

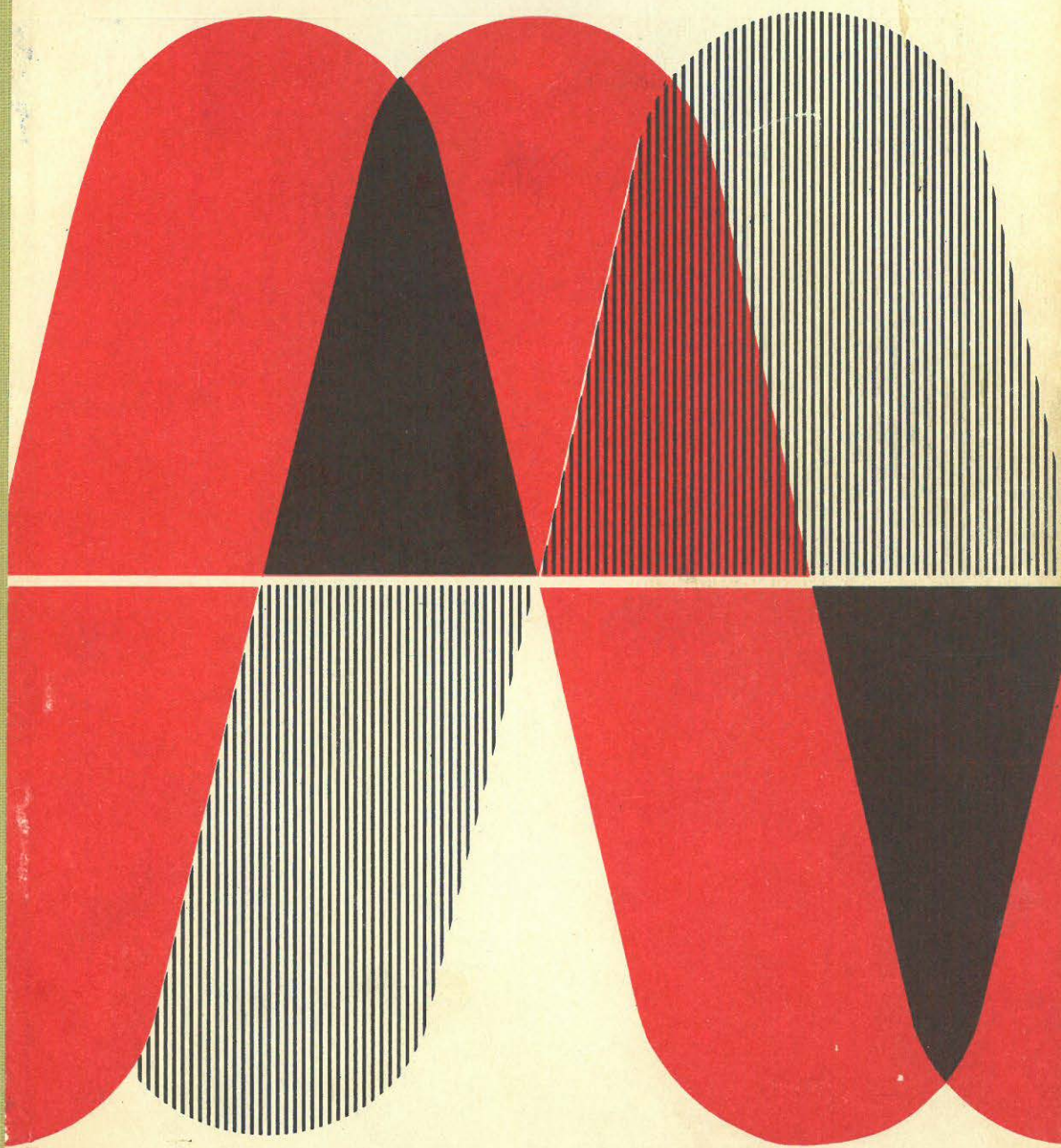
L. PANAIOTU  
L. GEORGESCU

M. RUSU  
D. BORȘAN

**XII**

# FIZICĂ

Manual pentru clasa a XII-a



Colonel ing. Lehtini lafau  
1919



Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățământului cu nr. 036751/14.IV.1978.

#### Referenți:

C. Plăvițu, conf. univ. dr.  
C. Vrejoiu, conf. univ. dr.  
D. Iordache, conf. univ. dr.

Redactor: E. Mesaroș, prof.  
Tehnoredactor: Candopol Viorica  
Coperta: N. Sirbu

## CUPRINSUL

|                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Sistem termodinamic .....                                                                                                                       | 5  |
| 1.1. Obiectul termodinamicii .....                                                                                                                 | 5  |
| 1.2. Noțiunile de bază ale termodinamicii.....                                                                                                     | 6  |
| 1.3. Postulatele termodinamicii.....                                                                                                               | 8  |
| 1.4. Metode de măsurare a temperaturii. Scări de temperatură.....                                                                                  | 10 |
| 1.4.1. Scări de temperatură .....                                                                                                                  | 11 |
| 1.4.2. Dispozitive pentru măsurarea temperaturii ( <i>Extindere în tehnologie</i> ) .....                                                          | 13 |
| Probleme rezolvate .....                                                                                                                           | 18 |
| Probleme.....                                                                                                                                      | 20 |
| 1.5. Energia internă .....                                                                                                                         | 20 |
| 1.6. Lucru mecanic .....                                                                                                                           | 21 |
| 1.6.1. Lucru mecanic elementar.....                                                                                                                | 22 |
| 1.6.2. Calculul lucrului mecanic pentru diverse transformări.....                                                                                  | 23 |
| 1.7. Căldura .....                                                                                                                                 | 23 |
| 1.7.1. Mărimi calorice .....                                                                                                                       | 24 |
| 1.8. Primul principiu al termodinamicii.....                                                                                                       | 26 |
| Probleme rezolvate .....                                                                                                                           | 27 |
| Probleme.....                                                                                                                                      | 31 |
| 1.9. Principiul al doilea al termodinamicii.....                                                                                                   | 33 |
| 1.9.1. Mașinile termice.....                                                                                                                       | 33 |
| 1.10. Tipuri de mașini termice ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                                                                             | 37 |
| 1.10.1. Motorul Otto .....                                                                                                                         | 37 |
| 1.10.2. Motorul Diesel .....                                                                                                                       | 39 |
| Probleme rezolvate .....                                                                                                                           | 40 |
| Probleme .....                                                                                                                                     | 43 |
| 1.11. Entropia .....                                                                                                                               | 44 |
| 1.12. Formularea principiului al doilea al termodinamicii.....                                                                                     | 47 |
| 1.13. Semnificația statistică a entropiei. Entropia și informația ( <i>Extindere în alte domenii</i> ) .....                                       | 50 |
| 1.14. Principiul al treilea al termodinamicii.....                                                                                                 | 52 |
| 2. Sistem de puncte materiale.....                                                                                                                 | 54 |
| 2.1. Referențiale. Starea de mișcare a punctului material.....                                                                                     | 55 |
| 2.1.1. Referențiale.....                                                                                                                           | 55 |
| 2.1.2. Starea de mișcare a punctului material.....                                                                                                 | 58 |
| Întrebări. Exerciții .....                                                                                                                         | 60 |
| 2.2. Proprietățile fundamentale ale spațiului și timpului. Referențiale inerțiale. Relativitatea mișcării. Principiul relativității galileene..... | 61 |
| 2.2.1. Proprietățile fundamentale ale spațiului și timpului.....                                                                                   | 61 |
| 2.2.2. Referențiale inerțiale .....                                                                                                                | 62 |
| 2.2.3. Relativitatea mișcării .....                                                                                                                | 72 |
| 2.2.4. Principiul relativității galileene.....                                                                                                     | 64 |
| Întrebări. Exerciții .....                                                                                                                         | 64 |
| 2.3. Punctul material. Sisteme de puncte materiale. Teoremele energiei, impulsului și momentului cinetic .....                                     | 65 |
| 2.3.1. Punctul material .....                                                                                                                      | 65 |
| 2.3.2. Sistem de puncte materiale.....                                                                                                             | 72 |
| Întrebări. Exerciții .....                                                                                                                         | 90 |
| 2.4. Centrul de masă ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                                                                                           | 93 |
| 2.5. Ciocniri clasice ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                                                                                          | 95 |

|                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.6. Mișcarea planetelor ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                                        | 104 |
| 2.7. Volantul ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                                               | 108 |
| 2.8. Giroscopul ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                                             | 109 |
| 2.9. Motoare cu jet de gaze ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                                 | 117 |
| 2.9.1. Motoare rachetă.....                                                                         | 118 |
| 2.9.2. Motoare cu reacție.....                                                                      | 120 |
| Probleme rezolvate.....                                                                             | 120 |
| Probleme.....                                                                                       | 125 |
| 3. Cîmp electromagnetic.....                                                                        | 133 |
| 3.1. Cîmpul electromagnetic.....                                                                    | 133 |
| 3.1.1. Introducere.....                                                                             | 133 |
| 3.1.2. Conceptul de cîmp.....                                                                       | 133 |
| 3.1.3. Cîmpul electromagnetic.....                                                                  | 135 |
| 3.1.4. Perturbația electromagnetică. Unda electromagnetică.....                                     | 135 |
| 3.1.5. Viteza de propagare a perturbației electromagnetice.....                                     | 136 |
| 3.2. Fenomene de propagare a radiației electromagnetice.....                                        | 137 |
| 3.2.1. Propagarea rectilinie.....                                                                   | 137 |
| 3.2.2. Descrierea propagării undelor electromagnetice.....                                          | 139 |
| 3.2.3. Difracția. Principiul lui Huygens.....                                                       | 143 |
| 3.2.4. Interferența.....                                                                            | 145 |
| Probleme rezolvate.....                                                                             | 148 |
| 3.2.5. Obținerea experimentală a fenomenului de interferență.....                                   | 150 |
| 3.2.6. Relația între fenomenele de difracție și cele de interferență.....                           | 152 |
| 3.2.7. Interferența și difracția în natură.....                                                     | 156 |
| 3.3. Aplicații ale fenomenelor de difracție și interferență.....                                    | 158 |
| 3.3.1. Evidențierea caracterului undulator al unui fenomen.....                                     | 158 |
| 3.3.2. Spectrometrul cu rețea ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                               | 158 |
| 3.3.3. Metode interferențiale de măsură și control ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....          | 160 |
| 3.3.4. Analiza prin difracția radiațiilor X ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....                 | 164 |
| 3.3.5. Puterea de separare a instrumentelor optice ( <i>Extindere în tehnologie</i> ).....          | 165 |
| 3.3.6. Holografia și aplicațiile acestei metode ( <i>Extinderea în tehnologie</i> ).....            | 167 |
| 3.4. Cîmpul electromagnetic ca sistem fizic.....                                                    | 172 |
| 3.4.1. Interacțiunea din aproape în aproape.....                                                    | 172 |
| 3.4.2. Cîmpul ca sistem fizic.....                                                                  | 174 |
| 3.4.3. Viteza luminii în vid — constantă universală.....                                            | 175 |
| 3.5. Noțiuni de teoria relativității.....                                                           | 177 |
| 3.5.1. Viteza luminii — viteza maximă.....                                                          | 177 |
| 3.5.2. Relativitatea galileeană și cea einsteiniană.....                                            | 179 |
| 3.5.3. Transformările lui Lorentz ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                               | 184 |
| 3.5.4. Impulsul, masa și energia în teoria relativității ( <i>Extindere în fizică</i> ).....        | 189 |
| Întrebări. Exerciții. Probleme.....                                                                 | 193 |
| 4. Sistem cuantic.....                                                                              | 199 |
| 4.1. Efectul fotoelectric.....                                                                      | 199 |
| 4.1.1. Fenomenul fotoelectric și explicațiile lui.....                                              | 199 |
| 4.1.2. Fotonul și proprietățile lui.....                                                            | 207 |
| 4.1.3. Celula fotoelectrică.....                                                                    | 210 |
| 4.2. Proprietățile ondulatorii ale particulelor.....                                                | 211 |
| 4.2.1. Ipoteza lui de Broglie.....                                                                  | 211 |
| 4.2.2. Difracția particulelor.....                                                                  | 212 |
| 4.3. Proprietățile microparticulelor.....                                                           | 215 |
| 4.3.1. Principiul de nedeterminare.....                                                             | 215 |
| 4.3.2. Interpretarea statistică a comportării microparticulelor.....                                | 221 |
| 4.3.3. Discutarea unor sisteme cuantice simple.....                                                 | 222 |
| 4.3.4. Efectul tunel ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                                            | 224 |
| 4.3.5. Determinismul în fizica clasică și fizica cuantică ( <i>Extindere în alte domenii</i> )..... | 227 |
| 4.4. Particule fundamentale ( <i>Extindere în fizică</i> ).....                                     | 229 |
| 4.4.1. Tipuri de particule fundamentale.....                                                        | 229 |
| 4.4.2. Interacțiunile la care participă particulele fundamentale.....                               | 232 |
| Întrebări. Exerciții. Probleme.....                                                                 | 234 |

# 1.

## SISTEM TERMODINAMIC

### 1.1. OBIECTUL TERMODINAMICII

Termodinamica (therme = căldură și dynamics = referitor la forță, din limba greacă) a apărut la începutul secolului al XIX-lea ca urmare directă a dezvoltării forțelor de producție. Apariția mașinilor cu aburi a pus problema determinării condițiilor optime de funcționare a lor.

În acest mod, o problemă practică, legată direct de producție, a dus la formularea principiului al doilea al termodinamicii. Prima lucrare de termodinamică este aceea a inginerului francez Sady Carnot din anul 1824 intitulată „Considerații asupra forței motoare a focului și asupra mașinilor capabile să dezvolte această forță”.

Primul principiu al termodinamicii a fost formulat ceva mai târziu decât principiul al doilea, după circa 18 ani, de către Mayer, Joule și Helmholtz, dar a apărut tot ca o consecință a unei probleme practice, demonstrând imposibilitatea construirii unor mașini care să lucreze periodic și care să nu primească nici un fel de energie din exterior.

Termodinamica este capitolul din fizică ce studiază un anumit tip de mișcare a materiei și anume mișcarea termică. Ea nu se limitează însă numai la studiul fenomenelor termice, deoarece mișcarea termică stă la baza tuturor fenomenelor (electrice, magnetice, nucleare etc) cărora le este proprie mișcarea dezordonată și continuă a particulelor din care este constituit sistemul respectiv.

În forma sa clasică termodinamica studiază numai sistemele aflate în echilibru termic, cât și trecerea sistemelor dintr-o stare de echilibru într-o altă stare de echilibru.

Termodinamica studiază proprietățile generale ale sistemelor aflate în echilibru termic pe baza postulatelor termodinamicii, pe baza a trei principii fundamentale, denumite *principiile termodinamicii*, cât și pe baza cunoașterii unui întreg șir de rezultate experimentale care sînt cuprinse în *constantelor*



de material (căldurile molare, căldurile specifice latente, coeficienții de dilatare etc).

Termodinamica nu face apel la structura discretă, moleculară a materiei și din această cauză ea are un caracter *fenomenologic* în sensul că explică toate proprietățile de ansamblu ale sistemelor fără a corela aceste proprietăți cu reprezentările moleculare ale substanței. Dar mai mult, concluziile care decurg din ea nu se schimbă dacă particularitățile particulelor care alcătuiesc sistemul se modifică (sistem de particule clasice, cuantice de diverse tipuri etc).

## 1.2. NOȚIUNILE DE BAZĂ ALE TERMODINAMICII

Un sistem termodinamic sau un sistem macroscopic este un sistem format dintr-un număr foarte mare de particule aflate în mișcare termică, delimitat prin frontiere naturale sau mintal. Un gaz aflat într-un cilindru cu piston, o bară metalică, o cantitate oarecare de lichid dintr-un vas formează sisteme termodinamice. Dar nu orice sistem este și sistem termodinamic deoarece acestea sînt limitate atît superior cît și inferior, în sensul că un sistem infinit cum este Universul, sau un sistem format dintr-un număr mic de particule nu poate fi considerat sistem termodinamic.

Tot ceea ce este în afara sistemului termodinamic poartă numele de *mediu exterior* (sau *înconjurător*).

Numărul de mărimi fizice care în principiu pot fi măsurate și care caracterizează un sistem termodinamic poartă numele de *parametrii termodinamici* sau *parametrii macroscopici*. Aceștia pot fi: presiunea, volumul, temperatura, intensitatea cîmpului electric sau magnetic etc.

Parametrii termodinamici pot fi împărțiți în două mari clase: *parametrii externi* care caracterizează poziția corpurilor exterioare față de sistem, cel mai tipic parametru extern fiind volumul  $V$  și *parametrii interni*, care depind de vitezele și de pozițiile moleculelor din sistem. Ca parametrii interni avem presiunea, energia, temperatura etc.

Valoarea numerică a parametrilor termodinamici independenți, la un anumit moment, determină *starea sistemului* la acel moment, stare ce caracterizează din punct de vedere cantitativ sistemul termodinamic. Parametrii termodinamici care caracterizează starea unui sistem poartă numele de *parametrii de stare* sau *funcții de stare*.

Să luăm un exemplu. O masă dată de gaz ideal închisă într-un cilindru cu piston. Volumul cilindrului este în același timp volumul sistemului și este parametrul extern. Presiunea și temperatura sînt parametrii interni ai sistemului. Valoarea numerică a volumului și a temperaturii determină starea sistemului, deoarece presiunea poate fi dedusă din ecuația de stare. Deci la acel moment starea sistemului (a gazului) este complet determinată de parametrii de stare.

Dacă parametrii termodinamici nu variază în timp atunci sistemul se află într-o *stare staționară*. Dacă însă sistemul se află într-o stare staționară în care nu există nici fluxuri staționare produse de o sursă externă (parametrii de stare nu variază nici în spațiu) atunci sistemul se află în *starea de echilibru termodinamic*.

Cînd parametrii unui sistem nu sînt constanți și variază în timp, acesta suferă o *transformare* sau are loc un *proces*. Transformarea unui sistem este determinată dacă cunoaștem în orice moment parametrii de stare ai sistemului. Dacă ne referim din nou la exemplul descris mai înainte cu o masă dată de gaz ideal închisă într-un cilindru cu piston, atunci, pentru o anumită valoare a presiunii și a volumului sistemul se va afla într-o stare

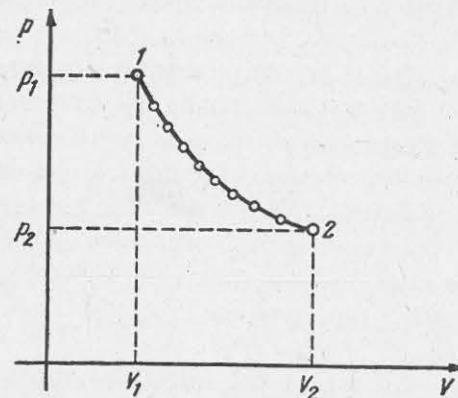


Fig. 1.1. Transformare termodinamică deschisă.

1, care poate fi reprezentată într-o diagramă  $(p, V)$  sau diagramă Clapeyron cum se mai numește, printr-un punct ca în figura 1.1. Dacă sistemul suferă o transformare și ajunge într-o stare 2, determinată de presiunea  $p_2$  și volumul  $V_2$ , putem desena această transformare pe figură numai dacă cunoaștem, la fiecare moment, valorile intermediare ale presiunii și volumului. Acest lucru se poate realiza trecînd printr-o serie de stări de echilibru cînd cunoaștem parametrii de stare ai sistemului.

Procese termodinamice se împart în *procese de echilibru* sau *quasi-stactice* și *procese de neechilibru* sau *nestactice*. Procesele de echilibru sînt acele procese în care sistemul pleacă dintr-o stare de echilibru și ajunge în altă stare de echilibru, în timpul procesului parametrii termodinamici variînd infinit de lent, astfel încît sistemul să se afle în tot timpul transformării în stări de echilibru. Numai procesele de echilibru pot fi reprezentate grafic, așa cum am văzut în exemplul de mai sus.

Procese de neechilibru sînt acele procese în care unul sau mai mulți parametrii variază în timp sau în spațiu.

Să luăm un exemplu. O bară metalică pe care o încălzim la un capăt. Punem termometre în diverse puncte pe bară. Ce observăm? La început temperaturile sînt diferite în diverse puncte pe bară, la același moment, dar pe măsură ce trece timpul, temperaturile cresc. Deci un parametru termodinamic, temperatura, variază atît în spațiu, de-a lungul barei cît și în timp. La un anumit moment cînd se atinge starea de staționaritate, temperaturile rămîn diferite în diverse puncte pe bară, dar constante de-a lungul barei. Avem de a face numai cu o variație în spațiu a parametrului termodinamic temperatura.

Transformările termodinamice mai pot fi împărțite și în: *transformări deschise*, în care sistemul pleacă dintr-o stare și ajunge în altă stare diferită de starea inițială (fig. 1.1) și *transformări închise sau ciclice* în care starea inițială a sistemului coincide cu starea sa finală.

Procesele termodinamice se mai pot clasifica în două mari clase: *procese reversibile* și *procese ireversibile*. Un proces termodinamic este un proces reversibil dacă sistemul trecând din starea 1 în starea 2, atunci și trecerea inversă, din starea 2 în starea 1 se poate efectua exact pe același drum, fără ca sistemul sau corpurile înconjurătoare cu care vine în contact să-și modifice starea termodinamică. Toate procesele mecanice fără frecare sunt procese reversibile. Acest lucru se explică prin aceea că ecuațiile de mișcare care descriu procesele mecanice, în speță ecuația lui Newton, este o ecuație invariantă la schimbarea timpului din  $t$  în  $-t$ . Procesele cvasistatice sunt de asemenea procese reversibile.

Un proces este ireversibil atunci când un sistem trece dintr-o stare 1 într-o stare 2, trecerea inversă fiind posibilă pe același drum, numai dacă are loc o schimbare a sistemului sau a corpurilor înconjurătoare (în sensul că are loc o pierdere de energie a sistemului sau a corpurilor înconjurătoare). Procesele ireversibile sunt descrise de ecuații care nu sunt invariante la schimbarea timpului din  $t$  în  $-t$ . De exemplu, dacă există două surse de căldură, atunci are loc, de la sine, un transport de căldură de la sursa caldă la sursa rece. Procesul invers nu este posibil niciodată de la sine, deoarece pentru a trece o cantitate de căldură de la sursa rece la sursa caldă trebuie să efectuăm un lucru mecanic. Din această cauză transportul de căldură (energie) este un proces ireversibil.

Procesele nestatice sunt procese ireversibile, ca de exemplu difuzia, conductibilitatea termică, vîscozitatea. Dar mai mult, toate procesele care sunt însoțite de frecare sunt procese ireversibile, astfel încît toate procesele naturale sunt procese ireversibile.

În general un sistem termodinamic interacționează cu mediul exterior. În unele cazuri, de altfel ideale, putem presupune că această interacțiune nu există. În acest caz spunem că sistemul este *izolat* de mediul exterior.

### 1.3. POSTULATELE TERMODINAMICII

Termodinamica se bazează pe două postulate fundamentale. *Primul postulat al termodinamicii* a fost formulat de Boltzmann și se enunță astfel:

*dacă un sistem termodinamic este scos din starea de echilibru și se izolează de mediul exterior, atunci el revine întotdeauna, de la sine, în starea de echilibru și nu poate ieși din această stare fără acțiunea unor forțe exterioare.*

Procesul de revenire al sistemului la starea de echilibru poartă numele de *relaxare*, iar timpul corespunzător *timp de relaxare*. Acest timp are valori

foarte diferite, de la ordinul anilor pînă la ordinul a  $10^{-20}$  s, în funcție de natura sistemului și a procesului.

Acest postulat restrînge domeniul de aplicabilitate al termodinamicii, în sensul că nu ia în considerație abaterile spontane ale sistemului de la starea de echilibru, abateri care poartă numele de *fluctuații*. Aceste fluctuații sînt cu atît mai mici cu cît sistemul este format dintr-un număr foarte mare de particule. Termodinamica, după cum am mai arătat, se aplică numai la sisteme formate dintr-un număr enorm de particule și deci și fluctuațiile pot fi neglijate. Sistemele formate dintr-un număr mic de particule, pentru care fluctuațiile joacă un rol esențial, pot fi studiate numai cu ajutorul fizicii statistice.

*Postulatul al doilea al termodinamicii* introduce noțiunea de temperatură ca parametru ce caracterizează starea de echilibru termic al unui sistem cît și posibilitatea măsurării temperaturii pe baza variației parametrilor interni.

Experimental s-a demonstrat că dacă se pun în contact termic două sisteme  $A$  și  $B$  care se află în stări de echilibru termodinamic, atunci, independent de valoarea parametrilor externi, aceste sisteme fie rămîn în continuare în aceeași stare de echilibru, fie echilibrul se strică, iar după un anumit timp sistemele ajung într-o nouă stare de echilibru, după ce în prealabil a avut loc un schimb de energie între cele două sisteme. În noua stare de echilibru sistemele rămîn un timp nelimitat atîta vreme cît nu intervin forțe exterioare. Două sisteme se află în *contact termic* dacă între ele are loc un schimb de căldură (energie) fără însă să aibă loc și un schimb de substanță.

De asemenea experiența arată că dacă un sistem  $A$  se află în echilibru termic cu sistemele  $B$  și  $C$ , atunci și sistemele  $B$  și  $C$  se află în aceeași stare de echilibru termodinamic. Tragem concluzia că echilibrul termodinamic satisface proprietatea de tranzitivitate.

Aceste experiențe au permis să se tragă concluzia că starea de echilibru termodinamic trebuie să fie caracterizată nu numai de parametrii externi, ci și de un alt parametru, pe care îl notăm cu  $T$  și care *caracterizează starea de mișcare a particulelor din care este constituit sistemul respectiv*.

Astfel, dacă două sau mai multe sisteme se află în aceeași stare de echilibru, atunci toate aceste sisteme au aceeași valoare pentru parametrul  $T$ , subînțelegînd că nu are loc nici un schimb de energie între aceste sisteme. Dacă două sisteme se află însă în stări diferite de echilibru, atunci aceste sisteme vor fi caracterizate de doi parametrii diferiți,  $T_1$  și  $T_2$ . Puse în contact termic aceste sisteme vor atinge o nouă stare de echilibru, căreia îi va corespunde o nouă valoare a parametrului  $T$ , diferită de valorile inițiale  $T_1$  și  $T_2$ .

Prin convenție s-a stabilit că dacă două sisteme au parametrii  $T_1$  și  $T_2$  diferiți, și sînt puse în contact termic, și dacă are loc un schimb de energie astfel încît sistemul 1 să piardă energie iar sistemul 2 să primească energie, atunci parametrul  $T_1$  este mai mare decît parametrul  $T_2$ .



**Parametrul T care caracterizează starea de echilibru termodinamic al unui sistem și care are aceeași valoare în tot sistemul, independent de numărul de particule din sistem, se numește temperatură.**

*Temperatura este o măsură a intensității mișcării termice și are sens numai pentru sistemele aflate în stări de echilibru termodinamic.*

Existența temperaturii ca parametru de stare al unui sistem aflat în starea de echilibru termodinamic poartă numele de *principiul de zero* al termodinamicii, deoarece, așa cum vom vedea, ca și primul și al doilea principiu al termodinamicii introduce o funcție de stare, temperatura.

În felul acesta putem trage concluzia că *starea de echilibru termodinamic este determinată de totalitatea parametrilor externi și de temperatură*. Dar un sistem aflat în starea de echilibru termodinamic are valori bine determinate ale parametrilor interni. Din această cauză postulatul al doilea al termodinamicii se poate formula și astfel: *în starea de echilibru termodinamic toți parametrii interni ai unui sistem sînt funcție de parametrii externi și de temperatură*.

Deoarece parametrii interni sînt funcție de parametrii externi și de temperatură, dacă menținem parametrii externi constanți, atunci parametrii interni vor depinde numai de temperatură. Astfel o variație de temperatură va duce la o variație a parametrilor interni și invers, cînd parametrii interni variază și temperatura sistemului se modifică. Pe această proprietate se bazează construcția termometrelor.

#### 1.4. METODE DE MĂSURARE A TEMPERATURII. SCĂRI DE TEMPERATURĂ

Temperatura este o mărime fizică ce nu poate fi măsurată în mod obișnuit. După cum este cunoscut, a măsura o mărime fizică înseamnă a stabili de cîte ori este cuprinsă în mărimea dată o altă mărime de aceeași natură care în mod convențional, s-a ales drept unitate de măsură. Pentru măsurarea temperaturii, acest procedeu de măsurare nu poate fi aplicat, adică nu putem stabili de cîte ori se cuprinde în temperatura unui corp o temperatură dată pe care o considerăm drept unitate de temperatură.

Din această cauză, este necesar ca pentru măsurarea temperaturii să se aleagă o altă cale. În acest scop s-a plecat de la principiul echilibrului termic, ce se stabilește între două corpuri cu grad de încălzire diferit datorită schimbului de căldură, și de la faptul cunoscut că proprietățile fizice ale corpurilor variază la încălzirea sau la răcirea lor.

Astfel, pentru a măsura temperatura unui corp se folosește un alt corp (dispozitiv) numit termometru care este adus în contact termic cu primul. După stabilirea echilibrului termic se poate considera că temperatura de măsurat este egală cu temperatura termometrului. Dacă termometrul se caracterizează printr-o mărime fizică ce depinde de temperatura termometrului, atunci această mărime are o valoare bine determinată la temperatura de echilibru. Problema care se pune în continuare este aceea de a exprima

temperatura termometrului cu ajutorul valorii pe care mărimea caracteristică termometrului o are la această temperatură. A stabili o dependență între temperatura termometrului și valoarea mărimii caracteristice termometrului la acea temperatură înseamnă a stabili o scară de măsurat temperatura, denumită pe scurt scară de temperatură.

Pentru stabilirea scării de temperatură este necesar să se aleagă *corpul termometric* și o mărime, ce caracterizează o proprietate a corpului termometric ce depinde de temperatură, numită *mărime termometrică*. De exemplu, în cazul termometrelor cu mercur corpul termometric este coloana de mercur iar mărimea termometrică este lungimea acestei coloane.

După stabilirea corpului termometric și a mărimii termometrice, se alege un interval de temperatură între două stări termice ale unui corp oarecare, perfect reproductibile. Se aduce corpul termometric în stările termice corespunzătoare limitelor intervalului de temperatură și se măsoară valoarea mărimii termometrice în aceste stări. Acestor valori ale mărimii termometrice li se asociază valori bine precizate ale temperaturii.

Temperaturile corespunzătoare stărilor termice ce delimitează intervalul de temperatură poartă denumirea de *puncte de reper* sau de *puncte termometrice*, iar valorile lor se aleg în mod arbitrar. Prin împărțirea intervalului de temperatură, cuprins între cele două puncte termometrice, la un număr întreg, ales și el în mod arbitrar, se obține unitatea de temperatură în scara respectivă care se numește *grad* (cu excepția sistemului internațional SI).

Ca stări termice constante, perfect reproductibile, s-au ales stările de echilibru dintre două sau trei faze ale uneia și aceleiași substanțe, sub presiune dată (de obicei presiunea atmosferică de 760 Torr).

În prezent se folosesc mai multe scări termometrice dintre care la noi în țară sînt folosite scara Celsius și scara practică internațională.

**1.4.1. Scări de temperatură.** *Scara Celsius* sau scara centigradă are ca stări termice de echilibru, ce delimitează intervalul de temperatură, starea de echilibru dintre gheața care se topește și apa sub presiune normală, a cărei temperatură este considerată egală cu 0 și starea de fierbere a apei pure sub presiune atmosferică normală a cărei temperatură este considerată ca fiind egală cu 100. Gradul Celsius (avînd simbolul °C) este egal cu a suta parte din intervalul de temperatură considerat mai sus. Temperaturile inferioare punctului de topire a gheții se consideră negative.

Valoarea unui grad depinde de natura substanței din care este făcut corpul termometric. Să folosim pentru realizarea unei scări convenționale (Celsius, de exemplu) două termometre, unul cu mercur iar altul cu alcool. Notăm la ambele termometre cu 0° indicațiile lor cînd sînt în echilibru termic cu gheața care se topește la presiune atmosferică normală și cu 100° indicațiile cînd se află în apă care fierbe la aceeași presiune. Împărțim acest interval în 100 de părți egale. Deoarece cele două corpuri termometrice

sînt formate din substanțe de natură diferită, (mercur și alcool) cu coeficienții liniari de dilatare diferiți, care pot depinde la rîndul lor de temperatură în mod diferit, temperaturile măsurate cu cele două termometre vor fi diferite (se exclud reperele  $0^\circ$  și  $100^\circ$ ). Aceasta înseamnă că fiecăruia din cele două termometre îi corespunde o scară de temperatură proprie. La același rezultat se ajunge dacă folosim termometre avînd alte corpuri termometrice. Generalizînd aceste rezultate, se ajunge la concluzia că se pot realiza atîtea scări termometrice cîte corpuri și mărimi termometrice pot fi alese.

Pentru a măsura exact temperatura cît și pentru a compara între ele temperaturile măsurate cu diferite termometre este necesar să se realizeze o scară termometrică care să nu depindă de natura corpului termometric sau de mărimea termometrică.

*Scara standard de temperatură.* O scară de temperatură universală independentă de natura corpului termometric și utilă pentru un interval larg de temperaturi, a fost propusă în anul 1848 de către Kelvin, care a folosit la stabilirea ei principiile termodinamicii. Scara de temperatură propusă de Kelvin, a fost numită scara termodinamică, iar temperatura exprimată în această scară, temperatură absolută (se notează cu  $T$ ).

Originea scării termodinamice, este numită *zero absolut* (ea nu poate fi atinsă practic, v. principiul III al termodinamicii) iar temperatura de topire a gheții sub presiunea propriilor săi vapori (punctul triplu al apei) este notată cu 273,16. Unitatea de temperatură în scara termodinamică este Kelvinul, avînd simbolul K. Kelvinul reprezintă a 273,16 — a parte din intervalul de temperatură cuprins între zero absolut și punctul triplu al apei.

Scara termodinamică de temperatură nu poate fi realizată practic deoarece ea se definește în legătură cu o mașină termică ideală ce funcționează după un ciclu Carnot.

S-a constatat, însă, că se poate realiza o scară termometrică, apropiată ca proprietăți de scara termodinamică, dacă se alege drept corp termometric gazul ideal iar ca mărime termodinamică fie volumul unei mase de gaz ideal la presiune constantă, fie presiunea acestuia la volum constant.

Aceste mărimi termometrice depind exclusiv de temperatură prin relațiile cunoscute:

$$V = \text{const.} \times T, \text{ la } p = \text{constant}$$

și

$$p = \text{const.} \times T, \text{ la } V = \text{constant.}$$

Dependența este lineară și universală, independentă de natura gazului (considerat ideal), deci este cea mai potrivită pentru a fi folosită la stabilirea unei scări de temperatură.

Din această cauză, printr-o convenție internațională, s-a ales ca *scară standard* de temperatură, scara termometrului cu hidrogen (gaz ce are o comportare foarte apropiată de gazul perfect) la volum constant. Ca puncte de

reper s-au luat temperatura de topire a gheții și temperatura de fierbere a apei distilate sub presiune normală care au fost notate respectiv cu 0 și 100, iar ca unitate de temperatură s-a ales gradul centigrad.

În această scară, simbolul temperaturii este  $t$ , iar unitatea este gradul Celsius ( $^\circ\text{C}$ ). Originea scării este la  $0^\circ\text{C}$  și corespunde la 273,15 K.

Legătura între temperatura măsurată în K și temperatura măsurată în  $^\circ\text{C}$  este exprimată de relația

$$TK = t^\circ\text{C} + 273,15.$$

Scara de temperatură standard a fost extinsă și în afara domeniului  $0-100^\circ\text{C}$ , alegîndu-se și alte puncte de reper corespunzătoare temperaturilor unor stări termice constante și reproductibile.

Scara de temperatură a gazului ideal, extinsă, avînd punctele de reper indicate în tabelul 1.1, poartă denumirea de *scară internațională practică de temperatură*. Toate punctele de reper din tabel, cu excepția punctului triplu al apei, se consideră la presiunea atmosferică normală  $\left(101\,325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$ .

Tabelul 1.1.

| Puncte fixe termometrice<br>(puncte de reper) | Temperatura<br>în $^\circ\text{C}$ |
|-----------------------------------------------|------------------------------------|
| Punctul de fierbere al oxigenului             | - 182,970                          |
| Punctul de topire al gheții                   | 0,000                              |
| Punctul triplu al apei                        | 0,010                              |
| Punctul de fierbere al apei                   | 100,000                            |
| Punctul de solidificare al Zn                 | 419,505                            |
| Punctul de solidificare al Ag                 | 960,800                            |
| Punctul de solidificare al Au                 | 1063,000                           |

În felul acesta, termometrul cu gaz la volumul constant este considerat termometru standard și toate termometrele folosite în laboratoare sau industrie trebuie etalonate în raport cu primul. Etalonarea constă în trasarea scării de măsurare a termometrului de etalonat prin comparare cu indicațiile termometrului cu gaz.



#### EXTINDERE ÎN TEHNOLOGIE

**1.4.2. Dispozitive pentru măsurarea temperaturii.** Măsurarea temperaturii sau a variației de temperatură, menținerea unui regim termic constant sau realizarea unui regim termic care să varieze în timp într-un anumit fel sînt operații care se realizează în mod curent aproape în toate domeniile de activitate practică ale omului. Pentru ca aceste operații să fie rapide și precise au fost realizate termometre relativ simple de construcție și precizie diferite care acoperă un domeniu larg de temperatură (între  $-200$  și  $+3\,000^\circ\text{C}$ ).



Termometrele pot fi clasificate în funcție de principiul fizic care stă la baza funcționării lor în:

- termometre cu variație de volum (termometrul cu gaz, termometrele de sticlă cu lichid ș.a.);
- termometre cu variație de presiune (termometrele manometrice);
- termometre bazate pe variația rezistenței electrice cu temperatura (termometrele cu rezistență sau cu termistori);
- termometre bazate pe variația t.e.m. cu temperatura (termometrele cu termocuplu);
- termometre bazate pe variația energiei radiante cu temperatura (pirometrele cu radiație).

Vom descrie pe scurt termometrele folosite curent în cercetarea științifică și în producție.

a) *Termometrele de sticlă cu lichid*, se folosesc pentru măsurarea temperaturilor cuprinse între  $-190$  și  $+700^{\circ}\text{C}$ . Principiul de funcționare a lor se bazează pe variația cu temperatura a lungimii unei coloane de lichid, închis într-un tub capilar, ca efect al dilatației lichidului.

La termometrele cu lichid se folosesc drept corpuri termometrice de obicei: mercurul, toluenul, alcoolul etilic, eterul de petrol, pentanul ș.a. Intervalele de temperatură în care pot fi folosite sînt date în tabelul 1.2.

Dintre termometrele de sticlă cu lichid cele mai răspîndite sînt termometrele cu mercur. Aceasta datorită unor calități ale mercurului cum sînt: nu udă sticla, se obține ușor sub formă chimic pură, iar la presiunea atmosferică normală rămîne în stare lichidă într-un interval larg de temperatură (de la  $-38,86$  la  $+356,7^{\circ}\text{C}$ ). Trebuie subliniat că mercurul are un coeficient de dilatare termică ce variază foarte puțin în funcție de temperatură și din această cauză scara termometrului rămîne aproape liniară pînă la  $200^{\circ}\text{C}$ . Mercurul are o căldură specifică relativ mică, din această cauză și inerția termometrelor cu mercur este mică.

Tabelul 1.2.

| Corpul termoelectric | Intervalul posibil de folosire, $^{\circ}\text{C}$ |         |
|----------------------|----------------------------------------------------|---------|
|                      | de la                                              | pînă la |
| Mercur               | $-30$                                              | $700$   |
| Toluen               | $-90$                                              | $100$   |
| Alcool etilic        | $-100$                                             | $75$    |
| Eter de petrol       | $-130$                                             | $25$    |
| Pentan               | $-190$                                             | $20$    |

Tubul capilar al termometrelor ce măsoară temperaturi mai mici de  $+150^{\circ}\text{C}$  este umplut cu un gaz inert (azot) la presiune normală. La termometrele cu mercur ce măsoară temperaturi mai mari de  $+150^{\circ}\text{C}$ , tubul capilar este umplut cu azot sub presiune. Valoarea presiunii

poate depăși  $20\text{ atm}$  în funcție de temperatura maximă pe care o măsoară termometrul.

Construcția termometrelor cu lichid este foarte variată. În figura 1.2 sînt prezentate cîteva tipuri de termometre de sticlă cu lichid, folosite în laboratoare și în industrie.

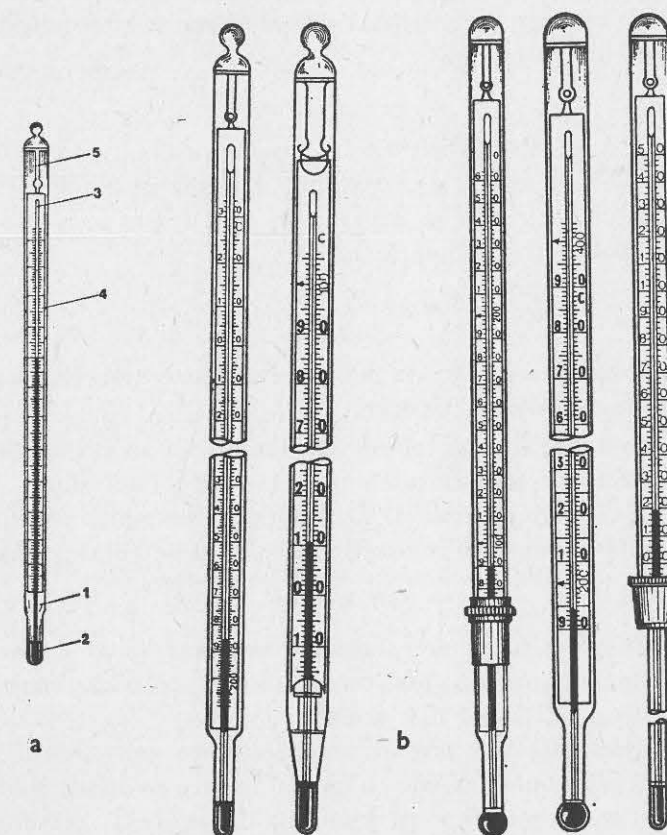


Fig. 1.2. a) Părțile componente ale unui termometru;  
b) diferite tipuri de termometre.

Se observă din figură că deși termometrele cu lichid au forme diferite, ele au unele elemente constructive comune. Acestea sînt: rezervorul cu lichid 1 (mercur sau alt lichid termometric) de formă cilindrică sau sferică, care se continuă cu un capilar 2 confecționat din aceeași sticlă ca și rezervorul, o scală gradată 3 confecționată din sticlă mată și fixată în dreptul capilarului și învelișul din sticlă ce protejează capilarul și scala 4. Precizia termometrelor cu lichid (egală cu cea mai mică variație de temperatură pe care o poate măsura termometrul) variază, în funcție de construcție, între  $1^{\circ}\text{C}$  și  $0,01^{\circ}\text{C}$ .

b) *Termometrul cu rezistență*. În cazul termometrului cu rezistență, corpul termometric este o substanță conductoare sau semiconductoare,

iar mărimea termometrică ce variază cu temperatura este rezistența electrică a acestora.

Rezistența conductorilor electrici crește cu creșterea temperaturii după o lege cunoscută dar care nu este aceeași pentru orice interval de temperatură.

Cînd variația rezistenței cu temperatura este liniară se poate folosi următoarea relație:

$$R_t = R_0(1 + At), \quad (1.1)$$

unde  $R$  este rezistența electrică a termometrului la temperatura  $t^\circ\text{C}$ ,  $R_0$  este rezistența sa la  $0^\circ\text{C}$  iar constanta  $A$  se numește coeficientul termic al rezistenței electrice și se măsoară în  $\text{grad}^{-1}$ . Din această relație temperatura poate fi exprimată astfel:

$$t = \frac{R_t - R_0}{R_0 A},$$

iar măsurarea ei se reduce la măsurarea rezistenței electrice a termometrului la cele două temperaturi.

Substanțele care se folosesc la construirea termometrelor cu rezistență trebuie să îndeplinească unele condiții cum sînt:

- coeficientul termic al rezistenței să fie mare, pentru a asigura o sensibilitate mare a termometrului (prin sensibilitatea termometrului cu rezistență,  $S = \frac{\Delta R}{\Delta t} = R_0 A$ , dedusă din (1.1), înțelegem variația rezistenței  $\Delta R$  a termometrului cînd temperatura sa variază cu  $1^\circ\text{C}$ );
- conductorul să aibă rezistivitate electrică mare pentru a putea utiliza un fir cît mai scurt;
- substanța din care este confecționat conductorul electric nu trebuie să reacționeze chimic cu mediul în care se măsoară temperatura, pentru a nu-și modifica proprietățile în procesul măsurării.

Cele mai întrebuintate metale pentru confecționarea termometrelor cu rezistență, care îndeplinesc bine condițiile de mai sus, sînt: platina pură pentru intervalul de temperatură de la  $200$  pînă la  $1100^\circ\text{C}$ , nichelul pur pentru intervalul  $-100$  la  $+200^\circ\text{C}$  și cuprul pur în domeniul  $-20$  la  $+100^\circ\text{C}$ .

Rezistența electrică a termometrului, aflat la diferite temperaturi, se măsoară cu ajutorul unei punți electrice (punte Wheastone) în care una dintre ramuri este chiar firul termometrului. Datorită preciziei mari cu care se măsoară rezistența cu ajutorul punților electrice, precizia termometrului cu rezistență este de  $0,001^\circ\text{C}$ .

*Termistorii* sînt termometre cu rezistență la care corpul termometric este o substanță semiconductoare. În cazul semiconductoarelor, rezistența electrică scade sensibil odată cu creșterea temperaturii, după o lege exponențială, iar coeficientul termic al rezistenței este

negativ și aproximativ de 10 ori mai mare decît la metale. De asemenea rezistivitatea electrică este de sute de ori mai mare decît rezistivitatea conductorilor. Datorită acestor proprietăți sensibilitatea termistorilor este foarte mare iar dimensiunile lor (datorită rezistivității mari) pot fi relativ mici (de ordinul unui mm sau mai mici).

Rezistența lor se măsoară tot cu ajutorul unei punți electrice. Precizia de măsurare a temperaturii cu termistorul, în acest caz, este de  $0,001^\circ\text{C}$ .

c) *Termocuplul*. Termocuplul este un dispozitiv de măsurare a temperaturilor care se bazează pe fenomenul termoelectric numit efect Seebeck, descoperit de Seebeck în anul 1821. Efectul Seebeck constă în apariția unei tensiuni electromotoare într-un circuit electric închis, format din doi conductori de natură diferită, atunci cînd locurile de sudură a celor două metale au temperaturi diferite. Tensiunea ce apare în circuit poartă denumirea de tensiune termoelectrică iar valoarea ei depinde de diferența  $t_1 - t_2$  dintre temperaturile la care se află sudurile. În cazul termometrului cu termocuplu (denumit pe scurt termocuplu) corpul termometric îl constituie cele două metale sudate la capete (numite și cupluri) iar mărimea termometrică este tensiunea termoelectromotoare (prescurtat t.t.e.m.).

Pentru a putea folosi la măsurarea temperaturii, termocuplul trebuie să îndeplinească anumite condiții și anume:

- materialele din care sînt confecționați conductorii termocuplului să nu-și modifice structura în timpul măsurării;
- t.t.e.m. să depindă puternic de temperatură pentru a asigura o sensibilitate mare;
- legea de variație a t.t.e.m. cu temperatura să fie simplă (pe cît posibil lineară).

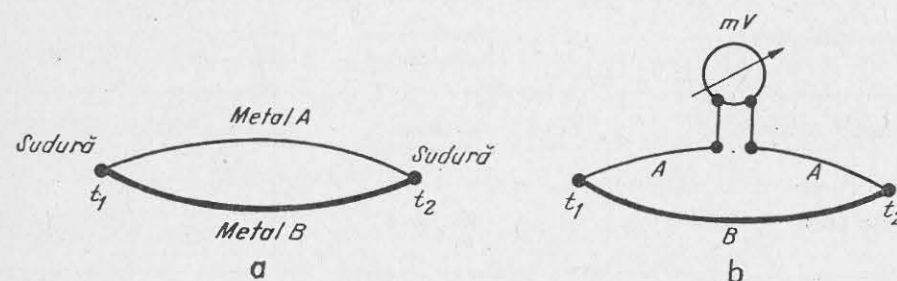


Fig. 1.3. a) Termocuplu; b) montajul de măsură al unui termocuplu.

Pentru a măsura temperatura cu un termocuplu, în circuitul său trebuie introdus un aparat de măsurat t.t.e.m. (se folosește de obicei un milivoltmetru) Conectarea aparatului de măsură la un termocuplu (fig. 1.3, a) se face ca în figura 1.3, b. Milivoltmetrul va indica o tensiune proporțională cu diferența  $t_2 - t_1$ . Sudura termocuplului,



aflată la temperatura  $t_2$  se numește sudură caldă dacă  $t_2 > t_1$ , iar sudura aflată la temperatura  $t_1$  se numește sudură rece. Dacă sudura rece se menține la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ , prin introducerea ei într-un vas Dewar (termos) în care se află gheață care se topește, indicația milivoltmetrului este proporțională cu temperatura la care se află sudura caldă. Pentru domenii restrânse de temperatură această proporționalitate poate fi descrisă de ecuația:

$$E_t = E_0 + at$$

unde  $a$  este o constantă ce depinde de natura termocuplului,  $E_t$  și  $E_0$  sînt t.e.m. la temperatura  $t^\circ\text{C}$ , respectiv la  $0^\circ\text{C}$ .

Sensibilitatea termocuplului se definește ca fiind egală cu  $S = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}$  și se exprimă, de obicei în  $\mu\text{V}/\text{grad}$ . Ea reprezintă tensiunea t.e.m. generată de termocuplu cînd între suduri există o diferență de temperatură de  $1^\circ\text{C}$ . Cunoscînd sensibilitatea termocuplului și luînd  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , iar  $t_2 = t$  (temperatura de măsurat), avem  $t = \frac{E}{S}$ , unde  $E$  este indicația milivoltmetrului la temperatura  $t$ .

Cele mai răspîndite termocupluri cît și domeniul lor de funcționare sînt indicate în tabelul 1.3.

Tabelul 1.3.

| Termocuplul                               | Polaritatea          | Limita de utilizare, $^\circ\text{C}$ |        |
|-------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|--------|
|                                           |                      | Minimă                                | Maximă |
| Cupru — Constantan <sup>1)</sup>          | Cu +<br>Constantan — | -200                                  | 400    |
| Fier — Constantan                         | Fe +<br>Constantan — | -200                                  | 600    |
| Cromel <sup>2)</sup> Alamel <sup>3)</sup> | Cromel +<br>Alamel — | -50                                   | 900    |
| Pt Rh (10%) — Pt                          | Pt Rh +<br>Pt —      | 0                                     | 1300   |

<sup>1)</sup> Constantanul — aliaj format din: 45% Ni și 55% Cu.

<sup>2)</sup> Cromelul — aliaj format din: 89% Ni, 10% Cr și 1% Fe.

<sup>3)</sup> Alamelul — aliaj format din: 94% Ni, 2,5% Mn, 2% Al, 1% Si și 0,5% Fe.

**Probleme rezolvate. 1.** Două termometre cu lichid sînt construite din aceeași sticlă și au secțiunile  $S$  ale tubului capilar egale. La un termometru, corpul de lucru este mercurul iar la celălalt alcoolul etilic. Să se afle raportul dintre lungimile corespunzătoare unui grad de

pe scala celor două termometre. Se cunosc coeficienții de dilatare volumică ai mercurului, alcoolului și al sticlei  $\gamma_{\text{Hg}} = 18,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\gamma_{\text{alcool}} = 108 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\gamma_{\text{sticlă}} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

*Rezolvare.*

Volumul corespunzător unei diviziuni (unui grad) este egal cu creșterea aparentă de volum a lichidului termometric datorită încălzirii cu  $1^\circ\text{C}$ . Considerăm că la  $0^\circ\text{C}$  lichidul termometric ocupă în întregime volumul  $V_r = V_0$  al rezervorului termometric (v. fig. 1.4.). Dilatarea aparentă a lichidului cînd temperatura crește cu  $\Delta t^\circ\text{C}$ , va fi

$$\begin{aligned} \Delta V_{ap} &= \Delta V_{\text{lichid}} - \Delta V_{\text{sticlă}} = V_0 \gamma_{\text{lichid}} \Delta t - V_0 \gamma_{\text{st.}} \Delta t = \\ &= V_r (\gamma_{\text{lichid}} - \gamma_{\text{st.}}) \Delta t. \end{aligned}$$

Făcînd pe  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ , avem creșterea de volum corespunzătoare unei variații de temperatură egală cu  $1^\circ\text{C}$ :

$$(\Delta V_{ap})_{1^\circ\text{C}} = V_r (\gamma_{\text{lichid}} - \gamma_{\text{st.}}). \quad (1)$$

Dar acestei creșteri de volum îi corespunde o variație  $\Delta x$  a lungimii coloanei de lichid în tubul capilar, care este tocmai lungimea de pe scala termometrului corespunzătoare unui grad, dată de relația:

$$(\Delta V_{ap})_{1^\circ\text{C}} = S \Delta x. \quad (2)$$

Din (1) și (2) se obține, pentru lungimea corespunzătoare unui grad pe scala termometrului, expresia

$$\Delta x = \frac{V_r}{S} (\gamma_{\text{lichid}} - \gamma_{\text{st.}}).$$

Dacă notăm cu  $\Delta x_{\text{Hg}}$  și cu  $\Delta x_{\text{alcool}}$  lungimile unui grad în cazul celor două termometre, se obține

$$\frac{\Delta x_{\text{alcool}}}{\Delta x_{\text{Hg}}} = \frac{\gamma_{\text{alcool}} - \gamma_{\text{st.}}}{\gamma_{\text{Hg}} - \gamma_{\text{st.}}}.$$

Din datele problemei rezultă

$$\frac{\Delta x_{\text{alcool}}}{\Delta x_{\text{Hg}}} = \frac{108 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} - 27 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}}{18,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} - 27 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}} = 6,79 \approx 6,8.$$

**2.** Într-un laborator există un termocuplu. Nu se cunoaște natura metalelor din care este confecționat. Pentru identificarea lui s-a măsurat t.e.m. la două temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  și  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Indicațiile milivoltmetrului au fost  $E_1 = 0,5 \text{ mV}$  și  $E_2 = 2,58 \text{ mV}$ . Să se determine natura termocuplului.

*Rezolvare.*

Sensibilitatea termocuplului este

$$S = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} = \frac{2,08 \text{ mV}}{10 \text{ grd}} = 208 \frac{\mu\text{V}}{\text{grd}}.$$

Din tabelele de sensibilitate a termocuplelor rezultă că este vorba de un termocuplu Fe-Constantan.

**3.** Pentru a măsura temperatura unui termostat s-a folosit un termometru cu sîrmă de fier. La temperatura  $t_1 = 18^\circ\text{C}$ , rezistența termometrului a fost de  $R_1 = 15 \Omega$ . În termostat rezistența termometrului era de  $R_2 = 18,25 \Omega$ . Să se determine temperatura  $t_2$  a termostatului, cunoscînd coeficientul termic al fierului  $A_{Fe} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$ .

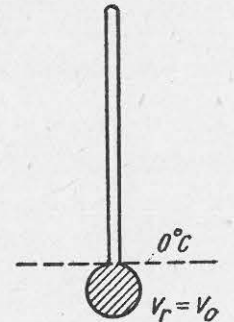


Fig. 1.4. La problema rezolvată 1.

Rezolvare.

Rezistențele termometrului la cele două temperaturi sînt date de expresiile:

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1) \text{ și } R_2 = R_0(1 + \alpha t_2),$$

unde  $R_0$  este rezistența termometrului la  $0^\circ\text{C}$ .

Făcînd raportul între  $R_1$  și  $R_2$ , avem

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \quad (3)$$

Dar produsul  $\alpha t$  este mic față de 1, astfel că se poate folosi aproximația  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$  cînd  $x \ll 1$ . În acest caz (3) devine

$$\frac{R_1}{R_2} (1 - \alpha t_1) = 1 - \alpha t_2,$$

de unde

$$t_2 = \frac{R_2 - R_1}{\alpha R_2} + t_1 = 54,1^\circ\text{C}.$$

## PROBLEME

1. Un termometru cu mercur, greșit etalonat, introdus în gheața care se topește la presiune atmosferică normală indică  $-5^\circ\text{C}$ , iar în vaporii apei care fierbe la presiune normală,  $+103^\circ\text{C}$ . Care este valoarea reală a temperaturii cînd el indică  $27,5^\circ\text{C}$ .

R:  $t = 62,5^\circ\text{C}$ .

2. Presiunea hidrogenului dintr-un termometru cu gaz la volum constant  $V_0$  crește de la valoarea  $p_0$  la temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , la valoarea  $p_1$  la temperatura  $t_1$ . Să se determine această temperatură dacă se cunosc: coeficientul de dilatare volumică al vasului  $\gamma$  și coeficientul de dilatare volumică a hidrogenului  $\gamma_{H_2}$ .

$$R: t_1 = \frac{p_1 - p_0}{p_0 \gamma_{H_2} - p_1 \gamma}.$$

3. Sudura rece a unui termocuplu Cu-constantan este menținută la  $0^\circ\text{C}$ . Dacă sudura caldă este menținută la  $100^\circ\text{C}$ , t.t.e.m. este  $E_1 = 4,277 \text{ mV}$ . Să se afle la ce temperatură  $t_2$ , t.t.e.m. devine  $E_2 = 9,288 \text{ mV}$ .

R:  $t_2 = 222^\circ\text{C}$

## 1.5. ENERGIA INTERNĂ

După cum am văzut, un sistem termodinamic este format dintr-un număr foarte mare de particule. Aceste particule se află într-o mișcare continuă și dezordonată, mișcarea termică, între particule manifestîndu-se în forțe de interacțiune.

Energia particulelor care participă la mișcarea termică și care interacționează între ele poartă numele de *energie internă*.

Energia internă a unui sistem se compune din energia cinetică a mișcării de translație, de rotație și de vibrație a particulelor, cît și din energia potențială determinată de totalitatea forțelor de interacțiune.

Această energie nu trebuie confundată cu energia totală a unui sistem, care se compune din energia externă și energia internă. Energia internă este deci numai o parte din energia totală a sistemului. Energia externă se compune din energia cinetică și energia potențială a unui sistem considerat ca un întreg și care se studiază în cadrul mecanicii.

Energia internă  $U$  a unui sistem este un parametru intern și deci, conform postulatului al doilea al termodinamicii, va depinde numai de parametrii externi  $a_i$  și de temperatura  $T$ , adică

$$U = U(a_i, T). \quad (1.2)$$

Ecuția (1.2) poartă numele de *ecuația calorică de stare*. Această ecuație a fost astfel numită, deoarece pe baza ei se pot obține toate mărimile care se măsoară în calorii (sau în joule), ca de exemplu căldurile molare, căldurile latente etc.

Dacă considerăm ca sistem termodinamic un gaz, atunci parametrii externi  $a_i$  coincid cu volumul gazului  $V$ . În acest caz relația (1.2) ia forma

$$U = U(V, T). \quad (1.3)$$

Conform ecuației (1.2) sau (1.3) energia internă  $U$  depinde de temperatura  $T$  și pentru toate sistemele termodinamice care se întîlnesc în mod obișnuit în natură, odată cu creșterea temperaturii crește și energia internă a sistemului (numai sistemele formate din spinii nucleari ai unor cristale se abat de la această regulă).

Ecuția care leagă parametrii de stare se poate scrie sub forma

$$p = p(V, T), \quad (1.4)$$

în care  $p$  este presiunea gazului. Ecuția (1.4) poartă numele de *ecuație termică de stare* deoarece pe baza ei se poate determina temperatura.

Ecuțiile de stare, ecuația calorică și ecuația termică, nu pot fi deduse din principiile termodinamicii. Aceste ecuații se deduc din experiență, pentru fiecare sistem în parte. Astfel, pentru un gaz ideal ecuația termică are forma binecunoscută  $pV = \nu RT$ , iar ecuația calorică  $U = \nu C_V T$ , ecuații care pot fi deduse și din considerații cinetico-moleculare (statistice). Pentru alte sisteme, cum este cazul gazului real, al lichidelor sau solidelor, există alte ecuații de stare, deduse fie experimental fie pe baza fizicii statistice.

## 1.6. LUCRU MECANIC

Un sistem termodinamic poate interacționa cu mediul înconjurător în sensul că poate avea loc un schimb de energie între sistem și corpurile înconjurătoare. Dacă sistemul primește sau cedează energie din sau spre exterior, în așa fel încît corpurile înconjurătoare să sufere o deplasare în urma acestui schimb, se spune că sistemul absoarbe sau produce lucru mecanic.



**Energia schimbată de un sistem termodinamic cu exteriorul, schimb în urma căruia are loc o variație a parametrilor externi, se numește lucru mecanic  $L$ .**

Lucrul mecanic  $L$  îl considerăm, prin convenție, pozitiv când sistemul cedează energie mediului exterior, deci lucru mecanic efectuat de sistem. Lucrul mecanic  $L$  îl considerăm negativ când sistemul primește energie de la mediul exterior.

Ținând seama de definiție și de convenția adoptată, rezultă că

$$\Delta U = -L, \quad (1.5)$$

în care  $-L$  este lucru mecanic efectuat asupra sistemului.

**1.6.1. Lucru mecanic elementar.** Să calculăm lucrul mecanic efectuat de un gaz care interacționează cu exteriorul numai sub acțiunea forțelor mecanice. Pentru aceasta vom considera un gaz închis într-un cilindru cu piston, în starea inițială 1 având parametrii  $p_1, V_1$ . Presupunem că acest gaz se destinde pînă în starea finală 2, caracterizată de parametrii  $p_2, V_2$ . Transformarea suferită de gaz este reprezentată în figura 1.5. Pentru o variație finită de volum, în sistemul de coordonate  $(p, V)$ , lucru mecanic reprezintă aria delimitată de curba transformării și ordonata punctelor extreme (fig. 1.5).

Lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor exterioare  $F$ , pe distanța  $dx$ , este  $dL = Fdx$ . Deoarece  $F = pS$ , în care  $S$  este suprafața pistonului, rezultă că  $dL = pSdx$ , sau

$$dL = p dV, \quad (1.6)$$

lucru mecanic elementar  $dL$  este egal cu produsul dintre presiunea  $p$  și variația de volum elementar  $dV$ . Să considerăm însă că pistonul nu se deplasează pe o

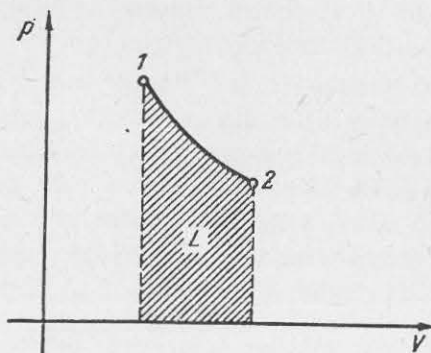


Fig. 1.5. Lucru mecanic în variabile  $(p, V)$ .

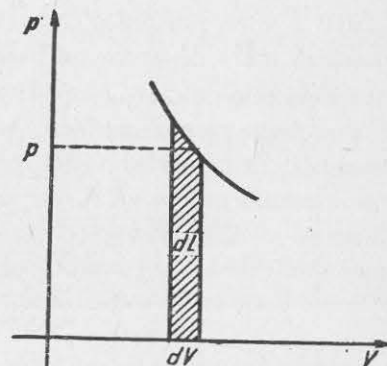


Fig. 1.6. Lucru mecanic elementar în variabile  $(p, V)$ .

distanță finită, ci pe o distanță infinit de mică  $dx$ . Variației distanței  $dx$  îi corespunde o variație de volum  $dV$  la presiunea  $p$  (presiunea  $p$  nu se modifică, deoarece variația de volum  $dV$  este foarte mică) (fig. 1.6.). Aria dreptunghiului elementar din figura 1.6 este egală cu  $p dV$ . Ținând seama de relația (1.6) și

de reprezentarea din figura 1.6 rezultă într-adevăr că geometric, lucru mecanic elementar, reprezintă aria dreptunghiului elementar. Pentru o variație finită de volum, din relația (1.6) rezultă că lucru mecanic este dat de relația

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (1.7)$$

și este reprezentat în figura 1.5. Relația (1.7) explică de ce lucru mecanic reprezintă aria delimitată de curba transformării și ordonata punctelor extreme, integrala reprezentă o însumare de procese elementare.

**1.6.2. Calculul lucrului mecanic pentru diverse transformări.** Să calculăm în continuare lucru mecanic pentru diverse transformări, folosindu-ne de relația (1.7). Dacă transformarea este *izobară* ( $p = \text{ct.}$ ), rezultă că

$$L_{\text{izobară}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV \text{ sau } L_{\text{izobară}} = p(V_2 - V_1). \quad (1.8)$$

Pentru o transformare *izocoră* ( $V = \text{ct.}$ )  $dV = 0$  și din relația (1.7), rezultă că

$$L_{\text{izocor}} = 0. \quad (1.9)$$

Dacă transformarea este *izotermă* ( $T = \text{ct.}$ ) și gazul este ideal, lucru mecanic este dat de expresia

$$L_{\text{izotermă}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}, \text{ sau } L_{\text{izotermă}} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.10)$$

Ținând seama că în transformarea izotermă  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , relația (1.10) mai poate fi scrisă sub forma

$$L_{\text{izotermă}} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (1.11)$$

în care  $\nu$  este numărul de moli de gaz, iar  $R$  constanta universală a gazelor ( $R = 8310 \text{ J/kmol.K}$ ).

