon$ , aceasta din urmă poate fi luată, la rîndul său, drept condiție de definiția a limitei. Se obține, astfel, așa-numita „definiție cu  $\varepsilon$ ” a limitei.

Pentru a face o distincție, definiția inițială este numită „definiție cu vecinătăți.”

Folosind teorema precedentă, vom demonstra acum o propoziție frecvent utilizată în aplicații:

Dacă șirul  $(a_n)$  de numere strict pozitive este crescător și nemărginit, atunci  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, să alegem în mod arbitrar un număr  $\varepsilon > 0$ . Deoarece șirul este nemărginit, există un termen  $a_{n'} > \frac{1}{\varepsilon}$ ; deoarece șirul este crescător, pentru orice  $n > n'$  avem  $a_n \geq a_{n'} > \frac{1}{\varepsilon}$ , deci:

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

și deci (numerele  $\frac{1}{a_n}$  fiind strict pozitive),

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

Așadar am demonstrat că: pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  putem găsi un rang  $n_\varepsilon = n'$ , astfel încît, oricare ar fi  $n \geq n_\varepsilon$ , să avem

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

adică  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

*Exemple.*

1) Dacă  $a > 1$ , atunci șirul  $(a^n)$  este crescător și nemărginit, deci:

$$\lim \frac{1}{a^n} = 0.$$

În particular:

$$\lim \frac{1}{2^n} = 0; \lim \frac{1}{10^n} = 0 \text{ etc.}$$

2) Dacă  $0 < b < 1$ , atunci:

$$\lim b^n = 0.$$

Într-adevăr, avem  $a = \frac{1}{b} > 1$  și  $b^n = \frac{1}{a^n} \rightarrow 0$ .

În particular:

$$\lim (0,5)^n = 0; \lim (0,1)^n = 0.$$

3) Șirul  $(n^\alpha)$  cu  $\alpha > 0$  rațional, este crescător și nemărginit, deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

În particular:

$$\lim \frac{1}{n} = 0; \lim \frac{1}{n^2} = 0; \lim \frac{1}{n^3} = 0;$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

#### 4. Criteriul majorării

Pînă în prezent, aplicînd definiția cu vecinătăți și definiția cu  $\varepsilon$  a limitei, am putut stabili convergența într-un număr restrîns de cazuri. În fiecare din aceste cazuri mai întîi am intuit limita și apoi am verificat, în mod riguros, cu ajutorul definiției, că intuiția noastră a fost corectă. Așadar, pentru a stabili convergența unui șir, întîmpinăm două dificultăți: în primul rînd este necesară o anumită indicație intuitivă despre limită, iar, în al doilea rînd, aplicarea definiției însăși pentru o verificare riguroasă a intuiției este de cele mai multe ori laborioasă. De aceea, se urmărește obținerea unor „procedee” cu ajutorul cărora să determinăm convergența mai ușor decît prin aplicarea definiției.

De exemplu, un astfel de procedeu ne-a fost dat de propoziția despre șirul  $\frac{1}{a^n}$  de la numărul precedent. Alte procedee vor fi date de criteriul majorării, de teorema de convergență a șirurilor monotone și de teoremele asupra operațiilor cu șiruri convergente.

Pentru stabilirea convergenței unui șir cu ajutorul criteriului majorării și al operațiilor cu limite se folosesc alte șiruri, a căror convergență este cunoscută. Urmează că aplicarea acestor procedee este cu atît mai fructuoasă, cu cît deținem un număr mai mare de exemple de șiruri convergente.

**Teorema 2. (Criteriul majorării).** Dacă  $|a_n - a| \leq \alpha_n$  pentru orice  $n$  și dacă  $\alpha_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow a$ .

**Demonstrație.** Să alegem în mod arbitrar un număr  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $\alpha_n \rightarrow 0$ , putem găsi un rang  $n_\varepsilon$  astfel încît, oricare ar fi  $n \geq n_\varepsilon$ , să avem

$$\alpha_n < \varepsilon.$$

Atunci, cu atît mai mult, pentru  $n \geq n_\varepsilon$  avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

și deci  $a_n \rightarrow a$ .

În particular:

Dacă  $|a_n| \leq \alpha_n$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow 0$ .

*Exemple.*

1) Șirul cu termenul general  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

are limita 0, deoarece  $|a_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

2) Deoarece  $\left| \sin \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$  și  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , avem:

$$\lim \sin \frac{1}{n} = 0.$$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{3}}{n^2} = 0$ , deoarece:

$$\left| \frac{\sin n \frac{\pi}{3}}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

4) Fie  $x$  un număr real oarecare. Fie  $(a_n)$  șirul fracțiilor zecimale care aproximează prin lipsă numărul  $x$ :

$$a_n = x_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

unde  $x_0$  este partea întreagă a lui  $x$ , iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sînt cifrele succesive din scrierea zecimală a lui  $x$ .



Fie, de asemenea,  $(b_n)$  șirul fracțiilor zecimale care aproximează prin exces pe  $x$ :

$$b_n = x_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_n.$$

Atunci:

$$\lim a_n = x \text{ și } \lim b_n = x.$$

Într-adevăr,  $a_n \leq x \leq b_n$  și:

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n},$$

deci:

$$|a_n - x| = x - a_n \leq \frac{1}{10^n}$$

și

$$|b_n - x| = b_n - x \leq \frac{1}{10^n}.$$

Deoarece  $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ , urmează  $a_n \rightarrow x$  și  $b_n \rightarrow x$ .

**Observație.** Numerele  $a_n$  și  $b_n$  sînt raționale. Dar  $(a_n)$  și  $(b_n)$  nu sînt singurele șiruri de numere raționale convergente către  $x$ . De exemplu, oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}$ , șirul  $\left(a_n + \frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  este, de asemenea, format din numere raționale și tinde tot către  $x$ .

## 5. Șirul modulelor

**Teorema 3.** Dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci  $|a_n| \rightarrow |a|$ :

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|$$

Proprietatea se enunță simplificat\*, astfel:

**Limita modulului este egală cu modulul limitei**

**Demonstrație.** Să alegem în mod arbitrar un număr  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , putem găsi un rang  $n_\varepsilon$ , astfel încît pentru toți indicii  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Folosind inegalitatea

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

rezultă, cu atît mai mult, că pentru  $n \geq n_\varepsilon$  avem:

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon,$$

adică  $|a|$  este limita șirului modulelor  $(|a_n|)$ .

\* În manualul de față vor interveni adesea enunțuri de teoreme sub formă simplificată. Trebuie subliniat că aceste enunțuri sînt incomplete (în sensul că ele exprimă doar concluzia teoremelor), dar prezintă avantajul de a putea fi ușor memorate.

**Observație.** Propoziția reciprocă nu este adevărată: dacă șirul modulelor  $(|a_n|)$  este convergent, nu rezultă în mod necesar că șirul  $(a_n)$  însuși este convergent. De exemplu, șirul

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

nu este convergent, deși șirul modulelor  $1, 1, 1, \dots$  este convergent, fiind constant.

Totuși:

Dacă șirul modulelor  $(|a_n|)$  are limita 0, atunci șirul  $(a_n)$  are, de asemenea, limita 0.

Într-adevăr:

$$|a_n - 0| = |a_n| \rightarrow 0,$$

deci, conform criteriului majorării,  $a_n \rightarrow 0$ .

**Exemplu.**

Șirurile

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \text{ și } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

au limita 0, deoarece șirul modulelor:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  are limita 0.

## 6. Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 4.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sînt două șiruri convergente și dacă:

$$a_n \leq b_n, \text{ pentru fiecare } n,$$

atunci:

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

**Demonstrație.** Fie  $a = \lim a_n$  și  $b = \lim b_n$ . Trebuie să arătăm că  $a \leq b$ . Să presupunem, prin absurd, că  $b < a$ . Atunci putem găsi o vecinătate  $U$  a lui  $b$  și o vecinătate  $V$  a lui  $a$  fără puncte comune: dacă notăm  $\alpha = b - a$ , putem lua, de exemplu,  $U = \left(b - \frac{\alpha}{3}, b + \frac{\alpha}{3}\right)$  și  $V = \left(a - \frac{\alpha}{3}, a + \frac{\alpha}{3}\right)$  (fig. 35). În  $U$  se află toți termenii  $b_n$ , exceptînd un număr finit dintre ei; în  $V$  se află toți termenii  $a_n$ , exceptînd un număr finit dintre ei.

Pentru termenii  $b_n$  din  $U$  și  $a_n$  din  $V$  avem  $b_n < a_n$ , ceea ce contrazice ipoteza. Așadar, presupunerea  $b < a$  ne conduce la contradicție. Urmează că  $a \leq b$  și teorema este demonstrată.

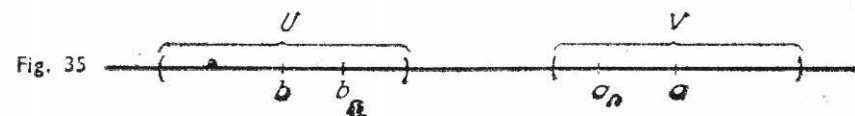


Fig. 35

**Corolarul 1.** Dacă  $(a_n)$  este un șir convergent și dacă  $\alpha \leq a_n \leq \beta$ , pentru orice  $n$ , atunci:

$$\alpha \leq \lim a_n \leq \beta.$$

Se folosește teorema precedentă, mai întâi pentru șirul constant  $(\alpha)$  și șirul  $(a_n)$  în inegalitatea  $\alpha \leq a_n$ , apoi pentru șirul  $(a_n)$  și șirul constant  $(\beta)$  în inegalitatea  $a_n \leq \beta$ .

**Corolarul 2.** Dacă  $(a_n)$  este un șir convergent și dacă  $a_n \leq 0$ , pentru orice  $n$ , atunci:

$$\lim a_n \geq 0.$$

Se ia  $\alpha = 0$  în corolarul precedent.

**Observație.** Dacă între termenii șirurilor avem inegalități stricte  $a_n < b_n$ , pentru limite nu putem deduce decât o inegalitate nestrictă,  $\lim a_n \leq \lim b_n$ ; uneori putem avea chiar egalitate. De exemplu,  $\frac{1}{n} > 0$ , dar  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

## 7. Șiruri mărginite. Șiruri monotone

O proprietate importantă a șirurilor convergente este exprimată de

**Teorema 5.** Orice șir convergent este mărginit.

**Demonstrație.** Fie  $(a_n)$  un șir convergent către  $a$ . Să alegem o vecinătate a lui  $a$ , de exemplu,  $V = (a - 1, a + 1)$ . În afara lui  $V$  se află un număr finit de termeni, de exemplu,  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$ ; o parte din ei se pot afla la stînga lui  $a - 1$ , iar o parte din ei se pot afla la dreapta lui  $a + 1$ . Toți ceilalți termeni se află în intervalul  $(a - 1, a + 1)$ . Să alegem acum un număr  $\alpha$  mai mic și decât  $a - 1$  și decât toate numerele  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$ ; să alegem, de asemenea, un număr  $\beta$  mai mare și decât  $a + 1$  și decât toate numerele  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$ . Rezultă că intervalul  $(\alpha, \beta)$  conține atît termenii  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$  cît și intervalul  $(a - 1, a + 1)$ ; deci intervalul  $(\alpha, \beta)$  conține toți termenii șirului  $(a_n)$ . Rezultă că șirul  $(a_n)$  este mărginit.

Din proprietatea precedentă rezultă imediat (prin reducere la absurd) că:

Orice șir nemărginit este divergent.

Următoarele șiruri sînt divergente, deoarece sînt nemărginite:

$$1) a, a^2, \dots, a^n, \dots \quad \text{cu } a > 1.$$

În particular, șirurile:

$$2, 2^2, \dots, 2^n, \dots \text{ și } 10, 10^2, \dots, 10^n, \dots$$

$$2) 1^\alpha, 2^\alpha, \dots, n^\alpha, \dots \quad \text{cu } \alpha > 0 \text{ rațional.}$$

În particular, șirurile:

$$1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{și } \sqrt{1^3}, \sqrt{2^3}, \dots, \sqrt{n^3}, \dots$$

$$3) -1, 2, -3, 4, \dots$$

$$4) 0, 1, 0, 2, \dots, 0, n, \dots$$

**Observație.** Proprietatea unui șir de a fi mărginit este o condiție necesară pentru convergența sa, dar nu suficientă. Există șiruri mărginite care nu sînt convergente, de exemplu șirul:

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

Se poate asigura convergența unui șir mărginit, dacă se adaugă o condiție suplimentară, aceea de a fi monoton.

**Teorema 6.** (Teorema de convergență a șirurilor monotone.) Orice șir monoton și mărginit este convergent.

**Demonstrația** acestei teoreme necesită cunoștințe care nu au putut fi incluse în manualul de față.

În privința limitei unui șir monoton putem face următoarele precizări:

Dacă șirul  $(a_n)$  este crescător și  $a_n \rightarrow a$ , atunci:

$$a_n \leq a, \text{ pentru orice } n.$$

Într-adevăr, trecînd la limită după indicele  $p$  în inegalitatea:

$$a_n \leq a_{n+p},$$

obținem:

$$a_n \leq \lim_{p \rightarrow \infty} a_{n+p} = a.$$

În mod asemănător:

Dacă șirul  $(a_n)$  este descrescător și  $a_n \rightarrow a$ , atunci:

$$a_n \geq a, \text{ pentru orice } n.$$

Uneori, pentru a preciza că un șir convergent este crescător, vom scrie  $a_n \nearrow a$  în loc de  $a_n \rightarrow a$ . În mod analog vom scrie  $a_n \searrow a$  pentru un șir descrescător convergent către  $a$ .

**Exemplu.**

Șirul  $\left(\frac{2n}{n!}\right)$  este convergent.

Într-adevăr, să notăm  $a_n = \frac{2n}{n!}$ . Șirul  $(a_n)$  se scrie:

$$\frac{2}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \dots, \frac{2n}{n!}, \dots$$

Avem:

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{(n+1)!} = \frac{2n}{n!} \cdot \frac{2}{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{n+1}.$$

Deoarece  $\frac{2}{n+1} \leq 1$ , deducem  $a_{n+1} \leq a_n$ , deci șirul este descrescător. Șirul este și mărginit, deoarece  $a_1 \geq a_n > 0$ , pentru orice  $n$ .

Rezultă că șirul este convergent. Se va arăta mai departe (§ 8, nr. 2) că:

$$\lim \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Teorema următoare cunoscută sub numele de „clește“ este foarte utilă în aplicații. Ea va fi folosită în paragraful consacrat aplicațiilor analizei în geometrie.

**Teorema 7.** Dacă două șiruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  îndeplinesc următoarele două condiții:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1;$$

$$2) b_n - a_n \rightarrow 0;$$

atunci ele sînt convergente și au aceeași limită:

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

**Demonstrație.** Șirul  $(a_n)$  este crescător și mărginit (deoarece termenii săi sînt cuprinși între  $a_1$  și  $b_1$ ), iar șirul  $(b_n)$  este descrescător și mărginit. Urmează că cele două șiruri sînt convergente. Fie:

$$\lim a_n = a \text{ și } \lim b_n = b.$$

Trecînd la limită în inegalitățile 1), deducem că  $a \leq b$ . Din inegalitățile:

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \text{ pentru orice } n,$$

deducem:

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n.$$

Deoarece  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , folosind criteriul majorării, deducem că șirul constant  $(b - a)$  tinde către 0, deci:

$$b - a = \lim (b - a) = 0,$$

$$\text{deci } a = b; \text{ adică:}$$

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

## 8. Numărul e

Fie șirul:

$$(1 + 1)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Să arătăm că acest șir este crescător și mărginit, de unde va rezulta că este convergent. Pentru aceasta să notăm:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

și să dezvoltăm membrul drept după formula binomului lui Newton:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Se observă că:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

asa încît:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Deoarece  $0 < 1 - \frac{k}{n} < 1$ , în fiecare paranteză se obține un număr pozitiv; deci membrul drept este o sumă de termeni pozitivi mai mare decît suma primilor doi termeni  $1 + 1 = 2$ . Deducem:

$$2 \leq a_n \text{ pentru orice } n.$$

Pe de altă parte, numărul din fiecare paranteză este mai mic decît 1; deci, înlocuind în membrul drept fiecare paranteză cu 1, obținem o sumă mai mare. Înlocuind fiecare factor  $> 1$  de la numitor cu 2, termenii sumei se măresc încă, așa încît:

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + S_n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \\ &= 1 + 2 = 3, \end{aligned}$$

unde:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Așadar:

$$2 \leq a_n < 3, \text{ pentru orice } n,$$

adică șirul  $(a_n)$  este mărginit. Să arătăm acum că este și crescător.

Să observăm că termenul  $a_n$  are în dezvoltarea sa  $n + 1$  termeni, iar  $a_{n+1}$  are  $n + 2$  termeni, adică are un termen în plus. Termenul  $a_{n+1}$  se scrie:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \\ + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Dar  $n < n + 1$ , deci  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ . Prin urmare,  $\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$ , de unde  $-\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1}$ , deci  $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ . Rezultă că numărul din fiecare paranteză din dezvoltarea lui  $a_n$  este mai mic decât numărul din paranteza corespunzătoare din dezvoltarea lui  $a_{n+1}$ . Rezultă că fiecare termen din dezvoltarea lui  $a_n$  este mai mic decât termenul corespunzător din dezvoltarea lui  $a_{n+1}$ . Deoarece  $a_{n+1}$  mai are și un termen pozitiv în plus (ultimul), deducem că:

$$a_n < a_{n+1},$$

adică șirul  $(a_n)$  este crescător.

Șirul  $(a_n)$  are deci limită. Această limită se notează cu litera  $e$ :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Trecind la limită în inegalitățile  $2 \leq a_n < 3$ , rezultă:

$$2 \leq e \leq 3.$$

Se demonstrează că  $e$  este un număr irațional. Valoarea aproximativă a numărului  $e$  cu cinci zecimale exacte este 2,71828.

## § 8. Operații cu șiruri convergente

În acest paragraf vom arăta că efectuind asupra șirurilor convergente operațiile de adunare, de înmulțire și (cu anumite restricții) de împărțire, se obțin, de asemenea, șiruri convergente.

## 1. Șirul sumelor

**Teorema 1.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ :

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

Limita sumei este egală cu suma limitelor

**Demonstrație.** Vom folosi definiția cu  $\varepsilon$  a limitei. Pentru a arăta că  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ , să alegem, în mod arbitrar, un număr  $\varepsilon > 0$ , și să găsim un rang  $n_\varepsilon$ , astfel încât pentru  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Avem însă:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , pentru numărul  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ , putem găsi un rang  $n'$ , astfel ca pentru  $n \geq n'$  să avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De asemenea, deoarece  $b_n \rightarrow b$ , pentru același număr  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$  putem găsi un rang  $n''$ , astfel încât pentru  $n \geq n''$  să avem:

$$|b_n - b| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă alegem  $n_\varepsilon = \max(n', n'')$ , atunci pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$  avem, în același timp,  $n \geq n'$  și  $n \geq n''$ , deci:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Așadar am demonstrat că: pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon$  astfel încât oricare ar fi  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

adică  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ , și teorema este demonstrată.

Se arată prin inducție completă că teorema 1 rămâne adevărată și pentru suma mai multor șiruri convergente (în număr finit):

$$\lim (a_n + b_n + c_n + \dots + f_n) = \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n + \dots + \lim f_n.$$

În particular, luând  $k$  șiruri egale cu  $(a_n)$ , deducem:

$$\lim_n (ka_n) = k \lim_n a_n, \text{ k natural.}$$

**Teorema 2.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , atunci:  $a_n - b_n \rightarrow a - b$ .

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

**Limita diferenței este egală cu diferența limitelor**

Demonstrația se face ca și pentru teorema 1, scriind, pentru  $n \geq n_2$ :

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

**Corolar.**  $a_n \rightarrow a$ , dacă și numai dacă  $a_n - a \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci:

$$a_n - a \rightarrow a - a = 0.$$

Reciproc, dacă  $a_n - a \rightarrow 0$ , atunci:

$$a_n - (a_n - a) \rightarrow 0 + a = a.$$

*Exemple.*

$$1) \lim \frac{n^2 + 1}{n^2} = \lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \lim \frac{1}{n^2} = 1.$$

$$2) \lim \frac{n^3 - 1}{n^4} = \lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}\right) = 0 - 0 = 0.$$

$$3) \lim \frac{5^n + 4^n - 3^n}{5^n} = \lim \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 1.$$

## 2. Șirul produselor

**Teorema 3.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow ab$ :

$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

**Limita produsului este egală cu produsul limitelor**

**Demonstrație.** Vom folosi, de asemenea, definiția cu  $\varepsilon$  a limitei. Pentru a demonstra că  $a_n b_n \rightarrow ab$ , să alegem, în mod arbitrar, un număr  $\varepsilon > 0$  și să găsim un rang  $n_\varepsilon$  astfel încît pentru  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

**Avem însă:**

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \leq$$

Dar șirul  $(b_n)$  este mărginit, fiind convergent; există deci un număr  $M > 0$ , astfel încît pentru toți termenii  $b_n$  să avem:

$$|b_n| \leq M.$$

Dacă luăm apoi un număr  $N > |a|$  (deci  $N > 0$ , chiar dacă, eventual,  $a = 0$ ), rezultă că:

$$|a_n b_n - ab| < |a_n - a| M + N |b_n - b|.$$

Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , pentru numărul  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$  putem găsi un număr  $n'$ , astfel încît pentru  $n \geq n'$  să avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}.$$

De asemenea, deoarece  $b_n \rightarrow b$ , pentru numărul  $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2N}$ , putem găsi un număr  $n''$ , astfel încît pentru  $n \geq n''$  să avem:

$$|b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Dacă alegem  $n_\varepsilon = \max(n', n'')$ , atunci pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$  avem, în același timp  $n \geq n'$  și  $n \geq n''$ , deci:

$$|a_n b_n - ab| < |a_n - a| M + N |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} M + N \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

Așadar am demonstrat că: pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon$ , astfel încît oricare ar fi  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon,$$

adică  $a_n b_n \rightarrow ab$ , și teorema este demonstrată.

Se arată prin inducție completă că teorema 3 rămîne adevărată și pentru produsul mai multor șiruri convergente (în număr finit).

$$\lim (a_n b_n c_n \dots f_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n \cdot \lim c_n \dots \lim f_n.$$

În particular, luând  $k$  șiruri egale cu  $(a_n)$ , deducem:

$$\lim_n (a_n)^k = \left(\lim_n a_n\right)^k, \text{ k natural.}$$



**Teorema 4.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $c \in R$ , atunci  $ca_n \rightarrow ca$ :

$$\lim (ca_n) = c \cdot \lim a_n$$

**0 constantă iese în afara limitei**

Într-adevăr luând  $b_n = c$ , șirul constant  $(b_n)$  are limita  $c$  și:

$$ca_n = b_n a_n;$$

deci, conform teoremei precedente, șirul  $(ca_n)$  este convergent și:

$$\lim (ca_n) = \lim (b_n a_n) = \lim b_n \cdot \lim a_n = c \cdot \lim a_n.$$

**Corolarul 1.** Dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci  $-a_n \rightarrow -a$ :

$$\lim (-a_n) = -\lim a_n$$

Se ia  $c = -1$  în teorema precedentă.

**Corolarul 2.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și dacă  $(b_n)$  este mărginit atunci  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, deoarece  $(b_n)$  este mărginit, există un număr  $M > 0$  astfel încît, pentru toți termenii  $b_n$ , să avem:

$$|b_n| \leq M.$$

Atunci:

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq |a_n| M.$$

Dar  $a_n \rightarrow 0$ , deci  $|a_n| \rightarrow 0$  și deci  $|a_n| M \rightarrow 0$ :

$$\lim |a_n| M = M \lim |a_n| = 0.$$

Folosind criteriul majorării în inegalitatea

$$|a_n b_n| \leq |a_n| M,$$

rezultă că  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

*Exemple.*

$$1) \lim \frac{an + b}{n} = \lim \left( a + b \frac{1}{n} \right) = a + b \lim \frac{1}{n} = a + b \cdot 0 = a.$$

$$2) \lim \frac{5n^3 - 2n + 1}{n^3} = \lim \left( 5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 5 - 2 \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{1}{n^3} = 5.$$

3) După cum am stabilit anterior (§ 7, nr. 7), șirul cu termenul general  $a_n = \frac{2^n}{n!}$  este

convergent

și:

$$a_{n+1} = a_n \frac{2}{n+1}.$$

Notînd  $\lim a_n = a$ , rezultă  $\lim a_{n+1} = a$  (v. § 7, nr. 2); deci trecînd la limită în egalitatea anterioară, obținem:

$$a = a \cdot 0,$$

$$\text{deci } a = 0; \text{ adică } \lim \frac{2^n}{n!} = 0.$$

4) Dacă  $0 < r < 1$ , avem  $r^n \rightarrow 0$ , deci:

$$\lim \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \lim r^n = 0$$

și:

$$\lim \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \lim (1-r^n) = \frac{1}{1-r} (1 - \lim r^n) = \frac{1}{1-r}.$$

### 3. Șirul cîturilor

**Teorema 5.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , și dacă  $b_n \neq 0$  pentru orice  $n$  și  $b \neq 0$ , atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ :

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

Limita cîtului este egală cu cîtul limitelor, dacă limita de la numitor este diferită de 0.

**Demonstrație.** Pentru a arăta că  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ , vom parcurge trei etape.

1) Arătăm mai întîi că șirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit.

Din ipoteza  $b_n \rightarrow b \neq 0$ , deducem  $|b_n| \rightarrow |b| > 0$ . Să alegem (fig. 36) o vecinătate  $V = (\alpha, \beta)$  a lui  $|b|$ , cu  $\alpha > 0$ . În această vecinătate se află toți termenii  $|b_n|$ ,





Fig. 37

cu excepția unui număr finit dintre ei. Pentru termenii  $|b_n|$  din vecinătatea  $V$  avem:

$$|b_n| < \alpha,$$

deci:

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\alpha}.$$

adică (fig. 37):

$$-\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{\alpha}.$$

Cu alte cuvinte, acești termeni  $\frac{1}{b_n}$  se află în intervalul mărginit  $\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ . Ceilalți termeni  $\frac{1}{b_n}$  dinafara intervalului  $\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$  sînt în număr finit, deci putem găsi un interval mai mare  $(A, B)$  care să-i conțină și pe aceștia, și intervalul  $\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ . Urmează că intervalul  $(A, B)$  conține toți termenii  $\frac{1}{b_n}$ ; adică  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit.

2) Arătăm acum că  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

Pentru aceasta este suficient să arătăm că  $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$ .

Dar:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{bb_n} = -\frac{1}{b} \frac{1}{b_n} (b_n - b).$$

Deoarece  $b_n \rightarrow b$ , avem  $b_n - b \rightarrow 0$ ; deoarece șirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit, rezultă că  $\frac{1}{b_n} (b_n - b) \rightarrow 0$ , deci  $-\frac{1}{b} \frac{1}{b_n} (b_n - b) \rightarrow 0$ ; adică:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0,$$

de unde:

$$\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{b-1}{b}.$$

3) Scriind acum citul  $\frac{a_n}{b_n}$  ca un produs și folosind teorema asupra produsului a două șiruri convergente, deducem:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

și teorema este demonstrată.

În particular: dacă  $(a_n)$  este convergent, dacă  $a_n \neq 0$  pentru orice  $n$  și dacă  $\lim a_n \neq 0$ , atunci:

$$\lim (a_n)^{-k} = (\lim a_n)^{-k}, \quad k \text{ natural.}$$

Într-adevăr:

$$\lim a_n^{-k} = \lim \frac{1}{(a_n)^k} = \frac{1}{\lim (a_n)^k} = \frac{1}{(\lim a_n)^k} = \left(\frac{1}{\lim a_n}\right)^k = (\lim a_n)^{-k}.$$

Combinând cu un rezultat anterior, deducem că:

$$\lim (a_n)^k = (\lim a_n)^k, \quad k \text{ întreg.}$$

### Exemple.

$$1) \lim \frac{3n^4 - 5n^3 + 2n + 6}{2n^4 + 7n^2 - n - 1} = \lim \frac{n^4 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}\right)}{n^4 \left(2 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)} =$$

$$= \lim \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}}{2 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} = \frac{\lim \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{6}{n^4}\right)}{\lim \left(2 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)} = \frac{3}{2}.$$

$$2) \lim \frac{n^3 - 4n - 3}{n^3 + 3n^2 + 1} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{4}{n^4} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{4}{n^4} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim \left(\frac{1}{n^3} - \frac{4}{n^4} - \frac{3}{n^3}\right)}{\lim \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$3) \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Observație. Dacă  $\lim b_n = 0$ , este posibil ca șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  să nu aibă limită. De exemplu,  $a_n = 1 \rightarrow 1$  și  $b_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Șirul citurilor  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  este

$$-1, 2, -3, 4, \dots$$

și este divergent.

## § 9. Puteri și logaritmi

În acest paragraf vor fi reamintite principalele proprietăți ale puterilor și logaritmilor și vor fi aduse unele completări privind trecerea la limită în șirurile de puteri și logaritmi.

### 1. Generalități

După cum se știe, puterile se definesc în mai multe etape, considerind succesiv exponenții: naturali, întregi, raționali, reali. Natura exponentului impune restricții succesive asupra bazei. Astfel:

I) Puterile  $a^n$  cu exponent *natural*  $n$ , numite *puteri naturale*, se definesc pentru orice bază  $a$ :

$$a^1 = a, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

II) Puterile  $a^{-n}$  cu exponent *întreg negativ*  $-n$  și puterea  $a^0$  se definesc pentru bază  $a \neq 0$ :

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Puterile cu exponent întreg (pozitiv sau negativ) se numesc *puteri întregi*.

III) Radicalul  $\sqrt[n]{a}$  se definește pentru  $n$  natural și bază  $a \geq 0$ , ca *soluția pozitivă unică* a ecuației

$$x^n = a.$$

Dacă  $n$  este *împar*, se definește radicalul  $\sqrt[n]{a}$  pentru orice bază  $a$ , ca *soluția* (pozitivă sau negativă) unică a ecuației precedente.

IV) Puterea  $a^r$  cu exponent rațional  $r = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \dots$  cu  $n$  natural se definește pentru bază  $a > 0$ :

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[2n]{a})^{2m} = \dots$$

Dacă  $r > 0$ , se definește  $0^r = 0$ .

Puterile cu exponent rațional se numesc *puteri raționale*.

V) Puterile  $a^x$  cu exponentul real  $x$  se definesc, ca și puterile raționale, pentru bază  $a > 0$ ; dacă  $x > 0$ , se definește  $0^x = 0$ .

Puterile cu exponent real se numesc *puteri reale*. Ele vor fi definite mai jos cu ajutorul șirurilor de puteri raționale.

Puterile au următoarele proprietăți principale:

$$1) a^x a^y = a^{x+y};$$

$$2) (a^x)^y = a^{xy};$$

$$3) (ab)^x = a^x b^x;$$

$$4) a^x = \frac{1}{a^{-x}};$$

$$5) (a > 1 \text{ și } x > 0) \Rightarrow (a^x > 1).$$

Din proprietățile precedente se deduc toate celelalte proprietăți ale puterilor.

**Observații.** 1) Orice număr *întreg*  $k$  este în același timp un număr rațional; totuși, dacă numărul  $k$  este exponentul unei puteri  $a^k$ , trebuie făcută distincție netă între *numărul întreg*  $k$  și *numărul rațional*  $k = \frac{k}{1} = \frac{2k}{2} = \dots$ , deoarece *puterea întreagă*  $a^k$  se poate defini pentru orice bază  $a \neq 0$ , în timp ce *puterea rațională*  $a^{\frac{k}{1}}$  se poate defini doar pentru bază  $a > 0$ . Dacă însă  $a > 0$ , puterea întreagă  $a^k$  și puterea rațională  $a^{\frac{k}{1}}$  sînt egale. Astfel puterea naturală  $(-5)^2$  este definită, în timp ce puterea rațională  $(-5)^{\frac{2}{1}}$  nu are sens. Însă  $5^2 = 5^{\frac{2}{1}}$ .

În definiția polinoamelor:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

se consideră *puteri naturale* ale lui  $x$ , deci  $x$  poate fi orice număr real.

2) De asemenea, dacă  $n$  este *împar*, trebuie făcută distincție netă între *radicalul*  $\sqrt[n]{a}$  și *puterea rațională*  $a^{\frac{1}{n}}$ , deoarece radicalul  $\sqrt[n]{a}$  se poate defini pentru *orice*  $a$ , în timp ce puterea rațională  $a^{\frac{1}{n}}$  se poate defini doar pentru bază  $a \geq 0$ . Dacă însă  $a \geq 0$ , atunci  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ .

Astfel, funcția  $\sqrt[n]{x}$  este definită pe toată dreapta, în timp ce funcția  $x^{\frac{1}{n}}$  este definită doar pe semidreapta  $[0, +\infty)$ .

### 2. Puteri reale

Fie  $a > 0$  și  $x$  un număr real oarecare. Pentru a defini puterea  $a^x$  se procedează în felul următor:

Se ia un șir  $(r_n)$  de numere *raționale*, convergent către  $x$ . De exemplu, se poate lua ca șir  $(r_n)$  șirul fracțiilor zecimale care aproximează prin lipsă pe  $x$ , sau al celor care aproximează prin exces pe  $x$ .

Se consideră apoi șirul puterilor raționale  $(a^{r_n})$ .

Se demonstrează că:

1) Șirul  $(a^{r_n})$  este *convergent*.

2) Limita șirului  $(a^{r_n})$  nu depinde de șirul  $(r_n)$ , ci numai de  $x$ ; adică, dacă  $(r_n)$  este alt șir de numere raționale convergent către  $x$ , avem:

$$\lim a^{r_n} = \lim a^{r'_n}.$$

Limita comună a tuturor șirurilor  $(a^{r_n})$  cu  $r_n \rightarrow x$  se notează cu  $a^x$  și se numește puterea lui  $a$  cu exponentul  $x$ :

$$a^x = \lim_{r_n \rightarrow x} a^{r_n}.$$

De exemplu, dacă  $(r_n)$  este șirul fracțiilor zecimale care aproximează prin lipsă pe  $\sqrt{2}$  avem  $\sqrt[2]{2} = \lim 2^{r_n}$ .

Se arată apoi, pe baza acestei definiții, că puterile cu exponent real au toate proprietățile puterilor cu exponent rațional. În plus, se pot demonstra următoarele proprietăți de trecere la limită.

I) Dacă  $a > 0$  și  $x_n \rightarrow x$  atunci  $a^{x_n} \rightarrow a^x$ :

$$\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}$$

Reciproc:

II) Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$  și dacă  $a^{x_n} \rightarrow a^x$ , atunci  $x_n \rightarrow x$ .

Exemple.

$$1) \lim e^{\frac{1}{n}} = e^{\lim \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

$$2) \lim 2^{\frac{3n^2-n-1}{n^2+3}} = 2^3 = 8.$$

Folosind proprietățile logaritmilor de la numărul următor, se poate demonstra următoarea proprietate generală:

III) Dacă  $a_n \rightarrow a$  cu  $a_n > 0$  și  $a > 0$ , și dacă  $x_n \rightarrow x$ ,

atunci  $(a_n)^{x_n} \rightarrow a^x$ :

$$\lim (a_n)^{x_n} = (\lim a_n)^{\lim x_n}$$

**Limita unei puteri se distribuie și bazei și exponentului**

În particular:

IV) Dacă  $a_n \rightarrow a$ , cu  $a_n > 0$  și  $a > 0$ , atunci pentru orice număr real  $x$  avem  $(a_n)^x \rightarrow a^x$ :

$$\lim (a_n)^x = (\lim a_n)^x$$

În cazul cînd  $x > 0$ , proprietățile III) și IV) rămîn adevărate și dacă  $a_n \geq 0$  și  $a_n \rightarrow 0$ .

Luînd proprietatea IV)  $x = \frac{1}{k}$ , cu  $k \in \mathbb{N}$ , rezultă:

V) Dacă  $a_n \rightarrow a$ ,  $a_n \geq 0$ , atunci pentru orice număr natural  $k$  avem

$$\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

**Limita radicalului este egală cu radicalul limitei**

În cazul cînd indicele  $k$  este impar, proprietatea V) rămîne adevărată și dacă  $a_n < 0$  și  $a < 0$  (se aplică proprietatea V) șirului  $(-a_n)$ ).

Exemple.

$$1) \lim \left( \frac{2n}{n+1} \right)^\pi = \left( \lim \frac{2n}{n+1} \right)^\pi = 2^\pi.$$

$$2) \lim \left( \frac{2n}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^0 = 1.$$

$$3) \lim \sqrt[5]{\frac{32n^2+1}{n^2-7}} = \sqrt[5]{\lim \frac{32n^2+1}{n^2-7}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

### 3. Logaritmi

După cum se știe, dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ , logaritmul  $\log_a b$  se definește ca soluția unică a ecuației  $a^x = b$ . Existența acestei soluții este asigurată de următoarea teoremă:

Dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ , Ecuația

$$a^x = b$$

are o soluție reală și numai una.

Din definiția logaritmilor și din proprietățile puterilor rezultă următoarele proprietăți cunoscute:

$$1) \log_a a = 1;$$

$$2) \log_a 1 = 0;$$

$$3) \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b;$$

$$4) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$5) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$6) \log_a b^x = x \log_a b;$$

$$7) \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c.$$

În particular:

$$8) \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

În plus avem următoarea proprietate de trecere la limită:

$$9) \text{ Dacă } x_n \rightarrow x, (\text{cu } x_n > 0 \text{ și } x > 0), \text{ atunci } \log_a x_n \rightarrow \log_a x;$$

$$\lim (\log_a x_n) = \log_a (\lim x_n)$$

**Limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei**

Într-adevăr, să notăm  $y_n = \log_a x_n$  și  $y = \log_a x$ . Avem deci  $a^{y_n} = x_n$  și  $a^y = x$ .

Ipoteza  $x_n \rightarrow x$  se scrie acum  $a^{y_n} \rightarrow a^y$ , de unde, în baza proprietății II) de la numărul precedent, rezultă că  $y_n \rightarrow y$ .

Observații. 1° Logaritmi în baza  $e$  se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni* (de la numele matematicianului englez Napier). În loc de  $\log x$  se scrie  $\ln x$ .

2° Folosind proprietatea 9) a logaritmilor și proprietatea I) a puterilor, se poate demonstra acum proprietatea III) a puterilor:

$$(a_n \rightarrow a \text{ (} a_n > 0, a > 0 \text{)} \text{ și } x_n \rightarrow x) \Rightarrow a_n^{x_n} \rightarrow a^x$$

Într-adevăr:

$$(a_n)^{x_n} = e^{\ln(a_n)^{x_n}} = e^{x_n \ln a_n} \rightarrow e^{x \ln a} = e^{\ln a^x} = a^x.$$

Exemple.

$$1) \lim \lg \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lg \left( \lim \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1} \right) = \lg 10 = 1$$

$$2) \lim \ln \left( \frac{8n + 1}{n - 1} \right)^{\frac{n^2 - 3}{3n^2 + 1}} = \ln \left( 8^{\frac{1}{3}} \right) = \ln 2.$$

## § 10. Dreaptă încheiată

După cum se va arăta, anumite șiruri divergente au proprietăți asemănătoare proprietăților șirurilor convergente. Datorită acestei analogii convenim să introducem două simboluri noi,  $+\infty$  și  $-\infty$ , ca limite ale unor astfel de șiruri.

Mulțimea formată din toate numerele reale împreună cu  $+\infty$  și  $-\infty$  se numește *dreaptă încheiată* și se notează cu  $\bar{R}$ .

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele proprietăți ale șirurilor convergente și proprietățile asemănătoare ale șirurilor cu limită  $+\infty$  sau  $-\infty$ , impune adoptarea unor anumite convenții asupra acestor simboluri, cu privire la relația de ordine și la operațiile algebrice.

Aceste convenții stabilesc pentru  $+\infty$  și  $-\infty$  unele proprietăți asemănătoare cu cele ale numerelor reale; de aceea  $+\infty$  și  $-\infty$  se mai numesc *numere infinite*. Pentru a face o deosebire, numerele reale vor fi numite uneori *numere finite*.

## 1. Simbolul $+\infty$

Reamintim că șirurile convergente au fost definite prin proprietatea că în afara unor anumite intervale (vecinătățile limitei) se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Să considerăm acum șirul numerelor naturale

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Acest șir este divergent, dar are o proprietate asemănătoare cu aceea a șirurilor convergente și anume: în afara unor anumite intervale se află cel mult un număr finit de termeni ai acestui șir. Mai precis:

În afara fiecărei semidrepte  $(a, +\infty)$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului numerelor naturale.

Într-adevăr, oricare ar fi  $a$ , există un număr natural  $N > a$ ; deci pentru orice număr natural  $n \geq N$ , avem de asemenea  $n > a$ , adică  $n \in (a, +\infty)$ . În afara semidreptei  $(a, +\infty)$ , și anume la stînga ei, se află cel mult termenii  $1, 2, 3, \dots, N-1$ , în număr finit (fig. 38).

Datorită acestei analogii s-a convenit să se spună că șirul  $(n)$  al numerelor naturale are limită, iar acestei limite i s-a atribuit un simbol,  $+\infty$  (plus infinit); se scrie  $n \rightarrow +\infty$ .

S-a convenit ca semidreptele  $(a, +\infty)$  să fie numite *vecinătăți ale lui  $+\infty$* . Cu această denumire, proprietatea șirului numerelor naturale pusă în evidență mai sus se enunță astfel:

În afara fiecărei vecinătăți a lui  $+\infty$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(n)$ ; sau, ceea ce este același lucru:

Fiecare vecinătate a lui  $+\infty$  conține toți termenii șirului  $(n)$ , exceptînd un număr finit dintre ei.

În cazul altor șiruri, proprietatea aceasta se adoptă ca definiție:

**Definiția 1.** Se spune că un șir  $(a_n)$  are limita  $+\infty$ , dacă fiecare vecinătate a lui  $+\infty$  conține toți termenii șirului, exceptînd un număr finit dintre ei.

\*Se scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , sau  $\lim a_n = +\infty$ , sau  $a_n \rightarrow \infty$ .

Teoremei de convergență cu  $\varepsilon$  îi corespunde

**Teorema 1.**  $a_n \rightarrow +\infty$  dacă și numai dacă pentru fiecare număr  $\varepsilon > 0$  (oricît de mare), se poate găsi un rang  $n_\varepsilon$ , astfel încît, dacă  $n \geq n_\varepsilon$ , să avem:

$$a_n > \varepsilon.$$

Disponem și pentru șirurile cu limita  $+\infty$  de un criteriu asemănător criteriului majorării.

Fig. 38





**Criteriu.** Dacă  $a_n \geq b_n$  pentru orice  $n$  și  $\lim b_n = +\infty$ , atunci  $\lim a_n = +\infty$ .  
Pentru șirurile crescătoare avem următoarea proprietate:  
Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .

S-a adoptat convenția:  $a < +\infty$

oricare ar fi numărul real  $a$ . Folosind această convenție, deducem că termenii unui șir crescător și nemărginit sînt mai mici decît limita  $+\infty$  a șirului. Ținînd seama de teorema de convergență a șirurilor monotone, se poate da o formulare unitară asupra șirurilor crescătoare, fie mărginite, fie nemărginite, și anume:

Orice șir crescător are limită și limita sa este mai mare decît termenii șirului.

**Observație.** Din convenția de mai sus rezultă, în particular,  $0 < +\infty$ , ceea ce îndreptățește să se scrie  $\infty$  în loc de  $+\infty$ , după cum se scrie, de exemplu, 5 sau  $\frac{7}{3}$  în loc de  $+\frac{7}{3}$ .

Urmează că, în loc de  $x_n \rightarrow +\infty$ , se poate scrie  $x_n \rightarrow \infty$ , iar semidreptele  $(a, +\infty)$  și  $[a, +\infty)$  se pot scrie  $(a, \infty)$ , respectiv  $[a, \infty)$ .

### Exemple.

- 1) Dacă  $a > 1$ , atunci  $\lim a^n = \infty$ , deoarece șirul  $\{a^n\}$  este crescător și nemărginit.  
În particular,  $\lim 2^n = \infty$ ,  $\lim 10^n = \infty$ .
- 2) Pentru orice  $\alpha > 0$  avem  $\lim n^\alpha = \infty$ , deoarece șirul  $\{n^\alpha\}$  este crescător și nemărginit.  
Într-adevăr, șirul  $\{n^\alpha\}$  este evident crescător; luînd un număr rațional  $r$  cu  $0 < r < \alpha$ , avem  $n^r < n^\alpha$ ; șirul  $\{n^r\}$  este nemărginit, deci șirul  $\{n^\alpha\}$  este de asemenea nemărginit.  
În particular:  $\lim n^2 = \infty$ ,  $\lim n^3 = \infty$ ,  $\lim \sqrt{n} = \infty$ ,  $\lim \sqrt[3]{n} = \infty$ ,  $\lim n^\pi = \infty$ .

## 2. Simbolul $-\infty$

Să considerăm șirul numerelor întregi strict negative

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

Acest șir este divergent, dar are și el o proprietate asemănătoare cu aceea a șirurilor convergente și anume:

În afara fiecărei semidrepte  $(-\infty, a)$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Datorită acestei analogii s-a convenit să se spună că șirul  $(-n)$  are limită, iar acestei limite i s-a atribuit un simbol,  $-\infty$  (minus infinit).

S-a convenit ca semidreptele  $(-\infty, a)$  să fie numite *vecinătăți ale lui  $-\infty$* ; atunci, proprietatea de mai sus a șirului  $(-n)$  se formulează astfel:

În afara fiecărei vecinătăți a lui  $-\infty$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(-n)$ ; sau ceea ce este același lucru:

Fiecare vecinătate a lui  $-\infty$  conține toți termenii șirului  $(-n)$ , exceptînd un număr finit dintre ei.

În cazul altor șiruri, această proprietate se adoptă ca definiție.

**Definiția 2.** Se spune că un șir  $(a_n)$  are limita  $-\infty$ , dacă fiecare vecinătate a lui  $-\infty$  conține toți termenii șirului, exceptînd un număr finit dintre ei.

Se scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , sau  $\lim a_n = -\infty$ , sau  $a_n \rightarrow -\infty$ .

Comparînd definiția limitei unui șir convergent cu definițiile precedente, observăm că definiția limitei unui șir este aceeași, fie că limita este finită, fie că limita este infinită.

Pentru a distinge șirurile care au limită finită de cele care au limită infinită, vom numi în continuare șiruri convergente numai șirurile care au limită finită.

Teoremei de convergență cu  $\varepsilon$  îi corespunde

**Teorema 2.**  $a_n \rightarrow -\infty$  dacă și numai dacă, pentru fiecare număr  $\varepsilon > 0$  (oricît de mare), se poate găsi un rang  $n_\varepsilon$  astfel încît dacă  $n \geq n_\varepsilon$  să avem:

$$a_n < -\varepsilon.$$

Criteriului majorării îi corespunde următorul

**Criteriu.** Dacă  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n$  și  $\lim b_n = -\infty$ , atunci  $\lim a_n = -\infty$ .

Pentru șirurile descrescătoare avem următoarea proprietate:

Orice șir descrescător și nemărginit are limita  $-\infty$ .

S-a adoptat convenția:  $-\infty < a$

oricare ar fi numărul real  $a$ . Ținînd seama de teorema de convergență a șirurilor monotone se poate da o formulare unitară asupra șirurilor descrescătoare, fie mărginite, fie nemărginite, și anume:

Orice șir descrescător are limită, și limita este mai mică decît termenii șirului.

**Observații.** 1° Din convenția de mai sus rezultă  $-\infty < 0$ .

2° Deoarece  $-\infty < a$  și  $a < \infty$ , pentru a extinde proprietatea de tranzitivitate a relației de ordine și la numerele infinite, s-a adoptat convenția:

$$-\infty < \infty$$

### Exemple

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$ , deoarece  $-n^2 < -n$ .

- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[k]{n}) = -\infty$  ( $k$  natural), deoarece șirul  $-\sqrt[k]{1}, -\sqrt[k]{2}, -\sqrt[k]{3}, \dots, -\sqrt[k]{n}, \dots$

este descrescător și nemărginit.

3)  $\lim (-3^n) = -\infty$ , deoarece șirul

$$-3, -3^2, -3^3, \dots, -3^n, \dots$$

este descrescător și nemărginit.

### 3. Operații cu $+\infty$ și $-\infty$

#### a) Adunarea

Se poate demonstra următoarea proprietate:

1) Dacă șirul  $(a_n)$  este convergent și are limita  $a$ , iar șirul  $(b_n)$  are limita  $\infty$ , atunci șirul  $(a_n + b_n)$  are limita  $\infty$ .

*Exemplu.*

$$a_n = \frac{n-1}{n}, b_n = n, a_n + b_n = \frac{n^2 + n - 1}{n}. \text{ Avem } \lim a_n = 1, \lim b_n = \infty, \lim (a_n + b_n) = \infty.$$

S-a arătat că pentru două șiruri convergente limita sumei este egală cu suma limitelor. Pentru a putea afirma și în cazul proprietății de mai sus că limita sumei ( $\infty$ ) este egală cu suma limitelor ( $a + \infty$  sau  $\infty + a$ ), se adoptă convenția:

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$

(oricare ar fi numărul real  $a$ ).

Se pot demonstra, de asemenea, următoarele proprietăți:

- 2) Dacă  $\lim a_n = \infty$  și  $\lim b_n = \infty$ , atunci  $\lim (a_n + b_n) = \infty$ .
- 3) Dacă  $\lim a_n = a$  ( $a$  finit) și  $\lim b_n = -\infty$ , atunci  $\lim (a_n + b_n) = -\infty$ .
- 4) Dacă  $\lim a_n = -\infty$  și  $\lim b_n = -\infty$ , atunci  $\lim (a_n + b_n) = -\infty$ .

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că limita sumei este egală cu suma limitelor, s-au adoptat convențiile:

$$\infty + \infty = \infty$$

$$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

În loc de  $a + (-\infty)$  se scrie  $a - \infty$ ; iar în loc de  $-\infty + (-\infty)$  se scrie  $-\infty - \infty$ .

**Observație.** Nu se atribuie nici un sens operației  $\infty + (-\infty)$  (sau  $\infty - \infty$ ), deoarece, dacă  $\lim a_n = +\infty$  și  $\lim b_n = -\infty$ , despre șirul  $(a_n + b_n)$  nu se poate afirma nimic: în unele cazuri  $(a_n + b_n)$  este convergent, în alte cazuri are limita  $+\infty$  sau  $-\infty$ , iar în alte cazuri nu are limită.

*Exemplu.*

1) Fie  $a$  un număr real oarecare:

$$(a_n) : 1 + a, 2 + a, \dots, n + a, \dots, \lim a_n = +\infty.$$

$$(b_n) : -1, -2, \dots, -n, \dots, \lim b_n = -\infty,$$

$$(a_n + b_n) : a, \dots, a, \dots, \lim (a_n + b_n) = a.$$

$$2) (a_n) : 2, 4, \dots, 2n, \dots, \lim a_n = +\infty,$$

$$(b_n) : -1, -2, \dots, -n, \dots, \lim b_n = -\infty,$$

$$(a_n + b_n) : 1, 2, \dots, n, \dots, \lim (a_n + b_n) = +\infty.$$

$$3) (a_n) : 2, 2, 4, 4, \dots, 2n, 2n, \dots, \lim a_n = +\infty,$$

$$(b_n) : -1, -2, -3, -4, \dots, -2n + 1, -2n, \dots, \lim b_n = -\infty,$$

$$(a_n + b_n) : 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots \text{ nu are limită.}$$

Tinând seama de teorema asupra sumei a două șiruri convergente și de proprietățile 1) - 4) de mai sus, se poate da următoarea formulare unitară:

**Dacă șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă suma limitelor are sens, atunci șirul  $(a_n + b_n)$  are limită și limita sumei este egală cu suma limitelor.**

Cazul exceptat:  $\lim a_n = +\infty$  și  $\lim b_n = -\infty$ .

#### b) Produsul

Urmind aceeași cale ca la punctul a), pentru a putea afirma că limita produsului este egală cu produsul limitelor și în cazurile cînd unul sau ambele șiruri au limită infinită, s-au adoptat următoarele convenții:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$$

și

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$$

dacă  $a > 0$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$$

și

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$$

dacă  $a < 0$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

**Observație.** Operațiilor  $0 \cdot \infty$  și  $0 \cdot (-\infty)$  nu li se atribuie nici un sens, deoarece dacă  $\lim a_n = 0$  și  $\lim b_n = +\infty$  (sau  $\lim b_n = -\infty$ ), despre șirul  $(a_n b_n)$  nu se poate afirma nimic: în unele cazuri poate fi convergent, în alte cazuri poate avea limita  $+\infty$  sau  $-\infty$ , iar în alte cazuri poate să nu aibă limită.

*Exemplu.*

$$(a_n) : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}, \dots, \lim a_n = 0,$$

$$(b_n) : 2, 6, 4, \dots, 2n, 4n+2, \dots, \lim b_n = +\infty,$$

$$(a_n b_n) : 1, 2, 1, \dots, 1, 2, \dots \text{ nu are limită.}$$

Ca și la punctul a) se poate da următoarea formulare unitară:

**Dacă șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă produsul limitelor are sens, atunci șirul  $(a_n b_n)$  are limită și limita produsului este egală cu produsul limitelor.**

Cazuri exceptate:  $\lim a_n = 0$  și  $\lim b_n = \infty$ ;  $\lim a_n = 0$  și  $\lim b_n = -\infty$ .  
Fiecare din aceste cazuri se desemnează prin  $0, \infty$ .

### c) Cîtul

Ca și la punctele a), b), pentru a putea afirma că limita cîtului este egală cu cîtul limitelor și în cazul cînd limita numitorului este infinită, s-au adoptat următoarele convenții:

$$\boxed{\frac{a}{\infty} = 0} \quad \text{și} \quad \boxed{\frac{a}{-\infty} = 0}$$

oricare ar fi numărul real  $a$ .

**Observație.** În cazul cînd ambele limite sînt infinite, despre șirul cît  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  nu se poate afirma nimic. În unele cazuri, șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  poate fi convergent, în alte cazuri poate avea limita  $+\infty$  sau  $-\infty$ , iar în alte cazuri poate să nu aibă limită. De aceea se spune că operațiile  $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$  nu au sens.

### Exemplu.

$$(a_n) : 2, 2, 6, 4, \dots, 4n - 2, 2n, \dots, \lim a_n = +\infty,$$

$$(b_n) : 1, 2, 3, 4, \dots, 2n - 1, 2n, \dots, \lim b_n = +\infty,$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, \dots \text{ nu are limită.}$$

Reamintim că o altă operație fără sens este împărțirea cu 0 și că, în cazul cînd limita de la numitor este 0, șirul cît  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  poate să nu aibă limită.

Ca și la punctele a), b) se poate da următoarea formulare unitară:

**Dacă șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă raportul limitelor are sens, atunci șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  are limită, și limita cîtului este egală cu cîtul limitelor.**

Cazuri exceptate:  $\lim b_n = 0$ ;  $\lim a_n = \pm\infty$  și  $\lim b_n = \pm\infty$ , cazuri desemnate prin:  $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ , sau, pe scurt,  $\frac{\infty}{\infty}$ .

În ceea ce privește operația fără sens  $\frac{1}{0}$ , se pot face unele precizări:

1) Dacă  $a_n > 0$  și  $\lim a_n = 0$ , atunci  $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ .

Într-adevăr, fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , pentru numărul  $\epsilon' = \frac{1}{\epsilon}$  există un rang  $n_\epsilon$ , astfel încît, dacă  $n \geq n_\epsilon$ , atunci  $|a_n - 0| < \epsilon'$ , adică  $a_n = |a_n| < \frac{1}{\epsilon}$ ; așadar, pentru  $n \geq n_\epsilon = n_\epsilon'$  avem  $\frac{1}{a_n} > \epsilon$ , deci  $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ .

La fel se demonstrează propoziția următoare:

2) Dacă  $a_n < 0$  și  $\lim a_n = 0$ , atunci  $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$ .

Rezultă că, dacă  $\lim a_n = 0$ , atunci  $\lim |a_n| = 0$  și deci  $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$  (se aplică propoziția 1 șirului  $|a_n|$ ).

### d) Radicali

Se poate arăta că: dacă  $a_n \rightarrow \infty$ , atunci  $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \infty$ , oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}$ ; iar dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $\sqrt[2k-1]{a_n} \rightarrow -\infty$ , oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}$ .

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că limita radicalului este egală cu radicalul limitei, s-au adoptat convențiile:

$$\boxed{\sqrt[k]{\infty} = \infty} \quad \boxed{\sqrt[2k-1]{-\infty} = -\infty}$$

### e) Puteri

În § 4 s-a arătat că, dacă  $a_n \rightarrow a$  ( $a_n > 0, a > 0$ ) și  $b_n \rightarrow b$ , atunci:

$$a_n^{b_n} \rightarrow a^b.$$

Dacă, în plus,  $b > 0$ , atunci și în cazul  $a = 0$  avem:

$$a_n^{b_n} \rightarrow a^b = 0^b = 0.$$

Dacă însă  $a = 0$  și  $b = 0$ , despre șirul  $(a_n^{b_n})$  nu se poate afirma nimic, după cum se va arăta prin exemple. Operația  $0^0$  nu are sens.

Pentru ca proprietatea de mai sus să rămână adevărată și în cazul cînd una sau ambele limite sînt infinite, s-au adoptat convențiile:

$$\text{Dacă } a > 1: \boxed{a^\infty = \infty} \quad \text{și} \quad \boxed{a^{-\infty} = 0}$$

$$\text{Dacă } 0 < a < 1: \boxed{a^\infty = 0} \quad \text{și} \quad \boxed{a^{-\infty} = \infty}$$

$$\text{Dacă } a > 0: \boxed{\infty^a = \infty}$$

$$\text{Dacă } a < 0: \boxed{\infty^a = 0}$$

$$\boxed{0^\infty = 0} \quad \boxed{\infty^\infty = \infty} \quad \boxed{\infty^{-\infty} = 0}$$

Nu se acordă nici un sens operațiilor  $1^\infty, 0^0$  și  $\infty^0$ , deoarece, în aceste cazuri, despre șirul  $(a_n^{b_n})$  nu se poate afirma nimic. Uneori acest șir are limită finită sau  $+\infty$ , alteori nu are limită.

### Exemple.

Cazul  $1^\infty$ :  $a_n = e^{(-1)^n} \cdot \frac{1}{n}$ ,  $b_n = n$ ,  $a_n^{b_n} = e^{(-1)^n}$ , adică

$$\frac{1}{e}, e, \frac{1}{e}, e, \dots$$

Avem  $\lim a_n = e^0 = 1$ ,  $\lim b_n = \infty$ , dar şirul  $(a_n^{b_n})$  nu are limită.

Cazul  $0^0$ :  $a_n = e^{-n}$ ,  $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $a_n^{b_n} = e^{(-1)^{n+1}}$ , adică

$$e, \frac{1}{e}, e, \frac{1}{e}, \dots$$

Avem  $\lim a_n = e^{-\infty} = 0$ ,  $\lim b_n = 0$ , dar şirul  $(a_n^{b_n})$  nu are limită.

Cazul  $\infty^0$ :  $a_n = e^n$ ,  $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $a_n^{b_n} = e^{(-1)^n}$ , adică

$$\frac{1}{e}, e, \frac{1}{e}, e, \dots$$

Avem:  $\lim a_n = e^\infty = \infty$ ,  $\lim b_n = 0$ , dar şirul  $(a_n^{b_n})$  nu are limită.

Ca şi la punctele anterioare se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă  $a_n^{b_n}$  are sens pentru orice  $n$ , dacă  $a_n \rightarrow a$  şi  $b_n \rightarrow b$  ( $a$  şi  $b$  finite sau infinite) şi dacă  $a^b$  are sens, atunci şirul  $a_n^{b_n}$  are limita  $a^b$ .

Cazuri exceptate:

$\lim a_n = 1$  şi  $\lim b_n = \infty$ , sau  $\lim b_n = -\infty$  (cazul  $1^\infty$ ),

$\lim a_n = 0$  şi  $\lim b_n = 0$  (cazul  $0^0$ ),

$\lim a_n = \infty$  şi  $\lim b_n = 0$  (cazul  $\infty^0$ ).

### f) Logaritmi

Fie  $a > 1$ . Se poate arăta că: dacă  $x_n > 0$  şi  $x_n \rightarrow \infty$ , atunci  $\log_a x_n \rightarrow \infty$ , iar dacă  $x_n > 0$  şi  $x_n \rightarrow 0$ , atunci  $\log_a x_n \rightarrow -\infty$  (v. exere. 21 de la sfârşitul cap.).

Pentru a putea afirma şi în aceste cazuri că limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei, s-au adoptat convenţiile:

$$\boxed{\log_a \infty = \infty} \quad \boxed{\log_a 0 = -\infty} \quad (a > 1).$$

Dacă însă  $0 < a < 1$ , se adoptă următoarele convenţii:

$$\log_a \infty = -\infty \text{ şi } \log_a 0 = \infty$$

### Exemple.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2 - n + 1}{2n + 7} = \infty.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{0,5} \frac{n^2 + 7n - 1}{5n^2 - 2} = -\infty.$$

g) Tabloul operaţiilor fără sens (recapitulare)

pentru adunare:  $\infty - \infty$   
 pentru înmulţire:  $0 \cdot \infty$  şi  $0 \cdot (-\infty)$   
 pentru împărţire:  $\frac{a}{0}$  (în particula  $\frac{0}{0}$ ),  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$   
 pentru puteri:  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$

### 4. Aplicaţii

a) Fie şirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_{p-1} n + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_{q-1} n + B_q},$$

unde:  $p > 0$ ,  $q > 0$ ;  $A_0 \neq 0$ ,  $B_0 \neq 0$ ;

$$B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q \neq 0,$$

începînd de la un anumit  $n$ .

Ne propunem să calculăm  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Avem:

$$a_n = \frac{n^p \left( A_0 + \frac{A_1}{n} + \dots + \frac{A_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{A_p}{n^p} \right)}{n^q \left( B_0 + \frac{B_1}{n} + \dots + \frac{B_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{B_q}{n^q} \right)} = n^{p-q} \frac{A_0 + \frac{A_1}{n} + \dots + \frac{A_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{A_p}{n^p}}{B_0 + \frac{B_1}{n} + \dots + \frac{B_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{B_q}{n^q}}.$$

Dacă  $p = q$ , atunci  $n^{p-q} = 1$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ; deci  $\lim n^{p-q} = 1$ .

Dacă  $p > q$ , atunci  $p - q > 0$ ; deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-q} = \infty^{p-q} = \infty$ .

Dacă  $p < q$ , atunci  $q - p > 0$ ; deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{q-p}} = \frac{1}{\infty^{q-p}} = \frac{1}{\infty} = 0$ .

Rezultă:

$$\lim a_n = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0} \text{ dacă } p = q; \\ +\infty \text{ sau } -\infty \left( \text{după cum } \frac{A_0}{B_0} > 0, \text{ respectiv } \frac{A_0}{B_0} < 0 \right) \text{ dacă } p > q; \\ 0 \text{ dacă } p < q. \end{cases}$$

**Exemple.**

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7n + 1}{5n^3 + 9} = \frac{3}{5}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 2n - 1}{-n + 5} = -\infty.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5}{n^2 - n + 1} = 0.$$

În mod asemănător se procedează în următoarele trei exemple:

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt[n]{n} - 3\sqrt[n]{n+1}}{(5n-3)(n-2)} = 0.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[n]{n} - 1}{-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + 9} = -\infty.$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 - 3n^2 + 1}{5n^6 + 2n^3 + \sqrt{n} + 7} = \frac{1}{5}.$$

b) Știm că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Se arată că:

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e;$$

oricare ar fi șirul de numere reale  $x_n \rightarrow +\infty$  (v. exerc. 23 de la sfârșitul cap.).

**Exemple.**

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+5}\right)^{\frac{n+5}{2}} = e.$$

Într-adevăr, deoarece  $x_n = \frac{n+5}{2} \rightarrow +\infty$ , se poate aplica rezultatul anterior.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt[n]{n}-1}\right)^{\sqrt[n]{n}} = e.$$

Avem  $x_n = \frac{\sqrt[n]{n}-1}{3} \rightarrow +\infty$ . Utilizând un artificiu simplu, obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt[n]{n}-1}\right)^{\sqrt[n]{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt[n]{n}-1}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n}-1}{3}}^{\frac{3\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}-1}} = \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt[n]{n}-1}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n}-1}{3}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}-1}} = e^3 \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

Într-adevăr, să notăm  $y_n = -x_n$ . Obținem:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n-1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \\ &= \left(\frac{(y_n-1)+1}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n}. \end{aligned}$$

Dar  $y_n = -x_n \rightarrow +\infty$ ; deci  $y_n - 1 \rightarrow +\infty$ . Aplicând rezultatul de la b), obținem:

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1} \left(1 + \frac{1}{y_n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

**Exemplu.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2-1}{-n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2-1}{-n+2}\right)^{\frac{-n+2}{n^2-1}}^{\frac{n(n^2-1)}{-n+2}} = e^{-\infty} = 0.$$

d) Dacă  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , atunci  $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e$ .

Scriem:

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n > 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$$

Într-adevăr, să notăm  $y_n = \frac{1}{x_n} > 0$ . Deoarece  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , rezultă  $y_n \rightarrow +\infty$

(v. în acest §, nr. 3, pct. c).

Obținem deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \rightarrow e.$$

**Exemplu.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}+2}{2n+1}\right)^{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}+2}{2n+1}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{n}+2)}{2n+1}}^{\frac{2n+1}{\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{n}+2)}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

e) Dacă  $x_n < 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , atunci  $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e$ . Scriem:

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$$



Într-adevăr, să notăm  $y_n = \frac{1}{x_n} < 0$ . Deoarece  $x_n < 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , rezultă  $y_n \rightarrow -\infty$  (v. în acest §, nr. 3, pct. c).

Obținem deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \rightarrow e.$$

*Exemplu.*

$$\lim \left(1 + \frac{-1 - n^2}{n^3 \sqrt{n+4}}\right)^{n^2} = \lim \left(1 + \frac{-1 - n^2}{n^3 \sqrt{n+4}}\right)^{\frac{n^2 \sqrt{n+4}}{-1 - n^2}} = e^{-\infty} = 0.$$

## § 11. Serii

Până acum știm ce înseamnă o sumă de numere reale, oricât de multe, dar în număr finit. Nu știm însă ce înseamnă suma unei infinități de numere.

Vom arăta mai jos că în anumite cazuri sîntem conduși să atribuim un *sens* și sumei unui șir de numere.

### 1. Serii convergente

Convenim să numim *serie de numere* un șir de numere despărțite între ele prin semnul  $+$ :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

unde semnul  $+$  nu are deocamdată semnificația de adunare.

O serie se scrie prescurtat astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ sau } \sum_n a_n, \text{ sau, încă, } \sum a_n.$$

Numerele  $a_n$  se numesc *termenii* seriei.

Să considerăm *sumele parțiale* ale seriei:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\dots$$

Am obținut astfel șirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale. Acest șir poate avea limită, finită sau infinită, sau poate să nu aibă limită.

**Definiție.** Dacă șirul sumelor parțiale  $(S_n)$  are limită  $S$  (finită sau infinită), se spune că numărul  $S$  este *suma seriei*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și se scrie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Se spune că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este *convergentă*, dacă șirul sumelor parțiale  $(S_n)$  este convergent (adică dacă seria are sumă finită).

Dacă șirul sumelor parțiale este divergent, se spune că seria este *divergentă*.

Dacă șirul sumelor parțiale nu are limită, se spune că seria este *oscilantă*. În acest caz, seria nu are sumă și nu se atribuie nici un înțeles semnului  $+$  dintre termenii seriei.

Așadar, o serie este divergentă fie dacă are suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ , fie dacă nu are sumă (este oscilantă).

**Observație.** O serie cu *termeni pozitivi* are totdeauna sumă finită sau infinită. Într-adevăr, șirul sumelor parțiale este *crescător*, deci are totdeauna limită.

### 2. Exemple

1) *Seria*

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

este divergentă și are suma  $+\infty$ . Într-adevăr:

$$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n \rightarrow \infty$$

2) *Seria*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

este oscilantă. Într-adevăr

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

Șirul sumelor parțiale este 1, 0, 1, 0, ..., deci nu are limită.

3) *Seria geometrică* cu rația  $r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

este convergentă dacă  $-1 < r < 1$ . În acest caz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Într-adevăr, după cum se știe,

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Decarece  $|r| < 1$ , rezultă  $r^n \rightarrow 0$ ; deci:

$$\lim S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Urmează că seria este convergentă și are suma  $\frac{a}{1-r}$ .

În particular, suma unei serii geometrice cu rația  $\frac{1}{2}$  este egală cu dublul primului termen:

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{a}{2^n} + \dots = 2a.$$

De exemplu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1.$$

În general:

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+n}} + \dots = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

4) Dacă  $r \geq 1$ , atunci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \infty.$$

Într-adevăr, dacă  $r = 1$ , seria geometrică devine

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

iar dacă  $r > 1$ , avem  $r^n \rightarrow \infty$ , deci:

$$\lim S_n = \lim \frac{1-r^n}{1-r} = \lim \frac{r^n-1}{r-1} = \infty.$$

5) Dacă  $r \leq -1$ , seria geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

este oscilantă.

Într-adevăr, dacă  $r = -1$ , seria devine

$$-1 + 1 - 1 + 1 + \dots;$$

iar dacă  $r < -1$ , șirul  $(r^n)$  nu are limită, deci nici șirul  $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$  nu are limită.

6) Orice număr real  $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  scris ca fracție zecimală este suma unei serii convergente:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Într-adevăr, sumele parțiale  $S_n$  ale acestei serii sînt egale cu fracțiile zecimale  $x_n$  care aproximează prin lipsă numărul  $x$ :

$$S_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = x_n.$$

După cum se știe,  $x_n \rightarrow x$ , deci  $S_n \rightarrow x$ .

7) Folosind scrierea unui număr ca sumă a unei serii, se poate obține fracția generatoare a unei fracții zecimale periodice:

Dacă  $x = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$  este o fracție zecimală periodică, atunci:

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n - 1} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$$

De exemplu:

a) Dacă  $x = 0, (3)$ , atunci  $x = \frac{3}{9}$ .

Într-adevăr,  $x = 0,333\dots$ , deci:

$$x = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3}{10 - 1} = \frac{3}{9}.$$

deoarece  $x$  este suma unei serii geometrice cu rația  $r = 1/10$ .

b) Dacă  $x = 0, (16)$ , atunci  $x = \frac{16}{99}$ .

Într-adevăr,  $x = 0,1616\dots$ ,

deci:

$$x = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots = \frac{16}{10^2} + \frac{16}{10^4} + \dots = \frac{16/10^2}{1 - 1/10^2} = \frac{16}{10^2 - 1} = \frac{16}{99}.$$

În mod analog se tratează fracțiile zecimale periodice mixte:

$$c) 0,25(347) = \frac{25\,347 - 25}{99\,900}.$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} 0,25(347) &= \frac{25}{10^2} + \frac{347}{10^3} + \frac{347}{10^6} + \dots = \frac{25}{10^2} + \frac{347/10^3}{1 - 1/10^3} = \frac{25}{10^2} + \frac{1}{10^2} \frac{347}{10^3 - 1} = \\ &= \frac{1}{10^2} \left( 25 + \frac{347}{10^3 - 1} \right) = \frac{1}{10^2} \left( \frac{25\,347 - 25}{10^3 - 1} \right) = \frac{25\,347 - 25}{99\,900}. \end{aligned}$$

8) *Seria armonică*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

este divergentă (și are suma  $+\infty$ ).

Într-adevăr, șirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale este *crescător*. Vom arăta că acest șir este *nenăruit*, de unde va rezulta că  $\lim S_n = \infty$ . Pentru aceasta, fie  $\alpha > 0$  un număr *arbitrar*, și să arătăm că dacă alegem  $n > 2\alpha$ , atunci  $S_{2n} > \alpha$ . Să grupăm termenii sumei parțiale  $S_{2n}$  astfel:

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

În fiecare din cele  $n$  grupe, suma termenilor este mai mare decât  $\frac{1}{2}$ :

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ termeni}} = \frac{1}{2}.$$

Urmează că:

$$S_{2n} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ termeni}} = \frac{n}{2} > \alpha$$

9) Se demonstrează că *seria armonică generalizată*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$$

este *convergentă* dacă  $\alpha > 1$  și *divergentă* (avind suma  $+\infty$ ), dacă  $\alpha \leq 1$ .  
În particular:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \infty,$$

deoarece  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots < \infty,$$

deoarece  $\alpha = \frac{3}{2}$ .

10) Se demonstrează că *seria armonică alternată*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

este *convergentă*.

11) Se demonstrează că *seria*

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

este *convergentă* și are ca sumă numărul  $e$ .

## § 12. Aplicații în geometrie

(Facultativ)

În acest paragraf vom folosi șirurile pentru a preciza o serie de noțiuni din geometrie care au fost introduse în clasele anterioare, dar cărora nu li s-a putut da atunci o fundamentare riguroasă.

În cazul suprafețelor plane și al corpurilor vom da definiții *generale* pentru arie și volum. Folosind aceste definiții, vom demonstra binecunoscutele formule de calcul pentru: aria dreptunghiului cu laturi *reale*, aria triunghiului și aria cercului; volumul paralelipipedului cu muchii *reale*, volumul cilindriului și volumul conului.

De cele mai multe ori, stabilirea formulelor de calcul al ariilor și volumelor, pornind de la definițiile generale, este foarte laborioasă (de exemplu, pentru aria elipsei și volumul sferei). În astfel de cazuri este uneori mai avantajos să se utilizeze calculul integral.

Pentru curbe și suprafețe în spațiu nu vom da definiții generale ale lungimii sau ariei (asemenea definiții au un caracter destul de complex).

În schimb vom demonstra teoreme care să justifice definițiile cunoscute ale lungimii cercului și ariei laterale a cilindriului și a conului.

În sfârșit, folosind de asemenea șirurile, vom demonstra teorema lui Thales în cazul în care raportul segmentelor nu este rațional.

### 1. Lungimea cercului (circumferinței)

Lungimea unei linii poligonale (închisă sau nu) este suma lungimilor segmentelor sale. Plecând de la linii poligonale, se poate defini, printr-un procedeu de aproximare, lungimea unor linii curbă.