## 1.7. CĂLDURA

Un sistem termodinamic mai poate schimba energie cu mediul exterior fără ca parametrii externi să se modifice. În acest caz se spune că între sistem și exterior are loc un schimb de energie sub formă de *căldură*.

**Energia schimbată de un sistem termodinamic cu mediul exterior, când parametrii externi nu se modifică, se numește căldură.**

Deci:

$$\Delta U = Q, \quad (1.12)$$

unde se consideră, prin convenție, căldura  $Q$  pozitivă dacă sistemul primește energie din exterior și negativă dacă sistemul cedează energie corpurilor exterioare.

Lucru mecanic  $L$  și căldura  $Q$  constituie două forme distincte în care poate avea loc un schimb de energie între un sistem termodinamic și mediul exterior; prin lucru mecanic, variind parametrii externi, are loc un transfer de mișcare macroscopică ordonată în mișcare microscopică dezordonată, în timp ce prin schimb de căldură are loc un transfer de mișcare dezordonată microscopică în aceeași formă de mișcare.

Pentru mai multă claritate să luăm un exemplu. Considerăm un cilindru cu piston în care se află un gaz într-o stare bine determinată. Dacă vom comprima gazul, prin împingerea pistonului, gazul va suferi o transformare, în starea finală atât presiunea lui cât și temperatura vor crește. Putem spune că s-a transmis energie gazului prin comprimarea lui, deci prin variația parametrilor externi (prin variația volumului) sub formă de lucru mecanic. Mișcarea macroscopică ordonată a pistonului a dus la intensificarea mișcării dezordonate a moleculelor de gaz, iar în final, la creșterea energiei interne a gazului.

Dacă însă menținem constantă poziția inițială a pistonului, se poate mări energia internă a gazului prin încălzire, punând cilindrul în contact cu o sursă caldă. În acest caz parametrii externi rămân constanți (pistonul rămâne fix), însă prin intermediul ciocnirilor moleculare, de la gaz la sursa caldă și invers, are loc un transfer de căldură, care duce la intensificarea mișcării moleculare. Gazul se încălzește printr-un transfer de mișcare dezordonată de la sursa de căldură la gaz.

Dacă există un schimb de energie prin efectuare de lucru mecanic sau prin schimb de căldură, în starea finală sistemul va avea o energie mai mare sau mai mică, în comparație cu starea inițială, dar în nici un caz nu putem spune că sistemul conține atâtă căldură sau atât lucru mecanic în urma acestui schimb. Lucru mecanic și căldura intervin numai în timpul procesului de transmitere a energiei, ele neputând caracteriza starea unui sistem. Din această cauză atât lucru mecanic cât și căldura nu sînt funcții de stare, spre deosebire de energia internă a unui sistem care este o funcție de stare, așa cum vom vedea mai departe.

**1.7.1. Mărimi calorice.** Definim în continuare cîteva mărimi legate direct de căldură, mărimi ce se folosesc curent în calorimetrie. Căldura se măsoară în unități de energie, deci în SI în joule (J). În tehnică se folosește curent și unitatea tolerată, *caloria*. Caloria de 20°C, cu simbolul  $\text{cal}_{20}$ , reprezintă căldura necesară unui gram de apă pură pentru a-și ridica temperatura cu un grad, de la 19,5°C la 20,5°C, la presiunea atmosferică normală. Caloria de 15°C, cu simbolul  $\text{cal}_{15}$ , reprezintă căldura necesară unui gram de apă

pură pentru a-și ridica temperatura cu un grad, de la 14,5°C la 15,5°C, la presiunea atmosferică normală ( $1 \text{ cal}_{15} = 4,1855 \text{ J}$ ;  $1 \text{ cal}_{20} = 0,999 \text{ cal}_{15}$ ).

*Căldura specifică medie* a unui corp reprezintă căldura  $\Delta Q$  necesară unei mase  $M$  din acel corp pentru a-și ridica temperatura cu  $\Delta t^\circ\text{C}$ , într-o transformare dată, adică

$$C = \frac{\Delta Q}{M \Delta t}.$$

*Căldura specifică  $c$*  a unui corp, pentru o temperatură dată  $t$ , reprezintă limita către care tinde căldura specifică medie a corpului, cînd intervalul de temperatură tinde la zero, adică

$$c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{M \Delta t}, \text{ sau}$$

$$c = \frac{1}{M} \cdot \frac{dQ}{dt}.$$

Unitatea de măsură pentru căldura specifică se deduce din relația de condiție a expresiei de mai sus, astfel că

$$[c]_{\text{SI}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}},$$

$$[c]_{\text{tolerat}} = \frac{\text{kcal.}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Deoarece căldura are sens numai pentru o transformare dată, rezultă că și căldurile specifice vor avea sens numai pentru o transformare dată, ceea ce se specifică printr-un indice atașat la acestea. La gaze avem căldura specifică la volum constant  $c_v$  și căldura specifică la presiune constantă,  $c_p$ ; călduri specifice ce au valori diferite pentru gaze și anume  $c_p > c_v$ . La solide  $c_v \simeq c_p$  deoarece variațiile de volum sînt foarte mici, practic neglijabile la variația temperaturii cu un grad.

Căldurile specifice ale gazelor, lichidelor și solidelor, la temperaturi situate în jurul temperaturii camerei, nu depind de temperatură. La temperaturi joase însă căldurile specifice depind de temperatură și anume cînd temperatura tinde spre zero absolut și căldurile specifice tind la zero.

La temperaturi înalte, pe măsură ce crește temperatura cresc și valorile căldurilor specifice, excepție făcînd doar mercurul, a cărui căldură specifică scade cu creșterea temperaturii și gazele monoatomice ale căror călduri specifice nu depind de temperatură.

Produsul dintre masa unui corp și căldura sa specifică poartă numele de *capacitate calorică*. Dacă luăm masa substanței egală cu masa sa molară  $\mu$ , atunci

$$C = \mu c,$$

în care  $C$  este *căldura molară* a substanței. Aceasta se măsoară în

$$[C]_{\text{SI}} = \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}, \quad [C]_{\text{tolerat}} = \frac{\text{kcal.}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}.$$



La gaze există căldura molară la volum constant  $C_V$  și căldura molară la presiune constantă  $C_p$ , cu  $C_p > C_V$ .

### 1.8. PRIMUL PRINCIPIU AL TERMODINAMICII

Termodinamica se bazează pe trei principii fundamentale, numite *principiile termodinamicii*, care pot fi reprezentate cantitativ sub forma unor ecuații denumite *ecuațiile fundamentale ale termodinamicii*.

Primul principiu al termodinamicii reprezintă forma generală, cantitativă, a legii conservării energiei. Acest principiu introduce o funcție de stare, energia internă, care poate să varieze numai sub acțiunea forțelor exterioare.

Primul principiu al termodinamicii se poate enunța astfel:

**Cînd un sistem termodinamic se află sub acțiunea unor forțe exterioare și trece dintr-o stare inițială într-o stare finală, atunci variația energiei interne a sistemului în această transformare este egală cu căldura primită de sistem ( $Q$ ) și cu lucru mecanic efectuat asupra acestuia ( $-L$ ).**

Matematic, primul principiu al termodinamicii, pentru un proces finit, se scrie sub forma

$$U_2 - U_1 = Q - L. \quad (1.13)$$

Schematic relația (1.13) este reprezentată în figura 1.7. Căldura  $Q$  pe care o primește sistemul duce la schimbarea energiei interne a sistemului și la efectuarea lucrului mecanic  $L$ .

Din primul principiu al termodinamicii rezultă câteva consecințe deosebit de importante și anume:

a) relația (1.13) se mai poate scrie sub forma  $L = Q - (U_2 - U_1)$ , adică lucru mecanic poate fi efectuat fie prin variația energiei interne a sistemului, fie cedînd sistemului căldură;

b) dacă sistemul efectuează o transformare ciclică atunci  $U_2 - U_1 = 0$  și din relația (1.13) rezultă că  $L = Q$ ; în transformările ciclice un sistem poate efectua lucru mecanic numai dacă primește căldură din exterior. Această afirmație, care rezultă ca o consecință directă a primului principiu al termodinamicii explică *imposibilitatea construirii unui perpetuum mobile de tipul I*, adică imposibilitatea

Fig. 1.7. Primul principiu al termodinamicii reprezentat schematic.

construirii unei mașini care să furnizeze lucru mecanic fără să primească energie din exterior. Odată cu formularea și înțelegerea primului principiu al termodinamicii s-a crezut că aceste proiecte vor înceta să mai apară; în realitate, chiar și astăzi apar fel de fel de „inventatori” care caută să infirme acest principiu al termodinamicii cu proiecte din ce în ce mai sofisticate, dar toate se lovesc de acesta ca de o barieră de netrecut;

c) primul principiu al termodinamicii conține *legea conservării energiei*: într-adevăr, dacă considerăm un sistem izolat, adică un sistem care nu schimbă nici un fel de energie cu exteriorul, atunci  $L = Q = 0$  și din relația (1.13) rezultă că  $U_2 - U_1 = 0$ , sau  $U_2 = U_1$ , *energia sistemelor izolate se conservă*.

De asemenea, pentru diverse transformări termodinamice, din primul principiu al termodinamicii (1.13) rezultă că:

d) în transformarea izocoră  $L = 0$  și deci  $U_2 - U_1 = Q$ , căldura absorbită de un sistem duce numai la creșterea energiei interne a sistemului;

e) în transformarea izobară  $L = p(V_2 - V_1)$  astfel că  $Q = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)$ , căldura absorbită de sistem duce la creșterea energiei interne a sistemului și la efectuarea de lucru mecanic;

f) într-o transformare adiabatică, transformare în care nu se schimbă căldură între sistem și exterior ( $Q = 0$ ), din relația (1.13) rezultă că  $U_2 - U_1 = -L$ , lucru mecanic efectuat de sistem se face numai pe seama energiei interne a sistemului, care scade. Cu ajutorul primului principiu al termodinamicii se poate arăta că ecuația de stare pentru o transformare adiabatică are forma

$$pV^\gamma = \text{ct}. \quad (1.14)$$

în care  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  este *exponentul adiabatic*. Pentru două stări distincte, din relația (1.14) rezultă că

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (1.14')$$

Ecuația de stare (1.14) poate fi scrisă și în variabile  $(V, T)$ , ținînd seama de ecuația de stare a gazului ideal  $pV = \nu RT$ , astfel:

$$TV^{\gamma-1} = \text{ct}. \quad (1.15)$$

**Probleme rezolvate. 1.** Într-un cilindru vertical cu piston ce se poate mișca fără frecare se află o masă  $m = 2 \text{ kg}$  de oxigen. Pentru a ridica temperatura gazului cu  $\Delta T = 5 \text{ K}$  acestuia i s-a transmis căldura  $Q = 9160 \text{ J}$ .

Să se afle: a) căldura specifică în procesul de încălzire; b) lucrul mecanic efectuat de gaz prin destindere; c) variația  $\Delta U$  a energiei interne a gazului. Masa molară a oxigenului se cunoaște  $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$ .

*Rezolvare.*

Asupra pistonului acționează trei forțe (fig. 1.8). Forța de greutate  $\vec{G}$  a pistonului, forța datorată presiunii atmosferice  $\vec{F}$  și forța datorată presiunii gazului  $\vec{F}'$  închis în cilindru. Primele două forțe rămîn mereu constante. Deoarece în orice poziție a sa pistonul se află în echilibru, rezultă că în procesul încălzirii presiunea oxigenului rămîne constantă.

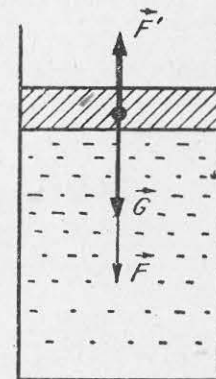


Fig. 1.8. La problema rezolvată 1.

a) Căldura specifică în procesul încălzirii este căldura specifică izobară:

$$c_p = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{9\,160\text{ J}}{2\text{ kg} \cdot 5\text{ K}} = 916 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

b) Lucrul mecanic efectuat de gaz într-o destindere izobară este:

$$L_{12} = p(V_2 - V_1), \quad (1)$$

unde  $V_1$  și  $V_2$  sînt volumele ocupate de gaz în starea inițială, respectiv finală. Aceste volume se află din ecuația de stare, scrisă pentru cele două stări

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (2)$$

Înlocuind  $pV_1$  și  $pV_2$  din (2) în (1) se obține

$$L_{12} = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{2\text{ kg}}{32\text{ kg/kmol}} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}} \cdot 5\text{ K} = 2\,596\text{ J}.$$

c) Căldura absorbită de gaz duce la creșterea energiei interne a gazului și la efectuarea de lucru mecanic. Din primul principiu al termodinamicii, avem

$$Q = \Delta U + L,$$

de unde:  $\Delta U = Q - L = 9\,160\text{ J} - 2\,596\text{ J} = 6\,564\text{ J}.$

2. Aerul aflat într-un vas de volum  $V = 0,2\text{ m}^3$  la presiunea  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  este răcit izocor, pierzînd prin răcire căldura  $Q = 50\text{ kJ}$ . Să se afle: a) presiunea finală; b) lucrul mecanic efectuat; c) variația energiei interne. Căldura molară izocoră a aerului  $C_V = \frac{5}{2} R$  ( $R$  este constanta universală a gazelor).

*Rezolvare.*

a) Căldura cedată de aer este

$$Q = \nu C_V(T_1 - T_2), \quad (3)$$

unde  $\nu$  este numărul de kmoli de aer, iar  $T_1$  și  $T_2$  temperaturile inițială, respectiv finală. Datorită răcirii  $T_1 > T_2$ . Scriind ecuațiile de stare avem:

$$p_1 V = \nu RT_1, \quad \text{și} \quad p_2 V = \nu RT_2. \quad (4)$$

Folosind (3) și (4) și  $C_V = \frac{5}{2} R$  se obține

$$Q = \frac{5}{2} V(p_1 - p_2).$$

De unde:

$$p_2 = p_1 - \frac{2}{5} \frac{Q}{V} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - \frac{2}{5} \frac{50 \cdot 10^3\text{ J}}{0,2\text{ m}^3} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

b) Transformarea fiind izocoră  $L = 0$ .

c) Din primul principiu al termodinamicii rezultă

$$\Delta U = Q = 50 \cdot 10^3\text{ J}.$$

3. Temperatura unei mase  $m$  de gaz ideal, avînd masa molară  $\mu$ , crește cu  $\Delta T$  cînd gazul este încălzit: odată la  $p = \text{const.}$ , iar a doua oară cînd este încălzit la  $V = \text{const.}$  Să se afle: a) diferența dintre căldurile  $Q_p$  și  $Q_V$  necesare încălzirii gazului în cele două condiții; b) diferența dintre căldurile specifice izobară și izocoră  $c_p - c_V$ .

*Rezolvare.*

a) Căldura  $Q$  primită de gaz duce la creșterea energiei interne  $\Delta U$  a gazului și la efectuarea unui lucru mecanic de către gaz. Din principiul I al termodinamicii, rezultă  $Q = \Delta U + L$ . În primul caz ( $p = \text{const.}$ ), lucrul mecanic efectuat de gaz va fi  $L = p(V_2 - V_1)$ , unde  $V_1$  și  $V_2$  sînt volumele ocupate de gaz în stările inițială și finală. Ecuația de stare scrisă înainte de încălzirea gazului și după procesul de încălzire este:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Scăzînd prima ecuație din a doua, obținem

$$L = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Deci, pentru încălzirea izobară, avem

$$Q_p = \Delta U + L = \Delta U + \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Pentru încălzirea izocoră, cu același număr de grade  $\Delta T$ , avem  $Q_V = \Delta U$  deoarece  $L = 0$ . Energia internă a gazului ideal fiind funcție numai de temperatură, variația energiei interne este aceeași cînd temperatura variază cu același număr de grade, indiferent de procesul prin care are loc încălzirea gazului.

Făcînd diferența, avem

$$Q_p - Q_V = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \quad (5)$$

b) Căldurile specifice în cele două procese de încălzire sînt

$$c_p = \frac{Q_p}{m\Delta T}, \quad c_V = \frac{Q_V}{m\Delta T}.$$

Făcînd diferența

$$c_p - c_V = \frac{1}{m\Delta T} (Q_p - Q_V). \quad (6)$$

Introducînd (5) în (6) se obține

$$c_p - c_V = \frac{R}{\mu} \quad (7)$$

sau

$$\mu(c_p - c_V) = C_p - C_V = R, \quad (8)$$

unde  $C_p$  și  $C_V$  sînt căldurile molare izobară respectiv izocoră.

În felul acesta, se observă că în cazul gazelor există o diferență substanțială între căldurile specifice izobară și izocoră. Relația (6) sau (7) a fost stabilită de R. Mayer și îi poartă numele.

4. O masă  $m = 58\text{ g}$  de aer este comprimată izoterm la temperatura  $t = 27^\circ\text{C}$  de la presiunea de  $10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  pînă la un volum final mai mic de  $e = 2,718$  ori decît cel inițial.

Să se afle: a) presiunea finală și volumul final; b) variația energiei interne; c) căldura absorbită și lucrul mecanic efectuat de gaz. Masa molară a aerului  $\mu = 29\text{ kg/kmol}$ .

*Rezolvare.*

a) Transformarea fiind izotermă avem

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$



sau, folosind datele problemei

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1 V_1}{\frac{V_1}{e}} = p_1 e = 2,718 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Pentru volumul final avem  $V_2 = \frac{V_1}{e}$ , iar pe  $V_1$  îl aflăm din ecuația de stare, scrisă în starea 1

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

deci

$$V_2 = \frac{V_1}{e} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p_1} \cdot \frac{1}{e} = \frac{58 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{29 \text{ kg/kmol}} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \cdot \frac{1}{2,718} = 18,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 18,3 \text{ l}.$$

b) Transformarea fiind izotermă rezultă  $\Delta U = 0$ .

c) Lucrul mecanic într-o transformare izotermă când gazul trece din starea 1 în starea 2 este:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$\text{În cazul nostru } L_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{1}{e} = -\frac{m}{\mu} RT = -\frac{58 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{29 \text{ kg/kmol}} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K} = -49,86 \cdot 10^2 \text{ J} = -5 \text{ kJ}.$$

Lucrul mecanic fiind negativ înseamnă că nu aerul efectuează lucrul mecanic asupra mediului exterior, ci asupra aerului se efectuează lucru mecanic.

Deoarece  $\Delta U = 0$ , rezultă  $Q = L < 0$ . Adică asupra gazului se efectuează lucru mecanic din exterior iar gazul cedează mediului o cantitate de căldură egală cu lucru efectuat asupra sistemului.

5. Un gaz ideal, avînd căldura molară izocoră  $C_V = \frac{5}{2} R$  ( $R$  constanta universală a gazelor) se destinde după legea descrisă de relația  $p = aV$ , unde  $a = 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^5}$  de la un volum  $V_1 = 1 \text{ l}$  la un volum  $V_2 = 2 \text{ l}$ . Să se calculeze: a) lucrul mecanic efectuat de gaz; b) variația energiei interne a gazului; c) căldura absorbită de gaz; d) căldura molară  $C$  în această transformare.

*Rezolvare.*

a) Lucrul mecanic efectuat de gaz este dat de expresia

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (9)$$

folosită pentru toate transformările în care presiunea nu rămîne constantă. Înlocuind în (9)  $p = aV$  și integrînd, avem

$$L = \int_{V_1}^{V_2} aV dV = a \int_{V_1}^{V_2} V dV = \frac{1}{2} a (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^5} (2^2 - 1^2) \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 = 150 \text{ J}.$$

b) Gazul fiind ideal, rezultă că  $\Delta U$  este proporțional cu  $\Delta T$ . Să stabilim această dependență. Din primul principiu avem

$$Q = \Delta U + L.$$

Considerăm că gazul absoarbe căldură la volum constant, în acest caz  $Q_V = \Delta U$  ( $L = 0$ , deoarece  $\Delta V = 0$ ). Dar din definiția lui  $C_V = \frac{Q_V}{v\Delta T}$  (unde  $v$  este numărul de kilomoli de gaz) rezultă

$$C_V = \frac{\Delta U}{v\Delta T}$$

care ne dă relația căutată  $\Delta U = vC_V\Delta T = vC_V(T_2 - T_1)$ , adevărată pentru toate gazele ideale. Folosind această relație avem,

$$\Delta U = vC_V(T_2 - T_1) = C_V \frac{1}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (10)$$

unde am exprimat pe  $T_2$  și  $T_1$  din ecuația de stare.

Dar  $C_V = \frac{5}{2} R$ , deci (10) devine

$$\Delta U = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (11)$$

Înlocuim  $p_1$  și  $p_2$  cu valorile din  $p_1 = aV_1$  și  $p_2 = aV_2$ , avem

$$\Delta U = \frac{5}{2} a (V_2^2 - V_1^2) = 5 L = 750 \text{ J}.$$

c) Căldura absorbită se obține din principiul I al termodinamicii, avînd pe  $L$  și  $\Delta U$ :

$$Q = \Delta U + L = (750 + 150) \text{ J} = 900 \text{ J}.$$

d) Procesul de încălzire a gazului fiind oarecare, putem scrie

$$Q = vC\Delta T,$$

de unde

$$C = \frac{Q}{v\Delta T} = \frac{\Delta U + L}{v\Delta T}.$$

Deoarece nu cunoaștem pe  $v$ , îl înlocuim din  $\Delta U = vC_V\Delta T$ ,

$$C = \frac{\Delta U + L}{\frac{\Delta U}{C_V}} = C_V \frac{\Delta U + L}{\Delta U} = \frac{5}{2} R \frac{\Delta U + L}{\Delta U} = \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \frac{750 \text{ J} + 150 \text{ J}}{750 \text{ J}} = 24,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

## PROBLEME

1. Într-un cilindru cu piston, izolat termic de exterior, se află o masă  $m = 0,2 \text{ kg}$  de azot la temperatura  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Azotul se destinde, efectuînd lucru mecanic  $L = 4470 \text{ J}$ . Să se afle: a) variația energiei interne a azotului; b) temperatura  $t_2$  după destindere. Căldura specifică izocoră a azotului este  $c_V = 745 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

$$\text{R: a) } \Delta U = L = 4470 \text{ J; b) } t_2 = t_1 - \frac{\Delta U}{mc_V} = -10^\circ\text{C}.$$

2. Pentru a ridica temperatura unei mase de gaz  $m = 20$  kg, avind masa molară  $\mu = 28$  kg/kmol, cu  $\Delta T = 50$  K la presiune constantă, este nevoie de căldura  $Q_p = 0,5$  MJ. Să se afle căldura pe care trebuie să o cedeze gazul cind se răcește la volum constant cu  $\Delta T = 50$  K.

$$R: Q_V = Q_p - \nu R \Delta T = 0,2 \text{ MJ}.$$

3. Temperatura unei mase  $m = 1$  kg de apă crește cu  $\Delta T = 1$  K. Să se calculeze variația energiei interne ce revine unei molecule de apă. Căldura specifică a apei se consideră egală cu  $c = 4200$  J/kg · K, masa molară a apei  $\mu = 18$  kg/kmol, coeficientul de dilatare în volum al apei  $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$  K<sup>-1</sup>.

$$R: \Delta U_0 = \frac{\Delta U}{n} = 1,26 \cdot 10^{-22} \text{ J}.$$

4. Un kilomol de oxigen ( $\mu = 32$  kg/kmol) este încălzit la volum constant de la temperatura inițială  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Ce căldură trebuie transmisă oxigenului pentru ca presiunea lui să crească de 3 ori? Căldura specifică la volum constant pentru oxigen este  $c_V = 657 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ .

$$R: Q_V = 2\mu c_V T_1 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

5. Să se afle căldura  $Q_p$  necesară pentru ca o masă de aer  $m = 5$  g, aflată la temperatura  $T_1 = 290$  K și volumul  $V_1$  să-și mărească volumul de 2 ori. Căldura specifică a aerului la presiune constantă  $c_p = 1018$  J/kgK.

$$R: Q_p = mc_p T_1 = 1,48 \text{ kJ}.$$

6. O masă de aer ce ocupă volumul  $V_1 = 2$  l la presiune atmosferică normală se încălzește izobar, absorbind căldura  $Q_p = 709,3$  J. Să se afle: a) de câte ori crește volumul aerului la încălzire; b) lucrul mecanic efectuat de gaz; c) variația energiei interne. Se dă  $C_p = \frac{5}{2} R$ .

$$R: a) \frac{V_2}{V_1} = 2; \quad b) L = p(V_2 - V_1) \simeq 200 \text{ J}; \quad c) \Delta U = \frac{5}{2} Q_p = 506,6 \text{ J}.$$

7. Un gaz aflat într-un cilindru cu piston participă succesiv la următoarele transformări simple: a) presiunea gazului crește la volum  $V_1$  constant (transformarea 1 → 2); b) volumul crește la presiunea  $p_2$  constantă (transformarea 2 → 3); c) volumul crește la temperatură  $T_3$  constantă (transformarea 3 → 4); d) gazul revine în starea inițială la presiune constantă  $p_1$  (transformarea 4 → 1).

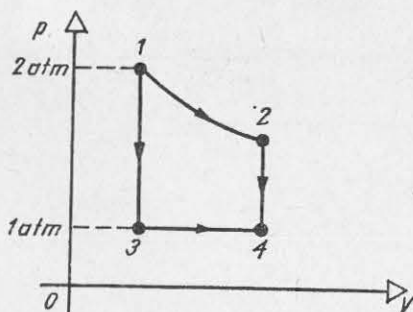


Fig. 1.9. La problema 8.

Să se reprezinte în coordonate  $p, V$ ;  $p, T$  și  $V, T$  graficele acestor transformări. Să se indice transformările în care gazul primește căldura din exterior și cele în care el cedează căldură. Cum variază temperatura gazului de la o stare la alta și ce lucru mecanic intervine în fiecare transformare?

8. Un gaz, ideal, avind căldurile molare  $C_V = \frac{5}{2} R$  și  $C_p = \frac{7}{2} R$ , se află în starea inițială caracterizată de parametrii:  $p_1 = 2$  atm,  $V_1 = 2$  l,  $T_1 = 400$  K. În starea finală gazul are parametrii  $p_4 = 1$  atm,  $V_4 = 3$  l,  $T_4 = 300$  K. Din starea inițială în starea finală se poate ajunge pe două căi distincte: a) pe drumul 1-3-4 (fig. 1.9) și b) pe drumul 1-2-4 în care transformarea 1 → 2 este izotermă. Să se calculeze pentru cele două cazuri lucrul mecanic și

căldura schimbată de gaz cu mediul înconjurător și să se arate că indiferent de drumul ales, variația energiei interne este aceeași.

$$R: a) L = 100 \text{ J}, Q = -150 \text{ J}, \Delta U = -250 \text{ J}; \quad b) L = 162,18 \text{ J}, Q = -87,82 \text{ J}, \Delta U = -250 \text{ J}.$$

## 1.9. PRINCIPIUL AL DOILEA AL TERMODINAMICII

Principiul al doilea al termodinamicii este *principiul entropiei*, un principiu general care indică sensul de evoluție al tuturor sistemelor din natură. Toate formulările legate de mașinile termice sau de alte fenomene concrete sînt niște cazuri particulare, mai mult sau mai puțin generale ale principiului al doilea al termodinamicii.

1.9.1. **Mașini termice.** Principiul al doilea al termodinamicii este principiul entropiei, dar avind un grad de generalitate deosebit, el a putut fi formulat numai după ce s-au acumulat numeroase observații experimentale, care treptat, din aproape în aproape, au putut conduce la formularea sa finală. Vom prezenta cîteva din observațiile experimentale care constituie baza fizică a principiului al doilea al termodinamicii.

O mașină termică este o mașină care produce lucru mecanic consumind căldură. Prin definiție randamentul unei mașini termice este

$$\eta = \frac{L}{Q_1}, \quad (1.16)$$

în care  $L$  este lucru mecanic efectuat de mașină într-un ciclu iar  $Q_1$  căldura primită de mașină în același ciclu. În mașinile termice are loc transformarea căldură — lucru mecanic. Dar pentru procesele ciclice, din primul principiu al termodinamicii rezultă că lucru mecanic se poate transforma în căldură și invers, căldura se poate transforma în lucru mecanic, deoarece  $L = Q$ . Dar această egalitate ne dă numai o imagine calitativă, în sensul că ea ne spune ce în ce se transformă dar nu precizează cît dintr-o anumită căldură se poate transforma în lucru mecanic și invers. Această problemă o putem rezolva numai studiind mașinile termice.

Cea mai simplă mașină termică funcționează după un ciclu Carnot reversibil, adică un ciclu format din două izoterme și două adiabate. Sadi Carnot (1796—1832) studiind o astfel de mașină termică căuta să obțină un randament cît mai mare. În final Carnot ajunge la următoarea concluzie, cunoscută sub denumirea de *teorema lui Carnot*:

**Randamentul mașinilor termice care lucrează după un ciclu Carnot reversibil nu depinde de substanța de lucru sau de construcția mașinii ci numai de temperatura sursei calde și temperatura sursei reci.**

De asemenea *randamentul oricărei mașini termice care funcționează într-un anumit interval de temperatură este mai mic decît randamentul unei*



mașini termice care lucrează după un ciclu Carnot în același interval de temperatură.

Din studiul mașinilor termice au mai fost făcute următoarele observații care s-au concretizat în câteva postulate, astfel, postulatul lui Clausius: *căldura nu poate trece de la sine de la un corp rece la un corp cald*. În nici-o experiență nu s-a observat o trecere spontană, de la sine, a căldurii de la un corp rece la un corp cald, cu toate că acest proces este posibil dacă se intervine din afară, consumându-se lucru mecanic (mașinile frigorifice).

Postulatul lui Thomson susține că *nici o mașină termică nu poate să funcționeze (adică nu poate să producă lucru mecanic) dacă dispune numai de un singur izvor de căldură*, postulat echivalent cu imposibilitatea construirii unui perpetuum mobile de tipul II, adică imposibilitatea construirii unei mașini care să producă lucru mecanic folosind o singură sursă de căldură.

O altă concluzie care se degajă din studiul mașinilor termice: *căldura nu poate fi transformată integral în lucru mecanic* (asupra acestei afirmații vom mai reveni).

Să demonstrăm în continuare teorema lui Carnot pentru o mașină termică reversibilă care folosește drept corp de lucru un gaz perfect, după care vom trage concluziile care rezultă, cu toate că demonstrația s-a făcut pe un caz particular, simplificat.

Ciclul Carnot îl reprezentăm în figura 1.10, în care 1—2 și 3—4 sînt transformările izoterme la temperaturile  $T_1$  și  $T_2$ , iar 2—3 și 4—1 sînt transformările adiabatice. Dacă ciclul se desfășoară în sensul acelor de ceasornic atunci este un *ciclul direct*, adică primește căldură din exterior și efectuează lucru mecanic (motor termic). Dacă ciclul funcționează în sens invers

acelor de ceasornic, *ciclul invers*, avem de-a face cu o *mașină frigorifică*, mașină care transportă căldură de la sursa rece la sursa caldă consumînd lucru mecanic.

Vom considera mașina termică un motor termic, dar pentru simplificarea calculului ne imaginăm aceasta astfel încît după răcirea gazului el nu se evacuează ci se încălzește direct în cilindru. De asemenea considerăm gazul de lucru un gaz ideal.

Gazul ideal din cilindru se află inițial în starea 1, la presiunea  $p_1$  și volumul  $V_1$  (fig. 1.10). Gazul din cilindru se pune în contact termic cu o sursă caldă aflată la temperatura  $T_1$  și primește căldura  $Q_1$  (s-a presupus că în starea inițială 1 gazul din cilindru se află la o temperatură foarte apropiată de  $T_1$ , dar mai mică, pentru a putea avea loc schimbul de căldură de la sursa termică la gazul de lucru; de asemenea s-a presupus că sursa

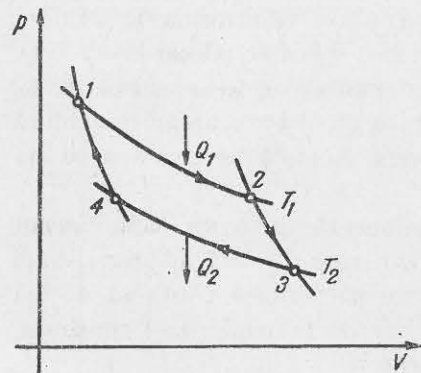


Fig. 1.10. Ciclul Carnot.

termică își menține constantă temperatura, cu toate că cedează o anumită căldură, deoarece ea este un izvor termic foarte mare în comparație cu gazul din cilindru).

Primind căldura  $Q_1$ , gazul ideal din cilindru se dilată izoterm la temperatura  $T_1$  și împinge pistonul, producînd lucru mecanic. Gazul ajunge în starea 2. După aceasta se întrerupe contactul cu sursa termică. Lucru mecanic produs pe izoterma 1—2, vezi relația (1.10), este dat de relația:

$$L_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (1.17)$$

iar  $L_1 = Q_1$  deoarece într-o transformare izotermă variația energiei interne este nulă, căci energia internă a unui gaz ideal nu depinde decît de temperatură.

Din starea 2 gazul se dilată adiabetic pînă ajunge în starea 3, de la temperatura  $T_1$  la temperatura  $T_2$ . Scriind relația (1.15) pentru stările 2 și 3 rezultă că:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (1.18)$$

În starea 3 gazul din cilindru este pus din nou în contact cu o sursă termică aflată la temperatura  $T_2$  căreia îi cedează căldura  $Q_2$  și ajunge izotermic în starea 4. În transformarea izotermică 3—4 avem:

$$-Q_2 = L_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (1.19)$$

După ce gazul a atins starea 4, se înlătură sursa termică și gazul se comprimă adiabetic pînă ajunge din nou în starea inițială 1 și se încălzește pînă la temperatura  $T_1$ . Transformarea 4—1 fiind o transformare adiabetică, din relația (1.15) rezultă că

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}. \quad (1.20)$$

Din primul principiu al termodinamicii rezultă că lucru mecanic efectuat de mașină într-un ciclu este:

$$L = Q_1 - Q_2 \quad (1.21)$$

deoarece  $U_2 - U_1 = 0$ . Randamentul ciclului, din relația (1.16), capătă forma:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ sau } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (1.22)$$

Raportul căldurilor  $Q_2/Q_1$  poate fi calculat cu ajutorul relațiilor (1.17) și (1.19), adică:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{-\nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \text{ sau } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Dar din relațiile (1.18) și (1.20) rezultă că  $\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$ , astfel că în final obținem expresia:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.23)$$

Introducând relația (1.23) în relația (1.22) obținem forma finală a randamentului ciclului Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.24)$$

După cum se vede din relația (1.24) randamentul unei mașini care lucrează după un ciclu Carnot depinde numai de temperatura sursei calde  $T_1$  și de temperatura sursei reci  $T_2$  și nu depinde de substanța de lucru, ceea ce vroiam să demonstrăm.

Modul de transformare a căldurii în lucru mecanic, într-un motor termic, se poate reprezenta și schematic (fig. 1.11). De la sursa caldă care se află la temperatura  $T_1$  se transmite căldura  $Q_1$  substanței de lucru. Aceasta se transformă, pe de o parte, în lucru mecanic  $L$  pe care îl efectuează pistonul și îl transmite sistemului bielă-manivelă, iar pe de altă parte, în căldura  $Q_2$  care se pierde întotdeauna în timpul transformării căldură-lucru mecanic și care se transmite sursei reci aflată la temperatura  $T_2$ .

Din relațiile (1.16) și (1.24) se poate determina lucru mecanic efectuat de o mașină care lucrează ca motor termic, și anume:

$$L = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (1.25)$$

Din relația (1.25) rezultă următoarele concluzii:

a) deoarece întotdeauna  $T_1 > T_2$  rezultă că  $L < Q_1$ , un motor termic produce un lucru mecanic  $L$  mai mic decât căldura primită  $Q_1$ .

**Într-o transformare ciclică căldura nu poate fi transformată integral în lucru mecanic.**

Această concluzie vine să completeze primul principiu al termodinamicii, conform căruia, în procesele ciclice  $L = Q$ , care prezintă doar forma calitativă a transformării lucru mecanic-căldură. Conform acestei

concluzii transformarea lucru mecanic-căldură este o transformare neechivalentă, deoarece lucru mecanic se poate transforma integral în căldură, în timp ce căldura nu poate fi transformată integral în lucru mecanic, o parte pierzându-se întotdeauna.

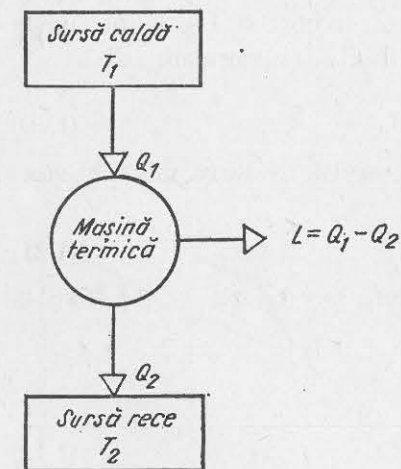


Fig. 1.11. Schema de principiu a unei mașini termice.

Deci:

$$\begin{matrix} L = Q, & Q > L, \\ \longrightarrow & \longrightarrow \end{matrix} \quad (1.26)$$

sensul săgeții de jos indicând sensul transformării;

b) lucru mecanic obținut de o mașină într-un ciclu este cu atât mai mare cu cât diferența de temperatură dintre sursa caldă și sursa rece este mai mare.

Acestea sînt concluziile cele mai importante care decurg din studiul mașinilor termice. Teorema lui Carnot, postulatul lui Thomson sau postulatul lui Clausius au constituit multă vreme formulări ale principiului al doilea al termodinamicii, pînă la formularea generală a acestui principiu legat de entropie.



#### 1.10. TIPURI DE MAȘINI TERMICE

**1.10.1. Motorul Otto.** Mașinile termice, din punct de vedere constructiv, se împart în două mari clase: mașini cu ardere externă și mașini cu ardere internă. Diferența dintre ele constă în modul diferit în care are loc arderea combustibilului. Cel mai reprezentativ tip de mașină cu ardere externă este mașina cu aburi, combustibilul arde într-o incintă, încălzește fluidul motor și produce aburi sub presiune, care sînt trimiși în cilindrul cu piston unde are loc transformarea energiei termice în energie mecanică.

În cazul mașinilor cu ardere internă combustibilul arde chiar în cilindrul cu piston unde are loc transformarea: energie chimică → energie termică → lucru mecanic. Motoarele cu ardere internă se împart și ele în două clase: a) motoare cu explozie, denumite și motoare cu ardere sub volum constant și b) motoare cu ardere lentă sau motoare cu ardere sub presiune constantă denumite și motoare Diesel.

Din clasa motoarelor cu explozie vom studia motorul Otto, format din două izocore și două adiabate (fig. 1.12). Motorul cu explozie folosește drept combustibil vapori de benzină amestecați cu aer. Prin aprinderea combustibilului cu ajutorul unei scînteii, are loc o explozie în urma căreia se produc gaze de ardere la presiuni ridicate, care împing un piston și astfel se produce un lucru mecanic.



Etapele de funcționare ale motorului cu explozie în patru timpi, prezentate în diagrama ( $p, V$ ) din figura 1.12, sînt următoarele:

*aspirația*, timpul I al motorului cînd are loc trecerea amestecului exploziv care s-a format în carburator, în cilindrul cu piston, la presiunea constantă  $p_1$ , porțiunea  $A \rightarrow 1$ . Aspirația se realizează prin mișcarea pistonului de la un capăt al cilindrului la celălalt;

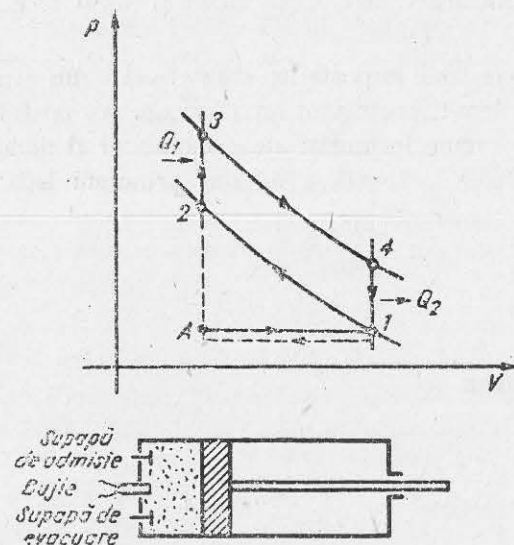


Fig. 1.12. Mașina Otto.

*detenta* constituie timpul III al motorului cînd, datorită presiunii mari, pistonul este împins, revine în poziția inițială și produce lucru mecanic, porțiunea  $3 \rightarrow 4$ . Acest timp III asigură energia necesară mișcării pistonului pînă la ciclul următor;

*evacuarea gazelor* este timpul IV și ultim al ciclului cînd gazele de ardere sînt evacuate izobar prin supapa de evacuare, porțiunea  $4 \rightarrow 1$ . Pistonul revine din nou în poziția inițială, realizîndu-se astfel un ciclu. Acesta se repetă identic, în mod continuu, mașina producînd lucru mecanic.

Să vedem care este randamentul mașinii Otto, dacă presupunem că este cunoscut raportul de compresie  $\epsilon = \frac{V_1}{V_2}$ . Căldura primită este  $Q_1 = \nu C_V (T_3 - T_2)$  iar căldura cedată de mașină este  $Q_2 = \nu C_V (T_4 - T_1)$  introducînd aceste mărimi în expresia randamentului (1.22) obținem:

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Dar pe adiabatele  $1-2$  și  $3-4$  sînt satisfăcute egalitățile:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{și} \quad \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

sau

$$T_2 = T_1 \epsilon^{\gamma-1}; \quad T_3 = T_4 \epsilon^{\gamma-1}.$$

Introducînd aceste relații în expresia randamentului de mai sus, obținem în final randamentul mașinii Otto:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\gamma-1}}. \quad (1.27)$$

Randamentul acestui ciclu în funcție de temperatură este  $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ ,

iar randamentul ciclului Carnot  $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ . Cum  $T_1 < T_4$  rezultă că  $\eta < \eta_c$ , concluzie la care trebuia să ne așteptăm, randamentul unei mașini care lucrează după un ciclu Carnot este maxim față de oricare altă mașină care lucrează între aceleași limite extreme de temperatură.

**1.10.2. Motorul Diesel** sau motorul cu ardere lentă este asemănător constructiv cu motorul cu explozie, însă folosește combustibili mai ieftini, cum este motorina, și are un randament mai mare. El lucrează după un ciclu format dintr-o izobară, o izocoră și două adiabate (fig. 1.13). Etapele de funcționare ale motorului Diesel sînt următoarele:

— timpul I, *aspirația*, pistonul aspiră izobar aer în cilindru, porțiunea  $A \rightarrow 1$  din figura 1.13;

— timpul II, *compresia*, pistonul revine în poziția inițială și comprimă adiabatic aerul pînă la 30–35 atm. la temperatura de circa 800°C, porțiunea  $1 \rightarrow 2$  de pe ciclu;

— timpul III, *arderea*

și *detenta* începe cu introducerea combustibilului în cilindru. Deoarece în cilindru temperatura este mai mare decît temperatura de aprindere a combustibilului, acesta se aprinde și arde, temperatura începe să crească, pistonul se dilată lent la presiune constantă, porțiunea  $2 \rightarrow 3$ . Din punctul 3 procesul de ardere încetează și pistonul se dilată pînă la punctul 4. Pe porțiunea de detentă se produce lucru mecanic;

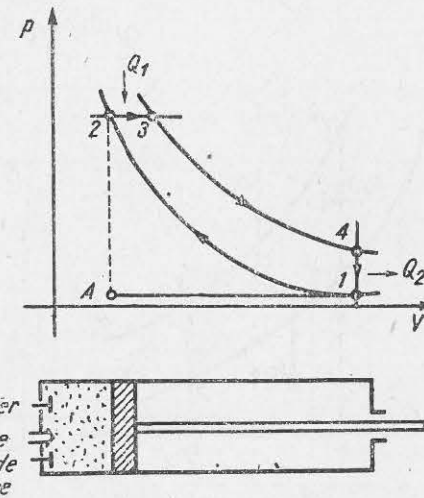


Fig. 1.13. Mașina Diesel.

— timpul IV, *evacuarea gazelor*, începe prin deschiderea supapei de evacuare, presiunea scade brusc în cilindru, pînă la presiunea atmosferică, porțiunea  $4 \rightarrow 1$ . Pistonul revine din nou în poziția inițială și evacuează gazele de ardere care au mai rămas în cilindru, porțiunea  $1 \rightarrow A$ .

Motoarele cu ardere internă, datorită randamentului lor crescut, cât și a faptului că sînt simple, se manevrează ușor, au o greutate redusă, au făcut ca ele să fie utilizate pe scară largă în industrie, în centralele electrice, în transport, fiind preferate mașinilor cu ardere externă.

**Probleme rezolvate 1.** Să se calculeze randamentul unei mașini termice ce funcționează după ciclurile: a) două izoterme, avînd ecuațiile  $T_1 = \text{const.}$  și  $T_2 = \text{const.}$ ,  $T_1 > T_2$  și două izocore, de ecuații  $V_1 = \text{const.}$  și  $V_2 = \text{const.}$ ,  $V_2 > V_1$ ; b) două izoterme, avînd aceleași ecuații ca la punctul a) și două izobare de ecuații  $p_1 = \text{const.}$  și  $p_2 = \text{const.}$ ,  $p_2 > p_1$ . Substanța de lucru este un gaz perfect pentru care se cunosc  $C_V$  și  $C_p$ .

**Rezolvare.**

Randamentul unei mașini termice este  $\eta = \frac{L}{Q_1}$  unde  $L$  este lucru mecanic efectuat de mașină și  $Q_1$  căldura primită de la sursa caldă. El poate fi exprimat și cu ajutorul căldurilor  $Q_1$  și  $Q_2$ ,  $Q_2$  fiind căldura cedată sursei reci

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

a) Ciclul este reprezentat în figura 1.14, a. Vom folosi ultima expresie pentru randament. Vom calcula pe  $Q_1$  și  $Q_2$ . Din figură se observă:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41} \text{ iar } Q_2 = Q_{23} + Q_{34}.$$

Dar transformarea 1-2 este izotermă, deci  $Q_{12} = L_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ . Transformarea 4-1 este izocoră, deci  $Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_2)$  și

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu C_V(T_1 - T_2).$$

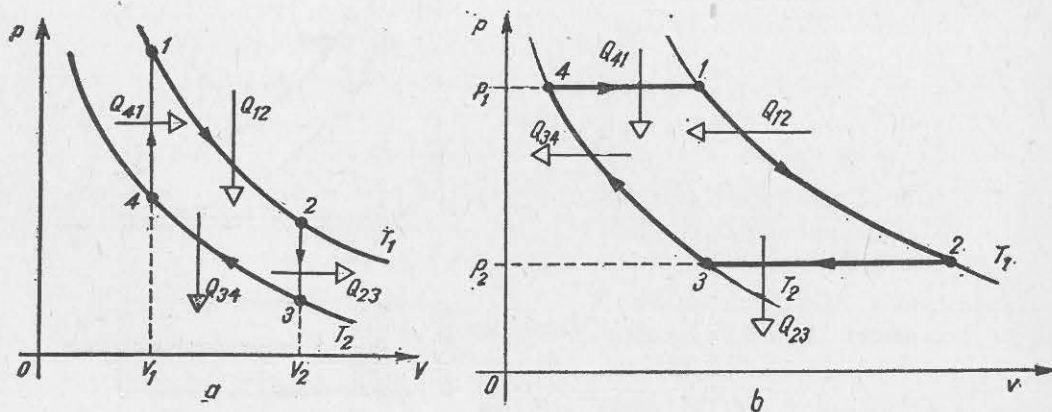


Fig. 1.14. La problema rezolvată 1.

Transformarea 2-3 este izocoră, deci  $Q_{23} = \nu C_V(T_1 - T_2)$  iar transformarea 3-4 izotermă, deci  $Q_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$  și

$$Q_2 = \nu C_V(T_1 - T_2) + \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Înlocuim în expresia randamentului

$$\eta = \frac{\nu R \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2)}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu C_V(T_1 - T_2)}.$$

Împărțind și numitorul și numărătorul cu  $\nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$  se obține

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \frac{C_V(T_1 - T_2)}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}}.$$

b) Ciclul este reprezentat în figura 1.14, b. Din figură se observă:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41} \text{ și } Q_2 = Q_{23} + Q_{34}.$$

Dar transformarea 1-2 este izotermă, deci  $Q_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$ . Transformarea 4-1 este izobară, deci  $Q_{41} = \nu C_p(T_1 - T_2)$  și

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \nu C_p(T_1 - T_2).$$

Transformarea 2-3 este izobară, deci  $Q_{23} = \nu C_p(T_1 - T_2)$  iar transformarea 3-4 este izotermă, deci  $Q_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{p_1}{p_2}$  și

$$Q_2 = \nu C_p(T_1 - T_2) + \nu RT_2 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Înlocuim în expresia randamentului

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\nu R \ln \frac{p_1}{p_2} (T_1 - T_2)}{\nu C_p(T_1 - T_2) + \nu RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}}.$$

După împărțire prin  $\nu R \ln \frac{p_1}{p_2}$ , se obține

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \frac{C_p(T_1 - T_2)}{R \ln \frac{p_1}{p_2}}}.$$

2. Un kmol de gaz ideal participă la o transformare ciclică formată din două izobare și două izocore (fig. 1.15). Se cunosc temperaturile în stările 1, 2 și 3 care sînt:  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 127^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = 427^\circ\text{C}$ .

a) Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz cînd parcurge un ciclu.

b) Să se exprime randamentul ciclului în funcție de rapoartele de compresie  $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1}$  și  $\delta = \frac{p_2}{p_1}$ .

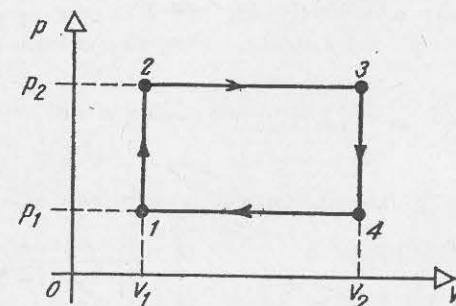


Fig. 1.15. La problema rezolvată 2.



Aplicație numerică  $\varepsilon = 2$ ,  $\delta = 3$  iar  $C_V = \frac{5}{2} R$  și  $C_p = \frac{7}{2} R$ , unde  $R$  este constanta universală a gazelor.

*Rezolvare*

a) Lucrul mecanic de-a lungul ciclului poate fi scris:

$$L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41}.$$

Dar  $L_{12} = L_{34} = 0$ , deoarece transformările sînt izocore.

Deoarece în transformarea 4-1 gazul este comprimat, lucrul mecanic  $L_{41} < 0$  și lucrul total va fi:

$$L = L_{23} - L_{41} = p_2(V_3 - V_2) - p_1(V_4 - V_1),$$

transformările 2-3 și 4-1 fiind izobare.

Dar  $p_2 = p_3 = \text{const.}$  și  $p_1 = p_4 = \text{const.}$  și folosind ecuația de stare, înlocuim produsele  $pV$  în cele patru stări prin temperatura stărilor, astfel că  $L$  devine:

$$L = \nu R(T_3 - T_2) - \nu R(T_4 - T_1) = \nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) \quad (1)$$

Temperatura  $T_4$  o putem exprima funcție de  $T_1$ ,  $T_2$  și  $T_3$  scriind condiția ca stările 2, 3 și 4, 1 să se afle pe izobarele  $p_2 = \text{const.}$ , respectiv  $p_1 = \text{const.}$ , avem:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3} \quad \text{și} \quad \frac{V_1}{V_4} = \frac{T_1}{T_4}. \quad (2)$$

Dar stările 1, 2 se găsesc și pe izocora  $V_1 = \text{const.}$ , iar stările 3, 4 pe izocora  $V_2 = \text{const.}$ , astfel că  $V_1 = V_2$  și  $V_3 = V_4$ . Aceste egalități duc la egalitatea  $\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4}$ , de unde  $T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2}$ . Înlocuind în expresia lucrului mecanic se obține:

$$L = \nu R \left( T_3 - T_2 - \frac{T_1 T_3}{T_2} + T_1 \right) = \nu R (T_2 - T_1) (T_3 - T_2) \frac{1}{T_2} =$$

$$= 1 \text{ kmol} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}} (127 - 27) \text{ K} (427 - 127) \text{ K} \frac{1}{400 \text{ K}} = 607,25 \text{ kJ}.$$

b) Randamentul îl scriem

$$\eta = \frac{L}{Q_1},$$

unde  $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$  este căldura primită de gaz. Ținînd seama de transformări, avem

$$Q_1 = \nu C_V(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_3 - T_2).$$

Înlocuind în expresia randamentului pe  $L$  și pe  $Q_1$  avem

$$\eta = \frac{R[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)]}{C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2)} \quad (3)$$

Dar din (2) rezultă pentru coeficientul de compresie:  $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_1}{T_4}$ . Pentru  $\delta$  avem din

transformarea izocoră 1-2:  $\delta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$ . Folosind proprietățile proporțiilor și expresiile lui

$\varepsilon$  și  $\delta$  funcție de temperaturi, avem, ținînd seama și de raportul deja stabilit  $\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4}$ :

$T_4 - T_1 = T_1(\varepsilon - 1)$  și  $T_3 - T_2 = \frac{T_2}{T_1}(T_4 - T_1) = \delta T_1(\varepsilon - 1)$ . Înlocuind aceste diferențe în (3), avem

$$\eta = \frac{R[\delta T_1(\varepsilon - 1) - T_1(\varepsilon - 1)]}{C_V(T_2 - T_1) + C_p \delta T_1(\varepsilon - 1)} = \frac{R(\varepsilon - 1)(\delta - 1)}{C_V(\delta - 1) + C_p(\varepsilon - 1)\delta} =$$

$$= \frac{2(\varepsilon - 1)(\delta - 1)}{5(\delta - 1) + 7(\varepsilon - 1)\delta} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{4}{31} = 13\%.$$

## PROBLEME

1. Să se calculeze randamentul motorului Diesel dacă se dă raportul de compresie  $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$

și coeficientul de destindere adiabatică  $\lambda = \frac{V_3}{V_2}$ , substanța de lucru fiind aerul.

$$R: \eta = 1 - \frac{\lambda^\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1}(\lambda - 1)}.$$

2. O mașină ideală care funcționează după un ciclu Carnot, avînd temperatura sursei calde  $t_1 = 227^\circ\text{C}$  și temperatura sursei reci  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ , produce într-un ciclu un lucru mecanic  $L = 5 \text{ kJ}$ . Să se determine randamentul ciclului și cantitățile de căldură schimbate de mașină într-un ciclu.

$$R: \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,40; (40\%); Q_1 = \frac{L}{\eta} = 10 \text{ kJ}; Q_2 = Q_1 - L = 6 \text{ kJ}.$$

3. Să se determine randamentul unui ciclu Carnot, dacă raportul de compresie este  $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1} = 6$ , corpul de lucru fiind un gaz ideal pentru care  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$ .

$$R: \eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 0,51, (51\%).$$

4. Să se exprime randamentul unei mașini, care lucrează după un ciclu format din două izobare ( $p, 2p$ ) și două izocore ( $V, 2V$ ), în funcție de constantele termice  $C_V$  și  $C_p$  ale substanței de lucru care este gaz ideal.

$$R: \eta = \frac{C_p - C_V}{C_V + 2C_p}.$$

5. Să se calculeze randamentul ciclului din figura 1.16. (numit ciclu Rankine) în funcție de rapoartele de compresie  $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1}$ ,  $\rho = \frac{V_3}{V_1}$ , substan-

ța de lucru fiind gaz perfect pentru care  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  este cunoscut.

$$R: \eta = 1 - \frac{\gamma(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon/\rho)^\gamma[\gamma(\rho - 1) + 1] - 1}.$$

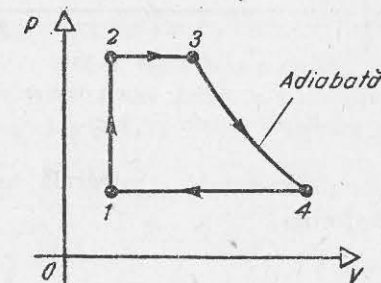


Fig. 1.16. La problema 5.

### 1.11. ENTROPIA

Să vedem în continuare cum poate fi introdusă o nouă funcție de stare, care poartă numele de entropie. Pentru aceasta să revenim la un ciclu Carnot, pentru care este adevărată egalitatea (1.23):

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Această relație mai poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1},$$

sau

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (1.28)$$

dacă considerăm suma algebrică a căldurilor reduse, în care prin definiție *căldura redusă* este raportul  $\frac{Q}{T}$ . Deci, în cazul unui ciclu Carnot reversibil, suma tuturor căldurilor care intervin în transformare, împărțite fiecare la temperatura absolută a izvorului termic este nulă.

Să considerăm o transformare ciclică reversibilă oarecare  $ABCD$  (fig. 1.17). Fie adiabatele vecine  $AC$  și  $EF$  și izotermele  $EE'$  și  $C'C$ . Ciclul format  $EE'CC'E$  este un ciclu Carnot. Dacă luăm însă cele două adiabate  $AC$  și  $EF$  foarte apropiate una de alta, la o distanță infinit de mică, atunci și punctele  $E'$  și  $C'$  se vor apropia infinit de mult de punctele  $A$  și  $F$ , formând un ciclu Carnot infinit de mic. Făcând același raționament pentru toate adiabatele vecine care sînt trasate pe figura 1.17, atunci întreg ciclul  $ABCD$  va putea fi descompus într-un număr infinit de cicluri Carnot infinit de mici.

Generalizînd relația (1.28) pentru ciclul  $ABCD$  format dintr-un număr infinit de cicluri Carnot, rezultă că

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0. \quad (1.29)$$

Dar într-un ciclu elementar, căldura schimbată va fi egală cu  $dQ$ , iar numărul de cicluri fiind infinit de mic [se poate

Fig. 1.17. O transformare închisă descompusă într-un număr infinit de cicluri Carnot infinit de mici.

trece de la sumă la integrală, astfel încît relația (1.29) să se mai poată scrie sub forma

$$\int_{\text{rev. } ABCDA} \frac{dQ}{T} = 0, \quad (1.30)$$

în care integrala de mai sus se extinde pe întreg conturul  $ABCD$  al ciclului, iar  $dQ$  este căldura infinitesimală schimbată de sistem la temperatura absolută  $T$ .

Dacă integrala variației unei funcții pe un drum închis, este egală cu zero, rezultă că acea mărime nu depinde de tipul transformării ci numai de starea inițială și finală a sistemului, fiind o funcție de stare. Rezultă deci că mărimea de sub integrala (1.30) trebuie să fie egală cu variația unei funcții de stare. Această nouă funcție de stare poartă numele de *entropie* (funcția a fost denumită entropie de Clausius după grecescul en-tropein care are semnificația de a transforma) și se definește astfel:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (1.31)$$

Din relația de definiție (1.31) putem deduce și unitatea de măsură pentru entropie, dacă considerăm o transformare reversibilă și izotermă. În acest caz

$$S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ, \text{ sau } \Delta S = \frac{Q}{T},$$

de unde se poate scrie relația de condiție pentru entropie

$$[S] = \frac{[Q]}{[T]},$$

iar unitatea de măsură  $[S]_{\text{SI}} = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ . Unitatea SI de entropie reprezintă creșterea entropiei unui sistem care suferă o transformare reversibilă și izotermă cînd primește o căldură de 1J la temperatura de 1K. În practică se folosesc și unitățile tolerate, cal/K sau kcal/K.

Ținînd seama de definiția entropiei (1.31), relația (1.30) pentru un proces reversibil, se poate scrie sub forma

$$\int_{\text{rev. } ABCDA} dS = 0, \quad (1.32)$$

relație care poartă numele de *egalitatea lui Clausius*.

Să urmărim în continuare transformarea căldurii în lucru mecanic în cazul transformărilor ireversibile. Pentru aceasta considerăm un sistem termodinamic care trece din starea 1 în starea 2, pe cale ireversibilă, absorbînd căldura  $Q_i$  și efectuînd lucru mecanic  $L_i$ . Conform cu primul principiu al termodinamicii  $Q_i = \Delta U + L_i$ . Dacă sistemul trece însă pe cale reversibilă din starea 1 în starea 2, absorbînd căldura  $Q$  și efectuînd lucru mecanic  $L$ , atunci  $Q = \Delta U + L$ . Scăzînd cele două relații, obținem

$$Q_i - Q = L_i - L. \quad (1.33)$$

Să vedem ce valoare poate să ia diferența (1.33). Dacă ea ar fi nulă, atunci  $Q_i = Q$  și sistemul ar putea reveni pe cale ireversibilă din starea 2



în starea 1, fără ca sistemul sau corpurile înconjurătoare să-și modifice starea, ceea ce este imposibil, în contradicție cu cele relatate în § 1.9. Dacă această diferență este pozitivă, atunci  $Q_i > Q$  și  $L_i > L$ . Nici acest caz nu este posibil, întrucât atunci când sistemul trece din starea 2 în starea 1, pe cale ireversibilă, ar putea efectua lucru mecanic folosind un singur izvor de căldură, și după cum am văzut la § 1.9., nici acest caz nu este posibil (postulatul lui Thomson). Singurul caz posibil este ca această diferență să fie negativă, adică

$$Q > Q_i, \quad L > L_i, \quad (1.34)$$

deoarece la trecerea ireversibilă a sistemului din starea 2 în starea 1 se pierde căldura  $Q - Q_i > 0$  și se efectuează lucru mecanic  $L - L_i$ .

Dacă o mașină Carnot ar lucra după un ciclu Carnot ireversibil, atunci, conform concluziei (1.34)  $L_i < L$  sau  $L_i = Q_1 - Q_2 < Q_1 - \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)Q$ , de unde rezultă că

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{sau} \quad \frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}.$$

Ultima relație mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0, \quad (1.35)$$

dacă considerăm din nou suma algebrică a căldurilor reduse. Relația (1.35) poate fi scrisă împreună cu relația (1.28) astfel:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (1.36)$$

în care semnul de egalitate se referă la procesele reversibile iar semnul de inegalitate la procesele ireversibile. Făcând aceleași raționamente pe ciclul ABCDA din figura 1.17 în care însă ciclurile Carnot infinit mici sînt ireversibile, atunci relația (1.35), devine

$$\sum_i \frac{dQ_i}{T_i} < 0, \quad (1.37)$$

sau trecînd de la sumă la integrală, obținem pentru procesele ireversibile expresia

$$\int_{\text{Irev.}} \frac{dQ}{T} < 0, \quad (1.38)$$

expresie care poartă numele de *inegalitatea lui Clausius*. Relația (1.38), ținînd seama și de relația de definiție (1.31) se mai poate scrie și sub forma

$$\int_{\text{Irev.}} dS < 0. \quad (1.38')$$

După cum se vede, trecerea de la procesele reversibile la procesele ireversibile se face înlocuind semnul de egalitate cu semnul de inegalitate.

## 1.12. FORMULAREA PRINCIPIULUI AL DOILEA AL TERMODINAMICII

În paragraful precedent am definit entropia, am văzut că ea este o funcție de stare și are și proprietatea de aditivitate. Putem trece în continuare la formularea principiului al doilea al termodinamicii, din care va trebui să rezulte, ca niște cazuri particulare, consecințele care le-am obținut la studiul mașinilor termice.

*Principiul al doilea al termodinamicii* se enunță astfel:

**Variația de entropie a unui sistem, datorită proceselor ireversibile este întotdeauna pozitivă.**

Adică:

$$\Delta S^{(i)} > 0. \quad (1.39)$$

Acesta este *principiul entropiei* sau *principiul creșterii entropiei*. Datorită faptului că entropia totală a unui sistem este o funcție aditivă și se compune din variația de entropie  $\Delta S^{(e)} = \frac{\Delta Q}{T}$  datorită schimbului de căldură dintre sistem și exterior și din variația de entropie  $\Delta S^{(i)}$  a sistemului datorită proceselor ireversibile, putem scrie că

$$\Delta S = \Delta S^{(e)} + \Delta S^{(i)} = \frac{\Delta Q}{T} + \Delta S^{(i)} \quad \text{cu} \quad \Delta S^{(i)} > 0. \quad (1.40)$$

Relația (1.39) sau relația (1.40) reprezintă forma matematică, cea mai generală, a principiului al doilea al termodinamicii. În relația (1.40) mărimea  $\Delta S^{(e)} = \frac{\Delta Q}{T}$  poate fi pozitivă, negativă sau zero, după cum sistemul primește, cedează căldura sau este izolat. Termenul  $\Delta S^{(i)}$  este întotdeauna pozitiv pentru procesele ireversibile, atît pentru întreg sistemul cît și pe orice porțiune macroscopică oricît de mică din sistem.

Din principiul al doilea al termodinamicii, relația (1.39) sau relația (1.40) rezultă cîteva consecințe, deosebit de importante:

a) dacă sistemul este izolat, atunci  $\Delta Q = 0$ , și dacă procesul este reversibil  $\Delta S^{(i)} = 0$ , de unde rezultă, din relația (1.40) că

$$\Delta S = 0 \quad \text{sau} \quad S_2 = S_1, \quad (1.41)$$

entropia oricărui sistem izolat rămîne constantă în cazul proceselor reversibile;

b) dacă sistemul este izolat ( $\Delta Q = 0$ ) și dacă procesul este ireversibil, atunci  $\Delta S^{(i)} > 0$ , sau din relația (1.40)

$$\Delta S = \Delta S^{(i)} > 0 \quad \text{sau} \quad S_2 - S_1 > 0, \quad (1.42)$$

entropia oricărui sistem izolat crește întotdeauna în cazul proceselor ireversibile. Ambele consecințe (1.41) și (1.42) pot fi înglobate într-o singură relație:

$$S_2 - S_1 \geq 0, \quad (1.43)$$

și concluzia poate fi formulată astfel:

**Entropia sistemelor izolate rămâne constantă în cazul proceselor reversibile și crește întotdeauna în cazul proceselor ireversibile.**

Cum toate procesele naturale sînt procese ireversibile, rezultă că toate procesele naturale care au loc în sistemele izolate evoluează în sensul creșterii entropiei. Astfel ni se dezvăluie una din cele mai importante consecințe ale principiului al doilea al termodinamicii și anume sensul de evoluție al sistemelor izolate (și nu numai neapărat al sistemelor fizice), sensul de evoluție fiind determinat de sensul creșterii entropiei. Entropia constituie o măsură a ireversibilității unui proces.

Alte aspecte interesante legate de entropie sînt scoase în evidență de interpretarea statistică a entropiei. Conform acestei interpretări trecerea unui sistem dintr-o stare de neechilibru într-o stare de echilibru, care are loc cu o creștere de entropie, este echivalentă cu trecerea sistemului dintr-o stare mai puțin probabilă într-o stare mai probabilă, dintr-o stare mai ordonată într-o stare mai puțin ordonată, creșterea de entropie fiind întotdeauna însoțită de o creștere a dezordinii moleculare a sistemului.

Acest lucru poate fi înțeles cu mai multă ușurință dacă luăm un exemplu. Presupunem un sistem format din două compartimente, separate de un ecran despărțitor, în care se află două gaze la presiuni diferite și constante. În ambele compartimente gazele se află în stări de echilibru. Dacă se ridică ecranul despărțitor sistemul în totalitate (format din cele două compartimente) se află într-o stare de neechilibru, deoarece un parametru termodinamic, în cazul nostru presiunea, are valori diferite în sistem. Din această stare de neechilibru, sistemul caută să revină, printr-un proces ireversibil, de difuzie, în starea de echilibru, stare în care presiunea are aceeași valoare în ambele compartimente. Sistemul în starea inițială era mai ordonat decît sistemul în stare finală, deoarece în fiecare compartiment se afla un gaz de un anumit tip, față de starea finală în care se află molecule de gaz de ambele tipuri și astfel dezordinea a crescut. Acest proces de difuzie, ca și orice proces ireversibil, este însoțit de o creștere de entropie, conform principiului al doilea al termodinamicii, iar sistemul trece dintr-o stare mai ordonată într-o stare mai puțin ordonată.

Primul și al doilea principiu al termodinamicii pot fi reunite într-o singură ecuație. Primul principiu al termodinamicii, relația (1.13), mai poate fi scris sub forma  $Q = \Delta U + L$ . Din principiul al doilea al termodinamicii, pentru procese reversibile, rezultă că  $T\Delta S = Q$ , iar pentru procese ireversibile  $T\Delta S > Q$  deoarece în acest caz intervine și mărimea  $\Delta S^{(i)}$ , care este întotdeauna pozitivă. Deci, pentru ambele tipuri de procese  $T\Delta S \geq Q$ . Combinînd această expresie cu primul principiu al termodinamicii scris mai sus, rezultă că

$$T\Delta S \geq \Delta U + L, \quad (1.44)$$

care reprezintă *ecuația fundamentală a termodinamicii*. Semnul de egalitate se referă la procesele reversibile iar semnul de inegalitate la procesele ireversibile. Toate aplicațiile termodinamicii pot fi deduse din ecuația fundamentală (1.44).

În rezumat, ca o concluzie finală, putem spune că principiul al doilea al termodinamicii introduce o nouă funcție de stare, entropia, astfel că variația de entropie a sistemului datorită proceselor ireversibile este întotdeauna pozitivă. Această formulare cuprinde atât procesele închise cît și procesele deschise. Principiul creșterii entropiei pentru sistemele izolate arată că entropia rămâne constantă în cazul proceselor reversibile și crește întotdeauna în cazul proceselor ireversibile. Acest principiu indică și sensul de desfășurare al proceselor naturale, sensul lor fiind determinat de sensul creșterii entropiei.

Formulările anterioare ale principiului al doilea al termodinamicii au fost legate de mașinile termice, dar acestea, după cum vom vedea, nu sînt decît consecințe ale acestui principiu. Ca un exemplu, să vedem cum poate fi calculat randamentul unei mașini termice, care lucrează după un ciclu Carnot, folosind principiul entropiei.

Ciclu Carnot fiind un ciclu format din două izoterme și două adiabate poate fi reprezentat, mai comod, într-o diagramă  $(T, S)$  (fig. 1.18). Transformările adiabate sînt 2—3 și 4—1 iar transformările izoterme 1—2 și 3—4 la temperaturile  $T_1$  și  $T_2$ . Entropia fiind o funcție de stare, rezultă că variația ei într-un ciclu reversibil trebuie să fie nulă, adică  $\Delta S = 0$  (vezi relația 1.41), sau

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0. \quad (1.45)$$

Să calculăm pe rînd fiecare termen din relația (1.45). Termenul  $\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1}$ , deoarece sistemul primește căldura  $Q_1$  la temperatura absolută  $T_1$ . Termenii  $\Delta S_{23}$  și  $\Delta S_{41}$  sînt egali cu zero, deoarece transformările 2—3 și 4—1 sînt transformări adiabatice. Termenul  $\Delta S_{34} = \frac{Q_2}{T_2}$  deoarece sistemul cedează în exterior căldura  $Q_2$  la temperatura absolută  $T_2$ . Adunînd aceste relații, obținem

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

de unde  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ , rezultat identic cu relația (1.23) obținută din studiul mașinilor termice.

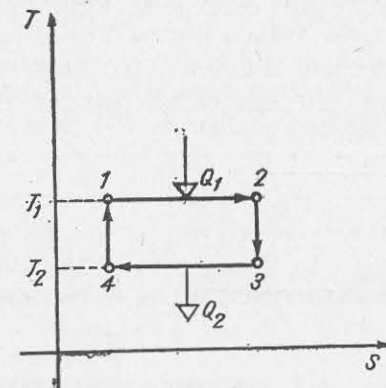


Fig. 1.18. Ciclu Carnot în variabile  $(T, S)$ .



Atît teorema lui Carnot, cît și consecințele care au fost prezentate, au constituit diverse formulări corecte, dar mai puțin generale ale principiului al doilea al termodinamicii, decît principiul entropiei, deoarece se referă strict la mașinile termice, la transformarea căldurii în lucru mecanic. Aceste formulări mai sînt încă enunțate ca principiul al doilea al termodinamicii, deoarece istoric au fost formulate pentru prima oară, dar trebuie să facem o distincție netă între principiul creșterii entropiei, care este un principiu general, valabil pentru orice sistem fizic (și nu numai fizic) și care reprezintă principiul al doilea al termodinamicii și formulările legate de mașinile termice, care sînt niște cazuri particulare ale acestui principiu, legate de un anumit fenomen concret.

## EXTINDERE ÎN ALTE DOMENII

### 1.13. SEMNIFICAȚIA STATISTICĂ A ENTROPIEI. ENTROPIA ȘI INFORMAȚIA

Să considerăm un sistem macroscopic care se află într-o stare de echilibru termodinamic. Parametrii macroscopici ai sistemului, puțini la număr, nu variază în timp. Starea macroscopică a sistemului este determinată de totalitatea parametrilor independenți care caracterizează sistemul respectiv.

Starea microscopică a sistemului este determinată de valorile tuturor pozițiilor și vitezelor particulelor din care este constituit sistemul respectiv.

Deoarece parametrii macroscopici depind de parametrii microscopici, la echilibru, cunoașterea stării microscopice a unui sistem implică cunoașterea stării sale macroscopice. Este posibil însă ca și o altă stare microscopică a sistemului, o stare în care s-au schimbat, de exemplu, pozițiile și vitezele a două particule, să corespundă aceleiași stări macroscopice. Cu toate că starea macroscopică este invariabilă, în sensul că parametrii macroscopici rămîn constanți în timp, starea microscopică este într-o continuă schimbare, particulele constituente mișcîndu-se continuu și dezordonat, dar reflectă aceeași stare macroscopică. Putem deci trage concluzia că o stare macroscopică este compatibilă cu un număr dat de stări microscopice. Putem lua un exemplu. Pentru un gaz, presiunea este un parametru macroscopic care la echilibru are o valoare constantă, bine determinată. Din punct de vedere microscopic presiunea apare ca un efect mediat al tuturor ciocnirilor moleculare cu peretele vasului. Dar pozițiile și vitezele particulelor de gaz se schimbă neîncetat, deci și stările microscopice ale sistemului,

cu toate că efectul lor la scară macroscopică, presiunea, rămîne constantă. Oricare din stările microscopice ale sistemului corespunde unei aceleiași stări macroscopice pentru care presiunea are o valoare constantă.

Unei macrostări date îi corespunde un număr foarte mare de microstări, toate fiind la fel de probabile, în sensul că în evoluția sa sistemul nu are o mai mare preponderență pentru unele microstări în comparație cu altele.

Prin definiție, probabilitatea termodinamică a unei macrostări  $W$  este egală cu numărul de microstări compatibile cu macrostarea dată. Ea are o valoare foarte mare, spre deosebire de probabilitatea matematică, care este mai mică decît unitatea.

Boltzmann a găsit o legătură simplă între entropia unui sistem macroscopic, finit și izolat și probabilitatea termodinamică, și anume

$$S = k \ln W, \quad (1.46)$$

care reprezintă celebra formulă a lui Boltzmann, în care  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K este constanta lui Boltzmann. Ce ne spune această relație? Că entropia unui sistem este proporțională cu probabilitatea termodinamică. Dar noi știm că în evoluția unui sistem entropia crește (principiul al doilea al termodinamicii) deci trebuie să crească și probabilitatea termodinamică. Această formulă explică de ce evoluția unui sistem se face astfel încît sistemul trece dintr-o stare mai puțin probabilă (cu probabilitatea termodinamică mai mică) într-o stare mai probabilă (cu probabilitatea termodinamică mai mare) sau, cu alte cuvinte, dintr-o stare mai ordonată, în care probabilitatea  $W$  este mai mică într-o stare mai dezordonată în care probabilitatea  $W$  este mai mare.

Noțiunea de entropie se folosește și în informatică ca entropie informațională, dar aceasta nu are nici o legătură cu entropia termodinamică, termenul fiind ales numai prin analogia dintre relația (1.46) și expresia cantității de informație.

Să vedem cum se definește cantitativ informația. Plecăm de la un exemplu, și anume de la aruncarea cu zarul. Dacă zarul este ideal și aruncările sînt ideale, putem obține ca rezultat final, deci ca informație, orice cifră de la 1 la 6. Dacă zarul însă a fost măsluit, în așa fel încît să obținem numai cifra 4, cantitatea de informație este mult mai mică decît în primul caz, și este egală cu unu. Dacă se pot obține numai cifrele 3 și 4 atunci avem două informații. Se vede deci că există o diferență între numărul de cazuri posibile, care teoretic se pot obține, și numărul de cazuri favorabile, care se produc. Dacă notăm cu  $I$  cantitatea de informație, cu  $P$  numărul de cazuri posibile înainte de pri-

mirea informației și cu  $P_0$  numărul de cazuri posibile după primirea informației, se arată că între aceste mărimi există relația

$$I = K \log \frac{P}{P_0}, \quad (1.47)$$

în care  $K$  este o constantă. Relația (1.47), pentru cazul particular când  $P_0 = 1$ , deci în situația în care după primirea informației avem un singur caz, devine

$$I = K \log P. \quad (1.48)$$

Comparând relațiile (1.46) și (1.48) se vede că ele sînt destul de asemănătoare, și prin analogie mărimea  $I$  mai poartă numele de entropie informațională, dar nu are nici o legătură cu entropia termodinamică. Semnificația mărimilor din cele două relații este diferită, și mai mult și constantele  $k$  și  $K$  sînt diferite astfel, constanta  $K = 3,65$ , dacă se folosește pentru cantitatea de informație unitatea bit.

#### 1.14. PRINCIPIUL AL TREILEA AL TERMODINAMICII

Acest principiu al termodinamicii a apărut ceva mai recent, în jurul anului 1906, fiind destul de controversat. Mulți autori îl denumesc principiu deoarece el nu poate fi dedus pe cale termodinamică. Alții însă îl numesc o *teoremă*, deoarece acest principiu al termodinamicii nu introduce o funcție de stare, așa cum introduce primul principiu al termodinamicii *energia internă*, sau principiu al doilea, *entropia*, și nici nu are o semnificație atît de generală ca cele două principii.

După cum am arătat în paragraful 1.12, din principiu al doilea al termodinamicii rezultă variația de entropie a unui sistem și nu valoarea ei absolută. Folosindu-ne de ecuațiile de stare, entropia poate fi determinată pentru orice tip de sistem pînă la o constantă  $S_0$ , care rămîne nedeterminată.

Constanta  $S_0$  a fost determinată pentru prima oară de Nernst în anul 1906 enunțînd un principiu care este cunoscut sub denumirea de „*Teorema termică a lui Nernst*”. Ulterior s-a dovedit că această teoremă nu poate fi dedusă din primul sau al doilea principiu al termodinamicii, avînd o consistență de sine stătătoare. Din această cauză teorema lui Nernst a căpătat denumirea de principiu al treilea al termodinamicii.

Teorema lui Nernst poate fi formulată astfel: *cînd temperatura absolută tinde către zero și variația de entropie tinde de asemenea către zero, adică*

$$\Delta S = S - S_0 \rightarrow 0 \quad \text{cînd} \quad T \rightarrow 0. \quad (1.49)$$

Din relația (1.49) rezultă că atunci cînd temperatura absolută a unui sistem tinde către zero, procesele izoterme decurg fără variație de entropie.

Planck a completat teorema lui Nernst îngustînd-o, afirmînd că nu numai variația de entropie a unui sistem tinde la zero, atunci cînd temperatura absolută tinde la zero, ci înșăși entropia sistemului tinde la zero.

Teorema lui Nernst, cu completarea făcută de Planck, poartă numele de principiu al treilea al termodinamicii, care se enunță astfel:

**Entropia oricărui sistem tinde către o constantă universală, finită, care poate fi egală cu zero, pentru sistemele pure condensate, atunci cînd temperatura absolută tinde la zero.**

Din principiu al treilea al termodinamicii decurg cîteva consecințe interesante. În primul rînd, căldurile molare, ca și toți coeficienții termici de dilatare tind la zero atunci cînd temperatura absolută a sistemului tinde la zero, adică

$$C_p \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0 \quad \text{cînd} \quad T \rightarrow 0 \quad (1.50)$$

În al doilea rînd, din principiu al treilea al termodinamicii rezultă imposibilitatea atingerii temperaturii de zero absolut. Pentru a demonstra această consecință să considerăm un ciclu Carnot care lucrează pe izotermele  $T_1 = T$  și  $T_2 = 0$ , ciclu prezentat în diagrama  $(T, S)$  în figura 1.19. Conform principiului al doilea al termodinamicii, variația totală de entropie, pe un ciclu, este nulă. În cazul ciclului nostru rezultă că

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0. \quad (1.51)$$

Să calculăm variația de entropie pe fiecare ramură a ciclului. Variația de entropie  $\Delta S_{12} = \frac{Q}{T}$ , deoarece sistemul primește căldura  $Q$ , la temperatura absolută  $T$ . Variațiile de entropie  $\Delta S_{23}$  și  $\Delta S_{41}$  sînt nule deoarece transformările respective au loc la entropie constantă (sînt transformări adiabactice). Variația de entropie  $\Delta S_{34} = 0$  conform principiului al treilea al termodinamicii, la temperatura de zero absolut,  $T_2 = 0$ , este nulă. Introducînd termenii calculați în relația

(1.51) rezultă că  $\frac{Q}{T} = 0$ , ceea ce este imposibil deoarece sistemul a primit căldura  $Q$ , diferită de zero, la temperatura  $T$ . Această contradicție poate fi rezolvată numai dacă admitem că este imposibil ca un sistem termodinamic să atingă temperatura de zero absolut.

În multe cărți, această consecință care decurge din principiu al treilea al termodinamicii și anume imposibilitatea atingerii temperaturii de zero absolut de către sistemele termodinamice, este prezentată ca principiu al treilea al termodinamicii.

Pe baza celor trei principii ale termodinamicii pot fi rezolvate numeroase probleme, deosebit de variate și de interesante, cuprinzînd domenii foarte diferite din fizică, dar și din chimie sau biologie.

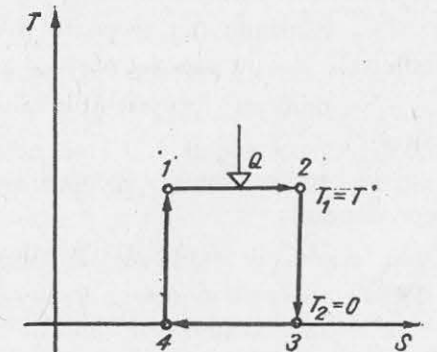


Fig. 1.19. Ciclu Carnot care lucrează pe izoterma de zero absolut.



## 2.

### SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Studiul sistemelor de puncte materiale se va face în cadrul mecanicii clasice (newtoniene).

Teoria mecanicii clasice s-a realizat prin abstractizarea și generalizarea observațiilor efectuate asupra mișcării corpurilor la nivel macroscopic, corpuri ce se deplasează cu viteze foarte mici în raport de viteza luminii.

La baza acestei teorii stau noțiunile: spațiu, timp, masă și principiile: inerției, proporționalității dintre accelerație și forță (principiul fundamental al mecanicii), acțiunii și reacțiunii.

Noțiunea de spațiu este legată de configurația și localizarea corpurilor. Spațiul este considerat ca fiind:

- continuu (nu se poate trece de la un punct la altul decât printr-o infinitate de puncte vecine);
  - omogen (proprietățile sale nu se schimbă de la un punct la altul);
  - tridimensional (pentru localizarea unui punct sînt necesare trei coordonate);
  - izotrop (proprietățile sale nu se schimbă cu direcția considerată în spațiu);
  - infinit (nu are limită),
- spațiul geometriei euclidiene.

Noțiunea de timp este legată de succesiunea și durata proceselor lumii materiale. Timpul este considerat ca fiind:

- universal (scurgerea timpului este aceeași în orice punct al spațiului);
- uniform (proprietățile sale nu se schimbă de la un moment la altul);

- unidimensional (are o singură direcție);
- ireversibil (toate procesele lumii se desfășoară într-un singur sens de la trecut, prin prezent, spre viitor);
- infinit (nu are început și sfîrșit).

Noțiunea de masă este legată de două proprietăți fundamentale ale materiei: inerția și gravitația. Masa este considerată ca fiind:

- independentă de viteza corpurilor;
- aditivă (masa unui sistem se obține prin însumarea maselor elementelor componente);
- conservativă (masa unui sistem închis este constantă).

Spațiul și timpul sînt considerate absolute, independente între ele și independente de materie. O consecință a acestor proprietăți este invarianța distanțelor, duratei și masei față de condițiile de măsurare.

Studiile efectuate asupra propagării interacțiunii cu viteză finită și asupra mișcării corpurilor cu viteze comparabile cu viteza luminii au arătat că proprietățile spațiului, timpului și masei sînt mai complexe de cît cele prezentate în cadrul mecanicii clasice, între spațiu, timp și masă existînd anumite legături.

În problemele în care corpurile au viteze mici în comparație cu viteza luminii, se poate presupune că legăturile dintre spațiu, timp și masă, deși reale, sînt neesențiale și ca atare, se poate să nu se țină seama de aceste legături și să se folosească mecanica clasică pentru rezolvarea acestor probleme, deoarece dă rezultate care permit atingerea unei precizii suficiente pentru tehnica curentă.

#### 2.1. REFERENȚIALE. STAREA DE MIȘCARE A PUNCTULUI MATERIAL

**2.1.1. Referențiale.** Procesul cunoașterii naturii a impus localizarea și datarea evenimentelor, adică precizarea punctului din spațiu și a momentului din timp unde se petrece evenimentul.

Localizarea unui punct în spațiu implică alegerea unui reper și a unui etalon de lungime. Ca reper se poate alege orice ansamblu rigid de corpuri cărui i se atașază un sistem de coordonate, de obicei un sistem cartezian (o origină, un sistem de axe rectangulare  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  fără sens obligatoriu).

Etalonul de lungime se alege arbitrar și este considerat invariabil.

Poziția unui punct  $P$ , în raport cu reperul ales este dată de vectorul de poziție

$$\vec{r} = \vec{OP}.$$

Atașind reperului un sistem de coordonate carteziene (fig. 2.1), se poate da poziția punctului  $P$  prin coordonatele  $x, y, z$ . Vectorul de poziție  $\vec{r}$  în funcție de coordonatele  $x, y, z$  este

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1)$$

unde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sînt versorii axelor sistemului cartezian.

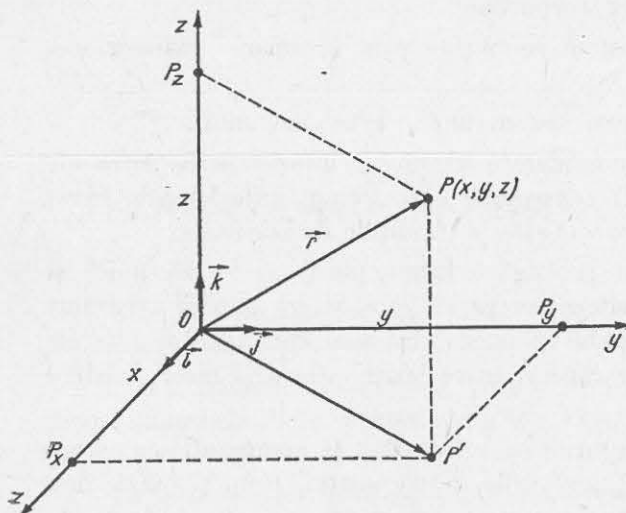


Fig. 2.1. Poziția punctului  $P$  este dată fie de vectorul de poziție  $\vec{r}$ , fie de coordonatele  $x, y, z$ .

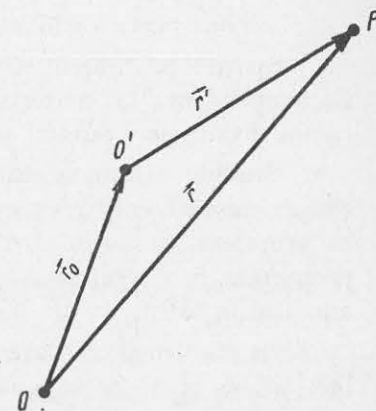


Fig. 2.2. Poziția punctului  $P$  raportată la două repere.

Poziția punctului  $P$  poate fi raportată la două repere diferite (fig. 2.2). Vectorii de poziție ai punctului  $P$ , față de aceste repere, sînt legați prin relația

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad (2.2)$$

unde  $\vec{r}_0$  este vectorul de poziție al originii reperului  $O'$  față de reperul  $O$ .

Rezultă că unui punct unic din spațiul euclidian îi pot corespunde mai mulți vectori de poziție dependenți de reperele alese.

Distanța dintre două puncte  $P_1$  și  $P_2$  față de reperul cu originea în  $O$  este:

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Acceași distanță față de reperul cu originea în  $O'$  este:

$$|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}.$$

Avînd în vedere că distanța este un invariant al spațiului avem:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Deci distanța dintre două puncte nu depinde de reperul din care ea este măsurată.

Precizarea unui moment în timp implică alegerea unui reper (moment de referință) și a unui etalon de durată. Etalonul de durată se alege în mod arbitrar și este considerat invariabil. Durata dintre momentul origine (de

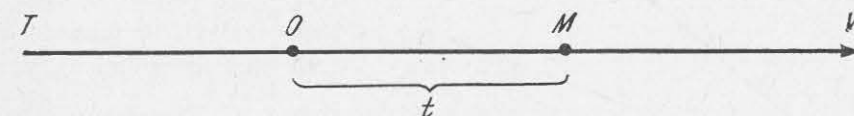


Fig. 2.3. Axa timpului ( $T$  — trecut,  $V$  — viitor), originea timpului  $O$ , coordonata de timp  $t$ .

referință) și momentul studiat reprezintă coordonata de timp  $t$ . Folosind corespondența biunivocă dintre punctele unei drepte și momentele reale, se poate construi o axă a timpului. Pe această axă un punct reprezintă un moment, originea axei reprezintă momentul inițial (fig. 2.3). Axa timpului are un sens obligatoriu de la trecut spre viitor.

Momentul  $M$  poate fi raportat la două origini  $O$  și  $O'$  (fig. 2.4). Între coordonatele temporale  $t$  și  $t'$  ale momentului  $M$  în raport de cele două origini există relația

$$t = t_0 + t'. \quad (2.3)$$

Rezultă că unui moment unic în timp îi corespund mai multe coordonate temporale dependente de originea de timp aleasă.

Durata dintre două momente  $M_1$  și  $M_2$  față de originea  $O$  este

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

și față de originea  $O'$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Avînd în vedere că durata este un invariant al timpului mecanicii clasice, rezultă

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1,$$

durata dintre două momente nu depinde de originea de timp aleasă.

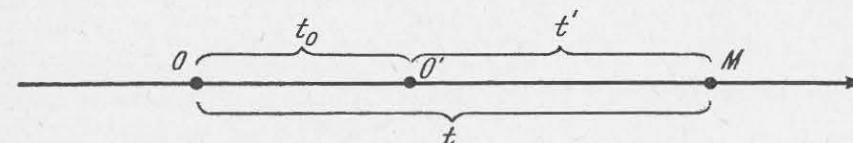


Fig. 2.4. Două origini  $O$  și  $O'$  pe axa timpului.

Precizarea unui eveniment necesitînd două operații, una de localizare și alta de datare, s-a impus unirea reperului pentru localizare cu cel pentru datare. Ansamblul format din aceste două repere constituie un **referențial**. Fiecare referențial are două etaloane, unul pentru măsurarea distanțelor și altul pentru măsurarea duratelor. În raport de un referențial se realizează



localizarea și datarea, prin precizarea a trei coordonate spațiale și a unei coordonate temporale.

Un eveniment este, deci, caracterizat de patru coordonate. Coordonata temporală  $t$  este considerată din punct de vedere matematic ca variabilă independentă monoton crescătoare care poate lua orice valoare reală. Coordonatele spațiale sînt funcții de timp.

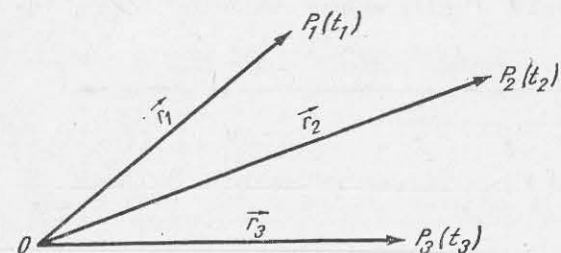


Fig. 2.5. Vectorul de poziție al punctului  $P$  depinde de timp.

de poziție al punctului  $P$  se modifică de la un moment la altul. Se poate afirma că vectorul de poziție al unui punct material este funcție de timp

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.4)$$

Punctul material  $P$  este față de referențialul ales în stare de mișcare, când

$$\vec{r}(t) \neq \vec{r}(t + \Delta t),$$

și în stare de repaus, când

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t).$$

Funcția (2.4) stabilind o corespondență biunivocă între momentele de timp și vectorii de poziție constituie *legea de mișcare* a punctului  $P$  în raport de referențialul ales.

Legea de mișcare poate fi exprimată prin funcții diferite impuse de mișcarea fizică a punctului  $P$ , funcții ce trebuie să satisfacă în intervalul în care sînt definite anumite restricții: să fie continui, uniforme, finite în modul și derivabile.

Legea de mișcare poate fi prezentată și prin următorul sistem de funcții:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

obținute prin proiectarea lui  $r = r(t)$  pe axele unui sistem de coordonate carteziene. Expresiile (2.5) se numesc *legile parametrice ale mișcării*.

Eliminînd timpul din legile parametrice (2.5) se obțin ecuațiile traiectoriei:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Starea de mișcare a punctului material este caracterizată de două mărimi: viteza și accelerația.

a) Se consideră un punct material care la momentul  $t$  se găsește în  $P$  iar la momentul  $t + \Delta t$  în  $P'$  (fig. 2.6). Poziția punctelor  $P$  și  $P'$  este dată de vectorii de poziție  $\vec{r}$  și  $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ .

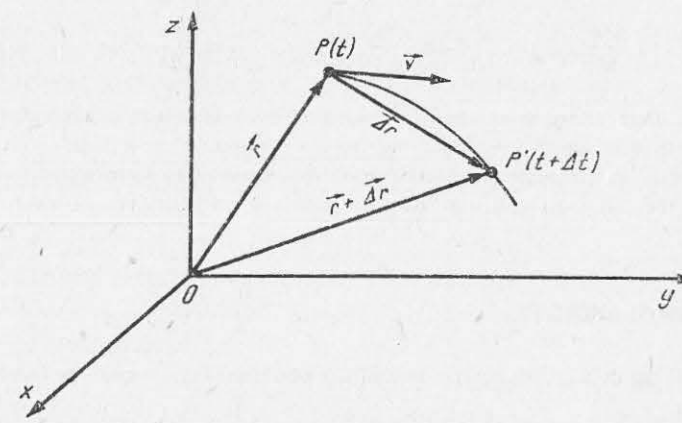


Fig. 2.6. Vectorul viteza este legat de punctul  $P$  și este situat pe tangenta la traiectorie în punctul  $P$ .

Prin definiție vectorul

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.7)$$

este *viteza* punctului  $P$  în raport cu referențialul considerat.

Ținînd seama de (2.1) și de (2.5) relația (2.7) se poate scrie

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (2.8)$$

cu modulul

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\text{unde } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}.$$

b) Se consideră din nou punctul material în cele două poziții  $P$  și  $P'$  caracterizate prin vitezele  $\vec{v}$  și  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$  (fig. 2.7).

Prin definiție vectorul

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.9)$$

este *accelerația* punctului  $P$  în raport cu referențialul considerat.

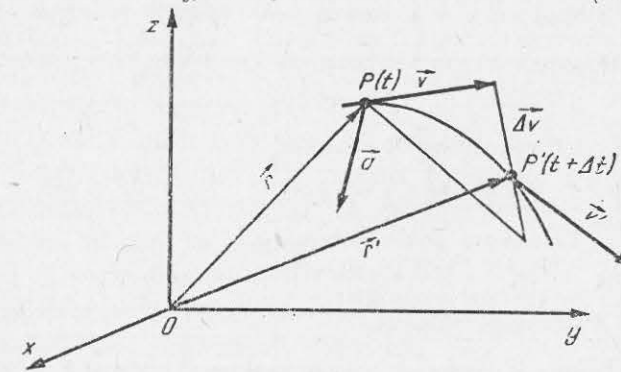


Fig. 2.7. Vectorul accelerație este legat de punctul  $P$  și este îndreptat spre interiorul curbei.

Ținând seama de (2.8) relația (2.9) se poate scrie

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (2.10)$$

cu modulul

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\text{unde } a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

*Observație.* Deși viteza și accelerația reprezintă derivata întâia și respectiv a doua a vectorului de poziție în raport cu timpul, nu trebuie interpretat acest fapt ca o dependență cauzală (accelerația este funcție de viteză, viteza este funcție de vectorul de poziție). Fizic, accelerația este rezultatul acțiunii unei forțe, existența accelerației are ca efect modificarea vitezei.

## ÎNTREBĂRI ȘI EXERCIȚII

1. Identificați ce tip de mișcare studiat în anii anteriori este caracterizat de următoarele legi de mișcare:

$$a) \vec{r}(t) = \vec{a} + bt;$$

$$b) \vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2;$$

$$c) \vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2 + \vec{d}t^3;$$

$$d) \vec{r}(t) = \vec{A} \sin \omega t.$$

2. Scrieți legile parametrice ale mișcărilor prezentate la exercițiul 1.

3. Care este expresia ecuației traiectoriei în cazul mișcărilor prezentate la exercițiul 1?

4. Calculați viteza și accelerația pentru mișcărilor prezentate la exercițiul 1.

5. Mișcarea unui punct material este definită de legile parametrice:

$$a) x = 3t^2, \quad y = 4t^2;$$

$$b) x = 3 \sin t, \quad y = 3 \cos t;$$

$$c) x = a \cos^2 t, \quad y = a \sin^2 t.$$

Determinați pentru fiecare caz:

– expresia legii de mișcare;

– viteza și accelerația;

– ecuația traiectoriei.

6. Legile parametrice ale mișcării unui punct material  $P$  în raport de un referențial  $R$  sînt:

$$x = at, \quad y = bt^2.$$

a) Scrieți legea de mișcare a punctului  $P$  în raport de referențialul  $R$ .

b) Scrieți legea de mișcare a punctului  $P$  și legile parametrice față de un referențial  $R'$  știind că are axele de coordonate paralele cu referențialul  $R$  și originea determinată de relația  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ .

c) Scrieți ecuațiile traiectoriei acestui punct față de referențialele  $R$  și  $R'$ .

7. Mișcarea unui punct material este definită prin legile:

$$x = 2e^t - 1; \quad y = 2e^t + 1.$$

Determinați:

a) traiectoria mobilului;

b) viteza și accelerația la un moment dat.

## 2.2. PROPRIETĂȚILE FUNDAMENTALE ALE SPAȚIULUI ȘI TIMPULUI. REFERENȚIALE INERȚIALE. RELATIVITATEA MIȘCĂRII. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII GALILEENE

**2.2.1. Proprietăți fundamentale ale spațiului și timpului.** Teoria mecanicii clasice este construită, așa cum s-a arătat și în introducere, pe baza următorului grup de principii:

1. Principiul inerției: *orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atît timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe starea.*

2. Principiul proporționalității dintre accelerație și forță: *accelerația imprimată de o forță unui corp este direct proporțională cu forța și invers proporțională cu masa corpului*

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.11)$$

3. Principiul acțiunii și reacțiunii: *acțiunile reciproce dintre două corpuri sînt totdeauna egale și direct opuse.*

Aceste principii pun în evidență proprietățile fundamentale ale spațiului și timpului, care stau la baza mecanicii clasice.

Păstrarea stării de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă de către un corp atît timp cît asupra lui nu acționează o forță, indiferent de punctul unde se află, de direcția pe care se deplasează și de momentul la care se execută, conduce la concluzia că punctele spațiului și direcțiile spațiului precum și momentele de timp sînt echivalente între ele.

Aceleași proprietăți ale spațiului și timpului sînt evidențiate de faptul că o forță aplicată unui corp liber îi imprimă acestuia totdeauna aceeași accelerație, indiferent de punctul unde se află corpul, de direcția pe care se exercită forța și de momentul în care se exercită.

De asemenea, faptul că la interacțiunea dintre două corpuri acțiunea este egală cu reacțiunea oricare ar fi poziția acestor corpuri dovedește că punctele și direcțiile spațiului sînt echivalente între ele.

Principiile mecanicii clasice sînt valabile numai într-un spațiu în care toate punctele sînt echivalente, toate direcțiile sînt echivalente (izotrop) și într-un timp în care toate momentele sînt echivalente (uniform).

Prezența corpurilor și desfășurarea fenomenelor fizice poate distruge omogenitatea și izotropia spațiului, respectiv uniformitatea timpului. De exemplu prezența unui sistem de corpuri care produc un cîmp electric neuniform ( $\vec{E}(\vec{r}, t) \neq \vec{E}(\vec{r} + d\vec{r}, t)$ ) și variabil în timp ( $\vec{E}(\vec{r}, t) \neq \vec{E}(\vec{r}, t + dt)$ ) are ca efect



atît distrugerea omogenității și izotropiei spațiului cît și a uniformității timpului. Mișcarea unui corp electrizat în acest cîmp depinde de punctul din care pleacă, de direcția pe care se deplasează și de momentul cînd începe mișcarea.

**2.2.2. Referențiale inerțiale.** Referențialele în care mișcarea corpurilor (punctelor materiale) se face în conformitate cu principiile mecanicii se numesc referențiale inerțiale (*R.I.*). În referențialele inerțiale spațiul este omogen și izotrop și timpul uniform.

În Univers nu există un referențial absolut inerțial. În anumite limite se acceptă ca referențiale inerțiale diferite sisteme de corpuri, ca de exemplu:

- un sistem de stele care ocupă pe bolta cerească locuri fixe pentru o durată mare de timp;
- o navă cosmică ce s-ar deplasa în spațiu extragalactic, departe de orice corp;
- Pămîntul în cazul cînd durata mișcării este mică față de perioada de rotație.

După ce s-a ales un referențial inerțial se formează clasa referențialelor inerțiale, din mulțimea referențialelor care se află în raport de referențialul selecționat în mișcare rectilinie uniformă.

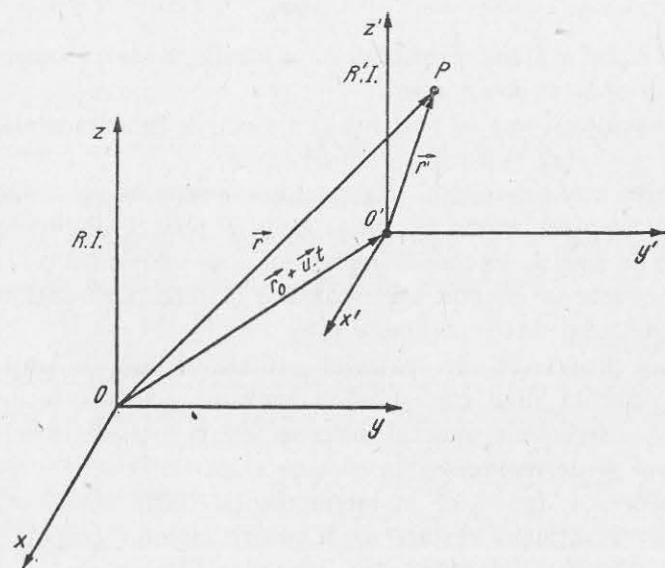


Fig. 2.8. Punctul *P* observat din două referențiale inerțiale.

Clasa referențialelor inerțiale este cea mai adecvată scrierii legilor de mișcare.

**2.2.3. Relativitatea mișcării.** Un punct material *P* este studiat din două referențiale inerțiale. Un referențial *R.I.* este considerat fix, altul *R'.I.* este față de *R.I.* în mișcare rectilinie uniformă cu viteza  $\vec{u}$  (fig. 2.8).

Studiul efectuîndu-se în aproximația timpului mecanicii clasice, se poate admite că durata dintre două evenimente măsurată cu ceasornicele referențialelor *R* și *R'* este aceeași

$$\Delta t = \Delta t',$$

sau luînd aceeași origină pentru măsurarea timpului în ambele referențiale

$$t = t'. \quad (2.12)$$

Între vectorii de poziție ai punctului *P* față de cele două referențiale se poate scrie relația

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 + \vec{u}t, \quad (2.12')$$

unde  $\vec{r}_0$  este vectorul de poziție al originii referențialului *R'* în raport cu *R* la momentul inițial.

Relațiile (2.12), (2.12') formează împreună relațiile de transformare Galilei.

Utilizînd coordonatele, aceste relații, se pot scrie

$$x = x' + x_0 + u_x t, \quad y = y' + y_0 + u_y t, \quad z = z' + z_0 + u_z t, \quad t = t', \quad (2.12'')$$

unde  $u_x, u_y, u_z$  și  $x_0, y_0, z_0$  sînt componentele vitezei de transport a referențialului *R'.I.* și respectiv ale vectorului  $\vec{r}_0$  în referențialul *R.I.* fix. Se poate, de asemenea, scrie

$$x' = x - x_0 - u_x t, \quad y' = y - y_0 - u_y t, \quad z' = z - z_0 - u_z t, \quad t' = t. \quad (2.12''')$$

Relațiile (2.12'') și (2.12''') permit localizarea, în spațiu și în timp, a unui eveniment în unul dintre referențiale inerțiale cînd se cunoaște localizarea evenimentului în celălalt referențial.

Derivînd în raport cu timpul expresia (2.12') se obține

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}.$$

Notînd cu  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , viteza punctului *P* în raport de *R.I.* și cu  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ , viteza punctului *P* în raport de *R'.I.*, expresia de mai sus devine

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (2.13)$$

Relația (2.13) poartă numele de *teorema de compunere a vitezelor în mecanica newtoniană*.

Derivând relația (2.13) în raport cu timpul obținem

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}.$$

Notînd cu  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  accelerația punctului  $P$  față de  $R.I.$  și cu  $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$  accelerația punctului  $P$  față de  $R'I$ , se poate scrie

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.14)$$

Din analiza expresiilor (2.13) și (2.14) se constată că:

- viteza punctului  $P$  diferă de la un referențial la altul;
  - accelerația punctului  $P$  este aceeași față de ambele referențiale;
- accelerația este invariantă față de translația rectilinie și uniformă a referențialului.*

**2.2.4. Principiul relativității galileene.** Prin generalizarea concluziilor de tipul celor prezentate în paragraful (2.2.3) s-a ajuns la formularea următorului principiu:

**legile mișcării corpurilor sînt invariante față de orice translație rectilinie și uniformă a referențialului.**

Acest principiu este cunoscut fie sub denumirea de *principiul relativității clasice* fie sub denumirea de *principiul relativității galileene*.

Conform acestui principiu:

- un punct material ce se află în mișcare rectilinie și uniformă față de un referențial inerțial, este în mișcare rectilinie și uniformă față de toată clasa referențialelor inerțiale;
- un punct material ce se află în mișcare accelerată față de un referențial inerțial va fi în mișcare accelerată, cu aceeași accelerație, față de toată clasa referențialelor inerțiale.

O consecință importantă a principiului relativității galileene este faptul că nici o experiență mecanică executată într-un referențial inerțial nu poate să pună în evidență mișcarea acestui referențial.

Observînd un referențial inerțial dintr-un alt referențial inerțial, se poate determina numai viteza relativă a unuia în raport cu celălalt dar nu se poate stabili care din cele două referențiale este în mișcare sau în repaus.

#### ÎNTREBĂRI ȘI EXERCIȚII

1. Spațiul în care trăim este izotrop? Dar omogen?
2. Dați exemple de situații cînd prezența unor corpuri perturbă proprietățile spațiului și timpului.
3. Demonstrați că orice referențial aflat în mișcare rectilinie și uniformă față de un referențial inerțial este tot referențial inerțial.

4. Calculați distanța dintre două puncte  $P_1$  și  $P_2$  din două referențiale inerțiale. Ce concluzie se poate trage?

5. Demonstrați că principiul fundamental al mecanicii (expresia 2.11) este invariant față de:

- a) translația axelor referențialului;
- b) rotația axelor referențialului.

6. Demonstrați că principiul fundamental al mecanicii (expresia 2.11) este invariant față de mișcarea rectilinie și uniformă a referențialului.

7. Un corp ce cade liber este observat din două referențiale inerțiale:

- unul fix (solidar cu Pămîntul);
- altul ce se deplasează, în direcție orizontală, cu viteza  $\vec{u}$  față de primul referențial.

Care sînt concluziile (legi, traiectorii) referitoare la mișcarea corpului, extrase de fiecare observator?

8. Într-un tren ce se deplasează pe o șină rectilinie orizontală cu viteză constantă, un călător lasă să cadă liber un corp.

a) Studiați mișcarea acestui corp dintr-un referențial solidar cu trenul și din altul solidar cu șina.

b) Cum este perturbată, de rezistența aerului, mișcarea corpului, dacă este lansat în exteriorul trenului (analizați modificările observate din ambele referențiale)?

#### 2.3. PUNCTUL MATERIAL. SISTEME DE PUNCTE MATERIALE. TEOREMELE ENERGIEI, IMPULSULUI ȘI MOMENTULUI CINETIC

**2.3.1. Punctul material.** Pentru studiul mișcării corpurilor s-a imaginat un model „punctul material”. Acestuia i s-au atribuit proprietățile esențiale ale corpului: posibilitatea de localizare la diferite momente de timp, posibilitatea de deplasare, inerția și interacțiunea.

Caracterizarea stării mecanice a punctului material se realizează prin precizarea unora dintre parametri aparținînd următorului grup:

| 1° parametri cinematici       | 2° parametri dinamici                                |
|-------------------------------|------------------------------------------------------|
| — vector de poziție $\vec{r}$ | — masă $m$                                           |
| — viteză $\vec{v}$            | — impuls $\vec{p} = m\vec{v}$                        |
| — accelerația $\vec{a}$       | — energie cinetică $E_c = \frac{1}{2}mv^2$           |
|                               | — moment cinetic $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ |

Să urmărim, dintr-un referențial inerțial, comportarea unui punct material în cîteva situații. Pentru fiecare situație vom stabili numărul minim de parametri necesari pentru caracterizarea punctului material.

a) *Punctul material este liber* (se poate mișca în orice direcție) și *izolat* (nu interacționează cu alte puncte materiale).



În această situație, punctul material va fi, conform principiilor mecanicii clasice, în repaus (fig. 2.9) sau în mișcare rectilinie uniformă (fig. 2.10).

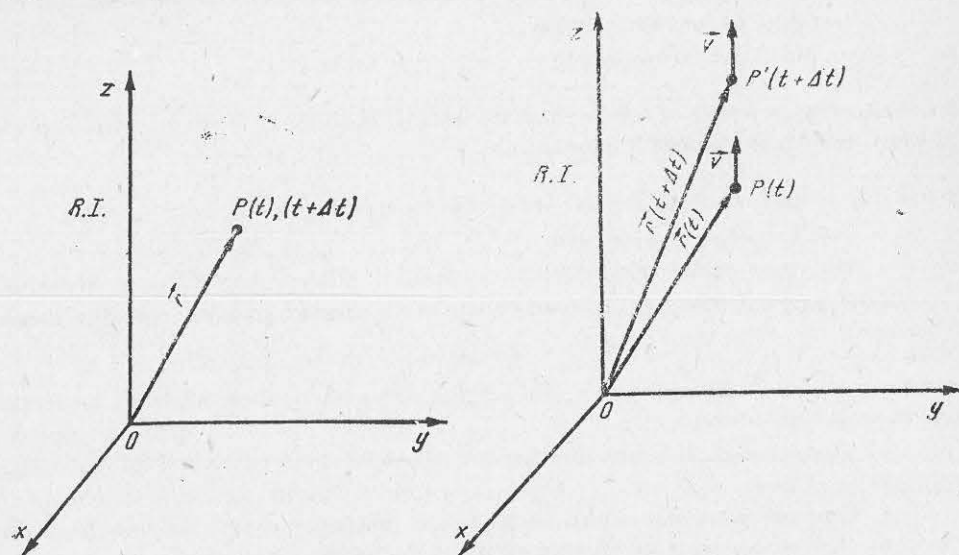


Fig. 2.9. Punctul  $P$  este în repaus față de referențialul  $R.I.$

Fig. 2.10. Punctul  $P$  este în mișcare rectilinie și uniformă în raport cu referențialul  $R.I.$

Experiența arată că aceste stări sînt complet caracterizate prin precizarea vectorului de poziție și a vitezei. Pentru cele două cazuri posibile parametrului de stare sînt:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) \\ & \vec{v} = 0 \\ 2^\circ \quad & \vec{r}(t) \neq \vec{r}(t + \Delta t) \\ & \vec{v}(t) = \vec{v}(t + \Delta t). \end{aligned}$$

b) Punctul material este liber și interacționează cu un alt punct material; interacțiunea este caracterizată de forța  $\vec{F}$ .

În această situație se va modifica starea punctului material (fig. 2.11) conform principiului fundamental

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2.15)$$

Dacă se cunosc: poziția inițială ( $\vec{r}_0$ ), viteza inițială ( $\vec{v}_0$ ), masa ( $m$ ) și forța ( $\vec{F}$ ), prin integrarea relației (2.15) se obține legea de mișcare

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2),$$

unde  $\vec{C}_1$  și  $\vec{C}_2$  sînt constante vectoriale de integrare ce se determină din condițiile inițiale.

Relația (2.15), ținînd cont de relațiile (2.7), (2.9) și de constanța masei, se poate scrie

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt,$$

sau

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (2.16)$$

Dacă se presupune cunoscută expresia forței  $F$  în funcție de timp și se poate integra expresia (2.16) pentru intervalul  $t_1 - t_2$ , se obține

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (2.16')$$

Relațiile (2.16) și (2.16') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a impulsului unui punct material sub formă diferențială (2.16) și sub formă integrală (2.16'). În cuvinte această teoremă (2.16') se enunță:

**variația impulsului unui punct material, acționat un interval de timp de o forță, este egală cu impulsul total al forței, corespunzător intervalului de timp considerat.**

Efectul acțiunii forței  $\vec{F}$  asupra punctului material este dependent atît de viteza inițială cît și de masa acestuia. Rezultă că starea mecanică a unui punct material este mai bine caracterizată dacă se precizează impulsul deoarece acesta înglobează viteza și masa.

Există unele situații în care este mai convenabil de urmărit efectul acțiunii forței  $\vec{F}$  asupra altui parametru dinamic—energia cinetică.

Să considerăm că în intervalul de timp  $dt$ , sub acțiunea forței  $\vec{F}$ , punctul material suferă o deplasare elementară  $d\vec{r}$  (fig. 2.11). Pentru a stabili variația energiei cinetice a punctului material, ca urmare a acestei deplasări, înmulțim relația (2.15) scalar cu  $d\vec{r}$ . Obținem

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Înlocuind pe  $d\vec{r}$  cu  $\vec{v} dt$ , rezultă

$$m\vec{v} d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

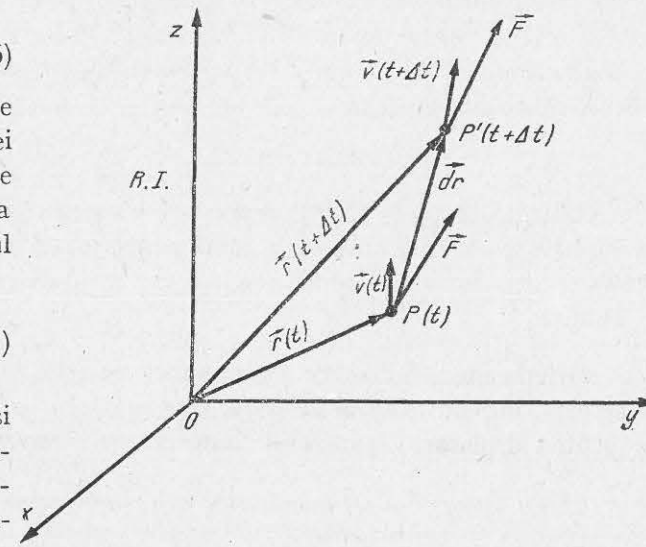


Fig. 2.11. Punctul  $P$  se află sub acțiunea unei forțe  $\vec{F}$ .

sau

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.17)$$

$$dE_c = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dL.$$

În cazul când expresia (2.17) se poate integra pentru intervalul de timp  $t_1 - t_2$ , se obține

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.17')$$

Relațiile (2.17) și (2.17') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a energiei cinetice a unui punct material sub formă diferențială (2.17) și sub formă integrală (2.17'). În cuvinte această teoremă (2.17') se enunță:

**variația energiei cinetice a unui punct material de masă constantă acționat de o forță, într-un interval de timp, este egală cu lucrul mecanic total al forței pentru deplasarea punctului material în intervalul de timp considerat.**

*Observație.* Pentru caracterizarea stării unui punct material nu este necesar să se precizeze și energia și impulsul, deoarece între ele există relația

$$E_c = \frac{p^2}{2m}.$$

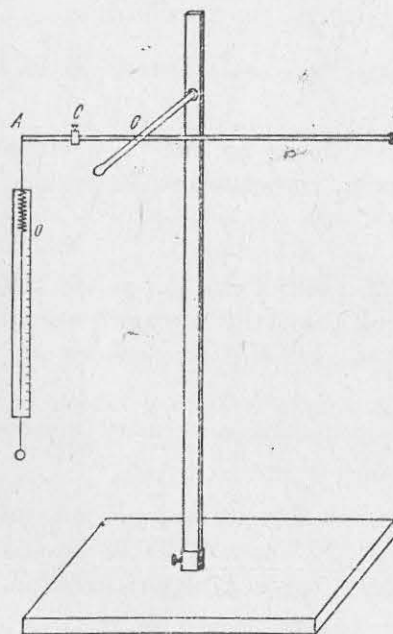


Fig. 2.12. Dispozitiv pentru studiul momentului forței.

c) Punctul material  $P$  este legat de un punct fix  $O$  și asupra lui acționează o forță  $\vec{F}$ . Din observațiile curente s-a constatat că în această situație, traiectoria punctului  $P$  este impusă de legături.

Pentru a vedea care sînt parametrii necesari caracterizării punctului material  $P$  în acest caz vom analiza un experiment.

*Experiment.* O bară subțire rigidă cu masă mică este suspendată în punctul fix  $O$ , aflat față de extremitatea  $A$  la o distanță egală cu o pătrime din lungimea barei (fig. 2.12). De extremitatea  $A$  este prins în poziție fixă, perpendicular pe bară, un dispozitiv format dintr-o riglă gradată și un resort. În aceste condiții, echilibrul barei se poate realiza prin deplasarea corpului  $C$ . De extremitatea  $B$  se prinde un corp  $P$  de dimensiuni mici și masă mare în raport cu masa barei. Acest corp reprezintă punctul material  $P$  legat de punctul  $O$  prin intermediul barei rigide. Corpul aflîndu-se în câmpul gravitațional terestru este acționat de propria sa greutate  $\vec{G}$  (echivalentă cu  $\vec{F}$ ).

Sub acțiunea greutății  $\vec{G}$ , bara iese din starea de echilibru. Pentru reechilibrarea barei se întinde resortul prins în punctul  $A$ . Se urmărește alungirea acestui resort, pentru starea de echilibru a barei, în următoarele cazuri:

— se înlocuiește corpul  $P$  cu alte corpuri cu mase din ce în ce mai mari (se modifică astfel valoarea forței  $\vec{F}$ );

— se deplasează corpul  $P$  în diferite poziții între  $O$  și  $B$ ;

— se păstrează fixă poziția pe bară și masa corpului  $P$  și se realizează echilibrul pentru diferite înclinări ale barei (fig. 2.13).

Din observațiile efectuate în timpul experimentului și din prelucrarea datelor obținute, rezultă:

— corpul  $P$  nu se poate deplasa decît pe un arc de cerc — traiectorie impusă de legături;

— efectul acțiunii forței  $\vec{F}$  (în cazul experimentului  $\vec{G}$ ) constă în scoaterea sistemului din stare de echilibru și antrenarea lui într-o mișcare de rotație;

— deformarea resortului ( $\Delta l$ ) necesară echilibrării sistemului depinde de  $\Delta l \sim Fr \sin \alpha$ .

Se obțin aceleași rezultate dacă se realizează experimentul după ce întregul sistem a suferit o rotație, în plan vertical, în jurul lui  $O$  cu un unghi egal cu  $\pi$  rad. În acest caz se modifică numai sensul deplasării punctului  $P$ .

Din aceste concluzii reiese că efectul de rotație depinde ca:

— *intensitate*, de modulele vectorilor  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$  și de sinusul unghiului format de acești vectori;

— *sens*, de pozițiile relative ale vectorilor  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$ .

Pentru caracterizarea efectului de rotație s-a introdus o mărime care să înglobeze toate aceste caracteristici, numită **momentul forței** ( $\vec{M}$ ), ce se definește

$$\vec{M}_{\vec{r},O} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.18)$$

Expresia  $\vec{r} \times \vec{F}$  reprezintă produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței și vectorul forță (fig. 2.14).

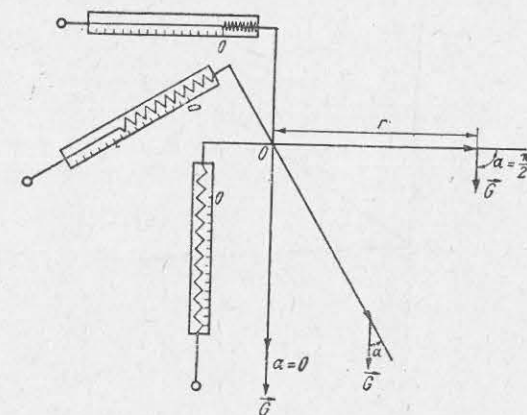


Fig. 2.13. Poziții diferite în timpul experimentului.

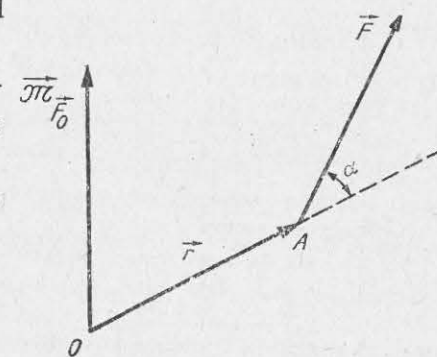


Fig. 2.14. Momentul forței  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O$ .



Produsul vectorial a doi vectori  $\vec{a} \times \vec{b}$  este un vector  $\vec{c}$ , care are modulul egal cu  $ab \sin(\widehat{a, b})$ , direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și sensul același cu sensul de înaintare al burghiului drept când este rotit în sensul ce trebuie deplasat primul vector din produs pentru a deveni paralel cu cel de al doilea vector sub un unghi mai mic de  $\pi$  rad.

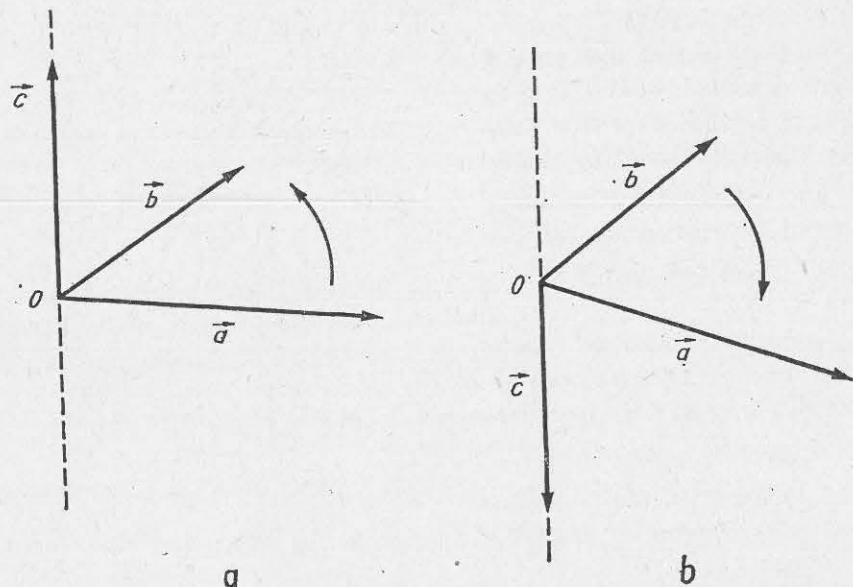


Fig. 2.15. Produsul vectorial nu este comutativ.

Produsul vectorial nu este comutativ, inversarea factorilor modifică sensul vectorului produs (fig. 2.15)

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

*Observații.* 1. Axele sistemului cartezian de coordonate au o astfel de orientare încât între versorii atașați lor să existe relația  $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$  (sistem „drept”).

Între vectorul moment  $\vec{M}$  (obținut prin operația de produs vectorial) și vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$  există o deosebire esențială. Sensul vectorilor  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  este stabilit pe baza unui fapt natural pe când sensul vectorului  $\vec{M}$  este stabilit convențional. Din acest punct de vedere se pot forma două clase de vectori:

- clasa vectorilor *polari*, al căror sens este impus de fapte naturale, ca de exemplu: vectorul de poziție, forța, viteza, intensitatea cîmpului electric etc.;
- clasa vectorilor *axiali*, al căror sens se stabilește printr-o convenție, ca de exemplu: momentul forței, viteza unghiulară, inducția magnetică etc.

Datorită faptului că fac parte din clase diferite, nu au sens operațiile de egalitate și însumare între vectorii polari și cei axiali.

Studiul experimental al comportării unui corp legat, de un punct fix, sub acțiunea unei forțe, ne-a condus la necesitatea introducerii mărimii — momentul forței.

Unitatea de măsură pentru această mărime se obține utilizând pentru definiție expresia scalară a relației (2.18).

$$M = Fr \sin \alpha. \quad (2.18')$$

Considerind  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  deci momentul maxim, obținem

$$\begin{aligned} M_{max} &= Fr, \\ \langle M \rangle_{SI} &= \langle F \rangle_{SI} \langle r \rangle_{SI} \\ \langle M \rangle_{SI} &= \text{N.m.} \end{aligned}$$

*Observație.* Unitatea de măsură pentru momentul forței este formată din aceleași unități fundamentale ca și lucrul mecanic, cu toate acestea ele au semnificații diferite în conformitate cu mărimile din care fac parte.

Înlocuind în expresia (2.18) pe  $\vec{F}$  cu  $\frac{d\vec{p}}{dt}$ , obținem

$$\vec{M}_{\vec{F}, O} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt},$$

expresie ce se mai poate scrie

$$\vec{M}_{\vec{F}, O} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})^*,$$

sau

$$d\vec{L} = \vec{M}_{\vec{F}, O} dt, \quad (2.19)$$

unde am notat cu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.20)$$

Vectorul (2.20) poartă numele de *moment cinetic*.

În cazul când expresia (2.19) se poate integra pentru intervalul  $t_1 - t_2$ , se obține:

$$\Delta \vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{\vec{F}, O} dt. \quad (2.19')$$

Relațiile (2.19) și (2.19') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a momentului cinetic al unui punct material sub formă diferențială (2.19) și sub formă integrală (2.19'). În cuvinte această teoremă se enunță:

**variația momentului cinetic al unui punct material, în raport cu un punct O, este egală cu impulsul total al momentului care acționează asupra lui, calculat în raport de punctul O.**

\*  $\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ ; ținând seama că  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ,  $(\vec{v}, \vec{p}) = 0$ , rezultă  $\vec{v} \times \vec{p} = 0$ , deci  $\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

Momentul cinetic caracterizează starea de mișcare a unui punct material legat de un punct fix, el este un vector perpendicular pe planul determinat de  $\vec{r}$  și  $\vec{p}$  (fig. 2.16). De exemplu, electronul în atom poate fi asimilat cu un

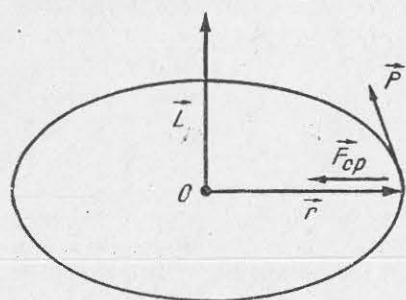


Fig. 2.16. Reprezentarea momentului cinetic al unui punct material.

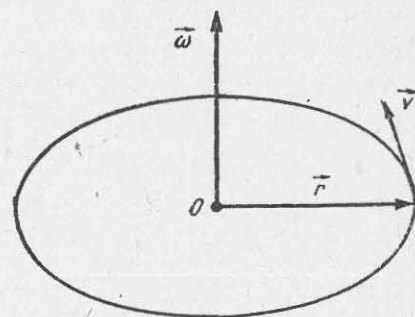


Fig. 2.17. Viteza unghiulară este un vector axial.

punct material legat, legătura fiind datorată atracției electrostatice. El este caracterizat de un moment cinetic orbital

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

unde  $\vec{r}$  este raza orbitei iar  $\vec{p}$  impulsul electronului.

*Observație.* Utilizând produsul vectorial, se poate exprima relația dintre viteza liniară  $\vec{v}$ , viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  și raza vectorie  $\vec{r}$ , ce caracterizează un punct material în mișcare circulară (fig. 2.17) astfel:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Se observă că momentul cinetic ce caracterizează acest punct material are aceeași orientare cu viteza unghiulară.

Studiul unui punct material legat impune, deci, caracterizarea stării acestui punct prin parametrul moment cinetic.

În concluzie, rezultă, că pentru caracterizarea stării mecanice a punctului material, dependent de situația în care se află, se pot utiliza diferiți parametri de stare. Deoarece între acești parametri există relații de legătură — pentru precizarea unei stări este suficient a se determina numai doi dintre ei — de exemplu vectorul de poziție și impulsul.

**2.3.2. Sistem de puncte materiale.** Pentru studiul sistemelor de corpuri s-a imaginat un model — *sistemul de puncte materiale*. În cadrul acestui model corpurile au fost înlocuite cu puncte materiale iar legăturile datorate articulațiilor, cablurilor, curelelor, prin interacțiuni între puncte.