Folosind acest procedeu, vom defini mai jos lungimea cercului. Pentru aceasta să considerăm un poligon convex  $P$  înscris într-un cerc  $C$  (în tot ce urmează vom considera poligoane convexe care nu sînt situate în întregime de o parte a unui diametru al lui  $C$ ). Observăm că, pe măsură ce numărul laturilor crește, iar lungimea lor scade,  $P$  „se apropie ca formă” din ce în ce mai mult de  $C$ . În același timp vom demonstra că perimetrul  $p$  al lui  $P$  se apropie din ce în ce mai mult de un anumit număr real  $\lambda$ . Va fi deci natural să luăm prin definiție ca lungime a cercului  $C$

numărul  $\lambda$  de care perimetrul  $p$  se apropie pe măsură ce poligonul  $P$  se apropie de cerc.

Vom demonstra mai întâi o leamnă.

Fie  $(P_n)$  un șir de poligoane convexe înscrise în cercul  $C$ . Pentru fiecare  $n$ , fie:  $p_n$  perimetrul lui  $P_n$ ;  $L_n$  cea mai mare latură a lui  $P_n$ ;  $Q_n$  poligonul convex circumscris lui  $C$  având laturile tangente la cerc în virfurile lui  $P_n$ ;  $q_n$  perimetrul lui  $Q_n$ .

**Lemă.** Dacă  $L_n \rightarrow 0$  atunci  $q_n - p_n \rightarrow 0$ .

**Demonstrație.** Fie  $l = AB$  o latură oarecare a poligonului  $P_n$  (fig. 39).

Din triunghiurile asemenea  $OAA'$  și  $OAM$  rezultă:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}}.$$

Deoarece  $2AA' = AA' + A'B$ , iar  $2AM = AB$ , deducem:

$$AA' + A'B = AB \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}}.$$

Folosind inegalitatea  $l \leq L_n$ , rezultă:

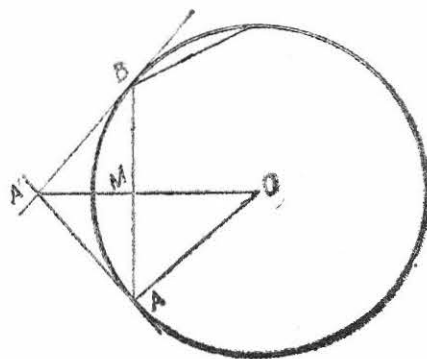
$$AA' + A'B \leq AB \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{L_n^2}{4}}}.$$

Însumind, în această inegalitate, pentru toate laturile  $AB$  ale poligonului  $P_n$ , se obține:

$$q_n \leq p_n \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{L_n^2}{4}}}.$$

Împărțind cu  $p_n$  și scăzând 1 în ambii membri, avem:

Fig. 39



$$\left| \frac{q_n}{p_n} - 1 \right| = \frac{q_n}{p_n} - 1 \leq \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{L_n^2}{4}}} - 1.$$

Deoarece  $L_n \rightarrow 0$ , rezultă:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{L_n^2}{4}}} - 1 \rightarrow 0,$$

deci, aplicînd criteriul majorării:

$$\frac{q_n}{p_n} \rightarrow 1.$$

Deoarece, de exemplu,  $p_n < q_1$  pentru fiecare  $n$ , șirul  $(p_n)$  este mărginit; deci (v. § 8, nr. 2, corolar 2):

$$q_n - p_n = p_n \left( \frac{q_n}{p_n} - 1 \right) \rightarrow 0.$$

**Teorema. 1.** Fie  $(P_n)$  un șir de poligoane convexe înscrise în cercul  $C$ . Pentru fiecare  $n$ , fie  $p_n$  perimetrul lui  $P_n$  și  $L_n$  cea mai mare latură a lui  $P_n$ .

Dacă  $L_n \rightarrow 0$ , atunci șirul perimetrelor  $(p_n)$  este convergent, iar limita sa depinde numai de cercul  $C$  (este aceeași, oricare ar fi șirul  $(P_n)$  cu  $L_n \rightarrow 0$ ).

**Demonstrație.** Vom parcurge mai multe etape.

a) Plecăm de la un poligon convex regulat particular  $P'_1$  înscris în cercul  $C$  (de exemplu putem pleca de la pătratul înscris în cerc). Prin dublarea succesivă a numărului de laturi obținem un șir  $(P'_n)$  de poligoane convexe regulate înscrise în  $C$ . După cum se știe, șirul  $(p'_n)$  al perimetrelor este crescător. Acest șir este, de asemenea, mărginit (de exemplu de perimetrul triunghiului circumscris). Urmează că șirul  $(p'_n)$  este convergent. Fie  $\lambda$  limita sa:

$$\lim p'_n = \lambda.$$

Vom demonstra că șirul  $(p_n)$  din enunțul teoremei tinde, de asemenea, către  $\lambda$ . Va rezulta că numărul  $\lambda$  este același, oricare ar fi șirul  $(P_n)$  cu  $L_n \rightarrow 0$ .

b) Pentru fiecare  $n$ , fie  $Q'_n$  poligonul asemenea cu  $P'_n$  circumscris cercului  $C$  și fie  $q'_n$  perimetrul său.

Avem, de asemenea,

$$\lim q'_n = \lambda.$$

Într-adevăr, notînd cu  $l'_n$  latura poligonului  $P'_n$  și observînd că numărul laturilor lui  $P'_n$  este superior lui  $n$ , rezultă:

$$l'_n \leq \frac{p'_n}{n} < \frac{q'_n}{n} \rightarrow 0,$$

deci  $l'_n \rightarrow 0$ . Conform lemei precedente, avem:

$$q'_n - p'_n \rightarrow 0,$$

de unde

$$q'_n = (q'_n - p'_n) + p'_n \rightarrow \lambda.$$

c) Dacă  $P$  este un poligon convex, de perimetru  $p$ , înscris în  $C$ , iar  $Q$  este un poligon convex, de perimetru  $q$ , circumscris lui  $C$ , atunci:

$$p \leq \lambda \leq q.$$

Într-adevăr, avem:

$$p \leq q'_n \text{ pentru orice } n,$$

de unde, prin trecere la limită,

$$p \leq \lim q_n^* = \lambda.$$

În mod analog,

$$p_n' \leq q, \text{ pentru orice } n,$$

deci:

$$\lambda = \lim p_n' \leq q.$$

d) Putem acum arăta că:

$$\lim p_n = \lambda.$$

Pentru fiecare poligon  $P_n$  din enunțul teoremei, fie  $Q_n$  poligonul circumscris lui  $C$  avînd laturile tangente la cerc în virfurile lui  $P_n$ , și fie  $q_n$  perimetrul său. Conform lemei precedente, avem  $q_n - p_n \rightarrow 0$ .

De asemenea,

$$p_n \leq \lambda \leq q_n, \text{ pentru fiecare } n.$$

Rezultă:

$$|p_n - \lambda| = \lambda - p_n \leq q_n - p_n \rightarrow 0,$$

de unde, aplicînd criteriul majorării, rezultă  $p_n \rightarrow \lambda$ .

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Teorema precedentă ne conduce la definiția următoare:

**Definiția 1.** Limita comună  $\lambda$  a tuturor șirurilor perimetrelor  $(p_n)$  de poligoane convexe  $P_n$  înscrise în cercul  $C$ , cu  $L_n \rightarrow 0$ , se numește lungime a cercului  $C$ .

Sîntem acum în măsură să demonstrăm proprietatea următoare, cunoscută din clasele anterioare.

**Teorema 2.** Raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său este constant (independent de cerc).

**Demonstrație.** Fie  $C$  și  $C'$  două cercuri cu razele  $R$ , respectiv  $R'$ . Fie  $(p_n)$  și  $(p_n')$  șirurile perimetrelor poligoanelor convexe regulate cu  $n$  laturi  $(P_n)$ , respectiv  $(P_n')$  înscrise în cercul  $C$ , respectiv  $C'$ . Fie, în sfîrșit,  $\lambda$  lungimea cercului  $C$  și  $\lambda'$  lungimea cercului  $C'$ .

$$\lambda = \lim p_n, \quad \lambda' = \lim p_n'.$$

Deoarece pentru fiecare  $n$  poligoanele  $P_n$  și  $P_n'$  sînt asemenea, perimetrele lor  $p_n$  și  $p_n'$  sînt proporționale cu razele  $R$  și  $R'$ :

$$\frac{p_n}{p_n'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'} = \frac{D}{D'},$$

trecînd la limită obținem:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{D}{D'},$$

deci:

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda'}{D'},$$

și teorema este demonstrată.

După cum se știe, raportul constant  $\frac{\lambda}{D}$  dintre lungimea  $\lambda$  a unui cerc și diametrul său  $D$  se notează cu  $\pi$ :

$$\pi = \frac{\lambda}{D}.$$

Urmează că lungimea  $\lambda$  a cercului de rază  $R$  este dată de egalitatea

$$\lambda = 2\pi R.$$

## 2. Aria suprafețelor plane

În clasele anterioare s-a definit aria  $s(S)$  a unui dreptunghi  $D$  cu laturi raționale  $a$  și  $b$  prin egalitatea:

$$s(D) = a b.$$

Fie acum un număr finit de dreptunghiuri  $D_1, D_2, \dots, D_n$  cu laturi raționale, care au în comun două cîte două cel mult cîte o latură (fig. 40). Definim aria reuniunii

$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$  a acestor dreptunghiuri prin egalitatea:

$$s(D) = s(D_1) + s(D_2) + \dots + s(D_n).$$

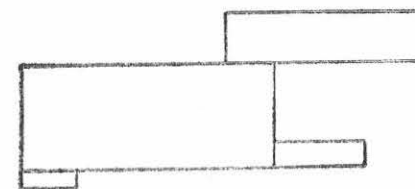
Plecînd de la clasa reuniunilor finite de dreptunghiuri cu laturi raționale, putem să atribuim arie și altor mulțimi plane *mărginite*. (O mulțime plană este mărginită dacă poate fi cuprinsă într-un dreptunghi.) În particular vom atribui arie dreptunghiurilor, triunghiurilor, poligoanelor cu laturi reale oarecare și cercului (discului circular).

**Definiția 2.** Se spune că o mulțime mărginită  $M$  din plan are arie, dacă există două șiruri  $(P_n)$  și  $(Q_n)$ , de reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturi raționale, astfel încît să fie îndeplinite următoarele două condiții:

1)  $P_n$  sînt conținute în  $M$ , iar  $Q_n$  conțin pe  $M$ :

$$P_n \subset M \subset Q_n;$$

Fig. 40





2) șirurile ariilor  $s(P_n)$  și  $s(Q_n)$  au limită comună.

Această limită comună se numește aria mulțimii  $M$  și se notează  $s(M)$ :

$$s(M) = \lim s(P_n) = \lim s(Q_n).$$

Mulțimile plane care au arie în sensul definiției precedente se numesc *mulțimi măsurabile* (în sensul lui) *Jordan*.

**Observații.** 1° Definiția ariei  $s(M)$  nu depinde de șirurile  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  de poligoane ci numai de mulțimea  $M$ . Mai precis: dacă  $(P'_n)$  și  $(Q'_n)$  sînt alte două șiruri de poligoane care îndeplinesc condițiile din definiție, atunci:

$$s(M) = \lim s(P'_n) = \lim s(Q'_n).$$

Într-adevăr,  $P'_n \subset M \subset Q'_n$ , deci  $s(P'_n) \leq s(Q'_n)$ ; trecînd la limită, obținem:

$$\lim s(P'_n) \leq \lim s(Q'_n) = s(M).$$

De asemenea  $P_n \subset M \subset Q_n$ , deci  $s(P_n) \leq s(Q_n)$ ; de unde, trecînd la limită:

$$s(M) = \lim s(P_n) \leq s(Q_n).$$

Urmează că:

$$s(M) \leq \lim s(Q'_n) = \lim s(P'_n) \leq s(M),$$

deci:

$$s(M) = \lim s(P'_n) = \lim s(Q'_n).$$

2° Există mulțimi mărginite care nu au arie în sensul lui *Jordan* (de exemplu, mulțimea punctelor  $(x, y)$  din plan care au ambele coordonate *raționale* cuprinse între 0 și 1).

3° Se poate demonstra că dacă două mulțimi  $M$  și  $N$  au arie, atunci reuniunea lor  $M \cup N$  și diferența lor  $M \setminus N$  au de asemenea arie.

Dacă  $M$  și  $N$  sînt disjuncte,  $M \cap N = \emptyset$ , atunci:

$$s(M \cup N) = s(M) + s(N).$$

Dacă  $N$  este conținută în  $M$ ,  $N \subset M$ , atunci:

$$s(N) \leq s(M) \text{ și } s(M \setminus N) = s(M) - s(N).$$

**Teorema 3.** Orice dreptunghi  $D$  cu laturile  $a$  și  $b$  are arie și aria sa  $s(D)$  este dată de egalitatea:

$$s(D) = ab.$$

**Demonstrație.** Fie  $(a_n)$  și  $(a'_n)$  două șiruri de numere *raționale* astfel încît:

$$a_n \leq a \leq a'_n \text{ și } \lim a_n = \lim a'_n = a.$$

Fie de asemenea  $(b_n)$  și  $(b'_n)$  două șiruri de numere *raționale* astfel încît

$$b_n \leq b \leq b'_n \text{ și } \lim b_n = \lim b'_n = b.$$

Pentru fiecare  $n$  să considerăm dreptunghiul  $D_n$  cu laturile  $a_n$  și  $b_n$ , și dreptunghiul  $D'_n$  cu laturile  $a'_n$  și  $b'_n$  (fig. 41). Avem:

$$D_n \subset D \subset D'_n$$

și:

$$s(D_n) = a_n b_n \rightarrow ab, \quad s(D'_n) = a'_n b'_n \rightarrow ab,$$

deci:

$$\lim s(D_n) = \lim s(D'_n) = ab.$$

Urmează că dreptunghiul  $D$  are arie și aria sa este dată de egalitatea:

$$s(D) = \lim s(D_n) = \lim s(D'_n) = ab.$$

**Observație.** Urmează, în particular, că un segment de dreaptă are arie nulă.

Plecînd acum de la mulțimi care au arie și repetînd procedeul indicat în definiția anterioară, nu obținem mulțimi noi, ci tot mulțimi care au arie. Altfel spus, în definiția precedentă se pot lua mulțimi care au arie, în locul poligoanelor  $P_n$  și  $Q_n$ :

**Teorema 4.** Fie  $A$  o mulțime mărginită. Dacă există două șiruri  $(M_n)$  și  $(N_n)$  de mulțimi care au arie și care îndeplinesc următoarele condiții:

1) mulțimile  $M_n$  sînt conținute în  $A$ , iar mulțimile  $N_n$  conțin pe  $A$ :

$$M_n \subset A \subset N_n;$$

2) Șirurile ariilor  $s(M_n)$  și  $s(N_n)$  au limită comună; atunci mulțimea  $A$  are arie și

$$s(A) = \lim s(M_n) = \lim s(N_n).$$

**Demonstrație.** Mulțimea  $M_n$  avînd arie, există o reuniune finită  $P_n \subset M_n$  de dreptunghiuri cu laturi raționale cu aria cît dorim de apropiată de aria mulțimii  $M_n$ , de exemplu:

$$s(M_n) - s(P_n) < \frac{1}{n}.$$

De asemenea, mulțimea  $N_n$  avînd arie, există o reuniune finită  $Q_n \supset N_n$  de dreptunghiuri cu laturi raționale, astfel încît:

$$s(Q_n) - s(N_n) < \frac{1}{n}.$$

Urmează că:

$$P_n \subset A \subset Q_n.$$

Folosind criteriul majorării, din inegalitățile precedente deducem:

$$s(M_n) - s(P_n) \rightarrow 0, \quad s(Q_n) - s(N_n) \rightarrow 0.$$

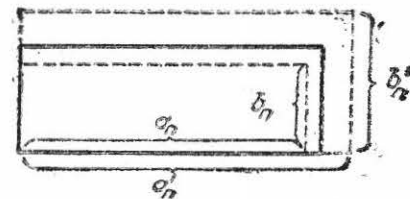


Fig. 41

Dar:

$$s(P_n) = s(M_n) - (s(M_n) - s(P_n)),$$

$$s(Q_n) = (s(Q_n) - s(N_n)) + s(N_n).$$

Trecînd la limită în aceste egalități, deducem:

$$\lim s(P_n) = \lim s(M_n),$$

$$\lim s(Q_n) = \lim s(N_n),$$

de unde:

$$\lim s(P_n) = \lim s(Q_n).$$

Așadar, șirurile  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  îndeplinesc cele două condiții din definiția 2. Urmează că mulțimea  $A$  are arie și că:

$$s(A) = \lim s(P_n) = \lim s(Q_n),$$

deci:

$$s(A) = \lim s(M_n) = \lim s(N_n);$$

și teorema este demonstrată.

Aplicînd teorema precedentă, vom determina acum aria triunghiului, folosind reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturi *reale*.

**Teorema 5.** Orice triunghi  $T$  cu baza  $b$  și înălțimea  $I$  are arie, iar aria sa este dată de egalitatea:

$$s(T) = \frac{1}{2} b I.$$

**Demonstrație.** Vom presupune mai întîi că triunghiul  $T$  este dreptunghic (fig. 42). Pentru fiecare  $n$  să împărțim baza în  $n$  intervale egale, de lungime  $\frac{b}{n}$ , și pe fiecare interval, ca bază, să construim un dreptunghi ca în figura 42. Să notăm cu  $P_n$  reuniunea celor  $n$  dreptunghiuri și cu  $s_n$  aria lui  $P_n$ .

Pe fiecare din cele  $n$  intervale, ca baze, să construim apoi dreptunghiuri ca în figura 43. Să notăm cu  $Q_n$  reuniunea lor și cu  $S_n$  aria lui  $Q_n$ .

Avem:

$$P_n \subset T \subset Q_n.$$

Să remarcăm (fig. 44) că dreptunghiul cu baza  $b$  și înălțimea  $I$  este reuniunea lui  $P_n$  cu mulțimea  $Q_n$  a cărui arie este egală cu cea a lui  $Q_n$ :

$$s_n + S_n = bI.$$

Să remarcăm apoi (fig. 45) că diferența dintre  $Q_n$  și  $P_n$  este reuniunea a  $n$  dreptunghiuri care au bază egală  $\frac{b}{n}$ , iar ca înălțime  $\frac{I}{n}$ , deci:

$$S_n - s_n = n \frac{b}{n} \cdot \frac{I}{n} = \frac{1}{n} b I.$$

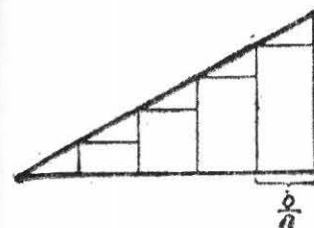


Fig. 42

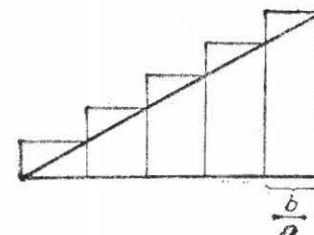


Fig. 43

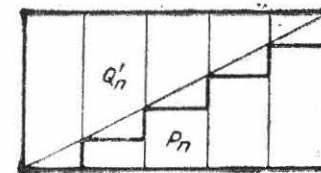


Fig. 44

Urmează că:

$$s_n = \frac{1}{2} \left( bI - \frac{1}{n} bI \right),$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left( bI + \frac{1}{n} bI \right).$$

deci:

$$\lim s_n = \lim S_n = \frac{bI}{2}.$$

Rezultă că triunghiul  $T$  are arie și că aria sa este  $\frac{bI}{2}$ .

Să presupunem acum că  $T$  este un triunghi oarecare (fig. 46). Ducînd înălțimea, triunghiul  $T$  se descompune în două triunghiuri dreptunghice cu înălțimea comună  $I$  și bazele  $b_1$  și  $b_2$  cu  $b_1 + b_2 = b$ .

Urmează că  $T$  are arie și că

$$s(T) = s(T_1) + s(T_2) = \frac{1}{2} b_1 I + \frac{1}{2} b_2 I = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) I = \frac{1}{2} b I.$$

**Corolar.** Orice poligon are arie.

Într-adevăr, un poligon se poate descompune într-un număr finit de triunghiuri.

**Teorema 6.** Orice cerc  $C$  de rază  $R$  are arie, egală cu  $\pi R^2$ .

**Demonstrație.** Pentru fiecare număr natural  $n \geq 3$  să considerăm poligonul regulat  $P_n$  cu  $n$  laturi înscris în cerc și poligonul regulat  $Q_n$  cu  $n$  laturi circumscris cercului.

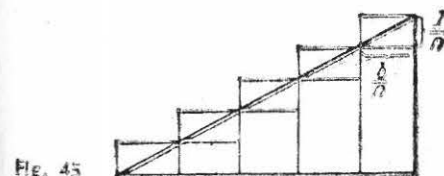


Fig. 45

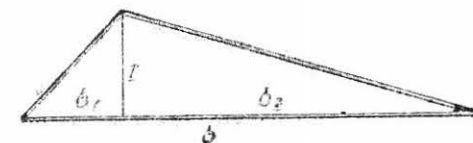


Fig. 46

Să notăm cu  $s(P_n)$  și  $s(Q_n)$  ariile poligoanelor  $P_n$ , respectiv  $Q_n$ . Avem;

$$P_n \subset C \subset Q_n.$$

Rămâne să arătăm că:

$$\lim s(P_n) = \lim s(Q_n) = \pi R^2,$$

de unde va rezulta, în baza teoremei 4, că cercul are arie și că aria sa este egală cu  $\pi R^2$ .

Să observăm mai întâi că apotema  $a_n$  a poligonului  $P_n$  este dată de egalitatea:

$$a_n = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} l_n^2}.$$

Dacă notăm cu  $p_n$  perimetrul poligonului  $P_n$ , atunci aria sa este:

$$s(P_n) = \frac{1}{2} p_n a_n = \frac{1}{2} p_n \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} l_n^2}.$$

Deoarece  $l_n \rightarrow 0$  și  $p_n \rightarrow \lambda = 2\pi R$ , deducem că:

$$\lim s(P_n) = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Apotema poligonului circumscris  $Q_n$  este  $R$ .

Notind cu  $q_n$  perimetrul lui  $Q_n$ , aria sa este:

$$s(Q_n) = \frac{1}{2} q_n R.$$

Deoarece  $q_n \rightarrow \lambda = 2\pi R$ , deducem că:

$$\lim s(Q_n) = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Așadar

$$\lim s(P_n) = \lim s(Q_n) = \pi R^2$$

și teorema este demonstrată.

### 3. Volumul corpurilor în spațiu

Teoria volumului corpurilor în spațiu este analogă teoriei ariei suprafețelor plane.

Se pleacă de la un paralelipiped dreptunghic  $P$  cu muchiile raționale  $a, b, c$ , al cărui volum s-a definit în clasele anterioare prin egalitatea:

$$v(P) = abc.$$

Dacă  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sînt paralelipede dreptunghice cu muchiile raționale, care au în comun două cîte două cel mult o față laterală, volumul reuniunii

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i \text{ se definește prin egalitatea:}$$

$$v(P) = v(P_1) + v(P_2) + \dots + v(P_n).$$

Pentru a defini volumul altor corpuri mărginite (corpuri care pot fi cuprinse în paralelipede) se adoptă

**Definiția 3.** Se spune că un corp mărginit  $M$  din spațiu are volum, dacă există două șiruri  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  de reuniuni finite de paralelipede dreptunghice cu muchii raționale, astfel încît să fie îndeplinite următoarele două condiții:

$$1) P_n \subset M \subset Q_n;$$

$$2) \lim v(P_n) = \lim v(Q_n).$$

**Limita comună se numește volumul corpului  $M$  și se notează  $v(M)$ :**

$$v(M) = \lim v(P_n) = \lim v(Q_n).$$

Mulțimile din spațiu care au volum în sensul acestei definiții se numesc *mulțimi măsurabile (în sensul lui) Jordan*.

Se poate demonstra, ca și pentru arii, că definiția volumului  $v(M)$  este independentă de șirurile  $(P_n)$  și  $(Q_n)$ .

Se poate demonstra, de asemenea, că dacă  $M$  și  $N$  au volum atunci  $M \cup N$  și  $M \setminus N$  au volum și că:

$$v(M \cup N) = v(M) + v(N), \text{ dacă } M \cap N = \emptyset;$$

$$v(N) \leq v(M) \text{ și } v(M \setminus N) = v(M) - v(N), \text{ dacă } N \subset M.$$

Folosind definiția precedentă, se poate demonstra că un paralelipiped drept  $P$  cu laturile reale  $a, b, c$ , are volum, iar volumul său este dat de egalitatea:

$$v(P) = abc.$$

Volumul se poate defini și cu ajutorul altor corpuri care au volum (nu neapărat paralelipede cu laturi raționale):

**Teorema 7.** Fie  $A$  un corp mărginit. Dacă există două șiruri  $(M_n)$  și  $(N_n)$  de corpuri care au volum, astfel încît:

$$1) M_n \subset A \subset N_n,$$

$$2) \lim v(M_n) = \lim v(N_n),$$

atunci corpul  $A$  are volum și

$$v(A) = \lim v(M_n) = \lim v(N_n).$$

Demonstrația este aceeași ca a teoremei 4 asupra ariilor.

Se poate demonstra, de asemenea, că orice poliedru (corp mărginit de fețe poligonale) are volum. Folosind acum teorema 7, care permite aproximarea cu mulțimi oarecare care au volum, în particular cu poliedre, vom demonstra că cilindrul și conul au volum.

**Teorema 8.** Orice cilindru circular drept  $C$  de rază  $R$  și înălțime  $I$  are volum, egal cu  $\pi R^2 I$ .

**Demonstrație.** Pentru fiecare număr natural  $n \geq 3$  să considerăm prisma  $P_n$  a cărei înălțime este  $I$  și a cărei bază este poligonul regulat cu  $n$  laturi înscris în cercul de bază al cilindrului; dacă notăm cu  $s_n$  aria bazei acestei prisme, volumul prisme este:

$$v(P_n) = s_n I.$$

Să considerăm acum și prisma  $Q_n$  a cărei înălțime este  $I$  și a cărei bază este poligonul regulat cu  $n$  laturi circumscris cercului de bază al cilindrului; dacă notăm cu  $S_n$  aria bazei prisme  $Q_n$ , volumul său este:

$$v(Q_n) = S_n I.$$

Avem  $P_n \subset C \subset Q_n$ . Pe de altă parte, șirurile ariilor  $(s_n)$  și  $(S_n)$  tind către aria cercului de bază al cilindrului:

$$\lim s_n = \lim S_n = \pi R^2.$$

Urmează că:

$$\lim v(P_n) = \lim s_n I = \pi R^2 I$$

și:

$$\lim v(Q_n) = \lim S_n I = \pi R^2 I$$

și teorema este demonstrată.

**Teorema 9.** Orice con circular drept  $C$  de rază  $R$  și înălțime  $I$  are volum, egal cu  $\frac{1}{3} \pi R^2 I$ .

**Demonstrație.** Se procedează ca în teorema precedentă, luind în loc de prisme, piramide  $P_n$  și  $Q_n$  cu înălțimea  $I$  și aria bazei  $s_n$ , respectiv  $S_n$ .

Urmează că:

$$P_n \subset C \subset Q_n$$

și:

$$v(P_n) = \frac{1}{3} s_n I, \quad v(Q_n) = \frac{1}{3} S_n I,$$

de unde:

$$\lim v(P_n) = \lim v(Q_n) = \frac{1}{3} \pi R^2 I.$$

#### 4. Aria laterală a cilindrului și a conului

Aria laterală a unei suprafețe poliedrale (închisă sau nu) este suma ariilor fețelor sale. Plecând de la poliedre, se poate defini — printr-un procedeu de aproximare — aria unor suprafețe curbe. Folosind acest procedeu, vom defini mai jos aria laterală a cilindrului și a conului.

**Teorema 10.** Fie  $C$  un cilindru circular drept cu raza bazei  $R$  și generatoarea  $G$ . Pentru fiecare număr natural  $n \geq 3$  fie  $P_n$  prisma cu înălțimea  $G$  și cu baza un poligon regulat cu  $n$  laturi înscris în cercul de bază al cilindrului și fie  $\sigma_n$  aria laterală a prisme  $P_n$ . Atunci:

$$\lim \sigma_n = 2\pi R G.$$

**Demonstrație.** Dacă pentru fiecare  $n \geq 3$  notăm cu  $p_n$  perimetrul poligonului de bază al prisme  $P_n$ , atunci aria laterală  $\sigma_n$  a prisme  $P_n$  este dată de egalitatea:

$$\sigma_n = p_n G.$$

După cum se știe, șirul  $(p_n)$  tinde către lungimea cercului, deci

$$\lim \sigma_n = \lim p_n G = 2\pi R G.$$

Teorema precedentă ne conduce la

**Definiția 4.** Aria laterală a cilindrului circular drept de rază  $R$  și generatoare  $G$  este  $2\pi R G$ .

**Teorema II.** Fie  $C$  un con circular drept cu vârful în  $O$ , de rază  $R$  și de generatoare  $G$ . Pentru fiecare  $n \geq 3$  fie  $P_n$  piramida cu vârful în  $O$  și baza un poligon regulat cu  $n$  laturi înscris în cercul de bază al conului, și fie  $\sigma_n$  aria laterală a piramidei  $P_n$ . Atunci:

$$\lim \sigma_n = \pi R G.$$

**Demonstrație.** Pentru fiecare piramidă  $P_n$  notăm cu  $l_n$  latura poligonului de bază, cu  $p_n$  perimetrul acestui poligon și cu  $A_n$  apotema piramidei. Atunci

$$A_n = \sqrt{G^2 - \frac{l_n^2}{4}}$$

și cum  $l_n \rightarrow 0$ , rezultă că:

$$\lim A_n = G.$$

Aria laterală a piramidei  $P_n$  este:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} p_n A_n,$$

Deoarece șirul perimetrelor  $(p_n)$  tinde către lungimea  $2\pi R$  a cercului de bază, rezultă:

$$\lim \sigma_n = \frac{1}{2} \lim p_n \cdot \lim A_n = \frac{1}{2} 2\pi R G = \pi R G.$$

Teorema precedentă ne conduce la

**Definiția 5.** Aria laterală a conului circular drept de rază  $R$  și generatoare  $G$  este  $\pi R G$ .

## 5. Teorema lui Thales

**Teorema 12.** Fie  $ABC$  un triunghi,  $D$  un punct pe latura  $AB$  și  $E$  punctul determinat pe latura  $AC$  de paralela prin  $D$  la  $BC$  (fig. 47). Atunci:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

**Demonstrație.** Teorema a fost demonstrată în clasele anterioare în cazul cînd raportul  $\frac{AD}{DB}$  este rațional sau, ceea ce este același lucru, în cazul cînd raportul  $\frac{AD}{AB}$  este rațional.

Să presupunem că raportul  $\frac{AD}{AB} = \alpha$  este un număr real,  $0 < \alpha < 1$ . Fie  $(r_n)$  și  $(s_n)$  două șiruri de numere raționale convergente către  $\alpha$ :

$$\lim r_n = \alpha = \lim s_n,$$

astfel încît:

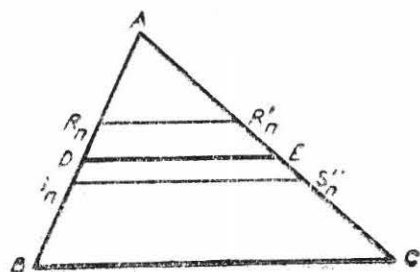
$$0 < r_n \leq \alpha \leq s_n < 1, \text{ pentru orice } n.$$

De exemplu, putem alege  $r_n$  și  $s_n$  fracțiile zecimale care aproximează pe  $\alpha$  prin lipsă respectiv prin exces.

Să notăm cu  $R_n$  și  $S_n$  punctele de pe latura  $AB$  astfel încît:

$$\frac{AR_n}{AB} = r_n \text{ și } \frac{AS_n}{AB} = s_n.$$

Fig. 47



Ducînd paralele la  $BC$  prin punctele  $R_n$  și  $S_n$  obținem pe latura  $AC$ , respectiv punctele  $R'_n$  și  $S'_n$ .

Conform teoremei lui Thales pentru cazul rațional, avem:

$$\frac{AR'_n}{AC} = \frac{AR_n}{AB} = r_n \text{ și } \frac{AS'_n}{AC} = \frac{AS_n}{AB} = s_n.$$

Dar:

$$AR'_n \leq AE \leq AS'_n,$$

deci:

$$\frac{AR'_n}{AC} \leq \frac{AE}{AC} \leq \frac{AS'_n}{AC},$$

adică:

$$r_n \leq \frac{AE}{AC} \leq s_n.$$

Trecînd la limită în aceste inegalități, obținem:

$$\alpha \leq \frac{AE}{AC} \leq \alpha,$$

adică:

$$\frac{AE}{AC} = \alpha = \frac{AD}{AB}.$$

Folosind proprietățile proporțiilor, din egalitatea demonstrată rezultă:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

## Exerciții

1) Să se scrie primii cinci termeni ai fiecăruia din șirurile date mai jos prin termenul general:

a)  $a_n = \frac{n-2}{2n+1}$ ; b)  $a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ ; c)  $a_n = \frac{1}{n!}$ ;

d)  $a_n = \frac{2n-3}{(n-1)!}$ ; e)  $a_n = \frac{n^2+2n}{2n!}$ ; f)  $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{(2n)!}$ .

2) Să se determine termenul general al fiecăruia din șirurile de mai jos:

a) 1, 3, 7, 15, 31, ...;

b)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots$ ;

c)  $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ ;

d)  $\frac{2}{1 \cdot 3}, \frac{4}{3 \cdot 5}, \frac{6}{5 \cdot 7}, \frac{8}{7 \cdot 9}, \dots$ ;

e)  $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{13}{24}, \frac{17}{32}, \dots$ ;

f)  $0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{16}, -\frac{9}{25}, \frac{18}{36}, \dots$ ;

g)  $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots$

3) Să se demonstreze că următoarele șiruri sînt monotone și mărginite:

a)  $a_n = -\frac{3n+1}{7n}$ ; b)  $a_n = \frac{\alpha n}{n+1}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ); c)  $a_n = \frac{\alpha n}{\beta n+1}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  $\beta \geq 0$ ).

4) Utilizînd definiția cu  $\varepsilon$  a limitei unui șir, să se demonstreze că:

a)  $\lim \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$ ; b)  $\lim \frac{n^2}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$ ; c)  $\lim \frac{2n+(-2)^n}{3n} = 0$ .



5) Să se stabilească dacă șirurile următoare sînt convergente și, în caz afirmativ, să se determine limita lor:

a)  $a_n = \sin n\pi$ ; b)  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ; c)  $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ ;

d)  $a_n = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$ ; e)  $a_n = \cos \cdot n\pi$ ; f)  $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ ;

g)  $a_n = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ; h)  $a_n = \cos 2n\pi$ ; i)  $a_n = \cos \cdot (2n+1)\pi$ .

6) Să se demonstreze că următoarele șiruri au limita 0:

a)  $a_n = \frac{1}{1+2^n}$ ; b)  $a_n = \frac{1}{\alpha + \beta^n}$  ( $\alpha \in R$ ,  $\beta > 1$ );

c)  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n+7}$ ; d)  $a_n = \sin \frac{\alpha}{n}$  ( $\alpha \in R$ );

e)  $a_n = \cos \frac{\alpha}{n} - 1$ , ( $\alpha \in R$ ); f)  $a_n = \frac{1+10^{2n}}{10^{3n}}$ ; g)  $a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n}{2^{2n}}$ ;

h)  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n}$ ; i)  $a_n = \frac{2^n}{n!}$ ; j)  $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ , ( $\alpha > 0$ ).

7) Fie șirul  $(a_n)$  definit în modul următor:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ , ...,  $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$ , ( $n \geq 3$ ).

Să se demonstreze prin inducție completă că oricare ar fi  $n \geq 2$  are loc egalitatea:

$$a_n = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right).$$

Să se demonstreze apoi utilizînd criteriul majorării că  $\lim a_n = \frac{2}{3}$ .

Să se determine limita următoarelor șiruri:

8) a)  $a_n = \frac{1}{2^n} + (0,05)^n - 3$ ; b)  $a_n = \cos \frac{2}{n} - 3$ ;

c)  $a_n = 5 \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$ ; d)  $a_n = \frac{\alpha^n}{2^n(n+1)}$ , ( $\alpha \in R$ );

e)  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{3n} \cos^2 \frac{\alpha}{n}$ , ( $\alpha \in R$ ); f)  $a_n = \frac{3\alpha^n + 4}{2^{2n} - 1}$ , ( $\alpha, \beta \in (0,1)$ ).

9) a)  $a_n = \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1}$ ; b)  $a_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$ ; c)  $a_n = \frac{2^n + 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}{3^n + 3 \cdot 4^n + 7 \cdot 5^n}$ ;

d)  $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}$ , ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ); e)  $a_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^n}$ , ( $\alpha > 0$ );

f)  $a_n = \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha^n + \alpha^{-n}}$ , ( $\alpha > 0$ ); g)  $a_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$ , ( $\alpha > 0$ ).

10) a)  $a_n = \frac{5n^2 + 3n - 1}{(n+1)^2}$ ; b)  $a_n = \frac{3(1-n)(n+2)}{(2n+4)(4+7n)}$ ;

c)  $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$ ; d)  $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{(n+1)+(n+2)+\dots+(n+n)}$ ;

e)  $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2}$ ; f)  $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{3}$ ;

g)  $a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^2}$ ; h)  $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+(2n-1)^2}{n^2}$ ;

i)  $a_n = \frac{1}{n} \left[ \left( z + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( z + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( z + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$ , ( $z \in R$ ).

11) Fie  $(a_n)$  și  $(b_n)$  două șiruri,  $b_n \neq 0$  oricare ar fi  $n$ . Să se demonstreze:

1° Dacă șirul  $(b_n)$  este mărginit și  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ , atunci  $a_n - b_n \rightarrow 0$ .

2° Dacă  $b_n \rightarrow b \neq 0$  și  $a_n - b_n \rightarrow 0$ , atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ .

Să se arate prin exemple că dacă  $b_n \rightarrow 0$ , atunci șirul  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)$ , chiar dacă este convergent, poate să nu aibă limita 1.

12) Utilizînd teorema de convergență a șirurilor monotone, să se determine limita următoarelor șiruri:

a)  $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$ ; b)  $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ , ( $\alpha > 0$ ) (v. și exerc. 6, j);

c)  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ , pentru  $n \geq 2$ ;

d)  $a_1 = \sqrt{\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ),  $a_n = \sqrt{\alpha + a_{n-1}}$ , pentru  $n \geq 2$ ;

e)  $a_1 = \frac{\alpha}{2}$ , ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $a_n = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$ , pentru  $n \geq 2$ .

13) Fie două numere reale  $a_0, b_0$ ,  $a_0 < b_0$ . Se construiesc două șiruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  în modul următor:

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3},$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}, \quad (n \geq 2).$$

Să se demonstreze că șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sînt convergente și au aceeași limită. Să se determine limita următoarelor șiruri:

14) a)  $a_n = \frac{7n^2 - \sqrt{5n^3 + 5n}}{2n^2 - n + 1}$ ;

b)  $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 - 3n + 4}}{n + 7}$ ;

c)  $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + n - n}}$ ;

d)  $a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 7n + 13}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 2n}}$ .

$$15) a) a_n = \sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 - 1};$$

$$b) a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1};$$

$$c) a_n = \sqrt[3]{1 - n^3} + n;$$

$$d) a_n = (n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}};$$

$$e) a_n = n\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}) - 2\sqrt{n};$$

$$f) a_n = n^2(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2})^2;$$

$$g) a_n = \sqrt[n]{(n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \dots (n + \alpha_m)} - n, (\alpha_k \in \mathbb{R}).$$

16) Să se determine  $\lambda$  și  $\mu$  astfel încât:

$$\lim_n (\sqrt[3]{1 - n^3} - 2n - \mu) = 0.$$

Să se determine limita următoarelor șiruri:

$$17) a) a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^3+n+1}};$$

$$b) a_n = e^{\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3-n+1}};$$

$$c) a_n = \left(\frac{n-1}{9n+5}\right)^{\frac{n^2-2n+1}{2n^3-7}};$$

$$d) a_n = \left(\frac{\sqrt{1+3n^2}}{7n^2-2}\right)^{\frac{\sqrt[3]{n^3+2n}}{3n-5}};$$

$$e) a_n = \log_8 \left( \left( \frac{\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3-2}}{n+1} \right)^{\frac{\sqrt[3]{n^3+1-n}}{n+\sqrt[3]{n^4-1}}} \right);$$

$$f) a_n = \ln \left( \left( \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt[3]{n^3-n+2n}} \right)^{\frac{3n^2-1}{\sqrt[3]{n^3-3n}}} \right);$$

$$18) a) a_n = 2n^3 - n^2 + 1;$$

$$c) a_n = \frac{3-7n-n^4}{2n+9};$$

$$e) a_n = \sqrt[3]{2n^2+5};$$

$$g) a_n = \frac{2\sqrt{n} - 7n^2 + 2\sqrt[3]{n^2} - 1}{-n - 2\sqrt[3]{n} + 5\sqrt{n} + 6n^2};$$

$$i) a_n = \sqrt[3]{1-2n^3} + n;$$

$$k) a_n = \alpha^{\frac{-n^3-2n^2+1}{2n^3\sqrt[3]{n+n^2+1}}}, (\alpha > 1);$$

$$m) a_n = e^{\frac{\sqrt[3]{n^3-8}}{2n-1}};$$

$$o) a_n = \left( \frac{-n\sqrt{n+1}}{-\sqrt[3]{n}-2} \right)^{\frac{3n-1}{7+\sqrt[3]{n}}};$$

$$b) a_n = 1 + 3n - n^2;$$

$$d) a_n = \frac{(2-3n)(n+7)(1-n^2)}{n^2+25};$$

$$f) a_n = -\sqrt[5]{n^5+2};$$

$$h) a_n = \frac{n^2 - 7\sqrt[3]{n^2} + 9n^3 - 1}{3n^2\sqrt{n} - 5n^6 + 101};$$

$$j) a_n = n + 1 - \sqrt[3]{3n^3-4};$$

$$l) a_n = \beta^{\frac{n^6-n+1}{2n^2\sqrt[3]{n+n^2+3}}}, (0 < \beta < 1);$$

$$n) a_n = e^{-\frac{\sqrt[3]{2+3n^3}}{n^2+n}};$$

$$p) a_n = \left( \frac{n^3\sqrt[3]{2+n^2}-1}{2n-1} \right)^{\frac{n^n-1}{2^n+n^2-n+4}};$$

19) Fie  $(a_n)$  și  $(b_n)$  două șiruri. Să se demonstreze că dacă există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a_n \geq \alpha$  pentru fiecare  $n$  și dacă  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ . Să se deducă de aici că dacă  $x_n \rightarrow +\infty$  și  $y_n \rightarrow y$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y \neq -\infty$ , atunci  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$  (v. § 10, nr. 3, pct. a).

20) Să se demonstreze propozițiile:

1° Dacă  $a_n \geq \alpha > 0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .

2° Dacă  $(a_n)$  este mărginit și  $b_n \rightarrow +\infty$  (sau  $b_n \rightarrow -\infty$ ), atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

Ce propoziții și convenții rezultă de aici cu privire la operațiile cu limite infinite? [v. § 10, nr. 3, punctele b), c)].

21) Să se demonstreze propozițiile [v. § 10, nr. 3, pct. f)]:

1° Dacă  $a > 1$  și  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $x > 0$ , atunci  $\log_a x_n \rightarrow +\infty$ .

2° Dacă  $a > 1$  și  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ , atunci  $\log_a x_n \rightarrow -\infty$ .

22) Să se demonstreze propozițiile [v. § 10, nr. 3, pct. e)]:

1° Dacă  $\alpha > 1$  și  $b_n \rightarrow +\infty$  atunci  $\alpha^{b_n} \rightarrow +\infty$ .

2° Dacă  $a_n > 0$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$  atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .

3° Dacă  $a_n > 0$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow -\beta$ ,  $\beta > 0$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

23) Să se demonstreze că dacă  $(x_n)$  este un șir de numere *naturale* cu limita  $+\infty$ , atunci

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e.$$

Să se deducă de aici că propoziția rămâne adevărată pentru un șir  $x_n \rightarrow +\infty$  de numere *reale* oarecare (v. § 10, nr. 4).

24) Să se determine limita următoarelor șiruri:

$$a) a_n = \frac{3n+1}{2n+1}; \quad b) a_n = \frac{5n \cdot n^2 + 1}{5n^2 + n + 1}; \quad c) a_n = \frac{\alpha^n}{n}, (\alpha > 0);$$

$$d) a_n = \frac{n}{\alpha^n}, (\alpha > 0); \quad e) a_n = \frac{1+2n}{1-n};$$

$$f) a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2) \dots (1+\alpha^n)}, (\alpha > 0);$$

$$g) a_n = \left(1 + \frac{\alpha n}{n^2+1}\right)^{-\frac{n}{\beta}}, (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0);$$

$$h) a_n = \left(1 + \frac{\sqrt[3]{n}+1}{2\sqrt{n}-3}\right)^{\alpha\sqrt[3]{n}-3}, (\alpha \in \mathbb{R}).$$

## Limite de funcții

În acest capitol va fi studiată noțiunea de limită a unei funcții într-un punct. Problema care se pune se poate formula în modul următor:

Dându-se o funcție reală de variabilă reală  $f: E \rightarrow R$ , să se cerceteze comportarea sa în jurul unui punct  $x_0$ . Anume, să se cerceteze ce se întâmplă cu valorile  $f(x)$  ale funcției atunci când argumentul  $x$  se apropie din ce în ce mai mult de  $x_0$ ; se apropie oare și valorile funcției din ce în ce mai mult de un anumit număr  $l$  (finit sau infinit)? Mai precis: luând șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ , să se cerceteze dacă șirurile  $(f(x_n))$  ale valorilor funcției au limită comună  $l$ . Un asemenea număr  $l$ , dacă există, se numește *limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$* .

Problema astfel pusă necesită unele precizări suplimentare. Comportarea funcției  $f$  în jurul lui  $x_0$  se referă *nu* la valoarea funcției în  $x_0$ , ci în puncte oricât de apropiate de  $x_0$  dar diferite de  $x_0$ . Prin urmare, problema comportării funcției în jurul lui  $x_0$  se poate pune chiar dacă funcția *nu* este definită în  $x_0$ ; în particular,  $x_0$  poate să fie  $+\infty$  sau  $-\infty$ .

Pe de altă parte, pentru a putea studia comportarea funcției în jurul lui  $x_0$ , trebuie să existe șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n$  din  $E$  diferite de  $x_0$ . Un astfel de punct  $x_0$  se numește *punct de acumulare* al mulțimii  $E$ .

Această condiție este îndeplinită, de exemplu, dacă  $E$  este un interval (care nu se reduce la un punct) mărginit sau nemărginit (sau o reuniune finită sau infinită de astfel de intervale), iar  $x_0$  aparține intervalului sau este o extremitate (eventual infinită) a sa. Așadar: *pentru o funcție definită pe un interval (sau pe o reuniune de intervale), în particular pentru funcțiile elementare, problema limitei se poate pune atât în punctele intervalului, cât și în extremitățile sale, și numai în aceste puncte.*

În cazul particular al unei funcții șir  $f: N \rightarrow R$ , problema pusă mai sus revine la studiul comportării termenilor  $a_n = f(n)$ , când  $n$  se apropie din ce în ce mai mult de  $x_0 = +\infty$ , adică la studiul *limitei* acestui șir. Această problemă a fost tratată în capitolul anterior.

În cele ce urmează vom folosi limitele de șiruri pentru a defini în mod precis noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, care, la rândul său, va fi folosită în capitolele ulterioare pentru definirea noțiunilor de continuitate și derivabilitate a funcțiilor.

### 1. Exemple

1) Fie funcția  $f(x) = x^2$  definită pe toată dreapta  $R$  (fig. 48). Să studiem comportarea acestei funcții în jurul punctului 2. Pentru aceasta, să considerăm un șir  $(x_n)$  de puncte diferite de 2 și convergent către 2 ( $x_n \rightarrow 2$ ), și să vedem dacă șirul corespunzător  $(f(x_n))$ , al valorilor funcției are sau nu limită.

Să luăm, de exemplu, următorul șir  $(x_n)$  convergent către 2:

$$2 + \frac{1}{1}, \quad 2 + \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 2 + \frac{1}{n}, \quad \dots$$

Pentru valorile funcției se obține șirul  $(f(x_n))$ , următor:

$$\left(2 + \frac{1}{1}\right)^2, \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2, \dots,$$

care are limită 4. Într-adevăr,  $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$ , deci  $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 4$ .

Considerând șirul:

$$1, \quad 2 - \frac{1}{2}, \quad 2 - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad 2 - \frac{1}{n}, \quad \dots$$

convergent către 2, pentru valorile funcției se obține șirul

$$1, \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2, \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2, \quad \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2, \dots,$$

care are limită 4.

Considerând șirul:

$$3, \quad 2 - \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{3}, \quad 2 - \frac{1}{4}, \quad \dots$$

convergent către 2, pentru valorile funcției se obține șirul:

$$3^2, \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2, \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2, \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2, \dots,$$

care are, de asemenea, limită 4.

În general, dacă  $(x_n)$  este un șir oarecare convergent către 2 (format din puncte diferite de 2), șirul  $(f(x_n))$  al valorilor funcției are limită 4. Într-adevăr din  $x_n \rightarrow 2$  rezultă  $x_n^2 \rightarrow 4$ , adică  $f(x_n) \rightarrow 4$ .

S-a pus astfel în evidență următoarea proprietate a funcției  $f(x) = x^2$ :

Oricare ar fi șirul  $(x_n)$  convergent către 2 ( $x_n \neq 2$ ), șirul valorilor funcției,  $(f(x_n))$ , are aceeași limită, 4; sau, mai scurt, dacă  $x_n \rightarrow 2$  și  $x_n \neq 2$  atunci  $f(x_n) \rightarrow 4$ .

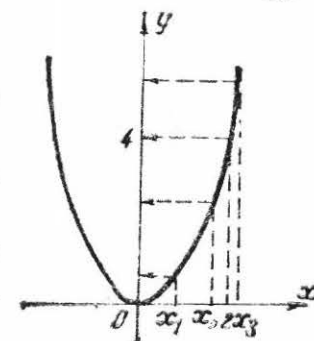


Fig. 48

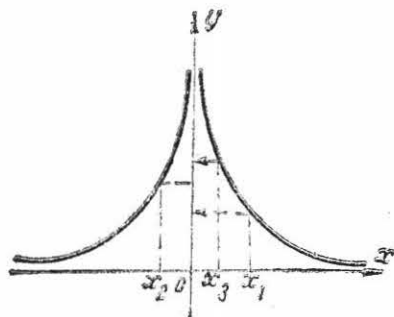


Fig. 49

Această proprietate se exprimă spunând că funcția  $f(x) = x^2$  are în punctul 2 limita 4 și se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \text{ (sau } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4).$$

(Se citește *limită de  $f(x)$ , când  $x$  tinde către 2 este 4*).

2) Fie funcția  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  definită pe  $E = R \setminus \{0\}$

(fig. 49). Această funcție nu este definită în punctul 0, dar 0 este punct de acumulare al lui  $E$ , adică există șiruri  $x_n \rightarrow 0$  formate din puncte din  $E$ .

(Condiția  $x_n \neq 0$  este automat verificată pentru punctele  $x_n \in E$ .)

Să studiem și în acest caz comportarea funcției în jurul lui 0. Pentru aceasta, să luăm următorul șir  $(x_n)$  convergent către 0:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Pentru valorile funcției se obține șirul  $(f(x_n))$  următor:

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

care are limita  $\infty$ .

Dacă luăm șirul:

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$$

convergent către 0, pentru valorile funcției se obține șirul:

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

care are limita  $\infty$ .

În general, dacă  $(x_n)$  este un șir oarecare de puncte din  $R \setminus \{0\}$ ,  $(x_n \neq 0)$ , convergent către 0,  $x_n \rightarrow 0$ , avem  $x_n^2 \rightarrow 0$  și  $x_n^2 > 0$ , deci  $\frac{1}{x_n^2} \rightarrow \infty$ , adică  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

Așadar:

Oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow 0$  ( $x_n \neq 0$ ), șirul  $(f(x_n))$  are aceeași limită,  $\infty$ ; sau, mai scurt, dacă  $x_n \rightarrow 0$  (și  $x_n \neq 0$ ), atunci  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

Această proprietate se enunță astfel: funcția

$f(x) = \frac{1}{x^2}$  are în punctul 0 limita  $\infty$  și se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \text{ sau } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(Se citește *limită de  $f(x)$ , când  $x$  tinde către 0 este  $\infty$* .)

3) Fie funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R \setminus \{0\}$

(fig. 50). Să studiem comportarea acestei funcții în jurul lui  $\infty$ . Pentru aceasta, să luăm un șir  $x_n \rightarrow \infty$  și să cercetăm dacă șirul  $(f(x_n))$  are sau nu limită.

De exemplu, considerând șirul  $(x_n)$  următor:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

care are limita  $\infty$ , pentru valorile funcției se obține șirul  $(f(x_n))$  următor:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

care are limita 0.

În general, dacă  $(x_n)$  este un șir oarecare cu limita  $\infty$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ , avem  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ , adică  $f(x_n) \rightarrow 0$ . Așadar:

Oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow \infty$ , șirul  $(f(x_n))$  are aceeași limită, 0; sau:

dacă  $x_n \rightarrow \infty$ , atunci  $f(x_n) \rightarrow 0$ .

Această proprietate se exprimă astfel: limita funcției  $f(x) = \frac{1}{x}$  în punctul  $\infty$  este 0 și se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ sau } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(Se citește *limită de  $f(x)$ , când  $x$  tinde către  $\infty$  este 0*.)

4) Să reluăm funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R \setminus \{0\}$  și să studiem comportarea sa în jurul lui 0.

Pentru șirul  $(x_n)$ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

convergent către 0, se obține șirul  $(f(x_n))$  următor:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

care are limita  $\infty$ .

Pentru șirul  $(x'_n)$ :

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$$

convergent către 0, se obține șirul  $(f(x'_n))$ :

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

care are limita  $-\infty$ .

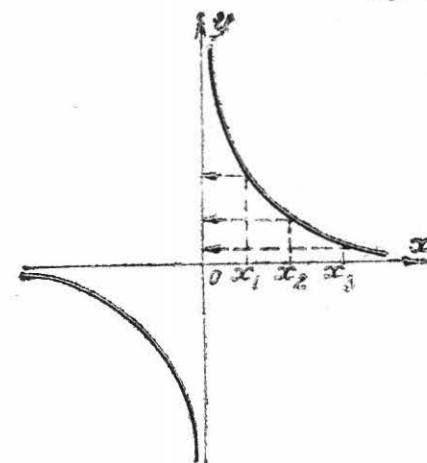


Fig. 50

Pentru șirul  $(x_n^*)$ :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots,$$

convergent către 0 se obține șirul  $(f(x_n^*))$ :

$$1, -2, 3, -4, \dots,$$

care nu are limită.

Așadar, pentru șirurile diferite  $(x_n)$  și  $(x_n')$  convergente către 0, șirurile corespunzătoare  $(f(x_n))$  și  $(f(x_n'))$  au limite diferite, iar pentru șirul  $(x_n)$  convergent către 0, șirul corespunzător  $(f(x_n'))$  nu are limită.

Se spune că funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  nu are limită în 0.

## 2. Definiția limitei unei funcții într-un punct

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție și  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al lui  $E$ . Aceasta înseamnă că există șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ .

Considerațiile de la numărul precedent conduc la definiția următoare

**Definiția 1.** Se spune că un număr  $l$  (finit sau infinit) este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ , șirul  $(f(x_n))$  al valorilor funcției tinde către  $l$ .

Se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

(Se citește limită de  $f(x)$  când  $x$  tinde către  $x_0$  este egal cu  $l$ .)

Condiția din definiția precedentă se enunță prescurtat astfel:

dacă  $x_n \rightarrow x_0$  (și  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $f(x_n) \rightarrow l$ .

Uneori, pentru simplificare, convenim să ometem indicii  $n$  și condiția din definiția limitei se scrie:

dacă  $x \rightarrow x_0$  și  $(x \neq x_0)$ , atunci  $f(x) \rightarrow l$ .

Trebuie subliniat că  $x \rightarrow x_0$  sau  $f(x) \rightarrow l$  nu se utilizează separat, ci doar împreună, așa cum am convenit mai sus.

**Observații.** 1°. Condiția  $x_n \neq x_0$  are obiect numai în cazul când  $x_0 \in E$ . Dacă  $x_0 \notin E$ , în particular dacă  $x_0 = \pm \infty$ , condiția  $x_n \neq x_0$  este verificată în mod automat (deoarece  $x_n \in E$ ) și deci, în acest caz, condiția  $x_n \neq x_0$  este de prisos în enunțul definiției.

2°. Dacă  $x_0 \in E$ , limita funcției  $f$  în  $x_0$  (dacă există) poate fi diferită de  $f(x_0)$ . De exemplu, pentru funcția  $f$  definită pe  $R$  prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  (v. exemplul 2) și  $f(0) = 1$ .

3°. Dacă  $x_0$  nu este punct de acumulare al lui  $E$ , nu are sens problema existenței limitei în acest punct. De exemplu, pentru funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$  nu are sens să se pună problema limitei în punctul  $x_0 = -1$ .

4°. După cum se va vedea § (17, după teorema 3), pentru orice funcția elementară  $f: E \rightarrow R$ , limita într-un punct  $x_0 \in E$  se obține înlocuind direct în  $f(x)$  pe  $x$  cu  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

### Exemple

1) Pentru funcția constantă  $f(x) \equiv c$  definită pe  $R$  (fig. 51) avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ , oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit), adică:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$$

Într-adevăr, oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow x_0$ , șirul corespunzător  $(f(x_n))$  al valorilor funcției este  $c, c, c, \dots, c, \dots$ , care are limita  $c$ ,  $f(x_n) \rightarrow c$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ .

De exemplu,  $\lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} 6 = 6$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} 6 = 6$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2) = -2$ .

2) Pentru funcția identică  $f(x) = x$  definită pe  $R$  (fig. 52) avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit). În particular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , deoarece  $f(x_n) = x_n$ , rezultă  $f(x_n) \rightarrow x_0$ , și limita  $x_0$  este aceeași, oricare ar fi șirul  $(x_n)$  considerat, deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

De exemplu,  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ .

Fig. 51

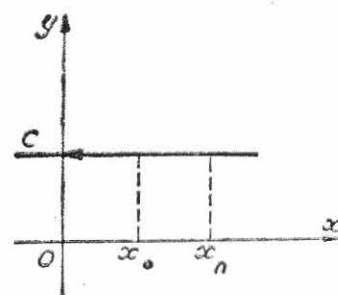
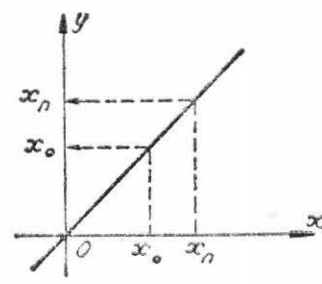


Fig. 52





3) Pentru funcția  $f(x) = x^k$  ( $k$  natural), definită pe  $R$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$$

oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit). În particular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = (-\infty)^k$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , atunci  $x_n^k \rightarrow x_0^k$ .

De exemplu,  $\lim_{x \rightarrow -2} x^4 = 16$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^6 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$ .

4) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^k}$  ( $k$  natural), definită pe  $R \setminus \{0\}$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}$$

oricare ar fi  $x_0 \neq 0$  (finit sau infinit). În particular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , atunci  $x_n^k \rightarrow x_0^k$  și dacă  $x_0 \neq 0$ , rezultă  $\frac{1}{x_n^k} \rightarrow \frac{1}{x_0^k}$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}$ .

De exemplu,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^4} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ .

5) Dacă  $n$  este par, avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad (0 \leq x_0 < \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}, \quad (0 < x_0 < \infty)$$

În particular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

De asemenea:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \infty$$

Într-adevăr, dacă  $x_k \rightarrow 0$ ,  $x_k > 0$ , atunci:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_k} = 0 \quad \text{și} \quad \sqrt[n]{x_k} > 0; \quad \text{deci} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k}} = \infty.$$

6) Dacă  $n$  este impar avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad (-\infty < x_0 < \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}, \quad (x \in R \setminus \{0\})$$

În particular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0.$$

7) Dacă  $\alpha > 0$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha, \quad (0 \leq x_0 < \infty).$$

În particular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty$$

$$\text{și} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$$

8) Dacă  $\alpha > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha}, \quad (0 < x_0 < \infty).$$

În particular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0$$

De asemenea:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^a} = +\infty$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ ; atunci  $x_n^a \rightarrow 0$  și  $x_n^a > 0$ ; deci  $\frac{1}{x_n^a} \rightarrow +\infty$ .

9) Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad (-\infty \leq x_0 \leq \infty)$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$  atunci  $a^{x_n} \rightarrow a^{x_0}$ .

În particular:

dacă  $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

dacă  $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

De exemplu:  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

10) Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad (0 \leq x_0 \leq \infty).$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$  atunci  $\log_a x_n \rightarrow \log_a x_0$ .

În particular:

dacă  $a > 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

dacă  $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow \infty$  sau  $x_n \rightarrow -\infty$ , atunci:

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e.$$

## 3. Limite laterale

S-a arătat în exemplul 4 de la nr. 1 că funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  nu are limită în 0, deoarece pentru șiruri diferite  $x_n \rightarrow 0$  și  $x'_n \rightarrow 0$ , șirurile corespunzătoare  $(f(x_n))$  și  $(f(x'_n))$  au limite diferite. Totuși, dacă se consideră numai șiruri  $(x_n)$  de numere strict pozitive ( $x_n > 0$ ), convergente către 0, șirurile  $(f(x_n))$  au aceeași limită,  $\infty$ . Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow 0$  și  $x_n > 0$ , avem  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \infty$ , adică  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

Se spune că funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  are în punctul 0 limita la dreapta  $\infty$ .

De asemenea, dacă se consideră numai șiruri  $(y_n)$  de numere strict negative ( $y_n < 0$ ), convergente către 0, șirurile  $(f(y_n))$  au aceeași limită,  $-\infty$ . Într-adevăr, dacă  $y_n \rightarrow 0$  și  $y_n < 0$ , avem  $\frac{1}{y_n} \rightarrow -\infty$ , adică  $f(y_n) \rightarrow -\infty$ .

Se spune că funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  are în punctul 0 limita de stînga  $-\infty$ .

Fie, în general, o funcție  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

Să presupunem că există șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n > x_0$  din  $E$ .

**Definiția 2.** Se spune că un număr  $l_s$  (finit sau infinit) este limita la stînga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  dacă pentru orice șir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n < x_0$  din  $E$  avem  $f(x_n) \rightarrow l_s$ .

Se scrie:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s.$$

În loc de  $l_s$ , limita la stînga a funcției  $f$  în  $x_0$  se mai notează  $f(x_0 - 0)$ :

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Să presupunem acum că există șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n > x_0$  din  $E$ .

**Definiția 3.** Se spune că un număr  $l_d$  (finit sau infinit) este limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice șir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n > x_0$  din  $E$  avem  $f(x_n) \rightarrow l_d$ .

Se scrie:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d.$$

În loc de  $l_d$ , limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se mai notează  $f(x_0 + 0)$ :

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Astfel, pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  avem:

$$f(0-0) = -\infty \text{ și } f(0+0) = \infty.$$

**Observații.** 1°. Dacă  $f$  este o funcție definită pe un interval  $E = (a, b)$ ,  $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ , definiția limitei lui  $f$  în  $a$  coincide cu definiția limitei la dreapta a lui  $f$  în  $a$ , deoarece pentru șiruri  $(x_n)$  de puncte  $x_n \neq a$  din  $E$ , avem în mod necesar  $x_n > a$ .

De asemenea, definiția limitei lui  $f$  în  $b$  coincide cu definiția limitei la stînga a lui  $f$  în  $b$ , deoarece dacă  $(x_n)$  este un șir de puncte  $x_n \neq b$  din  $E$ , avem în mod necesar  $x_n < b$ .

2°. Este posibil ca într-un punct una sau ambele limite laterale să nu existe.

3°. Dacă funcția  $f$  are limita  $l$  într-un punct  $x_0$ ,  $(a < x_0 < b)$ , atunci are și limită la dreapta și limită la stînga în  $x_0$ , și ambele limite laterale sînt egale cu  $l$ :

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = l.$$

Se poate demonstra că, reciproc:

dacă  $f$  are în  $x_0$  și limită la stînga,  $f(x_0-0)$ , și limită la dreapta  $f(x_0+0)$ , și dacă limitele laterale sînt egale,  $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ , atunci  $f$  are limită în  $x_0$  egală cu valoarea comună a limitelor laterale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0).$$

De multe ori este mai ușor să se calculeze limitele laterale într-un punct și din egalitatea lor să se deducă existența limitei în acel punct.

*Exemple*

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow 0$  și  $x_n > 0$ , atunci:

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

Deducem că limita la dreapta în 0 a funcției  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  este  $e$ :

$$\lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

În mod asemănător, se arată că și limita la stînga în 0 a acestei funcții este  $e$ :

$$\lim_{x \nearrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Cele două limite laterale fiind egale, rezultă că funcția  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  are în punctul 0 limita  $e$ . Rezultă că oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow 0$  format din puncte  $x_n \neq 0$ , avem:

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2k}} = \infty, \quad k \text{ natural.}$$

Dacă  $x_n \rightarrow x_0$  și  $x_n < x_0$ , atunci  $x_n - x_0 \rightarrow 0$  și  $x_n - x_0 < 0$ . Urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0)^{2k} = 0$  și  $(x_n - x_0)^{2k} > 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_n - x_0)^{2k}} = \infty$ . Așadar, limita la stînga în  $x_0$  este  $\infty$ .

De asemenea, dacă  $x_n \rightarrow x_0$  și  $x_n > x_0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0)^{2k} = 0$  și  $(x_n - x_0)^{2k} > 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_n - x_0)^{2k}} = \infty$ . Prin urmare, limita la dreapta în  $x_0$  este tot  $\infty$ . Cele două limite laterale fiind egale, rezultă că funcția  $\frac{1}{(x-x_0)^{2k}}$  are în  $x_0$  limita  $\infty$ .

De exemplu,  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^6} = \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{10}} = \infty.$$

$$3) \quad \lim_{x \nearrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2k-1}} = -\infty, \quad \lim_{x \searrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2k-1}} = \infty,$$

$k$  natural.

Se urmează același raționament ca în exemplul funcției  $\frac{1}{x}$  de la începutul acestui paragraf.

Rezultă că funcția  $\frac{1}{(x-x_0)^{2k-1}}$  nu are limită în  $x_0$ , deoarece limitele laterale sînt diferite.

De exemplu,  $\lim_{x \nearrow 3} \frac{1}{(x-3)^5} = -\infty$ ,  $\lim_{x \searrow 3} \frac{1}{(x-3)^5} = \infty$ .

4) Fie funcția  $f(x)$  definită pe  $R$  prin:

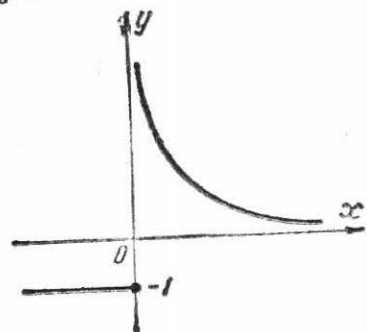
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

cu graficul din figura 53. Se observă că  $f(0-0) = -1$  și  $f(0+0) = \infty$ , deci funcția nu are limită în 0.

5) Funcția  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definită pe  $R \setminus \{0\}$  nu are în punctul 0 nici limită la dreapta, nici limită la stînga.

Într-adevăr, dacă  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ , avem  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ ; apoi  $\sin \frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$ , deci  $\sin \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ .

Fig. 58



Dacă  $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ , avem  $y > 0$  și  $y_n \rightarrow 0$ ; apoi  
 $\sin \frac{1}{y_n} = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1$ , deci  $\sin \frac{1}{y_n} \rightarrow 1$ .

Așadar, pentru șirurile diferite  $(x_n)$  și  $(y_n)$ , șirurile  
 $(\sin \frac{1}{x_n})$  și  $(\sin \frac{1}{y_n})$  nu au aceeași limită. Rezultă că  
 funcția  $\sin \frac{1}{x}$  nu are limită la dreapta în 0.

Se arată în mod analog, folosind șirurile  $(-\frac{1}{n\pi})$  și  
 $(-\frac{2}{(4n+1)\pi})$ , că funcția  $\sin \frac{1}{x}$  nu are nici limită la stânga în 0.

## § 14. Proprietățile limitei

Deoarece definiția limitei unei funcții într-un punct este bazată pe limite de șiruri,  
 o serie de proprietăți ale limitelor de șiruri se regăsesc pentru limitele de funcții.

### 1. Limita modulului

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Teorema 1.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ .

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $f(x_n) \rightarrow l$ , deci  $|f(x_n)| \rightarrow |l|$ .

### Exemple

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$ , deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .
- 3) Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$ .

### 2. Criterii de existență a limitei

Uneori, cunoscând limita unei funcții într-un punct, putem stabili limita altei  
 funcții în același punct, cu ajutorul unor criterii asemănătoare celor utilizate la șiruri.

Fie  $f, g: E \rightarrow R$  două funcții și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Teorema 2. (Criteriul majorării).** Dacă  $|f(x) - l| \leq g(x)$  și dacă  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Într-adevăr, fie  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ). Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0$ , rezultă  $g(x_n) \rightarrow 0$ .

Dar  $|f(x_n) - l| \leq g(x_n)$ ; deci, aplicind criteriul majorării de la șiruri, rezultă  $f(x_n) \rightarrow l$ .  
 Deoarece șirul  $(x_n)$  a fost ales arbitrar, deducem că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

### Exemple

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad (x_0 \text{ finit}).$$

Într-adevăr, deoarece  $|\cos \frac{x+x_0}{2}| \leq 1$ , avem:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

și, deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .

De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad (x \text{ finit})$$

Într-adevăr, deoarece  $|\sin \frac{x-x_0}{2}| \leq 1$ , avem:

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ .

De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1.$$

Așadar: limitele funcțiilor  $\sin$  și  $\cos$  într-un punct oarecare  $x_0$  se obțin înlocuind  
 direct pe  $x$  cu  $x_0$ .

Observații: 1) În punctele  $+\infty$  și  $-\infty$  funcțiile  $\sin$  și  $\cos$  nu au limită  
 (v. exercițiul nr. 2 de la sfârșitul capitolului).

2) Se poate demonstra că funcțiile arcsin și arccos au de asemenea proprietatea de mai sus, adică limita într-un punct  $x_0$  se obține înlocuind direct pe  $x$  cu  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad (-1 \leq x_0 \leq 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad (-1 \leq x_0 \leq 1).$$

**Teorema 3.** Dacă  $f(x) \geq g(x)$  și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $g(x_n) \rightarrow \infty$  și deoarece  $f(x_n) \geq g(x_n)$ , rezultă că  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Cum șirul  $x_n \rightarrow x_0$  a fost ales arbitrar, deducem că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

*Exemplu*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - 4x^2) = \infty.$$

Într-adevăr, pentru  $x > 0$  avem  $3x^5 + 4x^2 > 3x^5 \geq x^5$ , iar  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty$ .

**Teorema 4.** Dacă  $f(x) \leq g(x)$  și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Demonstrația este analogă celeia a teoremei 3.

*Exemplu.*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2) = -\infty.$$

Într-adevăr, pentru  $x < 0$  avem  $x^3 - 4x^2 \leq x^3$ , iar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .

### 3. Trecerea la limită în inegalități

Fie  $f, g: E \rightarrow R$  două funcții și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Teorema 5.** Dacă  $f$  și  $g$  au limite (finite sau infinite) în punctul  $x_0$  și dacă  $f(x) \leq g(x)$ , pentru orice  $x \neq x_0$  din  $E$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Într-adevăr, fie:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ și } b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Va trebui deci să demonstrăm că  $a \leq b$ .

Dacă  $x_n \rightarrow x_0$  este un șir format din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ , atunci:

$$f(x_n) \rightarrow a \text{ și } g(x_n) \rightarrow b.$$

Pentru fiecare  $n$  avem însă  $f(x_n) \leq g(x_n)$ . Folosind teorema de trecere la limită în inegalități de șiruri, deducem:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

și teorema este demonstrată.

**Corolar.** Să presupunem că  $f$  are limită în  $x_0$ .

Dacă  $f(x) \geq 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .

Dacă  $f(x) \leq 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ .

Pentru demonstrație se ia  $g(x) \equiv 0$  în teorema precedentă.

**Observație.** Dacă avem inegalitate strictă:

$$f(x) < g(x), \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } E$$

pentru limite nu putem deduce decât o inegalitate nestrictă:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(putând avea chiar egalitate).

De exemplu,  $x^2 > 0$  pentru  $x \neq 0$ , dar  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

### 4. Operații cu limite de funcții

Fie  $f, g: E \rightarrow R$  două funcții și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Teorema 6.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$ , respectiv limitele  $l_1$  și  $l_2$  (finite sau infinite) și dacă suma  $l_1 + l_2$  are sens, atunci funcția  $f + g$  are limită în  $x_0$  și:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Cazul exceptat:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  (cazul  $\infty - \infty$ ).



Într-adevăr, fie  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E, x_n \neq x_0$ ) un șir oarecare. Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_2$ , se deduce că  $f(x_n) \rightarrow l_1$  și  $g(x_n) \rightarrow l_2$ , deci  $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow l_1 + l_2$  și, prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$ .

**Teorema 7.** Dacă  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$  respectiv limitele  $l_1$  și  $l_2$  (finite sau infinite) și dacă produsul  $l_1 l_2$  are sens, atunci funcția  $f \cdot g$  are limită în  $x_0$  și:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Cazuri exceptate:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$  (cazul  $0 \cdot \infty$ ).

Demonstrația este analogă celeia a teoremei 6, folosind teorema relativă la limita produsului a două șiruri.

În particular, luând  $n$  funcții egale cu  $f$  se obține:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n, (n \text{ natural}).$$

Dacă  $g(x) \equiv c$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$ , deci:

**Corolar.** Dacă  $f$  are în  $x_0$  limita  $l$  (finită sau infinită), atunci funcția  $cf$  are limită în  $x_0$  și:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ dacă } c \neq 0$$

(și, evident,  $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = 0$ , dacă  $c = 0$ ).

Luând în corolarul precedent  $c = -1$ , obținem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

și deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Rezultă, de asemenea, propoziția următoare:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ (finit)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0.$$

**Exemple.**

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} cx^n = c \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = cx_0^n.$$

2) Pentru orice polinom  $P(x)$  avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), (x_0 \text{ finit}).$$

Fie  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Folosind exemplul 1) și teorema 6 se obține:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow x_0} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_1 x + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Așadar: limita unui polinom  $P(x)$  într-un punct  $x_0$  se obține înlocuind direct în polinom pe  $x$  cu  $x_0$ .