În general prin *sistem de puncte materiale* se înțelege un ansamblu de puncte în care poziția și mișcarea fiecărui punct depind de poziția și mișcarea tuturor celorlalte puncte. Această condiție este îndeplinită numai când între punctele sistemului există interacțiuni.

Să analizăm dintr-un referențial inerțial (R.I.) un sistem de  $n$  punct materiale de mase  $m_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  (fig. 2.18). Interacțiunile care se exercită între puncte ce aparțin sistemului se numesc *interacțiuni interioare*. Punctul  $P_j$  acționează asupra lui  $P_i$  cu forța  $\vec{F}_{ij}$ , iar  $P_i$  acționează asupra lui  $P_j$  cu forța  $\vec{F}_{ji}$ . Aceste forțe, conform principiului acțiunilor reciproce, sînt în relația:

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0. \quad (2.21)$$

Rezultanta forțelor interioare exercitate asupra lui  $P_i$  este  $\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}$ , unde  $j = 1, 2, \dots, n$ , cu observația că pentru  $j = i$ ,  $\vec{F}_{ii} = 0$ . Această rezultantă, în general, este diferită de zero.

În conformitate cu relația (2.21), rezultanta tuturor forțelor interioare din sistem este nulă:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0. \quad (2.22)$$

Momentul resultant al tuturor forțelor interioare în raport cu originea referențialului

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}) = 0, \quad (2.23)$$

este de asemenea nul, deoarece este compus din termeni de forma:  $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$ , care sînt toți nuli. Acești termeni se mai pot scrie:  $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_i + \vec{r}_{ij})(-\vec{F}_{ij}) = -\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$ , deoarece  $\vec{r}_{ij}$  și  $\vec{F}_{ij}$  sînt coliniari.

Interacțiunile dintre punctele materiale ale sistemului și cele exterioare lui se numesc *interacțiuni exterioare*. Notăm rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra lui  $P_i$  cu  $\vec{F}_i$ . Rezultanta tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra punctelor sistemului este

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.24)$$

Un sistem de puncte materiale care nu interacționează cu alte sisteme se numește izolat.

În natură nu există sisteme izolate; totuși unele sisteme de corpuri pot fi, cu o bună aproximație, asimilate cu un sistem izolat. De exemplu

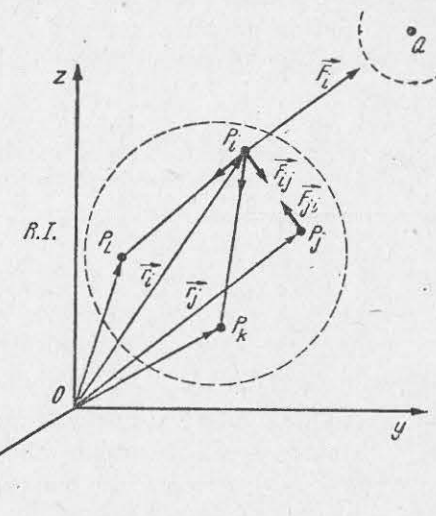


Fig. 2.18. Interacțiuni interioare și exterioare în cadrul unui sistem de puncte materiale.



sistemul solar poate fi asimilat, în primul rând, cu un sistem de puncte materiale deoarece distanțele dintre Soare și planete sînt foarte mari în raport de dimensiunile lor. Sistemul solar, în al doilea rând, poate fi considerat izolat deoarece se află la distanțe foarte mari de alte sisteme (interacțiunile exterioare sînt neglijabile față de cele interioare).

Studiul mișcării sistemului de puncte materiale necesită urmărirea fiecărui punct în parte, adică determinarea legii de mișcare pentru fiecare punct

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t).$$

Legea de mișcare obținându-se prin integrarea relației (2.15), trebuie scrise  $n$  ecuații de tipul:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}. \quad (2.25)$$

Această cale ridică dificultăți deosebite, în primul rând, de ordin matematic în cazul cînd  $n > 2$  și, în al doilea rând, dificultăți în legătură cu expresiile interacțiunilor interioare care nu sînt cunoscute în multe cazuri.

Ținînd seama de aceste dificultăți și de faptul că în studiul sistemelor mecanice, de cele mai multe ori, este suficient să cunoști caracteristici globale ale mișcării sistemului întreg și nu mișcarea fiecărui punct, s-a definit un grup de funcții de stare, pentru sistem, a căror variații dau informații asupra evoluției sistemului.

Aceste funcții sînt:

$$\text{— impulsul sistemului } \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (2.26)$$

$$\text{— energia cinetică a sistemului } E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (2.27)$$

$$\text{— momentul cinetic al sistemului } \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (2.28)$$

Valorile acestor funcții de stare sînt dependente de referențialul în raport cu care sînt definite. În general nu se evaluează valoarea globală a funcției ci numai variația ei.

Variațiile acestor funcții de stare sînt determinate cu ajutorul unor teoreme generale.

a) *Teorema de variație a impulsului:*

variația impulsului unui sistem de puncte materiale, acționat un interval de timp de o forță exterioară, este egală cu impulsul total al forței exterioare, corespunzător intervalului de timp considerat.

Pentru demonstrarea acestei teoreme scriem expresia (2.25) sub forma

$$\frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij},$$

și însumăm pentru cele  $n$  puncte ale sistemului:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}.$$

Ținînd seama de relațiile (2.22), (2.24), (2.26) și de faptul că operatorii sumă și derivare sînt comutativi această expresie se poate scrie

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}_e,$$

$$d\vec{p} = \vec{F}_e \cdot dt. \quad (2.29)$$

În cazul cînd expresia (2.29) se poate integra în intervalul  $t_1 - t_2$ , se obține

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt. \quad (2.29')$$

Relațiile (2.29) și (2.29') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a impulsului unui sistem de puncte materiale, sub formă diferențială (2.29) și sub formă integrală (2.29').

*Observații. 1.* Interacțiunile interioare nu influențează impulsul unui sistem de puncte materiale.

2. Teorema de variație a impulsului este valabilă pentru: sistemele materiale deformabile, sistemele materiale rigide și sistemele continue.

3. Variația impulsului unui sistem de puncte materiale nu este dependentă de referențialul din care se face observația.

4. În cazul sistemului rigid, toate punctele materiale ale sistemului avînd aceeași viteză  $\vec{v}$ , impulsul total se poate scrie

$$\vec{p} = \vec{v} \sum_{i=1}^n m_i = m \vec{v}. \quad (2.26')$$

Această relație permite calcularea impulsului unui corp în raport cu un referențial, dacă se cunosc masa corpului și viteza.

Teorema de variație a impulsului permite, deci, studiul corpurilor ce pot fi asimilate cu sisteme de puncte materiale ca de exemplu: o barcă, un proiectil, un cărucior fără roți etc.

În cazul în care sistemul este izolat sau în care rezultanta forțelor exterioare este nulă

$$\Delta \vec{p} = 0,$$

ceea ce înseamnă

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.} \quad (2.30)$$

Expresia (2.30) reprezintă teorema de conservare a impulsului:

**impulsul unui sistem izolat de puncte materiale este constant.**

*Observație.* Proiectînd expresia (2.30) pe axele referențialului R.I. se obține:

$$d \left( \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} \right) = F_{ex} dt; \quad d \left( \sum_{i=1}^n m_i v_{iy} \right) = F_{ey} dt; \quad d \left( \sum_{i=1}^n m_i v_{iz} \right) = F_{ez} dt.$$

Dacă rezultanta forțelor exterioare are proiecția nulă pe una din axe, componenta impulsului pe axa respectivă rămâne constantă. De exemplu, în cazul sistemelor aflate numai sub acțiunea gravitației, componenta orizontală a impulsului rămâne constantă.

Aceste teoreme se pot verifica, calitativ, experimental destul de ușor.

**Experimente 1.** Pe o platformă cu roți foarte mobile, așezată pe o suprafață orizontală (fig. 2.19,  $a_1$ ), în repaus față de un referențial solidar cu pereții laboratorului, se aruncă din mers un elev. Se constată că se formează sistemul platformă-elev care se deplasează cu o viteză mai mică decât cea inițială a elevului dar în același sens (fig. 2.19,  $b_1$ ). Această constatare confirmă teorema de variație a impulsului. Inițial impulsul platformei era nul, după interacțiunea cu elevul care avea un anumit impuls, s-a modificat atât impulsul platformei cât și cel al elevului.

2. Pe platformă, la o extremitate, se află un elev (fig. 2.19,  $a_2$ ). Elevul începe să se deplaseze cu viteză constantă spre extremitatea opusă, se constată că platforma se deplasează în sens contrar deplasării lui (fig. 2.19,  $b_2$ ). Această observație confirmă legea de conservare a impulsului. Inițial impulsul sistemului platformă-elev era zero. Datorită interacțiunilor (interioare) dintre elev și platformă, fiecare are un impuls diferit de zero și de sens contrar celuilalt, astfel încât impulsul total al sistemului să fie tot zero.

*b) Teorema de variație a energiei cinetice:*

*variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale, într-un interval de timp, este egală cu suma lucrurilor mecanice totale ale forțelor exterioare ( $L_{ext}$ ) și ale celor interioare ( $L_{int}$ ), pentru toate deplasările punctelor sistemului în intervalul de timp considerat.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme înmulțim expresia (2.25) scalar cu  $d\vec{r}_i$  și însumăm pentru cele  $n$  puncte ale sistemului

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \left( d\vec{r}_i \cdot \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right).$$

Ținând seamă de (2.27), de comutativitatea operatorilor sumă și diferențiere și notînd  $dL_{ext} = \sum_{i=1}^n d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ ,  $dL_{int} = \sum_{i=1}^n \left( d\vec{r}_i \cdot \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right)$  se obține

$$dE_c = dL_{ext} + dL_{int}. \quad (2.31')$$

În cazul cînd se poate integra această relație în intervalul de timp  $t_1-t_2$ , se obține

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} dL_{ext} + \int_{t_1}^{t_2} dL_{int},$$

$$\Delta E_c = L_{ext} + L_{int}. \quad (2.31'')$$

Relațiile (2.31) și (2.31') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale, sub formă diferențială (2.31) și sub formă integrală (2.31'').

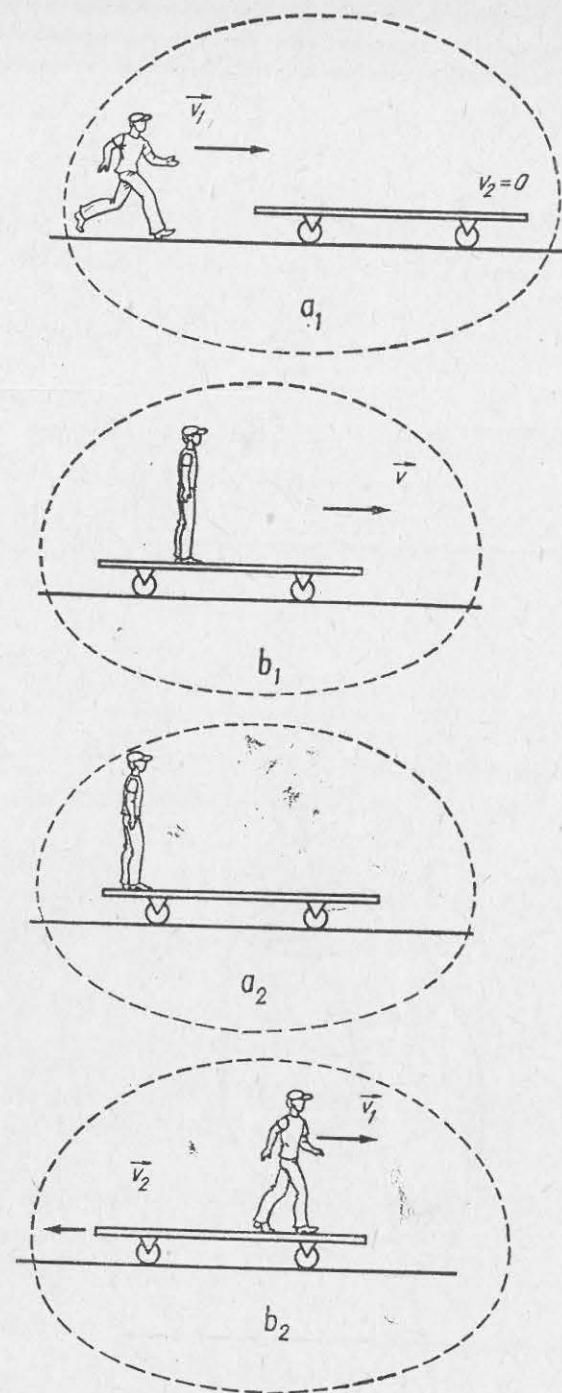


Fig. 2.19. Experimente care permit verificarea teoremei de variație a impulsului ( $a_1$  și  $b_1$ ) și a teoremei de conservare ( $a_2$  și  $b_2$ ).



**Observație.** Spre deosebire de teorema de variație a impulsului, forțele interioare nu sînt eliminate din teorema de variație a energiei cinetice, ele efectuează lucru mecanic. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale izolat sau la care  $dL_{ext} = 0$  nu este constantă, se modifică conform relației  $dE_c = dL_{int}$ .

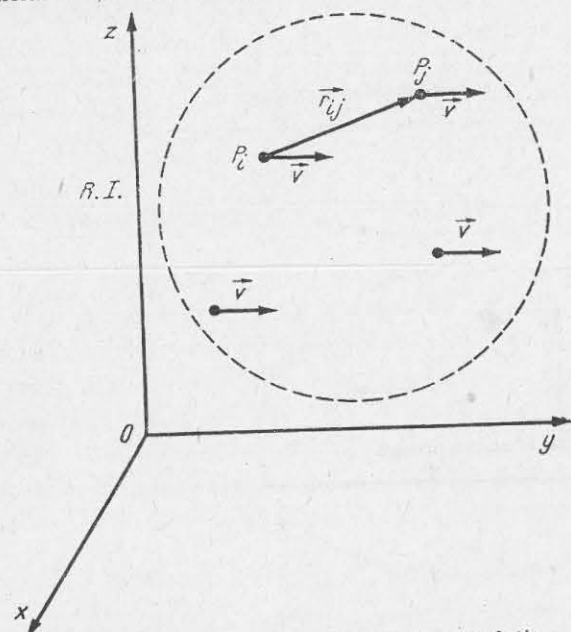


Fig. 2.20. Sistem rigid în mișcare de translație.

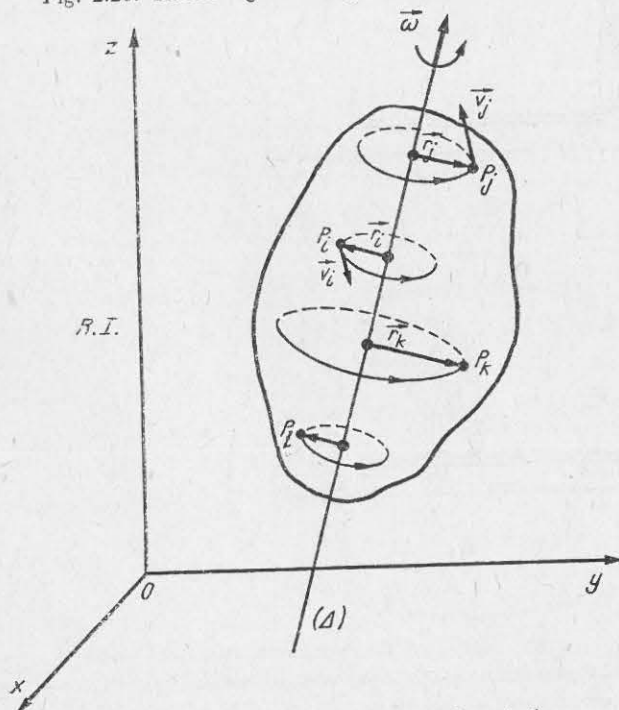


Fig. 2.21. Sistem rigid în mișcare de rotație.

Să analizăm două cazuri particulare de sisteme de puncte materiale.

**Sistem rigid** (nedeformabil) caracterizat prin distanțele  $\vec{r}_{ij}$  constante sau  $d\vec{r}_{ij} = 0$ .

Expresia (2.31), în cazul sistemelor rigide devine

$$dE_c = dL_{ext}. \quad (2.32)$$

În cazul în care sistemul rigid se află în mișcare de translație față de R.I. (fig. 2.20), toate punctele lui avînd aceeași viteză, energia cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m v^2, \quad (2.33)$$

este egală cu energia cinetică a unui punct al sistemului, punct în care s-ar concentra întreaga masă.

În cazul în care sistemul rigid se află în mișcare de rotație în jurul axei  $\Delta$ , față de R.I. (fig. 2.21), toate punctele lui au aceeași viteză unghiulară. Pentru această situație, ținînd seama că  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  ( $v_i = \omega r_i$ ), energia cinetică este

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (2.34)$$

## Expresia

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_{\Delta}. \quad (2.35)$$

poartă numele de *moment de inerție al sistemului în raport cu axa  $\Delta$* .

**Observații.** 1. Cu  $r_i$  — s-a notat distanța dintre un punct și axa de rotație (fig. 2.21).

2. Momentul de inerție caracterizează un sistem de puncte materiale din punctul de vedere al răspîndirii masei în raport de o axă (punct, plan).

3. Unitatea de măsură în S.I. pentru momentul de inerție este

$$[J]_{SI} = \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

4. Relația (2.35) este valabilă numai pentru mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe. În cazul unui alt tip de mișcare de rotație expresia momentului de inerție are altă formă.

Ținînd seama de (2.35), relația (2.34) devine

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2, \quad (2.36)$$

și exprimă *energia cinetică a unui sistem rigid în mișcare de rotație*.

Din compararea relațiilor (2.33) și (2.36) se constată că:

— energia cinetică a unui corp, fie că se datorează mișcării de translație fie celei de rotație, se exprimă prin același tip de relație matematică

$$E_c = \frac{1}{2} a b^2,$$

în care factorul la puterea întâi caracterizează proprietățile inerțiale ale sistemului, iar factorul la puterea a doua caracterizează viteza sistemului;

— masei corpului, aflat în mișcare de translație, îi corespunde, în cazul mișcării de rotație, momentul de inerție.

Un sistem rigid poate fi simultan în mișcare de translație și de rotație, în acest caz energia cinetică este

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2. \quad (2.37)$$

În această situație teorema de variație a energiei cinetice, sub forma integrală, se scrie

$$\Delta \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \right) = L_{ext}.$$

Verificarea experimentală a acestei teoreme se poate realiza, calitativ, destul de ușor.

**Experimente. 1.** Pe un plan înclinat (fig. 2.22) de la aceeași înălțime, în același moment, sînt lăsați liberi doi cilindri cu diametrele, înălțimile și masele egale. Un cilindru este din lemn și altul din metal (reprezintă o porțiune dintr-o țevă). Se observă că ambii cilindri coboară pe planul înclinat, cel de lemn avînd viteza de translație a axei mai mare decît cel de metal. Aceste

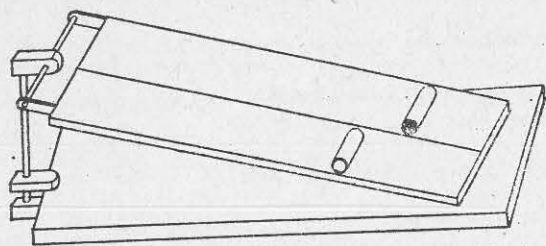


Fig. 2.22. Verificarea legii de variație a energiei cinetice; rolul momentului de inerție în variația vitezei.

constatări confirmă legea de variație a energiei cinetice. Deplasîndu-se pe distanțe egale sub acțiunea unor forțe egale (componentele tangențiale ale greutateților, frecările fiind mici se pot neglija) asupra lor se efectuează din exterior lucruri mecanice egale. Rezultă că și variațiile de energie cinetică

sînt egale. Se ridică întrebarea: care factor îi face să aibă viteze de translație diferite?

Teorema de variație a energiei cinetice pentru cazul particular al acestor cilindrii ( $E_{c0} = 0$ ), este

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = mgh \quad (\text{cilindru de lemn})$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = mgh \quad (\text{cilindru de metal}).$$

Efectuînd raportul acestor expresii și înlocuind pe  $\omega = \frac{v}{r}$ , obținem

$$\frac{mr^2 + J_1}{mr^2 + J_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2.$$

Deoarece  $v_2 < v_1$  rezultă  $J_2 > J_1$ . Pe baza acestui rezultat se poate emite ipoteza: momentul de inerție al unui corp depinde de felul cum sînt distribuite punctele materiale din care este alcătuit corpul, în raport de axa de rotație. Această ipoteză trebuie verificată printr-un alt experiment.

2. Se montează o bară astfel încît să poată să execute o mișcare de rotație în jurul unui ax vertical (fig. 2.23). Pe această bară se pot fixa, în diferite poziții, corpuri de dimensiuni mici dar avînd masă mare. Bara se poate pune în mișcare prin desfășurarea firului de pe tamburul  $T$ . Se așază, pe bară, corpurile la  $\frac{1}{3}r$ ,  $\frac{2}{3}r$  și  $r$  față de centrul  $O$ ; de fiecare dată se aduce bara în stare de mișcare și se observă viteza unghiulară. Se constată că viteza unghiulară este din ce în ce mai mică ( $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ ). Deoarece de fiecare dată s-a efectuat același lucru mecanic, variațiile de energie cinetică sînt egale

(pentru cazul nostru  $E_{c1} = E_{c2} = E_{c3}$ ) rezultă că momentele de inerție sînt diferite și anume  $J_1 < J_2 < J_3$ .

Este verificată, astfel, ipoteza emisă pe baza observațiilor efectuate în cadrul experimentului 1 și anume: dependența momentului de inerție al unui corp de distribuția punctelor materiale în raport cu axa de rotație. Acest experiment a permis evidențierea unui aspect nou: momentul de inerție al unui corp este cu atît mai mare cu cît punctele materiale sînt distribuite la distanță mai mare față de axa de rotație.

Această nouă ipoteză se poate, de asemenea, verifica experimental.

3. Trei corpuri identice sînt prinse într-un sistem de sus pensie (fig. 2.24) care le permite să execute rotații în jurul unor axe diferite. Se aduc pe rînd în stare de mișcare cele trei corpuri, prin desfășurarea firului de pe tambur. Se constată că  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ , de unde rezultă  $J_1 < J_2 < J_3$ , concluzie ce confirmă ipoteza.

Acest experiment evidențiază, în plus, faptul că momentul de inerție al aceluiași corp este dependent de axa în jurul căruia se rotește.

4. Pe axul dispozitivului folosit pentru experimentul 2 se prind, la distanță egală de centrul  $O$ , două copuri cu mase egale  $M_1$ . Se aduce sistemul în stare de mișcare prin desfășurarea firului de pe tamburul  $T$  și se observă viteza unghiulară. Se înlocuiesc corpurile cu altele cu masa  $M_2 > M_1$  care se așază în aceeași poziție și se repetă experimentul. Se constată că  $\omega_1 > \omega_2$ , ceea ce înseamnă  $J_2 > J_1$ . Acest experiment evidențiază faptul că momentul de inerție al unui corp depinde de masa corpului.

Analiza acestor experimente permite extragerea următoarelor concluzii:

- spre deosebire de masa unui sistem rigid care este independentă de distribuția punctelor materiale, momentul de inerție depinde esențial de distanța dintre puncte și axă;
- același sistem rigid are față de axe diferite, momente de inerție diferite.

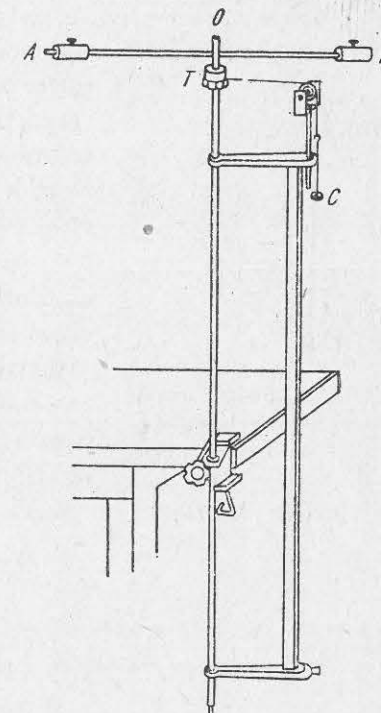


Fig. 2.23. Dispozitiv pentru studiul momentului de inerție.

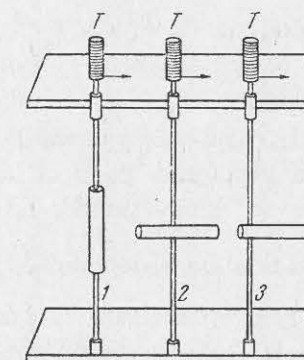


Fig. 2.24. Dependența momentului de inerție față de axa de rotație.



Momentele de inerție pentru corpurile cu formă geometrică regulată se calculează, pentru cele cu formă geometrică neregulată se determină pe cale experimentală. În tabelul 2.1 sînt trecute momentele de inerție ale unor corpuri frecvent întîlnite.

**Sistem conservativ.** Acest sistem este caracterizat prin faptul că forțele interioare constituie un câmp conservativ. Câmpul conservativ de forțe (interioare sau exterioare) efectuează pentru deplasarea corpurilor (punctelor materiale) un lucru mecanic ce nu depinde de drumul parcurs. Din categoria forțelor conservative fac parte: forțele gravitaționale, electrostatice, elastice etc.

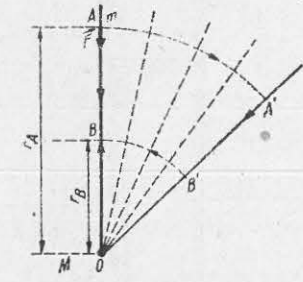


Fig. 2.25. Lucrul mecanic într-un câmp conservativ nu depinde de drumul urmat.

Să considerăm un sistem conservativ format din două puncte materiale de mase  $M$  și  $m$  (fig. 2.25). Între aceste puncte se exercită interacțiuni gravitaționale conform legii lui Newton. Punctul de masă  $M$  este fix în  $O$ . Punctul de masă  $m$  se află în  $A$  și nu este supus la legături. Sub acțiunea forței  $\vec{F}$  el se deplasează pînă în  $B$ . Lucrul mecanic efectuat de forțele interioare în acest caz este

$$L_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} dL = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Înlocuind pe  $\vec{F} = k \frac{Mm}{r^2} \vec{r}$  și ținînd seama că unghiul  $(\vec{r}, d\vec{r}) = 0$ , obținem

$$L_{AB} = kMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kMm \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = kMm \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (2.38)$$

Relația (2.38) arată că lucrul mecanic efectuat de interacțiunile interioare pentru a deplasa corpul de masă  $m$  din  $A$  în  $B$  depinde numai de configurația inițială și cea finală a sistemului.

În cazul cînd punctul de masă  $m$  ar fi supus la legături care i-ar fi impus, pentru deplasarea de la  $A$  la  $B$ , traiectoria  $AA'B'B$ , se constată că lucrul mecanic al interacțiunilor interioare depinde tot numai de configurația inițială și finală a sistemului  $(L_{AA'} = 0, L_{BB'} = 0, \text{ deoarece } (\vec{r}, d\vec{r}) = \frac{\pi}{2})$ .

Prin urmare, atît în cazul punctului material liber cît și în cazul celui supus la legături, lucrul mecanic al interacțiunilor interioare este funcție numai de configurația inițială și cea finală a sistemului.

Pentru caracterizarea acestor sisteme se utilizează o funcție de stare, energia potențială ( $E_p$ ), care depinde numai de configurația sistemului.

Prin definiție

$$dE_p = -dL_{int}. \quad (2.39)$$

Cu momentele de inerție ale unor corpuri frecvent întîlnite în probleme

| Figura            | Profilul | Axa                 | Momentul de inerție        |
|-------------------|----------|---------------------|----------------------------|
| Linii             |          | $\Delta$ (extremă)  | $\frac{1}{3} Ml^2$         |
|                   |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{1}{12} Ml^2$        |
| Arc               |          | Polul $O$           | $\frac{1}{2} Mr^2$         |
|                   |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{1}{4} Mr^2$         |
| Coroană circulară |          | Polul $O$           | $\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$ |
|                   |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$ |
| Cilindru          |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{1}{2} Mr^2$         |
| Cilindru gol      |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$ |
| Sferă             |          | Polul $O$           | $\frac{3}{5} Mr^2$         |
|                   |          | $\Delta$ (centrală) | $\frac{2}{5} Mr^2$         |

Integrând relația (2.39) se obține

$$L_{AB} = E_{pA} - E_{pB},$$

unde  $E_{pA} = k \frac{Mm}{r_A}$  este energia potențială în starea  $A$  iar  $E_{pB} = k \frac{Mm}{r_B}$  energia potențială în starea  $B$ . Energia potențială este definită cu aproximația unei constante aditive. Valoarea energiei potențiale a unei stări a sistemului este dependentă de valoarea energiei potențiale, atribuită, în mod convențional, unei anumite stări. De exemplu, în cazul sistemului format din cele două corpuri de masă  $M$  și  $m$  se obișnuiește să se atribuie valoarea zero energiei potențiale când distanța dintre aceste corpuri este  $r = \infty$ . În această convenție, un corp care cade liber în câmpul gravitațional al Pământului trece de la o valoare cu energie potențială mai mare la una cu energie potențială mai mică.

Înlocuind în relația (2.31) pe  $dL_{int} = -dE_p$ , obținem

$$\begin{aligned} dE_c &= -dE_p + dL_{ext}, \\ d(E_c + E_p) &= dL_{ext}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Suma dintre energia cinetică și energia potențială a sistemului se numește energie mecanică totală  $E$

$$E = E_c + E_p.$$

În această convenție, relația (2.40) devine

$$dE = dL_{ext}. \quad (2.40')$$

În cazul când este posibilă integrarea relației (2.40'), se obține

$$\Delta E = L_{ext}. \quad (2.40'')$$

Relațiile (2.40') și (2.40'') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a energiei mecanice totale a unui sistem conservativ de puncte materiale, sub formă diferențială (2.40') și sub formă integrală (2.40'').

În cazul când sistemul este izolat sau lucrul mecanic al forțelor exterioare este nul, se obține

$$E = 0, \quad E_c + E_p = \text{const.}, \quad (2.41)$$

teorema de conservare a energiei mecanice:

*energia mecanică totală a unui sistem izolat de puncte materiale, în care există numai interacțiuni conservative, rămâne constantă.*

Energia cinetică și cea potențială se pot modifica de la o stare la alta cu condiția ca suma lor să rămână constantă.

*Observație.* Câmpul forțelor exterioare poate fi la rîndul său un câmp conservativ și în acest caz sistemul în ansamblu este caracterizat de o energie potențială datorată acestui câmp. De exemplu un sistem format din două pendule electrice este caracterizat de o energie potențială datorată câmpului conservativ interior al forțelor electrostatice și de o energie potențială datorată câmpului conservativ exterior al forțelor gravitaționale.

Posibilitatea evoluției sistemului astfel încît variațiile energiei potențiale și ale celei cinetice să se compenseze reciproc, conform teoremei de conservare a energiei mecanice, se poate arăta experimental cu diferite dispozitive.

*Experimente.* 1. Se utilizează dispozitivul folosit pentru studiul momentului de inerție (fig. 2.23). Se fixează pe bară corpurile la egală distanță de centrul  $O$ . Se înfășoară firul pe tambur pînă cînd corpul  $C$  este adus în fața unui anumit reper. Se lasă sistemul liber. Corpul  $C$  începe să coboare și bara execută o mișcare de rotație. După desfășurarea completă a firului, mișcarea de rotație a barei continuă, firul începînd să se înfășoare în sens invers pe tambur, corpul  $C$  este ridicat pînă în apropierea reperului de unde a pornit inițial. Această mișcare de coborîre și urcare a corpului  $C$  are loc de mai multe ori, micșorîndu-se treptat înălțimea pînă la care el se ridică.

2. Un dispozitiv care ilustrează posibilitatea transformării energiei potențiale gravitaționale în energie cinetică de rotație și de translație este roata lui Maxwell.

Un cadru vertical este format din doi montanți și o latură orizontală (fig. 2.26), o roată este suspendată cu ajutorul a două fire inextensibile, legate cu un capăt de axul roții iar cu celălalt de latura orizontală a cadrului. Se înfășoară firele de susținere pe axul roții, astfel încît să se așeze spiră lîngă spiră, pînă cînd roata ajunge în vecinătatea laturii orizontale a cadrului. Lăsată liberă, roata coboară pînă la completa desfășurare a firelor de susținere, după care începe să urce, firele înfășurîndu-se pe axul roții. Se constată că roata se ridică pînă în apropierea poziției inițiale după care începe, din nou, să coboare. Această mișcare de coborîre și urcare are loc de mai multe ori, micșorîndu-se treptat înălțimea pînă la care se ridică roata.

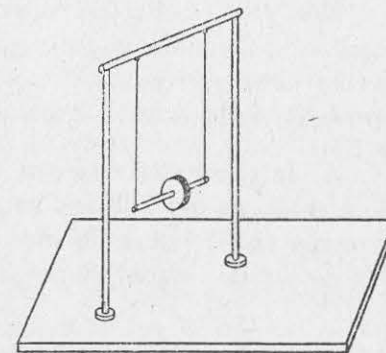


Fig. 2.26. Verificarea experimentală a conservării energiei mecanice cu roata lui Maxwell.

Aceste experimente confirmă faptul că:

- sub acțiunea interacțiunilor conservative are loc evoluția sistemului în sensul scăderii energiei potențiale și creșterii energiei cinetice;
- este posibilă, datorită inerției, evoluția sistemului în sensul micșorării energiei cinetice și creșterii energiei potențiale;
- energia mecanică totală rămîne aproximativ constantă pe un ciclu, deoarece frecările sînt mici.



c) Teorema de variație a momentului cinetic:

variația momentului cinetic în raport cu o axă fixă sau cu un punct fix, al unui sistem de puncte materiale este egală cu impulsul total al momentului rezultat al forțelor exterioare în raport cu axa sau punctul considerat.

Pentru demonstrarea acestei teoreme înmulțim relația (2.25) vectorial la stînga cu  $\vec{r}_i$  și însumăm pentru cele  $n$  puncte:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right).$$

Ținînd seama de relațiile (2.23), (2.28) și notînd  $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e, \Delta}$  obținem

$$d\vec{L} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e, \Delta} dt. \quad (2.42)$$

În cazul cînd se poate integra relația (2.42), se obține

$$\Delta \vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e, \Delta} dt. \quad (2.42')$$

Relațiile (2.42) și (2.42') reprezintă expresiile matematice ale teoremei de variație a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, sub formă diferențială (2.42) și sub formă integrală (2.42').

**Observații.** 1. Forțele interioare centrale nu influențează momentul cinetic al sistemului de puncte materiale. (Se numesc forțe centrale forțele a căror direcție trece tot timpul printr-un punct fix, ca de exemplu forța centripetă, forța elastică, greutatea corpurilor.)

2. În cazul cînd sistemul este rigid mișcarea în jurul unei axe fixe se poate studia cu ajutorul teoremei de variație a momentului cinetic. Înlocuind în relația (2.28) viteza liniară cu  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  ( $r_i$  este distanța unui punct față de axa de rotație), obținem:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^*.$$

Înlocuind acest triplu produs vectorial cu  $r_i^2 \vec{\omega}$ , obținem

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

\* Calcularea triplului produs vectorial se poate realiza astfel: se calculează mai întîi produsul vectorial  $\vec{r}_i \times \vec{\omega} = \vec{a}$  (fig. 2.27, a) unde  $\vec{a}$  este un vector cu modulul  $\omega r_i$ , cu direcția perpendiculară pe planul determinat de  $\vec{r}_i$  și  $\vec{\omega}$ , cu sensul dat de regula burghiului drept; se calculează apoi produsul vectorial  $\vec{a} \times \vec{r}_i = \vec{b}$  (fig. 2.27, b);  $\vec{b}$  este un vector cu modulul  $\omega r_i^2$ , cu direcția perpendiculară pe planul determinat de  $\vec{r}_i$  și  $\vec{a}$  (deci, paralelă cu direcția vectorului  $\vec{\omega}$ ), cu sensul dat de regula burghiului drept (același cu a lui  $\vec{\omega}$ ).

sau ținînd seama de expresia (2.35)

$$\vec{L} = J_{\Delta} \vec{\omega}. \quad (2.43)$$

Această relație permite calcularea momentului cinetic al unui corp în raport cu o axă fixă, dacă se cunosc — momentul de inerție al acestui corp

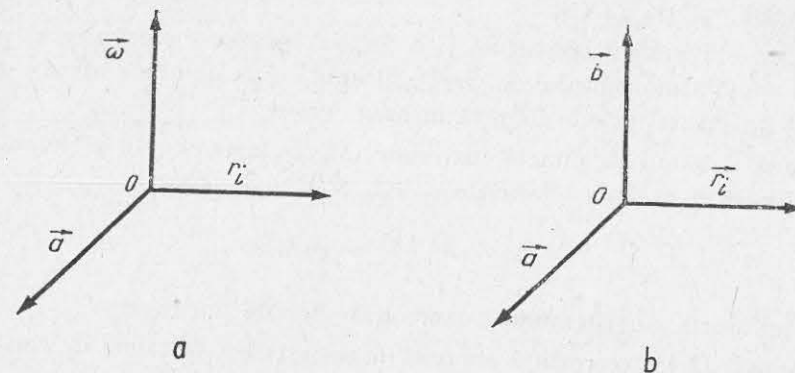


Fig. 2.27. Calcularea triplului produs vectorial.

în raport cu axa respectivă și viteza unghiulară. Relația (2.43) este asemănătoare cu relația (2.26') deoarece ambele definesc mărimi ce caracterizează sistemul rigid de puncte materiale (corpul) în mișcare de rotație, respectiv translație.

Înlocuind în expresia (2.42) momentul cinetic cu  $J_{\Delta} \vec{\omega}$ , rezultă

$$d(J_{\Delta} \vec{\omega}) = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e, \Delta} dt,$$

sau

$$J_{\Delta} \vec{\epsilon} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e, \Delta}, \quad (2.44)$$

unde am notat  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$  — accelerația unghiulară.

Relația (2.44) reprezintă legea fundamentală a sistemului rigid de puncte materiale față de o axă fixă. Ea îndeplinește în mișcarea de rotație același rol cu principiul fundamental ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ) în mișcarea de translație.

Deoarece relația (2.44) am obținut-o pe cale deductivă este necesar să o verificăm experimental.

**Experiment.** Se utilizează dispozitivul care s-a folosit pentru studierea momentului de inerție (fig. 2.23). Se prind, la extremitățile barei orizontale, două corpuri cu aceeași masă. Se înfășoară pe tambur un fir lung de a cărui extremitate liberă se pot prinde corpuri cu masă diferită. Se lasă sistemul liber și se măsoară timpul necesar ca extremitatea liberă a firului să parcurgă o distanță  $h$ . Se fac mai multe determinări pentru timp și se calculează valoarea medie. Se înlocuiește corpul prins de extremitatea liberă a firului cu altul cu

masă mai mare. Se determină timpul necesar pentru parcurgerea aceleiași distanțe  $h$ . Se înlocuiește tamburul cu altul cu rază mai mare și se repetă experimentul.

Prelucrarea datelor din experiment arată că raportul dintre momentul forței față de axa de rotație și accelerația unghiulară, este constant, concluzie ce confirmă relația (2.44).

Acest experiment constituie și o metodă pentru determinarea, pe cale experimentală a momentului de inerție al unui corp. Metoda nedând rezultate suficient de exacte nu este folosită în mod curent.

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat sau este astfel acționat încât momentul resultant față de o axă este nul, atunci

$$\Delta \vec{L} = 0, \quad \vec{L} = \text{const.} \quad (2.45)$$

momentul cinetic al sistemului de puncte materiale se conservă.

Relația (2.45) reprezintă expresia matematică a teoremei de conservare a momentului cinetic:

*momentul cinetic în raport cu o axă fixă al unui sistem izolat de puncte materiale rămâne constant.*

*Observații.* 1. Proiectând expresia (2.42') pe axele referențialului  $R.I.$ , rezultă

$$\Delta L_x = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_x dt; \quad \Delta L_y = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_y dt; \quad \Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_z dt.$$

În cazul când pe o axă proiecția momentului resultant este nulă, proiecția momentului cinetic pe axa respectivă rămâne constantă.

2. În cazul sistemului rigid ( $J_\Delta = \text{const.}$ ), izolat, constanța momentului cinetic implică constanța vitezei unghiulare ( $\vec{\omega} = \text{const.}$ ).

3. În cazul sistemului deformabil, la care punctele materiale își modifică poziția față de axă în timpul mișcării, momentul de inerție nu mai este constant. Conservarea momentului cinetic pentru aceste sisteme se realizează prin modificarea vitezei unghiulare, astfel încât  $J_\Delta \vec{\omega} = \text{const.}$

4. Conservarea momentului cinetic implică constanța atât a modulului cât și a direcției vectorului. O importanță deosebită o are conservarea direcției vectorului moment cinetic.

Aceste observații extrase din teorema momentului cinetic pot fi verificate, calitativ, experimental.

*Experimente.* 1. Pe o platformă orizontală, de formă circulară, așezată pe un sistem de rulmenți care îi permit să se rotească cu frecare neglijabilă

în jurul unui ax vertical, se află un elev (fig. 2.28, a). Din exterior i se dă elevului o roată de bicicletă, cu axul vertical, în stare de rotație. Se constată (fig. 2.28, b) că întregul sistem platformă-elev-roată începe să se rotească în același sens dar cu viteză unghiulară mai mică decât cea inițială a roții. Această observație confirmă teorema de variație a momentului cinetic. Inițial

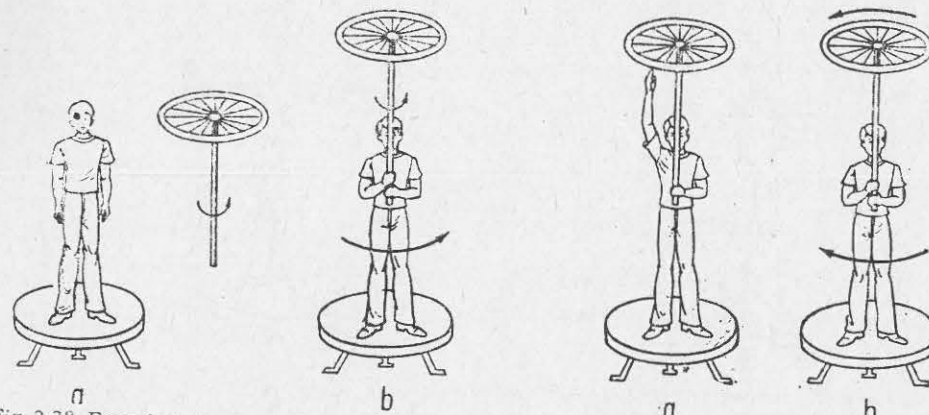


Fig. 2.28. Experiment ce permite verificarea teoremei de variație a momentului cinetic.

Fig. 2.29. Experiment ce permite verificarea teoremei de conservare a momentului cinetic.

momentul cinetic al sistemului platformă-elev era zero. După interacția dintre roata în mișcare de rotație și sistemul platformă-elev, s-au modificat momentele cinetice atât al roții cât și al sistemului platformă-elev.

2. Pe platformă se află elevul ținând roata cu axul în direcție verticală. Față de un referențial solidar cu pereții laboratorului, sistemul format din platformă-elev și roată este în repaus (fig. 2.29, a). Elevul imprimă roții o mișcare de rotație în sens antiorar, se constată că platforma cu elevul încep să se rotească în sens orar (fig. 2.29, b). Observația extrasă din acest experiment confirmă teorema de conservare a momentului cinetic. Inițial momentul cinetic al întregului sistem era zero. După interacțiunea (interioară) dintre elev și roată, atât roata cât și ansamblul platformă-elev sînt caracterizate de câte un moment cinetic cu aceeași direcție dar de semn contrar astfel încît suma acestor două momente cinetice să dea un moment cinetic resultant zero.

3. Pe platformă se află elevul ținând în fiecare mînă câte o ganteră (fig. 2.30). Din exterior, se imprimă sistemului o mișcare de rotație. Elevul îndepărtează și apoi apropie ganterele față de corp. Se constată că viteza unghiulară scade la îndepărtarea ganterelor și crește când sînt apropiate de corp.

Experimentul confirmă conservarea momentului cinetic în cazul sistemelor deformabile:  $J_1 \vec{\omega}_1 = J_2 \vec{\omega}_2$ , cum  $J_1 > J_2$  rezultă  $\omega_1 < \omega_2$ .



Teoremele de variație ale impulsului, energiei și momentului cinetic oferă mijloace comode pentru studierea evoluției sistemelor de puncte materiale. Concluziile obținute sînt importante pentru că se pot aplica, cu bune rezultate, sistemelor reale, corpurilor rigide și celor deformabile.

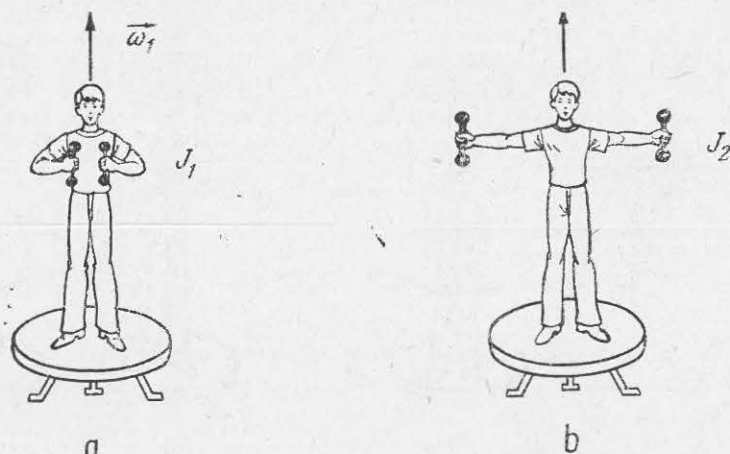


Fig. 2.30. Experimente ce permit evidențierea conservării momentului cinetic la sisteme deformabile.

Aceste teoreme ne-au condus, pentru cazul sistemelor izolate, la evidențierea unei proprietăți comune pentru toate cele trei funcții de stare — conservarea.

Studii efectuate, asupra sistemelor de puncte materiale izolate, cu un instrument matematic superior, au arătat că teoremele de conservare derivă din proprietățile fundamentale ale spațiului și timpului. Astfel teorema de conservare a energiei derivă din uniformitatea timpului, teorema de conservare a impulsului derivă din omogenitatea spațiului și teorema de conservare a momentului cinetic derivă din izotropia spațiului.

Energia, impulsul și momentul cinetic nu se conservă decît în cazul cînd condițiile exterioare nu perturbă aceste proprietăți.

Deoarece, numai față de referențialele inerțiale, are loc păstrarea proprietăților fundamentale ale spațiului și timpului, este de la sine înțeles că teoremele de conservare sînt valabile numai pentru sisteme în mișcare în raport cu referențialele inerțiale.

#### ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII

1. Asupra unui corp cu masa de 2 kg acționează o forță  $F_x = 8$  N. Determinați:

a) legile parametrice ale mișcării acestui corp;

b) poziția și viteza corpului la momentul  $t = 1$  s pentru următoarele condiții inițiale:

$$\begin{aligned} x &= 0 & x &= -1 \\ v_x &= 2 \text{ m/s} & v_x &= 0. \end{aligned}$$

2. Asupra unui punct material cu masa  $m$  acționează o forță  $\vec{F} = 32 m \vec{i}$ . Pentru următoarele condiții inițiale

|                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $x = 0$               | $x = 1 \text{ m}$     | $x = 0$               |
| $y = 0$               | $y = 2 \text{ m}$     | $y = 1 \text{ m}$     |
| $v_x = 2 \text{ m/s}$ | $v_x = 0$             | $v_x = 1 \text{ m/s}$ |
| $v_y = 4 \text{ m/s}$ | $v_y = 4 \text{ m/s}$ | $v_y = 0$             |

determinați:

a) legea de mișcare;

b) ecuația traiectoriei.

3. O particulă cu masa  $m = 2$  g trece la momentul inițial prin punctul  $P_0(0, 0, 0)$  cu viteza inițială  $\vec{v}_0 = (2\vec{i} + 2\vec{j})$  m/s. În acest moment începe să acționeze asupra ei o forță  $\vec{F} = 5\vec{i}$ , un interval de timp  $\Delta t = 2$  s.

a) Cum se modifică impulsul particulei în acest interval de timp?

b) Care este lucrul mecanic efectuat de forță în acest interval? Cu cît s-a modificat energia cinetică a particulei?

4. O particulă se deplasează din punctul  $P_1$  de vector de poziție  $\vec{r}_1 = (\vec{i} + 2\vec{j})$  m în punctul  $P_2$  de vector de poziție  $\vec{r}_2 = (2\vec{i} + 3\vec{j})$  m sub acțiunea forței  $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$  N. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$ .

5. Calculați lucrul mecanic necesar pentru a ridica un corp cu masa  $m = 1,5$  t la distanța  $h = 25$  000 km deasupra Pămîntului, atît în aproximația  $g = \text{const.}$  cît și în cazul real.

6. Un sistem este format din două particule electrizate așezate la distanța  $r_0$  una de alta: una fixă  $A$ , cu sarcina electrică  $Q^+$  și alta liberă  $B$  cu sarcina  $q^+$ . Calculați:

a) Lucrul mecanic efectuat de particula  $A$  pentru a deplasa particula  $B$  la o distanță  $r > r_0$ .

b) Cum se modifică acest lucru mecanic în cazul cînd particula  $B$  nu se poate mișca decît pe o traiectorie rectilinie ce face cu direcția  $AB$  un unghi  $\alpha$ ?

7. Un experimentator a măsurat pentru un corp de masă  $m$  ce se mișcă pe o traiectorie circulară de rază  $r$ , în plan orizontal, forța centrală corespunzătoare la diferite perioade de rotație. Datele obținute sînt trecute în tabelul următor:

| Nr. det. | $m$<br>(g) | $r$<br>(cm) | $T$<br>(s) | $F$<br>( $10^{-3}$ N) |
|----------|------------|-------------|------------|-----------------------|
| 1        | 2          | 30          | 5          | 98                    |
| 2        |            |             | 6          | 63,7                  |
| 3        |            |             | 7          | 49                    |
| 4        |            |             | 10         | 24,5                  |
| 5        |            |             | 11         | 15,6                  |

Utilizați datele obținute de acest experimentator pentru a stabili o relație între  $F$  și  $T$ .

8. Un biciclist acționează asupra unei pedale ( $r = 18$  cm) cu o forță  $F = 470$  N. Calculați momentul forței  $\vec{F}$  dacă unghiul format de  $\vec{F}$  și  $\vec{r}$  este  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $0^\circ$ .

9. Ce modificări ar trebui aduse în construcția bicicletei pentru a mări momentul forțelor asupra pedalelor? Ce inconveniente ar apărea?

10. Arătați că între accelerația tangențială, accelerația unghiulară și raza vectoare ce caracterizează mișcarea unui punct material pe o traiectorie circulară există relația  $\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

11. Un experimentator imprimă unui cerc de masă  $m$  și rază  $r$ , plecând din repaus, mișcări de rotație în jurul centrului său, prin acționarea cu diferite forțe  $F$  aplicate la distanța  $d$  față de axa sistemului și determină  $\Delta t$  pentru prima rotație completă. Rezultatele obținute sînt trecute în tabelul următor:

| Nr. det. | $m$ (kg) | $r$ (cm) | $d$ (cm) | $F$ (N) | $\Delta t$ (s) |
|----------|----------|----------|----------|---------|----------------|
| 1        | 1,15     | 31       | 1        | 0,294   | 22             |
| 2        |          |          |          | 0,392   | 19,9           |
| 3        |          |          |          | 0,490   | 17             |
| 4        |          |          |          | 0,588   | 15,5           |

Utilizați datele obținute de experimentator pentru a stabili dependența dintre forța  $F$  și accelerația unghiulară imprimată cercului.

12. O particulă de masă  $m$  se mișcă în sens orar pe o traiectorie circulară aflată într-un plan vertical. Particula este supusă gravitației.

a) Reprezentați grafic momentul greutății  $\vec{G}$ , în raport cu centrul traiectoriei, în funcție de unghiul pe care-l face raza vectoare cu diametrul vertical.

b) Cum se modifică reprezentarea dacă: particula își schimbă sensul de mișcare, își dublează masa, își modifică raza traiectoriei?

c) Cum variază impulsul, energia cinetică și momentul cinetic al acestei particule?

d) Cum se modifică răspunsurile de la punctele a și c dacă planul traiectoriei este orizontal?

13. Comparați momentul de inerție al unei particule de masă  $m$  ce se mișcă pe o traiectorie circulară, cu momentul de inerție al aceleiași particule cînd se mișcă pe o traiectorie de forma unei elipse. Ce concluzie puteți trage?

14. Două particule identice se deplasează una pe o orbită circulară cealaltă pe o orbită eliptică, numai sub acțiunea unei forțe centrale. Analizați pentru fiecare particulă viteza unghiulară și momentul cinetic în diferite puncte ale traiectoriei. Ce concluzie puteți extrage?

15. De ce o forță centrală nu modifică momentul cinetic?

16. Un corp cu masa  $m = 0,1$  kg efectuează o mișcare uniformă cu viteza  $v = 2$  m/s pe o circumferință orizontală. Determinați variația:

a) impulsului corpului;

b) momentului cinetic al corpului;

c) energiei cinetice a corpului, cînd acesta a parcurs un sfert de circumferință.

17. Un experimentator determină pentru cercuri de rază  $r$  și masă  $m$ , pornite din repaus de aceeași forță  $F$  cu brațul  $d$  față de axa cercului, timpul  $\Delta t$  corespunzător primei rotații. Datele obținute sînt trecute în tabelul următor:

| Nr. det. | $m$ (kg) | $F$ (N) | $d$ (cm) | $r$ (cm) | $\Delta t$ (s) |
|----------|----------|---------|----------|----------|----------------|
| 1        | 1,15     | 0,294   | 1,00     | 31       | 22             |
| 2        |          |         |          | 21       | 15             |
| 3        |          |         |          | 11       | 8              |

Utilizați aceste rezultate pentru a determina dependența dintre momentul de inerție  $J$  și raza cercului  $r$ .

18. Două mici sfere de mase  $m_1 = 40$  g și  $m_2 = 120$  g sînt unite printr-o tijă cu lungimea  $l = 20$  cm, de masă neglijabilă. Sistemul se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe tijă, care trece prin centrul de greutate al sistemului (fig. 2.31), cu viteza unghiulară 3 rad/s. Să se calculeze impulsul, energia cinetică și momentul cinetic al acestui sistem.



Fig. 2.31. Pentru problema 18.

19. Un elev stă pe un scaun ce se poate roti în jurul unui ax vertical, ținînd în mînă o roată cu moment de inerție mare, astfel încît axa roții să coincidă cu axa scaunului. Roata se învîrtește într-un plan orizontal cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ . Cum variază energia cinetică a sistemului dacă elevul rotește axul roții cu  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ?

20. Evaluați cum se modifică viteza unghiulară a unei patinatoare cînd își îndepărtează și își apropie brațele de corp.



## EXTINDERE ÎN FIZICĂ

### 2.4. CENTRUL DE MASĂ

Mișcarea sistemului de puncte materiale depinde nu numai de interacțiunile exterioare și de masa sistemului, ci și de distribuția punctelor materiale în interiorul sistemului. Masa totală a sistemului de puncte materiale este

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Distribuția masei sistemului de puncte materiale este caracterizată prin poziția unui punct numit centru de masă (C) (fig. 2.32), definit de relația

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.46)$$



Proiectând această expresie pe axele unui sistem de coordonate carteziene, se obțin relațiile:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

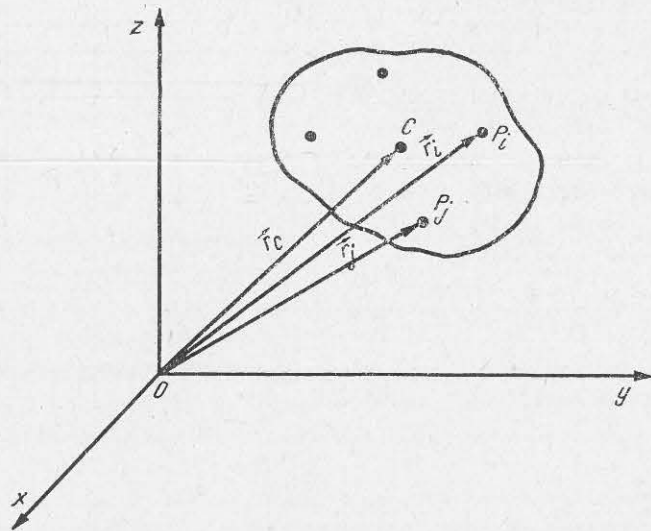


Fig. 2.32. Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale.

Poziția centrului de masă coincide cu poziția centrului de greutate când sistemul se găsește într-un câmp gravitațional uniform.

*Observații.* 1. Noțiunea de centru de greutate — ca punct de aplicație al rezultantei forțelor gravitaționale care acționează asupra punctelor materiale ale sistemului — nu are semnificație decît pentru sistemul aflat în câmp gravitațional.

2. Noțiunea de centru de masă — ca element caracteristic distribuției masei în interiorul sistemului — are semnificație bine definită pentru toate sistemele de puncte materiale; această noțiune își păstrează sensul fie că sistemul este sau nu supus la acțiunea forțelor exterioare.

Derivînd expresia (2.46) în raport cu timpul, se obține

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

sau

$$\vec{v}_c \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{p}. \quad (2.47)$$

Această relație arată că:

*impulsul total al unui sistem de puncte materiale este egal cu impulsul unui punct material în care ar fi concentrată masa sistemului și care coincide cu centrul de masă al sistemului.*

Derivînd relația (2.47) în raport cu timpul, rezultă

$$\vec{a}_c \sum_{i=1}^n m_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.48)$$

Relația (2.48) reprezintă *teorema mișcării centrului de masă al sistemului*

*centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mișcă întotdeauna ca un punct material care ar avea masa egală cu masa sistemului și asupra căruia ar acționa toate forțele exterioare aplicate sistemului.*

Din aceste teoreme rezultă următoarele consecințe:

- se poate studia mișcarea centrului de masă al unui anumit sistem fără să se țină seama de forțele interioare, apriori necunoscute;
- impulsul total al unui sistem de puncte materiale este nul cînd centrul de masă este fix;

- pentru un sistem în mișcare de translație, mișcarea este perfect definită prin mișcarea centrului său de masă; un corp aflat în mișcare de translație poate fi asimilat cu un punct material cu masa egală cu a corpului;

- dacă sistemul de puncte materiale este izolat, centrul său de masă are o mișcare uniformă sau este în repaus în raport cu un referențial inerțial;

- față de un referențial solidar cu centrul de masă, impulsul total al sistemului este totdeauna nul.

## 2.5. CIOCNIRI ELASTICE ȘI NEELASTICE

Termenul *ciocnire* denumește un proces care are loc, într-un timp finit, între doi sau mai mulți participanți (corpuri, particule) care se apropie unul de altul, în cursul căruia impulsul, cel puțin al unuia dintre participanți (corpuri, particule), variază cu o cantitate finită.

Caracteristic ciocnirii este faptul că participanții nu interacționează înainte și după proces, că se poate face o distincție între timpul "înainte de ciocnire" și timpul "după ciocnire".

Numim ciocniri atît procesele care au loc între corpuri la nivel microscopic (lovirea unei mingii de tenis de o rachetă) cît și procesele

care au loc între particule la nivel cuantic (interacția dintre un electron și un atom).

În timpul ciocnirii pot avea loc modificări în structura internă a participanților. La nivel macroscopic pot să apară la unul sau la mai mulți participanți deformări permanente, la nivel cuantic se schimbă starea cuantică a participanților. Aceste schimbări de structură internă au ca rezultat modificarea energiei cinetice totale a participanților la ciocnire.

În funcție de modificarea stării interne a participanților în timpul procesului, ciocnirile pot fi:

*elastice* (nu se modifică starea internă a participanților  $E_{int} = 0$ );

*neelastice* sau *plastice* (se modifică starea internă a cel puțin unuia dintre participanți  $\Delta E_{int} \neq 0$ ).

Ciocnirile se mai pot clasifica și după direcțiile pe care se mișcă participanții înainte de ciocnire, în:

*oblică* (direcțiile fac un unghi  $\alpha \neq 0$ );

*dreaptă* (direcțiile sînt paralele  $\alpha = 0$ ).

Ciocnirea dreaptă poate fi:

*centrală* (direcțiile de deplasare ale participanților coincid; în această ciocnire se produc variații numai ale vitezei de translație);

*excentrică* (direcțiile de deplasare ale participanților sînt paralele; în acest caz se produc și variații ale vitezei unghiulare de rotație).

Modificarea impulsului participanților în cursul ciocnirii se datorează interacțiunilor care au loc între aceștia. Aceste interacțiuni sînt, în general, dependente de distanța dintre participanți și se fac resimțite pentru distanțe suficient de mici.

În paragraful 2.3.1, am văzut că dacă asupra unui punct material acționează o forță  $\vec{F}$ , un interval de timp  $\Delta t = t_2 - t_1$ , impulsul său se modifică conform teoremei de variație a impulsului:

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

În cazul mișcărilor obișnuite, variația impulsului punctului material ( $\Delta \vec{p}$ ), corespunzătoare unui interval de timp  $\Delta t$ , foarte scurt, este foarte mică. Teorema de variație a impulsului arată că în asemenea cazuri și valoarea impulsului total al forței care acționează asupra punctului material ( $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ ), în același interval de timp, este foarte mică.

În cazul ciocnirilor, într-un interval de timp foarte scurt, variația impulsului participanților are o valoare apreciabilă, dar finită, fapt ce implică ca și impulsul forței să aibă o valoare apreciabilă. Deoarece intervalul de timp în care are loc ciocnirea este foarte mic (tinde către zero) rezultă că o valoare apreciabilă a impulsului forței implică ca forțele care se exercită între participanți să aibă valori foarte mari.

Forțele care se exercită în timpul ciocnirii se numesc forțe de percuție ( $F_c$ ) iar intervalul de timp în care are loc ciocnirea se numește timp de ciocnire ( $\tau_c$ ).

Deoarece forțele de percuție sînt foarte mari și variază în timpul ciocnirii în limite considerabile (fig. 2.33), pentru măsura interacțiunii

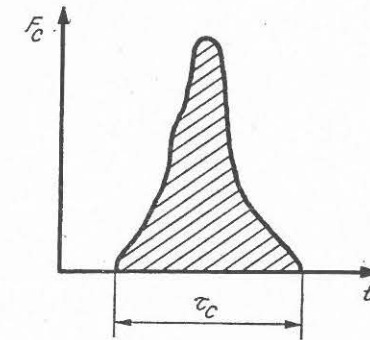


Fig. 2.33. Variația forțelor de percuție în timpul ciocnirii.

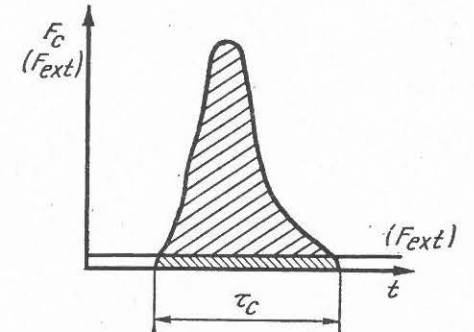


Fig. 2.34. Forțele exterioare sînt neglijabile în raport de forțele de percuție din timpul ciocnirii.

dintre două particule, se consideră în locul forțelor de percuție, impulsurile lor

$$\int_0^{\tau_c} F_c dt = F_{c, med} \cdot \tau_c,$$

care are o valoare finită. Impulsul celorlalte forțe care acționează în timpul ciocnirii, avînd valori foarte mici, acestea sînt practic neglijabile (fig. 2.34).

În timpul ciocnirii asupra particulelor participante acționează forțe de percuție egale și de sens contrar; suma interacțiunilor interioare din timpul ciocnirii este nulă.

Deplasarea particulei în timpul ciocnirii este egală cu  $v_{med} \cdot \tau_c$ , adică foarte mică, practic neglijabilă.

Din analiza efectuată, se pot extrage următoarele observații, referitoare la ciocniri:

— în timpul ciocnirii se poate neglija acțiunea altor forțe în raport cu cele de percuție (de exemplu greutatea, frecarea);

— în timpul ciocnirii, particulele participante se pot considera imobile;

— lucrul mecanic al forțelor de percuție nu se poate calcula direct (cunoscînd forța și deplasarea); se evaluează numai variația de energie cinetică pierdută în timpul ciocnirii.

Studiul ciocnirii se face cu ajutorul teoremelor de variație ale impulsului, energiei și momentului cinetic.



Aceste teoreme au, pentru cazul ciocnirii a  $n$  participanți de mase  $m_i$ , observată dintr-un referențial inerțial solidar cu laboratorul, următoarele expresii:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i &= \vec{F}_{ext} \tau_c; \\ 2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i u_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \Delta E_{int}; \\ 3) \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{u}_i - \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i &= (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}) \tau_c, \end{aligned}$$

unde am notat cu:  $\vec{v}_i$  — vitezele participanților înainte de ciocnire,  $\vec{u}_i$  — vitezele participanților după ciocnire,  $\vec{F}_{ext} \tau_c$  — rezultanta impulsurilor forțelor exterioare,  $\Delta E_{int}$  — variația energiei interne a participanților în timpul ciocnirii,  $(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ext})$  — momentul total al forțelor exterioare.

Să analizăm, dintr-un referențial inerțial solidar cu laboratorul, două sfere de mase  $m_1$  și  $m_2$  care se ciocnesc elastic ( $\Delta E_{int} = 0$ ) și central (fig. 2.35). Pentru ca ciocnirea între aceste sfere să aibă loc trebuie ca  $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$ .

Deoarece ciocnirea este centrală, vom utiliza numai teoremele impulsului și energiei cinetice, care pentru acest caz sînt:

$$\begin{aligned} 1) m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ 2) \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

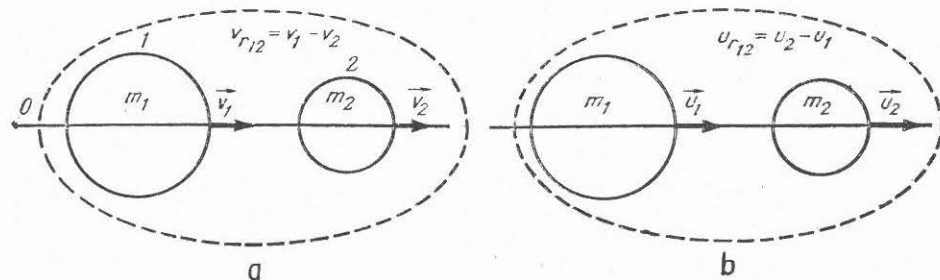


Fig. 2.35. Două sfere (a) înainte și (b) după ciocnire.

Ținînd seama că  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ ,  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$  și grupînd termenii în  $m_1$  și  $m_2$ , avem

$$\begin{aligned} 1) m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \\ 2) m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2). \end{aligned}$$

Împărțind relația (2) la (1), obținem

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2,$$

care se mai poate scrie

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1.$$

Această relație arată că în cazul unei ciocniri elastice unidimensionale viteza relativă de apropiere ( $v_r = v_1 - v_2$ ) înainte de ciocnire este egală cu viteza relativă ( $u_r = u_2 - u_1$ ) de îndepărtare după ciocnire

Din relațiile precedente se pot obține vitezele sferelor după ciocnire

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \\ u_2 &= 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2. \end{aligned}$$

Există cîteva cazuri particulare care prezintă un interes deosebit.

1. Cele două sfere au aceeași masă  $m_1 = m_2$  (fig. 2.36,  $a_1$  și  $b_1$ )

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1,$$

în timpul ciocnirii sferele schimbă vitezele între ele.

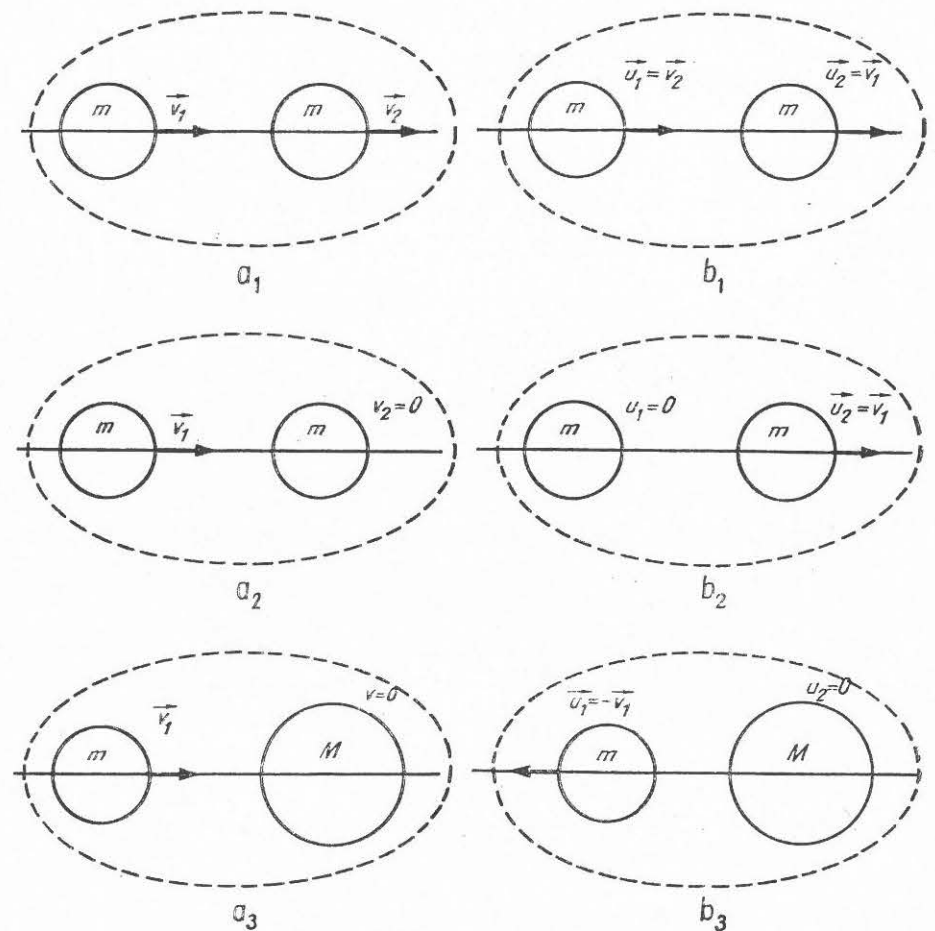


Fig. 2.36. Cazuri particulare de ciocnire a două sfere.

2. Sfera de masă  $m_2$  este în repaus ( $v_2 = 0$ ).

a) masele sferelor sînt egale  $m_1 = m_2$  (fig. 2.36,  $a_2$  și  $b_2$ )

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1,$$

în urma ciocnirii prima sferă este oprită iar cea de a doua pornește cu viteza pe care a avut-o inițial prima sferă;

b) masele sferelor sînt inegale,  $m_2 \gg m_1$  (fig. 2.36,  $a_3$  și  $b_3$ )

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0,$$

sfera cu masă mai mică se întoarce cu aceeași viteză pe care a avut-o înainte de ciocnire.

Dacă ciocnirea dintre aceste sfere este perfect plastică, ele fac, după ciocnire, corp comun. În acest caz expresiile teoremelor impulsului și energiei sînt

$$1. m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

$$2. \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \Delta E_{int}.$$

Aceste expresii permit calcularea:

— vitezei sferelor după ciocnire

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

— pierderii de energie cinetică în cursul ciocnirii

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2.$$

Se constată că, în cazul ciocnirii perfect plastice, numai o parte din energia cinetică a sferelor s-a transformat în energie internă. Aceasta reprezentînd pierderea maximă de energie compatibilă cu conservarea impulsului.

Am analizat ciocnirea sferelor în două cazuri extreme: ciocnire perfect elastică și ciocnire perfect plastică. În general, ciocnirile dintre corpurile macroscopice sînt totdeauna plastice într-o anumită măsură.

Pentru caracterizarea gradului de plasticitate al unei ciocniri s-a introdus o mărime ce a fost denumită *coeficient de restituire* ( $k$ ) și care se definește prin relația

$$k = \left| \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \right|.$$

În cazul corpurilor perfect elastice  $k = 1$ , iar al celor perfect plastice  $k = 0$ . În general valoarea acestui coeficient este

$$0 < k < 1,$$

deoarece nu există nici corpuri solide perfect elastice și nici perfect plastice.

La nivelul cuantic ciocnirile dintre atomi, nuclee, particule elementare pot fi atât elastice cît și plastice. Ciocnirile veritabil elastice cunoscute sînt numai cele care au loc la acest nivel.

Concluziile extrase din acest studiu teoretic se pot verifica experimental.

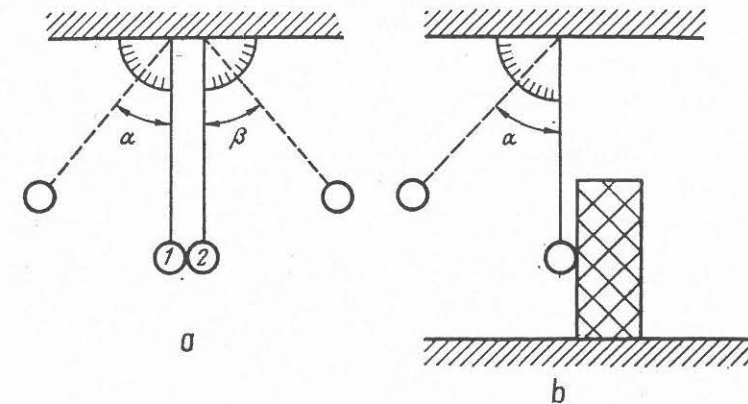


Fig. 2.37. Dispozitiv pentru studiul ciocnirilor.

**Experimente. 1.** De un stativ (fig. 2.37, a) sînt prinse două sfere identice ( $m_1 = m_2$ ,  $r_1 = r_2$ ) confecționate din același material elastic (oțel, fildes). Se deplasează bila 1 de la poziția de echilibru cu un unghi  $\alpha$  și apoi se lasă liberă. Se constată că după ciocnire bila 1 se oprește iar bila 2 se depărtează de poziția de echilibru cu un unghi  $\beta = \alpha$ , ceea ce verifică concluzia teoretică (caz particular 2—*a*).

2. Se înlocuiește bila 2 cu un bloc masiv de oțel. Se depărtează bila 1 de poziția de echilibru sub un unghi  $\alpha$ . După ciocnire, bila se depărtează tot sub un unghi  $\alpha$ . Și această constatare verifică concluzia teoretică (caz particular 2—*b*).

3. Pentru determinarea coeficientului de restituire se poate utiliza un dispozitiv format dintr-o platformă orizontală și o riglă verticală (fig. 2.38). Se așază pe platformă o placă  $A$  confecționată din materialul al cărui coeficient de restituire trebuie determinat. O bilă  $B$  confecționată din același material se lasă să cadă de la înălțimea  $h_1$ ; se urmărește înălțimea  $h_2$  pînă la care se ridică bila după ciocnirea cu placa  $A$ . Coeficientul de restituire este:

$$k = \left| \frac{u}{v} \right| = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

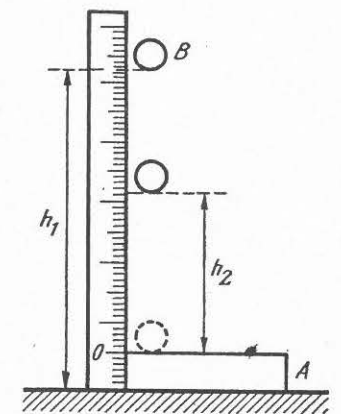


Fig. 2.38. Dispozitiv pentru determinarea coeficientului de restituire.



Se efectuează mai multe determinări pentru înălțimi inițiale diferite și se calculează  $k_{med}$ .

Pentru studiul ciocnirilor oblice vom analiza, tot dintr-un referențial inerțial solidar cu laboratorul, ciocnirea a două sfere de dimensiuni și mase diferite ( $m < M$ ;  $r < R$ ), sfera mai mare fiind în repaus.

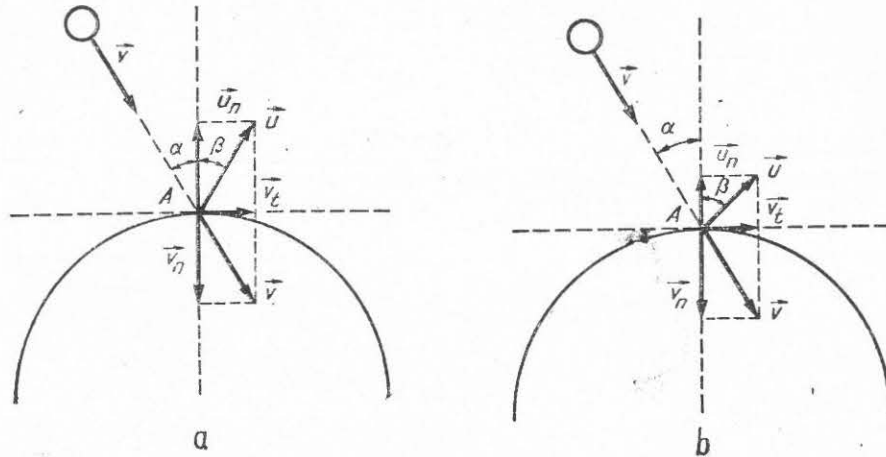


Fig. 2.39. Ciocnirea oblică: (a) elastică și (b) plastică.

Vom considera mai întâi cazul ciocnirii elastice (fig. 2.39, a). Sfera de masă  $m$  ciocnește sfera de masă  $M$  în punctul  $A$ . Descompunem viteza  $\vec{v}$ , a sferei mici, în două componente  $\vec{v}_n$  și  $\vec{v}_t$ . Componenta  $\vec{v}_t$  rămâne neschimbată deoarece ciocnirea are loc numai în direcția normală la suprafață. După ciocnire, sfera mică va avea pe direcția normală la suprafață, o viteză  $\vec{u}_n = -\vec{v}_n$  (ciocnirea este perfect elastică și masa sferei mari foarte mare). Viteza rezultantă, după ciocnire, este  $\vec{u} = \vec{v}_t + \vec{u}_n$ . Se observă că, în acest caz, unghiul format de viteza sferei mici cu normala la suprafață înainte de ciocnire este egal cu unghiul făcut de normală cu viteza după ciocnire. În acest caz, putem spune că în urma ciocnirii sfera mică s-a reflectat.

Dacă ciocnirea nu este perfect elastică, atunci  $\vec{u}_n = k\vec{v}_n$  (fig. 2.39, b), iar viteza rezultantă după ciocnire  $\vec{u} = \vec{v}_t + \vec{u}_n$ . În acest caz  $\alpha \neq \beta$ . Ținând cont că  $v_t = |v_n| \operatorname{tg} \alpha = |u_n| \operatorname{tg} \beta$ , obținem

$$k = \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

În cazul ciocnirilor oblice reale coeficientul de restituire este egal cu raportul dintre tangenta unghiului de incidență și tangenta unghiului

de reflexie. Deoarece  $k < 1$  rezultă  $\beta > \alpha$ , adică unghiul de reflexie este totdeauna mai mare decât cel de incidență.

Și aceste concluzii teoretice se pot verifica experimental.

*Experimente.* 1. Pentru studiul ciocnirilor oblice se poate utiliza un dispozitiv ca cel din figura 2.40. Dintr-o pîlnie  $B$  se lasă să cadă o bilă, confecționată dintr-un material elastic, pe o placă  $A$  — confecționată tot dintr-un material elastic; după ciocnire bila este prinsă în coșulețul  $C$ , numai dacă poziția este corespunzătoare unghiului  $\beta$ . Se efectuează mai multe determinări și se constată că  $\alpha = \beta$ , rezultat în concordanță cu concluziile teoretice.

2. Se utilizează același dispozitiv dar se înlocuiesc bila și placa  $A$  cu altele din materiale cu diferiți coeficienți de restituire. Se efectuează experimentul și se constată că  $\beta > \alpha$ , observație ce confirmă concluzia teoretică.

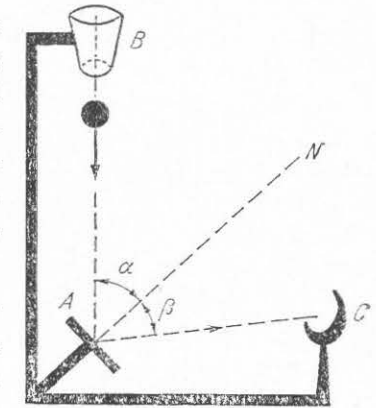


Fig. 2.40. Dispozitiv pentru studiul ciocnirii oblice.

Studiul ciocnirilor se poate executa și dintr-un referențial solidar cu centrul de masă al particulelor participante la ciocnire. Față de acest referențial, impulsul total al sistemului este întotdeauna nul. Vitezele particulelor sînt:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c,$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c,$$

unde am notat cu  $v'_1, v'_2$  vitezele particulelor față de referențialul centrului de masă și cu  $\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$  viteza centrului de masă față de referențialul laboratorului.

Efectuînd înlocuirile se obține

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Aceste relații arată că vitezele particulelor față de referențialul centrului de masă sînt opuse ca sens și depind de mase.

Din acest motiv există o mare simplitate și simetrie în descrierea ciocnirilor dintr-un referențial solidar cu centrul de masă (fig. 2.41, 2.42).

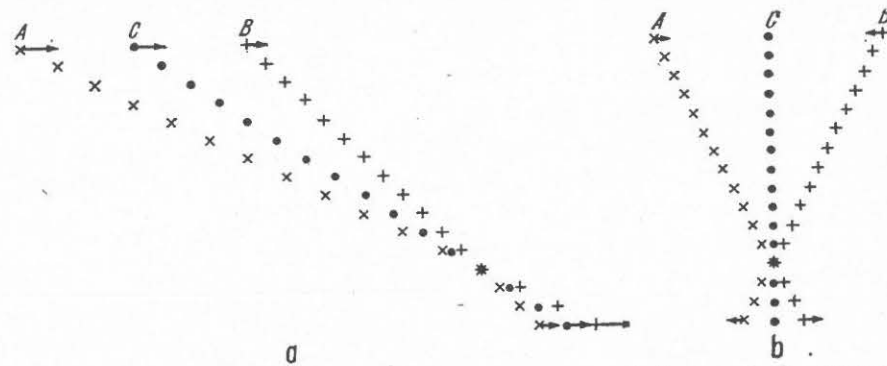


Fig. 2.41. Ciocnirea a două sfere elastice, de mase  $m_A = m_B$  și viteze  $v_A > v_B$ , observată dintr-un referențial solidar cu laboratorul (a) și din altul solidar cu centrul de masă (b).

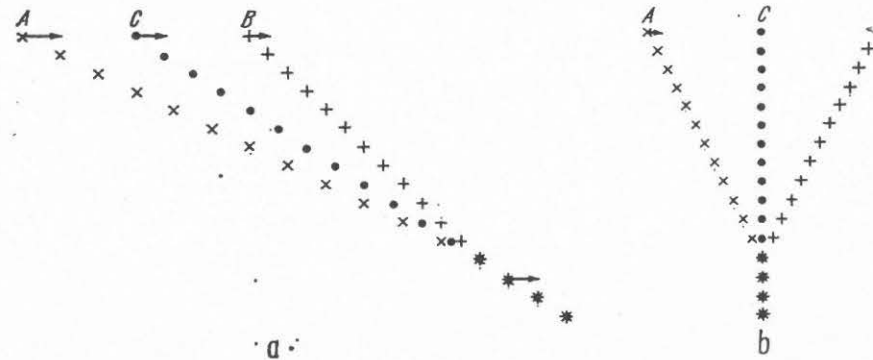


Fig. 2.42. Ciocnirea a două sfere plastice, de mase  $m_A = m_B$  și viteze  $v_A > v_B$ , observată dintr-un referențial solidar cu laboratorul (a) și din altul solidar cu centrul de masă (b).

## 2.6. MIȘCAREA PLANETELOR

Multitudinea informațiilor referitoare la mișcarea planetelor din sistemul nostru solar a fost analizată de către Kepler iar rezultatele au fost sintetizate în 3 legi.

1. **Legea orbitelor:** fiecare planetă se deplasează în jurul Soarelui pe o orbită eliptică avînd Soarele într-unul din focare.
2. **Legea ariilor:** raza vectorie ce unește Soarele și planeta mătură arii egale, din aria orbitei planetare, în intervale de timp egale.
3. **Legea perioadelor:** pătratele perioadelor mișcărilor de revoluție în jurul Soarelui ale diferitelor planete se află în același raport ca și cuburile semiaxelor mari.

Proprietățile descrise de aceste legi pot sta la baza elaborării unui model pentru studierea sistemului solar. Soarele și planetele pot fi asimilate, în cadrul modelului, cu puncte materiale deoarece dimensiunile proprii sînt neglijabile în raport de distanțele dintre ele. Pentru simplificarea calculelor să analizăm un sistem-model format numai din două elemente: unul  $S$  corespunzător Soarelui și altul  $P$  corespunzător unei planete. Acest sistem-model îl vom studia dintr-un referențial inercial solidar cu Soarele și cu axele orientate spre trei stele fixe.

Legea orbitelor impune ca traiectoria elementului  $P$  să fie într-un plan cu orientare constantă (orientarea normalei la plan constantă) de forma unei elipse cu axe constante în timp, avînd elementul  $S$  situat într-unul din focare (fig. 2.43-1).

Legea ariilor impune ca viteza de măturare a ariilor (viteza areolară) de către raza vectorie (fig. 2.43-2) să fie constantă, adică

$$\frac{d\vec{A}_1}{dt} = \frac{d\vec{A}_2}{dt}. \quad (2.49)$$

Legea perioadelor impune ca interacțiunea dintre elementele  $P$  și  $S$  să depindă numai de distanța dintre aceste elemente, deci

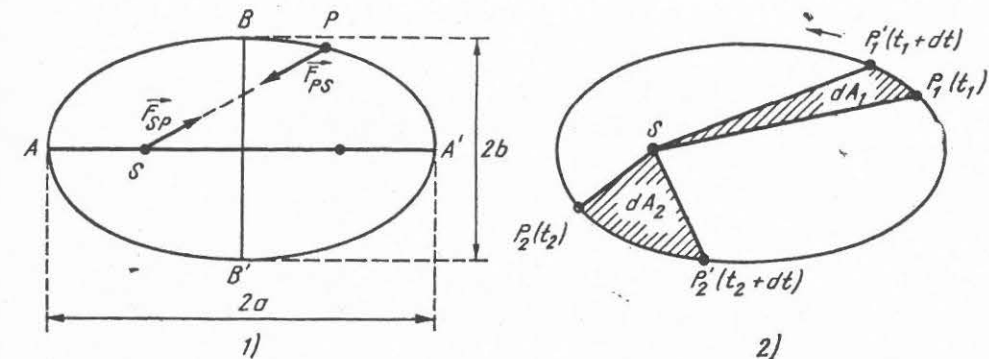


Fig. 2.43. (1) Elementul  $P$  se mișcă pe o elipsă care are elementul  $S$  într-unul din focare; (2) viteza areolară este constantă.

sistemul-model este un sistem conservativ. În cadrul acestui sistem-model am neglijat interacțiunile cu exteriorul și mișcarea de rotație proprie a elementelor.

Pentru un interval de timp  $dt$  mic triunghiul  $SPP'$  poate fi asimilat cu un triunghi cu aria  $dA = \frac{1}{2} r \cdot dr$  (fig. 2.44).



Elementului de arie  $dA$  i se poate asocia un vector

$$d\vec{A} = \vec{n} dA,$$

unde  $\vec{n}$  este versorul normal la suprafața elipsei cu sensul dat de sensul de înaintare al burghiului drept când este rotit în sensul de parcurgere a elipsei (fig. 2.44).

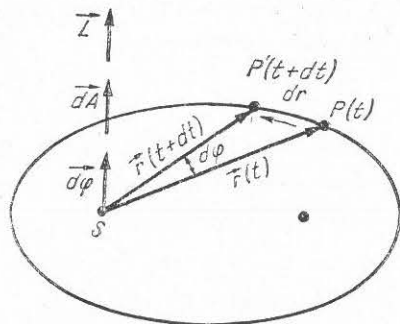


Fig. 2.44. Vectorii  $d\vec{\varphi}$ ,  $d\vec{A}$ ,  $\vec{L}$  au aceeași orientare.

Ținând cont de relația de definiție a produsului vectorial, vectorul asociat elementului de arie se mai poate scrie

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}.$$

Unghiului  $d\varphi$ , i se poate asocia, de asemenea, un vector

$$d\vec{\varphi} = \vec{\eta} d\varphi,$$

cu aceleași convenții ca pentru  $dA$ .

Între unghiul  $d\varphi$ , raza vectorie  $\vec{r}$  și coarda  $d\vec{r}$  este relația

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Ținând cont de acestea

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{\varphi}) \times \vec{r},$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} r^2 d\vec{\varphi}.$$

Calcularea acestei expresii s-a efectuat utilizând aceeași metodă care a fost folosită la calcularea triplului produs vectorial la paragraful 2.3.2.

Înlocuind în expresia (2.49) pe  $d\vec{A}$  obținem

$$\frac{1}{2} r_1^2 \frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} = \frac{1}{2} r_2^2 \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei egalități cu  $m$  (masa elementului  $P$ ) și înlocuind pe  $\frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} = \vec{\omega}_1$ ,  $\frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} = \vec{\omega}_2$ , rezultă

$$mr_1^2 \vec{\omega}_1 = mr_2^2 \vec{\omega}_2.$$

Produsele  $mr_1^2$  și  $mr_2^2$  reprezintă momentele de inerție ale elementului  $P$  în raport cu focarul unde se află situat elementul  $S$ . În timpul deplasării pe elipsă momentul de inerție al elementului  $P$  variază între o valoare minimă corespunzătoare poziției  $A$  și o valoare maximă corespunzătoare poziției  $A'$ . Momentul de inerție înmulțit cu viteza unghiulară reprezintă momentul cinetic, deci

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2,$$

afirmă conservarea momentului cinetic pentru elementul  $P$  ce se mișcă pe elipsă în jurul elementului  $S$ . Această proprietate evidențiată de sistemul-model este deosebit de importantă pentru că ea constituie o verificare a conservării momentului cinetic la nivel cosmic. Legea orbitelor și legea ariilor confirmă, de fapt, conservarea momentului cinetic în cadrul sistemului Solar.

În continuare, să analizăm sistemul-model din punct de vedere energetic.

Energia totală a sistemului față de referențialul ales este

$$E = \frac{mv^2}{2} - k \frac{Mm}{r},$$

unde  $M$  este masa elementului  $S$  și  $k$  — constanta gravitațională.

Descompunând viteza elementului  $P$  în două componente, una pe direcția razei și alta perpendiculară pe ea (fig. 2.45) obținem relația

$$E = \frac{1}{2} mv_t^2 + \frac{1}{2} mv_n^2 - k \frac{Mm}{r},$$

care este valabilă pentru orice poziție a planetei pe orbită. Pentru punctele  $A$  și  $A'$ ,  $v_t = 0$ . Notînd cu  $r_0$  distanțele pînă la  $A$  și  $A'$  (fig. 2.46) expresia energiei pentru aceste puncte este

$$E = \frac{1}{2} mv_n^2 - k \frac{Mm}{r_0}.$$

Înmulțind această expresie cu  $\frac{r_0^2}{E}$ , rezultă ecuația

$$r_0^2 + k \frac{Mm}{E} r_0 - \frac{L^2}{2mE} = 0, \quad (2.50)$$

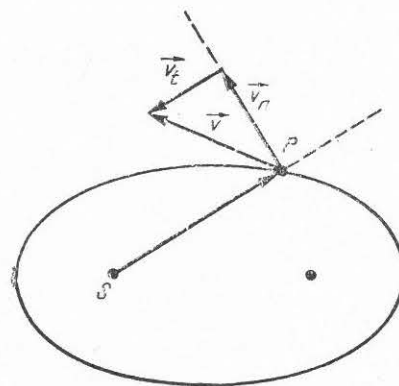


Fig. 2.45. Componentele vitezei pe o direcție paralelă cu raza ( $v_t$ ) și pe alta perpendiculară pe rază ( $v_n$ ).

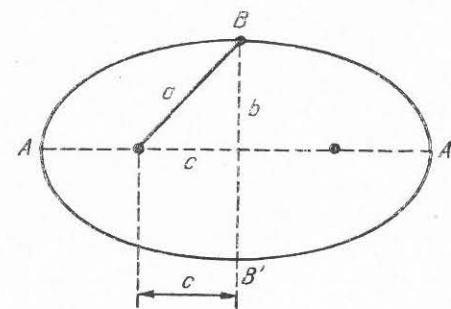


Fig. 2.46. Relații între axele orbitei și punctele extreme  $A$ ,  $A'$ .

unde am notat cu  $L = mr_0 v_n$  — momentul cinetic al elementului  $P$  în punctele  $A$  și  $A'$ .

Din figura 2.46 se constată că  $r_0$  poate avea două valori

$$r_{0,A} = r_{0,A'} = a + c, \quad r_{0,A} = a - c = r_{0,A'}.$$

care reprezintă rădăcinile ecuației (2.50) și că între semiaxele elipsei și distanța dintre centru și focar este relația

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Făcând uz de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației de gradul al II-lea, rezultă

$$r_{01} + r_{02} = -k \frac{Mm}{E},$$

$$r_{01} \cdot r_{02} = -\frac{L^2}{2mE}.$$

Din acest sistem de ecuații se determină:

$$- \text{axa mare } 2a = -k \frac{Mm}{E},$$

$$- \text{axa mică } 2b = \frac{2L}{\sqrt{-2mE}}.$$

Aceste rezultate arată că:

- forma elipsei depinde de energia și momentul cinetic al elementului  $P$ ;
- semiaxa mare depinde numai de energie;
- semiaxa mică depinde atât de momentul cinetic cât și de energie.

Sistemul model a furnizat, astfel, informații referitoare la relațiile existente între parametri de stare ai planetei ( $E, \vec{L}$ ) și semiaxele orbitei.

Aceste relații sînt deosebit de utile pentru lansarea sateliților. Semiaxa mare depinde numai de poziția în care satelitul se separă de racheta purtătoare și de viteza sa în acel moment. Semiaxa mică depinde și de direcția mișcării în momentul separării. Valoarea maximă a semiaxei mici se obține pentru poziții de separare la care unghiul dintre  $\vec{r}$  și  $\vec{v}$  este  $\frac{\pi}{2}$ .

Lansarea sateliților a confirmat justetea acestor concluzii și prin aceasta valoarea modelului utilizat.

Rezultatele obținute în cadrul studiului sistemului-model (Soare-planetă) au fost utilizate și în elaborarea modelului planetar al atomului, obținîndu-se unele rezultate în conformitate cu experimentul, fapte ce confirmă conservarea momentului cinetic la nivel cuantic.



## EXTINDERE ÎN TEHNOLOGIE

### 2.7. VOLANTUL

Volantul este un organ de mașină avînd forma unei roți cu masă și dimensiuni, în general, mari deci cu moment de inerție mare.

Volantul montat pe arborele unei mașini (fig. 2.47) are rolul de a uniformiza turația organelor principale.

Viteza de rotație a volantului depinde de acțiunile antagoniste ale unui cuplu motor și ale unui cuplu rezistent. Pentru fiecare mașină există o viteză „de regim” de la care nu trebuie să se îndepărteze în timpul funcționării. După atingerea vitezei de regim, suma momentelor cuplurilor motor și rezistent se anulează. Orice variație ulterioară a unuia sau a altuia dintre aceste cupluri atrage după sine o modificare a vitezei de rotație, deci o îndepărtare de la regimul de funcționare.

Se poate evalua această variație a vitezei unghiulare ( $d\omega$ ) aplicînd teorema de variație a energiei cinetice

$$dE_c = dL.$$

Derivînd expresia energiei cinetice

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2,$$

se obține

$$\frac{dE_c}{d\omega} = J\omega.$$

Înlocuind în expresia teoremei de variație a energiei cinetice, rezultă

$$J\omega d\omega = dL,$$

relație ce permite calcularea variației relative a vitezei unghiulare

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dL}{J\omega^2}.$$

Variația relativă a vitezei unghiulare este cu atât mai mică cu cît momentul de inerție și viteza imprimată volantului sînt mai mari.

Prezența unui volant cu moment de inerție mare asigură funcționarea mașinii la viteza de regim.

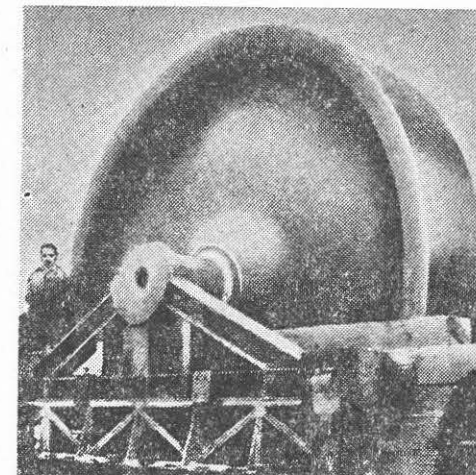


Fig. 2.47. Volant

### 2.8. GIROSCOPUL

Studiul sistemelor de puncte materiale a evidențiat faptul că toate corpurile rigide, izolate, care se rotesc în jurul unei axe fixe au proprietatea de a-și păstra direcția axei de rotație. Această proprietate și-a găsit multiple aplicații în tehnică.



Frecvent, în tehnică, sînt utilizate corpuri rigide, masive care posedă o axă de simetrie și sînt fixate într-un punct oarecare al acestei axe (fig. 2.48). Aceste corpuri se numesc giroscopae.

Pentru a înțelege întrebuințarea în tehnică a giroscopelor este necesar a efectua, mai întîi, un studiu asupra mișcării lor.

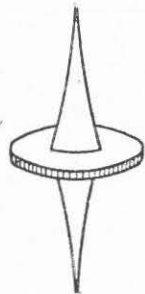


Fig. 2.48. Giroscopul este un corp rigid cu axă de simetrie.

Proprietatea principală a giroscopului de a-și păstra axa de rotație neschimbată cînd momentul forțelor exterioare este nul poate fi ușor evidențiată experimental.

*Experiment.* Pentru studiul mișcării giroscopului se utilizează fixarea lui într-o suspensie cardanică (fig. 2.49). Această suspensie este compusă din două inele. Inelul exterior se poate roti liber în jurul axei  $yy'$  care trece prin lagărele  $AA'$ , iar cel interior, în jurul axei  $xx'$  care este perpendiculară pe  $yy'$  și trece prin lagărele  $BB'$ . Giroscopul este prins prin lagărele  $CC'$  de inelul interior al suspensiei cardanice, ceea ce îi asigură posibilitatea de a se roti liber în spațiu, în orice direcție, centrul său de greutate  $C_0$  rămînînd fix în punctul  $O$ . Se imprimă giroscopului o rotație, în jurul axei  $zz'$ , cu o viteză unghiulară  $\vec{\omega}$  mare. Se întoarce suportul în diferite poziții, se constată că axa de rotație rămîne neschimbată. Această constatare este în concordanță cu teorema de conservare a momentului cinetic. Frecările în lagăre fiind foarte mici se pot neglija, deci momentul forțelor exterioare este nul, ceea ce înseamnă

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = \text{constant}.$$

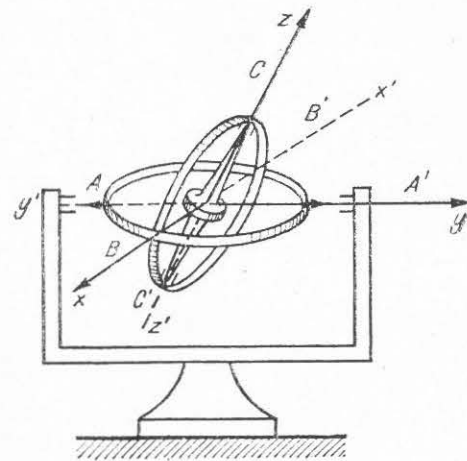


Fig. 2.49. Giroscop prins în suspensie cardanică.

Constanța momentului cinetic implică atît constanța modulului, cît și a direcției față de un referențial inerțial.

Studiind mișcarea giroscopului dintr-un referențial solidar cu Soarele, se constată că își păstrează direcția axei de rotație; față de Pămînt, axa giroscopului descrie o revoluție în sens contrar cu rotația Pămîntului. Pe acest fapt s-a bazat Foucault în 1852 pentru a dovedi, pentru prima dată, mișcarea de rotație a Pămîntului.

*Experiment.* Aplicăm giroscopului, prins în suspensie cardanică, care se rotește în jurul axei  $zz'$  (fig. 2.50, a), un cuplu de forțe  $\vec{F}, \vec{F}'$  ce tinde să-l rotească în jurul axei  $xx'$  perpendiculară pe axa de rotație a giroscopului. Constatăm că vîrfurile  $C$  și  $C'$  ale giroscopului se deplasează pe o direcție paralelă cu  $xx'$  ( $C$  are sensul de deplasare de la figură spre exterior iar  $C'$  sens invers). Axa giroscopului începe să se rotească (punctul  $O$  rămînînd fix) (fig. 2.50, b) în jurul axei  $yy'$ , perpendiculară pe primele două.

Din acest experiment rezultă că giroscopul are proprietatea de a-și dispune axa de rotație în așa fel încît să formeze un unghi cît se poate mai mic cu axa de rotație impusă ( $xx'$ ) și ca ambele rotații să se producă în același sens.

Această proprietate paradoxală a giroscopului a primit numele de *efect giroscopic* iar mișcarea axei giroscopului de *precesie*.

Efectul giroscopic se poate explica cu teorema de variație a momentului cinetic.

Giroscopul rotindu-se cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ , în jurul axei  $zz'$ , are un moment cinetic  $\vec{L}$  (fig. 2.50, c). Asupra giroscopului acționînd un cuplu de forțe  $\vec{F}, \vec{F}'$  de moment  $\vec{M}$ , se va produce o variație a momentului cinetic

$$d\vec{L} = \vec{M} dt,$$

Rezultă că  $d\vec{L}$  are aceeași orientare cu  $\vec{M}$ . Deoarece, momentul  $\vec{M}$  este perpendicular pe  $\vec{L}$  (fig. 2.50, d), și  $d\vec{L}$  trebuie să fie perpendicular pe  $\vec{L}$ . Datorită acestui fapt în intervalul de timp  $dt$ , momentul cinetic se modifică numai ca direcție, modulul său rămînînd constant. Extremitatea vectorului moment cinetic descrie, cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_p$ , un cerc de centru  $O_1$ , în jurul axei  $yy'$ , ce se află într-un plan paralel cu planul  $xOz$ .

Deoarece vectorul moment cinetic se află tot timpul pe axa de rotație ( $CC'$ ) a giroscopului, rezultă că și această axă de rotație descrie o mișcare cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_p$ , fapt în concordanță cu observațiile experimentale.

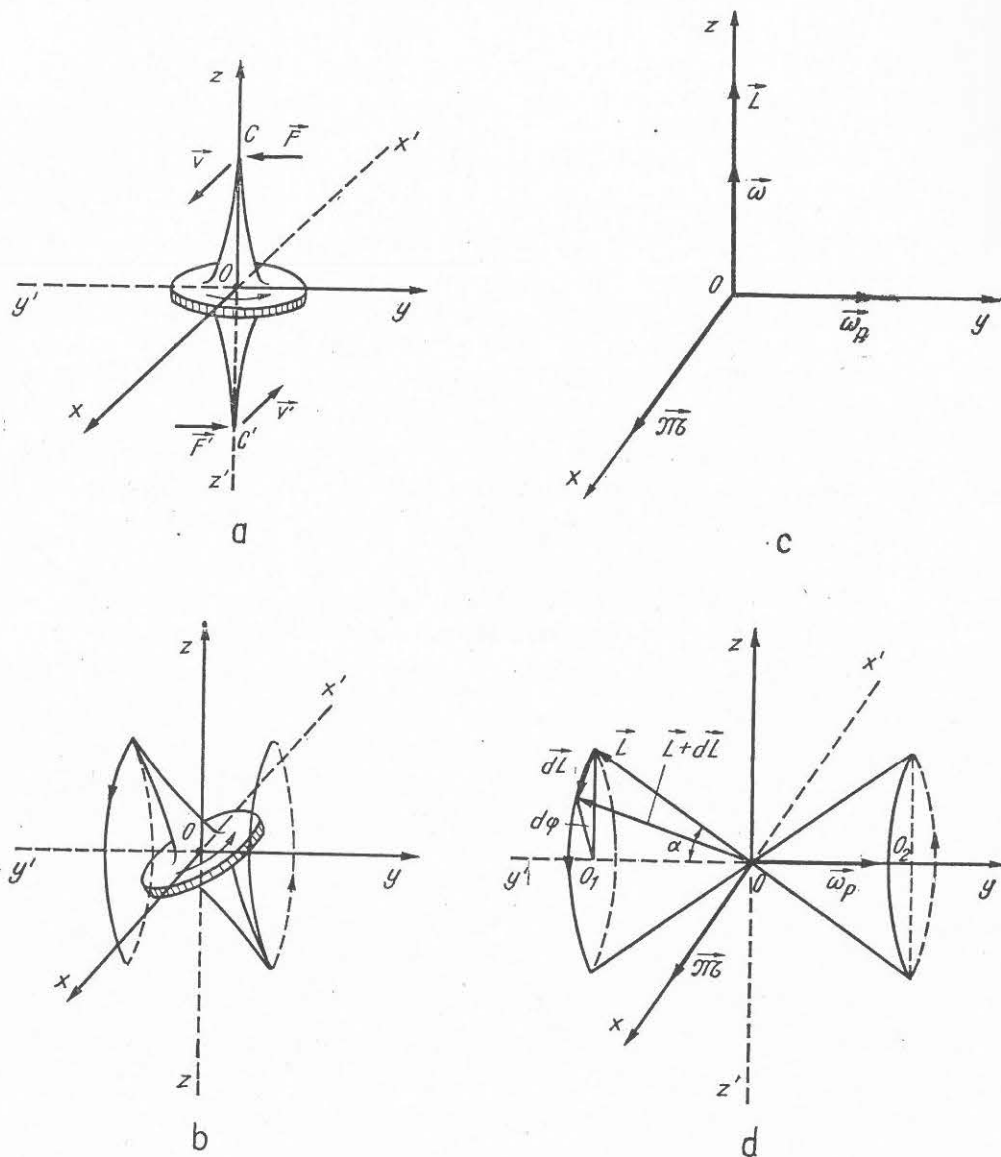


Fig. 2.50. Sub acțiunea unui cuplu  $\vec{F}, \vec{F}'$  de moment  $\vec{M}$  giroscopul execută o mișcare de precesie. Între  $\vec{M}$ ,  $\vec{\omega}_p \times \vec{L}$  este relația  $\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$ .

Viteza unghiulară de precesie este

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt},$$

unde  $d\varphi$  este unghiul corespunzător corzii  $d\vec{L}$  (fig. 2.50, d).

Dar, deoarece,  $d\vec{L} \ll \vec{L}$ ,

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{\vec{M} dt}{L \sin \alpha},$$

sau

$$\omega_p = \frac{\vec{M}}{L \sin \alpha}.$$

Momentul cuplului fiind egal cu  $\vec{M} = F \cdot l \sin \alpha$  ( $l$  — distanța dintre punctele de aplicație ale forțelor  $\vec{F}$  și  $\vec{F}'$ ), rezultă

$$\omega_p = \frac{F \cdot l}{J\omega}.$$

Se constată că viteza unghiulară de precesie este invers proporțională cu momentul cinetic și nu depinde de unghiul de înclinare al axei de rotație. Dacă acțiunea forțelor încetează (momentul devine nul) viteza de precesie se anulează și axa giroscopului se oprește. Pentru acțiuni de scurtă durată, axa giroscopului nu-și modifică aproape deloc direcția.

Relația dintre viteza unghiulară de precesie, momentul cinetic și momentul cuplului se poate scrie și sub formă vectorială

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times J\vec{\omega}.$$

Aceasta deoarece  $\vec{\omega}_p$  este un vector orientat pe direcția și în sensul pozitiv al axei  $yy'$  și cum unghiul dintre  $\vec{\omega}_p, \vec{L}$  este  $\pi - \alpha$ , iar  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  produsul vectorial  $\vec{\omega}_p \times \vec{L}$  este un vector pe direcția și în sensul pozitiv al axei  $xx'$  de modul  $\omega_p L \sin \alpha$  adică egal cu  $\vec{M}$ .

Rezultă că dacă viteza de rotație a giroscopului are sens schimbat ( $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$ ), la același moment  $\vec{M}$ , viteza de precesie trebuie să-și schimbe sensul.

Această remarcă se poate verifica experimental tot cu giroscopul cu suspensie cardanică.

*Experiment.* Se imprimă giroscopului o mișcare de rotație de sens schimbat față de cea din experimentul anterior. Se aplică același



cuplu de forțe (fig. 2.51, a). Se constată că se schimbă sensul de mișcare al axei giroscopului (vîrfurile  $C$  se deplasează tot paralel cu axa  $xx'$  dar cu sensul de la cititor spre figură iar  $C'$  de la figură spre cititor). Observații ce verifică concluzia extrasă din teorie.

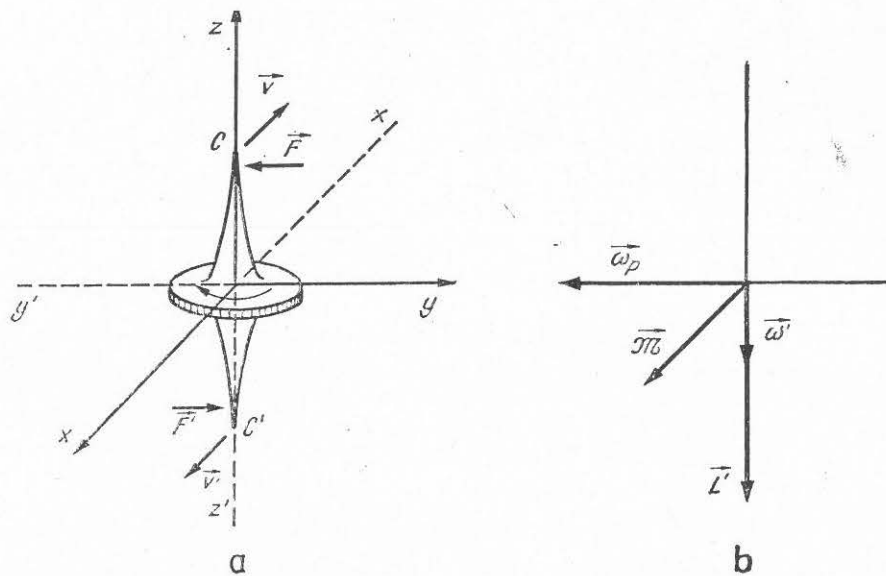


Fig. 2.51. Modificarea sensului vitezei giroscopului atrage după sine modificarea sensului vitezei de precesie.

Considerăm un giroscop prins de un inel, ce se poate roti în jurul axei  $zz'$ , prin două lagăre  $AA'$ . Giroscopul execută cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  o mișcare de rotație în jurul axei  $AA'$ . Când inelul începe să se rotească cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_p$  în jurul axei  $zz'$  (fig. 2.52, a) axa giroscopului execută o mișcare de precesie în jurul aceleiași axe. Acest fapt ne permite să afirmăm că axa giroscopului este supusă la un moment

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times J\vec{\omega}.$$

Acest moment se datorează, în mod evident, forțelor  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$  exercitate de lagărele  $AA'$ . Conform principiului acțiunilor reciproce, în același timp și giroscopul va acționa asupra lagărelor cu forțele  $\vec{F}_g$ ,  $\vec{F}'_g$  egale și de sens contrar cu  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$ . Aceste forțe se numesc forțe giroscopice.

Momentul cuplului (fig. 2.52, b) format de forțele giroscopice este

$$\vec{M}_g = J\vec{\omega} \times \vec{\omega}_p.$$

Acest cuplu giroscopic are tendința să aducă axa de rotație a giroscopului, pe drumul cel mai scurt, paralelă cu axa de precesie.

Proprietatea aceasta se poate evidenția experimental.

*Experiment.* Se utilizează un giroscop cunoscut sub numele de titirez, la care punctul fix  $O$  nu mai coincide cu centrul de greutate

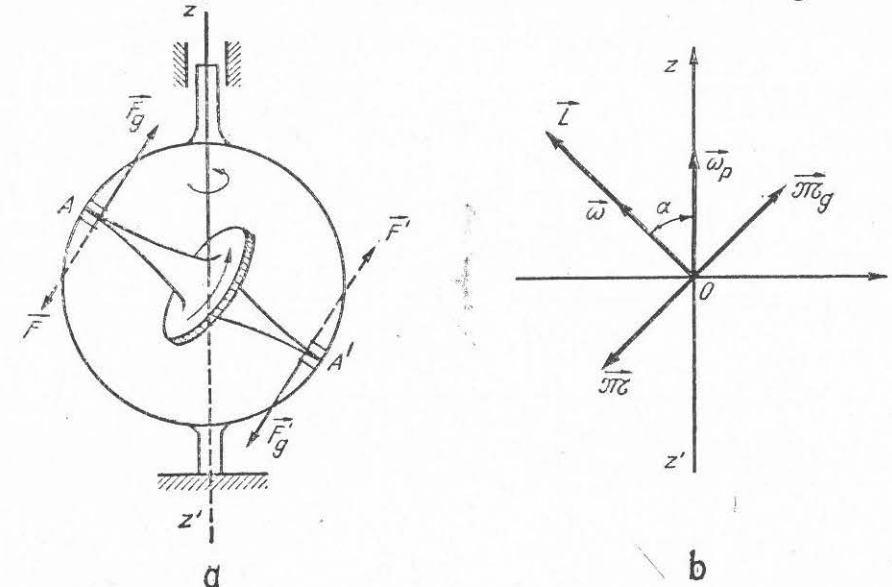


Fig. 2.52. Când axei giroscopului i se imprimă o mișcare de precesie, asupra lagărelor se exercită forțele giroscopice  $\vec{F}_g$ ,  $\vec{F}'_g$  (a) de moment  $\vec{M}_g$  (b).

(fig. 2.53, a). Fără să se rotească titirezul se înclină, se constată, că lăsat liber, cade. Se imprimă titirezului o mișcare de rotație în jurul axei sale și apoi se înclină. Se observă că el începe să execute o mișcare de precesie în jurul verticalei ce trece prin  $O$  (fig. 2.53, b). Faptul că acum giroscopul nu se mai răstoarnă înseamnă că asupra lui acționează

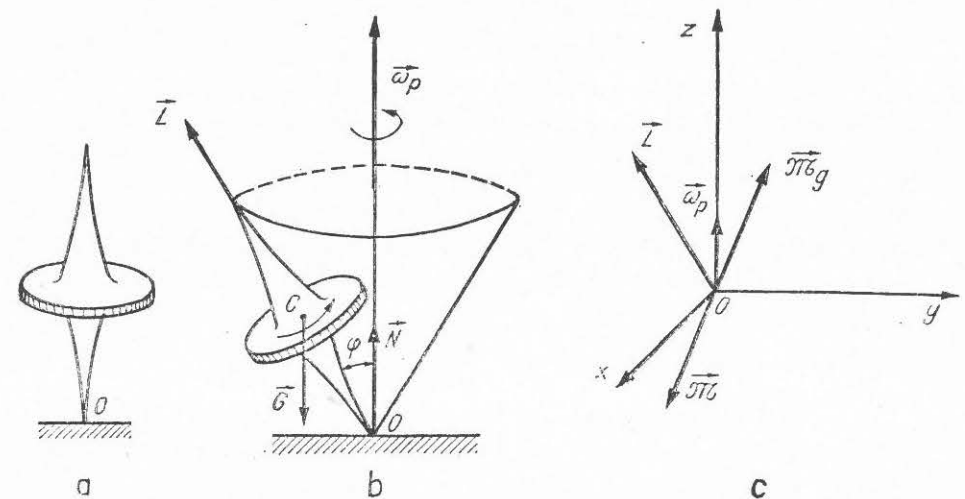


Fig. 2.53. Mișcarea de precesie a unui titirez.

în afara momentului  $\vec{M}$  al cuplului forțelor  $\vec{G}$  și  $\vec{N}$ , un alt moment egal și de sens contrar cu acesta. Acest moment este momentul giroscopic  $\vec{M}_g$  (fig. 2.53, c).

Efectul giroscopic are multe aplicații în practică.

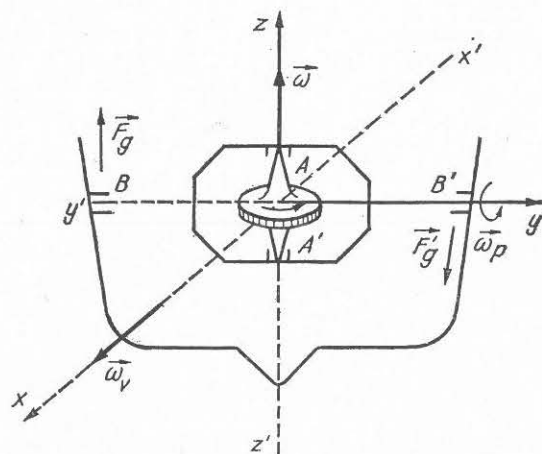


Fig. 2.54. Stabilizator antiruliu.

de o armătură mobilă în jurul axei transversale  $yy'$ , solidară cu corpul vaporului. Când sub acțiunea valurilor vaporul capătă o mișcare de rotație  $\vec{\omega}_v$ , un motor echipat cu un regulator special începe să rotească armătura cu o viteză unghiulară  $\vec{\omega}_p$  (fig. 2.54). Datorită acestui fapt, asupra lagărelor  $BB'$  va acționa cuplul giroscopic  $(\vec{F}_g, \vec{F}_g')$  de moment  $\vec{M}_g = J\vec{\omega} \times \vec{\omega}_p$ , care contribuie la diminuarea ruliului. Când sensul de rotație imprimat de valuri se modifică, motorul schimbă sensul de rotație al armăturii ceea ce face să se schimbe și sensul momentului giroscopic.

Stabilizatoarele giroscopice sînt utilizate la diferite alte vehicule ca de exemplu la trenurile pe o singură șină (monorail).

**Aparate de orientare.** Cele mai importante aplicații ale giroscopului sînt cele care constau în utilizarea lui în construcția unor aparate întrebunțate în marină și aviație și anume compasul giroscopic (busola giroscopică) pentru determinarea direcției nord, azimutul giroscopic pentru determinarea azimutului și deci a altitudinii, orizonturile artificiale giroscopice, giroclinometre etc.

**Dirijarea giroscopică a rachetei.** Dirijarea navelor cosmice se realizează cu două giroscopice: unul situat într-un aparat numit „orizont” și altul într-un aparat „verticant”. Dirijarea giroscopică a navelor se face pe porțiunea activă (partea din traiectorie care este parcursă prin

consumare de combustibil). Cele două aparate autosensibilizate la orice deviere de la pozițiile calculate, acționează prin intermediul unor potențiometre asupra cîrmelor (mișcate prin combustibil) și aduc nava pe direcția stabilită.

**Giroscopul direcțional.** Acest aparat este întrebunțat pentru păstrarea direcției torpilelor automate.

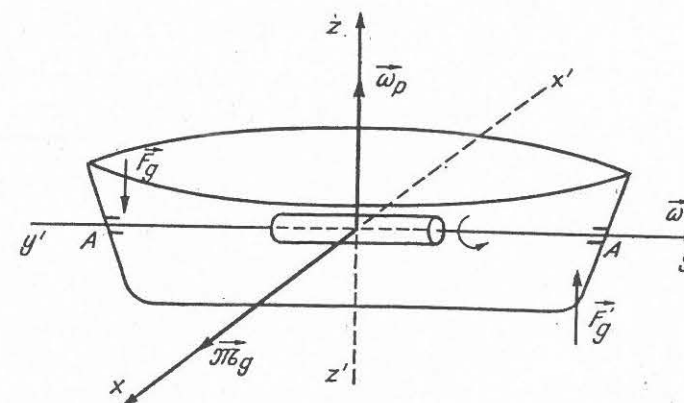


Fig. 2.55. Efect giroscopic la mișcarea vapoarelor.

Efectul giroscopic poate avea și efecte dăunătoare de care trebuie să se țină seama în special în cazul vehiculelor ce au în construcția lor dispozitive care execută mișcări de rotație (turbine, volanți etc).

Iată un exemplu. Considerăm un vapor cu turbină (fig. 2.55), cu axa de rotație  $yy'$  prinsă în lagărele  $A, A'$ , ce se rotește cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ . Când vaporul execută un viraj în jurul axei  $zz'$  cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_p$ , axa turbinei execută o precesie în jurul acestei axe. Datorită acestui fapt apare un cuplu giroscopic de moment  $\vec{M}_g$ , care acționînd asupra lagărelor  $A, A'$ , produce vaporului o mișcare de rotație în jurul axei  $xx'$ , numită tangaj, care scufundă fie prova fie chila.

Mișcarea giroscopului a explicat mișcarea de precesie a axei Pămîntului.

## 2.9. MOTOARE CU JET DE GAZE

Principiul de funcționare a acestor motoare este următorul: în interiorul motorului se produce o masă de gaz la presiune ridicată care este evacuată printr-o deschidere aflată la partea posterioară a



vehiculului (fig. 2.56). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, asupra peretelui anterior al vehiculului se exercită o forță  $F$ , de sens contrar cu viteza jetului de gaz, numită forță de propulsie.

Masa vehiculului care are motoare cu jet de gaz se micșorează cu timpul datorită consumului de combustibil care se elimină sub formă

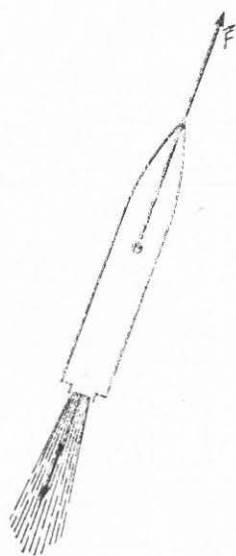


Fig. 2.56. Motor rachetă.

de gaze; din acest motiv vehiculele cu motoare cu jet de gaze sunt considerate sisteme materiale cu masă variabilă (sisteme deschise).

Motoarele cu jet de gaze se împart în:  
— motoare rachetă — care poartă cu ele tot ce este necesar (combustibil și oxidant) pentru producerea jetului de gaz, ceea ce le permite să funcționeze și în vid. Cu astfel de motoare sunt echipate rachetele;

— motoare cu reacție — care folosesc ca oxidant oxigenul din atmosferă și deci nu pot funcționa în vid. Cu astfel de motoare sunt echipate avioanele.

**2.9.1. Motoare rachetă.** Studiul mișcării unei rachete este complex, deoarece asupra ei acționează diferite forțe (greutatea, rezistența aerului, atracția diferitelor planete etc.) care se modifică de la o poziție la alta și fiindcă masa rachetei se micșorează în mod continuu.

Vom efectua studiul mișcării rachetei alegând o situație în care se pot neglija acțiunile exterioare, adică se poate considera racheta ca reprezentând un sistem izolat.

Considerăm că masa și viteza rachetei la momentul inițial  $t_0 = 0$  sunt  $m_0$  și  $v_0 = 0$ , iar la un moment  $t$  sunt  $m$  și  $v$ . După un interval de timp, foarte scurt,  $dt$ , în care s-a evacuat o cantitate de gaz  $dm$  cu viteza  $u$  față de rachetă, masa și viteza rachetei vor fi  $m - dm$ ,  $v + dv$ . Sistemul fiind izolat se poate aplica teorema de conservare a impulsului, în raport cu un referențial solidar cu Pământul:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - u).$$

Efectuând calculele și neglijând termenii cu valoare foarte mică ( $dm \cdot dv$ ), rezultă

$$m dv - u dm = 0,$$

sau

$$m dv = u dm.$$

Împărțind cu  $dt$ , se obține

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}.$$

Termenul  $dm/dt$  reprezintă debitul masic ( $\mu$ ) al gazelor evacuate iar termenul  $dv/dt$  reprezintă accelerația ( $a$ ) a rachetei la momentul  $t$ , deci relația se mai poate scrie

$$a = \frac{u}{m} \mu.$$

Rachetele sunt astfel construite încât  $\mu$  și  $u$  să fie constante în timpul mișcării, rezultă că accelerația rachetei crește fără încetare până la terminarea arderii combustibilului. Ea este în fiecare moment cu atât mai mare cu cât masa rachetei este mai mică. Din acest motiv se construiesc rachete cu mai multe trepte care se detașează pe măsură ce se consumă combustibilul și oxidantul.

Forța de propulsie la momentul  $t$  este

$$F = ma = \mu u.$$

Se observă că intensitatea acestei forțe este practic constantă și dependentă direct proporțional de debitul masic al gazelor evacuate și de viteza relativă a acestor gaze.

Viteza rachetei la un moment  $t$  se poate calcula prin integrarea expresiei

$$dv = \mu u \frac{1}{m_0 - \mu t} dt,$$

unde s-a notat masa la momentul  $t$ , cu  $m_0 - \mu t$ .

În urma integrării se obține

$$v = -u \log (m_0 - \mu t) + C,$$

unde  $C$  este o constantă de integrare care, ținând seama de condițiile inițiale, are valoarea  $C = u \log m_0$ .

Efectuând înlocuirile, rezultă

$$v = u \log \frac{m_0}{m_0 - \mu t},$$

viteza rachetei la momentul  $t$ .

Considerând că după arderea întregului combustibil masa rachetei este  $m_r$ , relația devine

$$v = u \log \frac{m_0}{m_r}$$

sau notînd cu  $m_c$  masa totală a carburantului (combustibil și oxidant) se mai poate scrie

$$v = u \log \left( 1 + \frac{m_c}{m_r} \right),$$

Această relație care dă viteza rachetei după ce s-a terminat arderea combustibilului, arată că viteza depinde de:

- viteza relativă de evacuare a gazelor,
- rezerva relativă de carburant ( $m_c/m_r$ ).

Viteza rachetei la sfîrșitul perioadei de combustie nu depinde de regimul de lucru al motorului rachetă. Pentru a obține viteze mari în zborurile interplanetare trebuie fie să se mărească raportul  $m_c/m_r$ , fie viteza  $u$ . Mărirea acestora este legată de tipul de carburant utilizat și de construcția rachetei. Pentru rachete mari care utilizează carburant lichid (hidrogen și oxigen lichid), raportul  $m_c/m_r$  este cuprins între 3 și 4, iar viteza relativă  $u$  între 2 000 și 2 500 m/s.

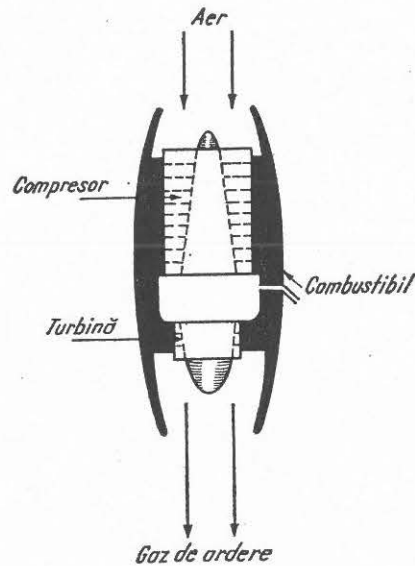


Fig. 2.57. Motor turboreactor.

oanele cu reacție sînt echipate, în general, cu un motor de tipul turbo-reactor. La acest tip de motor aerul care pătrunde în aparat este preluat de un compresor și comprimat în camera de ardere. În camera de ardere se injectează combustibilul care se aprinde prin scînteie. Gazele foarte fierbinți și la presiune înaltă sînt evacuate printr-o duză, aflată la partea posterioară, cu viteză foarte mare. Înainte de evacuare gazele pun în mișcare o turbină care antrenează compresorul (fig. 2.57).

Aceste motoare funcționează la orice viteză, cu pornire bună chiar din repaus. Pentru pornire se utilizează un motor electric de mică putere, numai pentru începutul comprimării aerului în camera de ardere.

**Probleme rezolvate. 1.** Un om de masă  $m$  (considerat punct material) se află la capătul unui cărucior-platformă de lungimea  $l$  și masă  $M$  aflat în repaus. Să se afle:

a) cu ce viteză și după ce direcție trebuie să sară omul pentru ca să aterizeze la celălalt capăt al platformei, exact în momentul în care căruciorul s-a oprit;

b) spațiul parcurs de cărucior după ce omul a aterizat pe platformă.

În ambele cazuri coeficientul de frecare dintre cărucior și planul orizontal este  $\mu$ . Timpul de interacție dintre om și platformă este mic în comparație cu timpul de deplasare prin aer.

## Rezolvare

A. Desprinderea omului de pe platformă (fig. 2.58, a).

Se aplică conservarea impulsului pe direcția de mișcare a platformei

$$Mu_0 - mv_0 \cos \alpha = 0$$

(1)

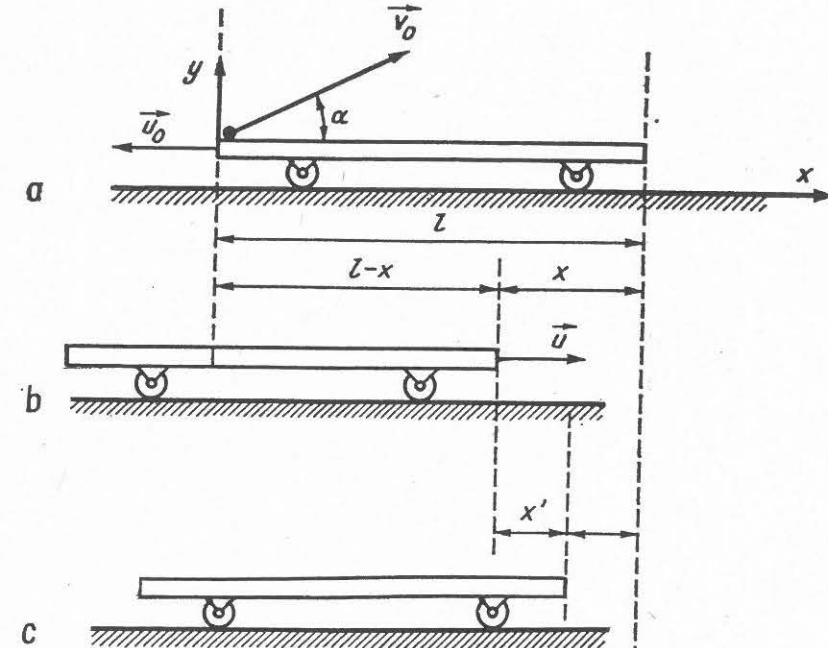


Fig. 2.58. Pentru problema rezolvată 1.