**De exemplu:**  $\lim_{x \rightarrow -2} (5x^4 + 3x^2 - 7x + 1) = 5(-2)^4 + 3(-2)^2 - 7(-2) + 1 = 107$ .

**Teorema 8.** Dacă  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$ , respectiv limitele  $l_1$  și  $l_2$  (finite sau infinite) și dacă raportul  $\frac{l_1}{l_2}$  are sens, atunci funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Cazuri exceptate:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ; (cazul  $\frac{1}{0}$ ).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$  (cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ ).

Pentru demonstrație se folosește teorema relativă la limita cîtelui a două șiruri.

**Exemple.**

1) Dacă  $P(x)$  și  $Q(x)$  sînt două polinoame și dacă  $Q(x_0) \neq 0$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, (x_0 \text{ finit}).$$

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$ .

Deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Așadar: limita unei funcții raționale într-un punct  $x_0$  în care numitorul nu se anulează, se obține înlocuind direct pe  $x$  cu  $x_0$ .

**De exemplu**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \frac{1^2 - 5}{1 + 3} = \frac{-4}{4} = -1.$$

2) Dacă  $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  ( $k$  întreg), avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$$

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$ .

Deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

3) Dacă  $x_0 \neq k\pi$  ( $k$  întreg), avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$$

Se procedează ca la exemplul 2).

Așadar: limita funcțiilor  $\operatorname{tg}$  și  $\operatorname{ctg}$ , într-un punct  $x_0$  în care sînt definite se obține înlocuind direct pe  $x$  cu  $x_0$ .

Observații.

1) În punctele  $+\infty$  și  $-\infty$  funcțiile  $\operatorname{tg}$  și  $\operatorname{ctg}$  nu au limite (v. exercițiul 2 de la sfîrșitul capitoului).

2) Se poate demonstra că funcțiile  $\operatorname{arctg}$  și  $\operatorname{arctg}$  au de asemenea proprietatea de mai sus, adică limita într-un punct  $x_0$  se obține înlocuind direct pe  $x$  cu  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad (x_0 \text{ finit}).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad (x_0 \text{ finit}).$$

3) În ceea ce privește punctele în care nu sînt definite, funcțiile  $\operatorname{tg}$  și  $\operatorname{ctg}$  nu au limită, dar au limite laterale infinite. De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$  și  $x_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos x_n \rightarrow 0$  și  $\cos x_n > 0$ , deci  $\frac{1}{\cos x_n} \rightarrow \infty$ ; apoi  $\sin x_n \rightarrow 1$ , deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos x_n} = \infty.$$

Așadar, limita la stînga a funcției  $\operatorname{tg} x$  în  $\frac{\pi}{2}$  este  $\infty$ .

Pentru demonstrarea celeilalte egalități se folosește faptul că dacă  $x_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$  și  $x_n > \frac{\pi}{2}$ , atunci

$$\cos x_n \rightarrow 0 \text{ și } \cos x_n < 0 \text{ deci } \frac{1}{\cos x_n} \rightarrow -\infty.$$

Rezultă că funcția  $\operatorname{tg} x$  nu are limită în  $\frac{\pi}{2}$ .

Urmînd o cale asemănătoare se demonstrează și următoarele egalități:

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$$

$$\lim_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$$

4) Se pot demonstra, de asemenea, următoarele egalități:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$$

## 5. Limite de puteri

Fie  $u, v: E \rightarrow R$  două funcții și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ . Să presupunem  $u(x) > 0$  pe  $E$ . Puterea  $u(x)^{v(x)}$  este deci definită.

**Teorema 3.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$  și dacă puterea  $a^b$  are sens, atunci funcția  $u(x)^{v(x)}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)^{v(x)}) = (\lim_{x \rightarrow x_0} u(x))^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)}$$

Cazuri exceptate

$a = 0$  și  $b = 0$  (cazul  $0^0$ )

$a = 1$  și  $b = \pm \infty$  (cazul  $1^\infty$ )

$a = \infty$  și  $b = 0$  (cazul  $\infty^0$ )

Demonstrația se face ca pentru teoremele de la punctul precedent, folosind teorema asupra limitei șirurilor de puteri:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((x_n)^{y_n}) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

Cazuri particulare

1) Dacă  $v(x) \equiv b$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$ , deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^b = (\lim_{x \rightarrow x_0} u(x))^b$$

(cu excepția cazului cînd  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  și  $b \leq 0$ ).

**În particular**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)}.$$

2) Dacă  $u(x) \equiv a, a > 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a$ , deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^{u(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)}.$$

**Exemple.**

1) Dacă funcțiile  $u(x) = \sin x$  și  $v(x) = \cos x$  sunt definite pe  $(0, \pi)$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\cos x} = (\lim_{x \rightarrow 0} \sin x)^{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 0^1 = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2+1} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)} = e^2 = e.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 4)} = \sqrt{4} = 2.$$

## 6. Limite de funcții compuse

Fie  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{f} R$  două funcții și  $h = f \circ u : E \rightarrow R$  funcția compusă:

$$h(x) = f(u(x)), x \in E.$$

Fie  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ . Să cercetăm limita funcției compuse în punctul  $x_0$ . Teorema următoare reduce calculul limitei funcției compuse  $f(u(x))$  în punctul  $x_0$  la cel al limitei funcției  $f(y)$  în alt punct  $y_0$  ce urmează să fie determinat.

**Teorema 9. Dacă:**

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = y_0;$$

$$2) u(x) \neq y_0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } E;$$

$$3) \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l;$$

**atunci**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

**Demonstrație.** Fie  $x_n \rightarrow x_0$  un șir de puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ . Deoarece funcția  $u$  are valori în  $F$ , avem  $u(x_n) \in F$ . Din prima ipoteză rezultă  $u(x_n) \rightarrow y_0$ , iar din cea de-a doua ipoteză,  $u(x_n) \neq y_0$ . Notînd  $y_n = u(x_n)$ , am obținut un șir  $y_n \rightarrow y_0$  de puncte  $y_n \neq y_0$  din  $F$ . Urmează, în particular, că  $y_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $F$  și deci limita din ipoteza a treia este justificată. Conform acestei ipoteze avem  $f(y_n) \rightarrow l$ , adică  $f(u(x_n)) \rightarrow l$ .

Recapitulînd, pentru orice șir  $x_n \rightarrow x_0$  de puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$  avem  $f(u(x_n)) \rightarrow l$ . Aceasta înseamnă că:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = l = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

**Observație.** În aplicații, teorema precedentă se folosește în următoarea formă schematizată:

a) Se notează  $y = u(x)$ ; funcția compusă  $f(u(x))$  se scrie atunci  $f(y)$ .

b) Se stabilește punctul  $y_0$  astfel încît dacă  $x \rightarrow x_0$  (și  $x \neq x_0$ ), atunci  $y \rightarrow y_0$  (și  $y \neq y_0$ ).

c) Se calculează limita funcției  $f(y)$  în noul punct  $y_0$ . Limita obținută este în același timp limita funcției inițiale  $f(u(x))$  în punctul inițial  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

**Exemple.**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Într-adevăr, notînd  $y = x$ , observăm că dacă  $x \rightarrow 0$ , atunci  $y \rightarrow 0$  și deci  $\sin x = \sin y \rightarrow 0$  iar  $\cos x = \cos y \rightarrow 1$ .

$$2) \lim_{x \rightarrow 7} \cos(x-7) = \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1.$$

Să notăm  $y = x-7$ . Dacă  $x \rightarrow 7$ , atunci  $y \rightarrow 0$ , deci  $\cos y \rightarrow 1$ .

$$3) \lim_{x \nearrow 1} \ln(1-x) = \lim_{y \searrow 0} \ln y = -\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \infty.$$

Într-adevăr, notînd  $y = \frac{1}{1-x}$ , observăm că dacă  $x \rightarrow 1$ , atunci  $y \rightarrow \infty$ .

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left( 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = 1, x_0 \neq 0.$$

Într-adevăr, notînd  $y = \frac{x-x_0}{x_0}$ , observăm că dacă  $x \rightarrow x_0$  (și  $x \neq x_0$ ) atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ )

deci  $(1+y)^{\frac{1}{y}} \rightarrow e$ ; notînd acum  $z = (1+y)^{\frac{1}{y}}$ , observăm că dacă  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ ) atunci  $z \rightarrow e$  (și  $z \neq e$ ), deci  $\ln z \rightarrow \ln e = 1$ .

Așadar, recapitulînd,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left( 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{z \rightarrow e} \ln z = 1.$$

Se observă că în acest exemplu s-a aplicat de două ori succesiv teorema de trecere la limită în funcții compuse.

## § 15. Cazuri exceptate la operațiile cu limite de funcții

Regulile stabilite în paragraful precedent pentru operațiile cu limite de funcții nu se pot aplica în cazurile exceptate, cînd operațiile cu aceste limite nu au sens ca-zuri desemnate prin:  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{a}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ .

Pentru a putea stabili dacă în aceste cazuri există limită, trebuie întreprins un studiu direct asupra funcțiilor.

Pentru funcțiile elementare se procedează, în esență, astfel:

Pentru a calcula limita unei funcții într-un punct  $x_0$ , se înlocuiește argumentul  $x$  cu  $x_0$ ; dacă se obține un număr bine determinat (finit sau infinit), acest număr este limita funcției în  $x_0$ . Dacă se ajunge la una din operațiile fără sens, uneori se fac anumite transformări pentru a obține o funcție egală cu cea inițială (în punctele  $x \neq x_0$ ), astfel încât, înlocuind în noua funcție pe  $x$  cu  $x_0$  să nu mai ajungem la o operație fără sens, ci la un număr bine determinat; acest număr este limita funcției în  $x_0$ . Alteori se folosesc anumite limite fundamentale ca:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .

## 1. Limitele polinoamelor în punctele $+\infty$ și $-\infty$

S-a arătat că  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^n$  și, deci, dacă  $a \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n \neq a\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = a(-\infty)^n$ .

De exemplu:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -\infty$ .

Însă, de exemplu, pentru polinomul  $P(x) = 3x^3 - x$  nu putem aplica regula limitei sumei, deoarece în punctul  $x_0 = \infty$  sintem în cazul  $\infty - \infty$ .

Pentru calculul limitei unui polinom în punctele  $\infty$  sau  $-\infty$  avem regula următoare:

Pentru orice polinom:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 (a \neq 0),$$

avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = a_n \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_n (-\infty)^n$$

Așadar, limita unui polinom în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$  este egală cu limita termenului de cel mai înalt grad.

Într-adevăr, scoțind în  $P(x)$  factor comun pe  $x^n$ , se obține:

$$P(x) = x^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

Se observă că factorii din paranteză care conțin pe  $x$  la numitor au limita 0 în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$ , deci limita parantezei este  $a_n$ . Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n + \dots) = a_n \infty.$$

La fel se calculează limita în punctul  $-\infty$ .

De exemplu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^4 + 3x^2 - 7) &= -5 \infty^4 = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 2x - 4) &= -3(-\infty)^5 = \infty \end{aligned}$$

## 2. Limitele funcțiilor raționale în punctele $+\infty$ și $-\infty$

Unei funcții raționale  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  nu i se poate aplica regula limitei cîtului pentru calcularea limitei în punctele  $\infty$  și  $-\infty$ , deoarece în aceste puncte sintem în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ .

De exemplu: dacă  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ , avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-1) = \infty$ .

Fie funcția rațională:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0).$$

Pentru calculul limitei în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$  avem regulile următoare:

1) Dacă gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului,  $n < m$ , limita funcției raționale în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$  este 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Pentru demonstrație, se împart atât numărătorul cît și numitorul cu  $x^n$  (exponentul  $n$  fiind cel mai mic dintre gradele celor două polinoame) și se obține:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m x^{m-n} + \dots + b_0 \frac{1}{x^n}}, \quad (x \neq 0).$$

Termenii care conțin pe  $\frac{1}{x}$  au limita 0. Numărătorul are deci limita  $a_n$ , iar numitorul are limita infinită.

Rezultă că  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  are limita 0.

De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 5x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{4x^2 + 2x - 1} = 0.$$

2) Dacă gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului,  $n = m$ , atunci limita funcției raționale în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$  este egală cu raportul coeficienților termenilor de cel mai înalt grad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

Pentru demonstrație, se împart și numărătorul și numitorul cu  $x^n$  și se obține:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^n}}, \quad (x \neq 0).$$

Numărătorul are limita  $a_n$ , iar numitorul are limita  $b_n$ , deci funcția rațională are limita  $\frac{a_n}{b_n}$ .

De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x + 7}{-x^3 + 4x - 5} = \frac{2}{-1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^4 + 3}{8x^4 - 2x + 2} = \frac{-7}{8}.$$

3) Dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului,  $n > m$ , funcția rațională are în punctul  $\infty$  sau  $-\infty$  limită infinită, și anume:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \infty} \quad \text{și} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} (-\infty)^{n-m}}$$

Numărătorul și numitorul se împart cu  $x^m$  ( $m$  fiind cel mai mic dintre gradele numărătorului și numitorului) și se obține:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^{n-m} + \dots + a_0 \frac{1}{x^m}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^m}}, \quad (x \neq 0).$$

Limita numitorului este  $b_m$ , limita numărătorului în punctul  $\infty$  este  $a_n \infty$ , iar în punctul  $-\infty$  este  $a_n (-\infty)^{n-m}$ , de unde rezultă că limita funcției raționale este dată de egalitățile de mai sus.

De exemplu:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 2x + 4}{-2x^2 + 3} = \frac{3}{-2} \infty = -\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x + 4}{-2x^2 + 3} = \frac{3}{-2} (-\infty)^{5-2} = -\frac{3}{2} (-\infty) = \infty.$$

### 3. Limitele funcțiilor raționale în punctele în care se anulează numitorul

Fie  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  o funcție rațională și  $x_0$  un punct în care se anulează numitorul,  $Q(x_0) = 0$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0) = 0$ , nu se poate aplica regula limitei cîntului.

În acest caz, se face un studiu direct al funcției raționale.

1) Dacă  $P(x_0) \neq 0$  și  $Q(x_0) = 0$ , funcția rațională  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  are în punctul  $x_0$  limite laterale, infinite, dar, eventual, diferite. Dacă  $x_0$  este rădăcină de ordin par a numitorului  $Q$ , limitele laterale sînt egale.

Exemple.

$$1) \lim_{x \nearrow 0} \frac{x+7}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{x+7}{x^2} = \infty;$$

deci:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+7}{x^2} = \infty.$$

$$2) \lim_{x \nearrow -3} \frac{3x^3 + 2x}{x+3} = \infty, \quad \lim_{x \searrow -3} \frac{3x^3 + 2x}{x+3} = -\infty.$$

Deoarece limitele laterale sînt diferite, funcția nu are limită în  $-3$ .

$$3) \lim_{x \nearrow -5} \frac{x-1}{(x+5)^4} = \lim_{x \searrow -5} \frac{x-1}{(x+5)^4} = -\infty.$$

2) Dacă  $P(x_0) = 0$  și  $Q(x_0) = 0$ , polinoamele  $P$  și  $Q$  se scriu:

$$P(x) = (x - x_0) P_1(x) \quad \text{și} \quad Q(x) = (x - x_0) Q_1(x).$$

Prin urmare, pentru  $x \neq x_0$ , prin simplificare cu  $x - x_0$  obținem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Dacă funcția  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  are limită în punctul  $x_0$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Problema revine, deci, la cercetarea limitei funcției  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  în punctul  $x_0$ .

Exemple.

$$1) \text{ Fie } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}. \text{ Să studiem limita acestei funcții în punctul } 3.$$

Se observă că  $P(3) = 0$  și  $Q(3) = 0$ ; deci pentru  $x \neq 3$  avem:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$$

și, prin urmare:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}.$$



2) Fie  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + x - 2}{(x+2)^3}$ . Să studiem limita acestei funcții în punctul  $-2$ . Se observă că  $P(-2) = 0$  și  $Q(-2) = 0$ ; deci pentru  $x \neq -2$  avem:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)^3} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$$

și, prin urmare:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{(x+2)^3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{(x+2)^2} = -\infty.$$

3) Fie  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-3}{(x-1)^2}$ . Avem  $P(1) = 0$  și  $Q(1) = 0$ , deci, pentru  $x \neq 1$ .

$$\frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}.$$

Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} = -\infty$$

și:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} = \infty.$$

Așadar, funcția considerată nu are limită în punctul 1.

4) Fie  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 4x^2 - 3x + 18}$ . Se observă că  $P(3) = 0$  și  $Q(3) = 0$ ;

deci, pentru  $x \neq 3$ :

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^2 - x - 6)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)};$$

dar:  $P_1(3) = 0$  și  $Q_1(3) = 0$ ; deci, pentru  $x \neq 3$ :

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 4x^2 - 3x + 18} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{4}{5}.$$

#### 4. Limitele unor funcții în cazul $\frac{0}{0}$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (x \text{ măsurat în radiani}).$$

Deoarece  $x$  este măsurat în radiani, pentru  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  avem  $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$ . Dacă, în plus,  $x \neq 0$ , atunci  $\sin x \neq 0$ ; împărțind cu  $|\sin x|$  în inegalitățile precedente, obținem:

$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{1}{|\cos x|}$$

Dar, pentru  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  avem  $\cos x > 0$ , deci  $|\cos x| = \cos x$ . De asemenea  $x$  și  $\sin x$  au același semn, deci  $\frac{|x|}{|\sin x|} = \frac{x}{\sin x}$ . Inegalitățile precedente se scriu:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

deci:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

de unde:

$$-1 \leq -\frac{\sin x}{x} \leq -\cos x.$$

Adunând 1 cu toți membrii, se obține:

$$0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x$$

deci:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x.$$

Dar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Aplicând criteriul majorării rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Observații. 1°. Dacă  $x$  este măsurat în grade și dacă  $y$  este măsurat în radiani, atunci:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{180}{\pi} y} = \frac{\pi}{180} \frac{\sin y}{y}.$$

Dacă  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ , atunci  $y_n = \frac{\pi}{180} x_n \rightarrow 0$  și  $y_n \neq 0$ , deci  $\frac{\sin y_n}{y_n} \rightarrow 1$ , de unde  $\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow \frac{\pi}{180}$ ,

adică:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180},$$

Alegerea radianului ca unitate de măsură a arcelor prezintă deci avantajul că la calculul unor limite se obține un rezultat mai simplu. Acesta este unul dintre motivele pentru care în analiza matematică arcele sînt măsurate în radiani.

2°. Avem de asemenea:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Într-adevăr, pentru  $x \neq 0$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Se trece apoi la limită.

2) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  și dacă  $u(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

Într-adevăr, notînd  $y = u(x)$ , observăm că dacă  $x \rightarrow x_0$  (și  $x \neq x_0$ ), atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ ), deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Din această formulă deducem, în particular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (\beta \neq 0).$$

Într-adevăr, dacă  $\alpha = 0$ , avem  $\sin \alpha x \equiv 0$  și egalitatea este verificată. Dacă  $\alpha \neq 0$ , avem

$$\frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}$$

și se aplică formula precedentă pentru  $u(x) = \alpha x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (\beta \neq 0).$$

Într-adevăr:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \alpha x = \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1$$

deci:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg \alpha x}{\beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} \cdot \frac{1}{\cos \alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

5. Limitele unor funcții în cazul  $1^\infty$

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  și dacă  $u(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

Într-adevăr, notăm  $y = u(x)$  și observăm că dacă  $x \rightarrow x_0$  ( $x \neq x_0$ ), atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ ), deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

De exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = e.$$

Uneori, cînd se ajunge la cazul  $1^\infty$ , se folosește limita de mai sus.

Exemplu.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = \left(1 - 1 + \frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x^2} = \left(\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right)^{-\frac{2x^2}{x+1}}.$$

$$\text{Dar, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}} = e \text{ (deoarece } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x+1} = 0 \text{) și } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2x^2}{x+1}\right) = -\infty;$$

$$\text{deci } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2} = e^{-\infty} = 0.$$

## Recapitularea unor limite importante

### I. Polinoame:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad (x_0 \text{ finit}).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_n (\pm \infty)^n$$

### II. Funcții raționale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad (Q(x_0) \neq 0, x_0 \text{ finit}).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ \frac{a_n}{b_m} \cdot (\pm \infty)^{n-m}, & \text{dacă } n > m \end{cases}$$

### III. Funcția radical:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad (x_0 \text{ finit})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = -\infty$$

### IV. Funcția exponențială:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}, \quad (x_0 \text{ finit sau infinit}).$$

În particular:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

### V. Funcția logaritmică:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0, \quad (0 < x_0 < \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

### VI. Funcții circulare:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad (x_0 \text{ finit})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad (x_0 \text{ finit}, x_0 \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad (x_0 \text{ finit}, x_0 = k\pi).$$

### VII. Alte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (\beta \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### Exerciții

1) Aplicând definiția limitei unei funcții într-un punct, să se demonstreze că:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{7};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{(x-1)^2} = \infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+5}{3x^2-2x+1} = \frac{2}{3};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{4x^3-x^2+1} = \frac{1}{4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+1}{x-3} = \infty;$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} = \infty;$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5+x^4}{x^3-8} = -\infty.$$

2) Să se arate că funcțiile:

$f_1(x) = \sin x$ ;  $f_2(x) = \cos x$ ;  $f_3(x) = \operatorname{tg} x$ ;  $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$  nu au limită în punctul  $\infty$ .

3) Utilizând rezultatele din § 13, nr. 3, să se cerceteze dacă funcțiile următoare au limită în punctele specificate:

$$a) f(x) = \frac{3}{x+7} \text{ în punctul } x = -7;$$

$$b) f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \text{ în punctul } x = -1 \text{ și în punctul } x = 1;$$

$$c) f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2-6x+9)} \text{ în punctul } x = 2 \text{ și în punctul } x = 3;$$

$$d) f(x) = \frac{1}{e^x} \text{ în punctul } x = 0;$$

$$e) f(x) = \frac{1}{1+5^{x-8}} \text{ în punctul } x = 8;$$

$$f) f(x) = \frac{1}{\ln x - 1} \text{ în punctul } x = e;$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x - e}} \text{ în punctele } x = 0 \text{ și } x = 1;$$

$$h) f(x) = \frac{1}{e^{ix-1}} \text{ în punctul } x = \frac{\pi}{4};$$

$$i) f(x) = \frac{\alpha + \sin \frac{1}{x}}{x} \text{ în punctul } x = 0.$$

4) Considerând rădăcinile ecuației  $ax^2 - 6x - 3 = 0$ , ca funcții de  $a$ , să se stabilească dacă aceste rădăcini au limită în punctul  $a = 0$ .

5) Notînd cu  $[x]$  partea întreagă a numărului  $x$ :

$$[x] = \begin{cases} n & \text{dacă } n \leq x < n+1 \\ -n & \text{dacă } -n \leq x < -n+1 \end{cases}$$

să se cerceteze dacă funcțiile următoare au limită în punctele specificate:

- a)  $f(x) = [x]$  în punctul  $x = 2$ ;  
b)  $f(x) = [-x]$  în punctul  $x = -2$ ;

c)  $f(x) = \frac{(-1)^{[x]+2}}{x^2 - 4}$  în punctul  $x = 2$ .

6) Aplicând criteriile din § 14 nr. 2, să se calculeze limitele următoare:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left( \cos \frac{1}{x} \right)^\alpha, (\alpha > 0)$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\lg x}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{x^\beta}, (\alpha > 0, \beta > 0)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + x + 5)$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1)$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x+3}{(2x-1)^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x)$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 2}{2x^2 + 1} - \cos 2x \right)$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x) \ln x$ .

7) Aplicând teoremele asupra operațiilor cu limite de funcții, să se calculeze limitele următoare:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 5x + 2)$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 e^x - x^2 + 5)$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2 + x + 1}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (2x^3 - 5 \sin x)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x-1) \sin^2 x$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} (x^3 \cos x + 7 \lg x)$ .

8) a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + x^2 + 3x - 8)$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2x - 7x^2)$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 1)$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + 5x + 7)$ ;

9) a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - x + 1}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (x^4 - 3x^2 + 3) \sqrt[3]{x}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3x^2)^\pi$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^4 + 1}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} e^{3x^2 - x + 1}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} 10^{\frac{2x+5}{x+1}}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x e^{\operatorname{ctg} x}$ .

h)  $\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 + 5x + 1}$ ;

k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 + x + 2}$

m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,04)^{2x^3 - x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^3 - x - x^2 \ (a > 1)$ ;

l)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \right)^{x^4 + x^2 + 9x}$ ;

n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^{4+3x^2-x+1} \ (0 < a < 1)$ .

Utilizând rezultatele din § 15, să se calculeze limitele următoare:

10) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 13x^3 + 6x^2 + 1)$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} x^4 - 3x^2 - 5x + 7 \right)$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^9 - 20x^7 + x - 19)$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 13x^2 - 2x^7)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(x^2+3)}{5x^3-2}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)(1-3x)}{x^2+x+1}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{2x^3-17x^2+1}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x^2+4}{1-2x}$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-6x-x^2}{3x+7}$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-7x^4}{9x^2-2}$ .

k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ ;

l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ ;

m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-x}}$ ;

n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{27x^3-1}}{\sqrt{x^2-1-x}}$ .

11) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{(x+1)^4(x+3)}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x+7}{(3x-2)(x-2)^8}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-2x^2}{3x^6+x^3+2x^2}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2-9x+5}{(x-1)^2}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \ (n, m \in \mathbb{N})$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}, \ (n \in \mathbb{N})$

12) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{20}}{x-20}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1}^3 + 1 - \sqrt[3]{x^3+2x^2+1})$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5+x^4+1} - x)$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^n+1} - x)$ .

13) Fie funcția:

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{4x+1}} - \lambda x.$$

Să se determine  $\lambda$  astfel încât funcția  $f$  să aibă limită finită în punctul  $\infty$ .

14) Să se determine  $\alpha, \beta, \gamma, p$  astfel încât:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (x\alpha + \beta x + \gamma)) = \frac{7}{3}.$$

15) Fie funcția:

$$f(x) = \sum_{n=1}^m \sqrt{\alpha_n x^2 + \beta_n x + \gamma_n} - \lambda x - \mu.$$

1°. Să se determine condiția ca domeniul maxim de definiție  $E$  al lui  $f$  să conțină o semi-dreaptă.

2°. În cazul în care  $+\infty$  este punct de acumulare al lui  $E$ , să se determine  $\lambda$  și  $\mu$  astfel încât să avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Să se calculeze limitele următoare:

16) a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x^3-5}{x^2+1}};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x^2+1}{3x^2-1} \right)^{\frac{x-5}{(x-1)^4}};$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{2x-3}{(x-\frac{\pi}{2})^2}};$

17) a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(2x-1)}{10x-5};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad (\beta \neq 0);$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{\beta x^2} \quad (\beta \neq 0);$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2};$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{\frac{x^4+2x-1}{3x^2-5}}, \quad (0 < a < 1);$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{e-4x}{(x-\frac{\pi}{4})^{12}}};$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \right)^{\operatorname{arctg} x};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}, \quad (\beta \neq 0);$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2};$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2};$

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$

p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos \alpha x} - \sqrt[3]{\cos \beta x}}{x^2};$

r)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x};$

18) a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arcsin}(1-2x)}{4x^2-1};$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n};$

19) a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x;$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^3};$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}};$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x}};$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{\alpha}{x} \right)^x;$

20) a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x};$

l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x};$

n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$

q)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \in \mathbb{N});$

s)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x - \frac{\pi}{2}}{x - 1};$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha x})}{\ln(1 + e^{\beta x})}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg} x};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^3}};$

h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \frac{\alpha}{x} + \beta \sin \frac{\alpha}{x} \right)^x;$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - \cos x}{x^3};$



## Capitolul IV

### Funcții continue

În capitolul precedent s-a studiat comportarea unei funcții  $f: E \rightarrow R$  în jurul unui punct de acumulare  $x_0$  al lui  $E$ . Punctul  $x_0$  nu aparține în mod necesar lui  $E$ , și chiar dacă  $x_0 \in E$ , valoarea  $f(x_0)$  a lui  $f$  în  $x_0$  nu se ia în considerație.

În acest capitol se studiază comportarea funcției  $f$  nu numai în jurul lui  $x_0$ , dar și în punctul  $x_0$ ; anume, se compară valoarea funcției în  $x_0$  cu valorile sale în punctele din jurul lui  $x_0$ . Pentru aceasta este necesar ca funcția  $f$  să fie definită și în  $x_0$ , adică  $x_0 \in E$ .

Problema care se pune acum se poate formula astfel: să se cerceteze dacă atunci când  $x$  se apropie de  $x_0$ ,  $f(x)$  se apropie de  $f(x_0)$ . Mai precis: luând șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte (nu neapărat diferite de  $x_0$ ) din  $E$ , să se cerceteze dacă șirul  $f(x_n)$  al valorilor funcției are ca limită chiar valoarea  $f(x_0)$ .

Să observăm că în această ultimă formulare, problema are sens chiar dacă  $x_0$  nu este punct de acumulare al lui  $E$  (dar aparține lui  $E$ ). Într-adevăr dacă  $x_0 \in E$ , există totdeauna șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte din  $E$ , anume șirurile constante,  $x_n = x_0$ , începînd de la un anumit rang; iar dacă  $x_0$  nu este punct de acumulare al lui  $E$ , acestea sînt singurele șiruri de puncte din  $E$  convergente către  $x_0$ . Pentru astfel de șiruri avem totdeauna  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  deoarece  $f(x_n) = f(x_0)$ , începînd de la un anumit rang. Așadar, comportarea funcției în puncte  $x_0 \in E$  care nu sînt puncte de acumulare ale lui  $E$  nu necesită un studiu special.

Rămîne de studiat comportarea funcției numai în puncte  $x_0 \in E$  care sînt puncte de acumulare ale lui  $E$ .

De aceea, în tot restul manualului vom considera doar funcții  $f: E \rightarrow R$  definite pe mulțimi  $E$  formate numai din puncte de acumulare, fără a mai face de fiecare dată această specificare. Astfel de mulțimi  $E$  sînt, de exemplu, reuniunile de intervale nereduse la un punct.

#### § 16. Definiția continuității

##### 1. Analiza unui exemplu

În limbajul obișnuit, a spune că o linie curbă este „continuă” înseamnă a spune că ea nu are întreruperi. Dacă într-un punct curba se întrerupe spunem că în acest punct ea nu este continuă sau că este „discontinuu”.

În particular, curba poate fi graficul unei funcții. Se pune atunci problema să vedem la ce revine pentru funcție această proprietate intuitivă de „continuitate” a graficului său. Pentru aceasta, să considerăm mai întîi un exemplu simplu.

Fie  $f$  funcția definită pe intervalul  $[0, 3]$  în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{dacă } 1 < x < 2; \\ 2, & \text{dacă } x = 2; \\ 1, & \text{dacă } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții este trasat în figura 54.

Observăm că acest grafic se întrerupe în dreptul absciselor 1 și 2 din domeniul de definiție al funcției. Să considerăm punctul  $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . În acest punct curba nu se întrerupe, este continuă. Să calculăm limita funcției în punctul  $\frac{1}{2}$ . În jurul punctului  $\frac{1}{2}$  (pentru  $0 \leq x \leq 1$ ) avem  $f(x) = 2x$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x = 1$ .

Din modul în care a fost definită funcția  $f$  rezultă că valoarea sa în punctul  $\frac{1}{2}$  este de asemenea 1,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ .

Așadar, funcția are limită în punctul  $\frac{1}{2}$  și limita este egală cu valoarea funcției în acest punct:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Altfel spus, pentru a calcula limita funcției în punctul  $\frac{1}{2}$ , putem înlocui direct în funcție pe  $x$  cu  $\frac{1}{2}$ .

Dacă luăm alt punct de pe grafic, de abscisă  $x_0$ , în care curba nu se întrerupe (este continuă), va rezulta în mod analog că funcția are limită în punctul  $x_0$  și limita este egală cu valoarea funcției în acest punct:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Altfel spus, dacă într-un punct de abscisă  $x_0$  graficul nu se întrerupe, atunci limita funcției în punctul  $x_0$  se obține înlocuind direct în funcție pe  $x$  cu  $x_0$ .

Să vedem ce se întîmplă în punctul de abscisă 1, în care curba se întrerupe. Se observă că limita la stînga este 2, iar limita de dreapta

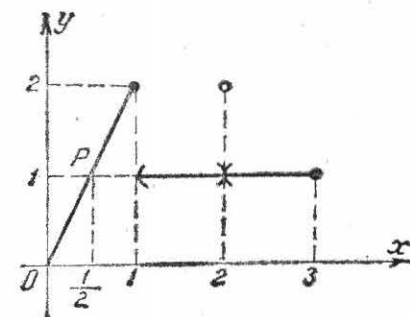


Fig. 54

este 1. Într-adevăr:

$$f(1 - 0) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} 2x = 2;$$

$$f(1 + 0) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} 1 = 1.$$

Așadar,  $f(1 - 0) \neq f(1 + 0)$ , deci funcția nu are limită în punctul 1.

În punctul de abscisă 2, în care curba de asemenea se întrerupe, limitele la stînga și la dreapta sînt egale,  $f(2 - 0) = 1$ ,  $f(2 + 0) = 1$ , deci funcția are limită 1 în punctul 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

Observăm însă că  $f(2) = 2$ , deci limita în punctul 2 există, dar este diferită de valoarea  $f(2)$  a funcției în acest punct.

Așadar, pentru ca graficul să fie continuu într-un punct de abscisă  $x_0$ , nu este suficientă numai existența limitei funcției în punctul  $x_0$ ; în plus această limită trebuie să fie egală cu valoarea funcției în punctul  $x_0$ .

## 2. Definiția continuității unei funcții într-un punct

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție. După cum s-a convenit în introducerea capitolului, mulțimea  $E$  este formată numai din puncte de acumulare.

Considerațiile de la numărul precedent conduc la:

**Definiția 1.** Se spune că funcția  $f$  este continuă într-un punct  $x_0$  din  $E$ , dacă  $f$  are limită în  $x_0$  și dacă această limită este egală cu  $f(x_0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Această egalitate se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

ceea ce se poate formula în mod sugestiv spunînd că „o funcție continuă comută cu limita”. După cum se va vedea mai departe, proprietatea de comutare are loc și dacă se înlocuiește  $x$  cu anumite funcții  $u(x)$  (v. continuitatea funcțiilor compuse).

Deoarece limita unei funcții se definește cu ajutorul șirurilor, continuitatea se poate de asemenea defini cu ajutorul șirurilor:

**Teorema 1.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $x_n \rightarrow x_0$  de puncte din  $E$  avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

**Demonstrație.** Egalitatea  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  are loc dacă și numai dacă pentru orice șir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$  avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Dar, deoarece  $f(x_0)$  este limita șirului  $(f(x_n))$ , o parte din termenii  $f(x_n)$  (sau chiar toți) pot fi egali cu limita  $f(x_0)$  ceea ce înseamnă că o parte din termenii  $x_n$  (sau chiar toți) pot fi egali cu  $x_0$ , astfel încît restricția  $x_n \neq x_0$  este superflua.

Teorema este astfel demonstrată.

Dacă funcția  $f$  nu este continuă într-un punct  $x_0$  din domeniul ei de definiție  $E$ , se spune că este discontinuă în punctul  $x_0$ . După cum rezultă și din exemplul de la nr. 1, o funcție  $f$  este discontinuă în  $x_0$ , fie în cazul cînd funcția nu are limită în  $x_0$ , fie în cazul cînd, deși funcția  $f$  are limită în  $x_0$ , limita este diferită de valoarea  $f(x_0)$  a funcției în acest punct.

**Observație importantă.** Pentru a stabili dacă o funcție este continuă sau discontinuă într-un punct  $x_0$ , trebuie să comparăm limita funcției în punctul  $x_0$  cu valoarea  $f(x_0)$  a funcției în acest punct. Pentru aceasta trebuie ca  $f$  să fie definită în  $x_0$ , adică punctul  $x_0$  să aparțină domeniului de definiție al funcției  $f$ .

În punctele în care funcția nu este definită nu are sens să se pună problema continuității sau discontinuității.

Astfel, funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$  nu este definită în punctul  $x = \frac{\pi}{2}$ , așa încît nu trebuie spus

nici că este continuă, nici că este discontinuă în punctul  $\frac{\pi}{2}$ ; problema continuității sau discontinuității în acest punct, pur și simplu nu are sens.

Tot astfel, pentru funcția  $f(x) = \log_a x$  nu are sens să se spună că este discontinuă în punctul 0 sau în punctul  $-3$ , deoarece nu este definită în aceste puncte.

De asemenea, dacă  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  este raportul a două funcții  $P$  și  $Q$  și dacă  $x_0$  este o rădăcină a numitorului,  $Q(x_0) = 0$ , funcția nu este definită în  $x_0$ , deci nu are sens să se pună problema continuității sau discontinuității în acest punct, chiar dacă funcția are limită în  $x_0$ .

De exemplu, funcția  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  nu este definită în punctul 0, deoarece numitorul se

anulează în acest punct. Funcția are însă limită în punctul 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Totuși, nu vom spune că funcția este discontinuă în punctul 0.

**Observație.** Noțiunea precisă de continuitate a funcțiilor a fost degajată din noțiunea intuitivă de neîntrerupere a curbelor, dar aceste două noțiuni nu sînt în totul echivalente.

Astfel, graficul funcției  $\operatorname{tg} x$  se întrerupe în dreptul punctului  $\frac{\pi}{2}$ , dar nu spunem că  $\operatorname{tg} x$  este discontinuă în  $\frac{\pi}{2}$  (deoarece nu este definită în acest punct).

Pe de altă parte, există unele funcții cărora nu le putem trasa graficul, dar le putem aplica definiția continuității, astfel încît în acest caz nu mai putem compara noțiunea de continuitate a funcției cu cea de neîntrerupere a graficului. De exemplu, funcția:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \text{ irațional} \\ 0 & \text{pentru } x \text{ rațional} \end{cases}$$

este continuă în 0 (deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  și  $f(0) = 0$ ), dar nu-i putem trasa graficul ca să putem constata că nu se întrerupe în origine.

**Definiția 2.** Se spune că o funcție  $f: E \rightarrow R$  este continuă pe o mulțime  $A \subset E$  dacă este continuă în fiecare punct din  $A$ .

Dacă o funcție este continuă pe tot domeniul ei de definiție  $E$ , se spune, mai simplu, că este continuă (fără altă specificare asupra mulținii pe care are această proprietate).

Funcțiile elementare sînt continue:

1) Dacă  $P(x)$  este un polinom, avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad (x_0 \in R).$$

2) Dacă  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  este o funcție rațională și dacă  $Q(x_0) \neq 0$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ , ( $x_0 \geq 0$ ) și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}$  ( $x_0 > 0$ ).

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n+1]{x} = \sqrt[n+1]{x_0}$ , ( $x_0 \in R$ ) și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[n+1]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{x_0}}$ , ( $x_0 \neq 0$ ).

4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ , ( $x_0 \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ) și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha}$ , ( $x_0 > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ).

5)  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ , ( $a > 0$ ).

6)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x_0 > 0$ ).

7)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ , ( $x_0 \in R$ ).

$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ , ( $x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg),

$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$ , ( $x_0 \neq k\pi$ ,  $k$  întreg).

8)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcsin} x = \operatorname{arcsin} x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccos} x = \operatorname{arccos} x_0$ , ( $-1 \leq x_0 \leq 1$ )

$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} x_0$ , ( $x_0 \in R$ ).

Așadar, polinoamele, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile circulare directe și funcțiile circulare reciproce sînt continue (pe tot domeniul lor de definiție).

Se va vedea mai departe că și celelalte funcții elementare (care se obțin din cele precedente prin operații algebrice, operația de compunere și operația de inversare) sînt de asemenea continue.

## § 17. Operații cu funcții continue

Deoarece definiția continuității este bazată pe limite de funcții, o serie de proprietăți ale limitelor de funcții se regăsesc la funcțiile continue.

### 1. Operații algebrice

**Teorema 1.** Dacă  $f, g: E \rightarrow R$  sînt două funcții continue, atunci funcțiile  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $\alpha f$ , ( $\alpha$  real),  $\frac{f}{g}$  și  $\frac{f}{g}$  sînt de asemenea continue.

**Demonstrație.** Fie  $x_0$  un punct oarecare din  $E$ . Deoarece  $f$  și  $g$  sînt continue pe  $E$ , sînt în particular continue în  $x_0$ , deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0),$$

deci  $f+g$  este continuă în  $x_0$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$ , rezultă că  $f+g$  este continuă în orice punct din  $E$ , adică  $f+g$  este continuă pe  $E$ .

La fel se arată că funcțiile  $f-g$ ,  $\alpha f$  și  $fg$  sînt continue pe  $E$ , și că funcția  $\frac{f}{g}$  este continuă pe mulțimea punctelor  $x \in E$  în care  $g(x) \neq 0$ .

Prin inducție completă se arată că dacă  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sînt funcții continue pe  $E$ , atunci suma  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  și produsul  $f_1 f_2 \dots f_n$  sînt de asemenea continue pe  $E$ .

**Exemple.**

1)  $f(x) = e^x + \cos x + (2x^2 + 3)$  este continuă pe  $R$ , ca sumă a trei funcții continue,  $e^x$ ,  $\cos x$  și polinomul  $2x^2 + 3$ .

2)  $f(x) = \sqrt{x} a^x \sin x$  este continuă pe  $[0, \infty]$  ca produs a trei funcții continue pe  $[0, \infty)$ .

3)  $f(x) = \frac{1}{x}$  este continuă pe  $R \setminus \{0\}$  ca raport a două funcții continue: funcția constantă  $f(x) \equiv 1$  și funcția identică  $g(x) = x$ .

4)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$  este continuă pe  $[0, \infty) \setminus \{1\}$ , deoarece este cîtlul a două funcții continue pe  $[0, \infty)$ , iar numitorul se anulează în punctul 1.

### 2. Continuitatea funcțiilor compuse

Fie  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{f} R$  două funcții și  $h = f \circ u: E \rightarrow R$  funcția compusă:

$$h(x) = f(u(x)), \text{ pentru } x \in E.$$

Teorema următoare exprimă proprietatea funcțiilor continue de a comuta cu limitele.

**Teorema 2.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$  (nu neapărat din  $E$ ).

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = y_0 \in F$  și dacă  $f$  este continuă în  $y_0$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

**Demonstrație.** Fie  $x_n \rightarrow x_0$  un șir de puncte  $x_n \neq x_0$  din  $E$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = y_0$ , avem  $u(x_n) \rightarrow y_0$ . Notînd  $y_n = u(x_n)$ , avem deci  $y_n \in F$  și  $y_n \rightarrow y_0$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $y_0$ , deducem că  $f(y_n) \rightarrow f(y_0)$ , adică  $h(x_n) = f(u(x_n)) \rightarrow f(y_0)$ .

Cum șirul  $(x_n)$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = f(y_0)$  adică:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(y_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

*Exemplu.*

Deoarece funcția  $\ln y$  este continuă în punctul  $y_0 = e$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln e = 1.$$

Teorema care urmează arată că prin compunerea funcțiilor continue se obțin tot funcții continue.

**Teorema 3.** Dacă  $u$  este continuă într-un punct  $x_0 \in E$  și dacă  $f$  este continuă în punctul corespunzător  $y_0 = u(x_0) \in F$ , atunci funcția compusă  $h = f \circ u$  este continuă în  $x_0$ .

**Demonstrație.** Într-adevăr:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)) = f(u(\lim_{x \rightarrow x_0} x)) = f(u(x_0)) = h(x_0).$$

*Exemplu.*

1)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  este continuă pentru  $x \geq 1$ , fiind funcția compusă a funcțiilor continue  $\varphi(u) = \sqrt{u}$  și  $u(x) = x^2 - 1$ .

2)  $f(x) = \sin(3x^2 - 5)$  este continuă pe  $R$ , deoarece funcțiile  $\varphi(u) = \sin u$  și  $u(x) = 3x^2 - 5$  sînt continue pe  $R$ .

3)  $f(x) = e^{5x^2 - 2}$  este continuă pe  $R$ , deoarece  $\varphi(u) = e^u$  și  $u(x) = 5x^2 - 2$  sînt funcții continue pe  $R$ .

4)  $f(x) = \sin(\sin x + \sqrt{x})$  este continuă pe  $[0, \infty)$ .

## § 18. Funcții continue pe intervale

### 1. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue au proprietatea importantă de a transforma un interval oarecare (închis sau nu, mărginit sau nemărginit) tot într-un interval. Această proprietate este cunoscută sub numele de *proprietatea lui Darboux*.

Proprietatea lui Darboux nu este caracteristică funcțiilor continue. După cum se va vedea mai departe, funcțiile derivate au de asemenea această proprietate, fără ca aceste funcții să fie în mod necesar continue.

Să observăm că un interval  $J$  este caracterizat prin aceea că dacă  $J$  conține două puncte  $\alpha < \beta$ , atunci conține toate punctele cuprinse între  $\alpha$  și  $\beta$ , adică întregul interval închis  $[\alpha, \beta]$ .

**Teorema 1.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$ , atunci mulțimea valorilor  $f(I)$  este de asemenea un interval.

Conform observației precedente, pentru a demonstra că mulțimea valorilor  $f(I)$  este un interval, trebuie arătat că, dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt două puncte arbitrare din  $f(I)$ , atunci toate punctele cuprinse între  $\alpha$  și  $\beta$  aparțin de asemenea lui  $f(I)$ ; adică, dacă  $\alpha = f(a)$  și  $\beta = f(b)$  sînt două valori ale funcției, luate în două puncte arbitrare  $a$  și  $b$  din  $I$ , atunci orice număr  $\lambda$  cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$  este de asemenea valoare a funcției. Renunțăm la demonstrația destul de laborioasă, a acestei teoreme.

**Corolarul 1.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$  și dacă ia valori de semne contrare în două puncte  $a < b$  din  $I$ , atunci  $f$  ia valoarea 0 cel puțin într-un punct cuprins între  $a$  și  $b$ .

Într-adevăr, funcția continuă  $f$  transformă intervalul  $[a, b]$  tot într-un interval,  $J$ , care conține numerele de semne contrare  $f(a)$  și  $f(b)$ , deci intervalul  $J$  conține orice număr cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$ , în particular pe 0; există deci (cel puțin) un punct  $x_0 \in (a, b)$ , astfel încît  $f(x_0) = 0$  (fig. 55).

*Exemplu.*

1) Fie ecuația  $\sin x = 0$ . Funcția  $f(x) = \sin x$  este continuă pe  $R$  și  $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ , iar  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Ecuația are deci cel puțin o soluție cuprinsă între  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$ . (Se știe că ecuația are o singură soluție între  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$ ,

anume  $x = 0$ .)

2) Fie ecuația  $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ . Funcția  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$  este continuă pe  $R$ , fiind un polinom. Avem  $f(0) = -2$  și  $f(1) = 2$ , deci ecuația are cel puțin o rădăcină între 0 și 1.

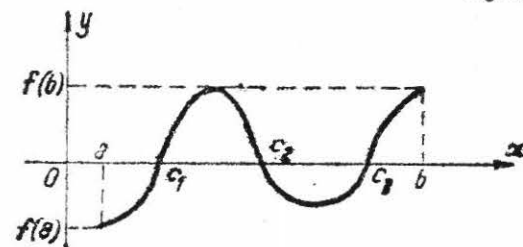


Fig. 55



**Corolarul 2.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$  și nu se anulează pe intervalul  $I$ , atunci  $f$  păstrează același semn pe  $I$ .

Într-adevăr, dacă  $f$  ar avea valori de semne contrare în două puncte  $a, b$  din  $I$ , atunci  $f$  s-ar anula cel puțin într-un punct din  $I$ , ceea ce contrazice ipoteza.

Această consecință permite uneori să stabilim intervalele pe care o funcție continuă păstrează același semn.

Fie  $f$  o funcție continuă pe un interval  $I$ . Să presupunem că funcția se anulează într-un număr finit de puncte din  $I$ , pe care le scriem în ordine crescătoare:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n.$$

În fiecare interval  $(x_i, x_{i+1})$  funcția nu se mai anulează, deci păstrează același semn pe acest interval.

La stînga lui  $x_1$  funcția nu se mai anulează, deci la stînga lui  $x_1$  funcția păstrează același semn.

De asemenea, la dreapta lui  $x_n$  funcția păstrează același semn.

Pentru a stabili ce semn au toate valorile funcției în intervalul  $(x_i, x_{i+1})$ , este suficient să stabilim semnul valorii funcției într-un singur punct din  $(x_i, x_{i+1})$ .

*Exemple.*

1) Fie  $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$  definită pe  $R$ . Funcția se anulează în punctele  $-\frac{1}{2}$  și  $2$ .

Intervalele pe care funcția păstrează același semn sînt:  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}, 2)$ ,  $(2, \infty)$ . Pentru a stabili semnul funcției, calculăm valoarea sa în cîte un punct din fiecare interval. Astfel,  $f(-1) = -3$ , deci în primul interval funcția este strict negativă;  $f(0) = 2$ , deci în al doilea interval funcția este strict pozitivă;  $f(3) = -7$ , deci în al treilea interval funcția este strict negativă.

Aceste rezultate le trecem într-un tablou:

| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$ | $\infty$ |
|--------|-----------|----------------|-----|----------|
| $f(x)$ | —         | 0              | +   | —        |

Am găsit astfel un rezultat pe care-l putem obține și aplicînd regula semnului trinomialui.

2) Fie  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$  definită pe  $R \setminus \{-1, 0\}$ .

Punctele în care se anulează numărătorul sînt  $1$  și  $2$ , iar cele în care se anulează numitorul sînt  $-1$  și  $0$ . Semnul funcției se obține studiînd semnul numărătorului și al numitorului. Formăm următorul tablou:

| $x$            | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\infty$ |
|----------------|-----------|------|-----|-----|-----|----------|
| $x^2 - 3x + 2$ | +         | +    | +   | 0   | 0   | +        |
| $x^2 + x$      | +         | 0    | —   | 0   | +   | +        |
| $f(x)$         | +         |      | —   |     | +   | 0        |

Pentru stabilirea semnului numărătorului se pot considera valorile funcției  $x^2 - 3x + 2$  în punctele  $0, \frac{1}{2}, 3$ , iar pentru stabilirea semnului numitorului se pot considera valorile funcției  $x^2 + x$  în punctele  $-2, -\frac{1}{2}, 1$ .

Deoarece funcția  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$  are același semn în punctele în care este definită ca și produsul  $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)$ , care se anulează în punctele  $-1, 0, 1, 2$ , rezultă că s-ar fi putut alcătui direct următorul tablou:

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\infty$ |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----|----------|
| $f(x)$ | +         |      | —   |     | +   | 0        |

## 2. Continuitatea unor funcții monotone

După cum s-a specificat la începutul numărului precedent, dacă o funcție are proprietatea lui Darboux ea nu este neapărat continuă (de exemplu, funcțiile derivate au proprietatea lui Darboux dar pot să nu fie continue). Dacă însă, pe lângă proprietatea lui Darboux se adaugă condiția de monotonie, atunci continuitatea este asigurată. Așadar, pentru funcții monotone pe un interval, proprietatea lui Darboux este echivalentă cu proprietatea de continuitate. În mod precis, se poate demonstra:

**Teorema 2.** Dacă  $f$  este o funcție monotonă pe o mulțime  $E$  și dacă mulțimea valorilor  $f(E)$  este un interval, atunci  $f$  este continuă pe  $E$ .

De aici rezultă teorema de continuitate a funcțiilor reciproce:

**Teorema 3.** Dacă  $f$  este o funcție strict monotonă pe un interval  $I$ , atunci reciproca sa  $f^{-1}$  este continuă.

Într-adevăr, dacă notăm  $E = f(I)$ , atunci aplicația  $f: I \rightarrow E$  este bijectivă. Funcția reciprocă  $f^{-1}: E \rightarrow I$  este strict monotonă, (ca și  $f$ ), iar mulțimea valorilor sale este intervalul  $I$ . Conform teoremei 3, funcția  $f^{-1}$  este continuă.

*Exemple.*

1) Dacă  $n$  este natural, funcția  $f(x) = x^n$  este strict crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ . Urmează ca funcția radical  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  este continuă.

2) Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , funcția exponențială  $f(x) = a^x$  este strict monotonă pe intervalul  $R$ . Urmează că funcția logaritmică  $f^{-1}(x) = \log_a x$  este continuă.

3) Funcția  $f(x) = \sin x$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Urmează că funcția reciprocă  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  este continuă.

La fel se arată că și celelalte funcții circulare reciproce  $\arccos$ ,  $\arctg$ ,  $\operatorname{arccotg}$ , sînt continue.



Observația de la sfârșitul § 16, relativă la continuitatea funcțiilor elementare este acum pe deplin justificată: într-adevăr, operațiile algebrice, operația de compunere și operația de inversare păstrează continuitatea, iar funcțiile elementare se obțin tocmai aplicând aceste operații unor funcții continue, ca: polinoamele, funcțiile raționale etc. (v. § 4, nr. 3).

### 3. Funcții continue pe un interval închis și mărginit

După cum s-a arătat la nr. 1, o funcție continuă transformă un interval  $I$  într-un interval  $J$ . Trebuie subliniat însă că, în general, intervalele  $I$  și  $J$  nu sînt de același tip. De exemplu,  $I$  poate fi mărginit, iar  $J$  nemărginit;  $I$  poate fi închis, iar  $J$  deschis sau închis numai la o extremitate etc.

Funcțiile continue au însă proprietatea importantă de a transforma un interval închis și mărginit tot într-un interval închis și mărginit.

Mai precis, se poate demonstra teorema următoare (care va fi folosită în capitolul VI, pentru demonstrarea teoremei lui Rolle).

**Teorema 4.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe intervalul închis și mărginit  $I = [a, b]$ , atunci mulțimea valorilor  $f(I)$  este de asemenea un interval închis și mărginit  $[m, M]$ :

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Din această teoremă rezultă că toate valorile funcției sînt cuprinse între  $m$  și  $M$ :

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ pentru } a \leq x \leq b.$$

Numerele  $m$  și  $M$  sînt de asemenea valori ale funcției, și anume  $m$  este cea mai mică valoare, iar  $M$  este cea mai mare valoare a funcției; există deci cel puțin un punct  $x_m \in [a, b]$  în care funcția ia cea mai mică valoare  $m$ :

$$f(x_m) = m$$

și cel puțin un punct  $x_M \in [a, b]$  în care funcția ia cea mai mare valoare  $M$ :

$$f(x_M) = M.$$

**Observații.** 1°. Nu trebuie să se creadă că funcția  $f$  transformă neapărat extremitățile intervalului  $[a, b]$  în extremitățile intervalului  $[m, M]$ . Cea mai mică valoare  $m$  și cea mai mare valoare  $M$  pot fi luate în puncte din interiorul intervalului  $[a, b]$ .

De exemplu, pentru funcția  $f(x) = \sin x$  definită pe intervalul  $(0, 2\pi)$ , cea mai mică valoare este  $-1 = \sin \frac{3\pi}{2}$ , iar cea mai mare valoare este  $1 = \sin \frac{\pi}{2}$ .

2°. Dacă  $f$  este definită pe un interval care nu este închis (sau care nu este mărginit), atunci este posibil ca  $f$  să nu aibă o cea mai mică valoare sau o cea mai mare valoare.

De exemplu, funcția  $f(x) = x$  definită pe intervalul deschis  $(0, 1)$  nu are o valoare care să fie mai mică decît toate celelalte valori ale sale și, de asemenea, nu are o valoare mai mare decît toate valorile sale.

## Exerciții

1) Aplicînd direct definiția continuității într-un punct și pe o mulțime, să se arate că următoarele funcții sînt continue (precizînd și mulțimile pe care sînt continue):

$$a) f(x) = \frac{x^2 - \sin x}{x + 1}. \quad b) f(x) = \frac{xe^x - 3e^{-x}}{2x - 9}.$$

$$c) f(x) = 2x^2 - 7x + \sqrt[3]{x-2} + 1. \quad d) f(x) = \sqrt{(4x^2 - 9)^{-3}} + 2 \operatorname{tg} x.$$

2) Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } 0 \leq x \leq 2; \\ x + 2, & \text{pentru } 2 < x < 5. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \neq 0; \\ 0, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x - 1, & \text{pentru } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{pentru } -2 \leq x < 2; \\ 1, & \text{pentru } x = 2; \\ 5x - 1, & \text{pentru } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^2}, & \text{pentru } x \neq -1; \\ 5, & \text{pentru } x = -1. \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{pentru } x \neq 0; \\ 1, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

3) Să se studieze continuitatea următoarelor funcții, discutînd în raport cu  $\alpha$ :

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1; \\ 3\alpha x + 3, & \text{pentru } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{pentru } x \neq 2; \\ \alpha, & \text{pentru } x = 2. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{pentru } x \neq 1. \\ \alpha, & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{pentru } x < 0; \\ \alpha + x, & \text{pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

# Derivate

## § 19. Probleme care conduc la noțiunea de derivată

### 1. Viteza unui mobil în mișcare rectilinie

Să considerăm un mobil  $M$  care se mișcă *rectiliniu și uniform*. Aceasta înseamnă că traiectoria sa este o dreaptă și că el parcurge spații egale în intervale de timp egale (spațiul este proporțional cu timpul în care a fost parcurs).

Viteza  $v$  a mobilului se poate obține măsurând spațiul  $s$  parcurs într-un număr  $t$  de unități de timp și formând raportul  $v = \frac{s}{t}$ . În fiecare moment, mobilul are aceeași viteză  $v$ .

Să presupunem acum că mobilul  $M$  se mișcă *rectiliniu* în același sens și *neuniform* — adică în intervale de timp egale parcurge spații neegale (spațiul nu este proporțional cu timpul în care a fost parcurs). Alegând ca unitate de timp, de exemplu, secunda, într-o secundă mobilul parcurge spațiul  $s'$ , în altă secundă spațiul  $s''$  ș.a.m.d. Nu mai putem afirma că viteza este spațiul parcurs în unitatea de timp, deoarece, în general,  $s'$  și  $s''$  sînt diferite. Ce se înțelege în acest caz prin *viteza mobilului la un anumit moment*?

Pentru a lămuri mai bine modul în care se pune această problemă, să alegem un exemplu simplu: căderea corpului în vid. Din fizică se știe că distanța  $s(t)$  (măsurată în metri) parcursă de mobilul  $M$  în primele  $t$  secunde este dată de egalitatea  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ , unde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Astfel, după  $t_1 = 1$ , secundă mobilul parcurge distanța  $s(1) = \frac{1}{2}g$  metri, după  $t_2 = 2$  secunde parcurge distanța  $s(2) = 2g$  metri etc. În a doua secundă, mobilul a parcurs distanța  $s(2) - s(1) = \frac{3}{2}g$  metri, *diferită* de distanța  $\frac{1}{2}g$  metri parcursă în prima secundă. Distanța parcursă între două momente  $t_0$  și  $t_1$  este  $s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_0^2$ . Diferența  $t_1 - t_0$  se numește, în mod obișnuit, *creșterea timpului* de la  $t_0$  la  $t_1$ , iar distanța  $s(t_1) - s(t_0)$  se numește *creșterea spațiului*, corespunzătoare creșterii  $t_1 - t_0$  a timpului.

Dacă facem raportul dintre creșterea spațiului,  $s(t_1) - s(t_0)$  și creșterea timpului,  $t_1 - t_0$ , obținem:

$$v_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2}g \frac{t_1^2 - t_0^2}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2}g(t_1 + t_0).$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{1 - \cos x}, & \text{pentru } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}; \\ \alpha, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \text{ rațional}; \\ 0 & \text{pentru } x \text{ irațional}. \end{cases}$$

[Funcția  $f$  astfel definită se numește *funcția lui Dirichlet*.]

4) Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul următoarelor funcții:

$$a) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + 1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$

$$c) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^{2n}}{1 + e^{nx}}, \quad x \leq 0.$$

5) Utilizând teorema 2 de la § 17 să se calculeze următoarele limite (verificând de fiecare dată condițiile din enunțul teoremei):

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 - x + 1}{e^{x^2} + x + 5};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}.$$

6) Să se studieze semnul următoarelor funcții:

$$a) f(x) = x^4 - 10x^2 + 9;$$

$$b) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2;$$

$$c) f(x) = \frac{(2-x)(x+1)^2}{x(x+3)};$$

$$d) f(x) = \sin x - \cos x \text{ definită pe } [0, 2\pi];$$

$$e) f(x) = 4 \sin^2 x - 1, \text{ definită pe } [0, 2\pi];$$

$$f) f(x) = 2e^x - 5;$$

$$g) f(x) = 1 + 2 \ln x;$$

$$h) f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x + 2.$$

Numărul obținut îl putem considera ca o *viteză medie* a mobilului în intervalul de timp dintre  $t_0$  și  $t_1$ , în sensul că dacă un alt mobil s-ar mișca rectiliniu și *uniform* cu viteza  $v_1$ , el ar parcurge în intervalul de timp dintre  $t_0$  și  $t_1$  aceeași distanță ca și mobilul inițial. Într-adevăr:

$$v_1(t_1 - t_0) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} (t_1 - t_0) = s(t_1) - s(t_0).$$

În intervalul de timp dintre  $t_0$  și alt moment,  $t_2$ , viteza medie este:

$$v_2 = \frac{s(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0} = \frac{1}{2} g(t_2 + t_0).$$

În general, viteza medie în intervalul de timp dintre  $t_0$  și un moment oarecare  $t$  este:

$$v(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2} g(t + t_0).$$

Pentru ca această viteză medie să exprime cu o aproximație cât mai bună ceea ce înțelegem intuitiv prin viteza pe care o are mobilul în momentul  $t_0$ , trebuie să luăm intervalele de timp din ce în ce mai mici, adică trebuie ca  $t$  să fie din ce în ce mai apropiat de  $t_0$ . Sîntem astfel conduși să calculăm limita acestei viteze medii cînd creșterea timpului,  $t - t_0$ , tinde către zero sau, ceea ce este același lucru, cînd  $t$  tinde către  $t_0$ . Obținem astfel:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2} g(t + t_0) = gt_0.$$

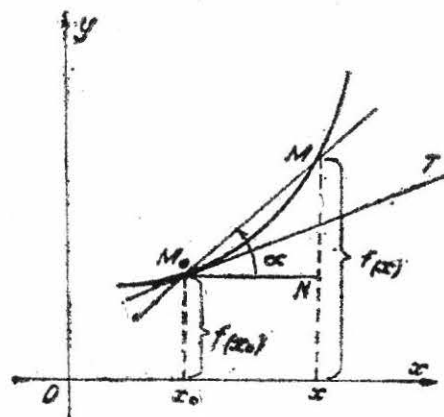
Această limită se ia, *prin definiție*, ca viteza  $v(t_0)$  a mobilului în momentul  $t_0$ :

$$v(t_0) = gt_0.$$

## 2. Tangenta la o curbă

Să considerăm o funcție definită pe un interval  $I$  și graficul său  $C$  (fig. 56). Să luăm două puncte  $M_0(x_0, f(x_0))$  și  $M(x, f(x))$  pe  $C$ , și să le unim printr-o dreaptă.

Fig. 56



Obținem secanta  $M_0M$  care formează cu axa  $Ox$  un unghi  $\alpha$ . Paralela prin  $M$  la  $Oy$  întâlnește paralela prin  $M_0$  la  $Ox$  în punctul  $N$ . S-a format triunghiul dreptunghic  $M_0NM$ , care are catetele  $NM_0 = x - x_0$  și  $MN = f(x) - f(x_0)$ . Unghiul  $\alpha$  este dat de egalitatea:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă luăm alt punct  $M'(x', f(x'))$ , secanta  $M_0M'$  formează cu axa  $Ox$  unghiul  $\alpha'$  dat de egalitatea:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

Se vede că, pentru valori ale lui  $x$  diferite, obținem unghiuri  $\alpha$  diferite. Unghiul  $\alpha$  este deci funcție (depinde) de  $x$ . Ce se întâmplă dacă luăm pe  $x$  din ce în ce mai apropiat de  $x_0$ ? Unghiul  $\alpha$  se apropie și el din ce în ce mai mult de o valoare  $\alpha_0$ ? Sau, cu alte cuvinte, secanta  $M_0M$  se apropie, ca poziție, din ce în ce mai mult de o poziție limită  $M_0T$  (fig. 56)? Sîntem deci conduși și în acest caz să considerăm limita:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

În cazul cînd această limită există și este finită, ea este coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \alpha_0$  al unei drepte  $M_0T$ , care este, *prin definiție*, tangenta la curba  $C$  în punctul  $M_0$ . Dacă limita precedentă există și este infinită ( $+\infty$  sau  $-\infty$ ), vom spune de asemenea că graficul  $C$  admite tangentă în punctul  $M_0$ , și anume tangenta la grafic în acest punct este, prin definiție, dreapta  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ .

## § 20. Definiția derivatei

### 1. Definiția derivatei într-un punct

Cele două exemple de mai sus, unul din fizică și altul din geometrie, ca de altfel și alte exemple, conduc la studiul limitei raportului  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  în punctul  $x_0$ . Datorită importanței limitei acestui raport, în analiza matematică ea este studiată, în general, independent de problema din care a provenit.

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție. După cum s-a convenit în partea introductivă a capitolului IV (*Funcții continue*), mulțimea  $E$  este formată numai din puncte de acumulare (de exemplu,  $E$  poate fi o reuniune de intervale nereduse la un punct).

Fie  $x_0 \in E$ . Pentru fiecare punct  $x \neq x_0$  din  $E$  să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$R(x)$  este o funcție definită pentru orice punct  $x$  din  $E$ , cu excepția lui  $x_0$ , unde numitorul (ca și numărătorul) se anulează. Deși funcția  $R$  nu este definită în  $x_0$ , se poate pune problema cercetării limitei sale în  $x_0$ , deoarece  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $E \setminus \{x_0\}$  pe care este definită funcția  $R$ .

**Definiția 1.** Se spune că funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$  dacă limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există și este finită.

Limita însăși se numește derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se obișnuiește, de asemenea, să se noteze derivata  $f'(x_0)$  cu  $Df(x_0)$  sau  $\frac{df(x_0)}{dx}$ .

Dacă limita raportului  $R(x)$  este infinită ( $\infty$  sau  $-\infty$ ), ea se numește, de asemenea, derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează tot cu  $f'(x_0)$ . În acest caz, nu mai spunem că funcția este derivabilă în  $x_0$ . Vom distinge astfel expresia „funcția  $f$  are derivată (finită sau infinită)”, de expresia „funcția  $f$  este derivabilă”.

Diferența  $x - x_0$  se numește adesea creșterea argumentului de la  $x_0$  la  $x$ , iar diferența  $f(x) - f(x_0)$  se numește atunci creșterea funcției, corespunzătoare creșterii  $x - x_0$  a argumentului. Funcția  $R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  este, așadar, raportul dintre creșterea funcției și creșterea argumentului. Se poate spune deci:

Derivata  $f'(x_0)$  este limita raportului  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  dintre creșterea funcției și creșterea argumentului, când creșterea argumentului tinde către 0.

Să considerăm graficul  $C$  al funcției  $f$  (fig. 56). Considerațiile de la nr. 2 din paragraful precedent sugerează următoarea interpretare geometrică a derivatei:

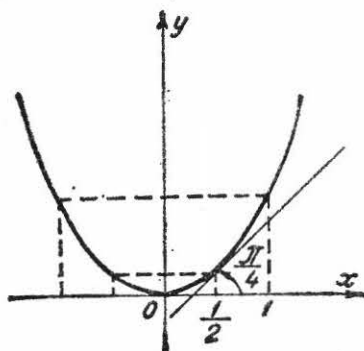
Dacă funcția  $f$  are derivată în punctul  $x_0$ , graficul său  $C$  admite tangentă în punctul corespunzător  $M_0(x_0, f(x_0))$ , și anume: dacă derivata este finită, coeficientul unghiular al tangentei este egal cu  $f'(x_0)$ , iar dacă derivata este infinită, tangenta este paralelă cu axa  $Oy$ .

**Exemplu:**

Fie funcția  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ . Graficul său este o parabolă (fig. 57). Să cercetăm dacă această funcție este derivabilă în punctul  $\frac{1}{2}$ . Pentru aceasta să formăm raportul  $R(x)$ :

$$R(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}.$$

Fig. 57



Acest raport are limită finită în punctul  $\frac{1}{2}$ , deci

$f$  este derivabilă în  $\frac{1}{2}$  și:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Graficul funcției are tangentă în punctul  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  și coeficientul său unghiular este 1, deci unghiul format de tangentă cu axa  $Ox$  este  $\frac{\pi}{4}$ .

## 2. Continuitatea funcțiilor derivabile

În definiția derivatei unei funcții într-un punct nu s-a pus condiția ca funcția să fie continuă în acest punct. Continuitatea funcției rezultă din teorema următoare.

**Teorema 1.** Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acest punct.

**Demonstrație.** Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă într-un punct  $x_0 \in E$  și fie  $f'(x_0)$  derivata sa în acest punct:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru orice punct  $x \neq x_0$  din  $E$  putem scrie egalitatea:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0), \text{ deci } f \text{ este continuă în } x_0.$$

**Observație.** Nu trebuie să se creadă că, și reciproc, orice funcție continuă este derivabilă. De exemplu, funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $R$  este continuă în 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0);$$

dar această funcție nu este derivabilă în 0. Într-adevăr, să formăm raportul  $R(x)$ :

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x > 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Acest raport are limite laterale diferite în 0;

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \text{ și } \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1,$$

deci nu are limită în 0 și deci  $f$  nu este derivabilă în 0.

În mulțimea tuturor funcțiilor continue, submulțimea funcțiilor derivabile este chiar „foarte săracă”.

## 3. Derivata unei funcții pe o mulțime

**Definiția 2.** Se spune că o funcție  $f: E \rightarrow R$  este derivabilă pe o mulțime  $A \subset E$  dacă este derivabilă în orice punct din  $A$ .

Dacă  $f$  este derivabilă pe tot domeniul său de definiție, se spune, mai simplu, că  $f$  este derivabilă fără altă specificație).



Dacă fiecărui punct  $x \in E$  facem să-i corespundă numărul  $f'(x)$ , se obține o funcție definită pe  $E$ , care se notează  $f'$  (sau  $Df$ , sau  $\frac{df}{dx}$ ) și care se numește *funcția derivată* a funcției  $f$  (sau, mai simplu, *derivata* lui  $f$ ).

Trebuie să se facă deosebire între *derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$* , care este un număr,  $f'(x_0)$ , și *derivata funcției  $f$* , care este o funcție,  $f'$ . Derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$ ,  $f'(x_0)$ , este valoarea funcției  $f'$  în punctul  $x_0$ ; se scrie uneori:

$$f'(x_0) = (f'(x))_{x=x_0}.$$

#### 4. Derivatele unor funcții elementare

1) Funcția constantă  $f(x) \equiv c$  este derivabilă pe  $R$  și derivata sa este  $f'(x) \equiv 0$ . Se scrie:

$$c' = 0$$

Într-adevăr, să luăm un punct oarecare  $x_0 \in R$  și să formăm raportul:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} \equiv 0.$$

Rezultă  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, deducem că derivata funcției constante este 0 în orice punct  $x \in R$ , adică  $f'(x) \equiv 0$ .

Astfel, dacă  $f(x) \equiv 5$ , avem  $f'(x) = 0$ , sau  $5' = 0$ ; dacă  $f(x) \equiv -3$ , avem  $(-3)' = 0$  etc.

2) Funcția identică  $f(x) = x$  este derivabilă pe  $R$  și derivata sa este  $f'(x) \equiv 1$ . Se scrie:

$$x' = 1$$

Într-adevăr, fie  $x_0 \in R$  un punct oarecare. Raportul  $R(x)$  este în acest caz:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1.$$

Rezultă:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ . Prin urmare,  $f'(x) \equiv 1$ , oricare ar fi  $x \in E$ .

Astfel,  $(x)_{x=1}' = 1$ ,  $(x)_{x=0}' = 1$  etc.

3) Funcția  $f(x) \equiv |x|$  este derivabilă în orice punct  $x \neq 0$  și  $f'(x) \equiv \frac{|x|}{x}$ .

Se scrie

$$(|x|)' = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$

Într-adevăr, fie  $x_0 \neq 0$  un punct oarecare. Raportul  $R(x)$  este:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}.$$

Dacă  $x_0 > 0$ , atunci pentru puncte  $x$  suficient de apropiate de  $x_0$  avem, de asemenea,  $x > 0$ , deci:  $|x_0| = x_0$  și  $|x| = x$ ; urmează că:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1$$

și deci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 = \frac{|x_0|}{x_0}.$$

Dacă  $x_0 < 0$ , atunci pentru puncte  $x$  suficient de apropiate de  $x_0$  avem  $x < 0$ , deci  $|x_0| = -x_0$  și  $|x| = -x$ ; urmează că:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x + x_0}{x - x_0} \equiv -1$$

și deci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -1 = \frac{|x_0|}{x_0}.$$

Cum  $x_0 \neq 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că oricare ar fi  $x \neq 0$  avem  $f'(x) = \frac{|x|}{x}$ .

După cum s-a constatat anterior, în punctul 0 funcția  $|x|$  nu este derivabilă.

4) Funcția  $f(x) = x^n$ , ( $n$  natural) este derivabilă pe  $R$  și derivata sa este  $f'(x) \equiv nx^{n-1}$ . Se scrie:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Fie  $x_0 \in R$  un punct oarecare. Pentru  $x \neq x_0$  avem:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1},$$

deci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-2}x_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} x_0^{n-1} = \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1}}_{n \text{ ori}} = nx_0^{n-1}, \end{aligned}$$



adică  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar rezultă că  $f'(x) = nx^{n-1}$  pentru orice  $x \in R$ .

Observație importantă. Se va arăta ulterior (§ 22, nr. 3) că oricare ar fi  $\alpha$  real avem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (x > 0).$$

5) Fie funcția radical  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ . Domeniul de definiție al funcției este  $E = [0, \infty)$  dacă  $n$  este par și  $E = (-\infty, \infty)$  dacă  $n$  este impar.

Funcția radical  $f$  este derivabilă în orice punct  $x \neq 0$  din  $E$  și  $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ .

Se scrie

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad (x \neq 0).$$

În particular:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0).$$

În punctul 0 funcția radical nu este derivabilă dar are derivata  $+\infty$ .

Într-adevăr fie  $x_0 \neq 0$  un punct oarecare din  $E$ . Pentru  $x \neq x_0$  din  $E$  avem:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} = \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_0} + \dots + \sqrt[n]{x_0^{n-1}})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_0} + \dots + \sqrt[n]{x_0^{n-1}}}. \end{aligned}$$

În punctul  $x_0$  toți cei  $n$  termeni ai sumei de la numitor au limita  $\sqrt[n]{x_0^{n-1}}$ , deci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}.$$

Deoarece  $x_0 \neq 0$  a fost ales arbitrar în  $E$ , avem  $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$  pentru orice  $x \neq 0$  din  $E$ .