Legile de mișcare ale căruciorului:

$$u_0 - \mu g t = 0 \text{ (mișcare uniform încetinită cu viteză finală nulă)}$$

$$u_0^2 = 2\mu g x. \quad (2)$$

Legea de mișcare a omului pe direcția mișcării platformei

$$l - x = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (3)$$

a) Înlocuind în relația (3) pe  $x$  cu valoarea dată de relația (2) și ținînd seama de valoarea lui  $u_0$  din relația (1) rezultă

$$v_0 = \sqrt{\frac{lg}{\frac{m^2 \cos^2 \alpha}{2\mu M^2} + \sin 2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\frac{M}{m} u_0} = \frac{m}{M} \frac{v_0 \sin \alpha}{\mu g t} = \frac{m}{2\mu M}.$$

B. Căderea omului pe platformă (fig. 2.58, b).

Se aplică conservarea impulsului pe direcția de mișcare a platformei:

$$mv_0 \cos \alpha = (M + m) u.$$



Legea de mișcare a căruciorului este:

$$u^2 = 2\mu g x'$$

$$b) x' = \frac{m_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2\mu g (M + m)^2}.$$

2. Pe un scripete cu raza  $r$  și momentul de inerție  $J$  (față de axa de simetrie) ce se poate roti în jurul unui ax orizontal (fig. 2.59) este trecut un fir inextensibil, de masă neglijabilă care are la capete două corpuri cu masele  $M_1$  și  $M_2$  ( $M_2 > M_1$ ). Calculați:

- a) accelerația sistemului cînd este supus gravitației;  
b) tensiunea în cele două ramuri ale firului.

*Rezolvare*

Acastă problemă se poate rezolva utilizînd diferite legi fundamentale din fizică.

*A. Rezolvare prin aplicarea principiului lui D'Alembert:* față de referențialul propriu, un corp este totdeauna în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate, de legătură și de inerție:

$$M_2 g - T_2 - M_2 a = 0 \quad (1)$$

$$-M_1 g + T_1 - M_1 a = 0 \quad (2)$$

Scripetele este supus acțiunii celor două tensiuni, aplicînd legea fundamentală a mecanicii pentru mișcarea de rotație

$$(T_2 - T_1) r = J \varepsilon,$$

sau

$$T_2 - T_1 = \frac{J}{r^2} a. \quad (3)$$

Fig. 2.59. Pentru problema rezolvată 2.

Adunînd primele două relații și ținînd seama de a treia relație rezultă:

$$a) \quad a = g \frac{M_2 - M_1}{\frac{J}{r^2} + M_1 + M_2}.$$

b) Înlocuind pe  $a$  în relația (1) și în relația (2) se obțin tensiunile:

$$T_1 = M_1 g \frac{\frac{J}{r^2} + 2M_2}{\frac{J}{r^2} + M_1 + M_2}, \quad T_2 = M_2 g \frac{\frac{J}{r^2} + 2M_1}{\frac{J}{r^2} + M_1 + M_2}.$$

*Observație:* În cazul cînd se poate neglija momentul de inerție al scripetului  $J = 0$ , accelerația devine  $a = g \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}$ , iar tensiunile  $T_1 = T_2$ .

*B. Rezolvare prin aplicarea teoremei de variație a energiei cinetice:*

$$\Delta E_c = L_{int} + L_{ext}.$$

Considerînd  $E_{ct} = 0$ , variația de energie cinetică este

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2$$

(corpurile au aceeași viteză deoarece firul este inextensibil).

Lucrul mecanic al forțelor interioare este

$$L_{int.} = -T_2 h + T_1 h + (T_2 - T_1) h = 0,$$

( $-T_2 h$  este lucrul mecanic efectuat de corpul de masă  $M_2$ ,  $T_1 h$  este lucrul efectuat de corpul de masă  $M_1$ ,  $(T_2 - T_1) h = (T_2 - T_1) \alpha r$ , este lucrul mecanic efectuat de momentul tensiunilor asupra scripetelui; s-a înlocuit  $h = \alpha r$  deoarece firul nu alunecă pe scripete).

Lucrul mecanic al forțelor exterioare este

$$L_{ext} = g (M_2 - M_1) h.$$

Înlocuind în teorema de variație a energiei cinetice se obține

$$\frac{1}{2} \omega^2 (J + M_1 r^2 + M_2 r^2) = g (M_2 - M_1) \frac{\omega^2 r^2}{2a}$$

$$\left( \text{s-au efectuat înlocuirile } h = \frac{v^2}{2a} = \frac{\omega^2 r^2}{2a} \right).$$

Accelerația  $a$  a sistemului este:

$$a = g \frac{M_2 - M_1}{\frac{J}{r^2} + M_1 + M_2}.$$

*Observație.* Expresia  $J + M_1 r^2 + M_2 r^2$  reprezintă momentul de inerție al întregului sistem față de axul de rotație al scripetelui.

*C. Rezolvare prin aplicarea teoremei de variație a momentului cinetic:*

$$\Delta \vec{L} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e} \Delta t.$$

Momentul cinetic al sistemului la un moment dat este

$$\vec{L}_s = (J + M_1 r^2 + M_2 r^2) \vec{\omega},$$

dar variația momentului cinetic este

$$\Delta \vec{L} = (J + M_1 r^2 + M_2 r^2) \Delta \vec{\omega}.$$

Momentul forțelor exterioare față de axul scripetelui este

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_e} = (\vec{r} \times M_2 \vec{g} + \vec{r} \times M_1 \vec{g}).$$

Înlocuind în teorema de variație a momentului cinetic, rezultă

$$(J + M_1 r^2 + M_2 r^2) \Delta \vec{\omega} = (\vec{r} \times M_2 \vec{g} + \vec{r} \times M_1 \vec{g}) \Delta t.$$

De unde:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \times \vec{r} = \frac{\vec{r} \times M_2 \vec{g} + \vec{r} \times M_1 \vec{g}}{J + M_1 r^2 + M_2 r^2} \times \vec{r},$$

sau în modul

$$a = g \frac{M_2 - M_1}{\frac{J}{r^2} + M_1 + M_2}.$$

3. Două sfere  $A$  și  $B$  de mase  $m$  se ciocnesc. În momentul ciocnirii ele aveau vitezele egale în modul  $|\vec{v}|$ , iar direcțiile lor făceau între ele unghiul  $\alpha$  (fig. 2.60). Să se determine:

- vitezele celor două sfere după ciocnire;
  - unghiul  $\alpha$  astfel încât viteza sferei  $B$  după ciocnire să fie cea mai mare;
  - condiția ca după ciocnire sfera  $B$  să fie deviată cu  $90^\circ$  față de direcția inițială.
- Se va considera coeficientul de restituire  $k$ .

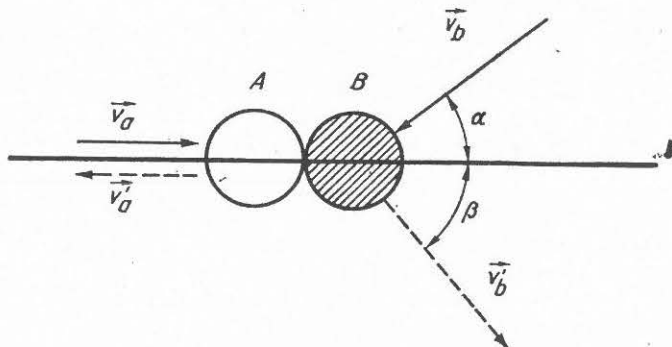


Fig. 2.60. Pentru problema rezolvată 3.

#### Rezolvare

Se alege ca axă  $Ox$  direcția de deplasare a sferei  $A$ ,  $Oy$  va fi perpendiculară pe aceasta. Se aplică conservarea impulsului pe cele două direcții:

$$\begin{aligned} Ox: v_a - v_b \cos \alpha &= -v'_a + v'_b \cos \beta \\ Oy: v_b \sin \alpha &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Ciocnirea efectuându-se cu un coeficient de restituire  $k$ , acesta va avea valoarea

$$k = \frac{v'_b \cos \beta + v'_a}{v_a + v_b \cos \alpha}. \quad (2)$$

a) Din rezolvarea sistemului format din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$v'_a = \frac{1}{2} v [k(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha)],$$

$$v'_b = v \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} [k(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha)]^2}$$

$$\tan \beta = \frac{2 \sin \alpha}{k(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha)}.$$

b) Între vitezele  $v'_a$  și  $v'_b$  trebuie să existe relația:

$$v'_b > v'_a,$$

efectuînd înlocuirile se obține

$$\cos 2\alpha < k.$$

c) Pentru ca după ciocnire direcția bilei  $B$  să facă cu direcția inițială  $90^\circ$ , trebuie ca:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Rezultă că:

$$\tan \beta = \cot \alpha.$$

Efectuînd înlocuirile se obține:

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{2}{1+k} = 0.$$

Rezolvînd ecuația se obține:

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{1+k}}}{2}.$$

Deoarece cosinusul nu poate avea valori decît în intervalul  $[-1, +1]$ , problema este posibilă numai pentru

$$-1 < \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{1+k}}}{2} < 1.$$

#### PROBLEME

1. Vectorul de poziție al unei particule variază în funcție de timp după legea  $\vec{r} = \vec{C}t(1 - \alpha t)$  unde  $\vec{C}$  este un vector constant și  $\alpha$  o constantă pozitivă. Determinați:

- viteza  $\vec{v}$  și accelerația  $\vec{a}$  în funcție de timp;
- intervalul de timp  $\Delta t$  după care particula revine în punctul de plecare și lungimea  $s$  a drumului parcurs în acest timp.

$$\text{R: a) } \vec{v} = \vec{C}(1 - 2\alpha t), \quad a = -2\alpha\vec{C}; \quad \text{b) } t = \frac{1}{\alpha}, \quad s = \frac{C}{2\alpha}.$$

2. O particulă se deplasează în sensul pozitiv al axei  $x$  cu viteza  $v = c\sqrt{x}$  unde  $c$  este o constantă pozitivă. Știind că la momentul inițial  $t = 0$ ,  $x = 0$ , determinați:

- viteza și accelerația particulei în funcție de timp;
- viteza medie a particulei în intervalul de timp necesar parcurgerii distanței  $d$ .

$$\text{R: a) } v = \frac{c^2 t}{2}, \quad a = \frac{c^2}{2}; \quad \text{b) } \bar{v} = c \sqrt{\frac{d}{2}}.$$

3. Asupra unui punct material liber de masă  $m = 1$  kg acționează o forță de componente  $F_x = 3$  N,  $F_y = 4$  N. Determinați:

- accelerația  $a$  a punctului material;
- viteza după 3 secunde de la începutul mișcării ( $v_0 = 0$ );
- legea de mișcare ( $x_0 = 0$ );
- traectoria.

$$\text{R: a) } a = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \text{b) } \vec{v} = (9\vec{i} + 12\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \text{c) } \vec{r} = \left(\frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}\right) t^2 \text{ m};$$

$$\text{d) } y = \frac{4}{3} x.$$

4. Pe un plan înclinat de un unghi  $\alpha = 45^\circ$  coboară, cu frecare, un corp de masă  $m$ . Legile parametrice ale mișcării acestui corp sînt:  $x = 0,2 g t^2$  (direcție paralelă cu planul),  $y = 0$  (direcție perpendiculară pe plan). Determinați coeficientul de frecare a corpului cu planul înclinat.

$$\text{R: } \mu = 0,43.$$



5. Un corp cu masa de 1 kg se deplasează cu viteza inițială  $v_{0x} = 2 \text{ m/s}$ ,  $v_{0y} = 0$ . Asupra acestui corp în momentul cînd se afla în poziția  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , începe să acționeze o forță  $F_1 = 4 \text{ N}$  ce face cu  $Ox$  un unghi  $\alpha = 30^\circ$ . După 5 s începe să acționeze forța  $F_2 = 4 \text{ N}$  care face cu  $Ox$  un unghi  $\beta = 90^\circ$ . Determinați pentru fiecare din cele două stări de mișcare ale corpului:

- a) accelerația;
- b) viteza;
- c) legea de mișcare;

$$\text{R: } 1. a) \vec{a}_1 = (2\sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad b) \vec{v}_1 = [(2 + 2\sqrt{3}t)\vec{i} + 2t\vec{j}] \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$c) \vec{r} = [(2 + \sqrt{3}t)t\vec{i} + t^2\vec{j}];$$

$$2. a) \vec{a}_2 = (2\sqrt{3}\vec{i} + 6\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad b) \vec{v}_2 = [(2 + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t)\vec{i} + (10 + 6t)\vec{j}] \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$c) \vec{r}_2 = \{[10 + 25\sqrt{3} + (2 + 10\sqrt{3})t + \sqrt{3}t^2]\vec{i} + (25 + 10t + 3t^2)\vec{j}\} \text{m}.$$

6. Un punct material de masă  $m$  se mișcă pe o traiectorie circulară de rază  $R$  sub acțiunea unei forțe centrale de atracție  $F = -\frac{k}{R^2}$  a cărei direcție trece prin centrul cercului, iar  $k$  este o constantă. Determinați:

- a) energiile cinetică, potențială și totală ale punctului material;
- b) impulsul și momentul cinetic al punctului material.

$$\text{R: } a) E_c = \frac{k}{2R}, E_p = -\frac{k}{R}, E = -\frac{k}{2R}; \quad b) p = \sqrt{\frac{km}{R}}, L = \sqrt{kmR}.$$

7. Doi protoni avînd fiecare energia cinetică  $E_c = 5 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ , se mișcă unul spre celălalt. Să se calculeze distanța  $R$  pînă la care se pot apropia protonii, dacă între ei se manifestă numai forțe de respingere electrostatică, de forma  $F = k \frac{e^2}{r^2}$ ,  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

$$\text{R: } R = \frac{ke^2}{2E_c} \approx 10^{-10} \text{ m}.$$

8. Două particule se deplasează într-un referențial  $R$  urmînd axa  $x$ : una cu masa  $m_1$  și viteza  $\vec{v}_1$ , alta cu masa  $m_2$  și viteza  $\vec{v}_2$ . Calculați:

- a) viteza  $\vec{V}$  a unui referențial  $R'$  față de care energia cinetică a acestor particule este minimă;
- b) energia cinetică totală a acestor particule în referențialul  $R'$ .

$$\text{R: } a) \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad b) E_c = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

9. La prora și la pupa unei bărci de masă  $M$  și lungime  $l$  sînt așezate două persoane cu masele  $m_1$  și  $m_2$ . Neglijînd rezistența apei, determinați în ce sens și cu cit se va deplasa barca, dacă persoanele își schimbă locul.

$$\text{R: } x = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} l \text{ (dacă } m_2 > m_1 \text{ barca se deplasează spre poziția inițială a lui } m_2).$$

10. Un proiectil explodează în punctul cel mai de sus al traiectoriei sale, la înălțimea  $h = 19,6 \text{ m}$ , despicîndu-se în două părți egale. După un timp  $t = 1 \text{ s}$ , una dintre ele cade pe pămînt pe verticala locului unde s-a produs explozia. La ce distanță  $d_2$  de locul tragerii va cădea a doua jumătate a proiectilului, dacă prima a căzut la distanța  $d_1 = 1000 \text{ m}$ . Nu se ține seamă de rezistența aerului.

$$\text{R: } d_2 = d_1 \left\{ \sqrt{\frac{2g}{h} \left[ \frac{h}{gt} - \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left( \frac{h}{gt} - \frac{t}{2} \right)^2} \right] + 1} \right\} = 5000 \text{ m}.$$

11. Două persoane, cu masa  $m$  fiecare, stau pe marginea unui cărucior imobil de masă  $M$ . Neglijînd frecările, determinați viteza pe care o va avea căruciorul dacă cele două persoane sar cu aceeași viteză orizontală  $\vec{u}$  față de cărucior:

- a) simultan;
- b) una după alta.
- c) În ce caz viteza căruciorului va fi mai mare și de cîte ori?

$$\text{R: } a) \vec{v}_1 = -\frac{2m}{M + 2m} \vec{u}; \quad b) \vec{v}_2 = -\frac{m(2M + 3m)}{(M + m)(M + 2m)} \vec{u};$$

$$c) v_2/v_1 \text{ mai mare ca } 1, \left( 1 + \frac{m}{2(M + m)} = \frac{v_2}{v_1} \right).$$

12. Un cărucior încărcat cu nisip este acționat în lungul unui plan orizontal de o forță constantă  $\vec{F}$  care are aceeași orientare cu vectorul vitezei. Printr-un orificiu aflat pe fundul căruciorului se scurge nisip cu debitul constant  $\mu \text{ kg/s}$ . Determinați accelerația și viteza căruciorului la momentul  $t$ , dacă la momentul  $t = 0$  masa era  $m_0$  și viteza nulă. Se neglijază frecările.

$$\text{R: } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0 - \mu t}; \quad \vec{v} = \frac{\vec{F}}{\mu} \log \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$

13. Un vagon platformă de masă  $m_0$  este antrenat în mișcare în direcție orizontală de o forță constantă  $F$ . Dintr-un dispozitiv de încărcare imobil se scurge nisip, în vagon, cu debit constant  $\mu \text{ kg/s}$ . Determinați, în funcție de timp, viteza și accelerația vagonului în timpul încărcării.

$$\text{R: } \vec{v} = \vec{F}t/(m_0 + \mu t); \quad \vec{a} = \vec{F}/(m_0 + \mu t)^2.$$

14. Un volant, cu axul orizontal, este construit dintr-un disc plin, de 20 cm diametru și cu 3 cm grosime, din fontă cu densitatea  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Pe janta sa este rulat un fir care susține un corp cu masa  $M$ .

a) Ce valoare trebuie să aibă masa  $M$  a corpului pentru ca acesta să coboare cu 1 m în 2 s?

b) Care este în acest caz tensiunea în fir?

$$\text{R: } a) M = 0,197 \text{ kg}; \quad b) T = 1,83 \text{ N}.$$

15. Peste un scripete cu raza de 10 cm este trecut un fir care are la capete două corpuri cu aceeași masă  $M = 220 \text{ g}$ . Cînd se așază pe unul din corpuri un altul cu masa  $m = 5 \text{ g}$ , sistemul parcurge 1,80 m în 6 s. Calculați:

- a) accelerația cu care coboară corpul supraîncărcat și accelerația unghiulară a scripetelui;
- b) tensiunile în cele două ramuri ale firului;
- c) momentul de inerție al scripetelui în raport de axul său.
- d) Ce eroare se face neglijînd momentul de inerție al scripetelui?

$$\text{R: } a) a = 0,1 \text{ m/s}^2, \varepsilon = 1 \text{ rad/s}^2; \quad b) T = 2,1825 \text{ N}, T' = 2,1780 \text{ N};$$

$$c) J = 45 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2; \quad d) \text{ eroare de } 10\%.$$

16. Pe un scripete cu masa  $m = 4 \text{ g}$  și raza  $r = 8 \text{ cm}$ , este trecut un fir care are la capete corpuri cu masele  $M = 250 \text{ g}$  și respectiv  $M' = 200 \text{ g}$ .

a) Cînd corpul de masă  $M$  se află la 2 m deasupra solului se lasă sistemul liber; care este viteza corpului cînd atinge solul?

b) Care este accelerația de cădere a corpului?

c) Care este tensiunea în cele două ramuri ale firului în timpul mișcării?

d) Cînd corpul ciocnește solul, firul sare de pe janta scripetelui. Care este atunci viteza

scripetelui în ture/s? Ce forță trebuie exercitată tangențial la jantă pentru a opri scripetele în 3 ture?

Se va presupune toată masa scripetelui repartizată pe jantă; accelerația gravitațională este  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

R: a)  $v = 2 \text{ m/s}$ ; b)  $a = 1 \text{ m/s}^2$ ; c)  $T = 2,20 \text{ N}$ ,  $T' = 2,16 \text{ N}$ ; d)  $N = 4 \text{ ture/s}$ ,  $F = 0,053 \text{ N}$ .

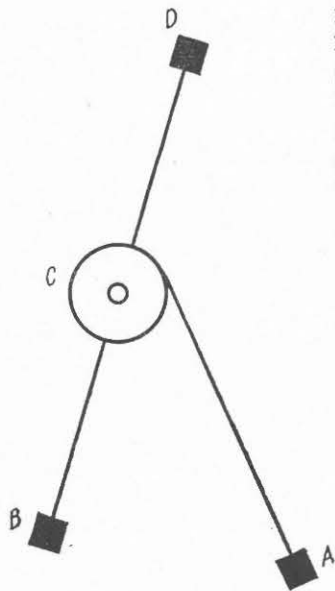
17. Un volant cu ax orizontal are masa  $M = 1,50 \text{ kg}$  pe care o putem considera repartizată pe janta sa cu raza  $r = 10 \text{ cm}$ . Un fir înfășurat pe janta volanului susține un corp  $A$  de masă  $m = 100 \text{ g}$ .

a) Care este viteza corpului  $A$  la sosirea sa la sol, la  $2 \text{ m}$  față de poziția inițială? Care este durata mișcării?

b) La acest volant este fixat un scripete cu același ax, cu masa neglijabilă și cu raza  $r' = 4 \text{ cm}$ . Se suprimă corpul  $A$  și se înfășoară pe scripete, în sens invers, un fir de care se prinde corpul  $B$  cu masa  $m' = 200 \text{ g}$ . Care este viteza corpului  $B$  la sol, la  $2 \text{ m}$  față de poziția inițială? Care este durata mișcării?

c) Se înfășoară, simultan, în sens invers pe volant și scripete firele de care sînt prinse corpurile  $A$  și  $B$ . Se lasă sistemul liber. Care este sensul de mișcare al celor două corpuri? Care este viteza cu care corpul atinge solul? Care este durata mișcării?

R: a)  $v = 1,57 \text{ m/s}$ ,  $t = 2,57 \text{ s}$ ; b)  $v' = 0,90 \text{ m/s}$ ,  $t' = 4,5 \text{ s}$ ; c) corpul  $A$  coboară și corpul  $B$  urcă,  $v'' = 0,69 \text{ m/s}$ ,  $t'' = 5,75 \text{ s}$ .



18. Pe un cilindru  $C$ , cu axul orizontal, cu raza  $r = 5 \text{ cm}$ , la care se presupune neglijabil momentul de inerție, este înfășurat un fir la care este atașat un corp  $A$  cu masa  $m = 1 \text{ kg}$ . De axul lui  $C$  este fixată o bară  $BD$  cu masa neglijabilă, cu lungimea  $l = 40 \text{ cm}$ , avînd la extremități corpuri cu masa  $m' = 250 \text{ g}$  (fig. 2.61). Se neglijează rezistența aerului în timpul mișcării.

a) Care este accelerația mișcării lui  $A$  dacă el este lăsat liber?

b) Care este viteza unghiulară a barei  $BD$  după ce a făcut 10 ture plecînd din poziția inițială ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ )?

R: a)  $a = 1,09 \text{ m/s}^2$ ;  $\omega = 52,3 \text{ rad/s}$ .

19. Un om cu masa  $m$  se află pe o platformă orizontală, de forma unui disc, la distanța  $R$  de axul de rotație al platformei. Inițial sistemul platformă-om se afla în repaus. Omul începe să se miște pe o circumferință de rază  $R$  cu viteza  $u$  față de platformă. Știind că momentul de inerție al platformei este  $J$ , calculați:

a) viteza unghiulară a platformei;

b) deplasarea unghiulară a omului față de un referențial R.I. solidar cu Pămîntul la o tură completă pe disc.

R: a)  $\omega = -\frac{u}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J}{mR^2}}$ ; b)  $\alpha = \frac{2\pi}{1 + \frac{mR^2}{J}}$ .

20. Pe o platformă orizontală, în formă de disc, care se poate roti liber în jurul axului său vertical fix, cu moment de inerție  $J$ , stă la distanța  $R$  de centru un om cu masa  $m$  (considerat punct material). Omul se deplasează radial către centrul platformei pînă la o distanță  $r < R$ , sistemul avînd inițial viteza unghiulară  $\omega_0$ . Să se calculeze, funcție de distanța omului pînă la centrul platformei:

a) viteza unghiulară a sistemului;

b) variația energiei cinetice a sistemului;

c) Cum se modifică aceste rezultate cînd  $r > R$ ?

R: a)  $\omega = \frac{(J + mR^2)\omega_0}{J + mr^2}$ ; b)  $\Delta E_c = \frac{1}{2} m(R^2 - r^2) \frac{J + mR^2}{J + mr^2}$ .

21. În lungul marginii unei platforme orizontale, în formă de disc, cu masa  $M$  și raza  $R$ , sînt montate șine pe care se poate deplasa un vagonet cu masa  $m$ . Sistemul format din vagonet, șine și platformă se mișcă cu viteza unghiulară  $\omega_0$  în jurul unui ax vertical ce trece prin centrul platformei perpendicular pe ea. La un moment dat vagonetul începe să se deplaseze pe șine cu o viteză  $u$  față de platformă.

Cum se modifică viteza unghiulară a acestei platforme în funcție de sensul de mișcare al vagonetului?

R:  $\omega = \omega_0 \pm \frac{m}{0,5 M + m} \cdot \frac{u}{R}$ .

22. Pe un disc orizontal în rotație în jurul unui ax perpendicular pe planul său care trece prin centrul discului, se află două corpuri așezate simetric față de centru și legate între ele printr-un fir. La un moment dat firul se rupe și corpurile se mișcă cu frecare spre marginea discului. Cum se va modifica:

a) energia cinetică a sistemului format din disc și corpuri?

b) impulsul discului și al corpurilor?

c) momentul cinetic?

R: a)  $\Delta E_c = L$  (al forțelor de frecare); b)  $\vec{p}_{\text{disc}} + 2\vec{p}_{\text{corp}} = 0$ ; c)  $\Delta \vec{L} = 0$ .

23. Un sistem de puncte materiale este format din 4 puncte de mase  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$ ,  $4m$  așezate în linie dreaptă la distanțe egale  $d$ . Calculați:

a) poziția centrului de masă al acestui sistem;

b) momentul de inerție al sistemului față de o axă perpendiculară pe dreapta comună ce trece prin: primul, al doilea, al treilea, al patrulea punct.

R: a) coincide cu poziția punctului cu masa  $3m$ ; b)  $50 md^2$ ;  $20 md^2$ ;  $10 md^2$ ;  $20 md^2$ .

24. Un sistem de puncte materiale este format din 4 puncte de mase  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$ ,  $4m$  așezate în vîrfurile unui pătrat de latură  $l$ . Calculați:

a) centrul de masă al acestui sistem;

b) momentul de inerție față de o axă perpendiculară pe planul pătratului ce trece prin: primul punct, prin centrul pătratului.

R: a)  $x_c = \frac{1}{2} d$ ,  $y_c = \frac{3}{10} d$  (originea sistemului în corpul cu masa  $4m$ ); b)  $12 md^2$ ;  $5 md^2$ .

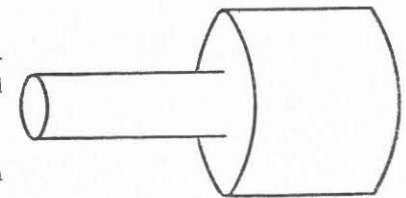


Fig. 2.62. Pentru problema 25.

25. Un corp este format din doi cilindri cu axul comun, de mase  $m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 30 \text{ kg}$ , înălțimi  $h_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 15 \text{ cm}$ , diametrii  $d_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 20 \text{ cm}$  (fig. 2.62).

a) Presupunînd corpul omogen calculați centrul de masă a sistemului și momentul de inerție față de axul de simetrie al cilindrilor.



b) Presupunind substanța din care sînt confecționați cilindrii distribuită la periferia lor pe o grosime  $e = 1$  cm, răspundeți la aceleași întrebări.

R: a)  $x_c = 15,7$  cm față de baza cilindrilor 1,  $J = 0,16$  kg · m<sup>2</sup>; b)  $J = 0,28$  kg · m<sup>2</sup>.

26. Două mici corpuri de mase  $m_1$  și  $m_2$  legate printr-un resort de masă neglijabilă se află pe un plan orizontal. Se imprimă acestor corpuri vitezele  $v_1$  și  $v_2$  astfel ca cei doi vectori să fie perpendiculari. Calculați energia totală a acestui sistem din referențialul centrului de masă.

$$R: E_0 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right).$$

27. Două sfere de mase  $m_1$  și  $m_2$  se ciocnesc central, perfect elastic. În momentul ciocnirii ele au vitezele egale și de sens contrar, iar după ciocnire sfera de masă  $m_2$  rămîne pe loc. Determinați:

- a) raportul dintre masele celor două sfere pentru ca problema să fie posibilă;  
b) viteza sferei de masă  $m_1$  după ciocnire.

$$R: a) m_2/m_1 = 3; b) v_1' = -2v_1.$$

28. Un proiectil de 200 g izbește cu o viteză de 350 m/s un corp plastic de 60 kg. După ciocnire întreg sistemul are o mișcare de translație rectilinie, pe suportul vitezei proiectilului. Calculați viteza mișcării sistemului după ciocnire.

$$R: 1,16 \text{ m/s}.$$

29. Un corp de masă  $m_1 = 50$  kg se deplasează rectiliniu, cu o viteză  $v_1 = 2$  m/s. În mișcarea sa, acest corp ciocnește centric un alt corp, de masă  $m_2 = 20$  kg, care se deplasează și el rectiliniu cu o viteză  $v_2 = 1,5$  m/s. Ciocnirea fiind perfect elastică, se cer vitezele corpurilor după ciocnire în următoarele cazuri:

- a) ambele viteze au același sens;  
b) cele două viteze au sensuri contrare.

$$R: a) v_1' = 1,72 \text{ m/s}, v_2' = 2,22 \text{ m/s}; b) v_1'' = 0, v_2'' = 3,5 \text{ m/s}.$$

30. Demonstrați că variația energiei cinetice a două corpuri care se ciocnesc plastic depinde numai de viteza relativă înainte de ciocnire și de masele corpurilor.

$$R: \Delta E_c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

31. Construiți grafic vitezele și direcțiile mișcării, după ciocnire, a două bile sferice cu masele  $m_1$  și  $m_2$ , care se întîlnesc oblic. Se va studia cazul corpurilor perfect plastice și perfect elastice.

32. O minge de dimensiuni mici, avînd, un coeficient de restituire  $k$ , este aruncată dintr-un punct  $O$ , cu viteza  $v_0$ , sub un unghi  $\alpha$  față de sol, presupus orizontal și imobil. Neglijînd frecările și rezistența aerului, mingea cade în  $A$ , astfel încît  $OA = x_1$ . După ciocnire, mingea se deplasează cu viteza  $v_1$ , sub unghiul  $\beta$  și așa mai departe. Dîndu-se  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $k$ , să se afle:

- a) distanța totală parcursă de minge;  
b) timpul total, pînă la oprire.

$$R: a) x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{(1-k)g}; b) t = \frac{2v_0}{(1-k)g} \sin \alpha.$$

33. Un neutron se ciocnește cu un nucleu de carbon a cărui masă este de  $n = 12$  ori mai mare decît a neutronului. Considerînd că nucleul de carbon are viteza nulă, determinați de cîte ori se micșorează energia cinetică a neutronului în cazul cînd:

- a) ciocnirea este centrală;  
b) după ciocnire direcția de mișcare a neutronului este perpendiculară pe cea inițială.

$$R: a) 1,4; b) 1,2.$$

34. Un titirez cu masa  $m = 0,5$  kg, a cărui axă face un unghi  $\alpha = 30^\circ$  cu verticala, efectuează o precesie sub acțiunea greutății. Momentul de inerție al titirezului în raport cu axa lui de simetrie este  $J = 2$  g · m<sup>2</sup>, viteza unghiulară în jurul acestei axe este  $\omega = 350$  rad/s, distanța dintre punctul de sprijin și centrul de masă al titirezului este  $l = 10$  cm. Calculați:

a) viteza unghiulară de precesie a titirezului;

b) valoarea și sensul componentei orizontale a forței de reacție care acționează asupra titirezului în punctul de sprijin.

$$R: a) \omega = 0,7 \text{ rad/s}; b) F = 0,010 \text{ N}.$$

35. Să se afle perioada de precesie a unui titirez sub acțiunea greutății, avînd masa  $m = 200$  g, momentul de inerție  $J = 2$  kg · cm<sup>2</sup>, turația proprie  $n = 20$  rot/s și distanța de la punctul de sprijin la centrul de greutate  $d = 5,0$  cm.

$$R: T = 1,6 \text{ s}.$$

36. Un mic giroscop asimilat cu un disc omogen cu masa  $m = 100$  g și raza  $r = 5$  cm este lansat cu viteza de 3 600 ture/min. Pe fața sa laterală se aplică o patină de frinare avînd aceeași acțiune ca o forță rezistentă tangențială cu intensitatea  $F$  constantă. Calculați  $F$  știind că giroscopul se oprește după 5 s.

$$R: F = 0,2 \text{ N}.$$

37. Rotorul orizontal al turbinei unui vapor are momentul de inerție  $J = 10^3$  kg · m<sup>2</sup> și turația  $n = 600$  rot/min. Calculați forțele giroscopice exercitate asupra lagărelor, distanța dintre ele fiind de 1 m, atunci cînd vaporul face un viraj de rază  $r = 100$  m cu viteza  $v = 36$  km/h.

$$R: F_g = 6,28 \text{ kN}.$$

38. O locomotivă este pusă în mișcare de o turbină al cărei ax este paralel cu axul roților. Sensurile de rotație, al roților și al turbinei, coincid. Momentul de inerție al rotorului turbinei în raport cu axa sa de simetrie este  $J = 240$  kg · m<sup>2</sup>. Calculați forța de presiune suplimentară asupra șinelor datorată efectului giroscopice, dacă locomotiva efectuează un viraj cu raza  $R = 250$  m cu viteza  $v = 50$  km/h. Distanța dintre șine este  $l = 1,5$  m, turația turbinei este  $n = 1500$  ture/min.

R:  $F_g = 1,4$  kN, mărește presiunea pe șinele exterioare și o micșorează pe cele interioare.

39. Un volant cu masa de 0,5 t are diametrul de 1,5 m. Substanța din care este confecționat volantul se va considera distribuită la periferia lui. Calculați lucrul mecanic necesar ce trebuie efectuat pentru a aduce volantul din repaus la turația de 120 ture/min (frecarea se neglijează).

$$R: L = 22,2 \text{ kJ}.$$

40. Între două momente  $t_1$  și  $t_2$  lucrul mecanic al cuplului motor al unui volant depășește pe cel rezistent cu 22 500 J. Știind că viteza unghiulară de regim este 1,5 ture/s, calculați momentul de inerție, față de axa sa, pe care ar trebui să-l aibă acest volant pentru ca, între cele două momente, viteza unghiulară să nu varieze cu mai mult de 1/10 din valoarea sa. Substanța din care este confecționat volantul este practic repartizată în întregime pe janta aflată la 1,5 m de axă, calculați masa volantului.

$$R: J = 2540 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; m = 2250 \text{ kg}.$$

41. Un rotor vertical de formă cilindrică care are momentul de inerție în raport cu axa sa  $J$ , se rotește sub acțiunea unui moment motor  $\mathcal{M}$ . Asupra acestui cilindru mai acționează și un moment datorat forțelor rezistive  $\mathcal{M}_r = -\mu\omega$ . Arătați cum variază viteza unghiulară în timpul mișcării.

$$R: \omega = \frac{\mathcal{M}}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{J} t}).$$

42. Racheta Atlas C a cărei masă la lansare este de 100 t are trei propulsori repartizați în două etaje; doi propulsori în primul etaj dezvoltă fiecare o forță de împingere de  $667,1 \cdot 10^3 \text{ N}$ ; al treilea propulsor, din etajul al doilea, dezvoltă o forță de împingere de  $274,7 \cdot 10^3 \text{ N}$ . Cei trei propulsori sînt aprinși de la lansare. Viteza de evacuare a gazului este de 2 400 m/s, comună la cei trei propulsori. Calculați, pentru fiecare propulsor:

- a) accelerația la sol;  
b) debitul masic de combustibil.

R: a)  $a = 16,1 \text{ m/s}^2$ ; b)  $\mu = 278 \text{ kg/s}$ .

43. O rachetă este propulsată de un jet continuu de gaz care iese cu viteza  $v = 5\,000 \text{ m/s}$ . Masa rachetei este  $M = 10 \text{ t}$  și rezistența aerului este neglijabilă. Care trebuie să fie masa gazului pe secundă pentru ca racheta să se ridice vertical cu o accelerație  $a = 8 \text{ m/s}^2$ ? (Se va considera accelerația gravitațională  $10 \text{ m/s}^2$ .)

R:  $\mu = 36 \text{ kg/s}$ .

44. În marile rachete utilizate pentru lansarea de stații spațiale, debitul masic de combustibil poate depăși  $\mu = 1\,000 \text{ kg/s}$  și viteza de evacuare este  $v = 4\,000 \text{ m/s}$ . Calculați forța de împingere.

R:  $F = 4 \cdot 10^6 \text{ N}$ .

45. O rachetă, inițial în repaus, aruncă un jet uniform de gaze cu viteza  $u = 300 \text{ m/s}$  (în raport cu racheta). Masa inițială a rachetei este  $m_0 = 270 \text{ g}$ , iar debitul gazelor evacuate este  $\mu = 90 \text{ g/s}$ .

- a) După cît timp de la pornire racheta va avea viteza  $v = 40 \text{ m/s}$ ?  
b) Ce viteză va avea racheta după terminarea masei combustibilului, masa carburantului fiind  $m_c = 180 \text{ g}$ ? (Se neglijează rezistența aerului.)

R: a)  $t = 0,37 \text{ s}$ ; b)  $v = 330 \text{ m/s}$ .

46. Un vehicul spațial cu masa  $m_0$  se deplasează cu viteza constantă  $v_0$ , în absența forțelor exterioare. Pentru a-i modifica direcția de mișcare, se acționează un motor cu reacție care evacuează gazul cu viteza  $u$  constantă în raport cu vehiculul și constant perpendiculară pe direcția de mișcare. La sfîrșitul funcționării motorului masa vehiculului a devenit  $m$ . Cu ce unghi a deviat direcția vehiculului după funcționarea motorului?

R:  $\text{tg } \alpha = \frac{u}{v_0} \log \frac{m_0}{m}$ .

## 3.

### CÎMP ELECTROMAGNETIC

#### 3.1. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

3.1.1. **Introducere.** Încercînd să înțelegem și să explicăm fenomenele electrice și magnetice, am fost nevoiți să introducem noțiunea de cîmp electric și de cîmp magnetic. Discutînd despre fenomenele luminoase am aflat că lumina este de natură electromagnetică. Studiînd atomul, am ajuns la concluzia că sediul emisiei undelor electromagnetice este atomul sau particulele încărcate cu sarcină electrică.

Să încercăm în continuare să ne formăm o imagine unitară asupra acestui domeniu vast care în realitate este sediul celor mai multe fenomene percepute de către noi și pe care putem să-l denumim „univers electromagnetic”.

3.1.2. **Conceptul de cîmp.** Să ne reamintim în acest scop de experimentul cu pendulul electric. Cum putem să știm dacă bobita este sau nu încărcată electric? Pentru aceasta încărcăm electric un al doilea pendul și îl apropiem de primul. Dacă pendulul al doilea va fi scos din echilibru, atunci vom spune că primul pendul este încărcat cu sarcină electrică. Interacțiunea electrică între cele două bobite se manifestă printr-o forță ce scoate din echilibru pendulele. Pentru particule punctiforme (în vid) această forță este dată de legea lui Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$

unde  $q_1$  și  $q_2$  sînt cele două sarcini electrice,  $\epsilon_0$  este permitivitatea vidului, iar  $r$  este distanța dintre particule.

Observăm că influența este reciprocă, deci fiecare acționează asupra celuilalt. În experiența descrisă unul dintre pendule a fost însă utilizat ca instrument pentru „detectarea” stării de încărcare a celuilalt pendul. Acest instrument poartă numele de *corp de probă*. Deoarece instrumentul utilizat joacă doar un rol auxiliar, de culegere de date, el nu trebuie să intervină



direct în expresiile ce descriu fenomenele. De aici rezultă două consecințe: prima, corpul de probă *nu trebuie să introducă modificări sensibile în starea sistemului* pe care-l măsurăm. În experiența descrisă aceasta revine la cerința ca pendulul studiat să nu fie afectat de corpul de probă, deci să rămână în repaus. Cum interacțiunea este reciprocă, acest lucru nu se va putea realiza în mod riguros. Putem în schimb să facem astfel încât influența corpului de probă să fie cât mai mică, de exemplu prin încărcarea lui cu o sarcină foarte mică. Acest lucru va atrage după sine micșorarea forței astfel ca la limită, când  $q_2 \rightarrow 0$  ( $q_2$  — sarcina corpului de probă) și  $F \rightarrow 0$ . Dacă însă calculăm limita raportului  $F/q_2$ , putem obține o valoare finită care poartă numele de *intensitate a câmpului electric*  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_2}. \quad (3.1)$$

Mărimea fizică introdusă astfel satisface cerința ca instrumentul de măsură să nu intervină în expresia mărimii care descrie fenomenul (în cazul de față interacțiunea electrică).

Cu ajutorul ei putem însă să calculăm care va fi forța ce va acționa asupra oricărei particule încărcate, aduse în preajma primei particule. Putem să construim o „hartă” a forțelor ce se vor exercita asupra unei particule în orice punct în jurul sarcinii  $q_1$ . Cu alte cuvinte putem descrie cantitativ zona de influență electrică a sarcinii  $q_1$ . Numim această regiune spațială *câmp electric*, prin analogie cu expresiile similare: câmp acustic, câmp luminos, câmp de „influență”. Sensul acestei denumiri fiind deci de zonă de acțiune a acestei proprietăți deosebite a particulei încărcată de a acționa asupra altor particule încărcate. Aceasta este a doua consecință ce derivă din cele discutate anterior. Vom vedea pe parcurs că această definiție a câmpului electric corespunde unei exprimări de primă aproximație, câmpul avînd o semnificație mult mai profundă.

În același mod, pentru descrierea fenomenelor magnetice s-a introdus o mărime ce caracterizează intensitatea câmpului magnetic, denumită (din motive istorice) inducție magnetică,  $\vec{B}$  (Fizica cl. a IX-a, cap. 6). Proprietățile generale pe care le au câmpul electric și magnetic, pe care le putem exprima din cunoștințele însușite pînă acum sînt:

- câmpul este un mod de a exprima interacțiunea;
- câmpul este produs de sarcini;
- intensitatea câmpului (electric sau magnetic) se exprimă printr-o mărime vectorială;
- intensitățile câmpurilor, într-un punct din spațiu, produse de diverse particule încărcate electric se adună vectorial ca și cum fiecare particulă ar fi independentă de celelalte (principiul suprapunerii).

*Observație:* proprietățile mai sus expuse pot fi generalizate într-un mod specific și pentru cazul câmpului gravitațional.

**3.1.3. Câmpul electromagnetic.** Pentru a putea descrie fenomenele electrice sau magnetice produse de o mulțime de particule încărcate cu sarcini electrice, trebuie să cunoaștem intensitățile câmpurilor în fiecare punct al spațiului. Această cale a fost în realitate utilizată totdeauna cînd s-a discutat despre un câmp, dar nu a fost prea mult scoasă în evidență. Astfel, cînd s-a studiat mișcarea unui obiect în câmp gravitațional, s-a afirmat că, în cazurile uzuale \*  $g$  (acelerația gravitației) este practic constantă. Afirmatia aceasta nu spune altceva decît că intensitatea câmpului gravitațional este aceeași în toate punctele în care se poate mișca obiectul. Deci în realitate se cunoaște câmpul în toate punctele de interes. Cînd, spre exemplu, se cere să se studieze mișcarea unui electron între plăcile de deflexie ale unui tub catodic, se face de obicei și precizarea că între plăci câmpul este constant. Deci, iar se dau de fapt valorile intensității câmpului în fiecare punct din spațiu.

În toate aceste cazuri câmpul electric poate fi descris matematic prin intermediul unor expresii ce dau intensitatea câmpului în fiecare punct din spațiu. Câmpul electric produs de o particulă punctiformă încărcată cu sarcina  $q$  este:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

În punctul  $C$ , intensitatea câmpului produs de sarcina  $+q$  din  $A$  va fi  $E_1$  (fig. 3.1.). Dacă deplasăm sarcina în punctul  $B$ , intensitatea câmpului în punctul  $C$  este  $E_2$ . Se vede că intensitatea câmpului electric într-un punct, se modifică ca mărime și direcție în funcție de poziția sarcinii față de punctul ( $C$ ) în care o măsurăm. Spunem că în punctul  $C$  avem un *câmp electric variabil*, dacă particula se deplasează din punctul  $A$  în  $B$ . Variația lui în timp, va fi ușor de descris, dacă vom exprima modul în care depinde  $r$  de viteza particulei.

Dacă particula încărcată se mișcă, atunci ea va produce și un câmp magnetic. În general deci, în fiecare punct din jurul particulei în mișcare [avem concomitent un câmp electric și unul magnetic. Acest câmp poartă denumirea de *câmp electromagnetic*. Câmpul electromagnetic trebuie astfel descris prin ambii vectori ai intensității câmpului:  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ .

(A se vedea și Cap. 4 din manualul de fizică clasa X-a, ediția 1978.)

Fig. 3.1. Schița experimentului.

**3.1.4. Perturbația electromagnetică. Unda electromagnetică.** Să ne imaginăm în continuare că particula stă în repaus în punctul  $A$  și că un dispozitiv ne indică intensitatea câmpului electric în punctul  $C$ . Valoarea măsurată va

\* Mișcarea are loc la suprafața Pămîntului.

fi constantă. Să presupunem acum că deplasăm particula din  $A$  în  $B$ . Dispozitivul din  $C$  va indica o variație a lui  $\vec{E}$ . Dacă în  $C$  ar fi și un indicator de câmp magnetic, s-ar sesiza și o variație a lui  $\vec{B}$ . Spunem că în  $C$  s-a produs o *perturbație* a câmpurilor. Studiindu-se teoretic (J. C. Maxwell) și experimental (H. Hertz), proprietățile acestor perturbații electromagnetice, s-a ajuns la concluzia că ele se propagă în spațiu. Propagarea în spațiu a perturbației electromagnetice este determinată de generarea reciprocă de câmpuri electrice și magnetice variabile ce se „desprind” de regiunea în care au fost produse. Pentru ca propagarea să aibă loc trebuie ca ambele câmpuri să varieze în timp. Câmpul electromagnetic care se propagă în spațiu reprezintă *unda electromagnetică*. Undele electromagnetice sînt unde transversale și anume intensitățile câmpurilor electric  $\vec{E}$  și magnetic  $\vec{B}$  sînt reciproc perpendiculare și în același timp perpendiculare pe direcția de propagare. (§ 4.2. Fizica cl. X.1978.)

Undele electromagnetice se clasifică după frecvența lor în unde radio, microunde, infraroșii, vizibile (lumina), ultraviolete, Roentgen ( $X$ ) și gama ( $\gamma$ ).

**3.1.5. Viteza de propagare a perturbației electromagnetice.** Știm că viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid, prezisă de teoria lui Maxwell, este foarte mare:  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Acesta este și motivul pentru care determinarea ei nu a fost posibilă multă vreme. În 1849 Fizeau a utilizat o metodă de determinare a vitezei luminii, care este și azi folosită în determinarea vitezelor: *metoda timpului de zbor*. (fig. 3.2). Lumina produsă de o sursă  $S$ , cade pe o oglindă semitransparentă  $O_1$  și trece în continuare printre dinții unei roți dințate  $R$ . După un drum de câțiva kilometri se reflectă pe oglinda  $O_2$  și revine la roata dințată, apoi ajungînd pe oglinda  $O_1$  se reflectă din nou pe direcția  $O_1D$  ( $D$  este un detector de exemplu ochiul omenesc sau o celulă fotoelectrică). Dacă roata

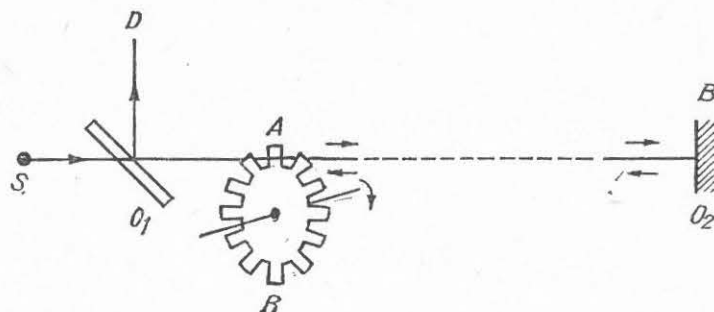


Fig. 3.2. Schema experimentului lui Fizeau.

dințată este rotită cu o viteză ce crește treptat, detectorul  $D$  va recepționa radiația reflectată în  $B$  numai pînă în clipa în care intervalul de timp cît lumina străbate drumul  $ABA$  devine egal cu intervalul de timp necesar ca roata dințată să se miște cu  $1/2$  dintr-un dinte. În acest moment imaginea va fi obturată de dinte și detectorul  $D$  nu va mai recepționa lumina. Dacă

viteza luminii este  $v$ , atunci intervalul de timp necesar pentru a străbate  $AB + BA$ , va fi:

$$t = \frac{2 \cdot \overline{AB}}{v}.$$

Dacă roata dințată are  $n$  dinți și se rotește cu turația  $N$ , atunci intervalul de timp în care se rotește cu  $1/2$  dintr-un dinte va fi:

$$t' = \frac{1}{2nN}.$$

Reglînd turația motorului, putem face ca  $t = t'$ , adică să dispară imaginea. În acest caz:

$$\frac{1}{2nN} = \frac{2 \cdot \overline{AB}}{v}$$

de unde:

$$v = 4 \cdot \overline{AB} \cdot N \cdot n.$$

Într-unul din experimente în care:  $AB = 23 \text{ km}$ ,  $n = 150$  dinți, roata avînd un diametru de  $5 \text{ cm}$ , s-a obținut obturarea luminii pentru  $N = 22 \text{ s}^{-1}$ . Atunci:

$$v = 4 \cdot 23 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 22 = 3,036 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Roata dințată are două roluri: acela de a produce pulsuri de lumină prin „tăierea” fasciculului de lumină și acela de a măsura intervale de timp foarte scurte (în experimentul descris  $t' = \frac{1}{2nN} = 1,51 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ).

Mijloacele moderne permit măsurarea intervalelor de timp mult mai scurte, de ordinul a  $10^{-8} - 10^{-10} \text{ s}$ , ceea ce face ca „baza de zbor” a luminii să fie redusă în aceeași proporție (de  $10^4 - 10^6$  ori), adică la  $\frac{23 \cdot 10^3}{10^4} = 2,3 \text{ m}$ , sau mai puțin.

Egalitatea dintre viteza luminii și cea a undelor radio a fost principalul element care a făcut să se înțeleagă natura comună, electromagnetică, a acestor unde.

## 3.2. FENOMENE DE PROPAGARE A RADIAȚIEI ELECTROMAGNETICE

**3.2.1. Propagarea rectilinie.** La determinarea vitezei luminii am utilizat proprietatea ei de a se propaga în linie dreaptă. Această proprietate ne este sugerată de nenumărate fenomene observate în natură: razele soarelui proiectate pe cerul înnoat, razele de soare ce pătrund într-o cameră întunecoasă printr-o fantă mică, imposibilitatea de a vedea obiectele ascunse în spatele altora etc. Aceste constatări cotidiene sînt sintetizate în conceptul de rază de lumină.

Conceptul de rază de lumină constituie un model pentru propagarea luminii. Experimental, o rază de lumină se poate obține delimitînd un fascicul



de lumină cu ajutorul unui paravan prevăzut cu o fantă. Cu cât fasciculul este mai îngust cu atât sintem mai aproape de modelul razei de lumină.

Utilizând două sau mai multe paravane prevăzute cu câte o fantă, putem verifica experimental afirmația cu privire la propagarea rectilinie

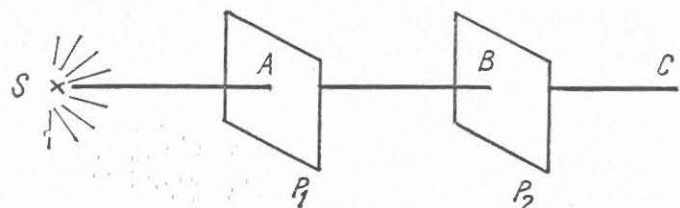


Fig. 3.3. Propagarea rectilinie.

a luminii? Să luăm o sursă de lumină  $S$  și două paravane prevăzute fiecare cu câte o fantă,  $P_1$  și  $P_2$  (fig. 3.3).

Pentru a putea vedea sursa  $S$  din punctul  $C$  prin fantele paravanelor, trebuie să le aranjăm ca în figura 3.3. Privind ne „convîngem” direct că cele trei puncte:  $A$ ,  $B$  și  $C$  sînt în linie dreaptă. Cum putem verifica însă această afirmație? Ce înseamnă ca ele să fie în linie dreaptă? Faptul că pentru o anumită poziție a fantelor privind din  $C$  vedem pe  $S$  nu ne poate convinge dacă propagarea este sau nu în linie dreaptă, deoarece verificăm afirmația tot cu ajutorul „razei de lumină”. Chiar punînd o riglă pe direcția  $AB$ , cu scopul de a vedea dacă raza de lumină se propagă paralel cu ea, nu obținem un răspuns la întrebare, deoarece liniaritatea riglei la rîndul ei a fost verificată în ultimă instanță tot cu ajutorul conceptului de rază de lumină.

Ajungem la concluzia că nu avem cum verifica corectitudinea afirmației cu privire la propagarea în linie dreaptă a luminii. Putem spune însă că „raza de lumină” este un model fizic pentru propagarea rectilinie a luminii și respectiv prototipul liniei drepte din geometrie.

O altă latură a propagării luminii ni se evidențiază dacă încercăm să îmbunătățim condițiile din experimentul descris anterior. Pentru aceasta să micșorăm treptat dimensiunile fantelor. Pe un ecran plasat în punctul  $C$  imaginea fantelor se va micșora și ea treptat. Putem spera că micșorînd în continuare fantele, fasciculul se va îngusta tot mai mult, tinzînd către „raza de lumină” ideală cu dimensiuni transversale nule. Experimentul ne arată că de la un anumit moment, odată cu micșorarea dimensiunilor, pata de lumină de pe ecran nu numai că nu se micșorează, ci din contră se mărește. În același timp imaginea marginii fantei devine mai puțin netă.

Ajungem la un rezultat experimental care contrazice așteptările noastre. Încercînd să realizăm condițiile de obținere a unei raze de lumină cît mai aproape de cea ideală, observăm că propagarea luminii în linie dreaptă este tot mai puțin evidențiată!

Concluzia care se impune este aceea că modelul razei de lumină este doar un mod aproximativ de a descrie propagarea luminii.

În cele ce urmează vom căuta să descriem mai exact unele fenomene legate de propagarea luminii pornind de la faptul că ea este o undă.

**3.2.2. Descrierea propagării undelor electromagnetice.** În anii trecuți am făcut cunoștință cu câteva tipuri de unde: unde sonore, unde pe suprafața lichidelor, unde seismice, unde electromagnetice (Fizica cl. X, ediția 1978). Să utilizăm aceste cunoștințe pentru a descrie unele fenomene legate de propagarea undelor electromagnetice.

Din punct de vedere al desfășurării lor în timp, undele se pot împărți astfel:

| tip            | exemplu                |
|----------------|------------------------|
| a) neperiodice | — unde de șoc          |
| b) periodice   | — unde monocromatice * |

O perturbație (electromagnetică de exemplu) ce se produce într-un punct și se propagă mai departe, în punctele vecine, fără să mai revină periodic este un exemplu de undă neperiodică.

Dacă însă perturbația (electromagnetică) este de așa natură încît se repetă periodic, fără a se opri, atunci ea se numește undă periodică. O undă periodică trebuie deci să fie descrisă printr-o funcție care să revină la aceeași valoare după trecerea unui interval de timp dat  $T$  denumit perioadă:

$$f(t) = f(t + T) = \dots f(t + nT),$$

unde  $n$  este un număr întreg.

În același timp, această funcție trebuie să descrie și periodicitatea în spațiu a undei, în sensul că unda fiind periodică și propagîndu-se cu viteză constantă, va avea aceeași valoare (la un moment dat) în diverse puncte din spațiu, pe direcția de propagare, separate prin distanța  $\lambda$  denumită lungime de undă:

$$f(t, x) = f(t, x + \lambda) = \dots = f(t, x + n\lambda).$$

Aici prin  $f(t, x)$  am simbolizat faptul că unda trebuie să fie descrisă prin intermediul a două mărimi variabile:  $t$  și  $x$  ( $x$  — direcția de propagare).

Un exemplu de astfel de funcție ați întîlnit la studiul ecuației undei plane (cl. a X-a). Abaterea la un moment dat de la poziția de echilibru, a unui punct material aflat sub acțiunea unei unde (elastice) se descrie prin elongația  $y$ :

$$y_p = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

unde  $A$  este amplitudinea (= elongația maximă),  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  — pulsația,  $T$  — perioada,  $\lambda$  — lungimea de undă,  $v$  — viteza de propagare,  $x$  și  $t$  — variabilele

\* Termenul monocromatic exprimă „lumină de o culoare”, adică de o frecvență dată. Prin extensie se poate utiliza la alte tipuri de unde decît cele luminoase. Practic nu există unde monocromatice ci doar unde care se apropie mai mult sau mai puțin de această condiție ideală.

de care depinde funcția  $y$ , adică distanța de la originea aleasă pînă la locul în care se calculează elongația ( $\overline{OP}$ ) și respectiv intervalul de timp între momentul inițial și momentul în care unda ajunge în punctul  $P$ . Argumentul funcției sinus,  $\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ , se numește *faza* undei. Observăm că dacă deplasăm originea spațiului sau a timpului, faza va cuprinde un termen suplimentar

$$y_p = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] \quad (3.2)$$

unde  $\varphi$  se numește *faza inițială*, *constantă de fază* sau *diferență de fază*. Funcția  $y_p$  satisface condiția de periodicitate spațială și temporală și deci poate descrie unda elastică.

Unda electromagnetică nu este o undă elastică, ci o undă în care variază periodic intensitatea câmpurilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , variație ce se propagă în spațiu pe o direcție perpendiculară pe cei doi vectori (fig. 3.4). Pentru a exprima acest fapt vom nota elongația cu  $\vec{u}$ . Prin  $\vec{u}$  vom înțelege așadar fie componenta electrică fie cea magnetică a undei electromagnetice:

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

unde  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  — frecvența undei, iar  $c$  este viteza de propagare a undei electromagnetice. Amplitudinea undei  $\vec{u}_0$  (adică  $\vec{E}_0$  sau  $\vec{B}_0$ ) va indica valoarea maximă pe care o pot lua intensitatea câmpului electric sau magnetic al undei. Putem scrie de exemplu:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

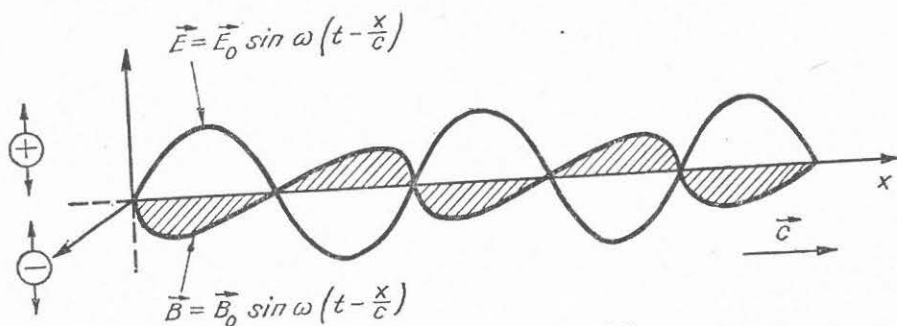


Fig. 3.4. Undă electromagnetică.

Într-un punct oarecare ( $x_p$ ) de pe direcția de propagare a undei, intensitatea câmpului electric, se va exprima prin:

$$\vec{E}(x_p, t) = \vec{E}_0 \sin \omega\left(t - \frac{x_p}{c}\right). \quad (3.3)$$

Dacă în punctul  $P$  se află o particulă încărcată electric, sub influența acestui câmp electric variabil, ea va fi pusă în mișcare și va oscila cu frecvența  $\nu$

(a undei), fenomenul reprezentînd o oscilație forțată. Un astfel de caz se realizează cu electronii ce se găsesc în antena unui radioreceptor; oscilațiile electronilor cu frecvență egală cu cea a undei incidente vor determina un curent alternativ ce va fi apoi amplificat în radioreceptor.

Să ne amintim că acest proces este reversibil, în sensul că dacă în antenă provocăm o mișcare oscilatorie a sarcinilor (de exemplu cu ajutorul unui generator de curent alternativ), atunci în spațiul din jurul antenei se va emite o undă electromagnetică. Antena este în acest caz un dipol oscilant, iar electronii formează sistemul oscilant emițător.

Evidențierea prezenței unei unde electromagnetice se va putea face utilizînd un fenomen oarecare de interacție între undă și aparatul receptor. Efectul undei asupra aparatului receptor va fi determinat de energia transportată de undă.

Vom arăta că energia transportată de unda electromagnetică este proporțională cu pătratul amplitudinii undei:  $E_0^2$ . În acest scop să ne amintim expresia energiei înmagazinate într-un condensator,  $E_c$  (Fizica cl. X, § 2.11.1):

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

unde  $q$  este sarcina electrică de pe o armătură a condensatorului, iar  $C$  este capacitatea lui. Această energie poate fi interpretată ca energie potențială a purtătorilor de sarcină electrică de pe armături.

Putem transcrie această relație, dacă ținem cont de definiția capacității  $C = q/U$  (unde  $U$  — diferența de potențial dintre armături) astfel:

$$E_c = \frac{1}{2} CU^2.$$

Dacă ne fixăm atenția asupra unui condensator plan, atunci:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

unde  $\epsilon$  este permitivitatea mediului dintre armăturile de arie  $A$ , aflate la distanța  $d$  una de alta. În vid  $\epsilon = \epsilon_0$  deci:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2.$$

Cum intensitatea câmpului electric în spațiul dintre armături este:

$$E = \frac{U}{d}$$

obținem:

$$E_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

unde  $V = A \cdot d$  este volumul spațiului limitat de armături.



Deoarece câmpul electric este omogen, introducem o mărime fizică independentă de structura geometrică a condensatorului și anume:

$$w_{el} = \frac{E_c}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (3.4)$$

pe care o numim *densitate de energie* a câmpului electric.

Ultima relație ne permite să facem o afirmație deosebit de interesantă: energia unui condensator încărcat este proporțională cu pătratul intensității câmpului electric din interiorul armăturilor. Putem spune deci că energia este „înmagazinată” în câmpul electric care se stabilește între armături.

Acest rezultat poate fi transpus pentru unda electromagnetică, cu condiția să efectuăm media în timp a pătratului intensității câmpului electric al undei (3.3). Deoarece  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ , atunci când  $\alpha$  variază de la 0 la  $2\pi$ , media lui  $\cos 2\alpha$  este nulă. În acest fel

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} \cdot E_0^2.$$

Am justificat astfel de ce este plauzibilă afirmația că energia transportată de unda electromagnetică este proporțională cu  $E_0^2$ .

O undă plană care se propagă în vid (deci care nu este, atenuată) va avea o densitate medie de energie constantă, în orice regiune a undei, deoarece  $E_0$  este constant. De aici rezultă în fond faptul că relația care descrie propagarea undei pe o direcție, descrie și propagarea undei plane.

Pentru a descrie cantitativ energia transportată de un fascicul de radiație\* în unitatea de timp printr-o arie dată se utilizează mărimea denumită *flux energetic*  $\Phi_e$  (măsurat în wați):

$$\Phi_e = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

unde  $\Delta t$  este intervalul de timp în care se transportă energia  $\Delta W$  prin aria respectivă. \*\*

În virtutea celor discutate vom putea scrie:

$$\Phi_e \sim E_0^2 \quad (3.4')$$

Pentru radiația electromagnetică din domeniul vizibil, receptorul este ochiul. S-a arătat experimental că senzația luminoasă este produsă doar de componenta electrică a undei. Componenta magnetică nu determină senzații optice. Din această cauză în cele ce urmează vom neglija câmpul magnetic al undei.

\* Prin *radiație* înțelegem emisia și propagarea în spațiu a unor unde sau particule, însoțită de un transport de energie.

\*\* Fluxul energetic raportat la aria prin care se transportă energia se numește *intensitate*.

*Observație.* Densitatea de energie a undei nu este măsurabilă direct, deoarece câmpul nu poate fi „decupat” pe porțiuni. Măsurabilă direct este doar energia totală a câmpului prin intermediul lucrului mecanic necesar aducerii purtătorilor de sarcină pe armăturile condensatorului.

Dacă unda electromagnetică se propagă într-un mediu cu indice de refracție  $n$  (față de vid), atunci din definiție, viteza de propagare a undei va fi  $v = c/n$ . Faza undei se va scrie atunci

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \omega \left( t - \frac{x}{c} \cdot n \right).$$

Se poate spune astfel că propagarea printr-un mediu se efectuează ca și cum distanța parcursă de undă este mai mare:  $x \cdot n$ . Această mărime poartă numele de *drum optic*,  $l = x \cdot n$ .

Pentru a încheia descrierea propagării undelor electromagnetice, trebuie să precizăm că în general este dificil să obținem unde monocromatice. În toate cazurile practice, undele electromagnetice sînt suprapuneri de unde de diverse frecvențe (unde policromatice) și în același timp sînt emise pe o perioadă determinată de timp, formînd astfel grupuri de unde (pachete de unde).

Fără ca aceasta să reducă generalitatea fenomenelor, în cele ce urmează, ne vom referi cu precădere la undele electromagnetice din domeniul vizibil — lumina.

**3.2.3. Difracția. Principiul lui Huygens.** Ne putem acum întoarce la discuția referitoare la dificultatea de a dovedi propagarea în linie dreaptă a luminii cu ajutorul paravanelor prevăzute cu o fantă. Am afirmat anterior că, cu cît facem orificiul mai mic, cu atît mai „difuză” este pata pe care o obținem pe ecran. Acest lucru este în contradicție cu ideea de propagare a luminii în linie dreaptă, deoarece unicul lucru pe care-l așteptăm atunci cînd micșorăm orificiul este o micșorare a petei de lumină în mod proporțional. Surprinzător este faptul că de la o limită de micșorare în jos, pata de lumină nu numai că nu scade ci din nou începe să crească ca dimensiune, marginile ei nefiind însă bine delimitate.

Acest fenomen a fost observat încă de către Leonardo da Vinci, însă primul care l-a studiat sistematic a fost F. M. Grimaldi (1640) care a denumit fenomenul *difracție*. Difracția nu a putut fi explicată mult timp. În 1690 C. Huygens a reușit să explice acest fenomen cu ajutorul principiului introdus:

*Orice front de undă, poate fi considerat la un moment dat ca o sursă de unde sferice secundare, cu același  $v$  și  $\lambda$  ca și unda incidentă, emise de fiecare punct al frontului. Undele secundare sînt toate în fază. Frontul de undă la un moment ulterior este dat de înfășurătoarea tuturor undelor secundare.*

*Observație.* După cum știți acest principiu a fost utilizat și la construirea frontului de undă pentru undele de suprafață studiate (Fizica cl. XI § 3.4., ediția 1978).

În figura 3.5 se vede modul de construire a frontului de undă pentru o undă plană.

Dacă mediul este izotrop și omogen, forma suprafeței de undă se păstrează, se reproduce. La trecerea dintr-un mediu în altul, viteza de propagare a undei se schimbă și deci frontul de undă se va deforma. Obținem în acest

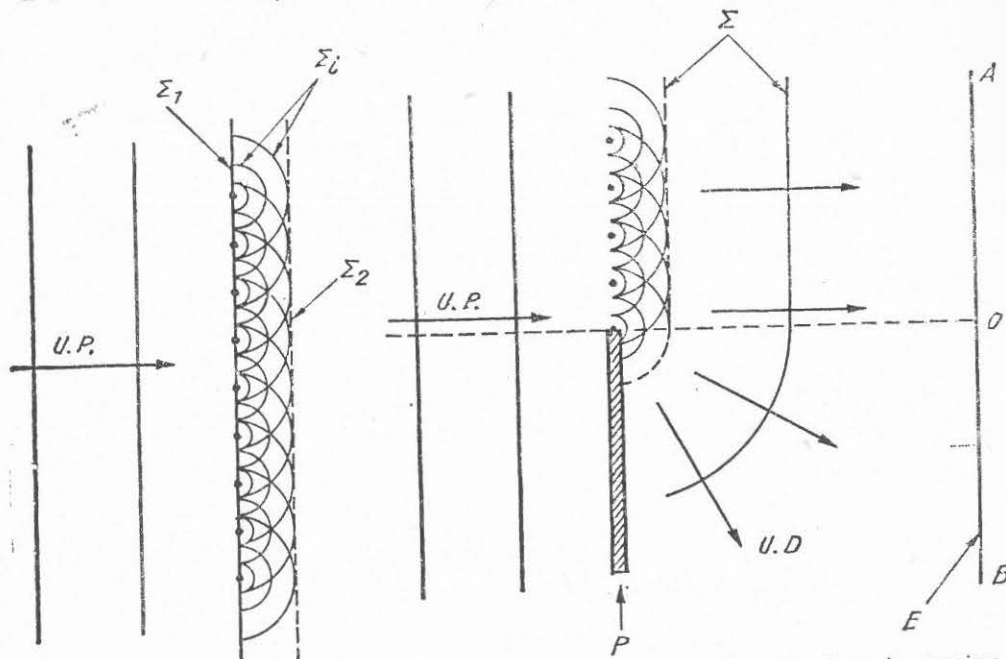


Fig. 3.5. Propagarea rectilinie în construcția lui Huygens.  $U.P.$  — undă plană;  $\Sigma_1$  — frontul undei incidente;  $\Sigma_2$  — noul front de undă;  $\Sigma_t$  — unde sferice elementare.

fel posibilitatea de a explica ondulator fenomenele de reflexie și refracție pentru undele electromagnetice, așa cum le cunoaștem de la undele elastice.

Tot aici avem un argument esențial privind propagarea luminii în linie dreaptă: raza de lumină este un concept definit ca direcție de propagare a frontului de undă și a suprafețelor de undă. Pentru undele plane, suprafețele de undă sînt plane paralele și deci raza de lumină va descrie o linie dreaptă, perpendiculară pe toate suprafețele de undă.

Putem deforma frontul de undă și deci abate propagarea luminii de la o linie dreaptă deformînd frontul undelor secundare, de exemplu cu ajutorul unui paravan (fig. 3.6).

Introducerea paravanului împiedică formarea undelor sferice secundare și astfel se deformează frontul de undă după cum se vede în figură. Un ecran pus în spatele acestui paravan va fi luminat în porțiunea  $OA$  dar va fi luminat și în regiunea  $OB$ , regiune de umbră „geometrică”. Iluminarea în regiunea

Fig. 3.6. Deformarea frontului undei plane în preajma unui obstacol  $P$ ;  $U.P.$  — undă plană incidentă;  $U.D.$  — undă difractată;  $\Sigma$  — noua suprafață de undă;  $E$  — ecran;  $OA$  — zona de lumină;  $OB$  — zona de umbră geometrică.

de umbră este slabă și devine nesemnificativă la o distanță ceva mai mare de punctul de separație  $O$ . Dar importantă este existența ei în zona interzisă de către teoria geometrică a umbrei. Această comportare este cea care împiedică observarea experimentală a propagării în linie dreaptă cu ajutorul paravanelor cu orificii. Vom vedea mai târziu cum depinde iluminarea zonei de umbră, de paravan sau de orificiul pe care-l facem în paravan.

Fenomenul de pătrundere a luminii în spatele obstacolelor sau abaterea de la propagarea rectilinie a luminii se numește **difracție**.

Se spune uneori că este o ocolire aparentă, deoarece apare ca o abatere de la o comportare pe care o presupunem a fi cea corectă. În realitate situația este inversă, în sensul că propagarea în linie dreaptă este o aproximație. Lumina (și orice undă electromagnetică în general) are un caracter ondulator și deci fenomenul de difracție apare ca fenomen normal, propagarea în linie dreaptă fiind un caz particular de propagare.

Putem trage de aici o concluzie deosebit de importantă și anume că înțelegerea corectă a fenomenelor presupune de multe ori depășirea impresiilor și observațiilor directe, care pot fi încadrate în termenul de „experiență omenească” sau „bun simț experimental”.

Realitatea este ceva mai complexă decît pare la prima vedere. Putem spune astfel că, conceptul de rază de lumină este utilizabil în mod aproximativ, doar într-un model simplificator pentru descrierea fenomenelor de propagare a ei, la fel cum conceptul de punct material este utilizabil în mecanică ca un model de primă aproximație. Așa cum în realitate nu există punct material, nu există nici rază de lumină.

Un experiment convingător în acest sens este cel pentru observarea umbrei produse de un disc (fig. 3.7). Dacă un disc este iluminat cu lumină provenită de la o sursă foarte îndepărtată (pentru a avea unde plane) în mijlocul umbrei apare o zonă luminoasă! Ocolirea este astfel evidentă.

**3.2.4. Interferența.** Să trecem acum mai departe și să încercăm să descriem mai precis modul în care pătrunde lumina în zona umbrei geometrice. Pentru aceasta să complicăm puțin experimentul din figura 3.6, astfel încît să lucrăm cu cît mai puține unde secundare. Pentru aceasta alegem un paravan

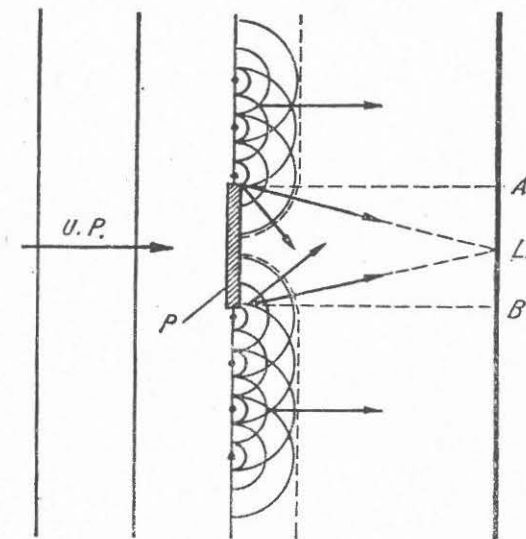


Fig. 3.7. Difracția undelor în spatele unui paravan  $P$ . Pe ecran apare o zonă luminoasă ( $L$ ) în regiunea de umbră geometrică  $AB$ .



cu două orificii foarte înguste; idealizând, le putem considera punctiforme (fig. 3.8). Unda incidentă o presupunem monocromatică.

Utilizând principiul lui Huygens, putem construi undele secundare produse în spatele paravanului, unde ce provin din punctele  $O_1$  și  $O_2$ . Aceste

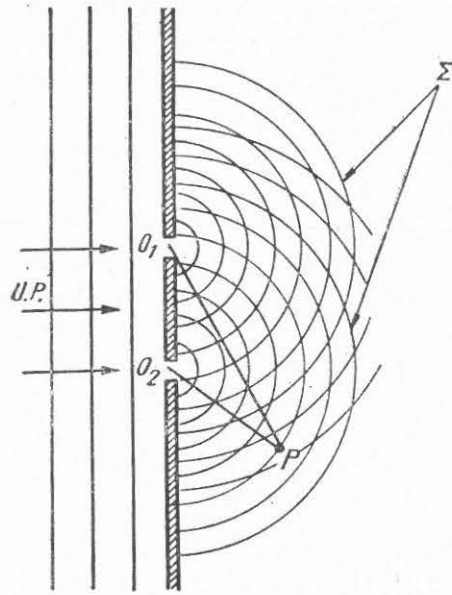


Fig. 3.8. Suprapunerea a două unde ce provin de la două fante  $O_1$  și  $O_2$ .  $\Sigma$  — suprafețe de undă elementare.

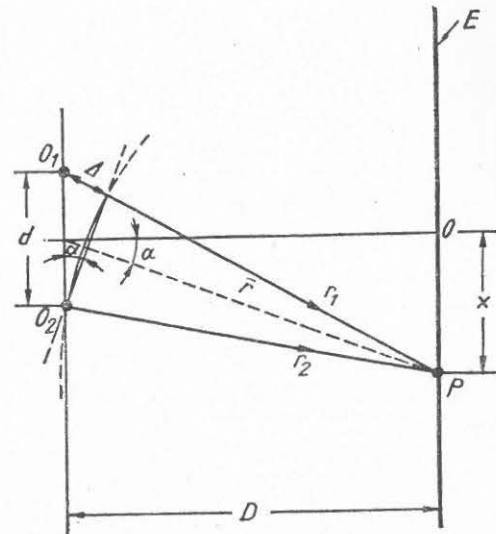


Fig. 3.9. Interferența produsă pe ecranul  $E$  prin suprapunerea radiațiilor ce provin de la două surse  $O_1$  și  $O_2$ .

unde vor fi sferice. Într-un punct oarecare  $P$ , din spatele paravanului, se vor întâlni undele care provin din ambele izvoare ( $O_1$  și  $O_2$ ).

Pentru a înțelege ce se petrece, ne vom referi la câmpurile lor electrice (fig. 3.9). În  $P$ , câmpul electric va fi rezultatul însumării câmpurilor electrice ce provin din  $O_1$  și din  $O_2$ . Putem însuma cele două câmpuri direct, deoarece câmpurile electrice satisfac principiul suprapunerii: intensitatea câmpului într-un punct se află prin însumarea vectorială a câmpurilor produse de fiecare sursă de câmp ca și cum celelalte surse nu ar exista. Alegând cazul particular în care undele se propagă pe aceeași direcție iar vectorii electrici oscilează în același plan, vom putea scrie:

$$E_p = E_{01} \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + E_{02} \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \quad (3.5)$$

în care am notat  $r_1 = \overline{O_1 P}$  și  $r_2 = \overline{O_2 P}$ .

Pentru simplificarea calculului vom considera  $E_{01} = E_{02}$  (aceasta nu modifică esența concluziilor generale la care ajungem). În acest caz folosind transformarea:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

obținem:

$$\begin{aligned} \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) &= 2 \sin \frac{1}{2} \left[ \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right] \cdot \cos \frac{1}{2} \left[ \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) - \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right] = \\ &= 2 \sin \omega \left( t - \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \frac{1}{c} \right) \cdot \cos \omega \left( \frac{r_2 - r_1}{2} \cdot \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

Vom nota  $\frac{r_1 + r_2}{2} = \bar{r}$  — distanța medie de la sursele  $O_1$  și  $O_2$  la  $P$  și  $r_2 - r_1 = \Delta$  — diferența drumurilor străbătute de undele din  $O_1$  și  $O_2$  pentru a ajunge în  $P$ . În acest fel unda rezultantă în  $P$ , va fi exprimată prin intensitatea câmpului electric însumat:

$$E_p = 2 E_0 \underbrace{\cos \omega \left( \frac{\Delta}{2c} \right)}_{\text{amplitudinea}} \cdot \underbrace{\sin \omega \left( t - \frac{\bar{r}}{c} \right)}_{\text{faza}} = A \cdot \sin \omega \left( t - \frac{\bar{r}}{c} \right). \quad (3.6)$$

Utilizând relația (3.4) putem scrie că:

$$\Phi_P \sim E_p^2 = 4 E_0^2 \cos^2 \omega \left( \frac{\Delta}{2c} \right) \cdot \sin^2 \omega \left( t - \frac{\bar{r}}{c} \right) = 4 \Phi_0 \sin^2 \left( \omega t - \frac{\bar{r}}{c} \right) \quad (3.7)$$

unde  $\Phi_P$  este fluxul energetic în  $P$ , și în care am notat:

$$\Phi_0 = E_0^2 \cos^2 \omega \frac{\Delta}{2c}. \quad (3.8)$$

Să analizăm mai îndeaproape relațiile obținute. În relația (3.6) am inclus cosinusul în amplitudine deoarece este un termen independent de timp. Forma relației (3.6) este astfel cea obișnuită pentru o undă electromagnetică în  $P$ , undă ce a plecat din punctul situat la mijlocul distanței  $O_1 O_2$ . Deoarece în  $\Phi_0$  (3.8) intervine  $\Delta$  — diferența de drum între undele plecate din două puncte diferite, rezultă că vom obține diverse valori ale lui  $\Phi_0$  în funcție de valoarea lui  $\Delta$ . Analizând condițiile în care  $\cos^2 \left( \omega \frac{\Delta}{2c} \right)$  ia valorile maxime respectiv minime, și ținând cont că  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  obținem:

$$\text{maxim} \quad 1 = \cos^2 \left( \omega \frac{\Delta}{2c} \right) \longrightarrow \pi \frac{\Delta}{\lambda} = m\pi \quad \text{sau} \quad \Delta = m\lambda \quad (3.9)$$

$$\text{minim} \quad 0 = \cos^2 \left( \omega \frac{\Delta}{2c} \right) \longrightarrow \pi \frac{\Delta}{\lambda} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad \Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (3.10)$$

unde  $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Condițiile de maxim și de minim pot fi exprimate fie în funcție de diferența de fază dintre unde,  $(\Delta\phi)$ , fie în funcție de intervalul de timp dintre momentele de emisie  $(\Delta t)$ . Pentru a obține aceste relații să observăm că o

diferență de drum egală cu  $\lambda$  corespunde unei diferențe de fază de  $2\pi$ . În acest caz relația între diferența de fază și diferența de drum va fi

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{\Delta}{v} \cdot v = \omega \cdot \frac{\Delta}{v} = \omega \cdot \frac{\Delta n}{c},$$

unde  $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}$  și  $v = \frac{c}{n}$ . Vom obține pentru condițiile de maxim și de minim:

$$(\Delta\varphi)_M = m \cdot 2\pi \text{ și } (\Delta\varphi)_m = (2m + 1)\pi.$$

Diferența de timp corespunzătoare diferenței de fază va fi

$$\Delta t = \frac{\Delta}{v} = \frac{\Delta \cdot n}{c} \text{ și deci } \Delta\varphi = \omega \Delta t.$$

În punctele în care este îndeplinită condiția (3.9), fluxul va fi:

$$\Phi_M \sim 4E_0^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (3.11)$$

iar în punctele în care este îndeplinită condiția (3.10), fluxul va fi

$$\Phi_m = 0.$$

Deoarece senzația luminoasă, pentru un  $\lambda$  dat este proporțională cu fluxul energetic, condițiile de maxim respectiv de minim vor exprima de asemenea condițiile de maxim și de minim de iluminare.

Există astfel puncte în spațiul din spatele paravanului în care intensitatea luminoasă rămâne încontinuu zero, și altele în care poate atinge valori maxime. Făcînd acest experiment ne putem convinge că zonele de maxim alternează cu zone de minim de iluminare\*. Această structură se numește *figură de interferență*, liniile de egală intensitate luminoasă se numesc *franje de interferență*, iar fenomenul de suprapunere a undelor cu formare de maxime și minime de iluminare se numește *interferență*. Cînd suprapunerea undelor conduce la un maxim spunem că avem de a face cu interferență *constructivă*, iar în caz contrar *destructivă*.

**Probleme rezolvate. 1.** Să se analizeze structura figurii de interferență pentru un experiment de interferență de tipul celui discutat anterior, așa cum apare ea pe un ecran dispus la distanța  $D$  de paravanul cu orificii. Geometria experimentului cît și notațiile sînt cele corespunzătoare figurii 3.9.

*Rezolvare.*

Să găsim pentru început pozițiile minimelor de interferență (condiția (3.10)). Pentru aceasta trebuie să găsim diferența de drum ( $\Delta$ ) pînă la un punct  $P$  de pe ecran, exprimată în raport cu parametrii experimentului:  $d$ ,  $\alpha$ ,  $D$ ,  $x$ .... Observăm că dacă  $d \ll D$  și dacă  $x$  nu este prea mare ( $\alpha$  — mic) atunci:

$$\frac{\Delta}{d} \cong \sin \alpha \text{ și } \frac{x}{D} = \tan \alpha \cong \sin \alpha,$$

deci

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{x}{D}. \quad (3.12)$$

\* Vezi experimental §.1.

Punînd condiția ca  $\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$  obținem succesiunea punctelor de minim:

$$x_m = \frac{D}{d} (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3.13)$$

Pentru primele valori ale lui  $m$ : 0, 1, 2, 3, obținem

$$x_m: \frac{\lambda D}{2d}; \frac{3\lambda D}{2d}; \frac{5\lambda D}{2d}; \frac{7\lambda D}{2d}.$$

Distanța între două minime se numește *interfranje* și va avea valoarea:

$$\Delta x_m = \lambda \frac{D}{d}. \quad (3.14)$$

De exemplu, pentru o serie de valori ușor de realizat,  $D = 200$  cm,  $d = 0,1$  cm și  $\lambda = 590$  nm (linia galbenă a sodiului) se obține:

$$\Delta x_m = (590 \cdot 10^{-9}) \cdot \frac{200}{0,1} \cong 1,2 \text{ mm}.$$

Observăm în primul rînd că franjele de interferență sînt extrem de apropiate și din acest motiv ele se observă greu. În al doilea rînd, observăm că pozițiile minimelor de interferență sînt determinate printre altele și de lungimea de undă și anume sînt proporționale cu ea. Ca urmare a acestui fapt, observarea interferenței în lumină nemonocromatică conduce la amestecarea maximelor și minimelor pentru diverse  $\lambda$ , rezultatul fiind un amestec de culori și tente de cenușiu care în general nu ne spune prea mult. Doar dacă  $d$  este suficient de mic, maximele diverselor unde cu  $\lambda$  diferit nu se suprapun ci se ordonează în ordine crescătoare cu  $x$ . În felul acesta se poate obține un *spectru* al radiației care a căzut pe cele două fante. Vom discuta această problemă mai tîrziu.

Să revenim la problema interferenței și să analizăm intensitatea radiației în pozițiile de maxim; o vom formula sub forma unei probleme.

2. Să se discute maximele de interferență care apar în problema cu cele două fante, descrise prin relația (3.11) în condițiile problemei anterioare (fig. 3.9).

*Rezolvare.*

Problema are două etape: prima se referă la o discuție a relației (3.11) în sensul analizei părții dependente de timp din relație, urmînd apoi etapa aplicării ei pentru cazul concret din figura 3.9.

Termenul dependent de timp din (3.11) arată că fluxul de lumină ar trebui să varieze în timp. Experimental, nu vedem în figura de interferență nici o variație în timp, deci relația (3.11) nu ar trebui să fie dependentă de timp! Explicația constă în aceea că variația în timp este extrem de rapidă ( $\omega = 2\pi\nu$  are o valoare foarte mare  $\nu \sim 10^{15}$  Hz) și în consecință ochiul nu sesizează această variație. Ochiul sesizează doar media în timp a acestei variații. Media în timp a maximumului o vom putea aprecia folosind relația trigonometrică:

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_M \sim 4E_0^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) &= 4E_0^2 \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos 2\omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ &= 2E_0^2 - 2E_0^2 \cos 2\omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

Ținînd cont de faptul că cosinusul variază periodic în timp între valorile +1 și -1, media termenului în cosinus va fi nulă. Termenul  $2E_0^2$  fiind o constantă, media generală va fi:

$$\Phi_M \sim 2E_0^2 = \text{constant}. \quad (3.15)$$



Observăm că în urma interferenței, energia transportată de unda incidentă este *redistribuită*, partea din energia care lipsește din minime se regăsește în maximele de interferență.

Putem merge mai departe. Să determinăm pozițiile maximelor; utilizând același mod de calcul ca în problema anterioară obținem:

$$x_M = \frac{D}{d} m \lambda. \quad (3.16)$$

Vedem astfel că maximele și minimele alternează la distanțe egale între ele (pentru  $\alpha$  nu prea mare).

Este de asemenea interesant de remarcat că în centrul ecranului se obține un maxim. Numărul  $m$  exprimă *ordinul* franjei de interferență.

**3.2.5. Obținerea experimentală a fenomenului de interferență.** Pentru realizarea experimentului de interferență procedăm ca în figura 3.10. Acest aranjament a fost realizat de către Young și de aceea îi poartă numele. Dificultatea principală în acest experiment este slaba iluminare ce se obține pe ecran din cauza celor două paravane utilizate (cu unul, respectiv două orificii).

Privind schema experimentului lui Young, și figura 3.9, sîntem conduși la ideea că în fond putem înlocui sistemul de paravane cu un sistem format de două surse ( $S_1$  și  $S_2$ ) puse în pozițiile  $O_1$  și  $O_2$ . În acest sistem este evident că iluminarea ecranului ar fi mult mai bună și fenomenul ar trebui să se observe mult mai ușor și mai bine. Mergînd mai departe cu raționamentul ne putem gândi să încercăm să obținem fenomenul cu două lămpi obișnuite! Aici ajungem la un punct în care concluzia raționamentului este în contradicție cu experiența zilnică: folosind două sau mai multe becuri un ecran este totdeauna

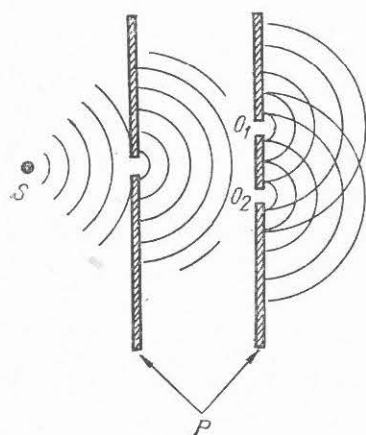


Fig. 3.10. Schema experimentului lui Young.

mai bine luminat decât în cazul unuia singur! Nici urmă de fenomen de interferență pe ecran! Înlocuirea fantelor cu două surse independente distruge imaginea de interferență. Rezultă că interferența nu este chiar atât de ușor de obținut și că la producerea fenomenului mai contribuie un factor care pînă acum nu a fost luat în considerație. Deosebirea existentă între cele două experimente este aceea că în cazul Young s-a utilizat o singură sursă care ilumina cele două fante, pe cînd în experimentul propus cu

mai bine luminat decât în cazul unuia singur! Nici urmă de fenomen de interferență pe ecran! Înlocuirea fantelor cu două surse independente distruge imaginea de interferență. Rezultă că interferența nu este chiar atât de ușor de obținut și că la producerea fenomenului mai contribuie un factor care pînă acum nu a fost luat în considerație. Deosebirea existentă între cele două experimente este aceea că în cazul Young s-a utilizat o singură sursă care ilumina cele două fante, pe cînd în experimentul propus cu

în timp. Cu alte cuvinte în relația (3.5) de însumare a celor două unde trebuie să ținem cont și de fazele inițiale ale undelor:

$$E_P = E_{01} \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + E_{02} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) + \varphi \right]$$

unde  $\varphi$  este diferența de fază inițială. Pentru simplificare alegem  $E_{01} = E_{02} = E_0$  și efectuînd aceleași calcule obținem:

$$E_P = 2E_0 \sin \frac{1}{2} \left[ \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) + \varphi \right] \cdot \cos \frac{1}{2} \left[ \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) - \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) - \varphi \right] = 2E_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r_1 + r_2}{2c} \right) + \frac{\varphi}{2} \right] \cdot \cos \left[ \omega \frac{r_2 - r_1}{2c} - \frac{\varphi}{2} \right].$$

Iluminarea va fi proporțională cu pătratul amplitudinii:

$$4E_0^2 \cos^2 \left[ \omega \frac{r_2 - r_1}{2c} - \frac{\varphi}{2} \right] = 4E_0^2 \cos^2 \left[ \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} - \frac{\varphi}{2} \right].$$

Condiția de maxim va cere ca:

$$\left[ \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} - \frac{\varphi}{2} \right] = m\pi.$$

Aici  $\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \Psi$  este diferența de fază introdusă de diferența de drum  $\Delta = r_2 - r_1$ .

Deci, starea de iluminare într-un punct de pe ecran va fi determinată de  $\Delta$  și de  $\varphi$ . Dacă  $\Delta$  și  $\varphi$  nu variază în timp, figura de interferență va fi staționară.  $\Delta$  este bine determinat pentru un punct de pe ecran, deci staționaritatea figurii de difracție este determinată de constanța în timp a diferenței de fază  $\varphi$ . Radiațiile care au o diferență de fază  $\varphi$  constantă în timp se numesc *coerente*.

Deoarece emisia de radiație a atomilor (sau moleculelor) durează foarte puțin ( $\sim 10^{-8}$  s), putem considera vibrațiile ca fiind emise în fază doar pe acest interval de timp. Grupul de unde emise în acest interval de timp va avea o extindere spațială de:

$$\Delta r = c \Delta t \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3 \text{ m},$$

distanță care exprimă *lungimea de coerență*.

Dacă încercăm să obținem interferența cu unde a căror diferență de drum crește treptat pînă la cîțiva metri, vedem cum treptat figura de interferență se șterge, fiind înlocuită de o iluminare continuă. Avem rezultatul exprimat prin lungimea de coerență: diferența de drum foarte mare a condus la suprapunerea undelor care nu mai fac parte din același grup de unde și deci sînt necoerente; figura de interferență se schimbă foarte rapid, încît în medie observăm o iluminare continuă. Pe de altă parte, o sursă de lumină reprezintă o colecție mare de centre de unde care acționează independent. Cum nu putem realiza o sursă de lumină punctiformă, undele emise de diversele

centre, cu toate că au aceeași frecvență, vor avea constante de fază diferite și deci figura de interferență se șterge.

Din această cauză, o sursă cu cât este mai punctiformă cu atât va emite radiații mai coerente. Utilizarea orificiilor punctiforme în experimentul lui Young permite astfel obținerea unor radiații cu un grad destul de mare de coerență.

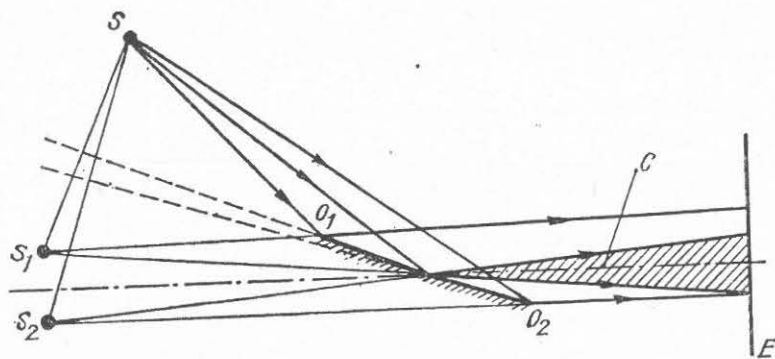


Fig. 3.11. Schema dispozitivului experimental Fresnel.  $O_1$  și  $O_2$  — oglinzi,  $S$  — sursă punctiformă,  $S_1$  și  $S_2$  — surse virtuale;  $E$  — ecran;  $C$  — câmp de interferență.

Spre deosebire de cazul luminii, în acustică sau în radiotehnică sursele sînt practic coerente și de aceea fenomenele de interferență pot fi mai ușor observate sau utilizate.

În concluzie, pentru a obține o figură de interferență observabilă trebuie ca radiațiile:

- să aibă aceeași frecvență;
- să fie coerente.

Pentru a fi coerente va fi necesar ca:

- radiațiile să provină din același punct al sursei;
- diferența de drum introdusă între ele să fie mică în comparație cu lungimea de coerență.

Metoda de a separa două fascicule dintr-o sursă și a le suprapune ulterior este metoda cea mai des folosită pentru a obține interferență. Un dispozitiv folosit în acest scop este și dispozitivul denumit oglinzile lui Fresnel (fig. 3.11). Aici o sursă reală trimite radiații pe două oglinzi care sînt cu puțin înclinate una față de cealaltă. Radiațiile reflectate de cele două oglinzi se vor suprapune ulterior, astfel încît se va forma un câmp de interferență. Urmărind prelungirea razelor reflectate pe oglinzi, observăm că interferența pare a fi produsă de cele două surse virtuale.

**3.2.6. Relația între fenomenele de difracție și cele de interferență.** Ne putem întoarce acum să discutăm structura câmpului luminos din spatele

fantei sau orificiului din experimentul de difracție (fig. 3.12). Dacă orificiul nu este infinit de mic, atunci radiațiile care provin de la diversele porțiuni ale orificiului vor fi difractate și apoi vor interfera. Interferența radiațiilor difractate face ca în spatele orificiului să nu apară un câmp cu o luminositate treptat mai slabă pe măsura îndepărtării de axa optică, ci un câmp cu o luminositate oscilantă (cu maxime și minime). Putem determina această structură dacă luăm în considerație geometria figurii 3.12. Pentru a face calculul concret trebuie să precizăm și fazele undelor ce provin din diversele zone ale fantei.

În acest scop se face o ipoteză care completează principiul lui Huygens și anume că toate undele secundare (sferice) ce se emit de pe frontul (sau suprafața) de undă sînt în fază, deci sînt coerente. Această completare a fost făcută de către Fresnel din care cauză principiul se mai numește Huygens — Fresnel. Pentru radiațiile care ajung într-un punct oarecare  $P$ , maximul de diferență de drum este dat de razele ce pornesc de la extremitățile diametrului orificiului. Folosind condițiile de producere a maximelor și minimelor (3.9 și 3.10), putem calcula structura figurii de interferență produsă de o fantă suficient de largă.

Fenomenul de difracție care apare la interpunerea unui paravan în calea undelor este arătat în figura 3.13. Paravanul se află la distanța  $a$  de sursa  $S$  și la distanța  $b$  de un ecran de observație. Structura câmpului luminos pe ecran este dată în figura 3.13, b. Se vede că în zona de umbră geometrică ( $x < 0$ ) iluminarea scade treptat dar este diferită de zero. În zona de lumină geometrică ( $x > 0$ ), iluminarea nu crește brusc la valoarea prevăzută de optica geometrică ( $\sim \Phi_0$ ) ci crește treptat, pînă atinge un maxim ( $\Phi > \Phi_0$ ), apoi are o comportare oscilantă, amplitudinea scade treptat către o valoare constantă pe măsură ce  $x$  crește. În figură sînt date pozițiile de maxim în funcție de parametrul adimensional  $\xi$ :

$$\xi = x \cdot \sqrt{\frac{2a}{b(a+b)\lambda}} = : 1,22; 2,34; 3,08; 3,67; 4,18; 4,66; \dots \quad (3.17)$$

Aceste poziții au fost calculate conform unei teorii complete a fenomenelor de difracție și interferență a undelor electromagnetice. Să vedem de ce cunoștințele pe care le avem pînă acum nu ne permit să obținem în acest caz structura figurii de difracție. Sursele secundare în fază (coerente) pe care trebuie

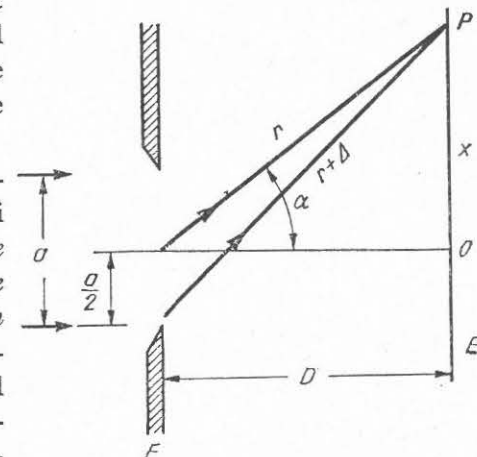


Fig. 3.12. Difracția în spatele unei fante  $F$ . Câmpul de interferență este studiat pe ecranul  $E$ .



să le luăm în considerație sînt cele ce se află pe sfera (C) cu centrul în S și raza  $\overline{SM}$  (fig. 3.13,a). Astfel, punctele M, N, O, ... sînt tot atîtea centre de emisie a unor unde coerente. Maximele succesive se obțin în P, P', ... iar minimele în Q, Q', ... Spre deosebire de cazurile anterioare aici putem

observa cîteva aspecte deosebite.

În primul rînd în punctul  $x = 0$ , nu avem un maxim cum ar fi fost de așteptat.

În al doilea rînd minimele nu corespund unei iluminări nule.

În al treilea rînd interfranja scade pe măsură ce crește ordinul de interferență.

Toate aceste aspecte caracteristice sînt determinate de suprapunerea (într-un punct al ecranului) undelor care provin de la diferitele puncte de pe sfera C. Cum ele interferă succesiv, constructiv și distructiv, maximul principal va fi deplasat de la  $x = 0$  deoarece în acel punct o parte din undele care ar fi interferat constructiv sînt

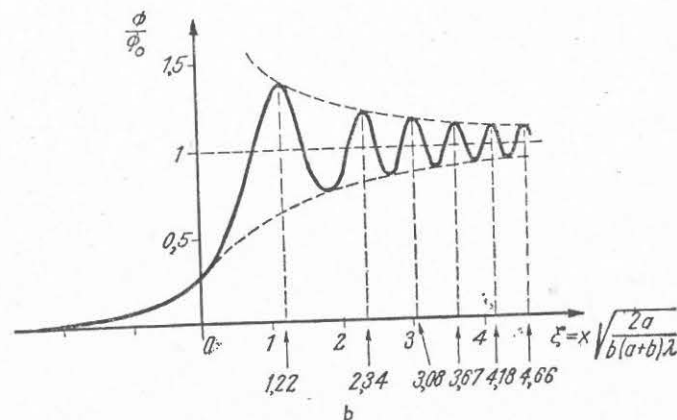


Fig. 3.13. Difrakția în spatele unui paravan P.

obturate de către paravanul din M. Minimele nu sînt nule deoarece în punctele respective ajung și unde ce se compun constructiv, dar cu amplitudine mai mică. Deoarece de fiecare dată trebuie să ținem cont de toate undele provenite de pe sfera C, descrierea cantitativă a iluminării în spatele paravanului este mai dificil de obținut. Folosind însă rezultatele obținute prin calcul și exprimate prin parametrul dat în figura 3.13,b, putem aprecia cantitativ figura de interferență.

Ajungem astfel la concluzia că fenomenul de difrakție, determinînd suprapunerea undelor provenite de la diverse puncte va fi însoțit aproape întotdeauna de o figură de interferență.

Să revenim la problema determinării liniei drepte cu ajutorul unui fascicul de lumină delimitat de paravane cu fante. După ieșirea dintr-o fantă, fasciculul va fi divergent, din cauza difracției. Știm că radiațiile provenite de la marginile opuse ale unei fante interferă. Dacă diametrul fantei este  $d$ , iar unghiul corespunzător maximului de ordinul întâi este  $\alpha$ , atunci putem scrie, conform relațiilor (3.12) și (3.16):

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{d} = \frac{\lambda}{d}. \quad (3.18)$$

Deci, un fascicul perfect paralel pînă la o fantă, va deveni divergent, unghiul de divergență fiind  $\alpha \approx \frac{\lambda}{d}$ . Doar dacă  $\lambda \rightarrow 0$ , nu va exista o lărgire apreciabilă

a fasciculului. În acest caz putem vorbi de „raza de lumină” ca o linie geometrică. Astfel, putem descrie fenomenele de propagare cu ajutorul opticii geometrice doar în cazurile în care  $d \gg \lambda$ .

**Problemă rezolvată.** Într-un experiment de ocultație \* a unei stele de către Lună, s-a observat o variație a luminozității stelei de forma dată în figura 3.14. Să se determine: a) dacă înregistrarea a fost făcută în momentele acoperirii stelei de către Lună sau în cel al ieșirii ei din eclipsă; b) momentul pe care îl putem considera ca început (sau) sfîrșit al ocultației, în aproximația opticii geometrice și c) lungimea de undă a radiației utilizate.

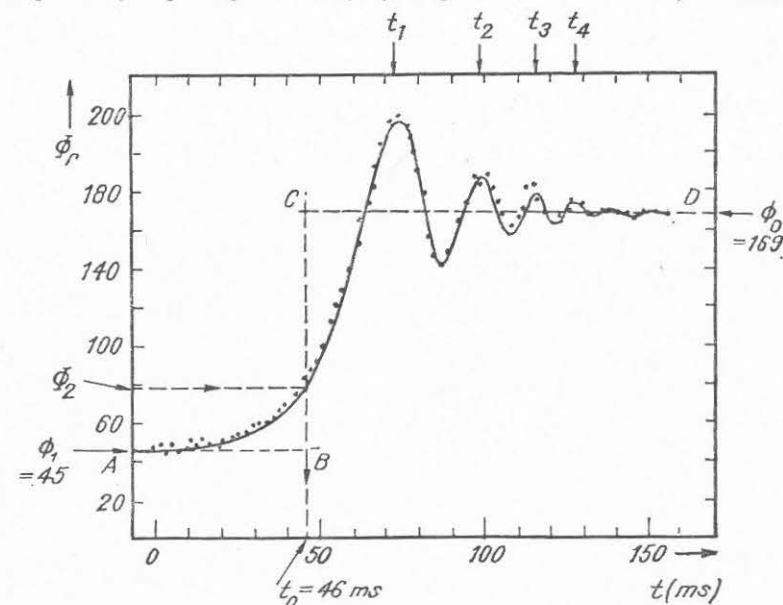


Fig. 3.14. Variația luminozității unei stele în timpul ocultației.

**Rezolvare.**

Pentru a descrie fenomenul ne vom referi la figurile 3.13 a și b. Vom considera că observatorul de pe Pămînt se află în punctul O, iar paravanul M simbolizează Luna. Într-un experiment obișnuit de difrakție pe un paravan, deplasînd pe axa Ox un detector, se vor pune în

\* Ocultație: eclipsare temporară, pentru un observator de pe Pămînt, a unui astru de către un altul datorită mișcării lor relative.

evidență maxime și minime succesive:  $P, Q, P', Q'$ . În experimentul de față, paravanul (Luna) se mișcă cu viteza relativă  $\vec{v}$ , perpendicular pe direcția stea-observator. În acest caz pozițiile de maxim și minim vor defila prin fața observatorului. Pentru a ține cont de această mișcare relativă vom trece de la variabila  $x$  la variabila  $t$  legată de mișcarea paravanului. Din asemănarea triunghiurilor  $SMN$  și  $SOP$  obținem

$$\frac{MN}{a} = \frac{OP}{a+b} \quad \text{sau} \quad \frac{vt}{a} = \frac{x}{a+b}.$$

Înlocuind în parametrul  $\xi$  valoarea lui  $x$  de mai sus:

$$\xi = v \frac{a+b}{a} t \sqrt{\frac{2a}{b(a+b)\lambda}} = vt \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}} \approx v \sqrt{\frac{2}{b\lambda}} t.$$

Ultima egalitate aproximativă s-a obținut observând că  $a \gg b$ . Cunoscând constantele  $v$ ,  $a$  și  $\lambda$  putem găsi momentul de maxim, pornind de la valorile lui  $\xi$  date în (3.17) și de la relația dedusă anterior. Pentru rezolvarea problemei avem nevoie de valorile lui  $v$  și  $a$  (distanța Pământ-Lună):  $v = 450$  m/s și  $a = 384\,400$  km. Calculele ne conduc la:

$$\xi = 3,24 \cdot 10^{-2} \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \text{ (s} \cdot \text{m}^{-1/2}\text{)}.$$

Să răspundem acum la întrebările problemei.

a) Din succesiunea umbră-lumină (fig. 3.14) tragem concluzia că se observă sfârșitul ocultăției (ieșirea din eclipsă).

b) Din figura 3.13, b observăm că raportul dintre fluxul în poziția  $x = 0$  (începutul umbrei geometrice) și  $x \rightarrow \infty$  (lumină) este 0,25. Deci, putem determina valoarea  $t_0$  corespunzătoare acestui moment dacă determinăm fluxurile în zona de umbră geometrică ( $\Phi_1$ ) și în cea de lumină ( $\Phi_0$ ) și luăm momentul corespunzător creșterii lui  $\Phi_1$  egal cu  $\frac{1}{4}(\Phi_0 - \Phi_1)$ . Din grafic:

$$\Phi_1 = 45, \quad \Phi_0 = 169; \quad \frac{1}{4}(\Phi_0 - \Phi_1) = 31. \quad \text{Deci } \Phi_2 = \Phi_1 + \frac{1}{4}(\Phi_0 - \Phi_1) = 45 + 31 = 76. \text{ Această}$$

valoare a intensității relative se atinge la momentul  $t_0 = 46$  s. S-au desenat pe grafic segmentele  $AB, BC, CD$  care ar corespunde modului în care ar decurge variația de flux luminos la ieșirea din eclipsă, dacă fenomenul ar avea loc conform opticii geometrice.

c) Determinăm din figură momentele de maxim  $t_1, t_2, t_3, t_4$  și alcătuim un tabel de date. Pentru determinarea lui  $\lambda$  utilizăm parametrul  $\xi$ :

$$\lambda = \left( 3,24 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{t - t_0}{\xi} \right)^2$$

Pentru valoarea medie a raportului  $\frac{t - t_0}{\xi}$  obținem:

$$\lambda = 516,2 \text{ nm.}$$

Această radiație fiind radiația cea mai intensă din întregul spectru al steii, steaua are o culoare albastruie. Din această informație putem în continuare determina și temperatura superficială a steii (Fizica cl. a XI-a, cap. 13).

**3.2.7. Interferența și difracția în natură.** În natură, fenomenele de difracție și de interferență pot fi observate în multe cazuri. Vom trece în revistă astfel de cazuri fără a le explica în amănunțime, deoarece unele din ele vor fi discutate mai târziu pe cazuri particulare ceva mai simple.

Astfel, în serile reci de iarnă, dacă privim prin geamurile acoperite de figuri de gheață, ale tramvaielor sau autobuzelor, către felinarele de pe stradă putem vedea jocuri de culori. Nuanțele de albastru, roșu sau verde observate prin transmisie sînt deosebit de frumoase și de pure. Culorile pot fi observate numai atunci cînd stratul de gheață depus prin înghețarea vaporilor de apă (din respirație) pe geamul rece îndeplinește anumite condiții. În cazul în care stratul de gheață depus nu este continuu ci este format încă din mici zone locurile libere, transparente, acționează ca mici fante prin care lumina albă se difractă și interferează dînd acele jocuri de culori.

Un alt caz de difracție este acela al aureolei ce înconjură silueta unui om (sau obiect) cînd acesta se interpune în calea unei surse punctiforme, puternice, de lumină. O astfel de sursă o reprezintă farurile unei mașini în depărtare, noaptea. Efectul este mai bine evidențiat dacă obstacolul este la rîndul lui destul de departe de noi.

Privind petele de ulei de pe suprafața unor ochiuri de apă, vedem că ele apar colorate. Asemănător apar colorate și peliculele subțiri ale baloanelor sau filmelor de săpun. Ele sînt rezultatul interferenței radiației luminoase pe cele două fețe ale peliculei, din care cauză fenomenul poartă numele de „culorile păturilor (sau peliculelor) subțiri”. Toate aceste fenomene pot fi ușor studiate experimental.

**Experiment 3.1.** Pentru a experimenta fenomenul de difracție prin orificii mici procedăm astfel: ne procurăm două bucăți de hîrtie metalizată (utilizată la învelirea batoanelor de ciocolată). Efectuăm cite o fantă mică în fiecare din aceste bucăți de hîrtie. Fanta trebuie făcută cu un ac foarte fin, rotindu-l între degete, hîrtia fiind așezată pe un suport tare care să nu permită pătrunderea prea adîncă a acului (orificiul să fie mai mic de 0,5 mm în diametru). Folosind ca sursă Soarele sau un bec puternic, privim prin cele două hîrtii (ținute la o distanță de 30–50 cm una de alta) către sursă. Cu puțină răbdare veți vedea cum orificiile se vor lărgi, căpătînd forma unui disc luminos înconjurat de un sistem de inele ce corespund unor maxime și minime de interferență de diverse ordine. Desenați (cu creioane colorate) imaginea observată și încercați să explicați modul în care apare.

Dacă efectuăm într-una din hîrtii două fante la distanță foarte mică una de alta (sub 1 mm) și privim prin ele spre hîrtia cu o singură fantă, imaginea de difracție pe care o vom vedea va fi diferită. Desenați (în mod asemănător) ceea ce vedeți și încercați să explicați cauzele modificării imaginii (experiment de tip Young).

**Experiment 3.2.** Interferența luminii în peliculele subțiri de apă și săpun este simplu de obținut și deosebit de instructivă. În acest scop facem o soluție de săpun în apă curată (preferabil distilată). Se poate utiliza un detergent oarecare în loc de săpun. Pentru a stabili pellicula se poate amesteca soluția obținută cu glicerină. La o proporție de apă, glicerină și detergent de 1 : 1 : 1/3, pellicula poate să se mențină citeva zeci de minute, dacă este protejată de curenții de aer. Se poate utiliza în acest scop și lichidul ce se găsește în jucăria de făcut baloane ce poate fi cumpărată de la orice magazin de jucării.

Se construiește apoi din sîrmă un cadru mic dreptunghiular care se prevede cu un mîner. Se introduce cadrul în vasul în care se află lichidul preparat. Se scoate cu grijă și se atîrnă pentru a putea fi privit în liniște. Pentru a observa interferența se va privi fie prin transmisie, fie prin reflexie spre o sursă de lumină extinsă de exemplu un bec, sau o foaie de hîrtie albă iluminată de soare. Vor apărea franje de interferență colorate, orizontale. Experimentați condițiile optime de producere a peliculelor și descrieți ceea ce observați. Explicați succesiunea culorilor



și caracteristicile figurii de interferență. Principiul după care se realizează interferența în acest experiment este dat în § 3.3.

Este interesant de observat că I. Newton a experimentat fenomenul de interferență în pelicule. Cum pe acea vreme lumina era interpretată corpuscular, explicația dată de Newton a fost aceea a dispersiei luminii de către peliculă, dispersie ce se produce într-un mod asemănător celei produse de o prismă. Culoarele care apar în acest experiment nu pot fi considerate, în realitate, ca provenind de la un fenomen de dispersie, deoarece iluminând cu radiație monocromatică (de exemplu o lampă de sodiu) se obține structura de franje tipică interferenței. Mai aveți și alte argumente în eliminarea fenomenului de dispersie ca origine a colorației peliculei?

Putem spune în încheiere că fenomenele de difracție și de interferență scot în evidență caracterul ondulator al luminii și că optica geometrică în care raza de lumină reprezintă conceptul fundamental, este doar o primă aproximație. Aproximația razei de lumină este valabilă pentru cazul în care deschiderile prin care trece lumina sînt mult mai mari decît  $\lambda$  astfel încît fenomenele de difracție și interferență să fie neglijabile.

### 3.3. APLICAȚII ALE FENOMENELOR DE DIFRAȚIE ȘI INTERFERENȚĂ

**3.3.1. Evidențierea caracterului ondulator al unui fenomen.** Înaintea apariției lucrărilor lui Huygens și Fresnel, teoria acceptată privind natura luminii era cea a corpusculilor lui Newton. Acești corpusculi mișcîndu-se conform legilor mecanicii clasice puteau explica ușor propagarea în linie dreaptă și reflexia luminii. Refracția punea unele probleme. Dar odată cu descoperirea fenomenelor de difracție și interferență, a ieșit în evidență caracterul ondulator al luminii. Mai mult, fenomenele de interferență și difracție au permis să se determine în mod direct lungimea de undă a radiației, cea mai importantă mărime ondulatorie care caracterizează undele electromagnetice. În acest fel s-a ajuns la corespondența între culoare și lungimea de undă, s-a determinat natura ondulatorie a radiațiilor  $X$  și mai tîrziu a fost pus în evidență caracterul ondulator al mișcării particulelor.



#### EXTINDERE ÎN TEHNOLOGIE

**3.3.2. Spectrometrul cu rețea.** Am văzut că pentru a realiza un maxim de interferență este necesară îndeplinirea condiției (3.9):

$$\Delta = m \cdot \lambda.$$

Această relație ne arată că pentru diverse lungimi de undă, condiția de maxim de interferență se realizează pentru diferențe de drum diferite. Observația aceasta ne sugerează posibilitatea utilizării relației (3.9) pentru construirea unor dispozitive care să separe în fascicule

monocromatice o radiație compusă. Un astfel de dispozitiv este de exemplu *rețeaua de difracție*. Principiul de funcționare al unei rețele de difracție, *prin transmisie*, este arătat în figura 3.15. Constructiv rețeaua de difracție constă dintr-o placă de sticlă sau alt material transparent pe care sînt trasate fișii opace, echidistante. Se realizează astfel o serie de fante paralele aflate la distanța  $d$  una de alta.

Să presupunem că perpendicular pe rețea cade un fascicul paralel de lumină (undă plană). Unda plană care rezultă din însumarea undelor ce provin de la toate fantele, va avea direcția  $\theta$  față de unda incidentă (difracție). Pentru a obține o figură de interferență ele trebuie să se suprapună. Acest lucru se realizează cu ajutorul unei lentile

asezată paralel cu rețeaua, care va strînge într-un punct dat din planul focal toate undele ce au fost difractate sub același unghi  $\theta$ . Maximul de interferență se va obține pentru:

$$\sin \theta = \frac{\Delta}{d} = \frac{m\lambda}{d}. \quad (3.19)$$

De aici rezultă că pentru o rețea dată și un ordin dat de interferență, unghiul  $\theta$  va depinde de  $\lambda$ . Spunem că rețeaua de difracție poate să realizeze *dispersia* luminii. Același efect poate fi obținut cu ajutorul unei prisme, în care caz dispersia este determinată de dependența indicelui de refracție  $n_{12}$  de  $\lambda$ . Dependența unghiului de deviație pentru o rețea (sau prismă) de lungimea de undă a radiației se exprimă prin mărimea denumită *dispersie* unghiulară ( $\delta$ ) a rețelei (sau prisme) definită prin relația:

$$\delta = \frac{d\theta}{d\lambda}. \quad (3.20)$$

Pentru a determina dispersia unei rețele, vom deriva relația (3.19):

$$\lambda = \frac{d}{m} \sin \theta; \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d}{m} \cos \theta$$

și deci:

$$\delta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos \theta}. \quad (3.21)$$

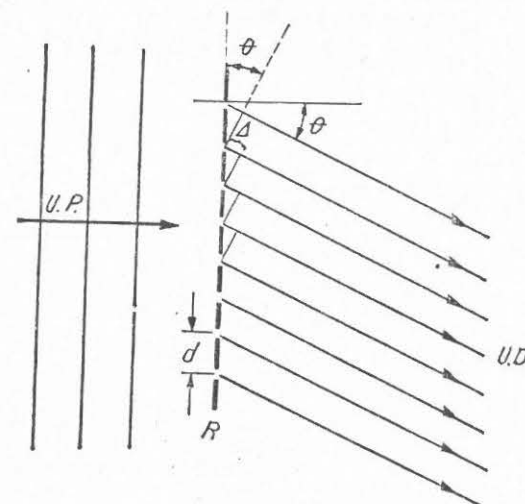


Fig. 3.15. Mersul razelor într-o rețea de difracție,  $R$ , prin transmisie.  $U.P.$  — unda incidentă (plană);  $U.D.$  — unda difractată.

Se vede că dispersia  $\delta$  a unei rețele este cu atât mai mare cu cât:  $d$  este mai mic,  $m$  mai mare sau  $\theta$  mai mare. Mărimea  $d$  este astfel o caracteristică importantă a unei rețele și se numește *constanta rețelei*. Rețelele actuale pot avea în mod uzual  $\sim 4\,000$  fante pe centimetru. Dispersia  $\delta$  a unei rețele este mult mai mare decât aceea a unei prisme, ceea ce face ca spectrografele cu rețea să permită o mai bună separare unghiulară a radiațiilor de lungimi de undă apropiate.

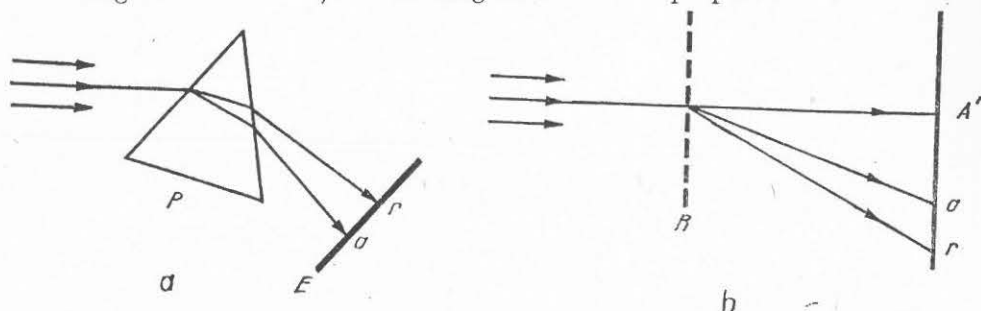


Fig. 3.16. Comparatie între spectrele obținute cu ajutorul unei prisme (a) și cu ajutorul unei rețele de difracție (b). F — prismă; R — rețea de difracție; E — ecran; A — radiație nedescompusă; r — roșu; a — albastru.

O altă deosebire între spectrele obținute folosind rețeaua de difracție și cele obținute folosind prisma reiese din figura 3.16: cele două dispozitive ordonează radiațiile după lungimile de undă în sensuri contrare.

Din punct de vedere constructiv, un spectrometru cu rețea nu se deosebește esențial de un spectrometru cu prismă: ambele vor conține câte un colimator prevăzut cu o fantă de intrare și câte o lunetă cu care se va putea vedea spectrul și determina lungimea de undă (Fizica cl. X. § 4.9).

### 3.3.3. Metode interferențiale de măsurare și control.

**Franje de egală grosime.** O sursă de lumină practic monocromatică de lungime de undă în vid  $\lambda$ , trimite un fascicul divergent asupra unei lame subțiri (fig. 3.17). Lama este tăiată în formă de pană, cele două fețe ale lamei  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$  făcând între ele un unghi diedru  $\epsilon$ , foarte mic. Să considerăm raza  $a$ , care parcurge drumul  $SABCP$ , suferind mai întâi o refracție în lamă, în punctul A, după care se reflectă pe fața  $\Sigma_2$ , în punctul B, se refractă din nou în punctul C, ieșind din lamă, după care lentila L o focalizează în punctul imagine P, conjugat punctului obiect S. O a doua rază  $b$ , parcurge drumul  $SCP$ , suferind numai reflexia pe suprafața  $\Sigma_1$ , după care este focalizată de lentilă de asemenea în punctul P. Fie  $h$ , grosimea lamei în dreptul punctului O. Diferența de drum  $\Delta$  între razele  $a$  și  $b$  este funcție de  $h$ . Pentru a obține un maxim trebuie ca această diferență de drum să fie un multiplu întreg de lungimi de undă:

$$\Delta(h) = m\lambda. \quad (3.22)$$

Ca urmare în punctul P vom obține un maxim luminos. Acest maxim se produce de asemenea pentru toate razele pornite din S care ajung la suprafața  $\Sigma_1$ , în puncte pentru care grosimea lamei este egală cu  $h$ . Să considerăm acum o a doua pereche de raze,  $a'$  și  $b'$ , care urmează drumul  $SA'B'C'P'$ , respectiv  $SC'P'$  (în figură aceste raze sînt desenate

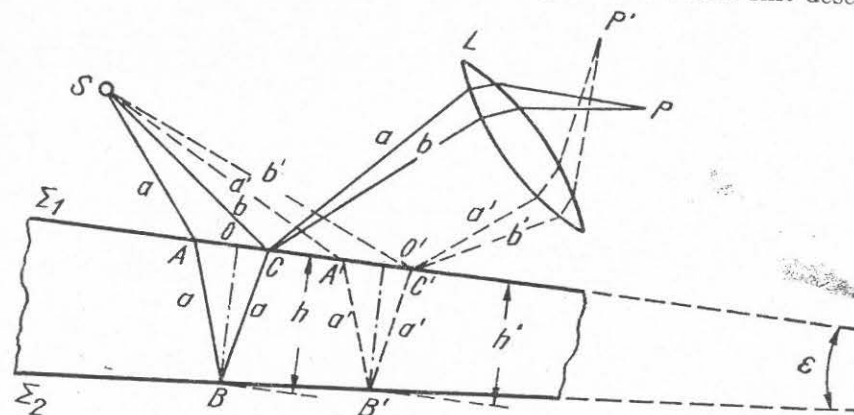


Fig. 3.17. Producerea franjelor de egală grosime.

punctat). Diferența de drum între aceste raze este  $\Delta'(h')$ , dependentă de noua grosime  $h'$  din dreptul punctului O'. Vom admite că între  $a'$  și  $b'$  diferența de drum îndeplinește condiția

$$\Delta'(h') = (m+1)\lambda \quad (3.23)$$

avînd drept rezultat obținerea unui alt maxim focalizat în P'. În acest fel, se obține un sistem de franje de interferență, fiecare franjă corespunzînd unei grosimi date a lamei. Din acest motiv, astfel de franje se numesc *franje de egală grosime*.

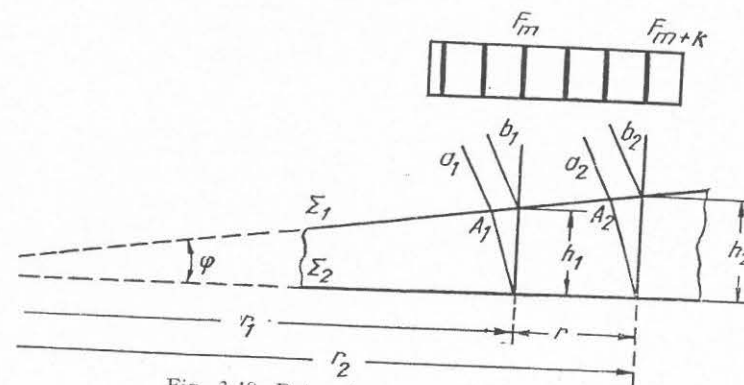


Fig. 3.18. Determinarea unghiurilor mici.

**Măsurarea unghiurilor foarte mici.** Un mediu transparent este limitat de două fețe plane,  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$ , care formează între ele un unghi diedru  $\varphi$  suficient de mic pentru a nu putea fi măsurat prin metodele obișnuite (fig. 3.18). Unghiul  $\varphi$  poate fi totuși măsurat pe cale optică



prin următoarea metodă interferențială. Se produce un sistem de franje de egală grosime (arătat în partea de sus a figurii) prin metoda discutată anterior. Ne fixăm atenția asupra franjei luminoase de ordinul  $m$ , corespunzătoare grosimii  $h_1$  a lamei și a franjei luminoase de ordinul  $m+k$  corespunzătoare grosimii  $h_2$ . Dacă pentru franja de ordinul  $m$ , diferența de drum între razele  $a_1$  și  $b_1$  este  $\Delta_m$ , iar pentru cea de ordinul  $m+k$ , diferența de drum geometric dintre razele  $a_2$  și  $b_2$  este  $\Delta_{m+k}$ , atunci:

$$\Delta = \Delta_{m+k} - \Delta_m = k \frac{\lambda}{n} \quad (3.24)$$

unde  $k$  este un număr întreg. Lungimea de undă în vid  $\lambda$ , a radiației a fost împărțită prin indicele de refracție  $n$  al mediului transparent, deoarece într-un mediu oarecare  $\lambda_{\text{mediu}} = \frac{\lambda}{n}$ . Între razele  $a_1$  și  $b_1$  diferența de drum geometric este practic egală cu  $2h_1$ , iar între razele  $a_2$  și  $b_2$  este practic egală cu  $2h_2$ , deoarece unghiul  $\varphi$  este foarte mic. Urmează că:

$$\Delta = 2(h_2 - h_1). \quad (3.25)$$

Dar din figură se vede că întrucât  $\varphi$  este foarte mic

$$h_1 = r_1 \sin \varphi \simeq r_1 \varphi$$

$$h_2 \simeq r_2 \varphi$$

și deci:

$$h_2 - h_1 = (r_2 - r_1) \varphi = r \varphi \quad (3.26)$$

unde  $r$  este distanța dintre franja luminoasă de ordinul  $m+k$  și franja luminoasă de ordinul  $m$ . Din relațiile (3.24), (3.25) și (3.26) rezultă

$$\varphi = \frac{k\lambda}{2nr} \quad (3.27)$$

**Dilatometrie interferențială.** Cu ajutorul metodelor interferențiale se pot măsura variații foarte mici de ordinul a  $10^{-7}$  m ale dimensiunilor diverselor piese. Un exemplu îl constituie dilatometrul interferențial (fig. 3.19) care permite măsurarea foarte precisă a coeficientului de dilatare a diverselor materiale. Pe măsura de înaltă planeitate  $P$  se așază un inel  $C$  de cuarț, al cărui coeficient de dilatare este foarte precis cunoscut. În interiorul inelului se află o bucată  $M$  din materialul al cărui coeficient de dilatare se măsoară. Fața inferioară pe care se reazemă materialul pe măsură, cât și fața superioară sînt

Fig. 3.19. Schema unui dilatometru interferențial.

polisate oglindă cu multă grijă pentru a fi cât mai plane posibil. Deasupra se așază o placă de sticlă  $S$ , de asemenea polisată cu grijă și cât mai plană posibil, fața superioară a materialului formînd cu fața in-

ferioară a plăcii de sticlă un mic unghi diedru, astfel încît între aceste două suprafețe să se găsească o pană de aer. Pe placa de sticlă se trasează un reper  $R$ .