Pentru calculul derivatei în punctul 0 formăm raportul  $R(x)$  pentru  $x \neq 0$  din  $E$ :

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Observăm că pentru  $x \neq 0$  din  $E$  avem  $x^{n-1} > 0$  oricum ar fi  $n$ , par sau impar. Într-adevăr, dacă  $n$  este par,  $E = [0, \infty)$ , deci  $x \in E$  și  $x \neq 0$  înseamnă  $x > 0$ ; dacă  $n$  este impar, atunci  $n - 1$  este par și deci, dacă  $x \neq 0$ , atunci de asemenea  $x^{n-1} > 0$ . Urmează că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x^{n-1}} = 0 \text{ și } \sqrt[n]{x^{n-1}} > 0,$$

de unde:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \infty.$$

Observație. După cum se știe, pentru  $x > 0$  avem  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ . Formule de derivare a funcției radical se scrie atunci

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \quad x > 0,$$

ceea ce demonstrează; pentru  $\alpha = \frac{1}{n}$ ; formula  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ . Dealtfel, dacă  $n$  este

impar această egalitate rămâne adevărată și pentru  $x < 0$  dacă se scrie formal  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

6) Funcția  $f(x) = \sin x$  este derivabilă pe  $R$  și derivata sa este  $f'(x) = \cos x$ . Se scrie:

$$(\sin x)' = \cos x$$

Fie  $x_0 \in R$  un punct oarecare. Raportul  $R(x)$  este:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Prin trecere la limită (v. § 15, nr. 4) obținem:

$$\begin{aligned} f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \\ &= 1 \cdot \cos \frac{x_0 + x_0}{2} = \cos x_0. \end{aligned}$$

Deoarece  $x_0$  este arbitrar, rezultă că  $f'(x) = \cos x$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

Astfel:  $f'(0) = (\sin x)'_{x=0} = \cos 0 = 1$ ;  $(\sin x)'_{x=\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  etc.

7) Funcția  $f(x) = \cos x$  este derivabilă pe  $R$  și derivata sa este  $f'(x) = -\sin x$ :

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Fie  $x_0 \in R$  un punct oarecare. Raportul  $R(x)$  este:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \frac{-2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= -\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \sin \frac{x + x_0}{2}. \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} = \\ &= -1 \cdot \sin x_0 = -\sin x_0. \end{aligned}$$

Deoarece  $x_0$  este arbitrar, rezultă că  $f'(x) = -\sin x$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

Astfel:  $f'(0) = (\cos x)'_{x=0} = -\sin 0 = 0$ ;  $(\cos x)'_{x=\pi/2} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$  etc.

8) Funcția  $f(x) = \ln x$  este derivabilă pe semidreapta  $(0, \infty)$  și  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Se scrie:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

Fie  $x_0 > 0$ ; să arătăm că  $f$  este derivabilă în  $x_0$ . Pentru aceasta să formăm raportul  $R(x)$  pentru  $x \neq x_0$ ,  $x > 0$ :

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{x_0}{x - x_0} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Dar:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{x_0 + x - x_0}{x_0} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0},$$

deci:

$$R(x) = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{x - x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right) = \frac{1}{x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}}.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = e$ , iar funcția logaritmică este continuă, deducem (v. § 17, nr. 2):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} = \ln e = 1.$$

Așadar:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}} \frac{1}{x_0}.$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, deducem că pentru orice  $x > 0$ , funcția  $\ln x$  este derivabilă și:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

9) Oricare ar fi  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , funcția logaritmică  $f(x) = \log_a x$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$  și derivata sa este  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ . Se scrie:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Într-adevăr, se știe că  $\ln x = \ln a \log_a x$ ; deci:

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Pentru  $x_0 > 0$  arbitrar și pentru  $x \neq x_0$ ,  $x > 0$ , avem:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\ln a} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$$

deci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice  $x > 0$  avem

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

## 5. Derivate laterale

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție și  $x_0$  un punct din  $E$ . Să formăm raportul:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ pentru } x \neq x_0 \text{ din } E.$$

Este posibil ca  $R(x)$  să nu aibă limită în  $x_0$ , adică  $f$  să nu aibă derivată în  $x_0$ ; dar este posibil ca  $R(x)$  să aibă limite laterale în  $x_0$ . Sintem astfel conduși să definim derivatele laterale ale lui  $f$  în  $x_0$ .

Să presupunem că există șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n < x_0$  din  $E$ .

**Definiția 3.** Se spune că funcția  $f$  este derivabilă la stînga în punctul  $x_0$ , dacă raportul  $R(x)$  are limită la stînga finită în  $x_0$ . Această limită se numește derivata la stînga a funcției  $f$  în  $x_0$  și se notează  $f'_s(x_0)$ :

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Să presupunem acum că există șiruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte  $x_n > x_0$  din  $E$ .

**Definiția 4.** Se spune că funcția  $f$  este derivabilă la dreapta în punctul  $x_0$ , dacă raportul  $R(x)$  are limită la dreapta finită în  $x_0$ . Această limită se numește derivata la dreapta a lui  $f$  în  $x_0$  și se notează  $f'_d(x_0)$ :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Astfel, după cum s-a stabilit în exemplul de la nr. 2, pentru funcția  $f(x) = |x|$  avem:

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad \text{și} \quad f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Dacă limita la stînga sau la dreapta a raportului  $R(x)$  în  $x_0$  este infinită, ea se numește derivata la stînga, respectiv la dreapta a lui  $f$  în  $x_0$  și se notează de asemenea cu  $f'_s(x_0)$  respectiv  $f'_d(x_0)$ .

Toate proprietățile care vor fi date în continuare, pentru derivate rămîn adevărate și pentru derivatele laterale.

**Observații.** 1°. Dacă  $f$  este definită pe un interval  $E = [a, b]$ , definiția derivatei în  $a$  coincide cu definiția derivatei la dreapta în  $a$ , iar definiția derivatei în  $b$  coincide cu definiția derivatei la stînga în  $b$ .

2°. Este posibil ca într-un punct una sau ambele derivate laterale să nu existe.

3°. Dacă funcția  $f$  are derivată într-un punct  $x_0$  din interiorul lui  $[a, b]$ ,  $a < x_0 < b$ , atunci  $f$  are în  $x_0$  atît derivată la stînga cît și derivată la dreapta, egale între ele și egale cu  $f'(x_0)$ :

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0).$$

Reciproc, folosind observația 3 de la limite laterale (§ 13, nr. 3), rezultă că: dacă  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale egale, atunci  $f$  are derivată în  $x_0$ , egală cu valoarea comună a derivatelor laterale.

4°. Reluînd problema tangentei, se constată că derivatele laterale au de asemenea o interpretare geometrică simplă.

Să luăm punctele  $x \in E$  numai la stînga lui  $x_0$ ,  $x < x_0$ , și să considerăm semidrepte  $M_0M$  cu extremitatea în  $M_0$  (fig. 58). Coeficientul unghiular este:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă acest coeficient unghiular are o limită finită,  $\operatorname{tg} \alpha_0$ , cînd  $x$  se apropie de  $x_0$  de la stînga, spunem că graficul are în punctul  $M_0$  semitangentă la stînga, care este, prin definiție, semidreapta  $M_0T$  cu extremitatea în  $M_0$ , aflată în semiplanul de la stînga lui  $M_0$  ( $x \leq x_0$ ) și care are coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \alpha_0$ .

Așadar:

Dacă funcția  $f$  este derivabilă la stînga în  $x_0$ , graficul funcției are în punctul corespunzător  $M_0(x_0, f(x_0))$  semitangentă la stînga, al cărei coeficient unghiular este egal cu  $f'_s(x_0)$ .

Dacă  $f'_s(x) = \infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul  $M_0$ , semidreapta  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ , situată sub punctul  $M_0$  (fig. 59).

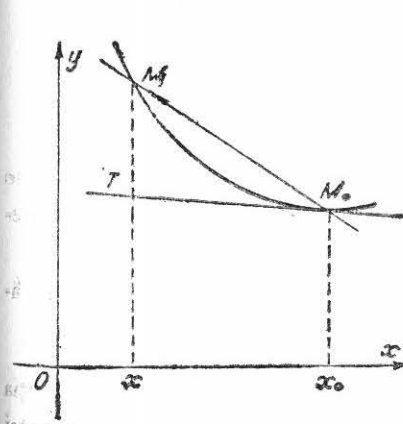


Fig. 58

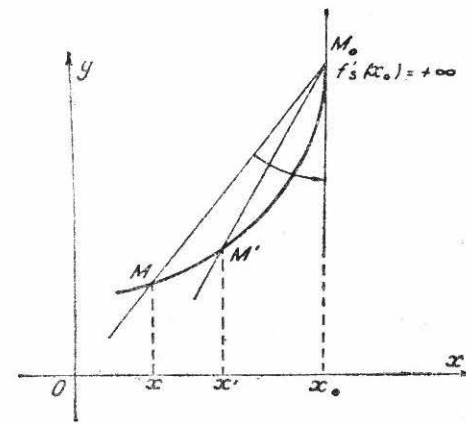


Fig. 59

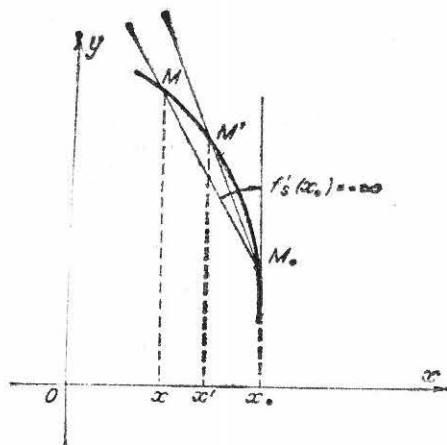


Fig. 60

Dacă  $f'_s(x_0) = -\infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangenta la stînga în punctul  $M_0$ , semidreapta  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ , situată deasupra punctului  $M_0$  (fig. 60).

Considerații analoge ne conduc la interpretarea geometrică a derivatei la dreapta:

Dacă funcția  $f$  este derivabilă la dreapta în  $x_0$ , graficul său are în punctul  $M_0$  ca semitangenta la dreapta, o semidreaptă  $M_0T$  cu coeficientul unghiular  $f'_d(x_0)$ , situată în semiplanul de la dreapta lui  $M_0$  ( $x \geq x_0$ ) (fig. 61).

Dacă  $f'_d(x_0) = \infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangenta la dreapta în  $M_0$ , semidreapta  $M_0T$  paralelă cu  $Oy$  situată deasupra lui  $M_0$  (fig. 62).

Dacă  $f'_d(x_0) = -\infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangenta la dreapta în  $M_0$ , semidreapta  $M_0T$  paralelă cu  $Oy$  situată sub  $M_0$  (fig. 63).

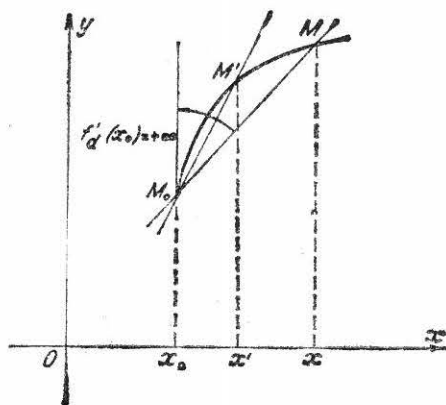


Fig. 62

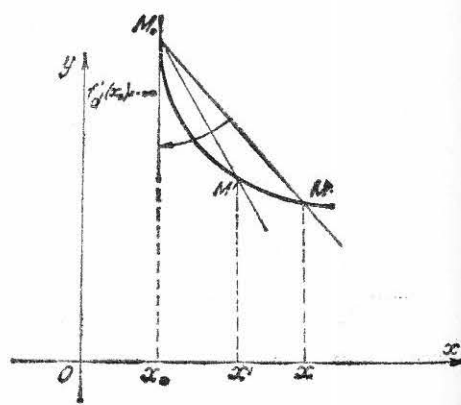
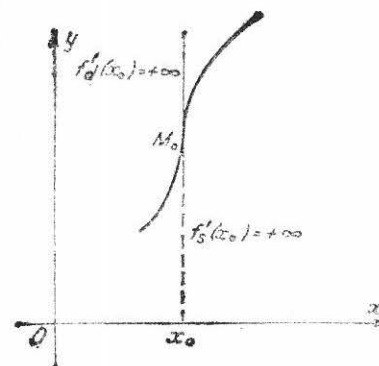
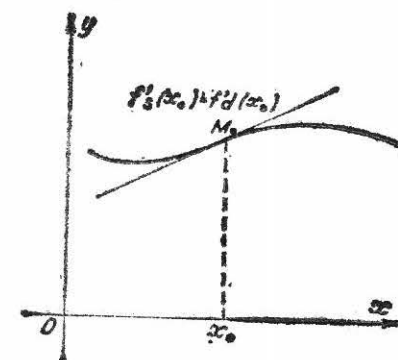


Fig. 63



a



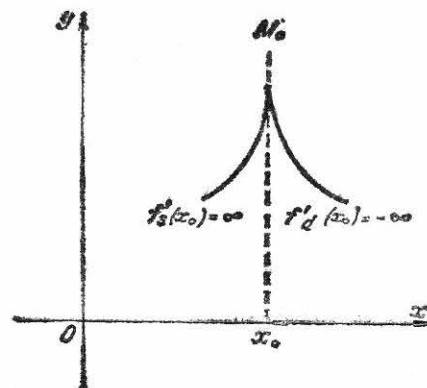
b

Fig. 64

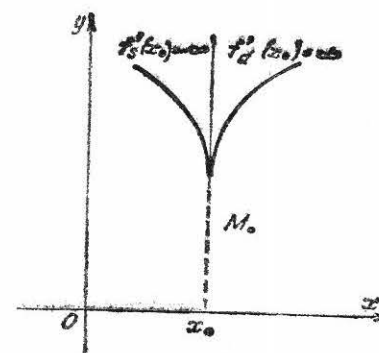
Dacă  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale egale, cele două semitangente sînt în prelungire, deci graficul are tangenta în punctul  $M_0$ . Dacă, în plus, tangenta traversează graficul,  $M_0$  se numește *punct de inflexiune* (fig. 64 a, b).

Dacă  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale diferite, cele două tangente nu mai sînt în prelungire. Dacă una din derivatele laterale este  $-\infty$ , iar cealaltă este  $+\infty$ , cele două semitangente sînt suprapuse (fig. 65 a, b); în acest caz  $M_0$  se numește *punct de întoarcere* al graficului.

Dacă  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale diferite și cel puțin una dintre ele este finită, cele două semitangente nu sînt nici suprapuse, nici în prelungire (fig. 66); în acest caz  $M_0$  se numește *punct unghiular* al graficului.



a



b

Fig. 65

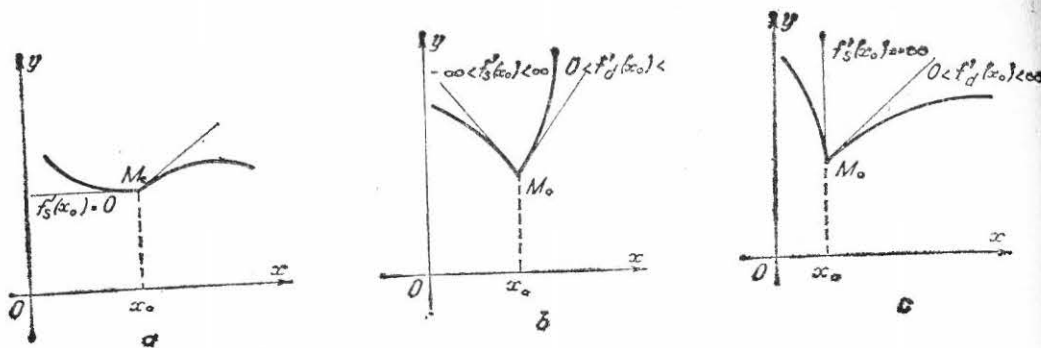


Fig. 66

## 6. Derivate de ordin superior

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă. Derivata sa  $f'$  este de asemenea o funcție definită pe  $E$ , deci se poate pune problema derivabilității sale.

**Definiția 5.** Se spune că  $f$  este derivabilă de două ori într-un punct  $x_0 \in E$ , dacă  $f'$  este derivabilă în  $x_0$ . Derivata lui  $f'$  în  $x_0$  se numește derivata de ordinul doi a lui  $f$  în  $x_0$  și se notează  $f''(x_0)$ :

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Se obișnuiește, de asemenea, să se noteze derivata de ordinul doi a lui  $f$  în  $x_0$  prin  $D^2f(x_0)$  sau  $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ .

Dacă  $f$  este derivabilă de două ori pe întreaga mulțime  $E$ , funcția  $f''$  definită pe  $E$  se numește *derivata a doua* (sau *derivata de ordinul doi*) a lui  $f$ . Pentru uniformitate, derivata  $f'$  se numește *derivata întâi* (sau *derivata de ordinul întâi*) a lui  $f$ , iar funcția  $f$  însăși se numește *derivata de ordinul zero* a lui  $f$ .

Se definește în mod analog *derivata a treia*,  $f'''$ , a lui  $f$ , ca fiind derivata derivatei a doua:  $f''' = (f'')'$ , sau  $D^3f = D(D^2f)$ .

Derivatele de ordinul zero, întâi, doi, trei se notează respectiv cu  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$ ,  $f^{(3)}$ :

$$f^{(0)} = f; \quad f^{(1)} = f'; \quad f^{(2)} = f''; \quad f^{(3)} = f'''.$$

În general, derivata de ordinul  $n$  ( $n$  natural) se definește ca fiind derivata derivatei de ordinul  $n - 1$  și se notează cu  $f^{(n)}$  sau  $D^n f$ :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \text{ sau } D^n f = D(D^{(n-1)}f).$$

## Exemple

- 1)  $f(x) \equiv \alpha$ ;  $f'(x) \equiv 0$ ,  $f''(x) \equiv 0$ , ...,  $f^{(n)}(x) \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ).
  - 2)  $g(x) = x$ ;  $g'(x) \equiv 1$ ,  $g''(x) \equiv 0$ , ...,  $g^{(n)}(x) \equiv 0$  ( $n \geq 2$ ).
  - 3)  $h(x) = \sin x$ ;  $h'(x) = \cos x$ ;  $h''(x) = -\sin x$ ,  $h'''(x) = -\cos x$ ,  $h^{IV}(x) = \sin x$ , ...
- În particular:  $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;  $h''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ;  $h'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $h^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ...

## § 21. Operații cu funcții derivabile

În acest paragraf se va arăta că, dacă se aplică funcțiilor derivabile  $f, g: E \rightarrow R$  operațiile algebrice, se obțin tot funcții derivabile.

### 1. Suma

**Teorema 1.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sînt derivabile, atunci și suma lor  $f + g$  este o funcție derivabilă și:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Derivata sumei este egală cu suma derivatelor

**Demonstrație.** Să luăm un punct oarecare  $x_0 \in E$  și să formăm raportul  $R(x)$  pentru funcția  $h = f + g$ .

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Deoarece termenii sumei din ultimul membru au în punctul  $x_0$  limitele, respectiv  $f'(x_0)$  și  $g'(x_0)$ , rezultă că și primul membru are limită în punctul  $x_0$ , deci funcția  $h = f + g$  este derivabilă în  $x_0$ , și:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

Deoarece punctul  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$ , rezultă că funcția  $h$  este derivabilă în orice punct  $x \in E$  și  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$  sau  $h' = f' + g'$ , adică:

$$(f + g)' = f' + g'.$$



Prin inducție completă se arată că suma  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  a  $n$  funcții derivabile este de asemenea o funcție derivabilă și:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

Se demonstrează la fel că diferența a două funcții derivabile  $f$  și  $g$  este o funcție derivabilă și:

$$(f - g)' = f' - g'$$

*Exemple*

1)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $f'(x) = \cos x - \sin x$ ; în particular:

$$f'(0) = 1, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2)  $f(x) = \cos x + x - 3$ ,  $f'(x) = -\sin x + 1$ ; în particular:

$$f'(\pi) = 1, f'(2\pi) = 1, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

## 2. Produsul

**Teorema 2.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sînt derivabile, atunci produsul lor  $fg$  este o funcție derivabilă și:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Derivata produsului este egală cu prima funcție derivată înmulțită cu a doua nederivată, plus prima funcție nederivată înmulțită cu a doua derivată.

**Demonstrație.** Să luăm un punct oarecare  $x_0 \in E$  și să formăm raportul  $R(x)$  pentru funcția  $h = fg$ :

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

(S-a scăzut și s-a adunat la numărător  $f(x_0)g(x)$ . Funcția  $g$ , fiind derivabilă în  $x_0$  este continuă în  $x_0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ . De asemenea,  $f$  și  $g$  fiind, prin ipoteză; derivabile în  $x_0$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Rezultă că raportul  $R(x)$  are limită în  $x_0$ , adică funcția  $h = fg$  este derivabilă în  $x_0$  și:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0). \end{aligned}$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$  rezultă că  $h$  este derivabilă în orice punct  $x$  din  $E$  și  $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  sau  $h' = f'g + fg'$ , adică:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Prin inducție completă se arată că produsul  $f_1 f_2 \dots f_n$  a  $n$  funcții derivabile este, de asemenea, o funcție derivabilă și:

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 f_3 \dots f_n)' &= f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n' = \\ &= \sum_{i=1}^n f_1 f_2 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n \end{aligned}$$

De exemplu, în cazul a trei funcții,  $f_1, f_2, f_3$ , formula se demonstrează astfel, folosind formula de derivare a produsului a două funcții:

$$(f_1 f_2 f_3)' = (f_1 f_2)' f_3 + (f_1 f_2) f_3' = (f_1' f_2 + f_1 f_2') f_3 + f_1 f_2 f_3' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'.$$

În particular, pentru produsul a  $n$  funcții cu  $f$ , termenii sumei, în număr de  $n$ , sînt egali între ei și egali fiecare cu  $f^{n-1} f'$ , deci

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'$$

Această formulă va rezulta, mai departe, și din teorema de derivare a funcțiilor compuse.

**Teorema 3.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă, iar  $c$  este un număr, atunci funcția  $cf$  este derivabilă și:

$$(cf)' = cf'$$

Constanta iese în afara derivării

Într-adevăr, considerînd funcția constantă  $g(x) \equiv c$ , rezultă:  $g' = 0$ , și  $fg = cf$ , deci  $(cf)' = (fg)' = f'g - fg' = f'c + f \cdot 0 = cf'$ .

În particular, luînd  $c = -1$ , se obține:

$$(-f)' = -f'$$

### Exemple

$$1) f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}.$$

2) Orice polinom  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  este o funcție derivabilă și derivata sa este:

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

În particular:

$$P(x) = 3x^3 + 4x + 2; P'(x) = 6x + 4.$$

$$3) f(x) = x \sin x; f'(x) = \sin x + x \cos x.$$

$$4) f(x) = x \sin x \cos x; f'(x) = \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x.$$

$$5) f(x) = (x^2 - 1)^{200}; f'(x) = 200 (x^2 - 1)^{199} \cdot (x^2 - 1)' = 400x(x^2 - 1)^{199}.$$

$$6) f(x) = \sin^5 x; f'(x) = 5 \sin^4 x \cos x; \text{ în particular:}$$

$$f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

### 3. Cîtlul

**Teorema 4.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sînt derivabile, atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în toate punctele în care este definită în care numitorul nu se anulează și:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Derivata cîtlui este egală cu derivata numărătorului înmulțită cu numitorul nederivat minus numărătorul nederivat înmulțit cu derivata numitorului, totul supra numitorul la pătrat.

**Demonstrație.** Fie  $x_0$  un punct oarecare în care funcția  $h = \frac{f}{g}$  este definită, deci în care numitorul nu se anulează,  $g(x_0) \neq 0$ . Să formăm raportul  $R(x)$  pentru această funcție:

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{(x - x_0)} = \\ &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

(S-a scăzut și s-a adunat la numărător  $f(x_0)g(x_0)$ .)

Funcția  $g$  este derivabilă în  $x_0$ , deci este continuă în  $x_0$  și, prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$ ; termenii din paranteză au limită în  $x_0$ .

Rezultă că și raportul inițial are limită în  $x_0$ , adică funcția  $h$  este derivabilă în  $x_0$  și derivata sa este:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)g(x_0)} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{(g(x_0))^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \end{aligned}$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$  astfel ca  $g(x_0) \neq 0$ , rezultă că funcția  $h$  este derivabilă în orice punct  $x$  în care este definită (în care numitorul nu se anulează) și

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \text{ sau } h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ adică: } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

În particular, luînd  $f(x) \equiv 1$  avem  $f' = 0$ , și notînd  $g = u$ , obținem:

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

De exemplu:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

### 4. Derivatele unor funcții elementare

1) După cum s-a arătat la nr. 2, orice polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

este o funcție derivabilă pe  $R$  și:

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

2) Orice funcție rațională,  $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ , este derivabilă în toate punctele în care este definită (în care numitorul nu se anulează) ca fiind raport de polinoame. Derivata se calculează după regula de derivare a cîtlui.

### Exemplu.

Pentru  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ ,

obținem:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3)'(x - 1) - (x^2 + 3)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

În particular:  $f'(-1) = 0$ ,  $f'(0) = -3$ ,  $f'(2) = -3$ .

3) Funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$  este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție, ( $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg), și  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ . Se scrie:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Într-adevăr,  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , și pentru  $\cos x \neq 0$  se aplică regula de derivare a cîtului:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

În particular:  $f'(0) = 1$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ .

4) Funcția  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție, ( $x \neq k\pi$ ,  $k$  întreg), și  $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ . Se scrie:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Într-adevăr, pentru  $\sin x \neq 0$  avem  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , deci:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

În particular:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

5)  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) este derivabilă pentru  $x \neq 0$ , și  $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ .

Se scrie:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Într-adevăr,  $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ .

Formula precedentă se mai scrie  $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ . Așadar, oricare ar fi  $k$  întreg, avem  $(x^k)' = kx^{k-1}$ . Se va arăta mai departe că oricare ar fi  $\alpha$  real avem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (x > 0)$$

### Exemple

1)  $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

În particular:  $f'(-1) = 2$ ,  $f'(1) = -2$ .

2)  $f(x) = \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = -\frac{28}{x^5} + \frac{4}{x^3} - \frac{15}{x^4} - 6x.$$

6) Fie funcția  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ . Domeniul de definiție al funcției este  $E = (0, \infty)$ , dacă  $n$  este par, și  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dacă  $n$  este impar.

Funcția  $f$  este derivabilă pe  $E$  și  $f'(x) = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$ . Se scrie:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$$

Într-adevăr:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{(\sqrt[n]{x})'}{(\sqrt[n]{x})^2} = -\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}} = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}.$$

**Observație.** Dacă pentru  $x > 0$  scriem  $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$  atunci formula de derivare de mai sus se scrie:

$$(x^{-\frac{1}{n}})' = -\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}-1}, \quad x > 0,$$

ceea ce demonstrează pentru  $\alpha = -\frac{1}{n}$  formula  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Dealtfel, dacă  $n$  este impar, această egalitate rămâne adevărată și pentru  $x < 0$ , dacă se scrie formal  $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$ .

7) Fie funcția putere  $f(x) = x^r$  cu  $r$  rațional.

Funcția  $f$  este derivabilă în orice punct  $x > 0$ , și  $f'(x) = rx^{r-1}$ . Se scrie:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

Dacă  $r > 0$ , funcția  $f$  este definită și în 0. În acest caz:

a) Dacă  $r > 1$ , funcția  $f$  este derivabilă în 0 și derivata se calculează cu formula precedentă:  $f'(0) = 0$ .

b) Dacă  $r = 1$ , funcția  $f$  este derivabilă în 0 și  $f'(0) = 1$ .

c) Dacă  $0 < r < 1$ , funcția  $f$  nu este derivabilă în 0 dar are derivata  $f'(0) = \infty$ .

Pentru  $x > 0$ , formula a fost deja demonstrată în cazul cînd  $r = \frac{1}{k}$  cu  $k \neq 0$  întreg (pozitiv sau negativ). Dacă, cum  $r = \frac{m}{n}$ , cu  $m$  natural și  $n \neq 0$  întreg (eventual negativ), atunci

$$(x^r)' = ((x^{\frac{1}{n}})^m)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} (x^{\frac{1}{n}})' = mx^{\frac{m}{n}-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1}.$$

În cazul cînd  $r > 0$ , pentru calculul derivatei în punctul 0 formăm raportul:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^r}{x} = x^{r-1}.$$

Dacă  $r > 1$ , atunci  $r - 1 > 0$ , deci:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{r-1} = 0.$$

Dacă  $r = 1$ , atunci  $R(x) \equiv 1$ , deci  $f'(0) = 1$ .

Dacă  $0 < r < 1$ , atunci  $1 - r > 0$ , deci

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{r-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{1-r}} = \infty.$$

## § 22. Derivatele funcțiilor compuse și funcțiilor reciproce

În paragraful precedent s-a arătat că, aplicînd funcțiilor derivabile operațiile algebrice, se obțin tot funcții derivabile. În acest paragraf se va arăta că operațiile de compunere și de inversare a funcțiilor păstrează de asemenea derivabilitatea.

### 1. Derivata unei funcții compuse

Fie  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{f} R$  două funcții și fie  $h = f \circ u : E \rightarrow R$  funcția compusă:

$$h(x) = f(u(x)), \quad x \in E.$$

**Teorema 1.** Dacă funcțiile  $u$  și  $f$  sînt derivabile, atunci funcția compusă  $h = f \circ u$  este derivabilă și:

$$(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'.$$

Notînd  $f \circ u = f(u)$  și  $f' \circ u = f'(u)$ , această egalitate se scrie:

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$$

**Demonstrație.** Fie  $x_0$  un punct oarecare din  $E$  și fie  $y_0 = u(x_0)$ , punctul corespunzător din  $F$ . Deoarece funcția  $f$  este derivabilă în  $y_0$ , avem:

$$f'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0},$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - f'(y_0) = 0.$$

Dacă definim funcția auxiliară  $\alpha : F \rightarrow R$  prin egalitățile:

$$\alpha(y) = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - f'(y_0), \text{ pentru } y \neq y_0,$$

$$\alpha(y_0) = 0,$$

atunci funcția  $\alpha$  este continuă în  $y_0$ :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = 0 = \alpha(y_0)$$

Din egalitatea prin care a fost definită  $\alpha(y)$  pentru  $y \neq y_0$ , rezultă:

$$f(y) - f(y_0) = (f'(y_0) + \alpha(y)) (y - y_0)$$

și această egalitate rămâne adevărată și pentru  $y = y_0$  (deoarece ambii membri ai egalității se anulează). Așadar, egalitatea este adevărată pentru orice  $y \in F$ . Dacă  $x \in E$ , atunci  $u(x) \in F$ , deci egalitatea precedentă este adevărată pentru punctele  $y$  de forma  $u(x)$  cu  $x \in E$ :

$$f(u(x)) - f(y_0) = (f'(y_0) + \alpha(u(x))) (u(x) - y_0)$$

și, deoarece  $y_0 = u(x_0)$ :

$$f(u(x)) - f(u(x_0)) = (f'(y_0) + \alpha(u(x))) (u(x) - u(x_0)).$$

Pentru a cerceta derivabilitatea funcției compuse  $h = f \circ u$  în punctul  $x_0$ , să formăm raportul  $R(x)$ , pentru  $x \neq x_0$ :

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = (f'(y_0) + \alpha(u(x))) \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Ultimul membru din aceste egalități are limită în  $x_0$ , deoarece:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0);$$

funcția  $u$  este continuă în  $x_0$  (fiind derivabilă), iar  $\alpha$  este continuă în punctul corespunzător  $y_0 = u(x_0)$ , deci și funcția compusă  $\alpha(u(x))$  este continuă în  $x_0$  (v. § 17, nr. 2):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(u(x)) = \alpha(u(x_0)) = \alpha(y_0) = 0.$$

Rezultă că și raportul  $R(x)$  are limită în  $x_0$ , deci  $h$  este derivabilă în  $x_0$ , și:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = (f'(y_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(u(x))) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(y_0) \cdot u'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \end{aligned}$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$ , rezultă că funcția compusă  $h$  este derivabilă în orice punct  $x \in E$  și:

$$h'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x),$$

adică

$$h'(x) = (f' \circ u)(x) \cdot u'(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

de unde:

$$h' = (f' \circ u) \cdot u'.$$

**Observații.** 1° Se atrage atenția că în egalitatea  $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$ ,  $u$  nu este argumentul funcției  $f$ , ci este o funcție (de  $x$ ).

2°. Teorema precedentă este valabilă și în cazul mai multor funcții care se compun. De exemplu, dacă funcțiile  $f(u)$ ,  $u(v)$ ,  $v(x)$  sînt derivabile, atunci și funcția compusă  $h(x) = f(u(v(x)))$  este derivabilă și:

$$h' = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'.$$

Practic, derivata unei funcții compuse se obține înmulțind derivatele funcțiilor care se compun în ordinea compunerii lor.

Ținînd seama de regula de derivare a funcțiilor compuse și de regulile de derivare a unor funcții elementare, se obțin formulele următoare (unde  $u$  este o funcție derivabilă):

$$1) \quad (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \quad (n \text{ întreg})$$

$$2) \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$3) \quad (u^r)' = ru^{r-1} \cdot u', \quad (r \text{ rațional})$$

$$4) \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$5) \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$6) \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$7) \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$8) \quad (|u|)' = \frac{|u|}{u} u'$$

$$9) \quad (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$



Într-adevăr:

$$(\ln |u|)' = \frac{1}{|u|} (|u|)' = \frac{1}{|u|} \frac{|u|}{u} u' = \frac{u'}{u}.$$

În particular:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

### Exemple

1)  $h(x) = (2x + 5)^{1007}$ . Notînd  $u(x) = 2x + 5$  și  $f(u) = u^{1007}$ , avem  $h(x) = f(u(x))$ , deci  $h'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = 1007 (u(x))^{1006} \cdot 2 = 1007 (2x + 5)^{1006} \cdot 2 = 2014 (2x + 5)^{1006}$

$$2) f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5} = (x^2 + x + 1)^{-5};$$

$$f'(x) = -5(x^2 + x + 1)^{-6} (x^2 + x + 1)' = \frac{-5(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6}.$$

$$3) f(x) = \sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2},$$

$$f'(x) = \frac{(2x^3 - 5x^2 + 2)'}{2\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}} = \frac{6x^2 - 10x}{2\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}} = \frac{x(3x - 5)}{\sqrt{2x^3 - 5x^2 + 2}}$$

$$4) f(x) = \sin(2x + 5);$$

$$f'(x) = \cos(2x + 5) \cdot (2x + 5)' = 2 \cos(2x + 5); f'\left(-\frac{5}{2}\right) = 2.$$

$$5) f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}; f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi^2.$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{(\sin x + 2x^5)^2} = (\sin x + 2x^5)^{\frac{2}{3}};$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (\sin x + 2x^5)^{-\frac{1}{3}} \cdot (\cos x + 10x^4) = \frac{2(\cos x + 10x^4)}{3\sqrt[3]{\sin x + 2x^5}};$$

$$f'(\pi) = \frac{2(10\pi^4 - 1)}{3\sqrt[3]{2\pi^5}}.$$

$$7) f(x) = \sin^3(5x^2 - x + 1);$$

$$f'(x) = 3 \sin^2(5x^2 - x + 1) \cdot \cos(5x^2 - x + 1) \cdot (10x - 1) = 3(10x - 1) \sin^2(5x^2 - x + 1) \cos(5x^2 - x + 1).$$

$$8) f(x) = \ln \sin x;$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$9) f(x) = \ln \frac{1}{x};$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}; f'(e) = -\frac{1}{e}.$$

$$10) f(x) = \ln^3(7x + 1) = (\ln(7x + 1))^3$$

$$f'(x) = 3 \ln^2(7x + 1) \cdot \frac{1}{7x + 1} \cdot 7 = \frac{21 \ln^2(7x + 1)}{7x + 1}$$

$$f'\left(\frac{e-1}{7}\right) = \frac{21}{e}.$$

## 2. Derivata unei funcții reciproce

Fie  $I$  și  $J$  două intervale oarecare. Fie  $f: I \rightarrow J$  o aplicație bijectivă strict monotonă și  $\varphi: J \rightarrow I$  aplicația reciprocă. Se poate demonstra.

**Teorema 2.** Dacă  $f$  este derivabilă într-un punct  $x \in I$  și dacă derivata sa nu se anulează în acest punct,  $f'(x) \neq 0$ , atunci funcția reciprocă  $\varphi$  este derivabilă în punctul corespunzător  $y = f(x)$  și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Justificarea geometrică a acestei teoreme este următoarea:

Graficele funcțiilor  $f$  și  $\varphi$  sînt simetrice față de prima bisectoare (fig. 67). Deoarece funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x$ , graficul său admite în punctul  $(x, y)$  tangentă,  $MT$ , neperalelă cu axa  $Ox$  (deoarece  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x) \neq 0$ ); urmează că și graficul funcției reciproce  $\varphi$  admite în punctul corespunzător  $(y, x)$  tangentă,  $M'T'$ , neperalelă cu axa  $Oy$ , deci  $\varphi$  este derivabilă în punctul  $y$ .

Deoarece  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , avem  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ; dar  $\operatorname{tg} \beta$  și  $\operatorname{tg} \alpha$  sînt respectiv coeficienții unghiulari  $\varphi'(y)$  și  $f'(x)$  ai celor două tangente, deci  $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

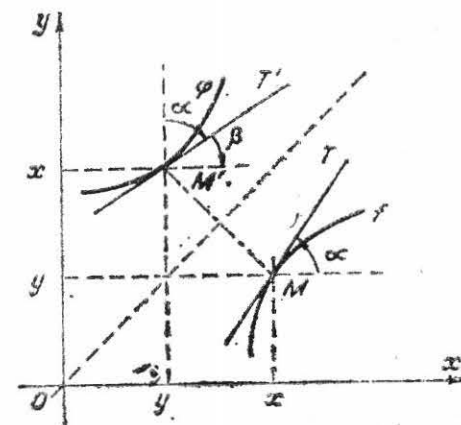


Fig. 67

### Exemple

1) Funcțiile  $f(x) = \frac{x}{2}$  și  $\varphi(y) = 2y$  sînt reciproce una alteia. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ și } \varphi'(y) = 2.$$

Se verifică deci egalitatea:  $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

2) Funcțiile  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ( $x \neq 0$ ) și  $\varphi(y) = \frac{1}{y}$ , ( $y \neq 0$ ), sînt reciproce una alteia.

Avem:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ și } \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Dacă  $x$  și  $y$  se corespund prin funcțiile  $f$  și  $\varphi$ , avem  $x = \frac{1}{y}$  și  $y = \frac{1}{x}$ , deci:

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y^2} = -x^2 = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Observație.** Schimbînd între ele funcțiile  $f$  și  $\varphi$ , teorema precedentă se poate enunța astfel:

Dacă  $\varphi$  este derivabilă într-un punct  $y \in J$  și dacă  $\varphi'(y) \neq 0$ , atunci  $f$  este derivabilă în punctul corespunzător  $x = \varphi(y)$  și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

### 3. Derivatele unor funcții elementare

Folosind regulile de derivare a funcțiilor compuse și a funcțiilor reciproce, putem acum calcula derivatele funcției exponențiale, funcției putere, funcțiilor circulare reciproce și funcției  $u^v$ .

1) Dacă  $a > 0$ , funcția exponențială  $f(x) = a^x$  este derivabilă pe  $R$  și  $f'(x) = a^x \ln a$ . Se scrie:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

În particular, pentru  $a = e$ , avem:

$$(e^x)' = e^x$$

Dacă  $a = 1$ , atunci:  $\ln a = 0$ ,  $f(x) \equiv 1$  și  $f'(x) \equiv 0$ ; deci formula este verificată în acest caz.

Dacă  $a \neq 1$ , funcția  $f(x) = a^x$  definită pe  $R$ , este reciproca funcției  $\varphi(y) = \log_a y$  definită pe  $(0, \infty)$ . Deoarece  $\varphi$  este derivabilă și  $\varphi'$  nu se anulează pe

$(0, \infty)$ , funcția  $f$  este derivabilă pe  $R$ . Pentru  $x = \varphi(y)$ , adică  $x = \log_a y$ , avem  $y = a^x$  și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Dacă  $u$  este o funcție derivabilă atunci:

$$(a^u)' = a^u u' \ln a$$

și

$$(e^u)' = e^u u'$$

### Exemple

$$1) f(x) = e^{\sin x}; f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x; f'(0) = 1; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$2) f(x) = 2^{\ln x}; f'(x) = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x}; f'(1) = \ln 2.$$

$$3) f(x) = a^{5x^2-2x+3}; f'(x) = 2(5x-1) a^{5x^2-2x+3} \ln a.$$

$$4) f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}; f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}; f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

2) Funcția putere  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha$  real) este derivabilă în orice punct  $x > 0$  și  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Se scrie:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Dacă  $\alpha > 0$ , funcția  $f$  este definită și în 0. În acest caz:

a) Dacă  $\alpha > 1$ ,  $f$  este derivabilă în 0 și derivata se calculează cu formula precedentă:  $f'(0) = 0$ .

b) Dacă  $0 < \alpha < 1$ ,  $f$  nu este derivabilă în 0 dar are derivata  $f'(0) = \infty$ .

Într-adevăr, dacă  $x > 0$ , avem:

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse obținem:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \left( \alpha \frac{1}{x} \right) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

În punctul  $x = 0$  se procedează ca și pentru funcția  $x^r$  cu  $r$  rațional.

3) Dacă  $u$  și  $v$  sînt derivabile pe un interval  $I$  și dacă  $u(x) > 0$  pentru orice  $x \in I$  atunci funcția  $u^v$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v u^{v-1} u'$$

Funcția  $u^v$  se derivează considerând întâi  $u$  constant și derivând ca o funcție exponențială, apoi considerând  $v$  constant și derivând ca o putere, și se adună cele două derivate.

Pentru a reține această regulă, convenim să scriem:

$$(u^v)' = (u_c^v)' + (m_c^v)'$$

unde indicele  $c$  arată că funcția respectivă se consideră constantă.

Pentru a demonstra formula, scriem:

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

și derivăm ca o funcție compusă:

$$(u^v)' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$$

*Exemple*

$$1) f(x) = x^x; f'(x) = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x); f'(1) = 1.$$

$$2) f(x) = (\sin x)^x; f'(x) = x(\sin x)^{x-1} \cdot \cos x + (\sin x)^x \ln \sin x = (\sin x)^x (x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x); f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3) f(x) = (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}}, f'(x) = \sqrt{x} (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}-1} \cdot 2(x+1) + (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x^2 + 2x) = (x^2 + 2x)^{\sqrt{x}} \cdot \left( \frac{2\sqrt{x}(x+1)}{x^2 + 2x} + \frac{\ln(x^2 + 2x)}{2\sqrt{x}} \right).$$

4) Funcția  $f(x) = \arcsin x$ , definită pe intervalul închis  $[-1, 1]$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(-1, 1)$  și

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (-1 < x < 1).$$

Funcția  $f(x) = \arcsin x$  definită pe  $[-1, 1]$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \sin y$  definită pe  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Pentru  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  avem  $\cos y \geq 0$ , deci

$$\varphi'(y) = (\sin y)' = \cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Punctele în care se anulează  $\varphi'$  sînt  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Urmează că funcția  $f$  este derivabilă în toate punctele  $x = \varphi(y) = \sin y$  cu  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ , adică în toate punctele  $x = \sin y$  cu  $-1 < x < 1$ , și în aceste puncte avem:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Observație.* În punctele  $-1$  și  $1$  funcția  $f = \arcsin$  nu este derivabilă dar, după cum se va arăta în capitolul următor, are derivată în aceste puncte, și anume  $f'(-1) = f'(1) = \infty$ .

5) Funcția  $f(x) = \arccos x$  definită pe intervalul închis  $[-1, 1]$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(-1, 1)$  și

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (-1 < x < 1).$$

Funcția  $f(x) = \arccos x$  definită pe  $[-1, 1]$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \cos y$ , definită pe  $[0, \pi]$ .

Pentru  $0 \leq y \leq \pi$  avem  $\sin y \geq 0$ , deci:

$$\varphi'(y) = (\cos y)' = -\sin y = -\sqrt{\sin^2 y} = -\sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

Punctele în care se anulează  $\varphi'$  sînt  $0$  și  $\pi$ :

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0.$$

Urmează că funcția  $f$  este derivabilă în toate punctele  $x = \varphi(y) = \cos y$  cu  $0 < y < \pi$ , adică toate punctele  $x = \cos y$  cu  $-1 < x < 1$ , și în aceste puncte avem:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Observație.* După cum se va arăta în capitolul următor, în punctele  $-1$  și  $1$  funcția  $f = \arccos$  nu este derivabilă dar are derivată în aceste puncte, și anume  $f'(-1) = f'(1) = -\infty$ .

6) Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Într-adevăr,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \operatorname{tg} y$  definită pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , care este derivabilă pe acest interval:

$$\varphi'(y) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$$

Deoarece  $\varphi'$  nu se anulează în nici un punct, funcția  $f$  este derivabilă în orice punct  $x = \varphi(y) = \operatorname{tg} y$  și:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7) Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \operatorname{ctg} y$  definită pe  $(0, \pi)$  care este derivabilă pe acest interval:

$$\varphi'(y) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Deoarece  $\varphi'$  nu se anulează în nici un punct, funcția  $f$  este derivabilă în orice punct  $x = \varphi(y) = \operatorname{ctg} y$  și:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

8) Ținând seama de regula de derivare a funcțiilor compuse, se obțin formulele, următoare ( $u$  fiind o funcție derivabilă):

$$(\operatorname{arcsin} u)' = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

Exemple

$$1) f(x) = \operatorname{arcsin}(x^2 - x)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x)'}{\sqrt{1 - (x^2 - x)^2}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{(1 - x^2 + x)(1 + x^2 - x)}}; \quad f'(0) = -1$$

$$2) f(x) = \operatorname{arccos} \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}; \quad f'(2) = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$3) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2} = \frac{1}{2x(x+1) + 1}; \quad f'(0) = 1$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg} \ln x,$$

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{1 + \ln^2 x} = -\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}; \quad f'(1) = -1.$$

### Reguli de derivare (Recapitulare)

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (u - v)' = u' - v'$$

$$3. (uv)' = u'v + v'u$$

$$4. (cu)' = cu'$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$6. (f(u))' = f'(u)u'$$

$$7. (u^v)' = (u^v)' + (u^v)'$$

### Tabloul derivatelor unor funcții elementare (Recapitulare)

| Nr. | Funcția $f$                      | Derivata $f'$         | Mulțimea pe care $f'$ este derivabilă |
|-----|----------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| 1   | $c$ , (constant)                 | 0                     | $\mathbb{R}$                          |
| 2   | $x$                              | 1                     | $\mathbb{R}$                          |
| 3   | $x^n$ , ( $n$ natural)           | $nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$                          |
| 4   | $\frac{1}{x^n}$ , ( $n$ natural) | $-\frac{n}{x^{n+1}}$  | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$          |
| 5   | $x^\alpha$ , ( $\alpha > 1$ )    | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $[0, +\infty)$                        |
| 6   | $x^\alpha$ , ( $\alpha < 1$ )    | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $(0, +\infty)$                        |
| 7   | $\sqrt{x}$                       | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\{0, +\infty)$                       |

| Nr. | Funcția $f$                   | Derivata $f$              | Mulțimea pe care $f$ este derivabilă |
|-----|-------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| 8   | $\sin x$                      | $\cos x$                  | $R$                                  |
| 9   | $\cos x$                      | $-\sin x$                 | $R$                                  |
| 10  | $\operatorname{tg} x$         | $\frac{1}{\cos^2 x}$      | $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$         |
| 11  | $\operatorname{ctg} x$        | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     | $x \neq k\pi$                        |
| 12  | $\operatorname{aresin} x$     | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $(-1, 1)$                            |
| 13  | $\operatorname{arccos} x$     | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$                            |
| 14  | $\operatorname{arctg} x$      | $\frac{1}{1+x^2}$         | $R$                                  |
| 15  | $\operatorname{arccotg} x$    | $-\frac{1}{1+x^2}$        | $R$                                  |
| 16  | $e^x$                         | $e^x$                     | $R$                                  |
| 17  | $a^x, (a > 0)$                | $a^x \ln a$               | $R$                                  |
| 18  | $\ln x$                       | $\frac{1}{x}$             | $(0, +\infty)$                       |
| 19  | $\log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ | $\frac{1}{x \ln a}$       | $(0, +\infty)$                       |
| 20  | $\ln  x $                     | $\frac{1}{x}$             | $R \setminus \{0\}$                  |

## § 23. Diferențiala

### 1. Definiția diferențialei

Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$  și  $x_0$  un punct din  $I$ ; fie  $f'(x_0)$  derivata lui  $f$  în  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă se notează:

$$\alpha(x) = f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (x \neq x_0),$$

atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \alpha(x), \quad (x \neq x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = f'(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , rezultă că pentru valori ale lui  $x$  suficient de apropiate de  $x_0$  se poate realiza ca  $\alpha(x)$  să fie cât dorim de mic; deci, pentru astfel de valori ale lui  $x$ , raportul  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  este aproximativ egal cu  $f'(x_0)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0).$$

Așadar:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Dacă se notează  $x - x_0 = h$ , atunci  $x = x_0 + h$ ; relația precedentă se scrie astfel:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h$$

și exprimă faptul că, pentru creșteri  $h$  suficient de mici ale argumentului, de la  $x_0$  la  $x_0 + h$ , creșterea corespunzătoare  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  a funcției poate fi aproximată cu produsul  $f'(x_0)h$ . Atît creșterea funcției,  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ , cît și produsul  $f'(x_0)h$  sînt funcții de  $h$ : la diferite creșteri  $h$  corespund diferite creșteri ale funcției respectiv diferite produse  $f'(x_0)h$  (adică diferite aproximații ale creșterii funcției). Evident, cu cît creșterea  $h$  este mai mică (cu cît  $x$  este mai apropiat de  $x_0$ ), cu atît  $f'(x_0)h$  este mai apropiat de  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  (deci eroarea comisă în aproximație este cu atît mai mică).

**Definiție.** Funcția  $f'(x_0)h$  (cu argumentul  $h$ ) se numește diferențiala funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează  $df(x_0)$ :

$$df(x_0) = f'(x_0)h.$$

Din cele de mai sus rezultă că diferențiala  $df(x_0)$  aproximează creșterea  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  a funcției:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0).$$

Diferențiala funcției  $f$  într-un punct oarecare  $x \in I$  se scrie:

$$df(x) = f'(x)h.$$

De exemplu, pentru  $f(x) = x^2 + 1$  se obține  $df(x) = d(x^2 + 1) = 2xh$ .

Pentru funcția identică  $\varphi(x) = x$ , avem  $d\varphi(x) = d(x) = x'h = h$ .

Așadar, diferențiala  $d(x)$  a funcției identice este egală cu creșterea  $h$  a argumentului. În loc de  $d(x)$  se obișnuiește să se scrie, mai simplu,  $dx$ :

$$dx = h.$$

În loc de diferențiala funcției identice,  $dx$  se numește, mai simplu, diferențiala argumentului.



Făcînd raportul dintre diferențiala lui  $f$  și diferențiala argumentului se obține:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f'(x)h}{h} = f'(x).$$

Derivata lui  $f(x)$  este deci egală cu raportul a două diferențiale: diferențiala lui  $f(x)$  și diferențiala lui  $x$ . Se justifică astfel una din notațiile derivatei indicate în § 20, nr. 1:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Rezultă deci:

$$df(x) = f'(x) dx$$

Așadar, diferențiala lui  $f$  este egală cu produsul dintre derivata lui  $f$  și diferențiala argumentului.

Observație. Modul în care se notează argumentul nu este esențial. Se poate scrie:  $df(u) = f'(u)du$ ,  $df(t) = f'(t)dt$  etc.

### Exemple

$$1) f(x) = x^2 + 2; df(x) = d(x^2 + 2) = 2x dx.$$

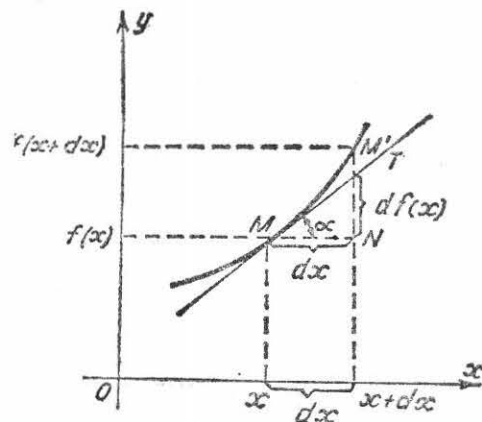
Pentru  $x = 1$ , se obține  $df(1) = 2dx$ . Se observă că  $df(1)$  este funcție de  $dx$ ; de exemplu, pentru  $dx = \frac{1}{2000}$ , valoarea acestei funcții este  $\frac{1}{1000}$ .

Pentru  $x = 2$ , se obține  $df(2) = 4dx$ . Diferențiala  $df(2)$  este de asemenea funcție de  $dx$ ; de exemplu, pentru  $dx = \frac{1}{2000}$ , valoarea acestei funcții este  $\frac{2}{1000}$ .

$$2) g(u) = \sin 3u; dg(u) = d \sin 3u = 3 \cos 3u du.$$

$$3) u(t) = \frac{1}{t}; du(t) = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} dt.$$

Fig. 68



Interpretarea geometrică a diferențialei este simplă (fig. 68).

Creșterea  $dx$  a argumentului este lungimea catetei  $MN$  din triunghiul dreptunghic  $MNT$ , iar  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ . Diferențiala  $f'(x)dx$  este lungimea catetei  $NT$ . Creșterea  $f(x+dx) - f(x)$  este lungimea segmentului  $NM'$ . Pentru creșteri  $dx$  suficient de mici ale argumentului, segmentele  $NT$  și  $NM'$  sînt aproximativ egale. Așadar, în jurul punctului  $M$ , pe o porțiune suficient de mică, graficul poate fi înlocuit cu un segment al tangentei.

## 2. Reguli de diferențiere

Din fiecare regulă de derivare se obține o regulă de diferențiere, înlocuind derivata unei funcții cu diferențiala sa:

$$1) d(u+v) = du + dv; 2) d(u-v) = du - dv; 3) d(uv) = vdu + u dv;$$

$$4) d(cu) = cdu; 5) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Pentru exemplificare, să demonstrăm formula diferențialei produsului:

$$\begin{aligned} d(uv) &= (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = u'vdx + v'udx = \\ &= v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + u dv. \end{aligned}$$

La fel se demonstrează și celelalte formule.

### Exemple

$$\begin{aligned} 1) d\left(\frac{x}{x^2+1}\right) &= \frac{(x^2+1)dx - x d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)dx - x \cdot 2x dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(x^2+1-2x^2)dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) d(e^x \sin x) &= \sin x \cdot de^x + e^x \cdot d(\sin x) = \sin x \cdot e^x \cdot dx + e^x \cdot \cos x \cdot dx = \\ &= e^x(\sin x + \cos x) dx. \end{aligned}$$

## 3. Diferențiala unei funcții compuse

Fie  $f(u(x))$  o funcție compusă, derivabilă pe un interval  $I$ .

Derivata sa este:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Dar  $u'(x)dx$  este diferențiala funcției  $u(x)$ :

$$du(x) = u'(x)dx,$$

astfel încît diferențiala funcției compuse se scrie:

$$df(u(x)) = f'(u(x))du(x).$$

Dacă nu se mai pune în evidență argumentul  $x$ , această egalitate se scrie astfel:

$$df(u) = f'(u)du$$

Trebuie reținut că în această calitate,  $u$  nu este variabilă independentă, ci o funcție de  $x$ . Totuși, formal, egalitatea se prezintă ca și cînd  $f(u)$  nu ar fi o funcție compusă, de argumentul  $x$ , ci o funcție al cărei argument ar fi  $u$ .

Această formulă ușurează de multe ori calculul diferențialei unei funcții compuse. Din regulile de derivare a funcțiilor elementare compuse se obțin imediat regulile de diferențiere a acestor funcții:

$$1) du^n = nu^{n-1}du, (n \text{ natural}).$$

$$2) du^{-n} = -nu^{-n-1}du, (n \text{ natural}).$$

$$3) d\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} du.$$

$$4) d \sin u = \cos u du; d \cos u = -\sin u du.$$

$$5) d \operatorname{tg} u = \frac{1}{\cos^2 u} du; d \operatorname{ctg} u = -\frac{1}{\sin^2 u} du.$$

$$6) d \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du; d \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

$$7) d \operatorname{arctg} u = \frac{1}{1+u^2} du; d \operatorname{arctg} u = -\frac{1}{1+u^2} du.$$

$$8) da^u = a^u \ln a du.$$

$$9) d \ln u = \frac{1}{u} du.$$

### Exemple.

$$1) d(3x+2)^5 = 5(3x+2)^4 d(3x+2) = 5(3x+2)^4 \cdot 3dx.$$

$$2) d \frac{1}{(7x^2+1)^3} = d(7x^2+1)^{-3} = -3(7x^2+1)^{-4} d(7x^2+1) = \\ = -\frac{3}{(7x^2+1)^4} 14xdx = -\frac{42x}{(7x^2+1)^4} dx.$$

$$3) d\sqrt{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot d \sin x = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x dx.$$

$$4) d(\sin e^x) = \cos e^x \cdot de^x = e^x \cos e^x dx.$$

$$5) d(\operatorname{tg} \ln x) = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot d \ln x = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

$$6) d(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot d\sqrt{x} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$7) d(\ln \sin^2 x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot d \sin^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} 2 \sin x \cdot d \sin x = \\ = \frac{1}{\sin^2 x} 2 \sin x \cos x dx = 2 \operatorname{ctg} x dx.$$

## § 24. Aplicații ale derivatelor în fizică

### 1. Viteza în mișcarea rectilinie

Să considerăm un mobil  $M$  care se mișcă pe o dreaptă  $Ox$  (fig. 69) și să presupunem că se cunoaște în fiecare moment  $t$ , abscisa  $s$  a poziției mobilului. Această abscisă este funcție (depinde) de timp,  $s(t)$ . La începutul capitolului (§ 19) a fost definită viteza  $v(t_0)$  pe care o are mobilul când trece prin punctul  $M_0$ , corespunzător momentului  $t_0$ , ea fiind limita următoare:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dar limita din membrul drept este derivata  $s'(t_0)$  a funcției  $s(t)$  în punctul  $t_0$ , deci:

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{ds(t_0)}{dt}.$$

Așadar:

*Viteza în mișcarea rectilinie este derivata spațiului în raport cu timpul.*

De aici rezultă în particular că dacă mișcarea este uniformă viteza este constantă.

Într-adevăr, în mișcarea uniformă legea de mișcare este:

$$s(t) = at + b \text{ deci } v(t) \equiv a.$$

### Exemple

1) Dacă mobilul se mișcă pe axa  $Ox$  după legea

$$s(t) = 2t - 3,$$

viteza sa este

$$v(t) = s'(t) = 2.$$

Viteza mobilului este constantă, fapt care se explică prin aceea că mișcarea este uniformă.

2) Dacă legea de mișcare pe axa  $Ox$  este:

$$s(t) = 3t^3 - 2t + 1$$

viteza sa este:

$$v(t) = 12t^2 - 2.$$

La momentul  $t = 0$ , mobilul are viteza  $v(0) = -2$ ; la momentul  $t = 1$ , viteza este  $v(1) = 10$ .

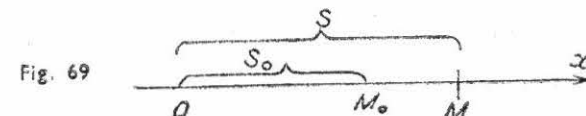


Fig. 69

## 2. Accelerația în mișcarea rectilinie

a) Să considerăm un mobil în mișcare rectilinie: Să presupunem că viteza sa este:

$$v(t) = 2t + 1.$$

Viteza nu este constantă, deci mișcarea nu este uniformă. Ne interesează, în aceste condiții, creșterea vitezei în unitatea de timp. Creșterea vitezei de la  $t = 0$  la  $t = 1$  este:

$$v(1) - v(0) = 3 - 1 = 2.$$

Creșterea vitezei de la  $t = 1$  la  $t = 2$  este:

$$v(2) - v(1) = 5 - 3 = 2.$$

În general, creșterea vitezei de la  $t = t_0$  la  $t = t_0 + 1$  este:

$$v(t_0 + 1) - v(t_0) = 2(t_0 + 1) + 1 - (2t_0 + 1) = 2.$$

Așadar, în orice interval de timp de o secundă, viteza crește cu 2 m/s.

Dacă măsurăm creșterea vitezei  $v(t_2) - v(t_1)$  între două momente oarecare  $t_1$  și  $t_2$  și împărțim această creștere a vitezei la creșterea  $t_2 - t_1$  a timpului de la  $t_1$  la  $t_2$  obținem:

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 + 1 - (2t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2.$$

Așadar, raportul dintre creșterea vitezei și creșterea timpului este constant, sau altfel spus, creșterea vitezei este proporțională cu creșterea timpului.

Dacă într-o mișcare, creșterea vitezei este proporțională cu creșterea timpului (adică dacă  $v(t) = at + c$ ), raportul constant dintre creșterea vitezei și creșterea timpului se numește accelerație. În acest caz se spune că mișcarea este uniform accelerată.

b) Să considerăm acum un alt mobil în mișcare rectilinie și să presupunem că viteza sa este:

$$v(t) = t^2.$$

Să calculăm și în acest caz creșterile vitezei într-o secundă:

$$v(1) - v(0) = 1.$$

$$v(2) - v(1) = 4 - 1 = 3.$$

$$v(3) - v(2) = 9 - 4 = 5.$$

Observăm că în intervale de timp egale creșterea vitezei nu este aceeași. În general, raportul:

$$a_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{t_1^2 - t_0^2}{t_1 - t_0} = t_1 + t_0$$

se modifică odată cu  $t_0$  și  $t_1$ . Acest raport poate fi considerat ca o accelerație medie a mobilului în intervalul de timp de la  $t_0$  la  $t_1$ , în sensul că un mobil în mișcare uniform accelerată cu accelerația  $a_1$  și-ar modifica viteza în intervalul de timp de la  $t_0$  la  $t_1$ , cu același număr de m/s ca și mobilul considerat.

Pentru intervalul de timp de la  $t_0$  la alt moment  $t_2$ , accelerația medie este:

$$a_2 = \frac{v(t_2) - v(t_0)}{t_2 - t_0} = t_2 + t_0.$$

Ne dăm seama ușor că, cu cât intervalul de timp este mai mic, cu atât modificarea vitezei medii este mai mică. Sintem astfel conduși să considerăm limita acestui raport:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0) = 2t_0$$

care este, prin definiție, accelerația  $a(t_0)$  a mobilului în momentul  $t_0$  al trecerii sale prin poziția  $M_0$ . Dar, limita acestui raport este derivata  $v'(t_0)$  a funcției  $v(t)$ . Așadar:

$$a(t_0) = v'(t_0).$$

*Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul.*

Ținând seama de faptul că viteza este, la rîndul său, derivata spațiului, deducem că:

*Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.*

### Exemple

1) Dacă mobilul se mișcă după legea  $s(t) = at + b$ , viteza sa este  $v(t) = a$  (viteza este constantă, ceea ce se explică prin faptul că mișcarea este uniformă), iar accelerația sa este  $a(t) \equiv 0$ . Așadar, într-o mișcare uniformă, accelerația sa este nulă.

2) Dacă mobilul se mișcă după legea  $s(t) = at^2 + bt + c$ , viteza sa este  $v(t) = 2at + b$ , iar accelerația sa este  $a(t) = 2a$ .

Accelerația este constantă, ceea ce se explică prin faptul că mișcarea este uniform accelerată.

## 3. Debitul unui lichid

Să considerăm un lichid în scurgere (de exemplu, apa printr-un robinet). Să notăm cu  $Q(t)$  cantitatea de lichid care se scurge în intervalul de timp  $t$ , începînd de la un anumit moment de referință, pe care-l notăm cu 0. Pentru a măsura cantitatea de lichid scursă între momentele  $t_1$  și  $t_2$  se face diferența  $Q(t_2) - Q(t_1)$ . Dacă în intervale egale de timp se scurg cantități egale de lichid, se spune că debitul lichidului este constant.

În acest caz, se numește debit cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Putem calcula debitul, făcând raportul:

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

între creșterea cantității de lichid  $Q(t_2) - Q(t_1)$  și creșterea timpului  $t_2 - t_1$ ,  $t_1$  și  $t_2$  fiind două momente oarecare.

Dacă debitul nu este constant, raportul:

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

se numește *debitul mediu* în intervalul de timp dintre  $t_1$  și  $t_2$ .

Se numește debit  $D(t_0)$  al lichidului la momentul  $t_0$ , limita debitului mediu,  $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ , când creșterea timpului tinde către 0 (sau când  $t$  tinde către  $t_0$ ):

$$D(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0).$$

Așadar:

*Debitul este derivata cantității de lichid în raport cu timpul.*

*Exemple*

$$1) Q(t) = t^3 - \sqrt{t+1}; \quad D(t) = 3t^2 - \frac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

$$2) Q(t) = e^t; \quad D(t) = e^t.$$

#### 4. Intensitatea curentului electric

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemăna cu un lichid în scurgere printr-o conductă. Putem vorbi și în acest caz de cantitatea de electricitate  $Q(t)$  scursă prin conductor într-un timp  $t$ , începînd de la un anumit moment de referință.

Putem vorbi, de asemenea, de debitul de electricitate ca fiind derivata cantității de electricitate în raport cu timpul.

Debitul de electricitate se numește *intensitatea curentului electric* și se notează cu  $I$ :

$$I(t) = Q'(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

#### 5. Densitatea unei bare (a unei repartiții liniare de masă)

Să considerăm o bară  $OA$  (fig. 70). Să notăm cu  $m(x)$  masa porțiunii  $Ox$  din bară. Dacă diferite porțiuni de lungime egală au mase egale, se spune că bara este

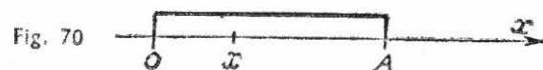


Fig. 70

omogenă. Împărțind masa  $m(x_1) - m(x_0)$  a unei porțiuni  $(x_0x_1)$  din bară, la lungimea sa  $x_1 - x_0$ , obținem densitatea  $\rho$  a barei:

$$\rho = \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Dacă bara nu este omogenă, raportul

$$\rho = \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se numește *densitatea medie* a porțiunii  $(x_0x_1)$ . O altă bară omogenă de aceeași lungime  $x_1 - x_0$ , și de densitate  $\rho$ , ar avea aceeași masă. Pentru porțiuni de lungime diferită se obțin densități medii diferite. În acest caz, densitatea  $\rho(x_0)$  a barei în punctul de abscisă  $x_0$  este, prin definiție, limita densității medii  $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$ , când  $x$  tinde către  $x_0$ :

$$\rho(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Dar limita aceasta este derivata  $m'(x_0)$  a funcției  $m(x)$  în punctul  $x_0$ , așa încît:

$$\rho(x_0) = m'(x_0) = \frac{dm(x_0)}{dx}.$$

Așadar:

*Densitatea unei repartiții liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.*

#### Exerciții

1) Aplicînd definiția derivatei, să se stabilească dacă următoarele funcții sînt derivabile în punctele specificate:

$$a) f(x) = 2x^2 - x + 3 \text{ în } x = 1;$$

$$b) f(x) = x^4 - 5x^2 + 1 \text{ în } x = 3;$$

$$c) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ în } x = -2;$$

$$d) f(x) = \sqrt{x} \text{ în } x = 1;$$

$$e) f(x) = \cos x \text{ în } x = 0;$$

$$f) f(x) = \lg 2x + \cos 3x \text{ în } x = 0;$$

$$g) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{pentru } 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ în } x = 1;$$

$$h) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \text{ în } x = 0;$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & \text{pentru } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2x & \text{pentru } x > 0 \end{cases} \text{ în } x = 0;$$

$$j) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2} & \text{pentru } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4} & \text{pentru } x > 2 \end{cases} \quad \text{în } x = 2;$$

$$k) f(x) = \max(\cos x, \cos^3 x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{în } x = \frac{\pi}{2};$$

$$l) f(x) = |x^3 - x| \text{ în } x = -1;$$

$$m) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{x-1}} & \text{pentru } x < 1 \\ 0 & \text{pentru } x = 1 \\ \ln(x^2 - 2x + 2) & \text{pentru } x > 1 \end{cases} \quad \text{în } x = 1.$$

2) Fiind dată funcția:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3,$$

să se determine  $\alpha$  astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul  $(2, f(2))$  să fie paralelă cu prima bisectoare.

3) Fiind dată funcția:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^2 - 1},$$

să se determine  $\alpha$  astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul  $(3, f(3))$  să formeze cu direcția pozitivă a axei  $Ox$  un unghi de  $60^\circ$ .

4) Fiind date funcțiile:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2 \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{x-1}{x},$$

să se determine  $\alpha$  și  $\beta$  astfel încât graficele celor două funcții să aibă tangentă comună, în punctul de abscisă 1.

5) Fie funcția  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$  și punctul  $M(\lambda, f(\lambda))$  al graficului lui  $f(\lambda \neq 0)$ . Fie  $M'$  punctul în care tangenta în  $M$  la grafic intersectează din nou graficul. Notînd cu  $m, m'$  coeficienții unghiulari ai tangentelor la grafic în punctele  $M$ , respectiv  $M'$ , să se determine punctele graficului pentru care are loc inegalitatea  $\frac{m'}{m} > -3$ , ( $m \neq 0$ ).

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții (specificînd de fiecare dată domeniul maxim de definiție al funcțiilor  $f$  și  $f'$ ):

$$6) a) f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 1;$$

$$b) f(x) = x^5 - 2x^4 + 16x;$$

$$c) f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6;$$

$$d) f(x) = \frac{1}{7}x^6 - 3x^5 + \frac{2}{3}x^2;$$

$$e) f(x) = 7 \sin x - 2x^3 + 1;$$

$$f) f(x) = 5x^4 - 2 \cos x + \frac{1}{2}x^2 + 3 \sin x;$$

$$g) f(x) = 2\sqrt{x} - x^4 + 3 \ln x;$$

$$h) f(x) = x \ln x - x + 3\sqrt[5]{x};$$

$$i) f(x) = 2 \cos x - x^2 \sin x;$$

$$j) f(x) = 5 \sin x \cos x - 1;$$

$$k) f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x;$$

$$l) f(x) = (x^2 - 2x)(x + 1) \sin x;$$

$$m) f(x) = (x^2 + x + 1)^3;$$

$$n) f(x) = (3x - 2)^{732}(5x^2 + 1);$$

$$p) f(x) = \cos^7 x;$$

$$q) f(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x;$$

$$r) f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x;$$

$$s) f(x) = \sin^3 x \cos x;$$

$$t) f(x) = \sin^m x \cos^n x \quad (m, n \text{ numere naturale});$$

$$u) f(x) = 3(2 - x^2)^{432} \sin^2 x;$$

$$v) f(x) = \frac{1}{8} \sin^5 x \cos^3 x - \frac{1}{16} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{3}{64} \sin^2 x \cos x - \frac{3}{128} \sin x \cos x + \frac{3}{128} x.$$

$$7) a) f(x) = \frac{x-1}{x+1};$$

$$b) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$c) f(x) = \frac{x}{1-x^2};$$

$$d) f(x) = \frac{3x-1}{x^5};$$

$$e) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1};$$

$$f) f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2};$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sin x};$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\cos x};$$

$$i) f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x};$$

$$j) f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x};$$

$$k) f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x;$$

$$l) f(x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x;$$

$$m) f(x) = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^3 x;$$

$$n) f(x) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x;$$

$$p) f(x) = \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x};$$

$$q) f(x) = \left( \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{x}{\cos^2 x} \right) \sin x.$$

$$8) a) f(x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right);$$

$$b) f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}^2 x;$$

$$c) f(x) = \frac{2 + \sin 2x}{\cos 2x};$$

$$d) f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+x^2};$$

$$e) f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1};$$

$$f) f(x) = x \sqrt{x^2 + 1};$$

$$g) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$h) f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$i) f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$j) f(x) = x(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$k) f(x) = \cos^3(2x-1) \sin(2x-1);$$

$$l) f(x) = 3 \sin^2((x^2 + x + 1)^4);$$

$$m) f(x) = \sin(\sin x);$$

$$n) f(x) = \operatorname{tg}(\cos(x^2));$$

$$p) f(x) = \operatorname{tg}^2(\cos x);$$

$$q) f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$$



9) a)  $f(x) = \ln(3x - 1)$ ;

c)  $f(x) = \log_{10}(x^2 - 1)$ ;

e)  $f(x) = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$ ;

g)  $f(x) = \ln \lg x$ ;

i)  $f(x) = \ln \cos^r x (r \in Q)$ ;

k)  $f(x) = \frac{1}{2} \lg^2 x + \ln \cos x$ ;

m)  $f(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ;

p)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ ;

10) a)  $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ ;

c)  $f(x) = e^{2x}(2 \cos 3x + 3 \sin 3x)$ ;

e)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ;

f)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ;

h)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ;

i)  $f(x) = (a)^{x^r}, (r \in Q)$ ;

j)  $f(x) = a^{3x^2+6x+1}$ ;

k)  $f(x) = a^{\frac{x+1}{x-1}}$ ;

l)  $f(x) = \frac{2x(x \ln 2 - 1)}{\ln^2 2}$ ;

m)  $f(x) = x^{\sqrt{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} + 2x^5 + 3$ ;

n)  $f(x) = e^{\sqrt{x}} \left( x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - 6 \right)$ ;

q)  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ;

r)  $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ ;

t)  $f(x) = (\lg x)^{1+x^2}$ ;

11) a)  $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ ;

b)  $f(x) = (\arcsin x)^2$ ;

d)  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ;

e)  $f(x) = \arcsin \frac{1}{1+x^2}$ ;

f)  $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ;

g)  $f(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$ ;

b)  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)^2$ ;

d)  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ;

f)  $f(x) = \ln \sin x$ ;

h)  $f(x) = \ln(\ln x)$ ;

j)  $f(x) = \ln(\ln(1+x^2))$ ;

l)  $f(x) = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \lg \frac{x}{2}$ ;

n)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{10+3x}{10-3x}}$ ;

q)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\lg x}{1-\lg x}}$ ;

b)  $f(x) = e^{3x}(\sin 3x + 1)$ ;

d)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ;

g)  $f(x) = e^{-x^2}$ ;

p)  $f(x) = e^x \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$ ;

s)  $f(x) = x^{\sin x}$ ;

$f'(2) = ?$ ,  $f'(-2) = ?$ ;

e)  $f(x) = \arcsin(x^2)$ ;

$f'(1) = ?$ ,  $f'(-1) = ?$ ;

$f'(3) = ?$ ,  $f'(-3) = ?$ ;

h)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ ;

i)  $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ;

j)  $f(x) = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$ ;

k)  $f(x) = e^{(1+x^2)} \operatorname{arctg} x$ ;

l)  $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ ;

m)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\lg x}{1-\lg x}} + \arccos(\sin 2x)$ ;

12) Să se calculeze derivatele următoarelor funcții în punctele specificate:

a)  $f(x) = \ln \left( \frac{x+3}{x+2} \right)^2 + \ln(x+1)$  în punctul  $x=1$ .

b)  $f(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \frac{1-x}{1+x}$  în punctul  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

c)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2} \sin x}{b+a \cos x} \quad (a+b \neq 0)$  în punctul  $x=0$ .

13) Să se arate că funcțiile următoare verifică (pe domeniile de definiție respective) identitățile scrise în dreptul fiecăreia:

a)  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $(1-x^2)f'(x) - xf(x) \equiv 1$ .

b)  $f(x) = x^2 + x(1 - \ln x)$ ;  $x^2 f''(x) \equiv 1$ .

c)  $f(x) = x \ln \frac{x}{x+1}$ ;  $x^3 f''(x) \neq (xf'(x) - f(x))^2$ .

d)  $f(x) = e^{2x}(1+x) + x^2 + 2x$ ;  $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \equiv 4x^2 - 6$ .

e)  $f(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^z$ ,  $(z \in R)$ ;  $(x^2-1)f''(x) + xf'(x) \equiv x^2 f(x)$ .

f)  $f(x) = (zx + \sqrt{1+x^2 x^2})^{\frac{1}{x}}$ ,  $(z \neq 0)$ ;

$(1+x^2 x^2)f''(x) + x^2 x f'(x) - f(x) \equiv 0$ .

g)  $f(x) = x^2(a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x))$ ,  $(x, a, b \in R)$ ;

$x^2 f''(x) + (1-2x)xf'(x) + (1+x^2)f(x) \equiv 0$ .

h)  $f(x) = \frac{\sin(x \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $(x \in R)$ ;  $(x^2-1)f''(x) + 3xf'(x) - (x^2-1)f(x) \equiv 0$ .

14) Să se calculeze diferențialele funcțiilor de mai jos pentru valorile specificate în dreptul fiecăreia:

a)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ;  $x = -1$ ,  $dx = \frac{1}{120}$ .

b)  $f(x) = xe^{2x}$ ;  $x = 0$ ,  $dx = \frac{1}{10}$ .

c)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ;  $x = 1$ ,  $dx = \frac{1}{100}$ .

d)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $x = \frac{1}{2}$ ,  $dx = \frac{1}{100\sqrt{3}}$ .

e)  $f(x) = \ln(1-x^2)$ ;  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $dx = \frac{1}{4000}$ .

- 15) \*Legea de mișcare a unui mobil de masă 3 kg fiind  $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$ , să se calculeze viteza, accelerația și energia cinetică a mobilului în momentul  $t = 3$ .
- 16) Legea de mișcare a unui mobil fiind  $s(t) = at^2 + bt + 5$ , să se determine  $a$  și  $b$ , știind că în momentul  $t = 2$  viteza mobilului este de 4 m/s, iar accelerația sa este de 3 m/s<sup>2</sup>.
- 17) Legea de mișcare a unui mobil fiind  $s(t) = at^2 + bt - 2$ , să se determine  $a$  și  $b$ , știind că viteza inițială a mobilului este de 15 m/s, iar viteza la  $t = 4$  este de 40 m/s.
- 18) Legea de mișcare a unui mobil fiind  $s(t) = at^2 + bt = c$ , să se determine  $a$ ,  $b$  și  $c$ , știind că mobilul pleacă dintr-un punct  $A$  situat la o distanță  $OA = 10$  m de origine și că în momentul  $t = 2$  mobilul se află în punctul  $B$ , situat la distanța  $OB = 6$  m de origine, avind viteza de 6 m/s.
- 19) Să se determine durata căderii unui corp care cade liber\*\* de la o înălțime de 120 m, precum și viteza cu care corpul ajunge pe pământ.
- 20) De la ce înălțime cade liber un corp dacă durata căderii sale este de 5 secunde? Cu ce viteză ajunge corpul pe pământ?
- 21) Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză inițială de 100 m/s. Să se determine:  
1° durata ascensiunii;  
2° înălțimea la care ajunge mobilul;  
3° durata căderii;  
4° viteza cu care ajunge pe pământ.
- 22) Cu ce viteză inițială trebuie aruncat vertical în sus un corp pentru ca să ajungă la o înălțime de 150 m? Care este durata ascensiunii?
- 23) Într-un vas conținând o soluție de nitrat de argint se introduc doi electrozi conectați la bornele unui acumulator. Măsurind (în miligrame) cantitatea de argint  $q(t)$  depusă la catod în  $t$  secunde, se constată că ea verifică relația  $q(t) = \ln(1+t)$ . Știind că  $q(t)$  este proporțională cu cantitatea de electricitate  $Q(t)$  (măsurată în coulombi), să se determine intensitatea curentului electric care trece prin soluție la  $t = 0$  și la  $t = 2$  (coeficientul de proporționalitate este 1,118).
- 24) Printr-o rezistență de 100 ohmi trece un curent electric alternativ. Știind că la fiecare moment  $t$ , cantitatea de electricitate,  $Q(t)$ , scursă prin rezistență, este dată de relația  $Q(t) = 3 \sin 2\pi t$  coulombi, să se determine tensiunea maximă la bornele rezistenței.
- 25) Se consideră o bară metalică neomogenă  $OA$ , de lungime 6 cm. Măsurind (în grame) masa unei porțiuni oarecare  $OM$  a barei, de lungime  $x$ , se constată că ea verifică relația  $m(x) = x + 2x^2$ . Să se determine densitatea la mijlocul barei.

\*În problemele următoare spațiile sint măsurate în metri, iar timpul în secunde.

\*\* Aici și în problemele care urmează se presupune că mișcările au loc în vid.

## Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

### § 25. Funcții derivabile pe un interval

#### 1. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$ .

**Definiția 1.** Se spune că un punct  $a \in I$  este un punct de maxim (local) al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  în care funcția are valori mai mici decât în  $a$  (fig. 71):

$$f(x) \leq f(a) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Dacă  $a$  este un punct de maxim al lui  $f$ , numărul  $f(a)$  se numește *maxim al lui  $f$* , iar punctul  $(a, f(a))$  de pe grafic se numește *punct de maxim al graficului*.

**Definiția 2.** Se spune că un punct  $b \in I$  este un punct de minim (local) al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $U$  a lui  $b$  în care funcția are valori mai mari decât în  $b$  (fig. 71):

$$f(b) \leq f(x) \text{ pentru orice } x \in U \cap I.$$

Dacă  $b$  este un punct de minim al lui  $f$ , numărul  $f(b)$  se numește *minim al lui  $f$* , iar punctul  $(b, f(b))$  de pe grafic se numește *punct de minim al graficului*.

Atât punctele de maxim, cât și punctele de minim ale lui  $f$  se numesc *puncte de extrem* ale lui  $f$ . Valorile funcției în punctele sale de extrem (maximele și minimele funcției) se numesc *extremele funcției*. Punctele de maxim și de minim ale graficului se numesc *puncte de extrem ale graficului*.

**Observații.** 1°. O funcție poate avea într-un interval mai multe puncte de maxim și de minim (fig. 71).

2°. O funcție poate avea într-un punct  $a$  un maxim (local), fără a avea în  $a$  cea mai mare valoare din interval. Este posibil ca un maxim al funcției să fie mai mic decât un minim al funcției (fig. 71).

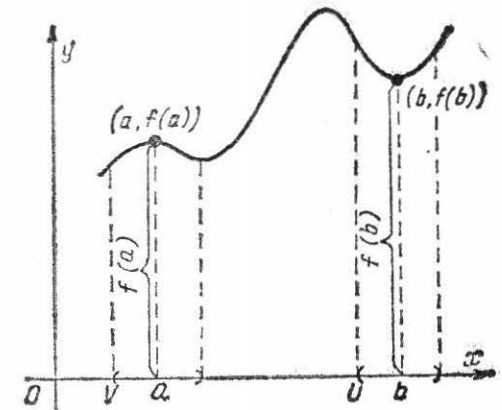


Fig. 71

În legătură cu punctele de extrem, se demonstrează teorema următoare:

**Teorema 1. (Teorema lui Fermat).** O funcție  $f$  derivabilă pe un interval  $I$  are derivata nulă în orice punct de extrem din interiorul intervalului.

**Demonstrație.** Fie  $c$  un punct de maxim al funcției  $f$  aflat în interiorul intervalului  $I$ . Există deci o vecinătate  $V$  a lui  $c$ , astfel încît:

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap I.$$

Să arătăm că derivata  $f'$  a lui  $f$  se anulează în  $c$ , adică:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

Dacă luăm  $x < c$ , atunci  $x - c < 0$ , și, deoarece pentru  $x \in V \cap I$  avem  $f(x) - f(c) \leq 0$ , rezultă:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad (x \in V \cap I).$$

Urmează că și limita raportului este pozitivă:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Dacă luăm  $x > c$ , atunci  $x - c > 0$ , și deci raportul este negativ:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \quad (x \in V \cap I).$$

Rezultă că și limita raportului este negativă:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Din inegalitățile  $f'(c) \geq 0$  și  $f'(c) \leq 0$  rezultă  $f'(c) = 0$ .

Dacă  $c$  este un punct de minim, demonstrația se face în mod analog.

**Interpretare geometrică.** Deoarece  $f'(c) = 0$ , tangenta la grafic în punctul  $(c, f(c))$  este paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 72). Teorema lui Fermat afirmă deci că graficul unei funcții derivabile are tangentă paralelă cu  $Ox$  în punctele sale de maxim sau de minim care nu coincid cu extremitățile graficului.

#### Observații

1<sup>o</sup> Condiția ca punctul de extrem  $c$  să fie în interiorul intervalului este esențială. Dacă  $c$  este o extremitate a intervalului  $I$ , s-ar putea ca derivata să nu se anuleze în  $c$ .

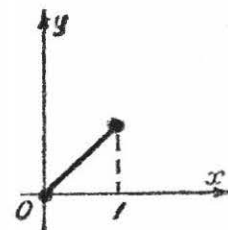


Fig. 73

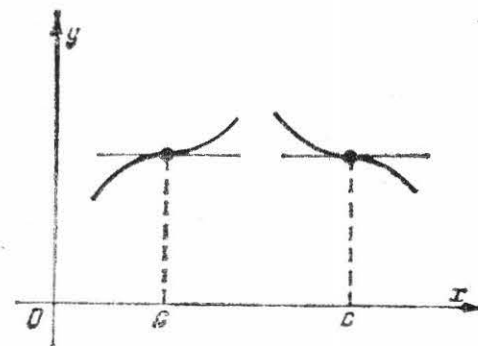


Fig. 74

De exemplu, pentru funcția  $f(x) = x$  definită pe  $[0, 1]$  (fig. 73) avem  $f'(x) = 1$  în orice punct, deci și în punctul 0 în care funcția are un minim și în punctul 1 în care funcția are maxim.

2<sup>o</sup>. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată: s-ar putea ca derivata să se anuleze într-un punct  $c$  din interiorul lui  $I$ , fără ca  $c$  să fie un punct de maxim sau de minim (fig. 74). Asemenea puncte se numesc puncte de inflexiune (v. § 28).

## 2. Teorema lui Rolle

**Teorema 2. (Teorema lui Rolle).** Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $a, b$  două puncte din  $I$  cu  $a < b$ .

Dacă:

- 1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ;
- 2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ ;
- 3)  $f$  are valori egale în  $a$  și  $b$ ,  $f(a) = f(b)$ ;

atunci există (cel puțin) un punct  $c$  între  $a$  și  $b$ ,  $a < c < b$ , în care derivata se anulează,  $f'(c) = 0$ .

**Demonstrație.** Dacă  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ , atunci  $f' = 0$  pe  $(a, b)$ , deci, luând un punct oarecare  $c \in (a, b)$ , avem  $f'(c) = 0$  și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem acum că  $f$  nu este constantă pe  $[a, b]$ . Deoarece  $f$  este continuă pe intervalul închis și mărginit  $[a, b]$ , transformă acest interval într-un interval închis și mărginit  $[m, M]$  (v. § 18). Fie  $x_m \in [a, b]$  un punct în care  $f$  ia cea mai mică valoare,  $m$ :

$$f(x_m) = m$$

și  $x_M \in (a, b]$  un punct în care  $f$  ia cea mai mare valoare  $M$ .

$$f(x_M) = M.$$

Deoarece  $f$  nu este constantă, avem  $m < M$ .

Pentru punctul de minim  $x_m$  distingem două cazuri posibile:  $x_m$  se află în interiorul intervalului  $[a, b]$ , sau  $x_m$  coincide cu una din extremitățile acestui interval.

În primul caz, aplicînd teorema lui Fermat rezultă  $f'(x_m) = 0$ , deci luînd  $c = x_m$  teorema este demonstrată.

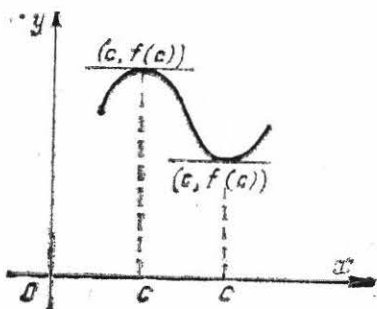


Fig. 72

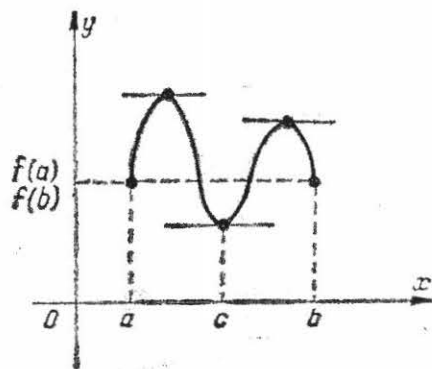


Fig. 75

deci că: dacă o funcție derivabilă  $f$  are valori egale la extremitățile unui interval  $[a, b]$ , există cel puțin un punct  $(c, f(c))$  de pe grafic, cu  $a < c < b$ , în care tangenta este paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 75).

**Observație.** Dacă, în particular,  $f(a) = f(b) = 0$ , teorema lui Rolle afirmă că: între două rădăcini  $a$  și  $b$  ale unei funcții derivabile, există cel puțin o rădăcină  $c$  a derivatei.

### 3. Teoremele creșterilor finite

**Teorema 3. (Teorema lui Cauchy).** Fie  $f$  și  $g$  două funcții definite pe un interval  $I$  și  $a, b$ , două puncte din  $I$  cu  $a < b$ . Dacă:

- 1)  $f$  și  $g$  sînt continue pe intervalul închis  $[a, b]$ ;
- 2)  $f$  și  $g$  sînt derivabile pe intervalul deschis  $(a, b)$ ;
- 3)  $g'(x) \neq 0$  pe  $(a, b)$ ;

atunci  $g(a) \neq g(b)$  și există (cel puțin) un punct  $c$  între  $a$  și  $b$ ,  $a < c < b$ , astfel încît să avem:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Această egalitate se numește *formula lui Cauchy*.

**Demonstrație.** Să arătăm întâi că  $g(a) \neq g(b)$ . Într-adevăr, dacă am avea  $g(a) = g(b)$ , atunci funcția  $g$  ar verifica ipotezele teoremei lui Rolle și deci ar exista un punct  $x_0 \in (a, b)$  astfel încît  $g'(x_0) = 0$ , ceea ce ar contrazice ipoteza 3.

Pentru a demonstra egalitatea din enunțul teoremei se aplică teorema lui Rolle funcției auxiliare  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin egalitatea:

$$h(x) = f(x) - kg(x), x \in I,$$

un  $k$  este un număr care urmează a fi determinat astfel încît  $h(a) = h(b)$ .

Dar  $h(a) = h(b)$  înseamnă:

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

de unde

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Pentru această valoare a lui  $k$ , funcția  $h$  verifică toate ipotezele teoremei lui Rolle:  $h$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ , ca diferență a funcțiilor  $f$  și  $kg$  care sînt continue pe  $[a, b]$  și derivabile pe  $(a, b)$ ; în plus,  $h(a) = h(b)$ . Există deci un punct  $c$  între  $a$  și  $b$  astfel încît  $h'(c) = 0$ .

Dar pentru  $x \in (a, b)$  avem:

$$h'(x) = f'(x) - kg'(x),$$

deci:

$$h'(c) = f'(c) - kg'(c).$$

Egalitatea  $h'(c) = 0$  se scrie acum:

$$f'(c) - kg'(c) = 0,$$

de unde:

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

și deci:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Teorema 4. (Teorema lui Lagrange).** Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $a, b$  două puncte din  $I$  cu  $a < b$ . Dacă:

- 1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ;
- 2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ ;

atunci există (cel puțin) un punct  $c$  între  $a$  și  $b$ ,  $a < c < b$ , astfel încît să avem:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Această egalitate se numește *formula lui Lagrange*.

**Demonstrație.** Funcția  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin egalitatea:

$$g(x) = x, x \in I$$

verifică (împreună cu  $f$ ) ipotezele teoremei lui Cauchy:  $g$  este continuă și derivabilă pe tot intervalul  $I$  și:

$$g'(x) = 1, \text{ pentru } x \in I.$$

Există deci un punct  $c \in (a, b)$  pentru care formula lui Cauchy este verificată.



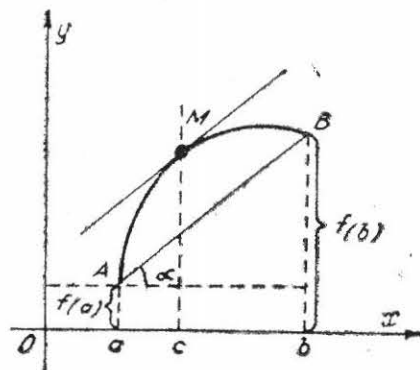


Fig. 76

se numește prima teoremă a creșterilor finite sau prima teoremă a mediei, iar teorema lui Cauchy se numește a doua teoremă a creșterilor finite sau a doua teoremă a mediei. În mod corespunzător, formula lui Lagrange se numește prima formulă a creșterilor finite sau prima formulă a mediei, iar formula lui Cauchy se numește a doua formulă a creșterilor finite sau a doua teoremă a mediei.

*Interpretare geometrică.* Coarda AB (fig. 76) are coeficientul unghiular:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tangenta la grafic în punctul  $M(c, f(c))$  are coeficientul unghiular  $f'(c)$ . Formula creșterilor finite:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

exprimă faptul că tangenta la grafic în punctul  $M$  este paralelă cu coarda  $AB$ .

*Exemplu*

Fie funcția  $f(x) = \sqrt{x}$ . Avem  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  și  $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ . Există deci un punct  $c$  între 0 și 1, în care tangenta la grafic are coeficientul unghiular 1 (este paralelă cu prima bisectoare). Putem verifica acest rezultat direct, calculând derivata  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  și punind condiția  $f'(x) = 1$ , adică  $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ . Se obține:  $x = \frac{1}{4}$ ; deci  $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f' \left( \frac{1}{4} \right) = 1$ .

#### 4. Teorema lui Darboux

După cum s-a menționat în capitolul despre funcții continue, *funcțiile derivate* au de asemenea proprietatea lui Darboux. În mod precis se poate demonstra:

**Teorema 5. (Teorema lui Darboux).** Dacă  $f$  este o funcție derivabilă pe un interval  $I$ , atunci derivata  $f'$  are proprietatea lui Darboux.

Deoarece  $g(b) - g(a) = b - a$  și  $g'(c) = 1$ , formula lui Cauchy devine:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

și teorema este demonstrată.

Formula lui Lagrange se utilizează și în forma următoare:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Teoremele lui Cauchy și Lagrange se mai numesc teoreme ale creșterilor finite sau teoreme de medie. Din motive istorice, teorema lui Lagrange

Ca și pentru funcții continue se pot deduce următoarele consecințe:

**Corolarul 1.** Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$ . Dacă derivata  $f'$  ia valori de semne contrare în două puncte  $a < b$  din  $I$ , atunci derivata  $f'$  ia valoarea 0 cel puțin într-un punct cuprins între  $a$  și  $b$ .

**Corolarul 2.** Fie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă. Dacă derivata sa  $f'$  nu se anulează pe un interval  $I \subset E$ , atunci derivata  $f'$  păstrează același semn pe  $I$ .

Această ultimă proprietate va fi folosită mai departe pentru determinarea intervalelor de monotonie ale funcțiilor.

#### 5. Consecințe ale teoremei lui Lagrange

a) După cum se știe, derivata unei funcții constante este nulă. Reciproc:

**I) Dacă o funcție are derivată nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.**

Într-adevăr, fie  $f$  o funcție cu derivata nulă,  $f'(x) = 0$ , pe un interval  $I$ . Să alegem un punct  $a \in I$ . Dacă  $x$  este un punct arbitrar din  $I$ , aplicând teorema lui Lagrange deducem că există un punct  $c$  cuprins între  $a$  și  $x$ , astfel încît:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c).$$

Dacă  $f'(c) = 0$ , deci  $f(x) = f(a)$  oricare ar fi  $x \in I$ , adică  $f$  este constantă pe  $I$ .

b) Dacă  $f$  și  $g$  sînt două funcții derivabile pe o mulțime  $E$  și dacă diferența lor este constantă, atunci ele au aceeași derivată pe  $E$ . Într-adevăr, dacă  $f - g = c$ , atunci  $f' - g' = 0$ , deci  $f' = g'$ . Reciproc:

**II) Dacă  $f$  și  $g$  sînt două funcții cu derivate egale pe un interval, atunci ele diferă printr-o constantă pe acest interval.**

Într-adevăr, dacă notăm  $h = f - g$ , avem  $h' = f' - g' = 0$ , deci, conform proprietății I,  $h = c$ , adică  $f - g = c$ .

*Observație.* În propoziția II (ca și în propoziția I care se obține ca un caz particular luînd  $g = 0$ ), condiția ca domeniul de definiție să fie un interval este esențială. Dacă  $f$  și  $g$  au derivate egale pe o mulțime  $E$  care nu este interval (ci, de exemplu reuniune, de două intervale disjuncte), este posibil ca  $f - g$  să nu fie constantă.

Fie, de exemplu, mulțimea  $E = (0,1) \cup (2,3)$  și funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (0,1) \\ 2 & \text{pentru } x \in (2,3). \end{cases}$$

Funcția  $f$  are derivata nulă pe  $E$ , dar nu este constantă pe  $E$ .

*Exemple*

1) Dacă  $f'(x) = 1$  pe  $\mathbb{R}$ , atunci  $f(x) = x + C$ .

2) Dacă  $f'(x) = x$  pe  $\mathbb{R}$ , atunci  $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$ .

3) Să se găsească funcția  $f$  definită pe  $\mathbb{R}$  a cărei derivată este  $f'(x) = 2x + 3$ , și care îndeplinește condiția  $f(0) = 1$ .

Avem  $f(x) = x^2 + 3x + C$ ;  $f(0) = C$ , deci  $C = 1$ . Rezultă  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ .



c) Proprietatea următoare va fi folosită pentru determinarea intervalelor de monotonie ale funcțiilor.

III) Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$ .

Dacă derivata  $f'$  este strict pozitivă pe  $I$ , atunci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ .

Dacă derivata  $f'$  este strict negativă pe  $I$ , atunci funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ .

Fie  $x_1 < x_2$  două puncte arbitrare din  $I$ . Aplicând teorema lui Lagrange, rezultă că există un punct  $c$  între  $x_1$  și  $x_2$  astfel încât:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Deoarece  $x_2 - x_1 > 0$ , diferența  $f(x_2) - f(x_1)$  are același semn cu  $f'(c)$ .

Dacă  $f'(c) > 0$ , atunci  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , deci  $f(x_1) < f(x_2)$  și deci  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ .

Dacă  $f'(c) < 0$ , atunci  $f(x_1) > f(x_2)$  și deci  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ .

d) Propoziția următoare permite calculul derivatei într-un punct, cu ajutorul valorilor derivatei în jurul punctului.

IV) Fie  $f$  o funcție continuă pe un interval  $I$  și  $x_0$  un punct din  $I$ .

Dacă  $f$  este derivabilă pe  $I \setminus \{x_0\}$  și dacă derivata  $f'$  are limită (finită sau infinită) în punctul  $x_0$ , atunci derivata există și în punctul  $x_0$  și

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Să notăm  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Trebuie să arătăm că  $f$  are în  $x_0$  derivată, egală cu  $l$ , adică:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

Pentru aceasta fie  $x_n \rightarrow x_0$  un șir format din puncte  $x_n \neq x_0$  din  $I$ . Pentru fiecare  $n$  să aplicăm teorema creșterilor finite pe intervalul cu o extremitate în  $x_0$  și cu cealaltă extremitate în  $x_n$ ; obținem un punct  $c_n$ , cuprins între  $x_0$  și  $x_n$ , astfel încât:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(c_n).$$

Deoarece  $c_n$  se află între  $x_0$  și  $x_n$ , avem  $0 < |c_n - x_0| < |x_n - x_0| \rightarrow 0$ . Rezultă că  $c_n \rightarrow x_0$  și  $c_n \neq x_0$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$ , deducem că  $f'(c_n) \rightarrow l$ , adică:

$$\lim_n \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = l.$$

Deoarece șirul  $x_n \rightarrow x_0$ , cu  $x_n \neq x_0$  a fost ales arbitrar rezultă că:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Observație. Dacă derivata  $f'$  are limită la stînga (respectiv la dreapta) în  $x_0$ , atunci există derivata la stînga  $f'_s(x_0)$  (respectiv derivata la dreapta  $f'_d(x_0)$ ) și  $f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$  (respectiv  $f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$ ).

### Exemple

1) Fie funcția putere  $f(x) = x^\alpha$ . Dacă  $0 < \alpha < 1$ , se știe (v. § 21) că  $f$  are derivată  $+\infty$  în punctul  $x_0 = 0$ ,  $f'(0) = +\infty$ .

Aplicînd propoziția precedentă regăsim imediat acest rezultat. Într-adevăr,  $f$  este continuă pe  $I = [0, +\infty)$ , este derivabilă pe  $I \setminus \{0\}$  și  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Deoarece  $1 - \alpha > 0$  rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty.$$

Deci, conform propoziției precedente,  $f$  are derivată în  $x_0 = 0$  și:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty.$$

2) După cum am menționat anterior (v. § 22), funcția  $f(x) = \arcsin x$  are derivată  $+\infty$  în punctele  $-1$  și  $1$ ,  $f'(-1) = f'(1) = +\infty$ .

Într-adevăr, funcția  $f$  este continuă pe  $I = [-1, 1]$ , este derivabilă pe  $I \setminus \{-1, 1\}$  și derivata  $f'$  are limită în punctul  $-1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Aplicînd propoziția precedentă rezultă că  $f$  are derivată în punctul  $-1$  și:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = +\infty.$$

La fel se arată că  $f'(1) = +\infty$ .

3) Funcția  $f(x) = \arccos x$  are derivată  $-\infty$  în punctele  $-1$  și  $1$ ,  $f'(-1) = -\infty$  (v. § 22).

Într-adevăr, se obține:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\infty; \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\infty.$$

## § 26. Regula lui l'Hospital

Se știe că în cazurile exceptate de teoremele asupra operațiilor cu limite de funcții este necesar un studiu direct pentru a stabili dacă există limită. Metodele folosite într-un astfel de studiu nu au un caracter unitar și, de multe ori, presupun o ingeniozitate deosebită și o bogată experiență în calcul de limite din partea celui care le minuieste.

În paragraful de față va fi expus un procedeu mai simplu și unitar, care cu ajutorul derivatelor permite rezolvarea problemei într-un număr destul de mare de împrejurări. Acest procedeu constă în așa-numita „regulă a lui l'Hospital”, aplicabilă (în condiții care vor fi precizate) cazurilor  $\frac{0}{0}$  și  $\frac{\infty}{\infty}$ . Celelalte cazuri se reduc la acestea.

În tot acest paragraf vom considera un interval  $I$  (mărginit sau nemărginit), și un punct de acumulare  $x_0$  (finit sau infinit) al lui  $I$  și  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow R$  două funcții.

### 1. Cazurile $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$

Să presupunem că:

$$g(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și să considerăm raportul celor două funcții:

$$\frac{f}{g} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow R.$$

Să presupunem, de asemenea, că pentru limita funcției  $\frac{f}{g}$  în punctul  $x_0$ , sîntem în cazul  $\frac{0}{0}$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

sau în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$$

În aceste două cazuri, teorema următoare dă condiții suficiente de existență a limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Teorema lui l'Hospital.** Dacă:

- 1)  $f$  și  $g$  sînt derivabile pe  $I \setminus \{x_0\}$ ;
- 2)  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;
- 3) există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$  (finită sau infinită);

atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Această egalitate este cunoscută sub numele de „regula lui l'Hospital”.

Vom da demonstrația doar pentru cazul  $\frac{0}{0}$ , presupunînd că  $x_0$  este finit. Pentru a simplifica demonstrația, vom presupune în plus că funcțiile  $f$  și  $g$  sînt definite și în  $x_0$  și sînt continue în acest punct:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ și } g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Pentru a demonstra că:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

vom folosi definiția cu șiruri a limitei.

Fie  $x_n \rightarrow x_0$  un șir de puncte  $x_n \neq x_0$  din  $I$ .

Pentru fiecare  $n \in N$  putem aplica perechi de funcții  $f, g$  teorema lui Cauchy pe intervalul de extremități  $x_n, x_0$ . Există deci un punct  $c_n$  cuprins între  $x_n$  și  $x_0$  astfel încît:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Dar  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , deci:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Deoarece însă  $c_n$  se află între  $x_n$  și  $x_0$ , avem:

$$0 < |c_n - x_0| < |x_n - x_0| \rightarrow 0.$$

Rezultă că  $c_n \rightarrow x_0$  și  $c_n \neq x_0$ . Ținînd seama de ipoteza 3) deducem că:

$$\lim_n \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l,$$

deci:

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l.$$

Deoarece șirul  $x_n \rightarrow x_0$  cu  $x_n \neq x_0$  a fost ales arbitrar, deducem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Exemple*

1) Fie funcția  $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{2 \sin x}$  definită pe  $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  și fie  $x_0 = 0$ . Notăm:

$f(x) = e^x - 1$ ;  $g(x) = 2 \sin x$ . Pentru funcția  $\frac{f}{g}$  sîntem în cazul  $\frac{0}{0}$ .

Condițiile din enunțul teoremei sînt îndeplinite:

$f$  și  $g$  sînt derivabile pe  $I \setminus \{0\}$  (de fapt și în punctul 0);

$g'(x) = 2 \cos x \neq 0$  pe  $I \setminus \{0\}$  (de fapt și în punctul 0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Urmează că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2 \sin x} = \frac{1}{2}$ .

În aplicațiile uzuale, condițiile din enunțul teoremei sînt satisfăcute. De aceea, de obicei, se trece direct la calculul limitei în  $x_0$  a funcției  $\frac{f'}{g'}$ . Dacă aplicarea regulii conduce la o contradicție, înseamnă că, dintre condițiile teoremei, cel puțin una nu este îndeplinită.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x^5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-5x^4} = \frac{2}{5}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = -1.$$

4) Dacă  $\alpha > 0$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

$$5) \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos 3x}{\sin 3x}} = \frac{2}{3} \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \cdot \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Uneori trebuie să aplicăm regula lui l'Hospital nu numai funcției  $\frac{f}{g}$ , dar chiar și funcțiilor  $f$  și  $g$ , care apar ca rapoarte.

1) Fie funcția:

$$\varphi(x) = \frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)},$$

$$\text{unde } g(x) = \frac{x \sin x - x^2 e^x}{\sin x + x^2 e^x}.$$

Ne punem problema calculului limitei funcției  $\varphi$  în  $x_0 = 0$ .

Calculăm mai întâi  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ . Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2 e^x}{\sin x + x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x - x^2 e^x - 2xe^x}{\cos x + x^2 e^x + 2xe^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{g(x)} - 1) = 0.$$

Pentru funcția  $\frac{f}{g}$  sîntem deci în cazul  $\frac{0}{0}$ .

Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) e^{g(x)}}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{g(x)} = e^0 = 1.$$

Dacă pentru funcția  $\frac{f'}{g'}$  sîntem, de asemenea, într-una din cazurile  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$  și dacă  $f', g'$  verifică toate condițiile teoremei, atunci limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  poate fi calculată aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital. Procedul se poate repeta.

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^4} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

8) Fie  $\alpha > 0$ . Să calculăm limita remarcabilă  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ .

Fie  $n$  cel mai mic număr natural  $\geq \alpha$ . Avem  $\alpha - n + 1 > 0$  și  $n - \alpha \geq 0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-\alpha} > 0$ . Aplicînd de  $n$  ori regula lui l'Hospital, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)x^{n-\alpha}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)} x^{n-\alpha} e^x = +\infty.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2 \sin x + \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x + 3 \sin^2 x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x}{\sin x + \sin x + x \cos x}}{\frac{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x + 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x}{4x \cos x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + \cos x - x \sin x}{2 \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x + 6 \cos^3 x - 12 \sin^2 x \cos x - 9 \sin^3 x \cos x} =$$

$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Uneori, studiul direct al funcției  $\frac{f}{g}$  permite calculul limitei în  $x_0$  într-un mod mai expeditiv decât prin aplicarea regulii lui l'Hospital.

Alteori calculul limitei funcției  $\frac{f'}{g'}$  revine într-un anumit mod la calculul limitei funcției  $\frac{f}{g}$ . Într-un astfel de caz, chiar admitând că limita există, aplicarea regulii lui l'Hospital este infructuoasă.

10) Reluând exemplul anterior, obținem imediat:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2 \sin x + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 + \sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

11) Fie funcția:

$$\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Ne punem problema calculului limitei funcției  $\varphi$  în  $x_0 = +\infty$ .

Notînd  $f(x) = e^x - e^{-x}$  și  $g(x) = e^x + e^{-x}$ , obținem:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ și } \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Rezultă că regula lui l'Hospital nu poate fi utilizată, deoarece, dacă nu știm să calculăm limita raportului  $\frac{f}{g}$ , nu vom ști să calculăm nici limita raportului derivatelor  $\frac{f'}{g'}$ .

Limita funcției  $\varphi$  se poate însă calcula direct:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

Reciproca teoremei lui l'Hospital este falsă; astfel: dacă  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$ , nu rezultă că și  $\frac{f'}{g'}$  are limită în  $x_0$ , după cum se arată în exemplul următor.

12) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{x}.$$

Ne punem problema calculului limitei funcției  $f$  în  $x_0 = +\infty$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = +\infty$  (v. cap. III, exerc. 6, h), rezultă că pentru funcția  $f$  sîntem în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Avem:

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

Dar:  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . Aplicînd criteriul majorării pentru funcții, rezultă:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

Deci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

În schimb, raportul  $\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x$  nu are limită în  $x_0 = +\infty$ .

## 2. Cazul $0 \cdot \infty$

Să presupunem că pentru limita funcției  $f/g$  în punctul  $x_0$  sîntem în cazul  $0 \cdot \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$$

a) Putem presupune  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$  din  $I$ .

Atunci:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

iar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Am redus astfel cazul  $0 \cdot \infty$  la cazul  $\frac{0}{0}$ , căruia îi putem aplica regula lui l'Hospital.

b) Dacă  $f(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$  din  $I$  putem scrie:

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$$

Am redus astfel cazul  $0 \cdot \infty$  la cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ , căruia de asemenea i se poate aplica regula lui l'Hospital.

### Exemple

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^5 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{5}{x^6}} = -\frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} x^5 = -\frac{1}{5} \cdot 0 = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow e} \ln(x-e) (\ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{\ln(x-e)}} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(x-e) \ln^2(x-e)}} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow e} \frac{(x-e) \ln^2(x-e)}{x}.$$

Observăm că pentru funcția  $(x-e) \ln^2(x-e)$  sîntem de asemenea în cazul  $0 \cdot \infty$ . Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow e} (x-e) \ln^2(x-e) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2(x-e)}{\frac{1}{x-e}} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x-e} 2 \ln(x-e)}{-\frac{1}{(x-e)^2}} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow e} (x-e) \ln(x-e) = -2 \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x-e)}{\frac{1}{x-e}} = -2 \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x-e}}{-\frac{1}{(x-e)^2}} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow e} (x-e) = 0.$$

Deci, revenind:

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln(x-e) (\ln x - 1) = -\frac{0}{e} = 0.$$

Observăm că dacă am fi scris:

$$\ln(x-e) (\ln x - 1) = \frac{\ln(x-e)}{\frac{1}{\ln x - 1}},$$

calculul limitei ar fi fost mult mai simplu. Într-adevăr:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x-e)}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x-e}}{\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x - 1)^2 + x \cdot \frac{2}{x} (\ln x - 1)}{1} = -\frac{0}{1} = 0.$$

### 3. Cazul $\infty - \infty$

Să presupunem că pentru limita funcției  $f-g$  în punctul  $x_0$  sîntem în cazul  $\infty - \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

sau

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty.$$

a) Putem presupune  $f(x) \neq 0$  și  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$  din  $I$ . Atunci:

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x) - g(x)}{1} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{1} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{1} = \frac{1}{f(x)g(x)}.$$

și am redus cazul  $\infty - \infty$  la cazul  $\frac{0}{0}$ , căruia îi aplicăm regula lui l'Hospital.

b) Uneori este mai convenabil să scriem

$$f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right).$$

Observăm că pentru funcția  $\frac{g(x)}{f(x)}$  sîntem în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ , căruia îi putem aplica regula lui l'Hospital.

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ , atunci pentru funcția  $f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$  sîntem în cazul  $\infty \cdot 0$ , care se tratează ca la numărul precedent.

### Exemple

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{ctg} x}{x \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ , rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty.$$



3) Fie  $f(x) = (1 - \sin x)e^{\operatorname{tg} x}$  definită pe  $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$  și fie  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Avem:

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

Pentru calculul limitei la stînga în  $\frac{\pi}{2}$  sîntem în cazul  $0 \cdot \infty$ .

Avem:

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)e^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} e^{\ln(1 - \sin x)} e^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} e^{\ln(1 - \sin x) + \operatorname{tg} x}.$$

Pentru calculul limitei la stînga în  $\frac{\pi}{2}$  a funcției  $\varphi(x) = \ln(1 - \sin x) + \operatorname{tg} x$  sîntem în cazul  $\infty - \infty$ .

Obținem:

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} (\ln(1 - \sin x) + \operatorname{tg} x) = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \left( \frac{\ln(1 - \sin x)}{\operatorname{tg} x} + 1 \right);$$

și deoarece:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = - \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} = \\ &= - \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \cos^2 x \sin x}{-\cos x} = -3 \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \cos x \sin x = 0, \end{aligned}$$

rezultă, în definitiv:

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} f(x) = e^{+\infty} = +\infty.$$

Deci funcția  $f$  nu are limită în  $\frac{\pi}{2}$ .

Se observă că în exemplul anterior s-a folosit regula lui l'Hospital doar pentru calculul uneia dintre limitele laterale în  $x_0$ , cealaltă obținându-se conform teoremelor asupra operațiilor cu limite de funcții.

#### 4. Cazurile $0^0$ , $1^\infty$ , $\infty^0$

Să presupunem că  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , și să considerăm funcția  $f^g$ . Să presupunem că pentru limita funcției  $f^g$  în punctul  $x_0$  sîntem în cazul  $0^0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

sau în cazul  $1^\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$$

sau în cazul  $\infty^0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

În toate aceste cazuri, pentru limita funcției  $g(x) \ln f(x)$  în  $x_0$  sîntem în cazul  $0 \cdot \infty$ , care se tratează ca la numărul 2 al acestui paragraf.

Deoarece:

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f},$$

rezultă că dacă există:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) = \alpha,$$

atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^\alpha.$$

*Exemple.*

1) Fie funcția  $f(x) = x^x$  definită pe  $(0, +\infty)$  și fie  $x_0 = 0$ . Pentru funcția  $f$  sîntem în cazul  $0^0$ .

Logaritmind, rezultă:

$$\ln f(x) = x \ln x.$$

Obținem:

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \searrow 0} x = 0.$$

Deci:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = e^0 = 1.$$

2) Fie  $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}$  și  $x_0 = +\infty$ . Pentru funcția  $f$  sîntem în cazul  $1^\infty$ .

Logaritmînd, rezultă:

$$\ln f(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty.$$

Deci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2} = e^{+\infty} = +\infty.$$

3) Fie  $f(x) = \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$  definită pe  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  și fie  $x_0 = 0$ . Pentru  $f$  sîntem în cazul  $\infty^0$ .

Logaritmînd, rezultă:

$$\ln f(x) = \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \\ &= \lim_{x \searrow 0} x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Deci:

$$\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

4) Fie funcția  $\varphi(x) = (1 + \cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$  definită pe  $[0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$  și fie  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Pentru  $\varphi$  sîntem în cazul  $1^\infty$ .

Logaritmînd, rezultă:

$$\ln \varphi(x) = \operatorname{tg}^2 x \cdot \ln (1 + \cos x) = \frac{\ln (1 + \cos x)}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Notînd:

$$f(x) = \ln (1 + \cos x),$$

$$g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x},$$

obținem:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \frac{\sin^4 x}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

Rezultă deci că aplicînd regula lui l'Hospital pentru cazul  $\frac{0}{0}$  pe  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right)$  respectiv pe  $\left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$  se obține  $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \ln \varphi(x) = +\infty$  respectiv  $\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \ln \varphi(x) = -\infty$ ; deci

$$\varphi \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = e^{+\infty} = +\infty \text{ și } \varphi \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = e^{-\infty} = 0.$$

Rezultă că funcția  $\varphi$  nu are limită în  $\frac{\pi}{2}$ .

Regula lui l'Hospital este utilă uneori și pentru calculul limitei unor șiruri.

Fie  $\varphi: N \rightarrow R$  un șir. Să presupunem că există o prelungire  $f$  a lui  $\varphi$  la o semidreaptă  $(a, +\infty)$ , ( $a > 0$ ) astfel încît există limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l, (l \in \bar{R}).$$

Rezultă atunci că oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow +\infty$ , avem:  $\lim_n f(x_n) = l$ . În particular, pentru șirul  $x_n = n$ , obținem  $\lim_n f(n) = l$ . Dar  $f(n) = \varphi(n)$  oricare ar fi  $n \in N$ .

Deci  $\lim_n \varphi(n) = l$ .

*Exemplu.*

Fie șirul cu termenul general  $a_n = \sqrt[n]{n}$ .

Să notăm:  $\varphi(n) = n^{\frac{1}{n}}$ .

Fie prelungirea  $f$  a lui  $\varphi$  la  $(1, +\infty)$  definită prin

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Pentru funcția  $f$  sîntem în cazul  $\infty^0$ . Logaritmînd, rezultă:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x.$$

Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Deci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^0 = 1.$$

Rezultă:

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$$

## § 27. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

### 1. Intervalele de monotonie

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă. În § 25 au fost puse în evidență următoarele două proprietăți:

a) Dacă derivata  $f'$  nu se anulează pe un interval  $I \subset E$ , atunci  $f'$  păstrează același semn pe  $I$ .

b) Dacă derivata  $f'$  este strict pozitivă (+) pe un interval  $I \subset E$ , atunci funcția  $f$  este strict crescătoare (↗) pe  $I$ .

Dacă derivata  $f'$  este strict negativă (−) pe  $I$ , atunci funcția  $f$  este strict descrescătoare (↘) pe  $I$ .

Așadar:

Problema determinării intervalelor de monotonie ale funcției  $f$  se reduce la aceea a determinării intervalelor pe care derivata  $f'$  păstrează același semn.

Din prima proprietate deducem că intervalele maxime pe care derivata păstrează același semn se determină cu ajutorul rădăcinilor derivatei.

Din cele de mai sus rezultă calea de urmat pentru determinarea intervalelor de monotonie ale funcției  $f$ :

1) Se calculează derivata  $f'$ .

2) Se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ .

3) Cu ajutorul rădăcinilor derivatei se determină intervalele pe care derivata păstrează un semn constant.

4) După cum semnul derivatei este + sau −, se stabilește dacă funcția este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe aceste intervale.

Rezultatele obținute se trec într-un tablou cu trei rubrici orizontale (v. mai departe exemplele de la numărul 3).

### 2. Punctele de extrem

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție și  $x_0$  un punct din  $E$ .

Să presupunem că  $x_0$  se află în interiorul unui interval  $I \subset E$ . Următoarele două propoziții dau condiții suficiente pentru ca  $x_0$  să fie punct de extrem al funcției.

1) Dacă pe  $I$  funcția este strict crescătoare la stînga lui  $x_0$  și strict descrescătoare la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim al funcției (↗ M ↘).

2) Dacă pe  $I$  funcția este strict descrescătoare la stînga lui  $x_0$  și strict crescătoare la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim al funcției (↘ m ↗).

Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$  aceste două propoziții se pot formula cu ajutorul semnelui derivatei.

Conform teoremei lui Fermat, punctele de extrem  $x_0$  din interiorul intervalului  $I$  trebuie căutate printre rădăcinile derivatei.

1') Dacă pe  $I$  derivata este strict pozitivă (+) la stînga lui  $x_0$  și strict negativă (−) la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim al funcției.

Simbolic:

$$+ 0 - \Rightarrow \nearrow M \searrow$$

2') Dacă pe  $I$ , derivata este strict negativă (−) la stînga lui  $x_0$  și strict pozitivă (+) la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim al funcției.

Simbolic:

$$- 0 + \Rightarrow \searrow m \nearrow$$

Dacă însă derivata are același semn de o parte și de alta a lui  $x$  (+ 0 + sau − 0 −), atunci  $x_0$  nu este punct de extrem al funcției.

Observații. 1°. Ultimele trei propoziții rămân adevărate și în cazul cînd  $f$  nu este derivabilă în  $x_0$ , dar este continuă în  $x_0$ . De exemplu, funcția  $f(x) = |x|$  este continuă dar nu este derivabilă în  $x_0 = 0$ . Derivata  $f'$  este − la stînga lui 0 și + la dreapta lui 0, deci 0 este punct de minim.

2°. Dacă  $f: [a, b] \rightarrow R$  este o funcție derivabilă, și dacă  $f'$  are semn constant, atunci  $a$  și  $b$  sînt puncte de extrem ale funcției și anume: dacă  $f'$  are semnul +,  $a$  este punct de minim iar  $b$  este punct de maxim; dacă  $f'$  are semnul −,  $a$  este punct de maxim, iar  $b$  este punct de minim.

### 3. Exemple

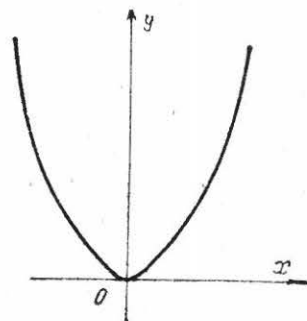
1) Fie funcția  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ . Derivata sa este  $f'(x) = 2x$  și are o singură rădăcină,  $x = 0$ . Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, \infty)$ . Pentru  $x = -1$  avem  $f'(-1) = -2$ , deci pe semidreapta  $(-\infty, 0)$  derivata este strict negativă; pentru  $x = 1$  avem  $f'(1) = 2$ , deci pe semidreapta  $(0, +\infty)$  derivata este strict pozitivă. Punctul 0 este un punct de minim al funcției și  $f(0) = 0$ .

Aceste rezultate se trec într-un tablou:

|         |           |                            |                         |
|---------|-----------|----------------------------|-------------------------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$                        | $+\infty$               |
| $f'(x)$ | $-$       | $- 0 +$                    | $+$                     |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow$<br>$m$<br>$(0)$ | $\nearrow$<br>$+\infty$ |

În ultima rubrică s-a indicat printr-o săgeată descendentă (↘) faptul că funcția este strict descrescătoare și printr-o săgeată ascendentă (↗) faptul că funcția este strict crescătoare.

Fig. 77



În dreptul rădăcinii 0 a derivatei s-a indicat prin litera  $m$  faptul că 0 este punct de minim al funcției, iar în paranteză, sub  $m$ , s-a trecut minimul funcției,  $f(0) = 0$ . În dreptul lui  $-\infty$  și al lui  $+\infty$  din rubrica întâi, au fost scrise în rubrica a treia limitele funcției în aceste puncte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

Acest tablou este suficient pentru a trasa graficul funcției (fig. 77).

Deoarece derivata se anulează în punctul de minim, tangenta la grafic în punctul  $(0, 0)$  este paralelă cu axa  $Ox$  (în fapt, este chiar axa  $Ox$ ).

2) Fie funcția  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) definită pe  $R$ . După cum se știe din anul II, această funcție are un extrem pentru  $x = -\frac{b}{2a}$ , și anume un maxim dacă  $a < 0$ , sau un minim dacă  $a > 0$ . Vom regăsi aceste rezultate folosind metoda generală expusă la nr. 2.

Derivata funcției este  $f'(x) = 2ax + b$  și are o singură rădăcină,  $x = -\frac{b}{2a}$ , iar  $f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ . Putem forma următoarele două tablouri, după cum  $a > 0$  sau  $a < 0$ :

|         |         |           |                                 |           |
|---------|---------|-----------|---------------------------------|-----------|
| $a < 0$ | $x$     | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$                 | $+\infty$ |
|         | $f'(x)$ | +         | 0                               | -         |
|         | $f(x)$  | $-\infty$ | $M$<br>$(\frac{4ac - b^2}{4a})$ | $-\infty$ |

În acest caz, pentru  $-\frac{b}{2a}$  funcția are un maxim (indicat în tablou prin litera  $M$ ), care este  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  (scris în paranteză sub  $M$ ).

|         |         |           |                                 |           |
|---------|---------|-----------|---------------------------------|-----------|
| $a > 0$ | $x$     | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$                 | $+\infty$ |
|         | $f'(x)$ | -         | 0                               | +         |
|         | $f(x)$  | $+\infty$ | $m$<br>$(\frac{4ac - b^2}{4a})$ | $+\infty$ |

În acest caz, pentru  $-\frac{b}{2a}$  funcția are un minim.

3) Fie funcția  $f(x) = x^3 - 3x$  definită pe  $R$ . Avem  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Derivata are rădăcinile  $-1$  și  $1$ ,  $f'(-1) = f'(1) = 0$ . Derivata păstrează un semn constant

pe fiecare din intervalele  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ . Pentru determinarea semnului derivatei se calculează valoarea sa în câte un punct al fiecărui interval [de exemplu,  $f'(-2) = 9$ ,  $f'(0) = -3$ ,  $f'(2) = 9$ ] sau se aplică regula semnului trinomialului de gradul doi.

Avem  $f(-1) = 2$  și  $f(1) = -2$ . Putem forma următorul tablou:

|         |           |              |               |           |
|---------|-----------|--------------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$         | $1$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0            | -             | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $M$<br>$(2)$ | $m$<br>$(-2)$ | $+\infty$ |

Putem trasa acum graficul funcției (fig. 78).

Observație. În punctele de maxim și de minim, tangenta la grafic este paralelă cu axa  $Ox$ . Pentru a trasa mai precis graficul funcției în jurul acestor puncte, este bine ca după ce am fixat în plan punctele de extrem  $(-1, 2)$  și  $(1, -2)$  să ducem în aceste puncte câte un mic segment de dreaptă paralel cu  $Ox$ .

4) Fie funcția  $f(x) = e^x - x$  definită pe  $R$ .

Derivata sa este  $f'(x) = e^x - 1$  și are o singură rădăcină,  $x = 0$ . Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, \infty)$ . Pentru  $x = -1$  avem  $f'(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ ; pentru  $x = 1$  avem  $f'(1) = e^1 - 1 > 0$ . Derivata este deci strict negativă pe  $(-\infty, 0)$  și strict pozitivă pe  $(0, \infty)$ . Punctul 0 este punct de minim al funcției. Avem  $f(0) = e^0 - 0 = 1$ . Limitele funcției  $f$  la  $-\infty$  și la  $+\infty$  se calculează ușor:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty$ .

Putem forma următorul tablou:

|         |           |              |           |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0            | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $m$<br>$(1)$ | $+\infty$ |

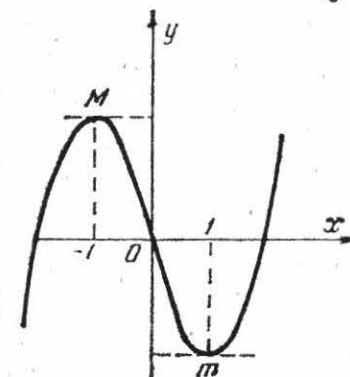
Observație. Deoarece minimul funcției este strict pozitiv, funcția este strict pozitivă pe toată dreapta, adică  $e^x - x > 0$ , sau:

$$e^x > x, \text{ oricare ar fi } x \in R.$$

45) Fie funcția  $f(x) = \ln x - x$  definită pe  $(0, \infty)$ . Derivata sa este  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ , și are o singură rădăcină,  $x = 1$ . Se poate forma următorul tablou:

|         |           |               |           |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | $0$       | $1$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0             | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $M$<br>$(-1)$ | $-\infty$ |

Fig. 78



Deoarece funcția  $f(x) = \ln x - x$  nu este definită pentru  $x \leq 0$ , în tablou s-a hașurat porțiunea corespunzătoare. Punctul 0 este extremitatea intervalului  $(0, \infty)$  pe care funcția este definită, dar în 0 funcția nu este definită; de aceea punctul 0 a fost trecut în tablou în dreptul liniei verticale care separă partea hașurată de cea nehașurată.

Semnele derivatei se determină ca și în exemplul precedent, dând derivatei o valoare la stînga lui 1 (de exemplu,  $f'(\frac{1}{2}) = 1 > 0$ ) și o valoare la dreapta lui 1 (de exemplu,  $f'(2) = -\frac{1}{2} < 0$ ). Punctul 1 este punct de maxim al funcției și  $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$ .

Se obține imediat:  $\lim_{x \searrow 0} (\ln x - x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x) = -\infty$ .

**Observație.** Deoarece maximul funcției este strict negativ, rezultă că funcția este strict negativă pe  $(0, \infty)$ , adică  $\ln x - x < 0$ , sau:

$$\ln x < x, \text{ pentru } x > 0.$$

Acest rezultat se poate obține din inegalitatea  $x < e^x$ , ( $x > 0$ ), prin logaritmare.

6) Fie  $\alpha > 1$  un număr real și fie funcția  $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$  definită pe  $[-1, \infty)$ . Derivata sa este

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$

și are o singură rădăcină,  $x = 0$ . Observăm că  $\alpha - 1 > 0$ .

Dacă  $x > 0$ , atunci  $(1+x)^{\alpha-1} > 1$  și deci  $f'(x) > 0$ .

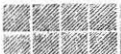
Dacă  $x < 0$ , atunci  $(1+x)^{\alpha-1} < 1$  și deci  $f'(x) < 0$ .

Pentru calculul limitei lui  $f$  la  $+\infty$ , scriem:

$$f(x) = \alpha x \left( \frac{(1+x)^\alpha}{\alpha x} - 1 \right).$$

Aplicînd regula lui l'Hospital, deducem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^\alpha}{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{\alpha} = \infty$ . Rezultă că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Se poate forma următorul tablou:

|         |                                                                                     |             |            |        |            |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|--------|------------|-----------|
| $x$     |  | -1          |            | 0      |            | $\infty$  |
| $f'(x)$ |  | $-\alpha$   | -          | 0      | +          | +         |
| $f(x)$  |  | $M(\alpha)$ | $\searrow$ | $m(1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Punctul  $-1$  este punct de maxim al funcției deși derivata nu se anulează în acest punct,  $f'(-1) = -\alpha$  (derivata nu se anulează în mod necesar în punctele de extrem aflate la extremitatea domeniului de definiție).

**Observație.** Deoarece 1 este minimul funcției pe tot intervalul, rezultă că funcția are toate valorile mai mari decît 1, adică  $(1+x)^\alpha - \alpha x \geq 1$ ; deci

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \text{ oricare ar fi } x \geq -1.$$

Acastă inegalitate generalizează inegalitatea lui Bernoulli pentru exponenți  $\alpha$  reali.

## § 28. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

### 1. Convexitate și concavitate

În paragraful precedent s-a arătat că semnul derivatei întîi dă indicații cu privire la creșterea sau descreșterea funcției. De multe ori, aceste indicații sînt insuficiente pentru trasarea graficului.

O funcție derivabilă poate fi strict crescătoare în două moduri (fig. 79), după cum tangenta la grafic se află deasupra graficului sau sub grafic. De asemenea, o funcție poate fi strict descrescătoare în două moduri (fig. 80) după poziția tangentei față de grafic.

Pentru a deosebi diferitele poziții ale tangentei față de grafic s-au adoptat denumirile următoare:

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă și fie  $I$  un interval din  $E$ . Fie  $G_I$  porțiunea din graficul funcției  $f$ , corespunzătoare intervalului  $I$ :

$$G_I = \{(x, f(x)); x \in I\}.$$

Dacă se consideră restricția  $f_I$  a funcției  $f$  la intervalul  $I$ ,  $G_I$  este graficul acestei restricții.

Se spune că funcția  $f$  este *convexă* pe intervalul  $I$  dacă tangenta în orice punct al graficului  $G_I$  se află sub acest grafic (fig. 81).

Se spune că funcția  $f$  este *concavă* pe intervalul  $I$  dacă tangenta în orice punct al graficului  $G_I$  se află deasupra acestui grafic (fig. 82).

Dacă funcția este definită pe un interval și este convexă (sau concavă) pe întregul ei domeniu de definiție, vom spune, mai simplu, că funcția este convexă (respectiv concavă), fără altă specificație.

Se spune că graficul unei funcții convexe este o *curbă convexă* și că graficul unei funcții concave este o *curbă concavă*.

Să presupunem acum că funcția  $f$  este derivabilă de două ori pe  $I$ . În acest caz, semnul derivatei a doua dă indicații asupra convexității și concavității funcției. Mai precis, se poate demonstra următoarea propoziție:

**Dacă derivata a doua  $f''$  este strict pozitivă (+) pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .**

**Dacă derivata a doua  $f''$  este strict negativă (−) pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $f$  este concavă pe  $I$ .**

Fig. 79

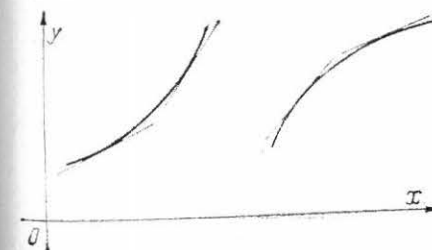


Fig. 80

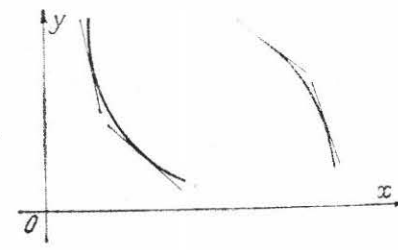
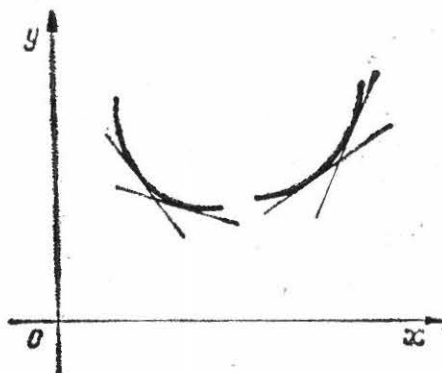




Fig. 81



Interpretarea geometrică a acestei propoziții este următoarea: derivata a doua  $f''$  este derivata derivatei întâi  $f'$ , deci dacă  $f''$  este strict pozitivă, atunci  $f'$  este crescătoare, adică panta tangentei la grafic crește când punctul de tangență se deplasează spre dreapta (fig. 83); de asemenea, dacă  $f''$  este strict negativă, panta tangentei la grafic descrește când punctul de tangență se deplasează spre dreapta (fig. 84).

**Observație.** Pentru a reține ușor că dacă derivata a doua este strict pozitivă (+) atunci funcția este convexă, să observăm că graficul unei funcții convexe seamănă cu o porțiune din secțiunea unui vas așezat cu deschizătura în sus, în așa fel încât să colecteze, să adune (+) un lichid care s-ar turna în el.

## 2. Intervalele de convexitate și de concavitate

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă de două ori. Avem următoarele două proprietăți:

- Dacă derivata a doua  $f''$  nu se anulează pe un interval  $I \subset E$ , atunci  $f''$  păstrează același semn pe  $I$ .**
- Dacă derivata a doua  $f''$  este strict pozitivă (+) pe un interval  $I \subset E$ , atunci funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .**

Dacă derivata a doua  $f''$  este strict negativă (−) pe  $I$ , atunci funcția  $f$  este concavă pe  $I$ .

Fig. 83

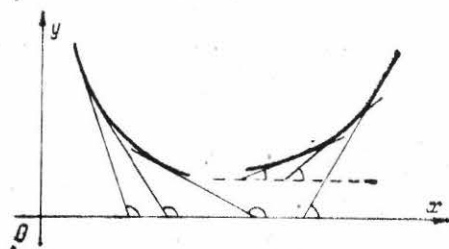


Fig. 82

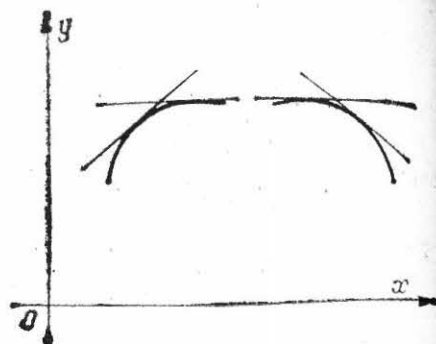
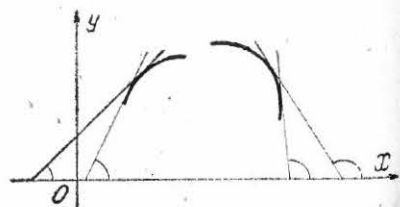


Fig. 84



Prima proprietate rezultă din faptul că  $f''$ , fiind o derivată, are proprietatea lui Darboux.

Așadar:

Problema determinării intervalelor de convexitate și de concavitate ale funcției se reduce la aceea a determinării intervalelor pe care derivata a doua păstrează același semn.

Din prima proprietate deducem că intervalele maxime pe care derivata a doua păstrează același semn se determină cu ajutorul rădăcinilor acestei derivate.

Din cele de mai sus rezultă calea de urmat pentru determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale funcției  $f$ :

- 1) Se calculează derivata a doua  $f''$ .
- 2) Se rezolvă ecuația  $f''(x) = 0$ .
- 3) Cu ajutorul rădăcinilor derivatei a doua se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn.
- 4) După cum semnul derivatei a doua este + sau −, se stabilește dacă funcția este convexă sau concavă pe aceste intervale.

Rezultatele obținute se trec într-o rubrică suplimentară, a patra, a tabloului de studiu al funcției (v. mai departe exemplele de la nr. 5).

## 3. Punctele de extrem

După cum s-a arătat în paragraful precedent, studiind semnul derivatei întâi de o parte și de alta a unui punct de extrem, putem stabili dacă acesta este un punct de maxim sau minim.

Uneori putem stabili aceeași concluzie, studiind semnul derivatei a doua numai în punctul de extrem.

Mai precis, se poate demonstra următoarea propoziție:

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă de două ori și fie  $x_0$  un punct de extrem din interiorul unui interval  $I \subset E$  ( $f'(x_0) = 0$ ).

**Dacă  $f''(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim.**

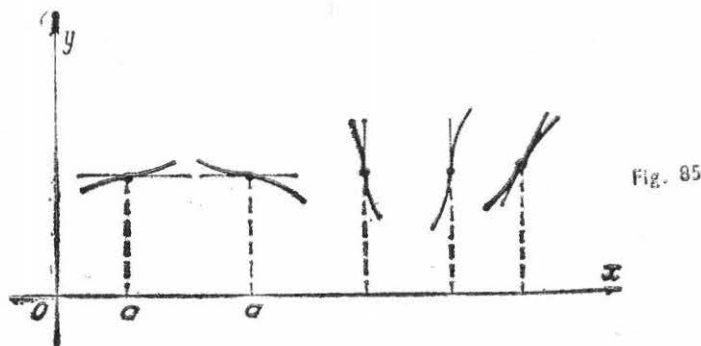
**Dacă  $f''(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim.**

Justificarea geometrică este următoarea: dacă  $f''(x_0) < 0$ , tangenta la grafic în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  se află deasupra graficului, deci  $x_0$  este punct de maxim, iar dacă  $f''(x_0) > 0$ , tangenta în  $M_0$  se află sub grafic, deci  $x_0$  este punct de minim.

## 4. Punctele de inflexiune

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție și  $x_0$  un punct din interiorul unui interval  $I \subset E$ .

Se spune că  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției, dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$  și dacă pe  $I$ , de o parte a lui  $x_0$  funcția este convexă, iar de cealaltă parte a lui  $x_0$  funcția este concavă.



Dacă  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției, punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  se numește *punct de inflexiune al graficului*. Urmează că un punct  $M_0$  de pe grafic este punct de inflexiune, dacă graficul are tangentă în  $M_0$  și dacă în jurul lui  $M_0$  graficul este o curbă convexă de o parte a lui  $M_0$  și o curbă concavă de cealaltă parte a lui  $M_0$ . Tangenta într-un punct de inflexiune traversează graficul (fig. 85).

Dacă funcția  $f$  este derivabilă de două ori pe  $I \setminus \{x_0\}$  și dacă este derivabilă în  $x_0$ , atunci definiția precedentă se poate formula cu ajutorul semnelor derivatei a doua.

Dacă derivata a doua are semne diferite de o parte și de alta a lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției.

Dacă, în plus,  $f$  este de două ori derivabilă și în punctul de inflexiune  $x_0$ , atunci derivata a doua se anulează în acest punct,  $f''(x_0) = 0$ .

Într-adevăr, funcția  $f''$  are proprietatea lui Darboux și are semne contrare de o parte și de alta a lui  $x_0$ .

## 5. Exemple

1) Fie funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  definită pe  $[0, +\infty)$ .

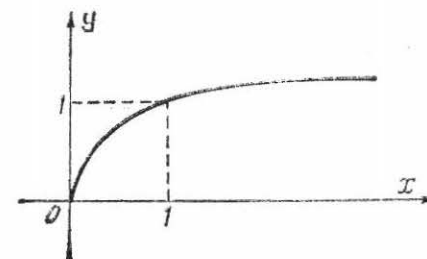
Derivata întâi este  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; nu se anulează; este strict pozitivă pe  $(0, +\infty)$ .

Derivata a doua este  $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ; nu se anulează; este strict negativă pe  $(0, +\infty)$ , deci funcția este concavă. Avem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .

Putem forma următorul tablou:

| $x$      | 0 | 1 | $+\infty$ |
|----------|---|---|-----------|
| $f'(x)$  |   | + | +         |
| $f(x)$   | 0 | ↗ | ↗         |
| $f''(x)$ |   | - | -         |

Fig. 86



Pentru a mai obține un punct al graficului s-a trecut în tablou și valoarea 1 a argumentului  $x$ . Deoarece funcția nu este derivabilă în 0, s-a tras o linie în rubrica a doua și rubrica a patra în dreptul valorii 0 a lui  $x$ .

Se observă însă că  $f$  are derivata  $+\infty$  în 0:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty,$$

deci graficul lui  $f$  este tangent în origine la axa  $Oy$  (fig. 86).

2) Fie funcția  $f(x) = x^{2n}$ , ( $n$  natural) definită pe  $(-\infty, +\infty)$ . Derivatele sînt:

$$f'(x) = 2nx^{2n-1}$$

$$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}.$$

Derivatele  $f'$  și  $f''$  au o singură rădăcină,  $x = 0$ . Putem forma următorul tablou:

| $x$      | $-\infty$ | 0               | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------------|-----------|
| $f'(x)$  | -         | 0               | +         |
| $f(x)$   | $+\infty$ | $\frac{m}{(0)}$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | +         | 0               | +         |

Punctul 0 este punct de minim. Funcția este convexă pe  $(-\infty, +\infty)$ . În figura 87 s-a trasat graficul funcției  $f(x) = x^4$ .

3) Fie funcția  $f(x) = x^{2n+1}$  ( $n$  natural) definită pe  $(-\infty, +\infty)$ . Derivatele sînt:

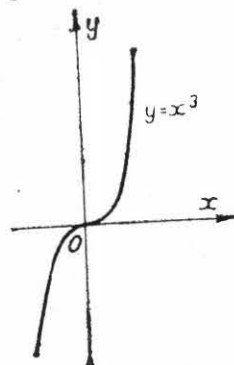
$$f'(x) = (2n+1)x^{2n}$$

$$f''(x) = (2n+1)2nx^{2n-1}.$$

Derivatele  $f'$  și  $f''$  au o singură rădăcină,  $x = 0$ . Putem forma următorul tablou:

| $x$      | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$  | +         | 0 | +         |
| $f(x)$   | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | -         | 0 | +         |

Fig. 88



Funcția este strict crescătoare. La stînga lui 0 este concavă, la dreapta lui 0 este convexă; 0 este punct de inflexiune. Axa  $Ox$  este tangentă graficului în origine. În figura 88 a fost trasat graficul funcției  $f(x) = x^3$ .

4) Fie funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R \setminus \{0\}$ .

Derivatele sînt:  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ .

Tabloul:

| $x$      | $-\infty$    | $0$       | $+\infty$          |
|----------|--------------|-----------|--------------------|
| $f'(x)$  | —            |           | —                  |
| $f(x)$   | $0 \searrow$ | $-\infty$ | $+\infty \searrow$ |
| $f''(x)$ | —            |           | +                  |

Se observă că în 0 funcția are limita la stînga  $f(0-0) = -\infty$  și limita la dreapta  $f(0+0) = +\infty$ . În dreptul lui 0 s-a tras o linie verticală, pentru a indica faptul că funcția și derivatele sale nu sînt definite în 0. Graficul este trasat în figura 89 și este o hiperbolă.

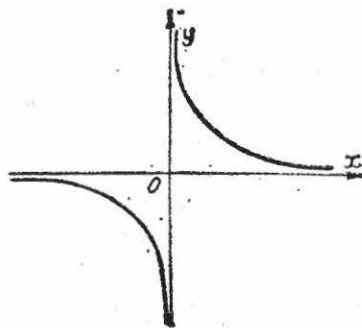
Se observă că ramurile nemărginite ale curbei se apropie din ce în ce mai mult fie de axa  $Ox$ , fie de axa  $Oy$ . Se spune că  $Ox$  și  $Oy$  sînt *asimptote* ale curbei (v. paragraful următor).

Deși derivata a doua  $f''$  are semne diferite de o parte și de alta a lui 0, punctul 0 nu este un punct de inflexiune, deoarece funcția  $f$  nu este definită în acest punct.

## § 29. Asimptote

Pentru o curbă care este nemărginită în plan (adică nu poate fi cuprinsă într-un dreptunghi), se pune problema dacă ramurile sale nemărginite se apropie necontenit de o dreaptă, într-un sens care va fi precizat mai jos. O asemenea dreaptă, dacă există, se numește *asimptotă* a respectivei curbe.

Fig. 89



Asimptotele pot fi împărțite în două clase: asimptote verticale sau paralele cu axa  $Oy$  și asimptote oblice sau neparalele cu axa  $Oy$ .

### 1. Asimptote verticale

Dacă într-un anumit punct  $x_0 = a$  cel puțin una din limitele la dreapta sau la stînga ale unei funcții  $f(x)$  este infinită, atunci dreapta  $x = a$  se numește *asimptotă verticală* a graficului funcției considerate.

Pentru existența asimptotei verticale nu este necesar ca funcția  $f$  să fie definită și în  $a$ .

Dacă  $f$  este definită și continuă în  $a$ , atunci limitele laterale în  $a$  sînt finite și egale cu  $f(a)$ , deci:

graficul nu are asimptotă verticală în punctele de continuitate ale funcției.

Pentru funcțiile pe care le întîlnim în mod obișnuit, punctele în care există asimptote verticale pot fi ușor determinate.

De exemplu, graficul funcției  $\operatorname{tg} x$  are asimptote verticale în punctele de forma  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg; graficul funcției  $\operatorname{ctg} x$  are asimptote verticale în punctele de forma  $x = k\pi$ ,  $k$  întreg; graficul funcției  $\ln x$  are asimptotă verticală în  $x = 0$ ; graficul unei funcții raționale are asimptote verticale în punctele în care se anulează numitorul etc.

### Exemple

1) Pentru funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , avem:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \text{ și } \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

deci în punctul  $a = \frac{\pi}{2}$  graficul funcției are asimptotă verticală (fig. 90). De asemenea, în orice punct de forma  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$  graficul funcției tangentă are asimptotă verticală.

Se observă că, pe măsură ce  $x$  se apropie de  $\frac{\pi}{2}$ , graficul se apropie de asimptotă; mai precis, distanța dintre grafic și asimptotă, măsurată pe orizontală, tinde către 0 cînd  $x$  tinde către  $\frac{\pi}{2}$ .

2) Pentru funcția  $f(x) = \log_a x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ), axa  $Oy$  este asimptotă verticală deoarece:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \text{ dacă } a > 1 \text{ (fig. 91).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty \text{ dacă } 0 < a < 1 \text{ (fig. 92).}$$

Fig. 90

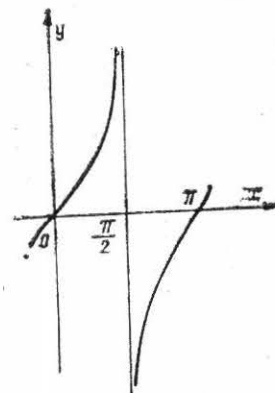


Fig. 91

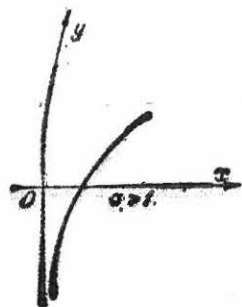


Fig. 92

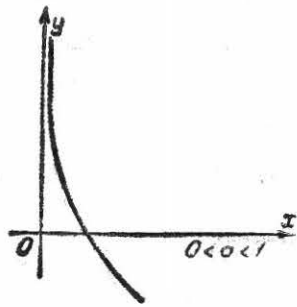
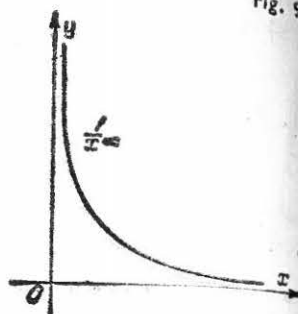


Fig. 93



3) Dacă  $\alpha > 0$ , funcția putere  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  definită  $(0, +\infty)$ , are ca asimptotă verticală axa  $Oy$ , deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$  (fig. 93).

## 2. Asimptote oblice

Fie  $f$  o funcție al cărui domeniu de definiție conține o semidreaptă  $(a, \infty)$ . Dreaptă  $y = mx + n$  este asimptotă oblică la ramura spre  $+\infty$  a graficului funcției  $f$  dacă distanța dintre dreaptă și grafic, măsurată pe verticală, tinde către 0 când  $x$  tinde către  $\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - n) = 0.$$

În mod analog, dacă domeniul de definiție al funcției conține o semidreaptă  $(-\infty, a)$ , atunci o dreaptă  $y = mx + n$  este asimptotă oblică la ramura spre  $-\infty$  a graficului funcției  $f$ , dacă distanța dintre dreaptă și grafic măsurată pe verticală tinde către 0 când  $x$  tinde către  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0.$$

Să presupunem că  $y = mx + n$  este asimptotă la ramura spre  $+\infty$ , deci:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

și să stabilim o legătură între funcția  $f$  și coeficienții  $m$  și  $n$ .

Avem:

$$f(x) - mx = (f(x) - mx - n) + n,$$

deci:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) + n = n.$$

Această egalitate ne dă ordonata la origine,  $n$ , a asimptotei. Mai departe:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - m \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{n}{+\infty} = 0.$$

Deoarece:

$$\frac{f(x)}{x} = \left( \frac{f(x)}{x} - m \right) + m,$$

deducem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - m \right) + m = m.$$

Această egalitate ne dă panta  $m$  a asimptotei.

Așadar: dacă dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă a graficului funcției  $f$ , atunci panta  $m$  și ordonata la origine  $n$  verifică egalitățile:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx).$$

Reciproc, să presupunem că există limita finită:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

și limita finită:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Rezultă atunci că:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0,$$

deci dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă.

Așadar, rezultă următoarea regulă pentru determinarea asimptotei la ramura spre  $+\infty$  a curbei:

1) se caută limita:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m;$$

2) dacă  $m$  este finit, se caută limita:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n;$$

3) dacă și  $n$  este finit, dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă la ramura spre  $+\infty$  a curbei.

Observații. 1°. Dacă cel puțin una dintre cele două limite nu există sau este infinită, curba nu are asimptotă la ramura spre  $+\infty$ .

2°. Dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , și  $a$  este finit, atunci dreapta  $y = a$  este asimptotă, paralelă cu axa  $Ox$  (panta este  $m = 0$  și ordonata la origine este  $n = a$ ). Astfel de drepte sînt numite *asimptote orizontale*.

Urmind o cale analoagă, obținem următoarea regulă pentru determinarea asimp. totei la ramura spre  $-\infty$  a curbei:

1') se caută limita:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m';$$

2') dacă  $m'$  este finit, se caută limita:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) = n';$$

3') dacă și  $n'$  este finit, dreapta  $y = m'x + n'$  este asimptotă la ramura spre  $-\infty$  a curbei.

Dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  și  $b$  este finit, atunci dreapta  $y = b$  este asimptotă paralelă cu axa  $Ox$ .

Exemple.

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (v. § 28, fig. 89);

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \quad n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Graficul funcției are asimptotă orizontală  $y = 0$  (axa  $Ox$ ) (atit la ramura spre  $+\infty$ , cît și la cea spre  $-\infty$ ).

2)  $f(x) = x^2$  (v. § 27, fig. 77);

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Graficul funcției nu are asimptotă la ramura spre  $+\infty$ .

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

Graficul nu are asimptotă nici la ramura spre  $-\infty$ .

Graficul funcției  $x^2$  este o parabolă. Rezultă că parabola nu are asimptote.

3)  $f(x) = \sin x$ ;

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Dar  $f(x) - mx = \sin x$ , iar această funcție nu are limită în punctul  $+\infty$ . Funcția sinus nu are, deci, asimptotă la  $+\infty$ . La fel se arată că nu are asimptotă nici la  $-\infty$ .

4)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$  definită pe  $R \setminus \{1\}$ .

Să stabilim mai întâi dacă dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală. Pentru aceasta, calculăm limitele  $f(1-0)$  și  $f(1+0)$ .

Avem:

$$f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = -\infty;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = +\infty.$$

Așadar, dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală.

Să vedem dacă există asimptote oblice:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3.$$

Dreapta  $y = x + 3$  este asimptotă la ramura spre  $+\infty$ .

Se calculează apoi:

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ și } n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) = 3.$$

Dreapta  $y = x + 3$  este asimptotă și la ramura spre  $-\infty$ .

Să studiem această funcție și să-i trasăm graficul. Derivata întâi este:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

Rădăcinile derivatei întâi sînt date de ecuația:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Găsim:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2,$$

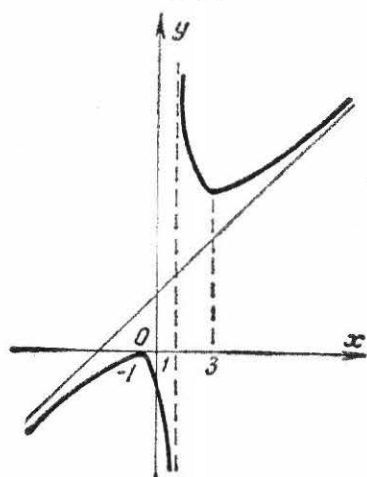
adică  $x_1 = -1$  și  $x_2 = 3$ . Semnul derivatei coincide cu acela al numărătorului, deoarece numitorul este pozitiv.

Putem să ne dispensăm de derivata a doua și să formăm tabloul următor:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $1$        | $3$        | $+\infty$  |
|---------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $f'(x)$ |           | $+$        | $0$        | $-$        | $+$        |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $M$<br>(0) | $\searrow$ | $-\infty$  |
|         |           |            | $+\infty$  | $\searrow$ | $m$<br>(8) |
|         |           |            |            | $\nearrow$ | $+\infty$  |



Fig. 94



Pentru trasarea graficului, se trasează mai întâi asimptotele  $x=1$  și  $y=x+3$  (fig. 94), apoi punctul de maxim al graficului  $M(-1, 0)$  și punctul de minim  $m(3, 8)$ . Se trasează apoi graficul, ținând seamă de indicațiile din tablou.

### § 30. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Pentru a construi graficul unei funcții este necesar să determinăm pe etape următoarele elemente:

#### I. Domeniul de definiție al funcției

1) De cele mai multe ori se întâlnesc funcții elementare. Dacă domeniul de definiție nu este precizat, se subînțelege că el este format din toate punctele pentru care operațiile prin care este definită funcția au sens; în acest caz, trebuie determinat domeniul maxim pe care poate fi definită funcția.

2) Se determină (dacă există) punctul în care graficul taie axa  $Oy$ , și anume punctul  $(0, f(0))$ ; se calculează deci  $f(0)$ .

3) Se determină (dacă există) punctele de forma  $(x, 0)$  în care graficul taie axa  $Ox$ ; se rezolvă deci ecuația  $f(x) = 0$ .

4) Se calculează, dacă există,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

#### II. Derivata întâi

1) Se calculează derivata întâi,  $f'$ .

2) Se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ . Rădăcinile acestei ecuații vor fi, eventual, puncte de maxim sau minim pentru funcție.

3) Se determină intervalele pe care derivata întâi păstrează semn constant.

#### III. Derivata a doua

1) Se calculează derivata a doua,  $f''$ .

2) Se rezolvă ecuația  $f''(x) = 0$ . Rădăcinile acestei ecuații vor fi, eventual, puncte de inflexiune.

3) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează semn constant.

#### IV. Asimptote

##### 1) Asimptote verticale

Se determină punctele  $a$ , pentru care cel puțin una din limitele laterale  $f(a-0)$  sau  $f(a+0)$  este infinită.

##### 2) Asimptote oblice

Dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  sau  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ , ( $a$  finit), atunci dreapta  $y = a$  este asimptotă orizontală la ramura spre  $+\infty$ , respectiv la cea spre  $-\infty$ .

În caz contrar, se calculează  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  (respectiv  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m'$ ); dacă  $m$  (respectiv  $m'$ ) este finit, se calculează:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n$  (respectiv  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) = n'$ ).

Dacă  $n$  (respectiv  $n'$ ) este finit, dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă la ramura spre  $+\infty$  a graficului (respectiv dreapta  $y = m'x + n'$  este asimptotă la ramura spre  $-\infty$  a graficului).

#### V. Tabloul

Într-un tablou cu rubrici orizontale se trec, pentru sistematizare, rezultatele obținute mai sus:

în rubrica întâi se trec valorile remarcabile ale lui  $x$  obținute anterior;

în rubrica a doua se trec valorile corespunzătoare ale derivatei întâi,  $f'$ , și semnul lui  $f'$ ;

în rubrica a treia se trec valorile corespunzătoare ale funcției  $f$ , precum și săgețile ( $\nearrow$  sau  $\searrow$ ) care marchează creșterea sau descreșterea funcției;

în rubrica a patra se trec valorile derivatei a doua,  $f''$ , și semnul lui  $f''$ .

#### VI. Trasarea graficului

Punctele remarcabile  $(x, f(x))$ , care rezultă din tablou, sînt reprezentate apoi în planul  $xOy$ . Se trasează asimptotele, dacă există.

Ținînd seama de indicațiile date de derivata întâi și derivata a doua, se unesc punctele printr-o curbă.

Exemple:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^{2n}}, \quad (n \text{ natural}).$$

I. Domeniul de definiție al funcției este  $R \setminus \{0\}$ .

Graficul nu taie axa  $Oy$ , deoarece funcția nu este definită în  $x=0$ , și nici axa  $Ox$ , deoarece  $\frac{1}{x^{2n}} > 0$  pentru orice  $x \neq 0$ . Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

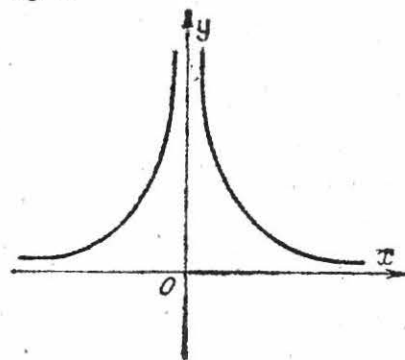
deci dreapta  $y = 0$  este asimptotă orizontală, atît la ramura spre  $+\infty$ , cît și la cea spre  $-\infty$ .

II. Derivata întâi:

$$f'(x) = -\frac{2n}{x^{2n+1}},$$

nu se anulează. Dacă  $x < 0$  atunci  $f'(x) > 0$ , iar dacă  $x > 0$ , atunci  $f'(x) < 0$ .

Fig. 95



## III. Derivata a doua:

$$f''(x) = \frac{2n(2n+1)}{x^{2(n+1)}}$$

nu se anulează. Pentru orice  $x \neq 0$  avem  $f''(x) > 0$ , deci funcția este convexă pe tot domeniul său de definiție.

IV. Graficul are asimptota verticală  $x=0$ , deoarece:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Asimptota oblică (orizontală) a rezultat la I:

V. Tabloul:

| $x$      | $-\infty$ |            | $0$       |           | $+\infty$    |
|----------|-----------|------------|-----------|-----------|--------------|
| $f'(x)$  |           | +          | +         | -         | -            |
| $f(x)$   | 0         | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ 0 |
| $f''(x)$ |           | +          | +         | +         | +            |

VI. Graficul (fig. 95) este dat pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

**Observație:** Graficul funcției este simetric față de axa  $Oy$ , deoarece oricare ar fi  $x \neq 0$  avem  $f(-x) = \frac{1}{x^2}$  și  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Funcțiile al căror domeniu de definiție  $I$  este simetric față de origine și care au proprietatea că  $f(-x) = f(x)$  pentru orice  $x \in I$  se numesc *funcții pare*. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa  $Oy$ . Este deci suficient să studiem comportarea unei funcții pare numai pe porțiunea din dreapta originii, deoarece comportarea pe porțiunea din stânga originii rezultă prin simetrie față de  $Oy$ .

2)  $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$  ( $n$  natural).

I. Domeniul de definiție este  $R \setminus \{0\}$ .

Se observă imediat că graficul nu taie axele.

**Avem:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

deci dreapta  $y=0$  este asimptotă orizontală.

II.  $f'(x) = -\frac{2n+1}{x^{2(n+1)}}$ ; nu se anulează. Pentru orice  $x \neq 0$ , avem  $f'(x) < 0$ .

III.  $f''(x) = \frac{2(2n+1)(n+1)}{x^{2n+3}}$ ; nu se anulează.

Dacă  $x < 0$ , atunci  $f''(x) < 0$ ; iar dacă  $x > 0$ , atunci  $f''(x) > 0$ .

IV. Graficul are asimptota verticală  $x=0$ , deoarece:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty.$$

Asimptota oblică (orizontală) a rezultat la I.

V. Tabloul:

| $x$      | $-\infty$ |            | $0$       |           | $+\infty$    |
|----------|-----------|------------|-----------|-----------|--------------|
| $f'(x)$  |           | -          | -         | -         | -            |
| $f(x)$   | 0         | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ 0 |
| $f''(x)$ |           | -          | -         | +         | +            |

VI. Graficul (fig. 96) este dat pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

**Observație.** Graficul funcției este simetric față de origine, deoarece oricare ar fi  $x \neq 0$ , avem  $f(-x) = -\frac{1}{x^3}$  și  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

Funcțiile al căror domeniu de definiție  $I$  este simetric față de origine și care au proprietatea că  $f(-x) = -f(x)$  pentru orice  $x \in I$  se numesc *funcții impare*. Graficul unei funcții impare este simetric față de origine.

3) *Funcția exponențială*  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$ .

I. Domeniul de definiție este  $R$ .

Deoarece  $a^x > 0$  pentru orice  $x$ , graficul funcției nu taie axa  $Ox$ .

Pentru  $x=0$  avem  $f(0) = a^0 = 1$ , deci în punctul  $(0, 1)$  graficul taie axa  $Oy$ .

Deoarece  $a > 1$ , rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$$

Dreapta  $y=0$  (axa  $Ox$ ) este asimptotă la ramura spre  $-\infty$ .

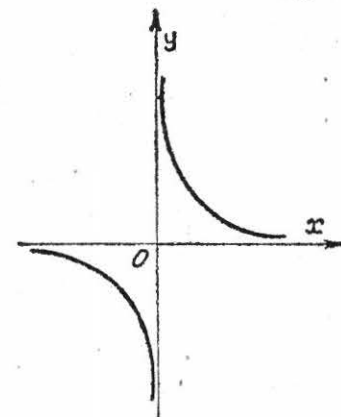


Fig. 96

II. Derivata întâi  $f'(x) = a^x \ln a$ . Avem  $\ln a > 0$ , deoarece  $a > 1$ , și  $a^x > 0$ .  
Rezultă că  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in R$ .

III. Derivata a doua:  $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$  pentru orice  $x \in R$ .

IV. Nu există asimptote verticale, deoarece funcția este definită și continuă pe toată dreapta.

Avem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty,$$

deci nu există asimptotă oblică la ramura spre  $+\infty$ .

Asimptota la ramura spre  $-\infty$  este  $y = 0$ , după cum a rezultat la I.

V. Tabloul:

| $x$      | $-\infty$ |            | $0$ |            | $+\infty$ |
|----------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $f'(x)$  |           | +          | +   | +          | +         |
| $f(x)$   | $0$       | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |           | +          | +   | +          | +         |

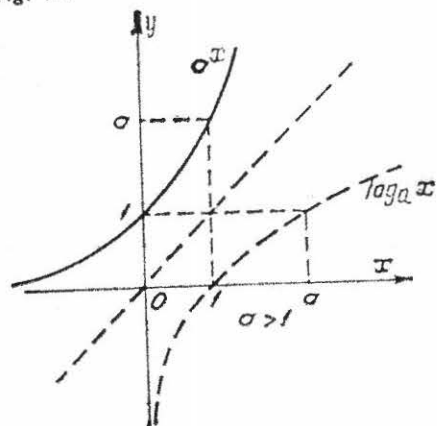
VI. Graficul (fig. 97).

Deoarece funcția  $\log_a x$  este inversa funcției  $a^x$ , graficele celor două funcții sînt simetrice față de prima bisectoare. Am trasat, punctat (în fig. 97) și graficul funcției logaritmice. Pe grafic se poate citi imediat că (pentru  $a > 1$ ):

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0;$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0.$$

Fig. 97.



De asemenea:

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1.$$

4) Funcția exponențială  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ .

I. Domeniul de definiție este  $R$ .

$a^x > 0$ , pentru orice  $x \in R$ , deci graficul nu taie axa  $Ox$ ; pentru  $x = 0$ , avem  $a^0 = 1$ , deci în punctul  $(0, 1)$  graficul taie axa  $Oy$ .

Deoarece  $0 < a < 1$ , rezultă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

Dreapta  $y = 0$  este asimptotă la ramura spre  $+\infty$ .

II. Derivata întâi,  $f'(x) = a^x \ln a$ ; deoarece  $a < 1$ , rezultă  $\ln a < 0$ ,  
deci  $f'(x) < 0$ , pentru orice  $x \in R$ .

III. Derivata a doua,  $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$  pentru orice  $x \in R$ .

IV. Asimptote verticale nu există.

Avem:

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty,$$

deci nu există asimptotă la ramura spre  $-\infty$ .

Ramura spre  $+\infty$  are asimptotă  $y = 0$ .

V. Tabloul:

| $x$      | $-\infty$ |            | $0$ |            | $+\infty$ |
|----------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $f'(x)$  |           | -          | -   | -          | -         |
| $f(x)$   | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$       |
| $f''(x)$ |           | +          | +   | +          | +         |

VI. Graficul (fig. 98).

Am trasat punctat în figura 98 și graficul funcției  $\log_a x$ , prin simetrie față de bisectoarea întâi.

Pe grafic se poate citi că (pentru  $0 < a < 1$ ):

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0;$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0.$$

De asemenea

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1.$$

5)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ .

I. Domeniul de definiție este  $R$ .

Deoarece  $f(0) = 2$ , rezultă că graficul taie axa  $Oy$  în punctul  $(0, 2)$ . Rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$  sînt  $x_1 = 1$  (se observă direct),  $x_2 = x_1 = 1$ ,  $x_3 = -2$ ; deci graficul taie axa  $Ox$  în punctele  $(1, 0)$  și  $(-2, 0)$ .

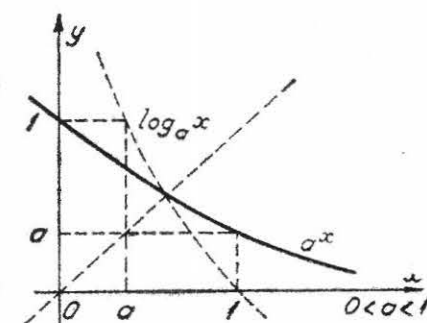
Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

II.  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ; are rădăcinile  $-1$  și  $1$ . Pentru  $|x| < 1$ , avem  $f'(x) < 0$ ; iar pentru  $|x| > 1$  avem  $f'(x) > 0$  ( $x = -1$  este punct de maxim;  $x = 1$  este punct de minim).

III.  $f''(x) = 6x$ ; are rădăcina  $x = 0$ . Pentru  $x < 0$ ,  $f''(x) < 0$ , iar pentru  $x > 0$ ,  $f''(x) > 0$  ( $x = 0$  este punct de inflexiune).

Fig. 98



IV. Deoarece  $f(x)$  este definită și continuă pe  $R$ , graficul său nu are asimptote verticale.

Deoarece:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty$$

și:

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

rezultă că graficul nu are asimptote oblice.

V. Tabloul:

|          |           |            |      |            |           |            |           |            |           |            |           |
|----------|-----------|------------|------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $-2$       | $-1$ | $0$        | $1$       | $+\infty$  |           |            |           |            |           |
| $f'(x)$  |           | +          | +    | 0          | -         | 0          | +         |            |           |            |           |
| $f(x)$   | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0    | $\nearrow$ | $M_{(4)}$ | $\searrow$ | $i_{(2)}$ | $\searrow$ | $m_{(0)}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |           | -          | -    | -          | -         | 0          | +         | +          | +         |            |           |

VI. Graficul (fig. 99).

În punctul de inflexiune  $(0, 2)$  al graficului, panta tangentei este  $f'(0) = -3$ ; se trasează în acest punct o mică porțiune din tangentă.

$$6) f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}.$$

I. Domeniul de definiție este  $R \setminus \{-1, 1\}$ .

Se observă ușor că singurul punct de intersecție al graficului cu axele este originea,  $(0, 0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

II.  $f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$  are rădăcinile (reale):

$$x_1 = -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx -2 \text{ și } x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.$$

Pentru  $x_1 < x < x_2$  avem  $f'(x) < 0$ ; iar pentru  $x < x_1$  sau  $x > x_2$  avem  $f'(x) > 0$ .

Obținem:

$$f(x_1) \approx -3 \text{ și } f(x_2) \approx 3.$$

III.  $f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$  are rădăcina reală  $x = 0$ .

Studiul semnului lui  $f''(x)$  este oarecum complicat de

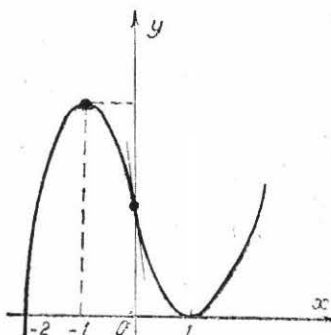


Fig. 99

faptul că numitorul nu are semn constant. În astfel de cazuri este recomandabil să alcătuim un tablou separat pentru  $f''(x)$ .

|               |           |      |      |     |           |     |      |
|---------------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|------|
| $x$           | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |     |      |
| $4x$          | $--$      | $-$  | $--$ | $0$ | $++$      | $+$ | $++$ |
| $(x^2 - 1)^3$ | $++$      | $0$  | $--$ | $-$ | $--$      | $0$ | $++$ |
| $f''(x)$      | $--$      |      | $++$ | $0$ | $--$      |     | $++$ |

Observații

1°. Nu am introdus în tablou binomul  $x^2 + 3$ , deoarece, fiind pozitiv pentru orice  $x$ , nu influențează semnul lui  $f''(x)$ .

2°. Punctul  $x = 0$  este un punct de inflexiune. Punctele  $-1$  și  $1$  nu sînt puncte de inflexiune, deoarece funcția nu este definită în aceste puncte.

IV. Se constată ușor că:

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \searrow -1} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că dreptele  $x = -1$  și  $x = 1$  sînt asimptote verticale.

Obținem, de asemenea:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

deci  $m = m' = 1$ .

Calculăm:

$$f(x) - mx = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} - x = \frac{2x}{x^2 - 1};$$

deci:

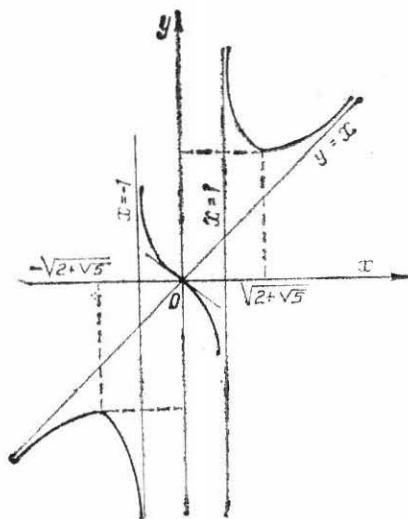
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Deducem că dreapta  $y = x$  este asimptotă oblică (atît pentru ramura spre  $-\infty$  a graficului, cît și pentru cea spre  $+\infty$ ).

V. Tabloul:

|          |                                 |                             |                    |                           |                    |                    |                    |                            |                    |
|----------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------|---------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|--------------------|
| $x$      | $-\infty - \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ | $-1$                        | $0$                | $1 + \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ | $+\infty$          |                    |                    |                            |                    |
| $f'(x)$  | $+$                             | $0$                         | $-$                | $-$                       | $0$                | $+$                |                    |                            |                    |
| $f(x)$   | $-\infty \nearrow$              | $\overset{M}{(\approx -3)}$ | $\searrow -\infty$ | $+\infty \searrow$        | $\overset{i}{(0)}$ | $\searrow -\infty$ | $+\infty \searrow$ | $\overset{m}{(\approx 3)}$ | $\nearrow +\infty$ |
| $f''(x)$ | $-$                             | $-$                         | $+$                | $0$                       | $-$                | $+$                | $+$                |                            |                    |

Fig. 100



## VI. Graficul (fig. 100).

În punctul de inflexiune  $(0, 0)$  al graficului, panta tangentei este  $f'(0) = -1$ .

$$7) f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1}.$$

I. Domeniul de definiție este  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

Graficul nu taie axa  $Oy$ , deoarece punctul  $x = 0$  nu aparține domeniului de definiție al funcției. Ecuația  $f(x) = 0$  are rădăcinile  $-1$  și  $1$ ; deci graficul taie axa  $Ox$  în punctele  $(-1, 0)$  și  $(1, 0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

II.  $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$  nu se anulează în do-

meniul de definiție al funcției. Pentru  $x < -1$

avem  $f'(x) < 0$ ; iar pentru  $x > 1$  avem  $f'(x) > 0$ .

Observăm că:

$$f'(-1) = \lim_{x \nearrow -1} f'(x) = -\infty \quad \text{și} \quad f'(1) = \lim_{x \searrow 1} f'(x) = \infty.$$

III.  $f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2-1)^3}}$  nu se anulează. Pentru orice  $x$  din domeniul de definiție a lui  $f''$ , ( $|x| > 1$ ), avem  $f''(x) < 0$ .

IV. Funcția fiind continuă pe tot domeniul său de definiție, graficul nu are asimptote verticale.

Să cercetăm dacă există asimptote oblice. Avem:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x} = \frac{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x}.$$

Deci:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

și:

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Un calcul analog ne conduce la  $n' = 0$ .

Deci dreapta  $y = -\frac{1}{2}x$  este asimptotă oblică pentru ramura spre  $-\infty$  a graficului, iar dreapta  $y = \frac{1}{2}x$  pentru ramura spre  $+\infty$  a graficului.

V. Tabloul:

| $x$      | $-\infty$ | $-1$ |           | $1$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$  | $-$       | $-$  | $-\infty$ |     | $+\infty$ |
| $f(x)$   | $+\infty$ |      | $m(0)$    |     | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $-$       | $-$  |           | $-$ | $-$       |

În punctele de minim  $(-1, 0)$  și  $(1, 0)$  tangentele la grafic sînt verticale.

V. Graficul (fig. 101).

După cum am observat și la exemplul 1), funcția considerată mai sus fiind pară, ne putem mărgini la studiul ramurii corespunzătoare intervalului  $[1, +\infty)$ .

$$8) f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

I. Domeniul de definiție este  $R$ .

Se observă ușor că graficul taie axele în origine:  $f(0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

II.  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ; nu se anulează. Dacă  $x < 0$ , rezultă  $\sqrt[3]{x} < 0$ , deci  $f'(x) < 0$ . Pentru  $x > 0$  avem  $f'(x) > 0$ .

Observăm că:

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = -\infty \quad \text{și} \quad f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f'(x) = +\infty.$$

În consecință, cele două ramuri ale graficului vor avea în punctul  $x = 0$  semitangente verticale (suprapuse). Punctul  $x = 0$  este punct de întoarcere al graficului (v. § 20, nr. 5).

III.  $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ ; nu se anulează. Pentru orice  $x \neq 0$  avem  $\sqrt[3]{x^4} > 0$ , deci  $f''(x) < 0$ .

IV. Funcția fiind definită și continuă pe  $R$ , graficul său nu are asimptote verticale.

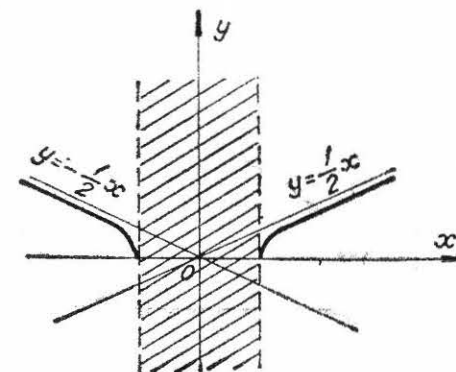


Fig. 101



Deoarece  $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0;$$

deci  $m = m' = 0$ .

Dar, deoarece  $f(x) - mx = \sqrt[3]{x^2}$ , rezultă:

$$n = n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

În concluzie, graficul nu are nici asimptote oblice.

V. Tabloul:

|          |           |            |            |            |           |
|----------|-----------|------------|------------|------------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ |            | $0$        |            | $+\infty$ |
| $f'(x)$  |           | $-$        | $-\infty$  | $+\infty$  | $+$       |
| $f(x)$   | $+\infty$ | $\searrow$ | $m$<br>(0) | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |           | $-$        |            | $-$        |           |

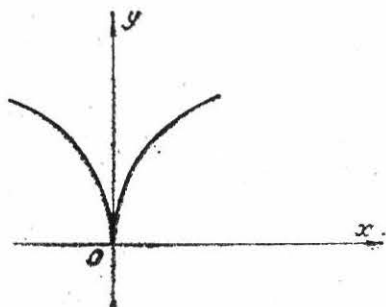
VI. Graficul (fig. 102).

$$9) f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

I. Deoarece funcția  $\operatorname{tg}$  este periodică, de perioadă  $\pi$ , este suficient să studiem  $f(x)$  într-un interval de lungime  $\pi$ . Observînd că funcția  $f$  nu este definită în punctele în care funcția  $\operatorname{tg}$  nu este definită și în punctele  $x$  pentru care  $\operatorname{tg} x = -1$ , rezultă că este suficient să considerăm pe  $f$  definită, de exemplu, pe  $[0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}$ .

Graficul taie axa  $Oy$  în punctul  $(0, 1)$ , dar nu taie axa  $Ox$ , deoarece  $f(x) \neq 0$  pentru orice  $x$  aparținînd domeniului de definiție al funcției.

Fig. 102



II.  $f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin 2x}$  nu se anulează;  
 $f'(x) < 0$  pentru orice  $x$  aparținînd domeniului de definiție.

III.  $f''(x) = \frac{2\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$  se anulează pentru  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Pentru  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  și pentru  $\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$  avem  $f''(x) > 0$  iar pentru  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$  avem  $f''(x) < 0$ .

IV. Cercetăm dacă  $f$  are limită în punctele în care nu este definită. Se observă ușor că

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Există puncte ale graficului oricît de aproape de punctul  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , dar acest punct nu aparține graficului.

$$\lim_{x \nearrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \searrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = \infty.$$

Deci dreapta  $x = \frac{3\pi}{4}$  este asimptotă verticală.

V. Tabloul:

|          |            |                 |                 |                  |            |
|----------|------------|-----------------|-----------------|------------------|------------|
| $x$      | $0$        | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$      |
| $f'(x)$  | $-$        | $-$             | $-1$            | $-1$             | $-$        |
| $f(x)$   | $M$<br>(1) | $\searrow$      | $0$             | $0$              | $m$<br>(1) |
| $f''(x)$ | $+$        | $+$             | $0$             | $-$              | $+$        |

Observație. Funcția  $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$  definită  $[0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}$  are extreme în punctele  $x = 0$  și  $x = \pi$ , dar derivata sa nu se anulează în aceste puncte (v. obs. 1 de la teorema lui Fermat).

Dacă se consideră însă prelungirea  $\tilde{f}$  a lui  $f$  de exemplu la mulțimea  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}$ , definită prin  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$  se observă că funcția  $\tilde{f}$  nu mai are extreme în punctele  $x = 0$  și  $x = \pi$ .

VI. Graficul (fig. 103).

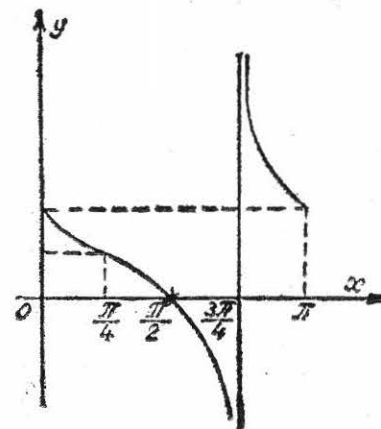
$$10) f(x) = e^{-x^2}.$$

I. Domeniul de definiție este  $\mathbb{R}$ . Deoarece funcția este pară, vom studia numai ramura corespunzătoare lui  $x \geq 0$ .

Graficul taie axa  $Oa$  în punctul  $(0, 1)$ , dar nu taie axa  $Ox$  (deoarece  $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} > 0$ ).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ , deci dreapta  $y = 0$  este asimptotă orizontală.

Fig. 103



II.  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$  se anulează pentru  $x = 0$ , iar  $f'(x) < 0$  pentru orice  $x > 0$ .

III.  $f''(x) = -2e^{-x^2} (1 - 2x^2)$  are rădăcina (reală pozitivă)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Pentru  $0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $f''(x) < 0$ ; iar pentru  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $f''(x) > 0$ .

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6.$$

IV. Funcția fiind definită și continuă pe  $R$ , graficul său nu are asimptote verticale. Asimptota verticală a rezultat la I.

V. Tabloul;

| $x$      | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                            | $+\infty$ |
|----------|---|-------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$  | 0 | —                                               | —         |
| $f(x)$   | 1 | $\searrow$<br>$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ | 0         |
| $f''(x)$ | — | 0                                               | +         |

VI. Graficul (fig. 104).

Am completat graficul ducind (punctat) simetrica față de axa  $Oy$  a ramurii obținute mai sus. Se observă că  $(0, 1)$  este punctul de maxim al graficului.

$$11) f(x) = \ln(1 - x^2).$$

I. Domeniul de definiție este intervalul  $(-1, 1)$ . Deoarece funcția este pară, va fi suficient să o studiem pe intervalul  $[0, 1)$ .

Se constată ușor că graficul taie axele în punctele  $(0, 0)$ .

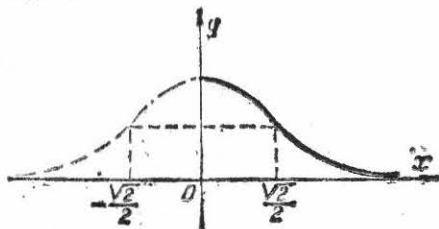
Deoarece domeniul de definiție este mărginit, nu au sens limitele în punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ .

II.  $f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$ ; se anulează pentru  $x = 0$ . Dacă  $0 < x < 1$  atunci  $f'(x) < 0$ .

III.  $f''(x) = -2 \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$  nu se anulează; iar  $f''(x) < 0$  pentru orice  $x \in [0, 1)$ .

IV.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , deci dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală.

Fig. 104



V. Tabloul:

| $x$      | 0          | 1         |
|----------|------------|-----------|
| $f'(x)$  | 0          | —         |
| $f(x)$   | $M$<br>(0) | $-\infty$ |
| $f''(x)$ | —          | —         |

VI. Graficul (fig. 105).

$$12) f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

I. Domeniul de definiție este  $(0, +\infty)$ .

Graficul nu taie axele. Într-adevăr, funcția nu este definită în punctul  $x = 0$ , iar  $x^{\frac{1}{x}}$  nu se anulează pentru  $x > 0$ .

Să cercetăm limita (la dreapta) a lui  $f(x)$  în  $x = 0$  (limita la stânga nu are sens) și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x^2}} = 0^{+\infty} = 0.$$

Există puncte ale graficului oricât de aproape de origine, de originea nu aparține graficului.

Logaritmînd și ținînd seama de un rezultat obținut în § 26, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

adică  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , deci dreapta  $y = 1$  este asimptotă orizontală.

II.  $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$  se anulează pentru  $x = e$ .

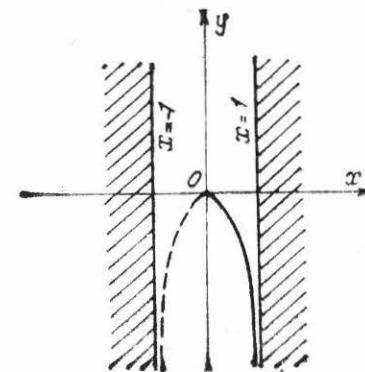
Deoarece pentru orice  $x > 0$  avem  $x^{\frac{1}{x}-2} > 0$ , deducem că  $f'(x) > 0$  dacă  $x < e$  și  $f'(x) < 0$  dacă  $x > e$ .

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx (2,7)^{0,37} \approx 1,4.$$

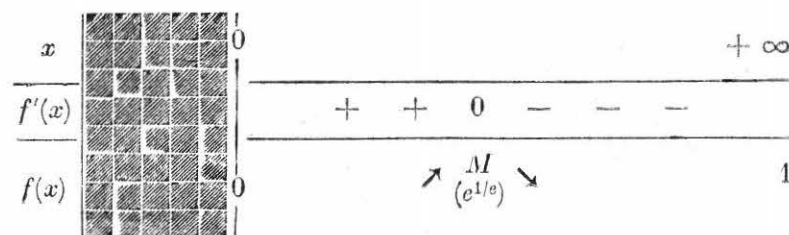
III. Renunțăm la studiul derivatei a doua.

IV. Ținînd seama de I, rezultă că  $y = 1$  este unica asimptotă a graficului.

Fig. 105



### V. Tabloul:



**VI. Graficul (fig. 106).**

**13)**  $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$ .

I. Domeniul de definiție este  $R$ .

Într-adevăr:

$$-1 \leq \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \leq 1 \Leftrightarrow |x-1| \leq \sqrt{2(x^2+1)},$$

iar inegalitatea din membrul drept a echivalenței anterioare este verificată de orice  $x \in R$ .

Graficul taie axa  $Oy$  în punctul  $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$  și axa  $Ox$  în punctul  $(1, 0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} = \arcsin \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} &= \arcsin \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} = \\ &= \arcsin \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|x| \sqrt{2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Așadar graficul are asimptotele orizontale  $y = \frac{\pi}{4}$  și  $y = -\frac{\pi}{4}$ .

$$11. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - (x-1)^2}{2(x^2+1)}}} \cdot \left( \sqrt{\frac{(x-1)}{2(x^2+1)}} \right) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x+1}{|x+1|}, \quad (x \neq -1).$$

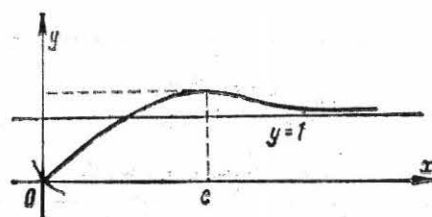


Fig. 106

$$\text{Deci: } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{pentru } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

În punctul  $x = -1$  avem:

$$f'_s(-1) = \lim_{x \nearrow -1} f'(x) = \lim_{x \nearrow -1} \left( -\frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Punctul  $\left(-1, -\frac{\pi}{9}\right)$  este punct unghiular al graficului.

Se observă că  $f' < 0$  pe  $(-\infty, -1)$  și  $f' > 0$  pe  $(-1, +\infty)$ . Ținând seama și de observația 1° de la nr. 2, § 27, rezultă că punctul unghiular  $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$  este punct de minim al graficului.

$$\text{III. } f''(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \\ -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{pentru } x \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

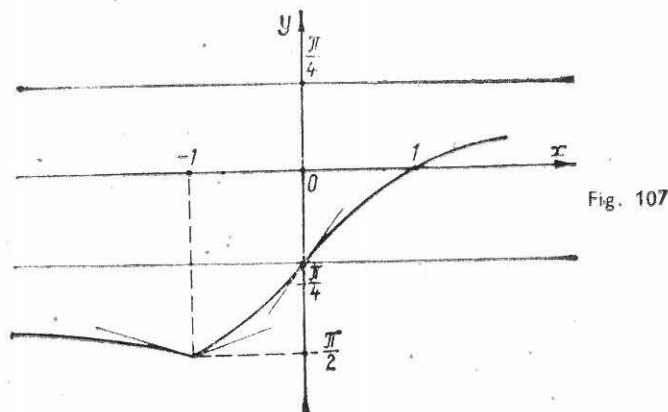
Punctul  $(0, -\frac{\pi}{4})$  este punct de inflexiune al graficului.

IV. Funcția fiind definită și continuă pe  $R$ , graficul său nu are asimptote verticale. Unicele asimptote ale graficului sînt asimptotele orizontale stabilite la I.

## V. Tabloul:

|          |                  |     |     |                                        |               |  |  |                                        |              |     |                          |
|----------|------------------|-----|-----|----------------------------------------|---------------|--|--|----------------------------------------|--------------|-----|--------------------------|
| $x$      | $-\infty$        |     |     |                                        | $-1$          |  |  | $0$                                    | $1$          |     | $+\infty$                |
| $f'(x)$  | $-$              | $-$ | $-$ | $-\frac{1}{2}$                         | $\frac{1}{2}$ |  |  | $+$                                    | $+$          | $+$ | $+$                      |
| $f(x)$   | $-\frac{\pi}{4}$ |     |     | $\searrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ |               |  |  | $\nearrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | $\nearrow 0$ |     | $\nearrow \frac{\pi}{4}$ |
| $f''(x)$ | $-$              | $-$ | $-$ |                                        | $+$           |  |  | $0$                                    | $-$          | $-$ | $-$                      |

## VI. Graficul (fig. 107).



### § 31. Probleme de maxim și minim

În § 27 s-a arătat că semnul și rădăcinile derivatei întâi dau indicații asupra punctelor de extrem ale funcției. În § 28 s-a arătat că semnul derivatei a doua permite să stabilim rapid dacă un extrem este un maxim sau un minim.

În acest paragraf vom folosi aceste rezultate pentru rezolvarea unor probleme de geometrie, algebră și fizică.

1) Care este dreptunghiul de perimetru dat,  $4a$ , care are aria maximă?

Să notăm cu  $x$  și  $y$  dimensiunile dreptunghiului:

$$2x + 2y = 4a$$

sau  $x + y = 2a$ , de unde  $y = 2a - x$ . Aria dreptunghiului este  $S = xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax$ . Aria  $S$  este o funcție de  $x$ ; scriem:

$$S(x) = -x^2 + 2ax.$$

Să observăm că latura  $x$  a dreptunghiului este cuprinsă între 0 și semiperimetrul  $2a$ ,  $0 \leq x \leq 2a$ , deci funcția  $S(x)$  este definită pentru  $x \in [0, 2a]$ . (Pentru  $x = 0$  și  $x = 2a$ , dreptunghiul are aria nulă.) Pentru a găsi maximum acestei funcții, calculăm derivata:

$$S'(x) = -2x + 2a$$

și-i aflăm rădăcinile:  $-2x + 2a = 0$ , deci  $x = a$ .

Derivata a doua,  $S''(x) = -2$  este strict negativă, deci  $x = a$  este un punct de maxim al funcției  $S(x)$ . Așadar, aria este maximă când  $x = a$  și  $y = 2a - a = a$ , adică atunci când laturile dreptunghiului sînt egale.

Acest rezultat îl putem enunța astfel:

*Dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.*

Ținînd seama de faptul că dimensiunile  $x$  și  $y$  ale dreptunghiului sînt două numere pozitive, că aria dreptunghiului este produsul  $xy$  al acestor numere și că suma lor este constantă,  $x + y = 2a$ , rezultatul precedent se poate enunța astfel:

*Produsul a două numere pozitive de sumă dată este maxim cînd numerele sînt egale.*

2) Care este dreptunghiul de arie dată,  $a^2$ , care are perimetrul minim?

Să notăm cu  $x$  și  $y$  dimensiunile dreptunghiului:

$$xy = a^2,$$

de unde  $y = \frac{a^2}{x}$ . Perimetrul  $P$  al dreptunghiului este:  $P = 2x + 2y = 2x + \frac{2a^2}{x}$ ; scriem:

$$P(x) = 2x + \frac{2a^2}{x}.$$

Latura  $x$  a dreptunghiului este strict pozitivă și poate fi oricît de mare,  $0 < x < +\infty$ , deci funcția  $P(x)$  este definită pentru  $x \in [0, +\infty)$ . Pentru a găsi minimum acestei funcții, calculăm derivata:

$$P'(x) = 2 - \frac{2a^2}{x^2}$$

și-i aflăm rădăcinile:  $2 - \frac{2a^2}{x^2} = 0$ , deci  $x = a$ .

Derivata a doua:  $P''(x) = \frac{4a^2}{x^3}$ . Deoarece  $P''(a) > 0$ , rezultă că  $x = a$  este un minim al funcției  $P$ . Așadar, perimetrul este minim cînd  $x = a$  și  $y = \frac{a^2}{a} = a$ , adică atunci cînd laturile dreptunghiului, sînt egale.

Am obținut astfel următorul rezultat:

*Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie, pătratul are perimetrul cel mai mic.*

Ținînd seama de faptul că  $x$  și  $y$  sînt numere pozitive, că suma  $x + y$  este jumătate din perimetrul dreptunghiului și că produsul  $xy$  este constant,  $xy = a^2$ , rezultatul precedent se poate enunța astfel:

*Suma a două numere pozitive de produs dat este minimă cînd numerele sînt egale.*

3) Să se determine conul de volum maxim înscris într-o sferă de rază  $R$  (fig. 108).

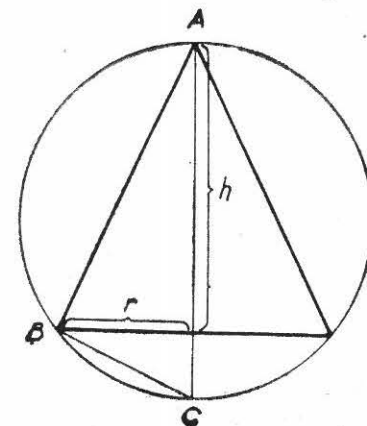


Fig. 108

Să notăm cu  $r$  și  $h$  respectiv raza și înălțimea conului. Volumul conului este:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Dar în triunghiul dreptunghic  $ABC$ , înălțimea  $r$  este medie proporțională între segmentele  $h$  și  $2R - h$ , determinate de ea pe ipotenuză:

$$r^2 = h(2R - h);$$

deci:

$$V(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (2R - h).$$

Înălțimea  $h$  este cuprinsă între 0 și  $2R$ , deci funcția  $V(h)$  este definită pentru  $h \in [0, 2R]$ . Pentru a afla maximum acestei funcții, calculăm derivata (în raport cu argumentul  $h$ ):

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} h(4R - 3h)$$

și-i aflăm rădăcinile:  $\frac{\pi}{3} h(4R - 3h) = 0$ ; deci  $h_1 = 0$  și  $h_2 = \frac{4R}{3}$ . Derivata a doua,

$V''(h) = \frac{\pi}{3} (4R - 6h)$ , este strict pozitivă pentru  $h_1 = 0$ , deci 0 este un punct de

minim, și strict negativă pentru  $h_2 = \frac{4}{3} R$ , deci  $\frac{4}{3} R$  este un punct de maxim.

Așadar, conul de volum maxim are înălțimea  $h = \frac{4}{3} R$ , și raza  $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$ .

Volumul său este:

$$V = \frac{32\pi}{81} R^3.$$

4) Să se determine sub ce unghi  $\alpha$  față de orizontală trebuie aruncat un proiectil cu viteza inițială  $v_0$ , astfel încât să atingă distanța maximă  $R$  (fig. 109).

Sub acțiunea forței gravitației, corpul descrie o parabolă\* care taie orizontala în punctul  $R$ , dat de egalitatea:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

\* Ecuația traiectoriei este  $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$

Într-adevăr, fie  $(x, y)$  coordonatele punctului de pe traiectorie în care corpul a ajuns după  $t$  secunde. Proiecția vitezei pe orizontală este  $v_0 \cos \alpha$ , iar pe verticală este  $v_0 \sin \alpha$ . Proiecția corpului pe orizontală are o mișcare uniformă,  $x = v_0 \cos \alpha t$ ; proiecția pe verticală este influențată și de acțiunea gravitației,  $y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$ . Eliminând pe  $t$ , se obține  $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x -$

$\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$ . Punctele în care traiectoria atinge orizontala se obțin rezolvând ecua-

ția  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$ . Se obțin punctele 0 și  $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ .

Fig. 109

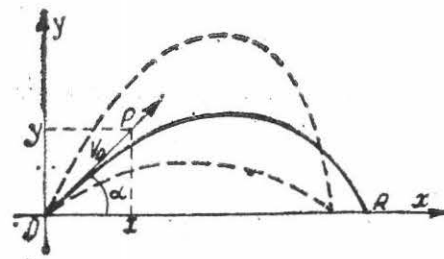
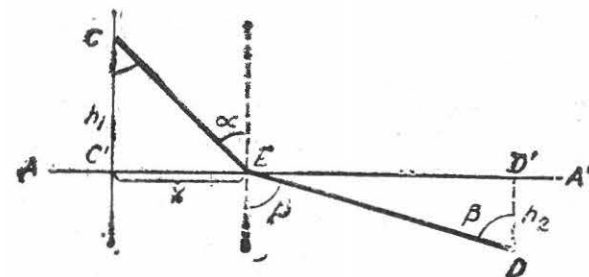


Fig. 110



Distanța  $R$  este deci funcție (depinde) de unghiul  $\alpha$ ,  $R(\alpha)$ ; deoarece unghiul  $\alpha$  este cuprins între 0 și  $\frac{\pi}{2}$ , funcția  $R$  este definită pentru  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Pentru a afla maximum acestei funcții, calculăm derivata (în raport cu argumentul  $\alpha$ ):

$$R'(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

și-i aflăm rădăcinile (cuprinse între 0 și  $\frac{\pi}{2}$ ):  $\frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0$  sau  $\cos 2\alpha = 0$ , deci  $2\alpha =$

$\frac{\pi}{2}$ , de unde  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Derivata a doua,  $R''(\alpha) = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha$  este strict negativă

pe  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , deci și în  $\frac{\pi}{4}$ ; rezultă că  $\frac{\pi}{4}$  este un maxim. Așadar, pentru a realiza distanța maximă, corpul trebuie aruncat sub un unghi de  $45^\circ$  față de orizontală.

5) După cum se știe din fizică, principiul lui Fermat afirmă că, pentru a ajunge dintr-un punct în altul, o rază de lumină se propagă după acea traiectorie pe care o parcurge în minimum de timp.

Fie  $AA'$  suprafața de separație a două medii omogene în care lumina se propagă cu vitezele  $v_1$ , respectiv  $v_2$ . Să se găsească traiectoria descrisă de o rază de lumină pentru a ajunge din punctul  $C$  în punctul  $D$  (fig. 110).

Fie  $C'$  și  $D'$  proiecțiile lui  $C$  și  $D$  pe  $AA'$ ,  $e = C'D'$ ,  $h_1 = CC'$ ,  $h_2 = DD'$ ,  $x = C'E$ . În fiecare din cele două medii omogene, lumina se propagă în linie dreaptă. În primul mediu lumina se propagă cu viteza  $v_1$  și parcurge distanța  $CE$  în timpul  $T_1$ ,  $CE = v_1 T_1$  sau:

$$T_1 = \frac{CE}{v_1}.$$

În al doilea mediu, lumina se propagă cu viteza  $v_2$  și parcurge distanța  $ED$  în timpul  $T_2$ ,  $ED = v_2 T_2$  sau:

$$T_2 = \frac{ED}{v_2}.$$

Timpul total este:

$$T = \frac{CE}{v_1} + \frac{ED}{v_2}.$$



dar  $CE = \sqrt{h_1^2 + x^2}$  și  $ED = \sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}$  deci:

$$T = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Timpul  $T$  este deci funcție de  $x$ ,  $T(x)$ , ( $0 \leq x \leq c$ ). Pentru a afla minimumul acestei funcții, anulăm derivata:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}} = 0.$$

Derivata se anulează pentru acele valori ale lui  $x$  pentru care

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}}.$$

Derivata a doua:

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1 \sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{h_2^2}{v_2 \sqrt{(h_2^2 + (c-x)^2)^3}}$$

este strict pozitivă pentru orice  $x$ , deci punctele de extrem ale funcției  $T(x)$  sînt puncte de minim. Dar:

$$\sin \alpha = \frac{x}{CE} = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}, \text{ iar } \sin \beta = \frac{c-x}{DE} = \frac{c-x}{\sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}},$$

astfel încît egalitatea care dă punctele de minim se scrie:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

Notînd cu  $v_0$  viteza luminii în vid, indicii de refracție  $n_1$  și  $n_2$  ai celor două medii sînt:  $n_1 = \frac{v_0}{v_1}$ ,  $n_2 = \frac{v_0}{v_2}$ .

Relația obținută mai sus se scrie:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

și constituie una din legile refracției, cunoscută din fizică.

## Exerciții

1) Aplicînd teorema lui Rolle să se arate că rădăcinile derivatelor polinoamelor:

a)  $f_1(x) = (2x-1)(x+5)(x-3)(x-7).$

b)  $f_2(x) = x(x+1)(5x-2)(x+3)(x-6)$

sînt reale și să se precizeze intervalele în care sînt situate aceste rădăcini.

2) Să se studieze valabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x & \text{pentru } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3) Aplicînd formula lui Lagrange, să se arate că derivatele funcțiilor următoare iau valorile specificate în dreptul fiecăreia în intervalele respective. Să se verifice rezultatele.

a)  $f(x) = 2x^2 - 7$ ;  $f'(x) = 6$  într-un punct din  $(1, 2)$ .

b)  $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}$ ;  $f'(x) = \frac{11}{24}$  într-un punct din  $(-1, 1)$ .

c)  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ;  $f'(x) = -\ln 9$  în două puncte din  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

d)  $f(x) = \arcsin \left( \sqrt{2} \left( x - \frac{3}{2} \right) \right)$ ;  $f'(x) = \frac{\pi}{2}$  în două puncte din  $(1, 2)$ .

e)  $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} + 1 & \text{pentru } 2 < x \leq 3 \end{cases}$ ;  $f'(x) = \frac{9}{8}$  într-un punct din  $(1, 3)$ .

4) Să se aplice formula lui Cauchy următoarelor perechi de funcții pe intervalele specificate (determinînd de fiecare dată punctele c):

a)  $f(x) = e^x$ ;  $g(x) = 2x + 1$ ;  $[0, 1]$ ;

b)  $f(x) = \ln x$ ;  $g(x) = x^2$ ;  $[\sqrt{2}, 2]$ ;

c)  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ;  $g(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$ ;  $[x_1, x_2]$  ( $x_1 < x_2$ );  
 $2\alpha'x + \beta' \neq 0$  pe  $(x_1, x_2)$ .

d)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{pentru } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4} & \text{pentru } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$ ;  $g(x) = x$ ;  $[-2, 5]$ .

5) Aplicînd funcției  $f(x) = x^n$  ( $n$  număr natural) formula lui Lagrange în intervalul  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , să se demonstreze inegalitățile:

$$n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}.$$

6) Să se demonstreze inegalitățile:

a)  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ , ( $x > 0$ ).

b)  $e^x > ex$ , ( $x > 1$ ).

c)  $e^x > x + 1$ , ( $x \neq 0$ ).

[Se poate demonstra că  $e$  este cel mai mic număr real care verifică inegalitatea anterioară pentru orice  $x \neq 0$ .]

d)  $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ,  $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ .

7) În fiecare din exercițiile următoare, să se arate prin derivare (v. § 25, nr. 5) că funcțiile indicate diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Să se determine intervalele și constantele corespunzătoare.

a)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ;  $g(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

b)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ;  $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{1-2x}$ .

c)  $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$ ;  $g(x) = 2 \arcsin x$ .

d)  $f(x) = \arcsin (3x-4x^3)$ ;  $g(x) = 3 \arcsin x$ .

e)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-2x}$ ;  $g(x) = \arcsin x$ .

8) Aplicând formula lui Lagrange funcției  $f(x) = \ln x$  în intervalul  $[n, n+1]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) să se demonstreze că șirul cu termenul general:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent și limita sa este cuprinsă între 0 și 1.

[Numărul  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$  se numește *constantă lui Euler*. Se demonstrează că acest număr este irațional.]

9) Fie  $I$  un interval (nerezus la un punct) și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție. Fie  $x_0 \in I$ . Să se demonstreze prin inducție completă că dacă  $f$  este de  $n$  ori derivabilă pe  $I$  și dacă

$$f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n)}(x_0) = 0,$$

atunci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Utilizând rezultatele din § 26 să se calculeze limitele următoare:

10) a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{x^2}$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 4 \sin^3 x - 3 \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin x}$ ;

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{xe^{2x} - 2ax}$ , ( $ax \in \mathbb{R}$ );

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)}{(x-1)^2}$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ );

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^2}$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^2 x - 3}{x - \frac{\pi}{2}}$ ;

l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ ;

n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sin x - x \cos x}$ ;

11) a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ ;

c)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \alpha x}{\ln \operatorname{tg} \beta x}$ , ( $\alpha > 0, \beta > 0$ );

d)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}(x^\alpha)}{\ln \operatorname{tg}(x^\beta)}$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ ).

12) a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - 1) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ ;

b)  $\lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;

13) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x \ln x}\right)$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x}\right)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$ ;

14) a)  $\lim_{x \searrow 0} x^{\operatorname{tg} x}$ ;

b)  $\lim_{x \searrow 0} (\operatorname{ctg} x)^x$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{x}\right)^{x^2}$ , ( $x \in \mathbb{R}$ );

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ ;

c)  $\lim_{x \searrow 0} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$ ;

e)  $\lim_{x \searrow 1} (\ln x \cdot \ln(\ln x))$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{2x(e^{4x}+1)}\right)$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow x} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$ .

c)  $\lim_{x \searrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^x$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ;

Să se stabilească intervalele de monotonie și, când este cazul, extremele următoarelor funcții:

15) a)  $f(x) = x^2 - 10x$ ; b)  $f(x) = x^3 - 27x$ ; c)  $f(x) = x^3(8 - x)$ ;  
d)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ; e)  $f(x) = \frac{2-5x}{3x+4}$ ; f)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ;  
g)  $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ; h)  $f(x) = \frac{x^2}{x^4+4}$ ; i)  $f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

16) a)  $f(x) = \sin x - \cos x$ , definită pe intervalul  $[0, 2\pi]$ .

b)  $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ , definită pe  $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .

c)  $f(x) = \frac{4 \sin x}{4 - \cos^2 x}$ , definită pe intervalul  $[0, 2\pi]$ .

d)  $f(x) = x \ln x$ ; e)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; f)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

g)  $f(x) = \ln \cos x$ , definită pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

h)  $f(x) = x^3 e^x$ ; i)  $f(x) = x^4 e^{-x}$ ; j)  $f(x) = x^n e^{-x}$  ( $n$  natural);

k)  $f(x) = e^{-x} = e^{-2x}$ ; l)  $f(x) = \ln x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ;

m)  $f(x) = x^x$ ; n)  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ .

Să se stabilească intervalele de convexitate și concavitate și, când este cazul, punctele inflexiune ale următoarelor funcții:

17) a)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ; b)  $f(x) = -5x^2 + x + 2$ ;  
c)  $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$ ; d)  $f(x) = x^4 - 1$ ;  
e)  $f(x) = 3x^7 + x + 1$ ; f)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ; g)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

h)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ; i)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

18) a)  $f(x) = \sin x - \cos x$ , definită pe intervalul  $[0, 2\pi]$ .

b)  $f(x) = x^2 \ln x$ ; c)  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Să se determine asimptotele graficelor următoarelor funcții:

19) a)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ; b)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ; c)  $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ ;  
d)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ; e)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ; f)  $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$ ;  
g)  $f(x) = x \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ; h)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ; i)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$

20) a)  $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$ ; b)  $f(x) = \ln(x^2-1)$ ; c)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .

Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

21) a)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ; b)  $f(x) = -x^3 + 4x$ ; c)  $f(x) = x^2 + 1$ ;

d)  $f(x) = x^4 - 4$ ; e)  $f(x) = \frac{1}{10}(x^5 - 5x^2 + 4x)$ ;

f)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ; g)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ; h)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ;

i)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ; j)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ; k)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ;

l)  $f(x) = \frac{3}{(1-x^2)(4-x^2)}$ ; m)  $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2}$ .

22) a)  $f(x) = \sqrt{x-2}$ ; b)  $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ ; c)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ;

d)  $f(x) = x \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ; e)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ; f)  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$ ;

g)  $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ ; h)  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-x^3}$ ;

23) a)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ; b)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ; c)  $f(x) = xe^x$ ;

d)  $f(x) = \frac{10}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ; e)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ; f)  $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ ;

24) a)  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ; b)  $f(x) = x \ln x$ ; c)  $f(x) = x^2 \ln x$ ;

d)  $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$ ; e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{\ln|x+1|} & \text{pentru } x \neq -1 \\ 0 & \text{pentru } x = -1 \end{cases}$ ;

f)  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

25) a)  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ; b)  $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$ ; c)  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ ;

d)  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$ ; e)  $f(x) = \sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x}$ ;

f)  $f(x) = \ln(1-2\cos x)$ .

26) a)  $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ ; b)  $f(x) = \frac{4x^2-3}{8x\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsin} x$ ;

c)  $f(x) = \operatorname{arcsin}(3x-4x^3)$ ; d)  $f(x) = \operatorname{arcsin} \frac{1}{x} - \operatorname{arccos} \frac{1}{x}$ ;

e)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \left( (\operatorname{arcsin} x)^2 + (\operatorname{arccos} x)^2 \right)$ .

27) Fie funcția:

$$f(x) = x(x-a)(x-b), \quad (x, a, b - \text{numere reale}).$$

1°. Să se determine  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $f$  să admită  $x = \frac{4}{3}$  ca punct de minim și  $x = 6$  ca punct de maxim.

Să se determine apoi  $z$ , astfel încât maximul lui  $f$  să fie 6.

2°. Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată.

28) Fie funcția

$$f(x) = 2 \arcsin \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x-x^2}.$$

1°. Să se stabilească ecuația tangentei la graficul lui  $f$  în punctul de abscisă 1. Să se cerceteze dacă graficul are puncte de inflexiune.

2°. Să se reprezinte grafic funcția

$$\varphi(x) = f'(x) \frac{(x-2) \sqrt{4x-x^2}}{x+1}.$$

29) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}, \quad (a \neq 0, b \text{ număr real oarecare}).$$

1°. Să se arate că există două puncte ale graficului  $f$  în care tangenta este paralelă cu axa  $Ox$  și că produsul absciselor acestor două puncte este  $-1$ .

2°. Să se determine  $a$  și  $b$ , astfel încât  $f(1) = 2$  și  $f'(2) = 0$ .

3°. Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată.

30) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d}, \quad (a, b, c, d - \text{numere reale}).$$

1°. Să se determine  $a, b, c, d$ , astfel încât funcția să aibă pentru  $x = -1$  un maxim egal cu 2, iar pentru  $x = 1$  un minim egal cu 4.

2°. Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată.

31) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2(a-b)x + b^2 - 2ab + 1}{x^2 + 1 - b^2}, \quad (a, b - \text{numere reale}).$$

1°. Să se arate că dacă  $a \neq b$ , funcția  $f$  are două puncte de extrem, și anume un punct de minim și un punct de maxim.

2°. Notînd cu  $m, M$  — minimul, respectiv maximul lui  $f$ , să se determine relația dintre  $a$  și  $b$  astfel încât să avem  $m + M = 0$ .

3°. Să se reprezinte grafic funcția pentru care are loc relația de la punctul precedent și  $b = 5$ .

32) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{ax^2}{x+b}, \quad (a > 0, b > 0).$$

1°. Să se reprezinte grafic (fără calculul lui  $f''$ ).

2°. Să se determine  $a$  și  $b$  astfel încât graficul lui  $f$  să admită o asimptotă paralelă cu bisectoarea întâi și ca distanța dintre punctele de extrem al graficului să fie egală cu  $\sqrt{20}b$ .

3°. Pentru  $a$  și  $b$  astfel determinate, să se afle punctele graficului situate în cadranul II în care tangentele la grafic sînt paralele cu bisectoarea a doua.

33) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2+b}, \quad (a > 0, b > 0).$$

1°. Să se reprezinte grafic (fără calculul lui  $f''$ ).

2°. Notînd cu  $m, M$  — minimul, respectiv maximul lui  $f$ , să se determine relația dintre  $a$  și  $b$  astfel încât să avem  $2m + M = 0$ .

3°. Să se determine  $a$  și  $b$ , astfel încât dreapta care trece prin punctele de extrem ale graficului funcției pentru care are loc relația de la punctul precedent să fie paralelă cu bisectoarea întâi.

4°. Să se arate că funcția astfel determinată are trei puncte de inflexiune, situate în intervalele  $(-2, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

34) Fie funcția:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{x+1}}, \quad (\lambda > 0).$$

1°. Să se arate că funcția  $f$  are un minim care nu depinde de  $\lambda$ .

2°. Să se arate că pentru fiecare  $\lambda > 0$  funcția  $f$  are un punct de inflexiune (și doar unul).

3°. Să se reprezinte grafic pentru  $\lambda = 1$ .

4°. Presupunînd  $\lambda \neq 1$ , fie  $M$  punctul în care graficul lui  $f$  intersectează axa  $Oy$  și  $N$  punctul în care tangenta în  $M$  la grafic intersectează axa  $Ox$ . Să se studieze variația segmentului  $MN$ .

35) Fie funcția:

$$f(t) = \frac{\sin 3t + 2 \sin 5t + \sin 7t}{\sin 3t + \sin 5t}.$$

1°. Să se determine domeniul maxim de definiție,  $E$ , al funcției  $f$ .

2°. Considerînd funcția  $u: E \rightarrow R$  definită prin egalitatea:

$$u(t) = 4 \cos^2 t,$$

să se arate că există o funcție  $g: u(E) \rightarrow R$  definită printr-o egalitate de forma

$$g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d},$$

astfel încît să avem:

$$f(t) = (g \circ u)(t), \quad t \in E.$$

3°. Să se reprezinte grafic funcția  $\tilde{g}$  care prelungește funcția  $g$  la  $R \setminus \{0\}$ , astfel încît  $\tilde{g}(x) = \frac{1}{x}$  pentru  $x \in R \setminus [u(E) \cup \{0\}]$ .

36) Considerînd două numere strict pozitive de sumă dată  $a$ , să se determine valoarea maximă a produsului puterilor lor cu exponenții  $\alpha$  respectiv  $\beta$ , ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ).

37) Considerînd două numere strict pozitive de produs dat,  $a$ , să se determine valoarea minimă a sumei puterilor lor cu exponenții  $\alpha$ , respectiv  $\beta$ , ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ).

38) Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază dată,  $r$ .

39) Să se determine dreptunghiul de arie maximă care are două vîrfuri pe o latură a unui triunghi dat, iar celelalte două vîrfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

40) Să se determine cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază dată,  $r$ .

41) Să se determine cilindrul de volum maxim pentru care perimetrul secțiunii axiale este de 6 m.

42) Să se determine trapezul dreptunghic de arie maximă care are baza mare egală cu  $a$  și perimetrul egal cu  $4a$ .

43) Să se determine cilindrul de arie totală maximă înscris într-o sferă de rază dată,  $r$ .

- 44) Să se determine paralelipipedul de volum maxim având ca bază un pătrat și înscris într-o emisferă de rază dată,  $r$ .
- 45) Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în elipsa de ecuația  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .
- 46) Fie un con circular drept de rază constantă,  $r$ , și de generatoare variabilă,  $x$ . Să se determine minimal raportului dintre volumul conului și volumul sferei înscrisă în con.
- 47) Fie o sferă de centru  $O$  și de rază  $r$  și un punct fix  $P$  exterior sferei, la distanța  $a$  de  $O$ . Fie  $M$  un punct variabil pe dreapta  $OP$  situat în interiorul sferei. Planul prin  $M$  perpendicular pe  $OP$  taie sfera după un cerc  $C$ . Să se determine maximul volumului conului cu baza  $C$  și vârful  $P$ .
- 48) Fie un cerc de centru  $O$  și de rază,  $r$ , și un punct fix  $P$  exterior cercului, la distanța  $a$  de  $O$ . Fie  $A$  un punct variabil pe cerc și  $\beta$  punctul în care tangenta la cerc în  $A$  intersectează diametrul  $OP$ . Să se determine maximul ariei triunghiului  $PAB$  cind  $\widehat{POA}$  variază de la  $0$  la  $\pi$ .
- 49) Dintre-un riu de lățime  $a$  pornește un canal de lățime  $b$ , formind un unghi drept cu riu. Care este lungimea maximă a unui vas care poate intra pe canal? (Se neglijează lățimea vasului).
- 50) Două orașe  $A$  și  $B$  sînt situate la distanțe respectiv de 3 km și 1 km de șosea. Știind că proiecția distanței  $AB$  pe șosea este de 10 km, să se găsească traseul cel mai economic pentru o cale ferată care să unească cele două orașe, mergînd în vecinătatea șoselei, iar pe o porțiune de 2 km, paralel cu șoseaua (pe această porțiune distanța dintre calea ferată și șosea se consideră nulă).
- 51) La ce înălțime trebuie așezată o lampă pe verticala centrului unei piste circulare de rază  $r$  pentru ca această pistă să fie luminată la maxim, știind că intensitatea luminii într-un punct  $M$  este proporțională cu sinusul unghiului  $\theta$  format de raza de lumină cu planul pistei și invers proporțională cu pătratul distanței de la  $M$  la sursă.
- 52) Se grupează 60 de elemente galvanice, fiecare cu forța electromotoare  $e$ , rezistența interioară,  $r$  și rezistența exterioară  $R$ , în modul următor: cîte  $n$  elemente legate în serie formînd o baterie, și apoi  $m$  baterii, fiecare de cîte  $n$  elemente, legate în paralel. Cum trebuie alese numerele  $n$  și  $m$  astfel încît intensitatea  $I$  a curentului furnizat de bateria unică compusă din cele 60 elemente să fie maximă? Aplicație:  $1^\circ r = 1$  ohm,  $R = 135$  ohmi;  $2^\circ r = 1$ ,  $R = 15$ ;  $3^\circ r = 1$ ,  $R = 2,5$ .
- 53) Dintr-o localitate  $A$ , situată lingă o cale ferată, se dirijează un transport de mărfuri spre o localitate  $B$ , situată la 9 km de calea ferată. Distanța de la  $A$  la proiecția lui  $B$  pe calea ferată fiind de 30 km, iar costul transportului unei tone de marfă pe distanța de 1 km fiind  $\alpha$  pentru calea ferată și  $\beta$  pentru transportul cu autocamionul ( $\alpha < \beta$ ), să se determine punctul în care trebuie racordată cu calea ferată o șosea care începe din  $B$  astfel încît transportul mărfurilor să fie cît mai economic.

Capitolul I (Mulțimi, Numere reale, Funcții)

- 1)  $P_1 \supset P_2 \supset P_4$ ;  $P_1 \supset P_3$ ;  $P_3 \supset P_4$ ;  $P_2, P_3$  incomparabile ( $P_2 \not\subset P_3$  și  $P_3 \not\subset P_2$ );  $P_1 \cup P_3 = P_1$ ;  $P_1 \cup P_4 = P_1$ ;  $P_2 \cup P_4 = P_2$ ;  $P_2 \cap P_4 = P_4$ ;  $P_2 \cap P_3 = P_4$ ;  $P_3 \cap P_4 = P_4$ .
- 2)  $N \supset M_1 \supset M_3$ ;  $N \supset M_2 \supset M_3$ ;  $N \supset M_2 \supset M_6$ ;  $N \supset M_4$ ;  $N \supset M_5$ ;  $M_1, M_2$  incomparabile etc.;  $M_1 \cap M_2 = M_3$ ;  $M_1 \cup M_3 = M_1$ ;  $M_1 \cap M_3 = M_3$ ;  $M_1 \cup M_6 = M_1 \cup \{3\}$ ;  $M_2 \cap M_6 = M_6$ ;  $M_4 \cup M_5 = \{(3n \pm 1), n \in N\} \setminus \{2\}$ ;  $M_3 \cap M_6 = \{6\}$ ;  $(M_1 \cap M_3) \cup M_2 = M_2$ ;  $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = M_3$ .
- 3) a) Fie,  $x \in A \cup (A \cap B)$ , adică  $x \in A$  sau  $x \in A \cap B$ ; în ultimul caz, de asemenea  $x \in A$ ; deci  $A \cup (A \cap B) \subset A$ ; fie acum  $x \in A$ ; deci  $x$  este element al oricărei reuniuni, de forma  $A \cup M$ ; în particular:  $x \in A \cup (A \cap B)$ ; deci  $A \subset A \cup (A \cap B)$ ; conchidem:  $A \cup (A \cap B) = A$ ; egalitatea în particular:  $x \in A \cup (B \cap C)$ , adică  $x \in A$  sau  $x \in B \cap C$ ; dacă  $x \in B \cap C$ , atunci  $x \in B$  și  $x \in C$  deci  $x \in A \cup B$  și  $x \in A \cup C$ ; deci  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; rezultă  $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; se demonstrează apoi și incluziunea inversă; analog egalitatea d).
- 4) a) Fie  $x \in C(A \cup B)$ ; deci  $x \in E$  și  $x \notin A \cup B$ ; deci  $x \notin A$  și  $x \notin B$ ; rezultă  $x \in C A$  și  $x \in C B$ , adică  $x \in (C A) \cap (C B)$ ; deci  $C(A \cup B) \subset (C A) \cap (C B)$ ; se demonstrează apoi și incluziunea inversă; analog egalitatea b).
- 5) De exemplu, c): fie  $x \in (A \cup B) \setminus C$ , adică  $x \in A \cup B$  și  $x \notin C$ ; dacă  $x \in A$  și  $x \notin C$  atunci  $x \in A \setminus C$ , deci  $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ; analog dacă  $x \in B$  și  $x \notin C$ ; rezultă  $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ; dacă  $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ , atunci  $x \in A \setminus C$  sau  $x \in B \setminus C$ ; deci: ( $x \in A$  și  $x \notin C$ ) sau ( $x \in B$  și  $x \notin C$ ); dacă  $x \in A$  și  $x \notin C$ , atunci  $x \in A \cup B$  și  $x \notin C$ , deci  $x \in (A \cup B) \setminus C$ ; analog dacă  $x \in B$  și  $x \notin C$ ; deci  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$ .
- 6)  $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(0, 0)\}$ .
- 7)  $[(A \times B) \subset (C \times D)] \Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B) \Rightarrow (x, y) \in (C \times D)] \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in C) \text{ și } (y \in B \Rightarrow y \in D)] \Leftrightarrow [A \subset C \text{ și } B \subset D]$ .
- 8) Fie  $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ , adică  $(x, y) \in (A \times B)$  sau  $(x, y) \in (A \times C)$ ; rezultă ( $x \in A$  și  $y \in B$ ) sau  $y \in C$ , adică  $x \in A$  și  $y \in B \cup C$ ; deci  $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ ; rezultă  $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$ ; se demonstrează apoi și incluziunea inversă.
- 9) a) Se ține seama de inegalitatea  $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ ; b) se scrie inegalitatea din dreapta de la a) pentru mediile aritmetică și armonică ale lui  $a$  și  $b$ , adică  $\frac{m_{arit} + m_{arm}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{m_{arit}} + \frac{1}{m_{arm}}}$ ; rezultă  $m_{arit} + m_{arm} \geq 2 m_g$  etc.
- 10) a) Se înmulțește cu 2, se trec toți termenii în membrul stîng și se pune în evidență o sumă de pătrate; b) dacă  $abc = 0$ , inegalitatea este verificată; dacă  $abc \neq 0$ , se împarte cu  $abc$  și se ține seama că dacă  $x > 0$  și  $y > 0$ , atunci  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .
- 11) a) Se calculează diferența și se majorează numitorul ținînd seama de condiția din enunț; b) se scrie  $m_{arit} - m_g = \frac{m_{arit}^2 - m_g^2}{m_{arit} + m_g}$  și se observă că, deoarece  $m_{arit} \geq m_g$  rezultă  $m_{arit} + m_g \geq 2 m_g$ .
- 12) Demonstrație prin inducție completă: pentru  $n = 1$  avem într-adevăr  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; să presupunem inegalitatea adevărată pentru  $n$ ; pentru  $n + 1$  obținem  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} <$



$\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \sqrt{\frac{2n+1}{(2n+2)^2}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ , deoarece  $\frac{2n+1}{(2n+2)^2} < \frac{1}{2n+3}$ , după cum se verifică imediat.

13) Se observă că trinomial de gradul II  $(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + b_1^2 + b_2^2$  se scrie ca sumă de pătrate, deci are valori pozitive pentru orice  $x$ ; se scrie consecința pentru discriminant; un raționament perfect analog conduce la demonstrarea inegalității  $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

14) Se pune  $a_1 = \sqrt{\frac{r}{a}}$ ,  $b_1 = \sqrt{\frac{a}{r}}$  etc. și se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (pentru  $n=3$ ).

15) Se pornește de la egalitatea  $\sum (a_k + b_k)^2 = \sum a_k^2 + \sum b_k^2 + 2 \sum a_k b_k$  și se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz termenului  $\sum a_k b_k$ , ceea ce conduce la majorarea membrului drept al egalității anterioare cu  $\left(\sqrt{\sum a_k^2} + \sqrt{\sum b_k^2}\right)^2$ .

16) Se ține seama că  $|b-a| = \begin{cases} b-a, & \text{dacă } a \leq b \\ a-b, & \text{dacă } b \leq a. \end{cases}$

17) a) Se aplică, în ultimă instanță, regula semnelor trinomialului de gradul II; la b) se ține seama mai întâi de echivalența  $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$  (§ 2, nr. 3, VI).

18) a) Se obține  $|x| = \frac{3}{5}$ ; deci  $x_1 = \frac{3}{5}$ ,  $x_2 = -\frac{3}{5}$ ; b)  $x=0$ ; c) nici o soluție; d) se examinează succesiv cazurile  $x \geq 0$ ,  $x \leq 0$ ; se obține:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{8}$ ; e)  $x = \frac{3}{2}$ ;

f) nici o soluție; g)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{4}$ ; h)  $x=3$ ; i)  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; j)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

19) a) Să se examineze succesiv cazurile:  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ;  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ ;  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ ;  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ ; se obțin soluțiile  $(7, -5)$ ,  $(-5, 7)$ ; b)  $(2, 3)$ ,  $(-2, -3)$ ,  $\left(\frac{28}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ ,  $\left(-\frac{28}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ; c)  $(3, 10)$ ,  $(-3, -10)$ ,  $(8, -5)$ ,  $(-8, 5)$ ; d)  $(-4, 7)$ .

20) a) Două soluții dacă  $ab > 0$  și nici o soluție dacă  $ab < 0$ ; dacă  $ab = 0$  se disting subcazurile:  $1^\circ a = b = 0$ ; o infinitate de soluții (orice  $x \in \mathbb{R}$ );  $2^\circ a = 0$ ,  $b \neq 0$ ; nici o soluție;  $3^\circ a \neq 0$ ,  $b = 0$ , soluția  $x = 0$ ; b) pentru  $x \geq 0$  ecuația devine  $(a+b)x = c$ ; iar pentru  $x \leq 0$  ecuația devine  $(b-a)x = c$ ; rezultă: dacă  $b^2 - a^2 > 0$  ecuația are soluție unică (pentru oricare  $c \in \mathbb{R}$ ); dacă  $b^2 - a^2 < 0$  și  $c \neq 0$  ecuația are două soluții sau nici una; dacă  $b^2 - a^2 \neq 0$  și  $c = 0$  ecuația are soluția unică  $x = 0$ , dacă  $b^2 - a^2 = 0$  atunci  $b-a = 0$  sau  $b+a = 0$ ; dacă  $b-a = 0$  atunci pentru  $c = 0$  ecuația are o infinitate de soluții (orice  $x \leq 0$ ), iar pentru  $c \neq 0$  ecuația are o soluție strict pozitivă (dacă  $ac > 0$ ) sau nu are nici o soluție (dacă  $ac \leq 0$ ); analog se discută cazul  $b+a = 0$ .

21) a)  $x \in [-8, 2]$ ; b)  $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ ; c)  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ; d)  $x \in (0, 4)$ .

22) Demonstrăm prin inducție completă: pentru  $n=1$  se obține  $1 + a_1 \geq 1 + a_1$ ; presupunem, inegalitatea adevărată pentru  $n$ ; înmulțind în ambii membri cu factorul pozitiv  $1 + a_{n+1}$ , rezultă:  $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \geq (1 + a_1 + \dots + a_n)(1 + a_{n+1}) = 1 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ ; dar, deoarece prin ipoteză numerele  $a_k$  au

toate același semn, rezultă  $a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 0$ ; deci  $(1 + a_1) \dots (1 + a_{n+1}) \geq 1 + a_1 + \dots + a_{n+1}$ ; luând  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a \geq -1$ , se obține  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

23)  $f(A) = \{-1, 1\}$ ;  $f(B) = \{13\}$ ;  $f(C) = \{-1, 13, 29\}$ .

24) De exemplu, a) fie  $y \in f(A \cup B)$ ; deci există  $x \in A \cup B$  cu  $y = f(x)$ ; dacă  $x \in A$  atunci  $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ ; analog dacă  $x \in B$ ; deci  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ; fie apoi  $y \in f(A) \cup f(B)$ ; dacă  $y \in f(A)$ , atunci  $y = f(x)$  cu  $x \in A \subset A \cup B$ , deci  $y = f(x) \in f(A \cup B)$ ; analog dacă  $y \in f(B)$ ; deci  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ .

25) Dacă  $F$  este formată dintr-un singur element, atunci, evident:  $G_f = E \times F$ ; să presupunem acum că  $F$  este formată din cel puțin două elemente: fie  $b \in F$  și  $A = \{x \mid x \in E; f(x) = b\}$ ; prin ipoteză există;  $b' \in F$ ,  $b' \neq b$ ; rezultă:  $a \in A \Rightarrow (a, b') \notin G_f$ ; dar  $(a, b') \in E \times F$ , deci  $E \times F \neq G_f$ .

26)  $f_A(x) = \sqrt{x}$ ;  $f_B(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x = -3, x = -2; \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x = -2, x = -\frac{3}{2}; \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ \sqrt{2}, & \text{dacă } x = \sqrt{2}; \end{cases} \quad f_A(\{1, 5\}) = \{1, \sqrt{5}\};$$

$$f_B(\{-2, 0\}) = \{0, 3\}; f_C\left(\left\{-\frac{3}{2}, 1, \sqrt{2}\right\}\right) = \{1, \sqrt{2}, 3\}.$$

$$27) \text{ De exemplu: } \tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \left\{-1, \frac{5}{2}\right\} \\ 7, & \text{dacă } x \in Q \setminus \left\{-1, \frac{5}{2}\right\} \\ -2, & \text{dacă } x \in R \setminus Q \end{cases}$$

sau:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \left\{-1, \frac{5}{2}\right\} \\ x+7, & \text{dacă } x \in N \cup \{0\} \\ -x\sqrt{2}, & \text{dacă } x \in R \setminus \left(\left\{-1, 0, \frac{5}{2}\right\} \cup N\right) \end{cases} \quad (\text{să se găsească și alte exemple!}).$$

28)  $f(E) = \{1\} \subset F$ ;  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3x^2 - 1$ ,  $x \in E$ ;  $(g \circ f)(E) = \{2\}$ .

29)  $A = \{1, 3\}$ ;  $(g \circ f_A)(x) = g(f_A(x)) = 2x^6 + 1$ ,  $x \in A$ ;  $(g \circ f_A)(A) = \{3, 1459\}$ .

30)  $E \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ ,  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{h \circ g} H$ ;  $(h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ ,  $x \in E$ .

31)  $f(E) = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 0\right\} \subset F$ ;  $g(F) = \left\{-4, -\frac{9}{4}, 3\right\} \subset G$ ;  $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = \frac{6-7x^2}{3}$ ,  $x \in E$ ;  $(h \circ g \circ f)(E) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{17}{12}, 2\right\}$ ;  $(h \circ g \circ f)(A) = \left\{\frac{17}{12}, 2\right\}$ ;  $(h \circ g \circ f)(B) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{17}{12}\right\}$ .

32) Se verifică imediat implicația:  $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ ; rezultă (v. § 3, nr. 6) că surjecția  $f: E \rightarrow f(E)$  este injectivă, deci bijectivă:  $\tilde{f}: f(E) \rightarrow E$ ,  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{4}(x-7)$ ; se arată

că funcția  $\tilde{f}: R \rightarrow R$  este surjectivă; într-adevăr, oricare ar fi  $\alpha \in R$ , ecuația  $\tilde{f}(x) = \alpha$  are soluții în  $R$ , și anume în  $E$ , dacă  $\alpha = 11$  sau  $\alpha = 3$ , și în  $R \setminus E$ , dacă  $\alpha \neq 11$  și  $\alpha \neq 3$ ; se arată apoi că  $\tilde{f}: R \rightarrow R$  este o injecție; evident:  $(x_1, x_2 \in E \text{ și } f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$  și  $(x_1, x_2 \in R \setminus E \text{ și } f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ ; fie acum  $x_1 \in E$ ,  $x_2 \in R \setminus E$ ; să demonstrăm că  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; într-adevăr, dacă  $f(x_1) = f(x_2)$ , adică  $4x_1 + 7 = -4x_2 + 7$ , atunci  $x_1 + x_2 =$

$= 0$ ; deci: dacă  $x_1 = 1$ , atunci  $x_2 = -1 \in E$ , ceea ce contrazice ipoteza, iar dacă  $x_1 = -1$ , atunci  $x_2 = 1 \in E$ , ceea ce, de asemenea, contrazice ipoteza  $\tilde{f}(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{x-7}{4}, & \text{dacă } x=3, x=11; \\ \frac{7-x}{4}, & \text{dacă } x \neq 3, x \neq 11. \end{cases}$$

33) Se verifică mai întâi că funcțiile  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  sînt surjective; notînd  $h = g \circ f_A$ , se obține:  $h(x) = 2x^2 - 3$ ,  $x \in A$ ; funcția  $h: A \rightarrow G$  este surjectivă; evident:  $(h(x_1) = h(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ , deci surjecția  $h: A \rightarrow G$  este bijectivă;  $h: G \rightarrow A$ ,  $h(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$ ,  $x \in G$ .

34) Se demonstrează mai întâi că  $g \circ f: E \rightarrow G$  este o surjecție; într-adevăr, dacă  $u \in G$ , atunci, deoarece  $g$  este o surjecție, există  $y \in F$  cu  $g(y) = u$ ; dar, deoarece și  $f$  este o surjecție, există  $x \in E$  cu  $f(x) = y$ ; deci:  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = u$ ; se demonstrează apoi că  $g \circ f: E \rightarrow G$  este o injecție: fie  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ , adică  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ; fie  $f(x_1) = y_1 \in F$  și  $f(x_2) = y_2 \in F$ ; deoarece  $g$  este o injecție  $(g(y_1) = g(y_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)$ , adică  $f(x_1) = f(x_2)$ ; deoarece și  $f$  este o injecție, rezultă în definitiv  $x_1 = x_2$ ; în mod analog se arată că

$\tilde{f} \circ g: G \rightarrow E$  este o bijecție. Să demonstrăm egalitatea de funcții  $\tilde{f} \circ g = f$ ; în primul rînd se observă că fiecare dintre bijecțiile  $\tilde{f}$  și  $\tilde{f} \circ g$  aplică  $G$  pe  $E$ ; apoi fie  $u_0 \in G$ ; punînd  $g(u_0) = y_0 \in F$  și  $\tilde{f}(y_0) = x_0 \in E$ , rezultă  $(\tilde{f} \circ g)(u_0) = \tilde{f}(g(u_0)) = \tilde{f}(y_0) = x_0$  și  $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = u_0$ , adică  $(\tilde{f} \circ g)(u_0) = x_0$ .

35) Se obține sistemul  $a + b = 15$ ,  $a + bc^2 = 30$ ,  $a + bc^4 = 90$ ; se observă:  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $c \neq \pm 1$ ; se obțin funcțiile  $f_1: Z \rightarrow R$  definită prin egalitatea  $f_1(x) = 10 + 5 \cdot (-2)^x$  și  $f_2: R \rightarrow R$  definită prin egalitatea  $f_2(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$  (au fost considerate de fiecare dată domeniile maxime de definiție).

36) a)  $[-3, -2] \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$ ; b)  $(-\infty, -1) \cup [1, 2) \cup [3, +\infty)$ ; c)  $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ ; d)  $\bigcup_{k \in Z} \left( \frac{k\pi - 1}{2}, \frac{(2k+1)\pi - 2}{4} \right)$ ; e)  $R$ ; f)  $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$ ; g)  $(0, 3]$ ; h)  $(-1, +\infty)$ ; i)  $(0, +\infty) \setminus \{100\}$ ; j)  $[Q \cap (-1, 1)] \cup [(0, +\infty) \setminus Q]$ .

37) Se verifică mai întâi că funcțiile  $f$  și  $g$  pot fi definite pe mulțimile specificate; a)  $f + g$  și  $fg$  pe  $[0, 2]$ ;  $\frac{f}{g}$  pe  $[0, 1) \cup (1, 2]$ ;  $\frac{g}{f}$  pe  $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]$ ; b)  $f + g$  și  $fg$  pe  $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ ;  $\frac{f}{g}$  pe  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ ;  $\frac{g}{f}$  pe  $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 2)$ .

38)  $f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \leq 0, \\ -x, & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

39)  $(f \circ g)(x) = 2^{2x}$ ;  $(g \circ f)(x) = 2^{x^2}$ ;  $(f \circ f)(x) = x^4$ ;  $(g \circ g)(x) = 2^{2x}$ .

40)  $B$  se determină din condiția  $\sin 2x > 0$ ; iar  $A$  din condiția  $\sin(4x - 2) > 0$ ; se obține

$$A = \bigcup_{k \in Z} \left( \frac{k\pi + 1}{2}, \frac{(2k+1)\pi + 2}{4} \right) \text{ și } B = \bigcup_{k \in Z} \left( k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right); \text{ avem: } A \xrightarrow{f_A} B \xrightarrow{g_B}$$

$$\xrightarrow{g_B} (0, +\infty) \xrightarrow{h} R; (h \circ g \circ f_A)(x) = \ln 3 \cdot \sin 2(2x - 1).$$

41)  $(f \circ g)(x) = x^2$ ,  $x \in R$ ;  $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 0; \\ 1 - x^2, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$   $(f \circ f)(x) = f(x)$ ,  $x \in R$ ;  $(g \circ g)(x) = x^4$ ,  $x \in R$ .

42) Se arată că, pe  $R$ ,  $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ ; se determină apoi intervalele pe care  $f$  este strict monotonă; se scrie  $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ , de unde rezultă că  $f$  este strict descrescătoare pe  $I = (-\infty, 1]$  și strict crescătoare pe  $J = [1, +\infty)$ ; deci, deoarece  $f(1) = f_J(1) = -1$ , rezultă:  $(x \in I \Rightarrow f_I(x) \geq -1)$  și  $(x \in J \Rightarrow f_J(x) \geq -1)$ ; se demonstrează apoi că injecțiile  $f_I: I \rightarrow [-1, +\infty)$  și  $f_J: J \rightarrow [-1, +\infty)$  sînt surjective; de exemplu, dacă  $\alpha \in [-1, +\infty)$ , ecuația  $f_I(x) = \alpha$  are soluția  $x = 1 - \sqrt{1 + \alpha} \in I$ ;  $f_J(x) = 1 - \sqrt{1 + \alpha}$ ,  $x \in f_J(I)$ , și  $f_J(x) = 1 + \sqrt{1 + \alpha}$ ,  $x \in f_J(J)$ .

43) Se arată mai întâi că  $f(E) = E$ ; într-adevăr, oricare ar fi  $x \in E$ , ecuația  $f(x) = x$  are o soluție  $x \in E$ ; se arată apoi că  $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ , deci  $f$  este o bijecție; se obține  $\tilde{f}(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ,  $x \in E$ ; în cazul general se arată mai întâi că  $(ad - bc = 0) \Leftrightarrow (f \text{ este constantă pe } R)$ ; rezultă că în cazul  $ad - bc = 0$ , funcția  $f$  (considerată definită pe o parte a lui  $R$  pe  $R$ ); rezultă că în cazul  $ad - bc \neq 0$  și  $c = 0$ , atunci  $ad \neq 0$ , deci neredusă la un punct) nu este bijectivă; dacă  $ad - bc \neq 0$  și  $c \neq 0$ , atunci  $ad \neq 0$ , deci  $a \neq 0$  și  $d \neq 0$ ; surjecția  $f: R \rightarrow f(R)$  este bijectivă și  $\tilde{f}(x) = \frac{dx-b}{a}$ ,  $x \in f(R)$ ; dacă  $ad - bc \neq 0$  și  $c \neq 0$ , atunci, notînd  $E = R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ , surjecția  $f: E \rightarrow f(E)$  este bijectivă, deoarece

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2); \tilde{f}(x) = \frac{dx-b}{a-cx}, x \in f(E) \text{ [se verifică ușor că } \frac{a}{c} \in f(E)].$$

44) a)  $n = 10$ ,  $S_n = 140$ ; b)  $r = 4$ ,  $n = 10$ ; c)  $a_1 = 1$ ,  $r = 2$ ; d)  $a'_1 = 4$ ,  $n' = 8$ ,  $a''_1 = -2$ ,  $n'' = 11$ ; e)  $n = 8$ ; f)  $a'_1 = 14$ ,  $r' = -3$ ,  $a''_1 = 2$ ,  $r'' = 3$ ; g)  $a'_1 = 2$ ,  $r' = 3$ ;  $a''_1 = \frac{23}{5}$ ,  $r'' = \frac{27}{35}$ ; h) 1, 5, 9, 13 sau -13, -9, -5, -1.

45) În identitatea  $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ , se dau lui  $k$  succesiv valorile 1, 2, ...,  $n$ ; se adună apoi membru cu membru cele  $n$  egalități obținute și se ține seama de formulele care dau sumele  $1 + 2 + \dots + n$  și  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

46) Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progr. arit., atunci, pentru orice  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ , avem  $a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + (k-2)r + a_1 + kr = 2a_1 + 2(k-1)r = 2a_k$ ; reciproc, dacă are loc relația din enunț, atunci  $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ ; adică  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$ ; notînd  $a_2 - a_1 = r$ , rezultă  $a_i = a_{i-1} + r$ ,  $2 \leq i \leq n$ , deci  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie aritmetică.

47) a) Ținînd seama de ipoteză și de propoziția de la exerc. anterior, rezultă  $2b = a + c$ ; utilizînd această egalitate, se demonstrează apoi  $2b' = a' + c'$ ; aplicînd din nou propoziția de la exerc. anterior rezultă că succesiunea  $a', b', c'$  este o progresie aritmetică; b) se tratează în mod analog.

48) Avem:  $a_{j+1} = a_j + r$ ; notînd cu  $r'$  rația progresiei aritmetice  $a'_j, a'_1, \dots, a', a_{j+1}$ , rezultă  $a_{j+1} = a_j + (m+1)r'$ ; se obține  $r' = \frac{r}{m+1}$ , deci  $a_k = a_j + (k-1) \frac{r}{m+1}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ; în cazul aplicației propuse avem:  $a_j = 3$ ,  $a_{j+1} = \frac{10}{3}$ ;  $r' = \frac{1}{12}$ ;  $a'_1 = \frac{37}{12}$ ,  $a'_2 = \frac{19}{6}$ ,  $a'_3 = \frac{13}{4}$ .

49) Fie  $S$  suma căutată; notînd cu  $a'_j, a'_2, \dots, a'_m$  cele  $m$  medii aritmetice inserate între  $a_j$  și  $a_{j+1}$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ), este evident că succesiunea  $a_1, a'_1, \dots, a'_{1m}, a_2, a'_{21}, \dots, a'_{2m}, \dots, a_n$  este o progresie aritmetică cu  $(m+1)(n-1) + 1 = mn + n - m$  termeni; notînd cu  $S'$  suma

acestei progresii și cu  $S_n$  suma progresiei inițiale, avem:  $S = S' - S_n$ ; se obține:  

$$S = \frac{m(n-1)(a_1 + a_n)}{2}.$$

- 50) Punind condiția  $a_k' = 12$ ,  $1 \leq k \leq m$ , rezultă ecuația  $7k - 3m = 3$ , adică  $m = 2k - 1 + \frac{k}{3}$ , cea mai mică valoare a lui  $k$  astfel încât  $m$  să fie număr natural este 3; rezultă  $m = 6$ ,  $r' = 2$ , mediile căutate sînt 8, 10, 12, 14, 16, 18.
- 51) Se rezolvă un sistem de două ecuații în  $a_1$  și  $r$ ; prima ecuație a sistemului este evident;  
 $2a_1 + (n-1)r = 3n - 1$ ; pentru a stabili ecuația a doua, se observă că  $\sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)r]^2 = na_1^2 + 2ra_1 \sum_{k=1}^n (k-1) + r^2 \sum_{k=1}^n (k-1)^2$ ; sumele  $\sum_{k=1}^n (k-1)$  și  $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$  sînt cunoscute; se face apoi înlocuirea în a doua egalitate din enunț; rezolvînd, se obține  $a_1' = 1$ ,  $r' = 3$ ;  $a_1'' = 3n - 2$ ,  $r'' = -3$ .
- 52) a) Deoarece  $a_i - a_{i-1} \leq r$ ,  $2 \leq i \leq n$ , rezultă  $a_i^2 - a_{i-1}^2 = r(a_i + a_{i-1})$ ,  $2 \leq i \leq n$ ; dînd succesiv lui  $i$  valorile 2, 3, ...,  $n$  și însumînd membru cu membru, egalitățile obținute, rezultă egalitatea care trebuie demonstrată; b)  $(a_i - a_{i-1})(a_i^2 + a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2) = r(a_i^2 + a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2)$ ,  $2 \leq i \leq n$ ; rezultă:  $a_i^3 - a_{i-1}^3 = r(a_i^2 + 3a_i a_{i-1})$ ,  $2 \leq i \leq n$ ; se dau lui  $i$  succesiv valorile 2, 3, ...,  $n$  și se însumează membru cu membru egalitățile obținute.
- 53) a)  $r' = 2$ ,  $S_n' = 2555$ ;  $r'' = -2$ ,  $S_n'' = 855$ ; b)  $a_1 = 3$ ,  $S_n = 765$ ; c)  $a_3 = 128$ ,  $a_5 = 8$ ; d) 1.328.600; e) 17,51, 153, sau  $\frac{425}{3}$ ,  $-\frac{595}{3}$ ,  $\frac{833}{3}$ ; f) 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1.458, sau  $\frac{26}{7}$ ,  $-\frac{78}{7}$ ,  $\frac{234}{7}$ ,  $-\frac{702}{7}$ ,  $\frac{2106}{7}$ ,  $-\frac{6318}{7}$ ,  $\frac{18.954}{7}$ .
- 54) Avem  $a_{j+1} = ar$ ; notînd cu  $r'$  rația progresiei geometrice  $a_j, a_1', a_2', \dots, a_m', a_{j+1}$ , rezultă  $a_{j+1} = a_j(r')^{m+1}$ ; se obține  $r' = \sqrt[m+1]{r}$  (se observă că dacă  $m$  este impar, problema nu are soluție decît în cazul  $r \geq 0$ ); în aplicația propusă, avem:  $r' = 3$ ;  $a_1' = 483$ ,  $a_1'' = 1.449$ .
- 55) a)  $\frac{2(\log^n a - 1)}{n(n+1)(\log_b a - 1)}$ ; b) dacă  $\alpha \neq 0$ , suma este  $a \frac{((1+3\alpha)^n - 1)^2}{9\alpha^2(1+3\alpha)^{n-1}} \log_b a$ ; dacă  $\alpha = 0$ , suma este  $n^2 a \log_b a$ .
- 56) 1°. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie geometrică, atunci pentru orice  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ , avem:  $a_{k-1} \cdot a_{k+1} = a_1 r^{k-2} \cdot a_1 r^k = a_1^2 r^{2(k-1)} = (a_1 r^{k-1})^2 = a_k^2$ ; 2° demonstrație pe cazuri: caz a) presupunem că există  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , cu  $a_m = 0$ ; să demonstrăm că în acest caz avem  $a_k = 0$  oricare ar fi  $k = 2, 3, \dots, n$ ; într-adevăr, să presupunem că există  $j$ ,  $2 \leq j \leq n$ ,  $j \neq m$ , cu  $a_j \neq 0$ ; ținînd seama de ipoteza a doua a propoziției 2°, rezultă că putem presupune  $j < n$ ; aplicînd ipoteza întîi a propoziției 2°, rezultă  $a_{j-1} \neq 0$  și  $a_{j+1} \neq 0$ ; după  $|m-j|$  pași, rezultă  $a_m \neq 0$ , ceea ce contrazice ipoteza cazului a); rezultă că în cazul considerat, singurul termen eventual nenul din succesiunea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este  $a_1$ , deci  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie geometrică (cu rația  $r = 0$ ) (ipoteza a doua este esențială; într-adevăr, de exemplu succesiunea 0, 0, 0, 1 verifică ipoteza întîi, dar nu este o progresie geometrică); caz b) presupunem  $a_i \neq 0$ , pentru orice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ; rezultă:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ; notînd  $\frac{a_2}{a_1} = r$ , rezultă  $a_i = a_{i-1} r$ ,  $2 \leq i \leq n$ , deci  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este o progresie geometrică.
- 57) Se rezolvă sistemul de ecuații  $a_1 + a_2 + a_3 = 30$ ,  $2a_2 = a_1 + a_3$ ,  $(a_2 - 4)^2 = (a_1 - 5)a_3$ ; se obține 17, 10, 3 sau 8, 10, 12.
- 58) Avem:  $2n_2 = n_1 + n_3$ ,  $n_3^2 = n_2 \cdot n_4$  etc.; se obține 12, 16, 20, 26.
- 59) Avem  $b = a + r$ ,  $c = a + 2r$ ,  $d = a + 3r$ ; rezultă sistemul de ecuații  $(a + r - 6)^2 = (a - 2)(a + 2r - 7)$ ,  $(a + 2r - 7)^2 = (a + r - 6)(a + 3r - 2)$ ; se obține  $a = 5$ ,  $r = 7$  (progresia

aritmetică și progresia geometrică corespunzătoare sînt în acest caz 5, 12, 19, 26, respectiv 3, 6, 12, 24).

$a = 5$ ,  $r = 1$  este, de asemenea, soluție a sistemului; în acest caz, din progresia aritmetică 5, 6, 7, 8 se obține succesiunea 3, 0, 0, 6, care însă nu este o progresie geometrică (deși  $a^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ ,  $k = 2, 3$ , propoziția 2° de la exerc. 56 nu este aplicabilă, deoarece ipoteza a doua a propoziției nu se verifică).

- 60) Notînd cu  $r$  rația progresiei, rezultă imediat că egalitatea din enunț este echivalentă cu egalitatea

$$\left( \sum_{k=0}^{2n} r^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k r^k \right) = \sum_{k=0}^{2n} r^{2k},$$
 care se demonstrează prin inducție completă, într-adevăr, pentru  $n = 1$  avem  $(1 - r + r^2)(1 + r + r^2) = 1 + r^2 + r^4$ ; se presupune

apoi egalitatea adevărată pentru  $n$ ; notînd  $\sum_{k=0}^n r^k = \alpha_1$  și  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k r^k = \alpha_2$ , rezultă

$$\left( \sum_{k=0}^{2n+2} r^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k r^k \right) = \alpha_1 \alpha_2 + r^{2n+2} (\alpha_1 + \alpha_2) + r^{2n+1} (\alpha_2 - \alpha_1) + r^{4n+4} - r^{4n+2};$$

deoarece, conform ipotezei de inducție, avem  $\alpha_1 \alpha_2 = \sum_{k=0}^{2n} r^{2k}$ , rezultă ușor  $\left( \sum_{k=0}^{2n+2} r^k \right) \cdot$

$$\left( \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k r^k \right) = \sum_{k=0}^{2n+2} r^{2k}.$$

## Capitolul II (Șiruri)

- 1) a)  $-\frac{1}{3}$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{3}{11}$ ; b) 1, 0, 1, 0, 1; c) 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{24}$ ,  $\frac{1}{120}$ ; d)  $-1$ ,  $1$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{24}$ ;  
e)  $\frac{3}{2}$ ,  $2$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{7}{48}$ ; f) 0,  $\frac{1}{24}$ ,  $-\frac{1}{360}$ ,  $\frac{1}{13.440}$ ,  $-\frac{1}{907.200}$ .

- 2) a)  $a_n = 2^n - 1$ ; b)  $a_n = \frac{n}{n+2}$ ; c)  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ; d)  $a_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$ ; e)  $a_n = \frac{4n+1}{8n}$ ; f)  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$ ; g)  $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ .

- 3) a) Șirul este mărginit, deoarece  $a_n \in (-1, 0)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; calculînd apoi diferența  $a_{n+1} - a_n$ , se obține:  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{7n(n+1)} > 0$ , deci  $a_n < a_{n+1}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; șirul

este deci crescător; b)  $a_n = \alpha \cdot \frac{1}{n+1} = \alpha \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ ; deoarece  $1 + \frac{1}{n} > 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,

rezultă  $a_n \in [0, \alpha]$  dacă  $\alpha \geq 0$ , și  $a_n \in [\alpha, 0]$  dacă  $\alpha \leq 0$ ;  $a_{n+1} - a_n = \frac{\alpha}{(n+1)(n+2)}$ , deci șirul este crescător sau descrescător după cum  $\alpha \geq 0$  sau  $\alpha \leq 0$ ; c)  $a_n \in \left[0, \frac{\alpha}{\beta}\right]$  dacă  $\alpha \geq 0$

și  $a_n \in \left[\frac{\alpha}{\beta}, 0\right]$  dacă  $\alpha \leq 0$ ; șirul este crescător sau descrescător după cum  $\alpha \geq 0$  sau  $\alpha \leq 0$ .

- 4) Fie  $\varepsilon > 0$ ;  $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3(3n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ ; deci oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , pentru toți termenii  $a_n$  din șir cu  $n > \frac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}$  (și doar pentru aceștia) avem  $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$ ; putem lua ca  $n_\varepsilon$  cel mai mic număr natural care depășește numărul  $\frac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ ; de exemplu, pentru  $\varepsilon =$

$= \frac{1}{100}$ , putem lua  $n_\varepsilon = 22$ , deci  $a_1, a_2, \dots, a_{21} \in \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{100}, \frac{2}{3} + \frac{1}{100}\right)$  și  $a_{22}, a_{23}, \dots \in \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{100}, \frac{2}{3} + \frac{1}{100}\right)$ ; b)  $\left| \frac{n^2}{2n^2+2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(n^2+1)}$ ; dacă  $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$  atunci  $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; dacă  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  se obține  $n > \sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}}$ ;

de exemplu, pentru  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ , putem lua  $n_\varepsilon = 23$ ; c)  $\left| \frac{2n + (-2)^n}{3^n} \right| < \frac{2n + 2^n}{3^n} = \frac{2n+1}{3^n}$ ; condiția  $|a_n| < \varepsilon$  devine  $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$ , deci  $n > \frac{\lg \varepsilon - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$ .

5) a)  $a_n = 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , deci  $a_n \rightarrow 0$ ; b)  $a_{2n} = 0, a_{2n-1} = (-1)^{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; șirul este divergent; c) divergent; d)  $a_n \rightarrow 1$ ; e) divergent; f) divergent; g)  $a_n \rightarrow 0$ ; h)  $a_n \rightarrow 1$ ; i)  $a_n \rightarrow -1$ .

6) a)  $1 + 2^n > 0$  și  $(1 + 2^n)$  este crescător nemărginit (v. § 6, nr. 3, I); deci (v. § 7, nr. 3):  $a^n = \frac{1}{1 + 2^n} \rightarrow 0$ ; b) exceptând eventual un număr finit de termeni, avem  $\alpha + \beta^n > 0$  oricare ar fi  $\alpha \in \mathbb{R}$  (v. consec. inegalitatea Bernoulli);  $(\alpha + \beta^n)$  e cresc. nemărg., deci  $a_n \rightarrow 0$ ;

c)  $|a_n| = \frac{1}{5n+7} \rightarrow 0$ ; deci, aplicând criteriul majorării, rezultă  $a_n \rightarrow 0$ ; d)  $|a_n| \leq \frac{|z|}{n} \rightarrow 0$ ; e)  $|a_n| = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2n} \leq 2 \frac{\alpha^2}{4n^2} \rightarrow 0$ ; f)  $|a_n| = a_n < \frac{10^{2n+2}}{10^{3n}} = \frac{1}{10^{n-1}} \rightarrow 0$ ;

g)  $|a_n| < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ ; h)  $|a_n| = a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  (v. cap. I. exerc. 12); deci, deoarece

$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ , rezultă  $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; dar  $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ . (v. § 6, nr. 3, II și § 7, nr. 3), deci

$a_n \rightarrow 0$ ; i) pentru  $n \geq 4$  avem  $|a_n| = a_n < \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{2}{3} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ; notînd  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,

avem  $|a_n| < \frac{1}{\alpha^{n-2}}$ ;  $\frac{\alpha^{n-2}}{2} > 0$  și  $\left(\frac{\alpha^{n-2}}{2}\right)$  este cresc. nemărg. (demonstrație!); rezultă  $a_{n+3} \rightarrow$

$\rightarrow 0$ , deci (v. § 7, nr. 2)  $a_n \rightarrow 0$ ; j) fie  $k \in \mathbb{N}, k > 2\alpha$  (ax. Arhimede); pentru  $n > k$  se obține

$|a_n| = a_n = \left(\frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha}{2} \dots \frac{\alpha}{k}\right) \left(\frac{\alpha}{k+1} \dots \frac{\alpha}{n}\right) < \alpha^k \cdot \frac{1}{2^{n-k}}$ ; se demonstrează că șirul

$\left(\frac{2^{n-k}}{\alpha^k}\right)_{n \in \mathbb{N}, n > k}$  este cresc. nemărg.; rezultă  $a_{n+k} \rightarrow 0$ , deci (v. § 7, nr. 2)  $a_n \rightarrow 0$ .

7)  $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ .

8) Se aplică teoremele asupra operațiilor cu șiruri convergente: a)  $-3$ ; b) se scrie  $a_n = \cos \frac{2}{n} = -1 - 2$  și se ține seama de exerc. 6, e; se obține limita  $-2$ ; c)  $-5$ ; d) se scrie  $a_n = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{1}{n}}$ ; se obține limita  $0$ ; e)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{n}$  deoarece  $\cos \frac{\alpha}{n} \rightarrow 1 \rightarrow 0$

(exerc. 6, e) rezultă  $\cos \frac{\alpha}{n} \rightarrow 1$  (v. § 8, nr. 1, corolar), deci  $\cos^2 \frac{\alpha}{n} \rightarrow 1$  (v. § 8, nr. 2); se

obține limita  $e^3$ ; f)  $-4$ .

9) a)  $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{2}$ ; b)  $a_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1} \rightarrow \frac{1}{5}$ ; c)  $\frac{3}{7}$ ; d) cazul  $\alpha = \beta$  este banal;

dacă  $\alpha > \beta$  se dă  $\alpha^n$  factor la numărător și la numitor; dacă  $\alpha < \beta$  se dă factor  $\beta^n$ ; oricare ar fi  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , se obține limita  $\frac{1}{\max(\alpha, \beta)}$ ; e) se discută cazurile:  $0 < \alpha < 1, \alpha = 1,$

$\alpha > 1$ ; limitele corespunzătoare sînt  $0, \frac{1}{2}, 1$ ; f) după cum  $0 < \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$ , se obțin, respectiv, limitele  $-1, 0, 1$ ; g) dacă  $0 < \alpha < 1$  sau  $\alpha > 1$ , limita este  $0$ ; dacă  $\alpha = 1$  limita este  $\frac{1}{2}$ .

10) a)  $5$ ; b)  $-\frac{1}{7}$ ; c) se folosește egalitatea  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ; se obține limita

$-\frac{1}{2}$ ; d) avem:  $a_n = \frac{n(n+1)}{2\left(n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right)} \rightarrow \frac{1}{3}$ ; e) se folosește egalitatea  $1^2 + 2^2 + \dots +$

$+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ; se obține limita  $\frac{1}{3}$ ; f)  $\frac{1}{2}$ ; g) se scrie  $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(k+1) =$

$= \frac{1}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \rightarrow \frac{1}{3}$ ; h) se scrie  $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \right) =$

$= \frac{1}{n^3} \left( n + 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k \right) \rightarrow \frac{4}{3}$ ; i)  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \alpha + \frac{k}{n} \right)^2$  etc.; se obține limita

$\frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3}$ .

11) 1°  $a_n - b_n = b_n \left( \frac{a_n}{b_n} - 1 \right)$ ; deoarece  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ , rezultă  $\frac{a_n}{b_n} - 1 \rightarrow 0$ ; se aplică apoi corolarul

2 din § 8, nr. 2; 2°  $\frac{a_n}{b_n} - 1 = \frac{a_n - b_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{b} = 0$ , deci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ ; pentru  $a_n = \frac{1}{n}$  și  $b_n = \frac{1}{n^2}$ ,

avem  $a_n - b_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  și  $\frac{a_n}{b_n} = n$ , deci șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  este divergent; pentru  $a_n = \frac{1}{n^3}, b_n =$

$= \frac{1}{n+1}$ , avem  $a_n - b_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  și  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

12) a) Se obține  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ ; deoarece șirul  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  este crescător și are

limita  $e$  (v. § 7, nr. 8) rezultă că  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  (v. § 7, nr. 7); deci

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e}{n+1}$ , de unde, pentru  $n \geq 2$  rezultă  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , adică  $a_n > a_{n+1}$  șirul  $(a_{n+1})$  este

deci descrescător; șirul  $(a_{n+1})$  este și mărginit ( $a_n > 0$  pentru or.  $n$ ), deci este convergent; deci și șirul  $(a_n)$  este convergent; fie  $a = \lim a_{n+1} = \lim a_n$ ; trecînd la limită în egalitatea

$a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ , obținem  $a = a \cdot e \cdot 0$ , deci  $a = 0$ ; b) se obține  $a_{n+1} = \frac{a_n}{n!}$ .

$\cdot \frac{\alpha}{n+1} = a_n \frac{\alpha}{n+1}$ ; pentru  $n > \alpha - 1$  (ax. Arhimede), deci exceptînd eventual un număr finit

de termeni, rezultă  $a_n > a_{n+1}$ ; evident  $a_n > 0$  pentru or.  $n$ ; deci  $(a_n)$  este descrescător (exceptînd eventual un număr finit de termeni) și mărginit, deci este convergent; notînd  $\lim a_n = a$ ,



se obține  $x = x \cdot 0 = 0$ ; c) se demonstrează prin inducție completă că șirul  $(a_n)$  de numere strict pozitive este crescător;  $a_n < a_{n+1}$  pentru or.  $n$ ; într-adevăr, pentru  $n = 1$  avem  $a_1 < a_2$ ; presupunind  $a_n < a_{n+1}$ , rezultă  $2 + a_n < 2 + a_{n+1}$ , deci  $\sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}}$ , adică  $a_{n+1} < a_{n+2}$ ; se arată apoi că  $(a_n)$  este mărginit; într-adevăr,  $a_n < 2$  pentru or.  $n$  (demonstrație prin inducție compl.); notind  $\lim a_n = a$ , se obține  $a^2 - a - 2 = 0$ ; deoarece  $a_n > 0$  rezultă  $a \geq 0$ , deci  $a = 2$ ; d) se demonstrează ca la exerc. c) că șirul  $(a_n)$  este crescător; rezultă  $a_n^2 - a_n - \alpha < 0$  pentru or.  $n$ , deci  $0 < a_n < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\alpha})$  pentru or.  $n$ , deci  $(a_n)$  este mărginit; rezultă  $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\alpha})$ ; e) evident  $a_n > 0$  pentru or.  $n$ ; se demonstrează prin inducție completă că  $(a_n)$  este crescător; într-adevăr:  $a_1 < a_2$  și  $(a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2})$ , ultima implicație rezultând din egalitatea  $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2}$ ; se demonstrează apoi prin inducție completă că  $a_n < 1$  pentru or.  $n$ , deci șirul este mărginit; notind  $\lim a_n = a$ , se obține  $a^2 - 2a + \alpha = 0$ ; deoarece  $a \leq 1$  rezultă  $a = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$ .

- 13) Se arată că șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  îndeplinesc condițiile din „teorema cleștelui” (v. § 7, nr. 7); într-adevăr, se demonstrează prin inducție completă:  $1^\circ a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_1 < b_0$ ;  $2^\circ b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{6^n}$ , deci  $b_n - a_n \rightarrow 0$  (pentru a demonstra  $1^\circ$  se arată mai întâi că  $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$  și apoi că dacă  $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$  atunci  $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ ); rezultă  $\lim a_n = \lim b_n$ .  
În exerc. 14 și în exercițiile care urmează se va observa că dacă în termenul general  $a_n$  intervin radicali de ordin par de forma  $\sqrt[p]{\varphi(n)}$ , atunci exceptând eventual un număr finit de numere naturale  $n$ , avem  $\varphi(n) \geq 0$  (când este cazul — inegalitate strictă). Dacă  $a_n = (\varphi(n))^{\frac{1}{p(n)}}$ , o observație analogă trebuie făcută cu privire la baza  $\varphi(n)$ .

- 14) a) Se scrie  $a_n = \frac{7 - \sqrt{\frac{5}{n} + \frac{5}{n^3}}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ ; limita este  $\frac{7}{2}$ ; b) 0; c) -1; d) 1.

- 15) a) Se înmulțește și se împarte cu conjugata; se obține  $a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2}{n}$ .  
b)  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 0$ ; c)  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{1 - n^3} + n^2} \rightarrow 0$ ; d) 0;  
e)  $-\frac{1}{4}$ ; f)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ; g) se observă mai întâi că oricare ar fi  $p \in \mathbb{N}$  și numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ , avem  $(n + x_1)(n + x_2) \dots (n + x_{2p}) \geq 0$  pentru  $n \geq \max(x_1, x_2, \dots, x_{2p})$ ; limita este  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_k$ .

- 16) Notind  $b_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n^3} - 1} - \lambda - \frac{\mu}{n}$  se obține  $a_n = nb_n$ ; avem:  $b_n \neq 0$  (exceptând eventual un număr finit de indici) și  $b_n \rightarrow -1 - \lambda$ ; dacă  $\lambda \neq -1$  atunci șirul  $(a_n)$  este divergent deoarece, în caz contrar, șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  ar fi convergent, ceea ce este exclus, deoarece  $\frac{a_n}{b_n} = n$ ; rezultă că pentru a avea  $\lim a_n = 0$  este necesar ca  $\lambda = -1$ .

Se obține apoi  $a_n = \frac{-(\lambda^3 + 1)n^3 - 3\lambda^2\mu^2 - 3\lambda\mu^2n + 1 - \mu^3}{\sqrt[3]{(1 - n^3)^2} + (\lambda n + \mu)\sqrt[3]{1 - n^3} + (\lambda n + \mu)^2}$ ; rezultă  $\mu = 0$ .

- 17) a)  $\frac{1}{8}$ ; b) 1; c)  $\frac{1}{3}$ ; d) 0; e)  $-\frac{1}{6}$ ; f)  $-3 \ln 2$ .

- 18) a)  $a_n = n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \infty$ ; b)  $-\infty$ ; c)  $-\infty$ ; d)  $\infty$ ; e)  $\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $-\frac{7}{6}$ ;

$$h) a_n = n\pi(1 - 7n^{\frac{2}{5} - \pi} + 9n^{3 - \pi} - n^{-\pi}) \rightarrow -\infty; \quad n^2(-5 + 3n^{\frac{5}{2} - \pi} + 101n^{-\pi})$$

- i) cazul  $\infty - \infty$ ;  $a_n = n \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3} - 2} + 1\right) \rightarrow -\infty$ ; se observă că dacă reluăm exerc. 15, a

de mai sus, scoaterea în factor a lui  $n$  nu permite calculul limitei, deoarece se ajunge la cazul exceptat;  $\infty \cdot 0$ ; j)  $-\infty$ ; k) 0; l) 0; m)  $\infty$ ; n) 0; p) 0; q)  $\infty$ .

- 19) Fie  $(a, +\infty)$  o vecinătate oarecare a lui  $+\infty$ ; atunci  $(a - \alpha, +\infty)$  este, de asemenea, o vecinătate a lui  $+\infty$ ; deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , rezultă  $b_n \in (a - \alpha, +\infty)$ , adică  $b_n > a - \alpha$ , exceptând eventual un număr finit de termeni; rezultă  $a_n + b_n > \alpha + a - \alpha = a$ , adică  $a_n + b_n \in (a, +\infty)$ , exceptând eventual un număr finit de termeni; rezultă  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  (se observă că propoziția rămâne adevărată și în cazul cînd  $a_n < \alpha$  pentru un număr finit de termeni); dacă  $y_n \rightarrow +\infty$  atunci există  $\alpha$  cu  $y_n \geq \alpha$  pentru orice  $n$ ; dacă  $(y_n)$  este convergent, atunci este mărginit; deci, de asemenea, există  $\alpha$  astfel încît  $y_n \geq \alpha$  pentru or.  $n$ .

- 20)  $1^\circ$  Se demonstrează mai întâi că  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$ ; într-adevăr, fie  $(a, +\infty)$  o vecinătate oarecare a lui  $+\infty$ ; deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , rezultă  $b_n > \frac{a}{\alpha}$ , deci  $\alpha b_n > a$ , exceptând eventual un număr

finit de termeni; deci  $\alpha b_n \in (a, +\infty)$ , exceptând eventual un număr finit de termeni, deci  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$ ; apoi, deoarece  $a_n b_n \geq \alpha b_n$  și  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$ , rezultă (v. § 10, nr. 1)  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ ; în particular, considerînd un șir  $(a_n)$  care are limită strict pozitivă (eventual limita  $+\infty$ ), sînt justificate convențiile  $a \cdot \infty = \infty$ , oricare ar fi numărul real  $a > 0$ , și  $\infty \cdot \infty = \infty$ ;  $2^\circ$  fie  $(a, b)$  o vecinătate oarecare a lui 0,  $a < 0 < b$ ; prin ipoteză există  $\alpha > 0$  astfel încît  $|a_n| < \alpha$  pentru orice  $n$ ; deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , avem  $b_n > \frac{\alpha}{b} > 0$ , exceptând eventual un număr finit de

termeni; rezultă  $0 < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = |a| \frac{1}{b_n} < \alpha \cdot \frac{b}{\alpha} = b$ , exceptând eventual un număr finit de termeni; rezultă  $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \rightarrow 0$ , deci (v. § 7, nr. 5)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ ; demonstrație analogă în cazul  $b_n \rightarrow -\infty$ ; în particular, dacă  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(a_n)$  este mărginit, deci oricare ar fi șirul  $b_n \rightarrow +\infty$  (sau  $b_n \rightarrow -\infty$ ) avem  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ ; se justifică astfel convențiile  $\frac{a}{+\infty} = 0$  și  $\frac{a}{-\infty} = 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

- 21)  $1^\circ$  Fie  $\varepsilon > 0$  și  $\varepsilon' = a^\varepsilon$ ; deoarece  $x_n \rightarrow +\infty$ , există  $n' \in \mathbb{N}$  astfel încît dacă  $n \geq n'$ , atunci  $x_n > \varepsilon'$ , adică  $x_n > a^{\varepsilon'}$ ; deoarece  $a > 1$ , funcția  $\log_a x$  este strict crescătoare; deci pentru  $n \geq n'$  avem  $\log_a x_n > \log_a a^{\varepsilon'} = \varepsilon$ ; rezultă  $\log_a x_n \rightarrow +\infty$  (cazul  $0 < a < 1$  se tratează în mod analog, luînd  $\varepsilon' = a^{-\varepsilon}$ ; se obține:  $\log_a x_n \rightarrow -\infty$ ).  $2^\circ$  deoarece  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ , rezultă  $y_n = \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$ , deci, conform rezultatului anterior:  $\log_a y_n \rightarrow +\infty$ ; se obține:

- 22)  $1^\circ$  Fie  $(a, +\infty)$ ,  $a > 0$ , o vecinătate a lui  $+\infty$ ; deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , rezultă  $b_n > \frac{\ln a}{\ln \alpha}$ , exceptând eventual un număr finit de termeni; deoarece  $\alpha > 1$  avem  $\ln \alpha > 0$ , deci  $b_n \ln \alpha > \ln a$ , adică  $\alpha^{b_n} > a$ , exceptând eventual un număr finit de termeni; rezultă  $\alpha^{b_n} \rightarrow +\infty$ ;  $2^\circ$  deoarece  $a_n \rightarrow +\infty$ , rezultă  $\ln a_n \rightarrow +\infty$  (v. exerc. 21), deci  $b_n \ln a_n \rightarrow +\infty$  (v. exerc. 20,  $1^\circ$ );



avem  $a_n^{b_n} = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n \ln a_n} \rightarrow +\infty$  (v. 1° la acest exerc.); 3°  $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} = \frac{1}{e^{-b_n \ln a_n}}$ ;

deoarece  $-b_n \ln a_n \rightarrow +\infty$ , rezultă  $e^{-b_n \ln a_n} \rightarrow +\infty$ , deci  $a_n^{b_n} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0$ .

23) Se știe că șirul  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  este crescător; anume dacă  $n_1$  și  $n_2$  sînt numere naturale și  $n_1 < n_2$ , atunci  $\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} < \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)^{n_2}$ ; se știe, de asemenea, că  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; fie  $\varepsilon > 0$ ; deoarece  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ , există  $n' \in \mathbb{N}$ , astfel încît dacă  $n \geq n'$  atunci  $\left|e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$ ; în particular  $e - \left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n'} < \varepsilon$ ; fie  $(x_n)$  un șir de numere naturale,  $x_n \rightarrow +\infty$ . Deoarece  $x_n \rightarrow +\infty$ , există  $n'' \in \mathbb{N}$  astfel încît dacă  $n \geq n''$  atunci  $x_n > n'$ ; deci pentru  $n \geq n'' = n_2$ , avem  $\left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n'} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ , de unde rezultă  $\left|e - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right| = e - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \varepsilon$ ; deci  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$ ; fie  $(y_n)$  un șir de numere reale oarecare,  $y_n \rightarrow +\infty$ , putem presupune  $y_n \geq 1$ ; fie  $y_n$  numărul natural care verifică inegalitățile  $y_n \leq x_n < y_n + 1$ ; notînd  $a_n = \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{y_n}$  și  $b_n = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n + 1}$ , rezultă inegalitățile  $a_n < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < b_n$ ; ținînd seama de prima parte a propoziției, rezultă:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{y_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{-1} \rightarrow e \cdot 1 = e$$

și:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e; \text{ deoarece } 0 \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - a_n \leq b_n - a_n \text{ rezultă,}$$

$$\text{aplicînd criteriul majorării, } \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - a_n \rightarrow 0, \text{ deci } \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - a_n\right] + a_n \rightarrow e.$$

$$24) a) a_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{2^n}} \rightarrow +\infty; b) a_n = \frac{5n^2 \left(1 + \frac{1}{5n^2}\right)}{5n^{2+1} \left(1 + \frac{1}{5n^{2+1}}\right)} \rightarrow +\infty; c) \text{ fie } \alpha > 1; \text{ rezultă}$$

$$\alpha = 1 + \beta, \beta > 0; \alpha^n = (1 + \beta)^n = 1 + n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\beta^2 + \dots + \beta^n > \frac{n(n-1)}{2}\beta^2; \text{ deci}$$

$$\frac{\alpha^n}{n} > \frac{n-1}{2}\beta^2 \rightarrow +\infty, \text{ deci (v. § 10, nr. 1)} a_n \rightarrow +\infty; \text{ dacă } 0 < \alpha \leq 1, \text{ atunci } a_n \rightarrow 0;$$

$$d) a_n = \frac{1}{\frac{\alpha^n}{n}}; \text{ se folosește rezultatul de la pct. c) dacă } \alpha > 1 \text{ atunci } a_n \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0; \text{ dacă } 0 <$$

$$< \alpha \leq 1, \text{ atunci } \frac{\alpha^n}{n} > 0 \text{ și } \frac{\alpha^n}{n} \rightarrow 0, \text{ deci (v. § 10, nr. 3)} a_n \rightarrow +\infty; e) a_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2n}{n}}{\frac{1}{n} - 1}, \text{ deci}$$

[v. pct. c)];  $a_n \rightarrow -\infty$ ; f) dacă  $\alpha > 1$ , atunci  $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$  și  $|a_n| = a_n < \frac{\alpha^n}{\alpha \cdot \alpha^2 \dots \alpha^n} =$

$$= \frac{\alpha^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha^{-\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow 0, \text{ deci } a_n \rightarrow 0; \text{ dacă } \alpha = 1, \text{ atunci } a_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0;$$

dacă  $0 < \alpha < 1$ , atunci  $|a_n| = a_n < \alpha^n \rightarrow 0$ , deci  $a_n \rightarrow 0$ ; în concluzie:  $a_n \rightarrow 0$ , oricare ar fi  $\alpha > 0$ ;

g) dacă  $\alpha = 0$ , atunci  $a_n = 1$  pentru or.  $n$ , deci  $a_n \rightarrow 1$ ; fie  $\alpha \neq 0$ ; avem  $x_n = \frac{\alpha n}{n^2 + 1} \rightarrow$

$\rightarrow 0$  și  $x_n > 0$ , respectiv  $x_n < 0$  pentru or.  $n$ , după cum  $\alpha > 0$ , respectiv  $\alpha < 0$ , rezultă (v. § 10,

$$\text{nr. 5): } a_n = \left(1 + \frac{\alpha n}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n^2 + 1}{\alpha n}} = \left(1 + \frac{\alpha}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n^2 + 1}{\alpha n}} \rightarrow e^{-\frac{\alpha}{\alpha}} = e^{-1}; \text{ h) } \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{2\sqrt[3]{n} - 3} \rightarrow 0 \text{ și } \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{2\sqrt[3]{n} - 3} > 0,$$

pentru  $n \geq 3$ ;  $a_{n+2} \rightarrow \sqrt[3]{e^2}$ , deci  $a_n \rightarrow \sqrt[3]{e^2}$ .

### Capitolul III (Limite de funcții)

1) a) Oricare ar fi șirul de puncte  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ,  $x_n \neq 3$ ,  $x_n \rightarrow 3$ , avem  $\frac{1}{2x_n + 1} \rightarrow \frac{1}{7}$ ;

b) analog cu exercițiul a); c) oricare ar fi șirul de puncte  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $x_n \rightarrow 1$ , avem  $(x_n - 1)^2 \rightarrow 0$

$$\text{și } (x_n - 1)^2 > 0; 3x_n + 5 \rightarrow 8 > 0; \text{ deci } \frac{3x_n + 5}{(x_n - 1)^2} \rightarrow +\infty; d) \frac{2x_n^2 + x_n + 5}{3x_n^2 - 2x_n + 1} = \frac{2 + \frac{1}{x_n} + \frac{5}{x_n^2}}{3 - \frac{2}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}; e), f), g), h); \text{ analog cu d).}$$

2) De exemplu, pentru  $f_1(x) = \sin x$ , considerînd șirul  $(x_n)$  cu  $x_n = n\pi$ , evident  $x_n \rightarrow +\infty$  și  $(f_1(x_n))$ ;  $0, 0, \dots, 0, \dots$   $x_n \rightarrow 0$ ; pentru  $x'_n = \frac{(4n+1)\pi}{2} \rightarrow +\infty$  avem  $(f_1(x'_n))$ :  $1, 1, \dots, 1, \dots$

$\dots \rightarrow 1$ ; se poate observa, de altfel, că există șiruri  $y_n \rightarrow +\infty$ , de exemplu,  $y_n = \frac{n\pi}{2}$ ; astfel

încît șirul  $(f_1(y_n))$  nu are limită.

3) a)  $f(-7-0) = -\infty$ ,  $f(-7+0) = +\infty$ ; b)  $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$ ; dacă  $x < -1$ ,

atunci  $\frac{2x}{x-1} > 0$  etc.; se obține:  $f(-1-0) = -\infty$ ;  $f(-1+0) = +\infty$ ;  $f(1-0) = -\infty$ ,

$f(1+0) = +\infty$ ; c)  $f(2-0) = -\infty$ ,  $f(2+0) = +\infty$ ;  $f(3-0) = f(3+0) = +\infty$ , deci  $f$

are limită  $+\infty$  în  $x = 3$ ; d)  $f(0-0) = 0$ ,  $f(0+0) = +\infty$ ; e)  $f(8-0) = 1$ ,  $f(8+0) = 0$ ;

f) deoarece  $(x < e) \Rightarrow (\ln x < 1)$ , rezultă  $f(e-0) = -\infty$ ; analog:  $f(e+0) = +\infty$ ; g)  $f(0-0) =$

$$= -\frac{1}{e}, f(0+0) = 0; \text{ apoi: } (0 < x < 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} > 1\right) \Rightarrow (e^{\frac{1}{x}} > e) \text{ etc. se obține: } f(1-$$

$$-0) = +\infty, f(1+0) = -\infty; h) \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (\lg x < 1) \text{ etc.; } f\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}+0\right) = +\infty; i) [\text{discuție după } \alpha: \text{ dacă } \alpha > 1, \text{ atunci } \alpha + \sin \frac{1}{x} \geq \alpha - 1 > 0; \text{ dacă}$$

$$\alpha > 0; \text{ și } x_n \rightarrow 0, \text{ atunci } f(x_n) \geq \frac{\alpha - 1}{x_n} \rightarrow +\infty, \text{ deci } f(x_n) \rightarrow +\infty; \text{ iar dacă } x_n < 0, x_n \rightarrow 0,$$

atunci  $f(x_n) \leq \frac{n-1}{x_n} \rightarrow -\infty$ , deci  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ ; deci  $f(0+0) = +\infty$ ;  $f(0-0) = -\infty$ ; dacă  $\alpha < -1$  rezultă în mod analog  $f(0+0) = -\infty$ ,  $f(0-0) = +\infty$ ; dacă  $|\alpha| \leq 1$  funcția nu are limite laterale în  $x=0$ ; să arătăm, de exemplu, că  $f$  nu are limită la dreapta în  $x=0$ ; într-adevăr pentru orice  $\alpha \in [-1, 1]$  există un șir  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x > 0$  astfel încît  $\alpha + \sin \frac{1}{x_n} = 0$  pentru orice  $n$ , deci  $f(x_n) \rightarrow 0$ ; în același timp însă: dacă  $\alpha = \pm 1$ , atunci, luind  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ , rezultă  $f(x_n) = \pm \frac{1}{x_n} \rightarrow \pm \infty$ , iar dacă  $-1 < \alpha < 1$ , atunci luind  $\omega \in (\arcsin |\alpha|, \frac{\pi}{2})$  și  $x_n = \frac{1}{\omega + 2n\pi}$ , rezultă  $\alpha + \sin \frac{1}{x_n} = \alpha + \sin \omega > 0$ , deci  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ ; se arată în mod analog că în cazul  $|\alpha| \leq 1$ ,  $f$  nu are nici limită la stînga în  $x=0$ .

4)  $f_1(a) = \frac{3 + \sqrt{9+3a}}{a}$ ,  $f_2(a) = \frac{3 - \sqrt{9+3a}}{a}$ ; dacă  $a_n \rightarrow 0$ , atunci  $f_2(a_n) = \frac{-3a_n}{a_n(3 + \sqrt{9+3a_n})} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ; deci  $\lim_{a \rightarrow 0} f_2(a) = -\frac{1}{2}$ ; fie acum  $a_n > 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$ ; se obține  $f_1(a_n) = (3 + \sqrt{9+3a_n}) \cdot \frac{1}{a_n} \rightarrow 6 \cdot (+\infty) = +\infty$ ; deci  $f_1(0+0) = +\infty$ ; se obține în mod analog  $f_1(0-0) = -\infty$ ; se observă că  $-\frac{1}{2}$  este rădăcina ecuației de gradul I care se obține pentru  $a=0$  în ecuația dată; desigur nu are sens să se considere  $+\infty$  sau  $-\infty$  ca „rădăcini” ale acestei ecuații.

5) a) Din definiția funcției  $[x]$  rezultă:  $[x] = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 2 & \text{dacă } x \in [2, 3) \end{cases}$ , deci  $f(2-0) = 1$ ,  $f(2+0) = 2$ ; b)  $f(-2-0) = -3$ ,  $f(-2+0) = -2$ ; c)  $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-1)^{1+x}}{x^2-4} = +\infty$ ;  $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(-1)^{1+x}}{x^2-4} = +\infty$ ; deci  $f$  are limita  $+\infty$  în  $x=2$ .

6) a), b), c), d): toate limitele sînt egale cu 0; se utilizează inegalitățile:  $|\sin \alpha| \leq 1$ ,  $|\cos \alpha| \leq 1$  și  $|\alpha| \leq |\lg \alpha|$  (pentru  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ); e) dacă  $x > 0$  atunci  $2x^2 + x + 5 > 2x^2 > x^2$ , deci limita căutată este  $+\infty$ ; f) dacă  $x < -1$  atunci  $x^3 + x + 1 < x^3$ ; limita este  $-\infty$ ; g) dacă  $x > 0$  atunci  $\frac{x+3}{(2x-1)^2} > \frac{1}{(2x-1)^2}$ ; limita este  $+\infty$ ; h)  $x + \sin x \geq x - 1$ ; limita este  $+\infty$ ; i) deoarece  $\cos 2x \leq 1$ , rezultă  $-\cos 2x \geq -1$ , deci  $\frac{x^3-2}{2x^2+1} - \cos 2x \geq \frac{x^3-2}{2x^2+1} - 1 = \frac{x^3-2x^2-3}{2x^2+1}$ ; deoarece oricare ar fi șirul  $x_n \rightarrow +\infty$ , avem  $\frac{x_n^3-2x_n^2-3}{2x_n^2+1} \rightarrow +\infty$ , rezultă că limita căutată este  $+\infty$ ; j) deoarece  $\sin x \geq -1$ , rezultă, presupunînd  $x > 1$ ,  $(2 + \sin x) \ln x \geq (2-1) \ln x = \ln x$ ; deci, deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ , rezultă că limita căutată este  $+\infty$ .

7) a) 16; b)  $54e^3 - 4$ ; c)  $-\frac{1}{3}$ ; d)  $\frac{27\pi^3}{4} + 5$ ; e)  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right)$ ; f)  $-\frac{125\pi^3\sqrt{2}}{128} + 7$ .

8) a)  $\infty$ ; b)  $-\infty$ ; c)  $\infty$ ; d)  $-\infty$ .

9) a)  $\sqrt[3]{3}$ ; b)  $\left(\frac{37}{16}\right)^{\sqrt{3}}$ ; c)  $\infty$ ; d)  $\infty$ ; e)  $e^{10}$ ; f) 1; g)  $\frac{\pi}{2}$ ; h)  $\frac{1}{2}$ ; i)  $\infty$ ; j) 0; k) 0; l) 0; m)  $\infty$ ; n) 0.

10) a)  $-\infty$ ; b)  $-\infty$ ; c)  $-\infty$ ; d)  $\infty$ ; e)  $-\frac{1}{5}$ ; f) -6; g) 0; h)  $-\infty$ ; i)  $\infty$ ; j)  $-\infty$ ; k) deoarece

putem presupune  $x > 0$ , rezultă  $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x \left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$ ; limita este 1;

l) pentru  $x < 0$ ;  $\frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x \left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$ ; limita este -1; m) -1; n) pentru  $x < 0$ ;

$\frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x \sqrt{27-\frac{1}{x^3}}}{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{27-\frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1}$ ; limita este -1.

11) a) Se scrie  $\frac{2x-3}{(x+1)^4(x+3)} = \frac{2x-3}{x+3} \cdot \frac{1}{(x+1)^4}$ ; limita este  $-\infty$ ; b)  $\infty$ ; c) se dă  $x^2$  factor la numărător și la numitor; limita este -1; d) -8; e) 6; f) -1; g)  $\frac{n}{m}$ ; h)  $\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^{n-1} + \dots + x + 1 - n}{x-1} = \frac{(x^{n-1}-1) + \dots + (x-1)}{x-1}$ ; limita este  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

12) pentru  $x > 0$ :  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2 - 2}{(\sqrt[6]{x})^6 - 1} = \frac{(\sqrt[6]{x})^2 + 2\sqrt[6]{x} + 2}{(\sqrt[6]{x})^5 + \dots + \sqrt[6]{x} + 1}$ ; limita este  $\frac{5}{6}$ ; b)  $\frac{1}{n\sqrt[20]{20^{n-1}}}$ ; c) se amplifică fracția cu conjugata numărătorului; limita este  $\frac{1}{2}$ ;

d)  $\frac{1}{2}$ ; e)  $\frac{1}{2}$ ; f) se amplifică fracția cu produsul dintre conjugata numărătorului și conjugata numitorului; limita este 1; g) -1; h)  $\frac{1}{3}$ ; i)  $\frac{1}{5}$ ; j) 0.

13) Este evidentă condiția necesară  $\lambda > 0$ , deoarece dacă  $\lambda \leq 0$  limita este  $+\infty$ ; amplificînd cu conjugata se obține:  $\frac{x^2(1-4\lambda^2) - x(1+\lambda^2)}{\sqrt{4x+1}(\sqrt{4x-1} + \lambda\sqrt{4x+1})}$ ; dintre condițiile  $1-4\lambda^2 = 0$  și  $\lambda > 0$  rezultă  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; în acest caz, limita este  $-\frac{5}{16}$ .

14) Se scrie:  $f(x) = \sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (\alpha x^p + \beta x + \gamma) = x^2 \left( \sqrt{9 - \frac{24}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^4}} - x^{p-2} \left( \alpha + \frac{\beta}{x^{p-1}} + \frac{\gamma}{x^p} \right) \right)$ ; dacă  $p \neq 2$  sau dacă  $p = 2$  și  $\alpha \neq 3$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ ; rezultă deci condițiile necesare  $p = 2$ ,  $\alpha = 3$ ; înlocuind, amplificînd cu conjugata și ținînd seama de condiția din enunț, rezultă:  $\beta = -4$ ,  $\gamma = -4$ .

15) 1° Se observă că dacă există  $j(1 \leq j \leq m)$ , astfel încît  $\alpha_j < 0$ , atunci domeniul de def. al lui  $i$  este  $\emptyset$  sau un interval mărginit; dacă  $\alpha_j = 0$  și  $\beta_j > 0$  pentru orice  $j = 1, 2, \dots, m$ , și  $\beta_j > 0$  pentru cel puțin un  $j$ , și presupunînd în plus  $\beta_l = 0 \Rightarrow \gamma_l \geq 0$ , atunci  $f$  este def. pe o semidreaptă de forma  $(a, +\infty)$ ; dacă  $\alpha_j = 0$  și  $\beta_j \leq 0$  pentru orice  $j = 1, 2, \dots, m$  și  $\beta_j < 0$  pentru cel puțin un  $j$ , și presupunînd în plus:  $\beta_l = 0 \Rightarrow \gamma_l \geq 0$ , atunci  $f$  este def. pe o semidreaptă de forma  $(-\infty, a)$ ; dacă  $\alpha_j = \beta_j = 0$  și  $\gamma_j \geq 0$  pentru orice  $j = 1, 2, \dots, m$ , atunci  $f$

este def. pe  $R$  etc.; 2° Se observă că  $f$  poate avea limită finită la  $+\infty$  doar dacă  $\alpha_j \geq 0$  pentru orice  $j = 1, 2, \dots, m$  și  $\alpha_j > 0$  pentru cel puțin un  $i$  presupunând în plus:  $\alpha_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_i \geq 0$  și  $(\alpha'_i = \beta'_i = 0) \Rightarrow (\gamma'_i \geq 0)$ ; anume, scriind  $f(x) = x \left( \sum_{k=1}^m \sqrt{\alpha_k + \frac{\beta_k}{x} + \frac{\gamma_k}{x^2}} - \lambda - \frac{\mu}{x} \right)$  rezultă că dacă  $\lambda \neq \sum \sqrt{\alpha_k}$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ ; dacă însă  $\lambda = \sum \sqrt{\alpha_k}$ ,

rezultă:  $f(x) = \sum (\sqrt{\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k} - x \sqrt{\alpha_k}) - \mu = \sum \frac{\beta_k x + \gamma_k}{x (\sqrt{\alpha_k + \frac{\beta_k}{x^2} + \frac{\gamma_k}{x^2}} + \sqrt{\alpha_k})} - \mu$ ,

deci:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2} \sum \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k}} - \mu$ ; condiția din problemă este deci îndeplinită, dacă

$\lambda = \sum \sqrt{\alpha_k}$  și  $\mu = \frac{1}{2} \sum \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k}}$ .

16) a)  $\infty$ ; b) 0; c) 0; d) se observă că  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < \frac{2 \cdot 1,5}{\pi} < 1$ , limita este  $\infty$ ; e)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ; f) 1; g)  $\infty$ ; h) 0.

17) a) Notind  $2x - 1 = y$ , rezultă că dacă  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  (și  $x \neq \frac{1}{2}$ ), atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ ); aplicind teorema de trecere la limită în funcții compuse, rezultă:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(2x-1)}{10x-5} = \frac{1}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{5}$ ;

b) se amplifică cu  $\frac{1}{x}$ ; limita este  $\frac{7}{3}$ ; c)  $\frac{\alpha}{\beta}$ ; d)  $\frac{\alpha}{\beta}$ ;

e) se scrie  $\frac{\sin^2 \alpha x}{\beta x^2} = \frac{1}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ ; limita este  $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ; f)  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ ; limita este  $\frac{1}{2}$ ;

g)  $\frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} = \frac{-2 \sin 2x \sin x}{x^2}$ ; limita este  $-4$ ; h)  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ ; i) se înlocuiește  $\tan x$

cu  $\frac{\sin x}{\cos x}$ ; limita este  $\frac{1}{2}$ ; j) se scrie  $\frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin 2x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin 2x} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)$ ; limita este  $\frac{3}{4}$ ; k)  $-\frac{1}{4}$ ; l) 1; m) după amplifi-

care cu conjugata numărătorului se obține  $\frac{1}{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x}} \cdot \frac{x \sin x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2}}$ ;

se amplifică apoi fracția a doua cu  $\frac{1}{x^2}$ ; limita este 6; n)  $-\frac{1}{3}$ ; p)  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2m}$ ; q) se notează

$x - \pi = y$ ; limita este  $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$ ; r)  $\frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} =$

$= \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right)} = \sqrt{2} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)}$ ;

limita este  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; s)  $\frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cos 2x}{\cos 2x (\sqrt{2} \cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2} \cos x + 1}$ ; limita este  $\frac{1}{4}$ .

18) a) Notind  $\arcsin(1-2x) = y$ , rezultă că dacă  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  (și  $x \neq \frac{1}{2}$ ) atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ );

limita căutată este  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{2 - \sin y} \cdot \frac{y}{\sin y} = -\frac{1}{2}$ ; b) notind  $\arcsin x - \frac{\pi}{2} = y$ , rezultă că

dacă  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ), atunci  $y \rightarrow 0$  ( $y < 0$ ); limita este  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{y} \cdot \frac{y^2}{2 \sin^2 \frac{y}{2}} = +\infty$ ;

c) dacă  $\varphi = 0$ , limita este, evident, 1; fie  $\varphi \neq 0$ ; se observă:  $\sin \varphi = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = 2^2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \sin \frac{\varphi}{2^2}$ ; prin inducție completă rezultă  $\sin \varphi = 2^n \cos \frac{\varphi}{2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} \sin \frac{\varphi}{2^n}$ ;

deci  $\cos \frac{\varphi}{2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{2^n \sin \frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2^n}}$ ; notind  $x_n = \frac{\varphi}{2^n}$  rezultă  $x_n \rightarrow 0$ ,

deci  $\lim_n \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{x_n}{\sin x_n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ ; d) se scrie  $\frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})} = \frac{\ln e^{\alpha x} (e^{-\alpha x} + 1)}{\ln e^{\beta x} (e^{-\beta x} + 1)} = \frac{\alpha x + \ln(e^{-\alpha x} + 1)}{\beta x + \ln(e^{-\beta x} + 1)} = \frac{\alpha + \frac{\ln(e^{-\alpha x} + 1)}{x}}{\beta + \frac{\ln(e^{-\beta x} + 1)}{x}}$  (pentru  $x \neq 0$ ); dar:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^{-\alpha x} + 1) =$

$= \lim_{y \rightarrow 1} \ln y = 0$ ; la fel se arată că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^{-\beta x} + 1) = 0$ ; limita căutată este  $\frac{\alpha}{\beta}$ ; ca exercițiu suplimentar se poate examina problema limitei la  $+\infty$  a funcției propuse înlăturind restricția  $\alpha > 0, \beta > 0$  (de exemplu, dacă  $\alpha < 0$  și  $\beta \geq 0$  limita este 0 etc.).

19) a)  $\left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \left( 1 + \frac{x+1}{x-1} - 1 \right)^x = \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$  etc.; limita este  $e^2$ ; b)  $e$ ; c)  $e^3$ ; d)  $e$ ;

e)  $\sqrt{e}$ ; f)  $e \sqrt{e}$ ; g) 1; h)  $e^{-1}$ ; i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{\alpha}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (\cos y)^{\frac{\alpha}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} [1 + (\cos y - 1)]^{\frac{\alpha}{y}}$  etc.;

limita căutată este 1; j) se procedează ca la exercițiul anterior; limita este  $e^{\alpha \beta}$ .

20) a) Notind  $e^{2x} - 1 = y$ , rezultă că dacă  $x \rightarrow 0$  (și  $x \neq 0$ ), atunci  $y \rightarrow 0$  (și  $y \neq 0$ ); aplicind de două ori teorema de trecere la limită în funcții compuse, se obține:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} =$

$= \frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y) \cdot \frac{1}{y}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{z \rightarrow e} \ln z} = \frac{2}{3}$ ; b) se scrie  $\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} =$

$= \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ; al doilea termen al sumei are în  $x = 0$  limita  $\frac{1}{2}$ ; pentru calculul limitei primului termen se notează  $e^{x^2} - 1 = y$  și se procedează în continuare ca în exercițiul anterior, obținind limita 1; limita căutată este deci  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .



## Capitolul IV (Funcții continue)

1) a) Pentru oricare  $x_0 \neq -1$  avem:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - \sin x}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - \sin x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} (x + 1)} = \dots = f(x_0)$ ; funcția

este continuă pe  $R \setminus \{-1\}$ ; b) funcția este continuă pe  $R \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$ ; c) funcția este continuă pe

$R \setminus \{0\}$ ; d) funcția este continuă pe  $\left[(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)\right] \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})\right\}$ .

2) a) Pentru  $x \in [0, 5]$ ,  $x \neq 2$  continuitatea rezultă imediat; în  $x = 2$  funcția este, de asemenea continuă deoarece  $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 4$ ; b) funcția este continuă pe  $R$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$ ; c) funcția este continuă pe  $[0, +\infty) \setminus \{1\}$ ;  $f(1-0) = 3$  și  $f(1+0) = 1$ ;

d) funcția este continuă pe  $[-2, +\infty) \setminus \{2\}$ ;  $f(2-0) = f(2+0) = 9 \neq f(2) = 1$ ; e) funcția este continuă pe  $R \setminus \{-1\}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ; f) funcția este continuă pe  $R \setminus \{0\}$ ;  $f(0-0) = -1$ ,  $f(0+0) = 1$ .

3) a) Oricare ar fi  $\alpha \in R$ , funcția este evident continuă în orice punct  $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$ ;  $f(1-0) = 2$ ,  $f(1+0) = 3\alpha + 3$ ,  $f(1) = 2$ ; rezultă că  $f$  este continuă și în  $x = 1$  dacă și numai dacă  $\alpha = -\frac{1}{3}$ ; b)  $f(2-0) = f(2+0) = 4$ ; deci dacă  $\alpha = 4$  funcția este continuă pe  $R$ , iar dacă

$\alpha \neq 4$  funcția este continuă pe  $R \setminus \{2\}$ ; c) funcția este continuă pe  $R \setminus \{1\}$ ;  $f(1-0) = 1$ ,  $f(1+0) = 0$ , deci oricare ar fi  $\alpha$  funcția este discontinuă în  $x = 1$ ; d)  $f(0-0) = 1$ ,  $f(0+0) = \alpha$ ,  $f(0) = \alpha$ ; rezultă că dacă  $\alpha = 1$  funcția este continuă pe  $R$ , iar dacă  $\alpha \neq 1$  funcția este continuă pe  $R \setminus \{0\}$ ; e) funcția este evident continuă pe  $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \{0\}$ ;  $f(0) = \alpha$

și  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2}$ , deci funcția este continuă și în  $x = 0$  dacă și numai dacă  $\alpha = \sqrt{2}$ ; f) funcția

este discontinuă în orice punct al dreptei reale; într-adevăr, fie  $x_0 \in Q$ , avem, de exemplu,  $x_n = x_0 + \frac{1}{n\sqrt{2}} \rightarrow x_0$  și  $x_n \in R \setminus Q$ ; rezultă  $f(x_n) = 0$  pentru orice  $n$ , deci  $f(x_n) = 0 \neq 1 = f(x_0)$ ; dacă  $x_0 \in R \setminus Q$ , fie  $(x'_n)$  șirul fracțiilor zecimale care aproximează (de exemplu, prin lipsă) numărul  $x'_0$ ; avem:  $x'_n \rightarrow x'_0$  și  $x'_n \in Q$ , deci  $f(x'_n) = 1$  pentru orice  $n$  deci  $f(x'_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(x'_0)$ .

4) a) Dacă  $0 \leq x < 1$ , atunci  $\lim_n x^n = 0$ ; dacă  $x = 1$  atunci  $x^n = 1$  pentru orice  $n$ , deci

$\lim_n x^n = 1$ ; rezultă:  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq x < 1; \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$

funcția este discontinuă în  $x = 1$ ; b)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

funcția este discontinuă în  $x = 1$ ; c) dacă  $x < 0$  atunci  $\lim_n e^{nx} = e^{-\infty} = 0$ ; rezultă:  $f(x) = x$ , pentru orice  $x \leq 0$ ; funcția este continuă pe  $(-\infty, 0]$ .

5) a) Notînd  $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , rezultă  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -1$ ; deoarece funcția  $f(u) = \arcsin u$  este

continuă în  $u = -1$ , rezultă  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \arcsin \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1+x} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ;

b)  $\ln 2 - 1$ ; c)  $\frac{\pi}{3}$ ; d)  $\ln \frac{3}{2}$ .

6) a) Funcția este continuă pe  $R$ ; rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$  sînt  $-3, -1, 1, 3$ ;  $f(x) > 0$  pe  $(-\infty, -3)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(-3, -1)$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(-1, 1)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(1, 3)$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(3, +\infty)$ ; b)  $f$  este cont. pe  $R$ ;  $f(x) < 0$  pe  $(-\infty, -2)$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(-2, -\frac{1}{2})$ ,  $f(x) < 0$  pe

$(-\frac{1}{2}, 1)$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(1, +\infty)$ ; c) se procedează ca în § 18, nr. 1, exemplul 2) după

corolarul 2;  $f(x) > 0$  pe  $(-\infty, -3)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(-3, -1)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(-1, 0)$ ,  $f(x) > 0$

pe  $(0, 2)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(2, +\infty)$ ; d)  $f(x) < 0$  pe  $[0, \frac{\pi}{4})$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ ,  $f(x) < 0$

pe  $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$ ; e)  $f(x) < 0$  pe  $[0, \frac{\pi}{6})$ ,  $f(x) > 0$  pe  $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$ ,  $f(x) > 0$

pe  $(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$ ; f)  $f(x) < 0$  pe  $(-\infty, \ln \frac{5}{2})$  și  $f(x) > 0$  pe

$(\ln \frac{5}{2}, +\infty)$ ; g) ecuația  $f(x) = 0$  are soluția  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ; se observă ușor că  $f(\frac{1}{e}) < 0$ , și

$f(1) > 0$ , deci  $f(x) < 0$  pe  $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$  și  $f(x) > 0$  pe  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ ; h) ecuația  $f(x) = 0$  are

soluțiile  $x = e$  și  $x = e^2$ ; se observă ușor că  $f(1) > 0$ ,  $f(e^2) < 0$  și  $f(e^3) > 0$ , deci  $f(x) > 0$  pe  $(0, e)$ ,  $f(x) < 0$  pe  $(e, e^2)$  și  $f(x) > 0$  pe  $(e^2, +\infty)$ .

## Capitolul V (derivate)

1) a)  $-k$ : se cercetează dacă raportul  $R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  are limită finită în punctul  $x_0$ ;

a)  $f'(1) = 3$ ; b)  $f'(3) = 78$ ; c)  $f'(-2) = 2$ ; d)  $f'(1) = \frac{1}{2}$ ; e)  $f'(0) = (0)$ ; f)  $f'(0) = 2$ ; g) funcția

este continuă în  $x = 1$ , dar nu este derivabilă în acest punct, deoarece  $R(1-0) = 3$  și  $R(1+0) = 2$ ; h) funcția este continuă în  $x = 0$ , dar nu este derivabilă în acest punct

deoarece  $R(x) = \sin \frac{1}{x}$  nu are limită în  $0$ ; i)  $R(0+0) = 2$ ;  $R(0-0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} =$

$= 2 \lim_{x \nearrow 0} \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = 2$ ; deci  $f'(0) = 2$ ; j)  $f'(2) = \frac{9}{8}$ ;

k)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \cos^3 x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; \end{cases}$   $f$  este continuă în  $x = \frac{\pi}{2}$ , dar nu este derivabilă în

acest punct, deoarece  $R\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = -1$ ,

$R\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 0$ ; l)  $f(x) = \begin{cases} x - x^3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1); \\ 0, & \text{dacă } x = 0, x = \pm 1; \\ x^3 - x, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty); \end{cases}$

$f$  este continuă în  $x = -1$ , dar nu este derivabilă în acest punct, deoarece  $R(-1-0) = -2$ ,

$R(-1+0) = 2$ ; m)  $R(1+0) = \lim_{x \searrow 1} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \ln(1 + (x^2 - 2x + 1))^{\frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}} =$

$= \lim_{x \searrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0$ ; pentru calculul lui  $R(1-0)$  se notează  $2^{\frac{1}{x-1}} = y$  etc. (v. exerc. 20,

cap III); se obține  $R(1-0) = 0$ ; deci  $f'(1) = 0$ .

2) Se ține seama de interpretarea geometrică a derivatei (derivata se calculează aplicînd direct definiția);  $\alpha = -3$ .

$$3) \alpha = -\frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

4) Se pun condițiile ca  $G_f$  și  $G_g$  să se intersecteze pentru  $x = 1$  și ca tangentele în punctul comun să aibă același coeficient unghiular; se obține  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -5$ .

5) Coordonatele punctului  $M'$  se obțin rezolvind sistemul format din ecuațiile  $y = \frac{1-x}{x^2}$  și

$$y = (\lambda - 2) \frac{x}{\lambda^3} + \frac{3-2\lambda}{\lambda^2}; \text{ rezultă } (\lambda - 2)x^3 + \lambda(3-2\lambda)x^2 + \lambda^3x - \lambda^3 = 0; \text{ deoarece această}$$

$$\text{ecuație are o rădăcină } x_1 = \lambda \text{ (care corespunde punctului } M), \text{ se obțin imediat celelalte}$$

$$\text{două rădăcini: } x_2 = \lambda \text{ și } x_3 = \frac{\lambda}{\lambda - 2} \left[ \text{presupunem } \lambda \neq 2; \text{ dacă } \lambda = 2, \text{ atunci } m = m' = 0 \right]$$

și punctele  $M$  și  $M'$  coincid; tangenta la grafic în  $M\left(2, -\frac{1}{4}\right)$  are ecuația  $y = -\frac{1}{4}$ ;

se obține  $m' = (4 - \lambda) \frac{(\lambda - 2)^2}{\lambda^3}$ ; inegalitatea din enunț are loc pentru  $\lambda \in (1, 5) \setminus \{2\}$ .

$$6) a) f'(x) = 6x^2 - 14x + 1; \quad b) f'(x) = 5x^4 - 96x^3 + 16; \quad c) f'(x) = 3x^3 - 15x^2 + x;$$

$$d) f'(x) = \frac{6}{7}x^3 - 15x^4 + \frac{4}{3}x; \quad e) f'(x) = 7\cos x - 6x^2; \quad f) f'(x) = 20x^3 + 2\sin x + x +$$

$$+ 3\cos x; \quad g) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x^3 + \frac{3}{x}; \quad h) f'(x) = \ln x + \frac{3}{5\sqrt{x^4}}; \quad i) f'(x) = -2(1+x).$$

$$\sin x - x^2 \cos x; \quad j) f'(x) = 5\cos 2x; \quad k) f'(x) = x^2 \cos x; \quad l) f'(x) = (3x^2 - 2x - 2)\sin x +$$

$$+ x(x^2 - x - 2)\cos x; \quad m) f'(x) = 9(2x + 1)x^2 + x + 1^8; \quad n) f'(x) = 2(3x - 2)^{731}(5505x^2 -$$

$$- 10x + 1098); \quad p) f'(x) = -7\cos^6 x \sin x; \quad q) f'(x) = \sin^3 x; \quad r) f'(x) = \cos^3 x; \quad s) f'(x) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin^2 2x - \sin^4 x; \quad t) f'(x) = (m \cos^2 x - n \sin^2 x) \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x; \quad u) f'(x) =$$

$$= 3(2 - x^2)^{431}[(2 - x^2)\sin 2x - 864x \sin^2 x]; \quad v) f'(x) = \sin^4 x \cos^4 x.$$

$$7) a) f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}; \quad b) f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}; \quad c) f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}; \quad d) f'(x) = \frac{5-12x}{x^6};$$

$$e) f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}; \quad f) f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}; \quad g) f'(x) = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}; \quad h) f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x};$$

$$i) f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}; \quad j) f'(x) = \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}; \quad k) f'(x) = \frac{1}{\cos^4 x}; \quad l) f'(x) = \frac{1}{\sin^4 x};$$

$$m) f'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}; \quad n) f'(x) = \frac{1}{\cos^8 x}; \quad p) f'(x) = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1 + \sin 2x}; \quad q) f'(x) = \frac{8}{\cos^5 x} -$$

$$-\frac{3}{\cos x}.$$

$$8) a) f'(x) = \sin^2 x; \quad b) f'(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right); \quad c) f'(x) = \frac{2(1+2\sin 2x)}{\cos^2 2x}; \quad d) f'(x) =$$

$$= \frac{7}{8\sqrt{x}}; \quad e) f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}; \quad f) f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad g) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \quad h) f'(x) =$$

$$= \frac{2\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}; \quad i) f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3(1+x^2)}}; \quad j) f'(x) = \frac{a^4-a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$k) f'(x) = 2\cos^4(2x-1) - \frac{3}{2}\sin^2(4x-2); \quad l) f'(x) = 12(2x+1)(x^2+x+1)^3\sin 2[(x^2+$$

$$+ x+1)^4]; \quad m) f'(x) = \cos x \cdot \cos(\sin x); \quad n) f'(x) = \frac{-2x \sin(x^2)}{\cos^2[\cos(x^2)]}; \quad p) f'(x) =$$

$$= -\frac{2\sin x \cdot \sin(\cos x)}{\cos^3(\cos x)}; \quad q) f'(x) = -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x).$$

$$9) a) f'(x) = \frac{3}{3x-1}; \quad b) \text{ pentru a ușura calculul derivatelor unora dintre funcțiile care urmează,}$$

sînt utile anumite observații; fie  $\varphi: E \rightarrow R$  o funcție derivabilă pe  $E$ ; dacă  $E' = E \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$ , atunci funcția  $\Phi: E' \rightarrow R$  definită prin egalitatea  $\Phi(x) = 2m \ln(\varphi(x))$ ,  $m \in N$ ,

este derivabilă pe  $E'$ ; fie  $E'' = E \setminus \{x | \varphi(x) = 0\}$ ; funcția  $\tilde{\Phi}: E'' \rightarrow R$  definită prin egalitatea  $\tilde{\Phi}(x) = \ln(\varphi(x))^{2m}$  este derivabilă pe  $E''$ ; este evident că  $E' \subset E''$  și că  $\tilde{\Phi}' = \frac{(\varphi^{2m})'}{\varphi^{2m}} =$

$$= \frac{2m\varphi^{2m-1}\varphi'}{\varphi^{2m}} = \frac{2m\varphi'}{\varphi} \text{ este prelungirea lui } \Phi' \text{ la mulțimea } E''; \text{ o observație analogă se poate}$$

face și, de exemplu, pentru perechea de funcții  $\Phi(x) = \ln \varphi_1(x) - \ln \varphi_2(x)$ ,  $\tilde{\Phi}(x) = \ln \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ ,

anume, notînd cu  $E'$  și  $E''$  domeniile maxime de definiție ale funcțiilor  $\Phi$ , respectiv  $\tilde{\Phi}$ , se observă

$$\text{ușor că } E' \subset E'' \text{ și că } \tilde{\Phi}' = \frac{\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'}{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}} = \frac{\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2} \text{ este prelungirea lui } \Phi' \text{ la mulțimea } E'';$$

$$\text{aceste observații justifică aplicarea unor proprietăți ale logaritmulor pentru a ușura calculul}$$

anunitor derivate; la exerc. b) se derivează funcția  $2 \ln(x^2 - 5x + 4)$ ; se obține  $f'(x) =$

$$= \frac{2(2x-5)}{x^2-5x+4} \text{ pe } R \setminus \{1, 4\}; \quad c) f'(x) = \frac{12x^2}{(x^3-1)\ln 10}; \quad d) f'(x) = \frac{2}{x^2-1}; \quad e) f'(x) =$$

$$= \frac{2x}{x^4-5x^2+6}; \quad f) f'(x) = \operatorname{ctg} x; \quad g) f'(x) = \frac{2}{\sin 2x}; \quad h) f'(x) = \frac{1}{x \ln x}; \quad i) f'(x) =$$

$$= -r \operatorname{tg} x; \quad j) f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}; \quad k) f'(x) = \operatorname{tg}^3 x; \quad l) f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x}; \quad m) f'(x) =$$

$$= \frac{1}{x(1+x^2)}; \quad n) f'(x) = \frac{30}{100-9x^2}; \quad p) f'(x) = -\sec x; \quad q) f'(x) = \frac{1}{\cos 2x};$$

$$10) a) f'(x) = 2e^x \sin x; \quad b) f'(x) = e^{3x}(5 \sin 3x + 3 \cos 3x + 5); \quad c) f'(x) = 13e^{2x} \cos 3x;$$

$$d) f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}; \quad e) f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}; \quad f) f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}; \quad g) f'(x) = -2xe^{-x^2}; \quad h) f'(x) =$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}; \quad i) f'(x) = rx^{r-1}(a)^{x^r} \ln a; \quad j) f'(x) = 6(x+1)a^{3x^2+6x+1} \ln a; \quad k) f'(x) =$$

$$= \frac{x+1}{-2a^{\frac{x-1}{2}} \ln a}; \quad l) f'(x) = x \cdot 2^x; \quad m) f'(x) = \sqrt{2x} \sqrt[3]{2-1} + \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 10x^4; \quad n) f'(x) = \frac{1}{2}xe^{\sqrt{x}};$$

$$p) f'(x) = \frac{e^x(x^4+2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^4+x^2+1}}; \quad q) f'(x) = (1-\ln x)x^{\frac{1}{x}-2}; \quad r) f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x +$$

$$+ 2)x^{\frac{2\sqrt{x}-1}{2}}; \quad s) f'(x) = (\sin x + x \cos x \cdot \ln x)x^{\sin x-1}; \quad t) f'(x) = 2\left(\frac{1+x^2}{\sin 2x} + x \ln \operatorname{tg} x\right) \cdot (\operatorname{tg} x)^{1+x^2}.$$

$$11) a) f'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}; \quad f'(2) = f'(-2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad b) f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad c) f'(x) =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}; \quad d) 1; \quad e) f'(x) = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)\sqrt{2+2x^2}}; \quad f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{3}}; \quad f) f'(x) =$$

$$= \frac{2x}{|x|(1+x^2)}; \quad f'(3) = \frac{1}{5}; \quad f'(-3) = -\frac{1}{5}; \quad g) f'(x) = \frac{1}{a^2+x^2}; \quad h) f'(x) = -\frac{1}{1+x^2};$$



$$\text{i) } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}; \text{ j) } f'(x) = \frac{1+x^4}{1+x^6}; \text{ k) } f'(x) = e^{(1+x^2)\arctg x}(1+2x\arctg x); \text{ l) } f'(x) = \frac{\cos x - 2}{2\cos x}; \text{ m) } f'(x) = \frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x}.$$

$$12) \text{ a) } \frac{1}{12}; \text{ b) } \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi}{2}; \text{ c) } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}.$$

$$14) \text{ a) } -\frac{1}{120}; \text{ b) } \frac{1}{10}; \text{ c) } \frac{1}{100}; \text{ d) } \frac{2}{225}; \text{ e) } \frac{1}{3000}.$$

$$15) v = 28 \text{ m/s}; a = 10 \text{ m/s}^2; \frac{mv^2}{2} = 1176 \text{ kgm}.$$

$$16) \alpha = \frac{3}{2}; \text{ b) } = -2.$$

$$17) \alpha = \frac{25}{8}; \text{ b) } = 15.$$

18) Condițiile din problemă sînt:  $s(0) = 10$ ,  $s(2) = 6$ ,  $v(2) = 6$ ; se obține:  $a = 4$ ,  $b = 10$ ,  $c = 10$ . În problemele 19) — 22) se ține seama că, în vid, legea de mișcare a corpurilor ce cad liber este  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ , iar legea de mișcare a corpurilor aruncate vertical în sus este  $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ ; unde  $g$  (acelerația gravitațională)  $\approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , iar  $v_0$  este viteza cu care este aruncat corpul.

$$19) t \approx 4, ; v \approx 48 \text{ m/s}.$$

$$20) h \approx 122,5 \text{ m}; v \approx 49 \text{ m/s}.$$

$$21) \text{ La momentul } t_1 \text{ în care începe căderea, avem } v(t_1) = 0; \text{ se obține: } t_1 \approx 10,2 \text{ s}; h \approx 510,2 \text{ m}; t_2 \approx 10,2 \text{ s}; v = 100 \text{ m/s}.$$

$$22) \text{ Condițiile din problemă conduc la sistemul de ecuații: } -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t = 150, -gt + v_0 = 0; \text{ se obține } t = 5,5 \text{ s}, v_0 \approx 54,22 \text{ m/s}.$$

$$23) Q(t) = 1,118 \ln(1+t), I(t) = \frac{1,118}{1+t}; I(0) = 1,118 \text{ amperi}; I(2) = 0,373 \text{ amperi}.$$

$$24) V, R, I \text{ fiind, respectiv, tensiunea, rezistența și intensitatea, se știe că } V = R \cdot I \text{ (legea lui Ohm); } I(t) = 6\pi \cos 2\pi t; \text{ se obține } V_{\max} \text{ pentru } \cos 2\pi t = 1 \text{ (adică pentru orice } t \text{ întreg pozitiv: } V_{\max} = 600\pi \text{ volți)}.$$

$$25) \rho = 13 \text{ g/cm}.$$

## Capitolul VI (Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor)

1) Se ține seama de faptul că între două rădăcini ale funcției se află cel puțin o rădăcină a derivatei, de gradele polinoamelor  $f_1$  și  $f_2$  și de teorema asupra numărului rădăcinilor unei ecuații algebrice de grad  $n$ ; a)  $(-5, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 3)$ ,  $(3, 7)$ ; b)  $(-3, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, \frac{2}{5})$ ,  $(\frac{2}{5}, 4)$ .

2)  $f$  este continuă pe  $[0, \frac{\pi}{2}]$  și este derivabilă pe  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ; în punctul  $x = \frac{\pi}{4}$  funcția nu este derivabilă, deoarece  $f'_s(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  și  $f'_d(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ; rezultă că a doua condiție din teor. lui Rolle nu este verificată; se observă ușor că nu există  $c \in (0, \frac{\pi}{2})$  astfel încît  $f'(c) = 0$ .

3) a)  $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 6 = f'(c)$ , unde  $c \in (1, 2)$ ; într-adevăr,  $f'(x) = 4x$ , iar ecuația  $4x = 6$  are soluția  $x = \frac{3}{2} \in (1, 2)$ ; b) punctul corespunzător este  $-5 + \sqrt{24}$ ; c) se obțin punctele

$\pm \sqrt{\frac{\ln 9 - 2}{\ln 9}}$ ; se verifică ușor că ambele puncte aparțin intervalului  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  deoarece inegalitatea  $\sqrt{\frac{\ln 9 - 2}{\ln 9}} < \frac{1}{2}$  este echivalentă cu inegalitatea  $\ln 3 < \frac{4}{3}$  care rezultă din

șirul de inegalități (obținute minorînd convenabil numărul  $e^{\frac{5}{4}}$ ):  $3 = 2,5 \cdot 1,2 < 2,5 \sqrt{1,5} < 2,5 \sqrt[4]{2,5} < 2,5 \sqrt[4]{e} < e \sqrt[4]{e} = \sqrt[4]{e^5}$  și observînd că  $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ ; d) se obțin punctele  $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi\sqrt{2}}$ ; ambele puncte aparțin intervalului  $(1, 2)$ ; într-adevăr, notînd  $\alpha = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi\sqrt{2}}$ , inegalitățile  $\frac{3}{2} + \alpha > 1$  și  $\frac{3}{2} - \alpha < 2$  sînt banale; se demonstrează apoi inegalitățile

$\frac{3}{2} + \alpha < 2$  și  $\frac{3}{2} - \alpha > 1$ ; pentru aceasta se observă că  $\alpha < \frac{1}{2}$ ; într-adevăr:  $\sqrt{\pi^2 - 8} < \sqrt{(3,2)^2 - 8} < \sqrt{12 - 8} = 2$ , deci:  $\alpha < \frac{2}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} < \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$ ; rezultă  $\frac{3}{2} + \alpha < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$  și  $\frac{3}{2} - \alpha > \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ; e)  $f$  este continuă pe  $[1, 3]$  și derivabilă pe  $(1, 3)$  (de fapt și în  $x = 1$  și  $x = 3$ ); studiul continuității și derivabilității în  $x = 2$  se întreprinde

$$\text{pornind de la def. (se obține: } f'_s(2) = f'_d(2) = 1); f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{x}{2}, & \text{pentru } 2 < x \leq 3; \end{cases} \text{ în } c = \frac{9}{8},$$

$$\text{avem } \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c).$$

4) a) Se verifică ușor condițiile din teorema lui Cauchy;  $f$  și  $g$  sînt continue pe  $[0, 1]$  și sînt derivabile pe  $(0, 1)$  (de fapt și în  $x = 0$  și  $x = 1$ );  $g'(x) = 2 \neq 0$ ;  $\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{e - 1}{2} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ; se obține  $c = \ln(e - 1) \in (0, 1)$ ; b) se obține  $c = \sqrt{\frac{2}{\ln 2}}$  și se verifică ușor că acest punct aparține intervalului  $(\sqrt{2}, 2)$ ; într-adevăr:  $\sqrt{\ln 2} < \sqrt{\ln e} = 1$ , deci  $1 < \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$ ,

deci  $\sqrt[n]{2} < \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{\ln 2}}$ ; apoi, deoarece  $e < \frac{1}{2} = 2^2$ , rezultă  $\ln e < \ln 2$ , deci  $\frac{1}{\ln 2} < 2$ , deci  $\frac{2}{\ln 2} < 4$ , deci  $\sqrt[n]{\frac{2}{\ln 2}} < 2$ ; c)  $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ; d) pentru  $f$  se întreprinde studiul cont. și derivabil în  $x = 1$  pornind de la def.;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, & \text{pentru } -2 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{4}, & \text{pentru } 1 < x \leq 5; \end{cases} \quad \text{se obține } f'(c) = \frac{2}{7} \text{ pentru } c = \frac{1}{16} \in (-2, 1).$$

5)  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = nc^{n-1}$ , unde  $a < c < b$ , deci  $na^{n-1} < nc^{n-1} < nb^{n-1}$ , înlocuind în inegalitățile anterioare pe  $nc^{n-1}$  cu  $\frac{b^n - a^n}{b - a}$ , rezultă inegalitățile cerute.

6) a) Se aplică formula lui Lagrange funcției  $f(x) = \ln(1+x)$  în intervalul  $[0, x]$ , ( $x > 0$ ); b) se aplică formula lui Lagrange funcției  $f(x) = e^x$  în intervalul  $[1, x]$ , ( $x > 1$ ); c) se aplică formula lui Lagrange funcției  $f(x) = e^x$  succesiv în intervalele  $[0, x]$  ( $x > 0$ ) și  $[x, 0]$ , ( $x < 0$ ); d) se aplică formula lui Lagrange funcției  $f(x) = \lg x$  în intervalul  $[a, b]$ .

7) a) pentru  $x \neq 0$ , avem  $f'(x) = g'(x)$ ; deci  $f(x) - g(x) = C_1$  pe  $(-\infty, 0)$  și  $f(x) - g(x) = C_2$  pe  $(0, +\infty)$ ; luând în cele două egalități anterioare  $x = -1$ , respectiv  $x = 1$  se obține  $C_1 = -\frac{\pi}{2}$  și  $C_2 = \frac{\pi}{2}$ ; b) pentru  $x \neq \frac{1}{2}$ , avem  $f'(x) = g'(x)$ ;  $f(x) - g(x) = C_1$  pe  $(-\infty, \frac{1}{2})$  și  $f(x) - g(x) = C_2$  pe  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ; luând  $x = 0$ , se obține  $C_1 = -\arctg 2$ ; pentru  $x = 1$  se obține  $C_2 = \arctg 1 - \arctg \left( \lg \left( \frac{2}{4} + \arctg 2 \right) \right) = \frac{\pi}{4} - \left( \frac{\pi}{4} + \arctg 2 \right) = -\arctg 2$ ;

c) se arată mai întâi că deoarece  $(2x^2 - 1)^2 \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem:  $|x| \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq 2 \Leftrightarrow 2|x| \sqrt{1-x^2} \leq 1$ ;  $f'(x) = g'(x)$  dacă  $(1 - 2x^2) = |1 - 2x^2|$ ; pe  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , deci  $f(x) - g(x) = C$  pe  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; luând  $x = 0$  se obține  $C = 0$ ; d) se arată mai întâi că  $|3x - 4x^3| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$ ;  $f'(x) = g'(x)$  pe  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ;  $C = 0$ ; e) pentru  $x \in (-1, 1) \setminus \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$  avem  $f'(x) = g'(x)$ ; deci  $f(x) - g(x) = C_1$  pe  $\left(-1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$  și  $f(x) - g(x) = C_2$  pe  $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ ; luând în cele două egalități anterioare  $x = 0$ , dacă  $(1 - 4x^2) =$

$|1 - 4x^2|$  respectiv  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , se obține  $C_1 = \arctg 2$  și  $C_2 = \arctg \frac{\sqrt{3} + 2}{1 - 2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$ .

3) Aplicând formula lui Lagrange, se obține pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ :  $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\eta}$ , unde  $n < \eta < n+1$ ; deci  $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , deci  $\frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) < 0$ , deci  $a_{n+1} - a_n < 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; rezultă că șirul  $(a_n)$  este

monoton descrescător; scriind apoi dubla inegalitate  $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$  pentru

$n = 1, 2, \dots, p$ , obținem  $\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$ , ...,  $\frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}$ ; adunând, membru cu membru, rezultă  $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p+1} < \ln(p+1) <$

$< 1 + \dots + \frac{1}{p}$ ; din prima inegalitate rezultă  $a_{p+1} - 1 < 0$ , deci  $a_{p+1} < 1$  pentru orice

$p \in \mathbb{N}$ ; se observă și:  $a_1 = 1$ ; majorând apoi suma  $1 + \dots + \frac{1}{p}$  cu  $1 + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$ , rezultă  $a_{p+1} > 0$  pentru orice  $p \in \mathbb{N}$ ; șirul  $(a_n)$  este deci mărginit; rezultă (v. § 7, nr. 7) că șirul  $(a_n)$  este convergent; deoarece  $0 < a_n \leq 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , rezultă  $0 \leq \lim a_n \leq 1$ .

9) Verificăm propoziția pentru  $n = 1$ ; într-adevăr, dacă  $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$ ; presupunând propoziția adevărată pentru  $n$  să o demonstrăm

pentru  $n+1$ ; dacă  $f$  este de  $n+1$  ori derivabilă pe  $I$  și  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) =$   
 $= f^{(n+1)}(x_0) = 0$ , rezultă că  $f'$  este de  $n$  ori derivabilă pe  $I$  și este nulă în  $x_0$  împreună cu

primele sale  $n$  derivate; conform ipotezei de inducție rezultă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ ; fie un

șir  $x_p \rightarrow x_0$ ,  $x_p \in I$ ,  $x_0 \neq x_0$ ; aplicând pentru fiecare  $p \in \mathbb{N}$  formula lui Lagrange pe intervalul de extremități  $x_p, x_0$ , obținem  $f(x_p) - f(x_0) = (x_p - x_0) f'(c_p)$ , unde  $c_p$  este cuprins între

$x_0$  și  $x_p$ ; deci, deoarece  $f(x_0) = 0$ , rezultă  $f(x_p) = (x_p - x_0) f'(c_p)$ , deci  $\frac{f(x_p)}{(x_p - x_0)^{n+1}} =$   
 $= \frac{f'(c_p)}{(x_p - x_0)^n}$ ; avem:  $c_p \in I$ ,  $c_p \neq x_0$  și, deoarece  $|c_p - x_0| < |x_p - x_0|$ ,  $c_p \rightarrow x_0$ ; de aseme-

nea,  $\left| \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \right| = \left| \frac{f'(c_p)}{(x_p - x_0)^n} \right| < \left| \frac{f'(c_p)}{(c_p - x_0)^n} \right|$ ; deoarece  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{f'(c_p)}{(c_p - x_0)^n} \right| = 0$ ,

aplicind criteriul majorării pentru șiruri, rezultă  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f(x_p)}{(x_p - x_0)^{n+1}} = 0$ ; deci, deoarece șirul

$\{x_p\}$  a fost ales arbitrar, rezultă:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$ , și propoziția este demonstrată.

10) a) 2; b)  $\frac{x(x-1)}{2}$ ; c)  $\frac{32}{27}$ ; d)  $\frac{3}{4}$ ; e)  $\frac{2}{3}$ ; f)  $\frac{1}{12}$ ; g)  $\frac{1}{2}$ ; h)  $\frac{1}{6}$ ; i)  $\frac{3}{2}$ ; j) 0; k) 0,

dacă  $x \neq \frac{1}{2}$ ; 2; dacă  $x = \frac{1}{2}$ ; l) -2; m)  $-\frac{e}{2}$ ; n) 2.

11) a)  $\frac{1}{3}$ ; b) 1; c) 1; limita la stînga în  $x = 0$  nu are sens; d) dacă  $\alpha = \beta = 0$ , atunci

$\frac{\ln \lg(x^2)}{\ln \lg(x^2)} = \frac{\ln \lg 1}{\ln \lg 1} = 1$  pentru orice  $x > 0$ , deci limita este 1; dacă  $\beta = 0$  și  $\alpha \neq 0$  atunci,

deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \lg(x^2) = -\infty$  și  $\ln \lg 1 > 0$ , limita este  $-\infty$ ; dacă  $\beta \neq 0$  limita este  $\frac{\alpha}{\beta}$ ;

se observă că limita la stînga în  $x = 0$  nu are sens.

12) a) 1; b) 0; limita la stînga în  $x = 0$  nu are sens; c)  $\infty$ ; se observă că limita la stînga în

$x = 1$  se obține aplicînd teoremele asupra operațiilor cu limite:  $l_3 = 0 \cdot 0 = 0$ ; d)  $\frac{1}{2}$ ; e) 0;

limita la stînga în  $x = 1$  nu are sens.

- 13) a) Se observă că în punctul  $x = 1$ , atât pe intervalul  $(0, 1)$  cât și pe intervalul  $(1, +\infty)$ , se prezintă cazul exceptat  $\infty - \infty$ ; într-adevăr:  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$  și  $\lim_{x \searrow 1} \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$ ; limita căutată este  $\frac{5}{6}$  (se recomandă ca și la exercițiile următoare să se examineze, când este cazul, comportarea la stînga și la dreapta punctului specificat); b)  $\frac{\pi}{8}$ ; c)  $-\frac{1}{6}$ ; d) se arată mai întâi că  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$ ; limita căutată este  $\frac{1}{2}$ ; e)  $\frac{1}{2}$ ; f) dacă  $x > 0$  atunci  $e^{2x} - 1 > 0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = +\infty$  etc.; limita căutată este  $\frac{2}{3}$ .
- 14) a) 1; limita la stînga în  $x = 0$  nu are sens; b) 1; limita la stînga în  $x = 0$  nu are sens; c) 1; d)  $e^{\frac{2}{3}}$ ; e)  $\sqrt[3]{e}$ ; f) 1; g) se știe că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$  (v. § 26, nr. 1, exemplul 11); limita căutată este 1; h) 1; i)  $\sqrt[3]{e}$ ; j)  $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ .
- 15) a) Strict descrescătoare pe  $(-\infty, 5]$ , strict crescătoare pe  $(5, \infty)$ ;  $x = 5$ , punct de min.; b) strict crescătoare pe  $(-\infty, -3]$  și pe  $(3, \infty)$  și strict descrescătoare pe  $(-3, 3)$ ;  $x = -3$ , punct de max.;  $x = 3$ , punct de min.; c) strict crescătoare pe  $(-\infty, 6)$ , strict descrescătoare pe  $(6, \infty)$ ;  $x = 6$ , punct de max.; d) strict crescătoare pe  $(-\infty, -1]$  și pe  $(-1, \infty)$ ; e) strict descrescătoare pe  $(-\infty, -\frac{4}{3}]$  și pe  $(-\frac{4}{3}, \infty)$ ; f)  $x = -1$ , punct de min.;  $x = 1$ , punct de max.; g)  $x = \frac{1}{2}$ , punct de min.; h)  $x = -\sqrt{2}$ , punct de max.;  $x = 0$ , punct de min.;  $x = \sqrt{2}$ , punct de max.; i)  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , punct de min.; în  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , funcția și derivata sa nu sînt definite [domeniul maxim de def. al lui  $f$  este intervalul  $[-1, 1]$ , iar cel al lui  $f'$  intervalul  $(-1, 1)$ ].
- 16) a)  $x = \frac{3\pi}{4}$ , punct de min.;  $x = \frac{7\pi}{4}$ , punct de max.; b) strict descrescătoare  $(0, \frac{\pi}{2})$  și pe  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ; c)  $x = \frac{\pi}{2}$ , punct de max.;  $x = \frac{3\pi}{2}$ , punct de min.; d)  $x = \frac{1}{e}$ , punct de min.; e)  $x = e$ , punct de min.; f)  $x = e$ , punct de max.; g)  $x = 0$ , punct de max.; h)  $x = -3$ , punct de min.; i)  $x = 0$ , punct de min.;  $x = 4$ , punct de max.; j) pentru  $n$  par  $x = 0$ , punct de min., iar  $x = n$  punct de max.; pentru  $n$  impar  $x = n$ , punct de max.; k)  $x = \ln 2$ , punct de max.; l) strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ ; m)  $x = \frac{1}{e}$ , punct de min.; n)  $x = e$  punct de max.
- 17) a) Convexă pe  $R$ ; b) concavă pe  $R$ ; c) concavă pe  $(-\infty, -3]$ ; convexă pe  $(-3, \infty)$ ;  $x = -3$ , punct de inf.; d) convexă pe  $R$ ; e) concavă pe  $(-\infty, 0]$ ; convexă pe  $(0, \infty)$ ;  $x = 0$ , punct de inf.; f) convexă pe  $(-\infty, 1]$ ; concavă pe  $(1, \infty)$ ;  $x = 1$  nu este punct de inf. (funcția și derivatele sale nu sînt definite în  $x = 1$ ); g) convexă pe  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$  și pe  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ ; concavă pe  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ;  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  și  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , puncte de inf.;

h) convexă pe  $(-\infty, -1)$ , și pe  $(0, 1)$ ; concavă pe  $(-1, 0)$  și pe  $(1, \infty)$ ;  $x = 0$ , punct de inf.; i) convexă pe  $(-\infty, -1)$ ; concavă pe  $(1, \infty)$ .

- 18) a) Convexă pe  $[0, \frac{\pi}{4}]$  și pe  $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$ ; concavă pe  $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ ;  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{5\pi}{4}$ , puncte de inf.; b) concavă pe  $(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$ ; convexă pe  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty)$ ;  $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ , punct de inf.; c) convexă pe  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  și pe  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$  și concavă pe  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ;  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  și  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , puncte de inf.

- 19) a) Dreapta  $y = 0$  (axa  $Ox$ ); b) dreptele  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ; c)  $x = -3$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ; d)  $x = 1$ ,  $y = 1$ ; e)  $x = 0$  (axa  $Oy$ ),  $y = x$ , f)  $x = 1$ ,  $y = 2x + 3$ ; g)  $x = 1$ ; h)  $x = -1$ ,  $y = 1$ ; i)  $x = \frac{3}{2}$ ;  $y = \frac{1}{2}$  la ramura spre  $+\infty$  și  $y = -\frac{1}{2}$  la ramura spre  $-\infty$ .

- 20) a) Dreptele  $x = (2k+1)\pi$ ,  $k$  întreg; b)  $x = -1$ ,  $x = 1$ , c)  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

- 21) a) Punct de min.:  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ; b) punct de max.:  $(2, 4)$ ; c) punct de inf.:  $(0, 1)$ ; d) punct

de min.:  $(0, -4)$ ; e) extreme pentru  $x = \pm \sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{145}}{10}} \approx \pm 1,65$  (valoarea negativă

corespunde unui max., iar cea pozitivă unui min.) și pentru  $x = \pm \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}} \approx \pm 0,54$

(valoarea negativă corespunde unui min., iar cea pozitivă unui max.); puncte de inf. pentru  $x = 0$  și pentru  $x = \pm \sqrt{1, 5}$ ; f) punct de max.:  $(0, 1)$ ; punct de inf.:  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$  și

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ ; asimptotă: dreapta  $y = 0$ ; g) punct de max.:  $(1, \frac{1}{2})$ ; punct de min.:  $(-1, -\frac{1}{2})$ ; puncte de inf.:  $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ; asimptotă:  $y =$

$= 0$ ; h) asimptote:  $x = 1$  și  $y = 1$ ; i) punct de max.:  $(-1, -2)$ ; punct de min.:  $(1, 2)$ ; asimptote:  $x = 0$  și  $y = x$ ; j) punct de min.:  $(0, 1)$ ; asimptote:  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ;

k) punct de inf.:  $(0, 0)$ , asimptote:  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ; l) puncte de max.:  $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{4}{3})$ ,  $(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{4}{3})$ ; punct de min.:  $(0, \frac{3}{4})$ ; asimptote  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = -2$ ,

$x = 2$ ,  $y = 0$ ; m) punct de min.:  $(-2, \frac{27}{4})$ ; punct de inf.:  $(1, 0)$ ; asimptote:  $x = 0$  și

$y = -x + 3$ .

- 22) a) Funcția este definită pe  $[2, \infty)$ ; punct de min.:  $(2, 0)$ ; funcția nu este derivabilă în  $x = 2$ ; avem:  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = \infty$ , deci în  $(2, 0)$  graficul are semitangentă paralelă cu axa  $Oy$ ;

b) funcția este def. pe  $[0, \infty)$ ; punct de min.:  $(0, 0)$ ; în acest punct semiaxa  $Ox$  pozitivă este tangentă la grafic; c) funcția este def. pe  $(0, 1)$ ; punct de min.:  $(1, 0)$ ;  $f'(1) = -\infty$ , deci

în punctul de min. graficul are semitangentă paralelă cu  $Oy$ ; punct de inf.:  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ;

asimptotă:  $x = 0$ ; d) funcția este def. pe  $[0, 1)$ , punct de min.:  $(0, 0)$ ; în acest punct, semiaxa  $Ox$  pozitivă este tangentă la grafic; asimptotă:  $x = 1$ ; e) funcția este def. pe  $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ ; punct de min.:  $(1, 0)$ ;  $f'(1) = +\infty$ , deci în punctul de min. graficul are semitan-gentă paralelă cu  $Oy$ ; asimptote:  $x = -1$ ,  $y = 1$ ; f) funcția este def. pe  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ; asimptote:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$  (la ram. spre  $+\infty$ ) și  $y = -1$  (la ram. spre  $-\infty$ ); g) funcția este def. pe  $R$ ; punct de max.:  $(-\frac{3}{4}, \frac{7\sqrt{7}}{4})$ ; puncte de min.:  $(-1, \frac{8\sqrt{3}}{3})$ ,  $(1, 0)$ ; asimptote:  $y = x - \frac{9}{4}$  (la ram. spre  $+\infty$ ) și  $y = -x + \frac{9}{4}$  (la ram. spre  $-\infty$ ); h) funcția este def. pe  $R$ ; punct de max.:  $(2, \frac{3}{4})$ ; graficul are ca punct de min. punctul de întoarcere  $(0, 0)$ ; asimptotă  $y = -x + 1$ .

23) a) Funcția este def. pe  $R \setminus \{0\}$ ;  $f(0-0) = 0$ ,  $f(0+0) = +\infty$ ; punct de inf.:  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2})$ ; asimptote:  $x = 0$ ,  $y = 1$ ; b) funcția este def. pe  $R \setminus \{0\}$ ;  $f(0-0) = f(0+0) = 0$ ; puncte de inf.:  $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$ ,  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$ ; asimptotă:  $y = 1$ ; c) funcția este def. pe  $R$ ; punct de min.:  $(-1, -\frac{1}{e})$ ; punct de inf.:  $(-2, -\frac{2}{e^2})$ ; asimptotă:  $y = 0$  (la ram. spre  $-\infty$ ); d) funcția este def. pe  $R \setminus \{0\}$ ;  $f(0-0) = 10$ ,  $f(0+0) = 0$ ; asimptotă:  $y = 5$ ; e) funcția este def. pe  $R \setminus \{0\}$ ;  $f(0-0) = 0$ ,  $f(0+0) = +\infty$ ; punct de min.:  $(1, 0)$ ; asimptote:  $x = 0$  (la ram. din semiplanul  $x > 0$ ) și  $y = x + 1$ ; f) funcția este def. pe  $R$ , și anume:  $f(x) = -\frac{x}{e^{1-x}}$  pentru  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = \frac{x}{e^{1-x}}$  pentru  $x \in (0, 1)$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$  pentru  $x \in (1, +\infty)$ ; se obține  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ;  $f'_s(0) = -\frac{1}{e}$ ,  $f'_d(0) = \frac{1}{e}$ ,  $f'_s(1) = 2$ ,  $f'_d(1) = 0$ ; puncte de max.:  $(-1, \frac{1}{e^2})$  și punctul unghiular  $(1, 1)$  punct de min.: punctul unghiular  $(0, 0)$ ; asimptotă:  $y = 0$ .

24) a) Funcția este def. pe  $(-1, 1)$ ; punct de inf.:  $(0, 0)$ ; asimptote:  $x = -1$ ,  $x = 1$ ; b) funcția este def. pe  $(0, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ; punct de min.:  $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ ; c) funcția este def. pe  $(0, +\infty)$ ; punct de min.:  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e})$ ; punct de inf.:  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3})$ ; d) funcția este def. pe  $(0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{e}\}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ; punct de inf.:  $(\frac{1}{e^2}, \frac{3}{2})$ ; asimptote:  $x = \frac{1}{e}$ ,  $y = 1$ ; e) funcția este def. pe  $R \setminus \{-2, 0\}$  punct de max.:  $(-1, 0)$ ; puncte de min.:  $(-1 - e, e)$ ,  $(e - 1, e)$ ; puncte de inf.:  $(-e^2 - 1, \frac{e^2}{2})$ ,  $(e^2 - 1, \frac{e^2}{2})$ ; asimptote:  $x = -2$ ,  $x = 0$ ; f) funcția este def. pe  $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ , asimptote:  $x = -1$ ,  $y = 1$ .

25) a) Se consideră funcția def. pe  $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ; punct de max.:  $(\pi, -1)$ ; punct min.:  $(0, 1)$ ,  $(2\pi, 1)$ ; asimptote:  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ; b) se consideră funcția def. pe  $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ ;

puncte de max.:  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(2\pi, \frac{1}{2})$  puncte de inf.:  $(\arccos \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$ ,  $(2\pi - \arccos \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$ ; asimptotă:  $x = \pi$ ; c) se consideră funcția def. pe  $[0, 2\pi]$ ; puncte de max.:  $(0, 1)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ,  $(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(2\pi, 1)$ ; puncte de min.:  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(\pi, -1)$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ ; pentru trasarea graficului este suficient să se țină seama de punctele de inf.  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ,  $(\frac{7\pi}{4}, 0)$ ; notind

$\arcsin \frac{2}{3} = z$ , celelalte puncte de inf. ale graficului se obțin pentru  $x = \frac{z}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}$ ,  $x = \pi + \frac{z}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2} - \frac{z}{2}$ ; d) se consideră funcția def. pe  $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ; puncte de max.:  $(0, 1)$ ,  $(2\pi, 1)$  punct de min.:  $(\pi, -1)$ ; asimptote  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ;

e) se consideră funcția def. pe  $[0, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$ ; puncte de max.:  $(0, 1)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ,  $(2\pi, 1)$ ; puncte de min.:  $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ,  $(\frac{7\pi}{4}, 0)$ ;

$f'(\frac{3\pi}{4}) = \lim_{x \nearrow \frac{3\pi}{4}} f'(x) = -\infty$  și  $f'(\frac{7\pi}{4}) = \lim_{x \searrow \frac{7\pi}{4}} f'(x) = +\infty$ ; ne dispensăm de studiul lui  $f''$ ;

f) se consideră funcția def. pe  $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ;  $\lim_{x \searrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \nearrow \frac{5\pi}{3}} f(x) = -\infty$ ; punct de max.:  $(\pi, \ln 3)$ ; asimptote:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$ .

26) a) Funcția este def. pe  $R$ ; punct de max.:  $(-1, \frac{\pi}{2} - 1)$ ; punct de min.:  $(1, 1 - \frac{\pi}{2})$ ; punct de inf.:  $(0, 0)$ ; asimptote:  $y = x + \pi$  (la ram. spre  $-\infty$ ),  $y = x - \pi$  (la ram. spre  $+\infty$ ); b) funcția este def. pe  $(-1, 1) \setminus \{0\}$ ; puncte de max.:  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi+1}{4})$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{3})$ ; puncte de min.:  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{3})$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi+1}{4})$ ; asimptote:  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ; c) funcția este def. pe  $[-1, 1]$ ; pe  $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , avem:  $f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$  și  $f''(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}^3}$ , iar pe  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , avem:  $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $f''(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}^3}$ ;  $f'_s(-\frac{1}{2}) = f'_d(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{3}$ ;  $f'_s(\frac{1}{2}) = f'_d(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}$ ; puncte de max.:  $(-1, \frac{\pi}{2} - 1)$  și punctul unghiular  $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ; puncte de min.:  $(1, -\frac{\pi}{2})$  și punctul unghiular  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ; punct de inf.:  $(0, 0)$ ; d) funcția este def. pe  $E = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ ; pentru  $x \in E \setminus \{-1, 1\}$  avem:  $f'(x) = -\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-1}}$  și  $f''(x) = -\frac{2(2x^2-1)}{x|x|\sqrt{x^2-1}^3}$ ;  $f'(-1) = \lim_{x \nearrow -1} f'(x) = -\infty$  și  $f'(1) = \lim_{x \searrow 1} f'(x) = -\infty$ ; punct de



max.:  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ; punct de min.:  $\left(-1, -\frac{3\pi}{2}\right)$ ; asimptotă:  $y = -\frac{\pi}{2}$ ; e) funcția este def. pe  $[-1, 1]$ ; puncte de max.:  $\left(-1, \frac{5}{4}\right)$  și  $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ ; punct de min.:  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}\right)$ ;  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = -\infty$  și  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$ ; se obține  $f''(x) = \frac{2}{\pi^2(1-x^2)} \left(2 + (\arcsin x - \arccos x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ; notind  $\varphi(x) = \arcsin x - \arccos x$ , rezultă  $\varphi'(x) > 0$  pe  $(-1, 1)$ ; de aici se deduce că pe  $(-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$  avem  $\varphi(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ , deci  $f''(x) > 0$ ; pe  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  avem:  $|\varphi(x)| < \frac{\pi}{2}$  și  $\frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1$ , deci  $\left|\varphi(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| < \frac{\pi}{2} < 2$ , deci  $f''(x) > 0$ ; rezultă, în definitiv,  $f''(x) > 0$  pe  $(-1, 1)$ .

27)  $a = 3, b = 8, \alpha = -\frac{1}{6}$ . Sau  $a = 8, b = 3, \alpha = -\frac{1}{6}$

28) 1° funcția este def. pe  $[0, 4]$ ; ec. tangentei la grafic în punctul  $\left(1, -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$  este  $y + \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ ;  $f''(x) > 0$  pe  $(0, 4)$ ; 2° funcția  $\varphi(x) = \frac{x(x-2)\sqrt{4x-x^2}}{(x+1)\sqrt{4x-x^2}}$  este def. pe  $(0, 4)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow 4} \varphi(x) = \frac{8}{3}$ ; punct de min.:  $(\sqrt{3}-1, -4+2\sqrt{3})$ ; punctele  $(0, 0)$  și  $\left(4, \frac{8}{3}\right)$  nu aparțin graficului, dar oricât de aproape de ele există puncte ale graficului.

29) 2°  $a = 4, b = -5$ ; 3° punct de max.:  $(2, 3)$ ; punct de min.:  $\left(-\frac{1}{2}, -7\right)$ ; asimptotă:  $y = 1$ .

30) 1°  $a = -5, b = 1, c = -2, d = 1$ ; 2° asimptote:  $y = 1, x = 2 - \sqrt{3}, x = 2 + \sqrt{3}$ .

31) 2°  $ab = 1$ ; 3° punct de max.:  $\left(4, -\frac{4}{5}\right)$ ; punct de min.:  $\left(6, \frac{4}{5}\right)$ ; asimptote:  $y = 1, x = -2\sqrt{6}, x = 2\sqrt{6}$ .

32) 1° funcția este def. pe  $R \setminus \{-b\}$ ; punct de max.:  $(-2b, -4ab)$ ; punct de min.:  $(0, 0)$ ; asimptote:  $x = -b, y = a(x-b)$ ; 2°  $a = b = 1$ ; 3°  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1, \frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)$ .

33) 1° punct de max.:  $\left(-a + \sqrt{a^2+b}, \frac{a + \sqrt{a^2+b}}{2b}\right)$ , punct de min.:  $\left(-a - \sqrt{a^2+b}, \frac{a - \sqrt{a^2+b}}{2b}\right)$ ; asimptotă:  $y = 0$ ; 2°  $8a^2 = b$ ; 3° se ține seama de proprietatea lui Darboux (§ 18, nr. 1, corolar 1) și de semnul numărătorului lui  $f''$ .

34) 1°  $f'(x) = \frac{x+1-\lambda^2}{2\lambda\sqrt{(x+1)^3}}$ ;  $f(\lambda^2-1) = 2$  și  $(\lambda^2-1, 2)$  este un punct de minim al graficului pentru orice  $\lambda > 0$ ; 2°  $f''(c) = \frac{-x-1+3\lambda^2}{4\lambda\sqrt{(x+1)^3}}$ ; 3° funcția este def. pe  $(-1, +\infty)$ ; punct

de min.:  $(0, 2)$ ; punct de inf.:  $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ ; asimptotă:  $x = -1$ ; 4° notind  $MN = \varphi(\lambda)$  se obține:  $\varphi(\lambda) = \frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda(1-\lambda^2)}$  pentru  $\lambda \in (0, 1)$  și  $\varphi(\lambda) = \frac{(1+\lambda^2)^2}{(\lambda^2-1)}$  pentru  $\lambda \in (1, +\infty)$ ; (presupunem  $\lambda \neq 1$ , deoarece pentru  $\lambda = 1$  tangenta în  $M$  la grafic este dreapta  $y = 2$ , paralelă cu axa  $Ox$ ); în cazul  $\lambda \in (0, 1)$  se obține  $MN_{\min}$  pentru  $\lambda = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ; iar în cazul  $\lambda \in (1, +\infty)$  se obține  $MN_{\min}$  pentru  $\lambda = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .

35) 1°  $E = R \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$ ; 2°  $u(E) = (0, 4) \setminus \{2\}$ ; prin transformări succesive se obține  $f(t) = \frac{16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1}{4 \cos^2 t - 2}$ , deci  $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ ; 3°  $\tilde{g}(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

pentru  $x \in (0, 4) \setminus \{2\}$  și  $\tilde{g}(x) = \frac{1}{x}$  pentru  $x \in R \setminus [u(E) \cup \{0\}]$ ;  $\tilde{g}$  este discontinuă în  $x = 2$  și în  $x = 4$ ; anume:  $\tilde{g}(2-0) = +\infty, \tilde{g}(2+0) = -\infty, \tilde{g}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  și  $\tilde{g}(4-0) = \frac{5}{2}, \tilde{g}(4+0) = \tilde{g}(4) = \frac{1}{4}$ ; funcția nu are puncte de extrem și:  $\tilde{g}'(x) < 0$  pe  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$  și  $\tilde{g}'(x) > 0$  pe  $u(E)$ ; funcția nu are puncte de inflexiune și:  $\tilde{g}''(x) < 0$  pe  $(-\infty, 0) \cup (2, 4)$  și  $\tilde{g}''(x) > 0$  pe  $(0, 2) \cup (4, +\infty)$ ; asimptote:  $y = 0, x = 0, x = 2$ .

36) Se obține  $P(x) = x^\alpha(a-x)^\beta$ ; funcția este definită pe  $(0, a)$ ; pentru  $x = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$ , se obține  $P_{\max} = \alpha^\alpha \beta^\beta \left(\frac{a}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha + \beta}$ .

37) Se obține  $S(x) = x^\alpha + \frac{a\beta}{x^\beta}$ ; funcția este definită pe  $(0, +\infty)$ ; pentru  $x = \left(\frac{\beta a \beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}}$ , se obține  $S_{\min} = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{\alpha^{\alpha + \beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}}$ .

38) Notind cu  $x$  și cu  $y$  dimensiunile dreptunghiului, se obține  $x^2 + y^2 = 4r^2$ ; se stabilește că funcția  $S(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ , definită pe  $[0, 2r]$  are maximum  $2r^2$  pentru  $x = y = r\sqrt{2}$ ; deci dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat este tocmai pătratul înscris în respectivul cerc.

39) Fie  $ABC$  triunghiul dat și un dreptunghi  $LMNP$  ales conform condițiilor din enunț ( $NP$  pe  $BC$ ;  $L$  între  $A$  și  $B$ ). Notind  $LN = x, NP = y, BC = a$  și  $h$  — înălțimea coborâtă pe  $BC$  și ținând seama de asemănarea triunghiurilor  $ABC$  și  $ALM$ , se obține  $S(x) = \frac{a}{h} x(h-x)$ ;

funcția este def. pe  $[0, h]$ ; pentru  $x = \frac{h}{2}, y = \frac{2}{a}$ , se obține  $S_{\max} = \frac{ah}{4}$ .

40) Notind cu  $x$  diametrul bazei cilindrului și cu  $y$  înălțimea cilindrului, se obține  $V(x) = \frac{\pi}{4} x^2 \sqrt{4r^2 - x^2}$ ; funcția este definită pe  $[0, 2r]$ ; pentru  $x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, y = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ , se obține:  $V_{\max} = \frac{4}{2\sqrt{3}} \pi r^3$ .

41)  $x$  și  $y$  avind aceeași semnificație ca la problema anterioară, se obține, pentru  $x = 2$  și  $y = 1$ ;  $V_{\max} = \pi m^3$ .



- 42) Notind cu  $x$  latura trapezului perpendiculară pe baze, se obține  $S(x) = \frac{ax(3a-2x)}{2a-x}$ ; funcția este def. pe  $\left[0, \frac{4a}{3}\right]$ ; pentru  $x=a$  se obține  $S_{\max} = a^2$ .
- 43) Notind cu  $x$  raza bazei cilindriului, se obține  $S(x) = 2\pi x(x + 2\sqrt{r^2 - x^2})$ ,  $x \in [0, r]$ ; pentru  $x=r$  se obține  $S_{\max} = r^2(1 + \sqrt{5})$ .
- 44) Notind cu  $x$  latura bazei, se obține  $V(x) = x^2 \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$ ,  $x \in [0, r\sqrt{2}]$ ; pentru  $x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  se obține  $V_{\max} = \frac{4r^3}{3\sqrt{3}}$ .
- 45) Notind cu  $u$ , laturile dreptunghiului, avem  $4u^2 + 9u^2 = 144$ ; rezultă  $S(u) = \frac{2}{3} u\sqrt{36-u^2}$ ,  $u \in [0, 6]$ ; pentru  $u = 3\sqrt{2}$  se obține  $S_{\max} = 12$ .
- 46) Se obține  $f(x) = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} = \frac{(x+r)^2}{4r(x-r)}$ ,  $x \in (r, +\infty)$ ; pentru  $x=3r$  se obține minimul  $f(3r) = 2$ .
- 47) Notind  $OM = x$ , se obține  $V(x) = \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2)(a-x)$ ,  $x \in [-r, r]$  (se va observa că  $MP = a \pm OM$ , semnul minus corespunzând cazului când  $M$  este situat între  $O$  și  $P$ , iar semnul plus cazului contrar); pentru  $x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3}$  se obține  $V_{\max} = \frac{2\pi}{81} (9ar^2 + \sqrt{(a^2 + 3r^2)^3} - a^3)$ .
- 48) Se obține  $S(x) = \frac{r}{2} (a \cos x - r) \operatorname{tg} x$ ,  $x \in [0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ; pentru  $x = \arccos \sqrt{\frac{r}{a}}$  se obține  $S_{\max} = \frac{r}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a^2} - \frac{3}{r^2}\right)^3}$ .
- 49) Se exprimă lungimea  $l$  a vasului, în poziția în care acesta se sprijină cu o extremitate pe malul râului, iar cu cealaltă pe peretele canalului, în funcție de unghiul  $\alpha$  format de direcția vasului cu malul râului; se obține  $l(\alpha) = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha}$ ; pentru  $\alpha = \arctg \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ , se obține  $l_{\max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ .
- 50) Fie  $MV$  porțiunea de cale ferată paralelă cu șoseaua; notind cu  $x$  proiecția lui  $AM$  pe șosea, traseul este  $T(x) = AM + MV + NB = \sqrt{x^2 + 9} + 2 + \sqrt{1 + (8-x)^2} = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 16x + 65} + 2$ ; pentru  $x=6$  se obține  $T_{\min} = 2 + 4\sqrt{5} \approx 11$  km.
- 51) Notind cu  $x$  distanța de la sursă la pistă și cu  $d$  distanța de la sursă la  $M$ , se obține  $I(x) = \frac{\sin \theta}{d^2} = \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$ ; pentru  $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$  se obține  $I_{\max} = \frac{2}{3r^2\sqrt{2}}$ .
- 52) Evident  $nm = 60$ ; se știe că forța electromotoare a bateriei de  $n$  elemente legate în serie este  $ne$ , iar rezistența interioară  $nr$ ; grupând apoi cele  $m$  baterii în paralel, forța electromotoare

este  $ne$ , iar rezistența interioară  $\frac{nr}{m}$ ; aplicând legea lui Ohm, se obține  $I = \frac{ne}{R + \frac{nr}{m}} =$

$$= \frac{60e}{mR + nr}; \text{ înlocuind } m = \frac{60}{n}, \text{ rezultă } I = \frac{60ne}{60R + n^2r}.$$

Pentru a rezolva mai rapid problema, trebuie să se recurgă la derivate; observind însă că funcția  $I(n)$  nu este definită decât pentru numere întregi ( $1 \leq n \leq 60$ ), se consideră prelungirea  $f$  la  $[0, +\infty)$  a funcției  $I$ ,

definită prin egalitatea  $f(x) = \frac{60ex}{60R + x^2r}$ ; funcția  $f$  are un maxim pentru  $x_0 = 2\sqrt{\frac{15R}{r}}$ ;

dacă  $x_0 \geq 60$ , atunci, deoarece  $f(x)$  este crescătoare pe  $[1, 60]$ , maximul lui  $I(x)$  este dat de  $n=60$ ; deci  $m=1$  (toate elementele se leagă în serie); dacă  $x_0 < 60$  și dacă  $x_0$  este întreg și divizor al lui 60, atunci  $n=x_0$ ; dacă  $x_0$  este întreg, dar nu este divizor al lui 60, sau dacă  $x_0$  nu este întreg, se consideră cel mai mare divizor  $n_1$  al lui 60, astfel ca  $n_1 < x_0$ , și cel mai mic divizor  $n_2$  al lui 60, astfel ca  $n_2 > x_0$ ; dacă  $I(n_1) > I(n_2)$ , atunci  $n=n_1$ ; dacă  $I(n_1) < I(n_2)$ , atunci  $n=n_2$ ; dacă  $I(n_1) = I(n_2)$ , se poate lua oricare din numerele  $n_1$  și  $n_2$  (se obține aceeași intensitate formând baterii fie de câte  $n_1$  elemente, fie de câte  $n_2$  elemente);  $1^\circ x_0 > 60$ , deci  $n=60$ ;  $2^\circ x_0 = 30$ , deci  $n=30$ ;  $3^\circ x_0 \approx 12,2$ ; se cercetează  $I(12)$  și  $I(15)$ ; se obține  $I(12) = 2,45 e$  și  $I(15) = 2,4 e$ , deci se ia  $n=12$ .

- 53) Notind cu  $B'$  proiecția lui  $B$  pe calea ferată, cu  $M$  punctul de racordare și  $B'M = x$ , costul transportului este  $\gamma(x) = \alpha(30-x) + \beta\sqrt{x^2 + 81}$ ,  $x \in [0, 30]$  ( $B'$  corespunde lui  $x=0$ , iar  $A$  lui  $x=30$ ). Anulind derivata, se obține  $x_0 = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ ; dacă  $x_0 \geq 30$ , atunci, deoarece  $\gamma(x)$  este descrescătoare pe orice interval  $[0, r]$ ,  $r < x_0$ , minimul lui  $\gamma(x)$  pe  $[0, 30]$  este atins în 1; dacă  $x_0 < 30$ , punctul de racordare este  $M$  dat de  $B'M = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ ; se observă că dacă  $x_0 = 0$ , adică  $\alpha = 0$ , punctul de racordare este în  $B'$ , ceea ce se interpretează ușor din datele problemei.

Pentru aprofundarea cunoștințelor expuse în acest manual recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. Nicolescu, M., Dinculescu, N., Marcus, S. — *Manual de analiză matematică*. Vol. I, București, Editura didactică și pedagogică, 1966.

2. Aramă, L., Morozan, T. — *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*. Vol. I, București, Editura tehnică, 1967.

# Cuprinsul

## Capitolul I

### Mulțimi. Numere reale. Funcții

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Mulțimi                                               | 3  |
| 1. Mulțimi și elemente                                     | 3  |
| 2. Apartenență și incluziune                               | 3  |
| 3. Reuniune și intersecție                                 | 4  |
| 4. Diferența. Complementara                                | 4  |
| 5. Produsul cartezian                                      | 5  |
| § 2. Numere reale                                          | 5  |
| 1. Structura algebrică                                     | 6  |
| 2. Structura de ordine                                     | 6  |
| 3. Modulul                                                 | 8  |
| 4. Inegalitatea lui Bernoulli                              | 10 |
| 5. Reprezentarea numerelor prin puncte de dreaptă          | 11 |
| 6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan | 11 |
| 7. Intervale                                               | 12 |
| 8. Vecinătățile unui punct                                 | 13 |
| § 3. Funcții                                               | 13 |
| 1. Definiția funcției. Notatii și denumiri                 | 13 |
| 2. Argumentul unei funcții                                 | 14 |
| 3. Imagini de mulțimi. Aplicații surjective                | 14 |
| 4. Graficul unei funcții                                   | 15 |
| 5. Restricții de funcții. Extensii                         | 16 |
| 6. Aplicații biunivoce                                     | 16 |
| 7. Funcții compuse                                         | 17 |
| 8. Funcții reciproce                                       | 18 |
| § 4. Funcții reale de variabilă reală                      | 19 |
| 1. Funcții monotone                                        | 19 |
| 2. Operații algebrice cu funcții reale                     | 21 |
| 3. Funcții elementare                                      | 23 |
| § 5. Progresii                                             | 30 |
| 1. Progresii aritmetice                                    | 30 |
| 2. Progresii geometrice                                    | 33 |
| Exerciții                                                  | 35 |

## Capitolul II

### Șiruri

|                        |    |
|------------------------|----|
| § 6. Generalități      | 42 |
| 1. Definiția șirurilor | 42 |
| 2. Șiruri mărginite    | 45 |
| 3. Șiruri monotone     | 45 |

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| § 7. Șiruri convergente                     | 47  |
| 1. Un exemplu de șir convergent             | 47  |
| 2. Definiția limitei                        | 49  |
| 3. Teorema de convergență cu $\varepsilon$  | 52  |
| 4. Criteriul majorării                      | 54  |
| 5. Șirul modulelor                          | 56  |
| 6. Trecerea la limită în inegalități        | 57  |
| 7. Șiruri mărginite. Șiruri monotone        | 58  |
| 8. Numărul $e$                              | 60  |
| § 8. Operații cu șiruri convergente         | 62  |
| 1. Șirul sumelor                            | 63  |
| 2. Șirul produselor                         | 64  |
| 3. Șirul citorilor                          | 67  |
| § 9. Puteri și logaritmi                    | 70  |
| 1. Generalități                             | 70  |
| 2. Puteri reale                             | 71  |
| 3. Logaritmi                                | 73  |
| § 10. Dreapta încheiată                     | 74  |
| 1. Simbolul $+\infty$                       | 75  |
| 2. Simbolul $-\infty$                       | 76  |
| 3. Operații cu $+\infty$ și $-\infty$       | 78  |
| 4. Aplicații                                | 83  |
| § 11. Serii                                 | 86  |
| 1. Serii convergente                        | 86  |
| 2. Exemple                                  | 87  |
| § 12. Aplicații în geometrie                | 91  |
| 1. Lungimea cercului (circumferinței)       | 91  |
| 2. Aria suprafețelor plane                  | 95  |
| 3. Volumul corpurilor în spațiu             | 100 |
| 4. Aria laterală a cilindrului și a conului | 103 |
| 5. Teorema lui Thales                       | 104 |
| Exerciții                                   | 105 |

## Capitolul III

### Limite de funcții

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 13. Definiția limitei                                                    | 111 |
| 1. Exemple                                                                 | 111 |
| 2. Definiția limitei unei funcții într-un punct                            | 114 |
| 3. Limite laterale                                                         | 119 |
| § 14. Proprietățile limitei                                                | 122 |
| 1. Limita modulului                                                        | 122 |
| 2. Criterii de existență a limitei                                         | 122 |
| 3. Trecerea la limită în inegalități                                       | 124 |
| 4. Operații cu limite de funcții                                           | 125 |
| 5. Limite de puteri                                                        | 129 |
| 6. Limite de funcții compuse                                               | 130 |
| § 15. Cazuri exceptate la operațiile cu limite de funcții                  | 131 |
| 1. Limitele polinoamelor în punctele $+\infty$ și $-\infty$                | 132 |
| 2. Limitele funcțiilor raționale în punctele $+\infty$ și $-\infty$        | 133 |
| 3. Limitele funcțiilor raționale în punctele în care se anulează numitorul | 134 |
| 4. Limitele unor funcții în cazul $1 \cdot \frac{0}{0}$                    | 136 |
| 5. Limitele unor funcții în cazul $1^\infty$                               | 138 |
| Exerciții                                                                  | 141 |

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| § 16. Definiția continuității .....                         | 146 |
| 1. Analiza unui exemplu .....                               | 146 |
| 2. Definiția continuității unei funcții într-un punct ..... | 148 |
| 3. Continuitatea unei funcții pe o mulțime .....            | 150 |
| § 17. Operații cu funcții continue .....                    | 151 |
| 1. Operații algebrice .....                                 | 151 |
| 2. Continuitatea funcțiilor compuse .....                   | 151 |
| § 18. Funcții continue pe intervale .....                   | 153 |
| 1. Proprietatea lui Darboux .....                           | 153 |
| 2. Continuitatea unor funcții monotone .....                | 155 |
| 3. Funcții continue pe un interval închis și mărginit ..... | 156 |
| Exerciții .....                                             | 157 |

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| § 19. Probleme care conduc la noțiunea de derivată .....          | 159 |
| 1. Viteza unui mobil în mișcare rectilinie .....                  | 159 |
| 2. Tangenta la o curbă .....                                      | 160 |
| § 20. Definiția derivatei .....                                   | 161 |
| 1. Definiția derivatei într-un punct .....                        | 161 |
| 2. Continuitatea funcțiilor derivabile .....                      | 163 |
| 3. Derivata unei funcții pe o mulțime .....                       | 163 |
| 4. Derivatele unor funcții elementare .....                       | 164 |
| 5. Derivate laterale .....                                        | 170 |
| 6. Derivate de ordin superior .....                               | 174 |
| § 21. Operații cu funcții derivabile .....                        | 175 |
| 1. Suma .....                                                     | 175 |
| 2. Produsul .....                                                 | 176 |
| 3. Cîmul .....                                                    | 178 |
| 4. Derivatele unor funcții elementare .....                       | 179 |
| § 22. Derivatele funcțiilor compuse și funcțiilor reciproce ..... | 183 |
| 1. Derivata unei funcții compuse .....                            | 183 |
| 2. Derivata unei funcții reciproce .....                          | 187 |
| 3. Derivatele unor funcții elementare .....                       | 188 |
| § 23. Diferențiala .....                                          | 194 |
| 1. Definiția diferențialei .....                                  | 194 |
| 2. Reguli de diferențiere .....                                   | 197 |
| 3. Diferențiala unei funcții compuse .....                        | 197 |
| § 24. Aplicații ale derivatelor în fizică .....                   | 199 |
| 1. Viteza în mișcarea rectilinie .....                            | 199 |
| 2. Accelerația în mișcarea rectilinie .....                       | 200 |
| 3. Debitul unui lichid .....                                      | 201 |
| 4. Intensitatea curentului electric .....                         | 202 |
| 5. Densitatea unei bare (a unei repartiții liniare de masă) ..... | 202 |
| Exerciții .....                                                   | 203 |

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| § 25. Funcții derivabile pe un interval .....              | 209 |
| 1. Puncte de extrem ale unei funcții .....                 | 209 |
| 2. Teorema lui Rolle .....                                 | 211 |
| 3. Teoremele creșterilor finite .....                      | 212 |
| 4. Teorema lui Darboux .....                               | 214 |
| 5. Consecințe ale teoremei lui Lagrange .....              | 215 |
| § 26. Regula lui l'Hospital .....                          | 218 |
| 1. Cazurile $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$ ..... | 218 |
| 2. Cazul $0 \cdot \infty$ .....                            | 223 |
| 3. Cazul $\infty - \infty$ .....                           | 225 |
| 4. Cazurile $0^0$ , $1^\infty$ , $\infty^0$ .....          | 227 |
| § 27. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor .....    | 230 |
| 1. Intervalele de monotonie .....                          | 230 |
| 2. Punctele de extrem .....                                | 230 |
| 3. Exemple .....                                           | 231 |
| § 28. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor .....   | 235 |
| 1. Convexitate și concavitate .....                        | 235 |
| 2. Intervalele de convexitate și de concavitate .....      | 236 |
| 3. Punctele de extrem .....                                | 237 |
| 4. Punctele de inflexiune .....                            | 237 |
| 5. Exemple .....                                           | 238 |
| § 29. Asimptote .....                                      | 240 |
| 1. Asimptote verticale .....                               | 241 |
| 2. Asimptote oblice .....                                  | 242 |
| § 30. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....             | 245 |
| § 31. Probleme de maxim și minim .....                     | 262 |
| Exerciții .....                                            | 266 |
| Indicații și răspunsuri .....                              | 275 |

Nr. colilor de tipar : 19,5  
Tiraj tranşa a II-a : 110 205 ex.  
Bun de tipar : 20.X.1973



Com. nr. 50 519/22 514  
Combinatul Poligrafic  
„CASA SCÎNTEII”  
Bucureşti — R.S.R.

Lei 10,90

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$