Să presupunem că dispozitivul se află la temperatura  $T$  și că una din franjele luminoase de egală grosime, care se formează în pana de aer, este situată chiar în dreptul reperului  $R$ . Această franjă, de ordinul  $m$ , corespunde grosimii  $h$  a penei de aer din dreptul reperului. Dacă temperatura se modifică la  $T'$ , materialul se dilată, iar grosimea penei de aer în dreptul reperului va avea valoarea  $h'$ , corespunzătoare franjei de ordinul  $m-k$ . Datorită acestui fapt, cînd materialul se dilată, iar grosimea variază de la  $h$  la  $h'$ , vom putea număra  $k$  franje care defilează prin dreptul reperului. Diferența de drum geometric între raza reflectată pe fața superioară a penei de aer și cea reflectată pe fața inferioară a penei de aer va varia și ea de la  $2h$  la  $2h'$ . În consecință

$$2(h - h') = k \frac{\lambda}{n_0}$$

unde  $n_0$  este indicele de refracție al aerului. Din această relație se află ușor:

$$h - h' = \frac{k\lambda}{2n_0}$$

Metoda este foarte precisă, întrucît chiar și o variație de numai  $\lambda/2$  a grosimii penei de aer determină deplasarea figurii de interferență cu o franjă, deci ea poate fi măsurată. Cum însă lungimea de undă a radiațiilor vizibile este de ordinul  $5 \cdot 10^{-7}$  m, înseamnă că este posibilă măsurarea unor variații ale grosimii de ordinul a  $10^{-7}$  m.

**Controlul planeității suprafețelor.** În dispozitivele de precizie este necesară utilizarea unor plăci astfel polisate, încît neregularitățile să fie cel mult de ordinul a  $10^{-7}$  m. Controlul acestui grad înalt de planeitate a suprafețelor se poate realiza cu ajutorul unui dispozitiv interferometric (fig. 3.20).

Sursa  $S$  emite un fascicul divergent de lumină practic monocromatic care după reflexia pe oglinda semiargintată  $M$  este transformat de către lentila  $L$  într-un fascicul paralel care pătrunde în placa de sticlă etalon  $P_0$ . Aceasta este o placă ale cărei suprafețe sînt polisate cu un grad înalt de precizie, neregularitățile de pe suprafața ei fiind cel mult de ordinul a  $10^{-8}$  m. Sub această placă se află suprafața  $\Sigma$  a plăcii  $P$  a cărei planeitate o controlăm. Fața de jos a lui  $P_0$  și cu suprafața  $\Sigma$  formează între ele un mic unghi diedru limitînd o pană de aer. Dacă supra-

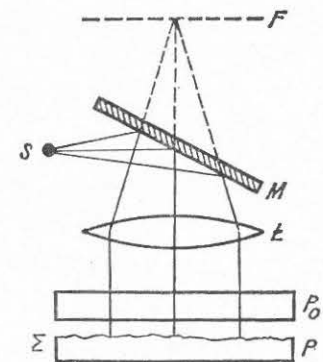


Fig. 3.20. Controlul planeității suprafețelor.

fața  $\Sigma$  ar fi perfect plană, în planul  $F$  s-ar observa un sistem de franje de interferență de egală grosime, riguros paralele (fig. 3.21, a). Dacă însă suprafața cercetată  $\Sigma$  nu e bine polisată, atunci franjele se deformează în jurul ridicăturilor (fig. 3.21, b) sau a adânciturilor (fig. 3.21, c).

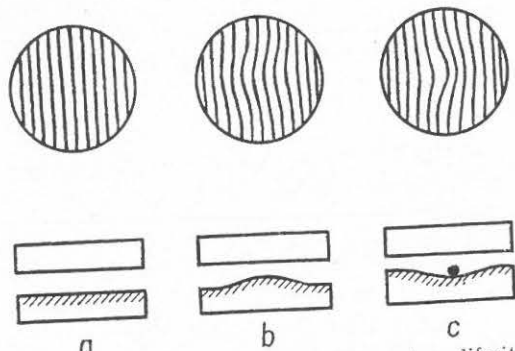


Fig. 3.21. Figuri de interferență pentru diferite suprafețe.

venită de la fiecare atom va avea o suprafață de undă sferică. Undele provenite de la toți atomii, se vor putea suprapune într-o regiune dată din spațiu, astfel încât vor determina maxime sau minime de interferență în funcție de diferențele dintre fazele lor.

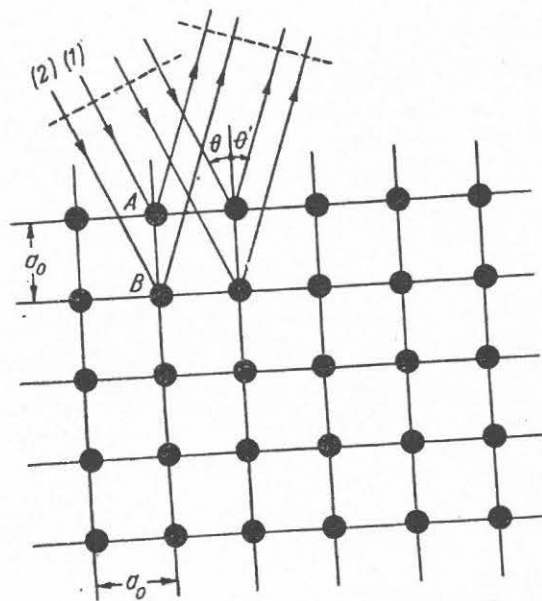


Fig. 3.22. Difrakția pe o rețea plană

tunecat". Pentru a putea determina legătura dintre succesiunea franjelor de interferență și ordinea atomilor din substanță să luăm cazul ideal al unui plan ordonat de atomi (fig. 3.22) cu echidistanța  $a_0$ . Fie de asemenea

**3.3.4. Analiza prin difracția radiațiilor X.** Natura ondulatorie a radiațiilor X permite utilizarea lor în difracția pe atomii constituenți ai substanțelor. Fiecare atom „atins” de radiația X devine la rândul lui un emițător punctiform al unei radiații în fază și cu aceeași lungime de undă cu cea incidentă. Radiația pro-

Dacă atomii sînt dispuși în substanță în mod dezordonat, maximele și minimele vor fi la rîndul lor repartizate dezordonat și se poate întîmpla ca maximele determinate de un grup de atomi să se suprapună peste minimele altui grup de atomi ceea ce va avea ca rezultat un câmp de interferență relativ uniform „iluminat”. Dacă din contră, în interiorul substanței atomii sînt dispuși ordonat, atunci această ordine se va reflecta într-o ordonare a maximelor și minimelor, câmpul de interferență fiind alternativ „luminos” și „în-

un fascicul paralel de radiații X care cade sub unghiul de incidență  $\theta$ . Unul din fasciculele difractate va emerge sub unghiul  $\theta'$ . Luînd în figura 3.22, o pereche de atomi (de exemplu A și B) vom putea scrie că diferența de drum între fasciculele 2 și 1 va fi:

$$\Delta = a_0 \cdot \sin \theta + a_0 \cdot \sin \theta'.$$

Pentru un maxim de difracție, vom avea condiția:

$$a_0(\sin \theta + \sin \theta') = m\lambda.$$

Iar dacă alegem cazul  $\theta = \theta'$  obținem:

$$2a_0 \cdot \sin \theta = m\lambda. \quad (3.28)$$

Aceasta se numește *legea de reflexie a lui Bragg*, deoarece corespunde cazului de difracție în care  $\theta = \theta'$ .

Pentru toate perechile de plane echidistante ce conțin atomi (cu distanța  $a_0$  între plane), relația (3.28) va da condiția de maxim. Ca urmare, pentru un  $\lambda$  dat, vom avea cîteva direcții de reflexie Bragg (pentru diverse valori ale lui  $m$ ):

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{2a_0}$$

din care putem determina pe  $a_0$ . Relația poate fi interpretată și reciproc: cunoscînd aceste reflexii Bragg și de asemenea pe  $a_0$ , putem determina pe  $\lambda$ .

Primul caz poate fi utilizat pentru determinarea constantei  $a_0$  a unei substanțe cu atomi ordonați (monocristal). Al doilea caz poate fi utilizat pentru determinarea lungimii de undă a radiației X monocromatice.

Primul caz permite astfel o analiză a structurii cristaline a substanțelor. Dacă avem un amestec de structuri cristaline cu diverse valori pentru  $a_0$ , figura de difracție se complică, dar un studiu atent al ei permite determinarea diferitelor valori  $a_0$  existente în substanță și deci permite recunoașterea diferitelor structuri.

În acest mod, se pot recunoaște diferitele faze cristaline ale unui compus dat, se pot stabili temperaturile de transformare de la o fază la alta, se poate determina coexistența mai multor faze deodată, se pot determina structurile cristaline ale aliajelor ș.a.m.d.

**3.3.5. Puterea de separare a instrumentelor optice.** Calitatea unui instrument optic, de exemplu telescop, lunetă, microscop sau lupă, este dată nu atît de mărirea pe care o realizează cît mai ales de puterea lui de separare. Prin *putere de separare* înțelegem inversul distanței minime dintre două puncte sau obiecte care pot fi văzute distinct. Este inutil să realizăm mărimi foarte mari cu un instrument, dacă imaginea care apare nu ne evidențiază nici un detaliu.

Pierderea detaliilor sau din contră evidențierea detaliilor este determinată de fenomenele de difracție și interferență care au loc în

instrument, deoarece oricare ar fi instrumentul, el captează radiația printr-un obiectiv de dimensiuni date (finite). Aceste dimensiuni limitează puterea de separare a instrumentului.

Pentru a înțelege cum se petrece acest lucru să presupunem următoarea situație (fig. 3.23). Două surse de lumină monocromatică ( $\lambda$ ),

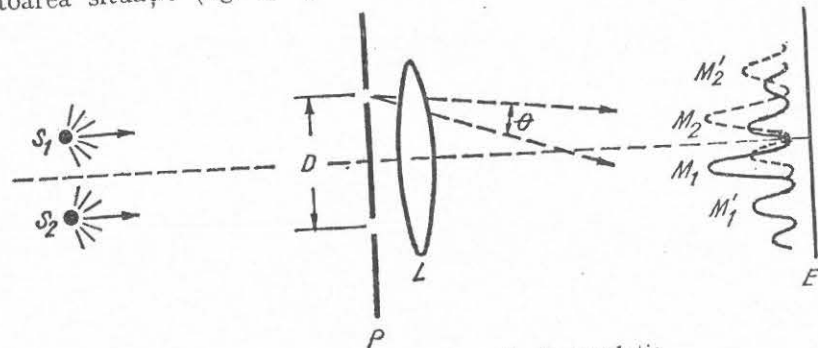


Fig. 3.23. Aprecierea puterii de rezoluție.

$S_1$  și  $S_2$  se află atât de aproape încât se pune problema separării lor. Dispozitivul optic este simbolizat prin lentila  $L$ , iar receptorul prin ecranul  $E$  așezat în planul focal al lentilei  $L$ .

Să presupunem acum că în fața obiectivului  $L$ , punem un paravan cu două deschideri mici, aflate la distanța  $D$  una de alta. Atunci fiecare sursă ( $S_1$  și  $S_2$ ) va produce prin sistemul celor două fante câte o figură de difracție formată din câte un maxim principal  $M_1$ , respectiv  $M_2$  și o serie de maxime secundare mai puțin intense. Deschiderea unghiulară ( $\varphi$ ) între două maxime succesive de difracție ale unei surse va fi dată de relația:

$$D \sin \varphi = \lambda \text{ sau } D \varphi \approx \lambda \quad (3.29)$$

dacă  $\varphi$  este foarte mic.

Și cealaltă sursă va da același sistem de franje, dar decalat de primul prin unghiul  $\theta$ . Rezultă de aici că unghiul  $\varphi$  va depinde de distanța  $D$  dintre cele două orificii pe când unghiul  $\theta$  va depinde de distanța unghiulară dintre cele două surse  $S_1$  și  $S_2$ . Modificând pe  $D$ , putem modifica interfranja (3.29) deci pe  $\varphi$  dar nu putem modifica decalajul între cele două figuri de interferență. Decalajul între cele două figuri de interferență depinde doar de distanța dintre cele două surse.

Pentru a putea spune că „separăm” cele două figuri de interferență, trebuie ca maximele unui sistem de franje să coincidă cu minimele celui de al doilea sistem, în caz contrar ele se vor suprapune și nu se vor putea observa distinct. Această condiție presupune:

$$\varphi = 2\theta.$$

Introducând în (3.29) obținem:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{2D}.$$

Ținând cont că această condiție este la limita ei inferioară, putem accepta ca o măsură practică a „separării” celor două surse:

$$\theta_{min} \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (3.30)$$

Astfel, pentru o cât mai bună separare trebuie ca  $D$  să fie cât mai mare. Dar nu putem crește pe  $D$  mai mult decât diametrul obiectivului. Vom considera deci că mărimea  $D$  din (3.30) este chiar diametrul obiectivului.

Acum să mărim treptat dimensiunile orificiilor ecranului din fața obiectivului. Din punct de vedere al figurii de difracție obținem treptat o mărire a maximelor centrale ( $M_1$  sau  $M_2$ ) cu o micșorare simultană a celorlalte maxime. Această operație nu modifică interfranja și deci condiția (3.30) rămâne valabilă. La limită, tot obiectivul este eliberat, cele două maxime principale (care ne dau acum imaginea celor două surse) au rămas în același loc. Putem spune astfel că relația (3.30) reprezintă o măsură a capacității de separare, în sensul că imaginile celor două surse nu se contopesc dacă:

$$\theta \geq \theta_{min} \approx \frac{\lambda}{D}.$$

În consecință, puterea de separare a instrumentului este cu atât mai mare cu cât se lucrează cu o radiație cu  $\lambda$  mai mic și cu cât diametrul obiectivului este mai mare.

### 3.3.6. Holografia și aplicațiile acestei metode.

**Principiul metodei holografice.** Metoda fotografică obișnuită constă în înregistrarea pe placa fotografică a imaginii produse de lumina incoerentă reflectată de obiecte. Deoarece o undă incoerentă de o anumită lungime de undă se caracterizează numai prin intensitate nu și prin faza ei, înseamnă că informația asupra obiectului (stocată pe fotografie) este inclusă numai în repartitia bidimensională a intensității luminoase.

Dacă însă obiectul este iluminat cu lumină coerentă, adică cu unde care au bine definită atât intensitatea cât și faza, atunci lumina reflectată de obiect va cuprinde o informație mai bogată asupra acestuia. Emulsia plăcii fotografice nu poate înregistra direct faza undei reflectate de obiect. În schimb, dacă se produce interferența acestor unde coerente cu o undă de referință de asemenea coerentă și de aceeași lungime de undă, atunci pe placa fotografică se va înregistra o figură de interferență care va include atât informația asupra intensității cât și cea asupra fazei undei. Fotografia acestei figuri de interferență este numită *hologramă* \*. Deși holograma nu seamănă deloc cu obiectul care a produs-o,

\* În limba greacă „holos” înseamnă „în întregime”, deci holograma înseamnă înregistrarea completă a obiectului.



totuși așa cum se va arăta mai departe, imaginea acestuia se poate reconstitui cu ușurință, luminând convenabil holograma cu o undă de referință identică celei folosite la obținerea hologramei. Este remarcabil că imaginea produsă apare în relieful ei natural, deoarece informația înregistrată de hologramă fiind mai bogată decât cea dintr-o fotografie obișnuită, poate pune în evidență și relieful obiectului.

**Obținerea hologramelor.** Dispozitivul folosit pentru obținerea hologramelor (fig. 3.24) cuprinde un laser care emite o lumină coerentă monocromatică, un sistem optic pentru lărgirea cîmpului undei laser, o oglindă, obiectul studiat și o placă fotografică. Oglinda are rolul de a reflecta direct spre placa fotografică o parte din fasciculul emis de laser, formînd astfel unda de referință care interferă cu undele reflectate de obiect.

Pentru a înțelege formarea pe placa fotografică a figurii de interferență produse de aceste unde vom analiza mai întâi cazul simplificat din figura 3.25.

Pe placa fotografică  $H$ , sosește unda de referință, armonică plană, de lungimea de undă  $\lambda$ , sub unghiul de incidență  $i_r$ , iar unda reflectată de obiect, presupusă de asemenea armonică plană de aceeași lungime de undă sosește sub unghiul de incidență  $i_0$ . Ambele unde fiind coerente, vor interfera, producînd de exemplu în punctul  $A$  un maxim, iar în punctul  $B$  maximul următor.

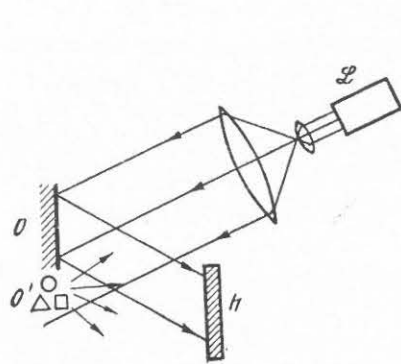


Fig. 3.24. Schema simplificată a înregistrării hologramei pe placă fotografică.  $O$  - oglindă,  $O'$  - obiect,  $L$  - laser,  $H$  - hologramă.

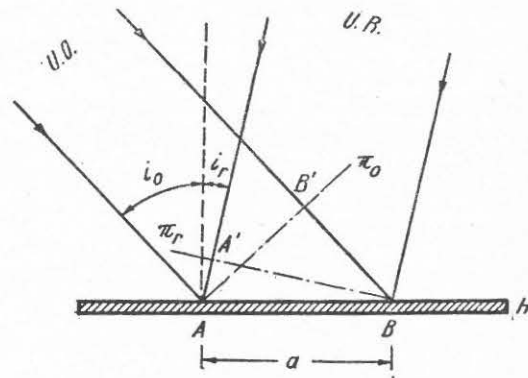


Fig. 3.25. Formarea figurii de interferență pe placa fotografică.  $U.O.$  - unda reflectată de obiect;  $U.R.$  - unda de referință.

Să considerăm planul  $\Pi_r$ , normal pe direcția de propagare a undei de referință. Toate punctele de pe acest plan avînd aceeași fază, rezultă că și fazele  $\varphi_r(A')$  și  $\varphi_r(B)$  în punctele  $A'$  și  $B$  vor fi egale

$$\varphi_r(A') = \varphi_r(B). \quad (3.31)$$

În schimb însă, faza undei de referință în punctul  $A$  va fi:

$$\varphi_r(A) = \varphi_r(A') - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_r = \varphi_r(B) - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_r \quad (3.32)$$

deoarece din  $A'$  pînă în  $A$  unda parcurge drumul  $a \sin i_r$ . Tot astfel, punctele planului  $\Pi_0$ , normal pe direcția de propagare a undei reflectate de obiect au aceeași fază, urmează deci că:

$$\varphi_0(A) = \varphi_0(B'). \quad (3.33)$$

În schimb în punctul  $B$ :

$$\varphi_0(B) = \varphi_0(B') - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_0 = \varphi_0(A) - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_0 \quad (3.34)$$

deoarece unda reflectată de obiect are de parcurs între punctul  $B'$  și punctul  $B$  distanța  $a \sin i_0$ .

În punctul  $A$  se produce un maxim de interferență; urmează deci că în acest punct, unda de referință și cea reflectată de obiect sînt în fază

$$\varphi_r(A) - \varphi_0(A) = 2m\pi. \quad (3.35)$$

Și întrucît în  $B$  se produce maximul de interferență următor

$$\varphi_r(B) - \varphi_0(B) = 2(m+1)\pi. \quad (3.36)$$

Înlocuind în (3.35) pe  $\varphi_r(A)$  cu expresia din (3.32) și în (3.36) pe  $\varphi_0(B)$  cu expresia din (3.34), găsim:

$$\varphi_r(B) - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_r - \varphi_0(A) = 2\pi m \quad (3.37)$$

$$\varphi_r(B) - \varphi_0(A) + \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_0 = 2(m+1)\pi. \quad (3.38)$$

Scăzînd acum membru cu membru relația (3.37) din (3.38) rezultă:

$$a = \frac{\lambda}{\sin i_0 + \sin i_r}. \quad (3.39)$$

În acest caz simplu holograma va fi formată dintr-o rețea de franje echidistante, în care distanța  $a$  dintre franje stochează informația privind direcția după care sosește unda reflectată de obiect. În cazul unor obiecte de o formă oarecare, nu avem o singură undă plană incidentă sub un unghi  $i_0$ , ci o multitudine de unde plane care sosesc sub diverse unghiuri  $i_0, i'_0, i''_0, \dots$ . Figura de interferență va fi în acest caz mult mai complicată, înregistrînd și stocînd de data aceasta informația privind toate direcțiile după care vin diversele unde reflectate de obiect. Intensitățile acestor unde, în raport cu cea a undei de referință, vor determina distribuția intensității de impresiune în diversele puncte ale plăcii fotografice.

**Reconstituirea imaginii.** Reconstituirea imaginii are loc în același dispozitiv în care s-a obținut holograma, aceasta fiind fixată în același suport și în aceeași poziție ca și la înregistrare. Holograma se luminează cu o undă de referință identică cu cea folosită la înregistrare (fig. 3.26).

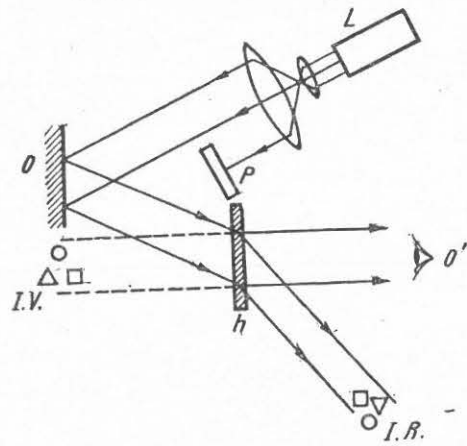


Fig. 3.26. Reconstituirea imaginii. *L* — laser; *O* — oglindă; *P* — paravan; *h* — hologramă; *O'* — observator; *I.V.* — imagine primară (virtuală); *I.R.* — imagine conjugată (reală).

În cazul reconstituirii imaginii, holograma funcționează ca o rețea de difracție, maximele acționând ca niște fante interpuse în drumul unde de referință. Ne vom referi chiar la holograma simplă discutată la începutul subparagrafului precedent. Teoria difracției printr-o rețea de fante paralele echidistante, arată că în cazul în care difracția are loc prin reflexie ca în cazul figurii 3.27, condiția de maxim este:

$$a(\sin i_r + \sin \alpha) = \lambda \quad (3.40)$$

unde  $\lambda$  este lungimea de undă,  $i_r$  unghiul de incidență a unde înainte de difracție,  $\alpha$  unghiul după care se difractează unda, iar  $a$  distanța dintre fantele rețelei. Din această relație se obține:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a} - \sin i_r. \quad (3.41)$$

Deoarece se folosește exact aceeași așezare a dispozitivelor ca la înregistrarea hologramei unghiul  $i_r$  este același cu unghiul de incidență al unde de referință la înregistrare, valoarea sa putând fi obținută din relația (3.39):

$$\sin i_r = \frac{\lambda}{a} - \sin i_0. \quad (3.42)$$

Introducând (3.42) în (3.41), rezultă:

$$\sin \alpha = \sin i_0, \text{ deci } \alpha = i_0.$$

Unghiul sub care se propagă unda difractată este identic cu cel sub care a sosit unda reflectată de obiect. Dacă holograma se obține

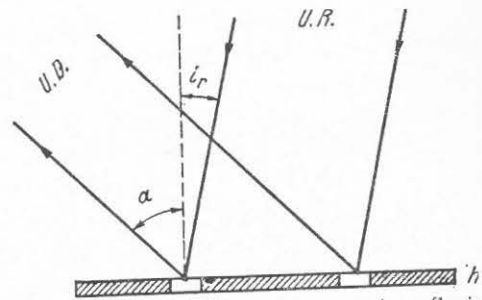


Fig. 3.27. Difracția pe o rețea prin reflexie. *U.D.* — unda difractată; *U.R.* — unda de referință, *h* — holograma.

din razele reflectate de un obiect oarecare sub diverse unghiuri, razele difractate de hologramă vor urma exact același drum, astfel că privind din spatele hologramei vom vedea — în prelungirea acestor raze — imaginea obiectului.

În felul acesta, cu ajutorul hologramei reconstituim toate razele reflectate de obiect, prelungirile lor formînd în ochiul nostru exact aceeași imagine, dar virtuală, ca și razele care ar porni direct de la obiect, dîndu-ne inclusiv senzația de relief.

În afara imaginii primare virtuale, se mai obține încă o imagine, reală, denumită imagine conjugată. Imaginea conjugată poate fi fotografiată, dar acest aspect este neesențial, deoarece prin fotografiere informația asupra fazei se pierde.

**Proprietățile hologramelor.** Sistemul de franje înregistrat pe hologramă cuprinde toată informația asupra obiectului, aceasta regăsindu-se integral în fiecare porțiune a hologramei. De aceea, dacă spargem o hologramă în bucăți, fiecare fragment continuînd să cuprindă în întregime informația asupra obiectului, permite reconstrucția integrală a imaginii. Dar, cu cît fragmentul este mai mic, cu atît și claritatea imaginii este mai slabă.

Dacă o hologramă se suprapune peste o placă fotografică și se luminează, placa fotografică va înregistra „negativul” hologramei. Aceasta însă nu se deosebește de „pozitiv” decît prin aceea că minimele iau locul maximelor și reciproc, adică are loc o deplasare a figurii de interferență cu o jumătate de interfranjă. Din acest motiv, dacă încercăm reconstituirea imaginii folosind „negativul” hologramei, vom obține exact aceeași imagine ca și în cazul utilizării „pozitivului” hologramei.

O altă proprietate interesantă a hologramelor constă în aceea că prin utilizarea la reconstituirea imaginii a unei unde cu o altă lungime de undă decît aceea a unde de referință folosită la înregistrare, se obține o mărire, respectiv o micșorare a imaginii produse.

În cazul înregistrării hologramelor pe o placă fotografică cu un strat de emulsie mai gros, în locul unui sistem de franje bidimensional, se formează un sistem de franje tridimensional, obținîndu-se astfel o *hologramă în volum*, care prezintă unele avantaje față de hologramele plane.

Prin iluminarea obiectelor cu trei radiații laser diferite — albastră, verde și roșie — se înregistrează pe hologramă trei sisteme de franje distincte, corespunzătoare celor trei lungimi de undă. Dacă se reconstituie imaginea folosind simultan cele trei radiații laser, se va obține imaginea holografică colorată a obiectelor.

**Aplicații ale holografiei.** Metoda holografică, imaginată încă din 1948 de fizicianul englez Denis Gabor și dezvoltată după inventarea laserelor de către americanii Leith și Upatnieks (1963), deși se află încă

la începuturile ei, a cunoscut o largă răspîndire și rapidă perfecționare, datorită vastului cîmp de aplicații în știință și tehnică.

Holografia permite de exemplu vizualizarea curenților într-un gaz sau într-un lichid în mișcare, sau în plasmă, deoarece variațiile

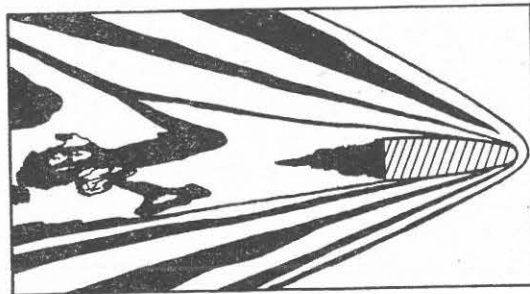


Fig. 3.28. Unda de șoc fotografiată holografic.

indicelui de refracție al fluidului dau modificări de fază sesizate de hologramă. În același mod poate fi investigată și variația concentrației soluțiilor. În figura 3.28 se arată unda de șoc produsă de un proiectil care se deplasează cu o viteză supersonică.

Recunoașterea formelor este un alt domeniu de aplicație a holografiei în lumină vizibilă; una din utilizările acestei proprietăți a hologramelor fiind identificarea rapidă și corectă a amprentelor digitale, chiar în cazul cînd la dispoziție se află doar porțiuni mici din amprentă.

Printre perspectivele de viitor ale holografiei în lumină vizibilă, se întrevăd cinematograful în relief și televiziunea în relief. Un alt domeniu important de aplicare a holografiei va consta în realizarea de memorii holografice pentru calculatoarele electronice.

Holografia în lumină vizibilă este utilă în acele observații în care punerea în evidență a reliefului este esențială, de exemplu, la vizualizarea reliefului urmelor particulelor elementare în camera Wilson, sau în camera cu bule. Microscopia holografică permite observația în relief, sub microscop, metodă foarte utilă în biologie, studiul stării solide etc.

În încheiere, menționăm că holografia poate fi folosită și în domeniul microundelor, sursele acestor unde putînd fi făcute cu ușurință surse coerente. Trimițînd din avion microunde asupra solului, se poate obține holograma reliefului solului, la reconstituirea imaginii putîndu-se aprecia ușor relieful obiectivelor investigate.

În fine, holografia cu unde acustice își găsește aplicații în medicină, unde acustice pătrunzînd în adîncime în organism. La reconstituirea imaginii apar în relief detalii care altfel nu ar putea fi observate, cum ar fi de exemplu tumori ascunse în țesuturi.

### 3.4. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC CA SISTEM FIZIC

**3.4.1. Interacțiunea din aproape în aproape.** Am văzut pînă acum că propagarea unei unde electromagnetice poate fi descrisă ca un proces de generare reciprocă a cîmpurilor electric și magnetic ce se desprind de sursă.

Pe de altă parte, propagarea poate fi descrisă cu ajutorul principiului Huygens-Fresnel de construire a noului front (sau suprafață) de undă.

Ambele imagini ne conduc la concluzia deosebit de importantă că orice perturbație electromagnetică se propagă în vid cu o viteză finită. Atît experimental cît și teoretic această viteză rezultă a fi  $c \cong 3 \cdot 10^8$  m/s.

Care sînt consecințele mai profunde ale acestor fapte?

Să luăm pentru discuție din nou un pendul electric încărcat și plasat la distanța  $r$  de un purtător de sarcină electrică. Pendulul se va găsi în repaus, într-o poziție care va indica intensitatea cîmpului în acel punct. Dacă la momentul  $t_1$ , începem să deplasăm purtătorul de sarcină, propagarea cu viteza  $c$  a perturbației va face ca scoaterea din repaus a pendulului să se facă cu o întîrziere

$$t_2 - t_1 = r/c$$

necesară ca perturbația să se propage pe distanța  $r$ .

Rezultă de aici trei concluzii mai importante.

— În primul rînd relația care dă forța coulombiană

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

este într-un fel incorectă deoarece nu exprimă această întîrziere a efectului mișcării purtătorului de sarcină asupra sarcinii de probă. Cu alte cuvinte, relația care dă forța coulombiană exprimă interacțiunea ca și cum s-ar produce *instantaneu*.

— În al doilea rînd interacțiunea întîrziată, determinată de propagarea cu viteză finită a perturbației electromagnetice ne permite să considerăm cîmpul ca o entitate independentă de sursa care l-a produs. Înțelegem prin aceasta că acest cîmp electromagnetic (și în general orice cîmp fizic) are pe lîngă proprietățile enumerate în § 3.1.2. la punctele  $a, b, c, d$  și pe aceea a *existenței sale reale ca o entitate de-sine-stătătoare*, ca o *stare a materiei*, deosebită de cea de *substanță* dar tot atît de reală și de fizică.

Cîmpul și perturbația corespunzătoare, propagîndu-se cu viteză finită „mijlocesc” interacțiunea între corpuri. Dacă între sarcini nu ar exista o interacțiune „transportată” de un cîmp, atunci ea ar putea fi eventual transmisă cu viteză infinită: între momentul începutului deplasării sarcinii din  $r$  și acțiunea ei asupra pendulului s-ar scurge un interval de timp nul,  $\Delta t = 0$ . Cum știm că viteza este  $c$ , rezultă că  $\Delta t \neq 0$  și că această „mijlocire” este reală. Astfel, cîmpul nu este doar un alt mod de a descrie interacțiunea (exprimabilă și prin noțiunea de forță) ci are calitățile unei entități fizice. Interacțiunea în care mediul ce separă obiectele joacă un rol esențial poartă denumirea de *interacțiune din aproape în aproape*. Opusul ei este *interacțiunea la distanță*, care presupune o interacțiune nemijlocită între corpuri. Ea s-ar efectua cu viteză infinită. În prezent interacțiunea la distanță este considerată nerealizabilă din punct de vedere fizic. Vom vedea mai tîrziu de ce.



— În al treilea rând, propagarea cu viteză finită a interacțiunii ne permite să ordonăm evenimentele petrecute astfel încât să putem separa *cauza de efect* în sensul: cauza este anterioară efectului pe care l-a produs. În acest fel putem spune că în univers se stabilesc relații cauzale și deci totdeauna putem căuta cauza unui fenomen (efect) dat. Acest aspect este important și din punct de vedere filozofic, deoarece exprimă existența și necesitatea căutării cauzelor fenomenelor printre alte fenomene naturale anterioare efectului. Cunoașterea relațiilor cauză-efect înseamnă cunoașterea legilor naturii și deci posibilitatea principială de a cunoaște, din datele recente, evoluția viitoare a fenomenelor, cu alte cuvinte aceasta înseamnă *știință*.

**3.4.2. Cîmpul ca sistem fizic.** Am văzut caracterul de-sine-stătător al cîmpului. Să analizăm mai în amănunt proprietățile lui. O primă caracteristică (în plus față de cele expuse în § 3.1.2.) este aceea că perturbațiile cîmpului se propagă cu viteza  $c$ . Următoarea caracteristică deosebită a cîmpului este legată de extensia lui în spațiu. De exemplu, spre deosebire de un obiect (substanță) ce poate fi localizat foarte precis, un cîmp electric *se întinde în mod continuu în tot spațiul din jurul particulei cu sarcină electrică*.

Relația care ne dă intensitatea cîmpului electric într-un punct dat ne descrie cîmpul electric produs de o particulă încărcată. Deci, pentru a defini cîmpul ca un *sistem fizic* oarecare (la fel cum am definit de exemplu un gaz închis într-o incintă) va trebui să cunoaștem valcarea intensității cîmpului în toate punctele și la toate momentele, ceea ce formează o mulțime infinită de valori. Acest aspect scoate astfel în evidență mai bine de ce cîmpul este o entitate continuă. Un corp sau un gaz cu toate că par continue sînt compuse dintr-un număr foarte mare de atomi (obiecte) avînd deci un caracter discontinuu: întotdeauna ele pot fi desfăcute spațial, în părți componente. În acest sens cîmpul este contrariul substanței, el fiind prototipul unui mediu distribuit în mod continuu în spațiu, neputînd fi desfăcut în „părți componente“.

Unda electromagnetică este exemplul idealizat al unui *cîmp izolat*, desprins de sursă. În realitate, cîmpul ca sistem fizic este întotdeauna cuplat (în interacțiune) cu particulele care produc acel cîmp.

Din această cauză, descrierea cîmpului ca sistem fizic presupune cunoașterea modului în care se modifică (sau rămîn constante) valorile acelor mărimi care descriu cîmpul. Pînă acum am văzut că intensitatea cîmpului este o astfel de mărime; uneori dependența de coordonatele spațiale și temporale a mărimilor care descriu cîmpul se numește *funcție de undă*.

Principalele legi care descriu fenomenele electromagnetice (unele studiate anterior iar altele nu: legea lui Ampère, legea inducției etc.) au fost generalizate și strînse la un loc în așa-numitele ecuații ale lui Maxwell.

Aceste ecuații permit o descriere unitară a tuturor fenomenelor electromagnetice discutate pînă acum.

Din ecuațiile lui Maxwell rezultă de exemplu că unda electromagnetică transportă energie, că are un impuls bine determinat și că se propagă cu viteza  $c$ . Relația (3.4) care ne dă densitatea de energie a cîmpului electric exprimă doar o parte din energia cîmpului electromagnetic în vid. Ecuațiile lui Maxwell conduc la o expresie a densității energiei cîmpului electromagnetic, expresie ce conține și partea de energie a cîmpului magnetic:

$$w_{em} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right).$$

**3.4.3. Viteza luminii în vid-constantă universală.** Să ne reîntoarcem la problema vitezei luminii. Am văzut că ea are o valoare foarte mare. Am văzut de asemenea cum poate fi măsurată. Ne punem acum problema dacă putem modifica viteza de propagare a luminii și în ce mod?

Un prim procedeu ne este sugerat de fenomenul de refracție a luminii (Fizica cl. a X-a § 3.7.3):

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Trecerea luminii dintr-un mediu în altul se produce cu schimbarea vitezei luminii conform acestei relații. Dacă mediul (1) este vidul, atunci indicele de refracție se referă la mediul (2) față de vid:

$$n_{21} = \frac{c}{v}.$$

Cum  $n_{21} > 1$ , rezultă că  $v < c$ . Cu alte cuvinte lumina intrînd într-un mediu material cu indice de refracție diferit de 1, se va propaga cu o viteză mai mică decît în vid.

Dacă vrem să știm *de ce* într-un mediu oarecare lumina se propagă mai încet decît în vid, trebuie să căutăm răspunsul în teoria generală a undelor electromagnetice. Viteza de propagare a undelor electromagnetice a fost dedusă de către Maxwell:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

unde:  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  și  $\mu = \mu_0 \mu_r$  sînt permitivitatea și respectiv permeabilitatea mediului de propagare,  $\epsilon_0$  și  $\mu_0$  sînt mărimile corespunzătoare pentru vid, iar  $\epsilon_r$  și  $\mu_r$  sînt mărimile relative respective. Valorile lor sînt pentru vid:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}.$$

De curiozitate putem calcula viteza luminii în vid:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99796 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Rezultă din cele discutate mai sus, că:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

și deci putem *calcula* atât viteza de propagare într-un mediu cât și indicele lui de refracție dacă îi știm pe  $\epsilon_r$  și  $\mu_r$ .

Pentru toate materialele nemagnetice  $\mu_r \simeq 1$  și deci:

$$n^2 = \epsilon_r.$$

Cunoscînd aceste lucruri tragem concluzia că într-adevăr pentru orice situație posibilă

$$v \leq c$$

deoarece  $\epsilon_r \geq 1$ . Deci, în nici un mediu material viteza undelor electromagnetice nu poate depăși valoarea ei în vid, egală cu  $c$ .

Dacă analizăm mai atent această problemă vom observa un fapt deosebit: lumina străbătînd un mediu cu  $n > 1$ , cu o viteză  $v < c$ , după ieșirea în vid își *recapătă viteza  $c$* ! Această observație arată că din acest punct de vedere propagarea luminii se aseamănă cu propagarea unei unde elastice, pentru care viteza de propagare depinde de mediul străbătut. Această asemănare este doar aparentă, deoarece undele elastice nu se pot propaga în vid, ele necesitînd pentru propagare un suport. În cazul undelor electromagnetice pentru propagare nu este necesară existența unui astfel de suport.

Să încercăm să găsim alte procedee de modificare a vitezei luminii, care să ne permită creșterea ei. În acest scop să ne amintim că am putea folosi o metodă mecanică, făcînd uz de compunerea vitezelor. Notînd cu  $\vec{v}_1$  viteza unui mobil în sistemul de referință  $S$ , în sistemul  $S'$  ce se deplasează uniform cu viteza  $\vec{V}$  față de primul, viteza lui va fi:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{V}.$$

Dacă acum  $v_1 = c$ , atunci:

$$\vec{c}' = \vec{c} + \vec{V}.$$

Se pare că în acest fel vom reuși să creștem sau să scădem după voie viteza luminii. Pentru a fi siguri de reușită putem controla de exemplu viteza acestei unde prin metoda lui Fizeau, a roții dințate (fig. 3.2; § 3.1.5). Deoarece  $c$  este foarte mare, pentru a putea observa o variație a vitezei, va trebui ca  $\vec{V}$  să fie la rîndul ei foarte mare. În acest scop putem utiliza de exemplu undele luminoase provenite de la stele care știm că se mișcă față de noi cu o viteză, de obicei, foarte mare (vezi Fizica cl. a XI-a, Cap. 13).

Astfel de măsurători au fost făcute utilizînd radiația provenită de la unele stele. Rezultatul a fost însă surprinzător:

$$c' = c$$

indiferent de viteza relativă pe care o avea sursa de lumină. Faptul că viteza luminii rămîne nemodificată, indiferent de viteza de antrenare a sursei de lumină, pare a fi un rezultat paradoxal. Această afirmație este astăzi foarte bine verificată experimental\*.

\* De exemplu în 1964 s-a reconfirmat această afirmație pentru radiațiile emise de unele particule accelerate (mezoni  $\pi$ ) la viteze de  $v = 0,9975 \cdot c$ . Concluzia a rămas aceeași.

Ne aflăm astfel între două rezultate experimentale care sînt contradictorii: pentru toate experimentele obișnuite se obține (bine verificat experimental) o aditivitate a vitezelor de forma  $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{V}$ , pentru toate experimentele cu lumină se obține  $c' = c$ . Care este cauza lor și cum pot fi ele explicate?

Să analizăm care dintre cele două categorii de experimente este mai demn de crezare, primul sau al doilea? Cu toate că primul este un experiment pe care-l cunoaștem din viața de toate zilele și pare a fi foarte corect, cel de al doilea experiment este mai demn de crezare, deoarece s-a realizat pe o gamă extrem de mare de viteze ( $V = 0, \dots, 0,99 c$ ). Singura posibilitate pe care o avem este aceea de a acorda credit experimentului al doilea.

În orice caz se pare că în domeniul vitezelor foarte mari (neuzuale în viața de toate zilele) lucrurile sînt ceva mai complicate. Ar mai fi o cale de a ieși din impas și anume să verificăm dacă cele observate nu sînt cumva un caz particular valabil doar pentru undele electromagnetice. Această problemă o vom analiza în continuare, însă trebuie să reținem că:

**viteza luminii în vid\* nu poate fi modificată în nici un fel; ea rămîne egală cu  $c$ .**

În acest fel viteza luminii *nu este o mărime relativă, ci o mărime absolută!* De aceea mărimea vitezei luminii este o *consantă universală*.

### 3.5. NOȚIUNI DE TEORIA RELATIVITĂȚII

**3.5.1. Viteza luminii — viteză maximă.** Pentru a verifica cum se mișcă obiectele la viteze mari, trebuie să ne imaginăm un experiment în care să putem măsura toate mărimile fizice ce ne interesează și să vedem dacă ele sînt legate între ele prin legile pe care le cunoaștem din mecanică, legi care au fost deduse din generalizarea faptelor experimentale la viteze mici.

De exemplu, să verificăm dacă expresia energiei cinetice a unui corp de masă  $m$ , care se mișcă cu viteza  $v$  este valabilă și la viteze mari.

Dorim să obținem viteze extrem de mari, deci nu vom lucra cu bile sau cu alte obiecte uzuale, deoarece nu avem energie suficientă pentru a le imprima viteze comparabile cu  $c$  (de exemplu viteza rachetelor interplanetare este în jur de  $15 \text{ km/s} \ll$  față de  $300\,000 \text{ km/s}$  cât este viteza luminii). Putem lucra însă cu electroni care pe lângă că au masă foarte mică, au și sarcină electrică și deci pot fi accelerați ușor la viteza dorită.

În câmp electric, lucrul mecanic este  $eU$ , ( $U$ )— tensiunea de accelerare). Atunci:

$$eU = \frac{1}{2} mv^2.$$

\* Mai exact în „spațiul liber“, fără substanță și fără cîmpuri gravitaționale intense.

Pentru a verifica această relație observăm că  $U \sim v^2$  și deci accelerând la diverse tensiuni și reprezentând grafic în raport cu pătratul vitezei, trebuie să obținem o linie dreaptă. Sau altfel, viteza experimentală (care urmează să o măsurăm) exprimată în funcție de viteza teoretică calculabilă din relația

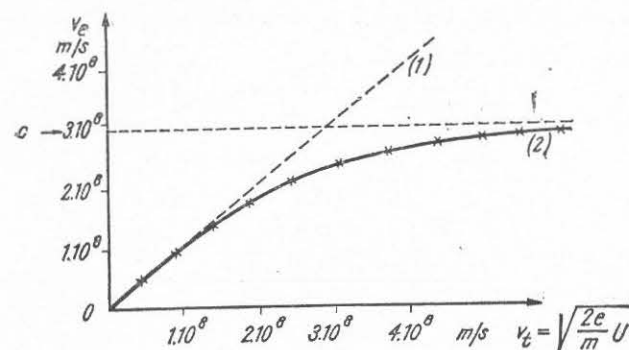


Fig. 3.29. Viteza electronului determinată experimental în funcție de valoarea ei calculată teoretic din diferența de potențial de accelerare. (1) — teoria clasică; (2) — rezultatul experimentului.

va fi o linie dreaptă, cu o înclinație de  $45^\circ$  dacă cele două variabile sînt exprimate la aceeași scară (fig. 3.29).

$$v_t = \sqrt{\frac{2e}{m}} U$$

Relația pe care dorim să o verificăm determină configurația dispozitivului experimental (fig. 3.30) \*.

Astfel, un filament și un anod accelerator vor furniza electroni de energia dorită. Viteza electronului o vom determina direct prin metoda timpului de zbor: măsurarea intervalului de timp necesar electronilor pentru a străbate o distanță  $L$ . În acest scop, într-un tub vidat se dispun: un cilindru  $A$  și o placă  $B$  legate de un osciloscop. Trecerea electronilor prin cilindru și căderea lor pe placă determină de fiecare dată un puls

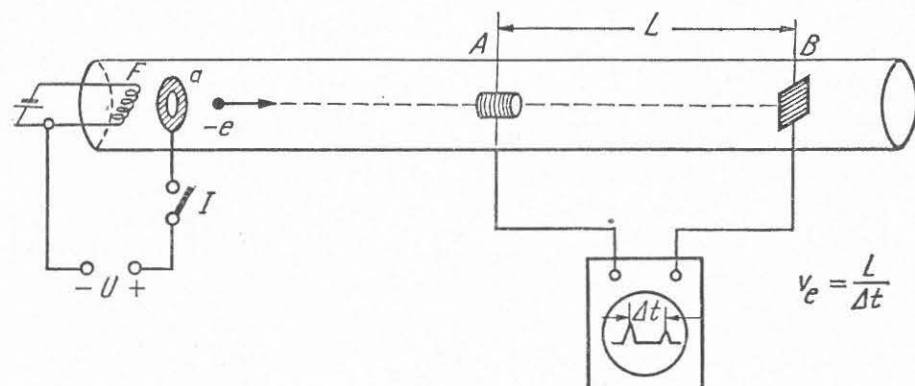


Fig. 3.30. Schema experimentului lui Bertozzi.  $F$  — filament;  $a$  — anod de accelerare;  $A$  — cilindru;  $B$  — placă.

ce se observă pe osciloscop. Deoarece spotul osciloscopului se deplasează cu o viteză constantă, intervalul dintre cele două pulsuri exprimă tocmai intervalul de timp căutat. De aici viteza poate fi calculată ușor,  $v_e = L/\Delta t$ .

\* Experimentul a fost efectuat în 1964 de către W. Bertozzi în S.U.A.

Experimentul ne arată că pînă la viteze de  $\sim 1 \cdot 10^7$  m/s, comportarea electronului este cea prevăzută din calcul,  $v_e = v_t$ . Dar treptat, pe măsură ce creștem energia electronului,  $v_e$  se abate tot mai mult de la valoarea așteptată,  $v_t (v_e < v_t)$ . Mai mult, modul de variație a vitezei reale are aspect de curbă ce tinde asimptotic (spre o limită pe care nu o depășește) către valoarea  $c$ !

Oare acest rezultat nu este cumva incorect? Poate faptul că viteza observată este mai mică decît cea care ar trebui să rezulte este determinat de o pierdere din energia electronului pe parcursul zborului. Pentru a ne convinge de acest lucru, se poate aranja astfel experimentul încît să determinăm și energia electronilor care ajung la  $B$ . În acest scop se determină creșterea de temperatură a plăcii  $B$  (cu ajutorul unui termocuplu). Cunoșcînd numărul de electroni care cad pe placă (măsurînd curentul) putem afla energia adusă de fiecare electron (încercați să exprimați matematic cele spuse). Această verificare a fost făcută, și concluzia ei este aceea că electronii *nu pierd din energia lor pe parcurs*!

Experimentul ne conduce astfel la următoarele concluzii:

a) corpurile nu se pot deplasa cu o viteză mai mare decît viteza luminii în vid  $c$ . Astfel viteza  $c$  reprezintă nu numai viteza luminii în vid ci și viteza limită în univers;

b) pentru viteze mari, energia cinetică nu mai este proporțională cu  $v^2$ .

Toate experimentele făcute pînă acum verifică prima concluzie iar teoriile care țin cont de ea conduc la rezultate experimentale în perfectă concordanță cu realitatea.

Ajungem astfel la un rezultat important și anume că mecanica obișnuită (clasică) este doar aproximativ exactă și anume, cu atît mai exactă cu cît viteza corpurilor este mai mică și cu atît mai inexactă cu cît viteza corpurilor este mai apropiată de  $c$ . Partea din fizică în care se descriu corect faptele experimentale, atît la viteze mari cît și la cele mici, se numește *teoria relativității restrînse* \*. Ea este rezultatul cercetărilor a nenumărați fizicieni, contribuția majoră fiind cea a lui A. Einstein (1905).

**3.5.2. Relativitatea galileeană și cea einsteiniană.** Pentru a „construi” o mecanică care să descrie în mod corect fenomenele indiferent de viteza corpurilor să însumăm datele pe care ne putem bizui pînă acum:

— energia cinetică nu este în general proporțională cu  $v^2$ ;

— viteza  $c$  este viteză limită în univers;

— viteza luminii în vid nu poate fi modificată, ea fiind o mărime absolută.

Prima observație nu pare a fi fundamentală în sensul că în locul relației  $E_e \sim v^2$ , va trebui să se găsească o altă relație mai exactă. A doua observație ar putea fi un element fundamental în înțelegerea fenomenelor naturii, element ce nu a fost luat în considerație în ipotezele de bază ale mecanicii.

\* Se numește *restrînsă*, deoarece A. Einstein a realizat o teorie *generală* (în 1916) care cuprinde și fenomenele de gravitație.



Pentru a descrie corect fenomenele mecanice va trebui să luăm în considerație acest fapt ca pe un postulat fundamental.

Mergînd mai departe, a treia observație este de asemenea esențială, deoarece se referă la o problemă fundamentală din mecanică și anume la relativitatea mișcării. Pe acest element se clădește întreaga mecanică clasică și cum ca urmare a ultimelor experimente am ajuns la a discuta acest aspect, rezultă că va trebui să reanalizăm mai cu atenție chiar bazele mecanicii.

Să ne reamintim deci relativitatea galileeană.

În mecanică am ajuns la concluzia că nu putem descrie mișcarea decît dacă o raportăm la un sistem de referință.

Poziția fiecărui punct material, va fi astfel exprimată, prin trei *coordonate*, față de un sistem de referință tridimensional \* de obicei cartezian (cu axe reciproc perpendiculare). Avînd în vedere că alegerea acestui sistem de referință este arbitrară, în sensul că este la bunul nostru plac, valorile celor trei numere pot fi oarecari. Cu alte cuvinte poziția unui punct fizic în spațiu, dată prin cele trei valori nu are o valoare absolută, ci una relativă. Acest lucru nu trebuie înțeles în sensul că punctul material nu se află undeva în spațiu, ci că localizarea lui prin cele trei numere este relativă.

Același lucru se poate spune și despre momentul la care are loc un eveniment exprimat față de o origine arbitrară a timpului (aceiași moment istoric poate fi exprimat față de un sistem calendaristic sau față de altul).

Are însă o valoare fizică intrinsecă absolută, de exemplu distanța între două puncte (lungimea) sau intervalul de timp între două evenimente (durata). Înțelegem prin aceasta că lungimea unui obiect sau durata unui fenomen nu depind de sistemul de referință față de care s-au făcut măsurătorile.

Mișcarea corpurilor (sau a punctelor materiale) poate fi exprimată față de un sistem de referință dat, ca o succesiune de poziții avute la diverse momente de timp. Ansamblul pozițiilor la diverse momente de timp poate fi exprimat printr-o funcție denumită *traietorie*. Ecuația traectoriei va depinde astfel de sistemul de referință. Aceasta exprimă așa-numita relativitate a mișcării.

La fel, putem spune că viteza unui obiect este relativă, deoarece el poate fi de exemplu în repaus față de un sistem și în mișcare față de un alt sistem de referință.

Astfel natura nu a putut să ne înzestreze cu un simț special pentru viteză. Noi, de exemplu, nu simțim în nici un fel că ne mișcăm în spațiu odată cu Pămîntul cu viteza de  $\sim 30$  km/s. Doar referirea la un sistem de referință ne permite sesizarea vitezei.

De aceea pare ciudată concluzia că viteza luminii în vid nu poate fi modificată și că deci ea are un caracter absolut. Acest caracter absolut îi este însă conferit de faptul că este în același timp și viteză limită. Ori aceasta

\* Sistemul de referință este tridimensional, deoarece acesta este numărul de dimensiuni ale spațiului geometric în care trăim. Este interesant de remarcat că nici o teorie nu ne explică, pînă în prezent de ce lumea noastră este tridimensională! Tridimensionalitatea trebuie deci luată ca un postulat.

se pare că este o *lege a naturii*. Ea trebuie să fie valabilă pentru *toate* sistemele inerțiale, deoarece pentru toate aceste sisteme viteza maximă trebuie să fie aceeași c.

Construirea noii mecanici trebuie deci să pornească de la postularea acestor adevăruri și luarea lor în considerație în mod consecvent.

*Postulatele teoriei relativității* vor fi deci:

- 1°. *Legile și principiile naturii rămîn nemodificate atunci cînd sînt exprimate față de diverse sisteme inerțiale;*
- 2°. *Valoarea vitezei luminii în vid este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale.*

Care sînt consecințele admiterii acestor două postulate?

În primul rînd ele schimbă modul în care abordăm și înțelegem conceptele fundamentale de spațiu și timp.

Newton, în dezvoltarea mecanicii, a postulat că spațiul și timpul sînt concepte fundamentale și absolute. Spațiul este dat inițial, el fiind o „scenă” în care se desfășoară evenimentele ca urmare a unei „scurgeri” uniforme și inexorabile a timpului. Astfel, lungimile și duratele sînt invariante (nu depind de sistemul de referință inerțial). Pentru a măsura spațiul și timpul putem găsi (cel puțin în principiu) aparate de măsură cu calități ideale: metrul, făcut din material *absolut rigid*, care poate fi dus oriunde pentru a măsura lungimile și ceasul care arată aceeași scurgere absolută a timpului în orice sistem inerțial. Aceste două dispozitive materializează postulatul invarianței lungimilor și duratelor. Putem alege originea pentru măsurarea spațiului sau timpului după cum dorim. Putem de asemenea alege lungimea și durata etalon după cum dorim; dar odată alese ele vor rămîne aceleași în orice sistem inerțial.

De exemplu, legea de compunere a vitezelor a fost stabilită în mecanica clasică pe baza conceptelor de durată și lungime absolute și este exprimată în mod explicit în relațiile de transformare ale lui Galilei. Relația de transformare a vitezelor ar trebui în consecință să se aplice și vitezei propagării interacțiunilor. Deci, viteza de propagare a interacțiunilor ar trebui să depindă de sistemul de referință inerțial. Dar această concluzie este infirmată de nenumăratele experimente care au condus la formularea celui de-al doilea postulat. De aici rezultă că durata nu poate fi o mărime absolută și că ea *trebuie* să depindă de mișcarea relativă a sistemelor de referință inerțiale. Timpul se scurge astfel, diferit în diferite sisteme de referință.

Pentru a fi cît mai siguri pe măsurătorile pe care le facem, vom căuta în continuare să găsim procedee care să se bazeze cît mai mult pe acele mărimi care sînt invariante, cum este de exemplu viteza luminii c.

Un procedeu de măsurare a distanței preconizat de teoria relativității este cel al radarului; se măsoară intervalul de timp ( $\Delta t$ ) necesar ca un semnal luminos (sau de altă frecvență) să se propage de la observator pînă la obiect și înapoi.

Ținând cont că viteza luminii este independentă de starea de mișcare a observatorului sau sursei, distanța  $L$  se determină atunci din:

$$L = c \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

Acest procedeu este deja utilizat curent, în măsurătorile fizice. El are avantajul că permite măsurarea distanțelor pînă la orice obiect, fie el în mișcare sau în repaus, cu maximă precizie posibilă. De remarcat, că un procedeu *mai bun* nici în principiu nu se poate găsi, deoarece toate măsurătorile se reduc pînă la urmă la transportul de informație care nu poate să depășească viteza  $c$ .

În plus, măsurarea intervalelor de timp, se poate face astăzi cu o precizie extraordinară utilizînd de exemplu ceasornicele atomice.

Măsurarea intervalelor de timp se poate face și bazîndu-ne pe constanța vitezei luminii în vid. Două ceasornice în două puncte oarecare pot fi *sincronizate* între ele trimițînd pulsuri de lumină. Momentul de timp pentru cel de al doilea ceasornic va fi  $t_2 = t_1 + \frac{r}{c}$ , unde  $r$  este distanța ce separă cele două ceasornice. Acesta este de exemplu modul în care ne fixăm ora exactă după radio sau după telefon. Informația va parcurge și aici distanța cu viteza maximă  $c$ . Întîrzierea este mică și astfel aproximația pe care o facem este în majoritatea cazurilor foarte bună.

Să vedem ce se poate spune despre intervalul de timp în cazul în care efectuăm măsurătorile în felul expus mai sus. În acest scop să vedem cum se va putea descrie propagarea unui semnal luminos față de două referențiale

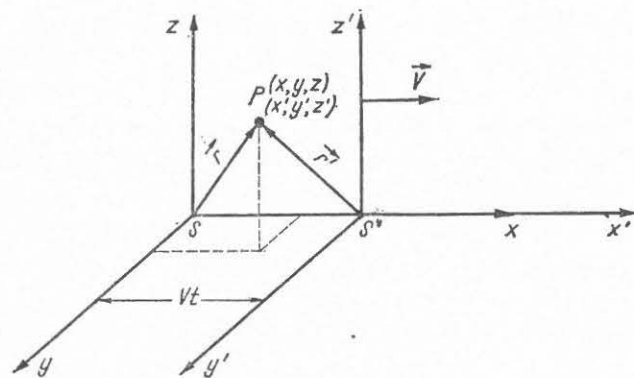


Fig. 3.31. Propagarea unui semnal luminos descris din două referențiale.

unde:  $\Delta x = x_2 - x_1$  ș.a.m.d., ridicînd la pătrat obținem:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0. \quad (3.43)$$

Această ecuație exprimă constanța vitezei luminii și de aceea ea va trebui să rămînă neschimbată dacă o exprimăm față de  $S'$ :

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0 \quad (3.44)$$

Se vede astfel că expresiile (3.43) și (3.44) rămîn egale cu zero cînd trecem de la un referențial la altul. Această mărime invariantă poartă numele de *interval relativist*  $(\Delta s)$  sau simplu interval (nu de spațiu sau de timp!), între două evenimente. Rezultă că dacă  $(\Delta s)^2 = 0$  și  $(\Delta s')^2 = 0$ .

Din faptul că cele două intervale sînt nule nu putem încă trage concluzia că cele două intervale sînt egale. Se poate totuși demonstra că:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \quad (3.45)$$

indiferent de valoarea intervalului: intervalul relativist este un invariant. Putem exprima distanța  $r$  ca fiind lungimea  $L$  și deci, obținem că:

$$L^2 - c^2(\Delta t)^2 = L'^2 - c^2(\Delta t')^2. \quad (3.46)$$

Să presupunem de asemenea că observatorul se află în referențialul  $S$ . El poate astfel să observe scurgerea timpului în referențialul propriu și în referențialul în mișcare  $S'$ . În intervalul de timp  $\Delta t$  (măsurat de observator în referențialul  $S$ ), ceasul din referențialul  $S'$  va parcurge o distanță egală cu  $\Delta x$  (presupunem o mișcare relativă a celor două referențiale pe direcția axei  $Ox$ ) măsurată în referențialul  $S$ . În referențialul  $S'$ , ceasul fiind în repaus, distanța parcursă va fi  $\Delta x' = 0$ . Intervalul fiind invariant, ne va permite să corelăm măsurătorile:

$$(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = -c^2(\Delta t')^2.$$

Împărțind cu  $(\Delta t)^2$

$$-c^2 \frac{(\Delta t')^2}{(\Delta t)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} - c^2.$$

Dar  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = V$ , viteza relativă a referențialelor.

Atunci:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Observatorul din  $S$  observă că intervalele de timp din  $S'$  au crescut și deci ceasul mobil indică o scurgere mai lentă a timpului. Acest rezultat fiind valabil pentru oricare referențial inerțial rezultă că totdeauna  $\Delta t' > \Delta t$ .

Rezultatul obținut nu este un caz particular doar pentru observatorul din  $S$ . Dacă observatorul s-ar fi găsit în  $S'$ , raționamentul ar fi fost identic și rezultatul pe care el l-ar fi obținut ar fi fost la fel: intervalele de timp în sistemul  $S'$  se succed mai rapid față de cele din sistemul  $S$  deoarece acum timpul propriu ar fi fost cel indicat de ceasul din  $S'$ . Această concluzie nu este deloc contradictorie; ea este un rezultat firesc ce decurge din echivalența tuturor referențialelor inerțiale.

Faptul că în discuție am utilizat cuvîntul ceas, nu înseamnă că el trebuie neapărat să fie un dispozitiv construit de om. El poate fi înlocuit de fapt prin orice proces periodic natural care ne poate da o unitate convenabilă pentru măsurarea intervalelor de timp. O astfel de unitate poate fi de exemplu

dată de inversul frecvenței unei radiații electromagnetice. Este evident că emisia radiației de către atomi nu depinde de sistemul inerțial utilizat pentru a descrie proprietățile fizice ale atomilor (de exemplu nivelele de energie). De aici rezultă că efectul relativist al dependenței duratelor de timp de mișcarea relativă a referențialelor este un efect pur cinematic.

Ajungem astfel la concluzia că postulatul constanței vitezei luminii se reflectă direct asupra relativității intervalului de timp și spațiu, care în mecanica newtoniană erau absolute.

Iată deci primele concluzii:

— odată ce nu există spațiu și timp absolut, intervalele spațiale și duratele devin și ele relative; se contractă, respectiv se dilată în funcție de mișcarea sistemului de referință.

— ceea ce rămâne însă nemodificat la exprimarea față de diverse sisteme de referință este expresia:

$$L^2 - c^2(\Delta t)^2.$$

În teoria relativității noțiunile de timp și spațiu formează o unitate structurală, fără ca ele să-și piardă identitatea.

Ele sînt însă dependente de sistemul de referință față de care descriem mișcarea.



## EXTINDERE ÎN FIZICĂ

**3.5.3. Transformările lui Lorentz.** Descrierea mișcării obiectelor va trebui să se facă astfel încît relativitatea galileeană să rezulte ca un caz particular valabil pentru viteze mici ( $v \ll c$ ). Transformările care înlocuiesc pe cele galileene se numesc *transformările lui Lorentz*.

Ele trebuie să satisfacă o serie de cerințe, ce decurg din postulatele relativității:

— să fie simetrice în raport cu ambele referențiale (echivalența referențialelor);

— să fie liniare, adică variabilele care intervin să apară la puterea întâi (altfel ele contrazic prima cerință);

— pentru situațiile limită ele trebuie să ne conducă la relațiile de transformare galileene ( $v \ll c$ ).

Deoarece relațiile de transformare galileene sînt corecte la viteze mici, pornim de la premisa că noile relații de transformare vor trebui să fie o generalizare a lor; putem să scriem atunci:

$$x' = k(x - Vt)$$

unde  $k$  este o constantă, deoarece dacă ar depinde de  $x$  sau  $t$ , relația nu ar mai fi liniară. Simetria față de cele două referențiale cere ca exprimarea față de celălalt referențial să păstreze forma relației și valoarea constantei  $k$ :

$$x = k(x' + Vt').$$

Împărțind prima relație prin  $t$  și a doua prin  $t'$  obținem:

$$\frac{x'}{t} = k \left( \frac{x}{t} - V \right); \quad \frac{x}{t'} = k \left( \frac{x'}{t'} + V \right).$$

Viteza luminii măsurată în ambele sisteme de referință trebuie să ne dea aceeași valoare  $c$ . În acest caz putem scrie că  $x = ct$  și  $x' = ct'$ .

Înlocuind în cele două ecuații și înmulțindu-le între ele membru cu membru, obținem:

$$\frac{ct'}{t} \cdot \frac{ct}{t'} = k^2 \left( \frac{ct}{t} - V \right) \left( \frac{ct'}{t'} + V \right) = k^2 (c - V)(c + V),$$

deci:

$$k^2 = \frac{c^2}{(c - V)(c + V)} = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

sau:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.47)$$

În acest caz relația de transformare pentru coordonata  $x$ , va fi:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.48)$$

Deoarece mișcarea relativă a celor două sisteme se petrece doar pe direcția axei  $Ox$ , celelalte două relații pentru coordonatele  $y$  și  $z$  rămîn nemodificate:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pentru a găsi relația de transformare pentru timp, vom utiliza invarianța intervalului și relația (3.48):

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (3.50)$$

Introducînd relațiile de transformare pentru coordonate obținem succesiv:

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 t^2 &= \frac{(x - Vt)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - c^2 t'^2 \\ c^2 t'^2 &= \frac{(x - Vt)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - x^2 + c^2 t^2. \end{aligned}$$



După efectuarea calculelor algebrice, obținem:

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.51)$$

care reprezintă a patra relație de transformare Lorentz și care arată modul în care cele două postulate ale relativității pot fi utilizate concret pentru descrierea mișcării față de sisteme inerțiale.

Relațiile de transformare Lorentz scrise pentru referențiale în mișcare relativă după axa  $Ox$  vor fi deci:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3.52)$$

sau transformările inverse ne dau:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3.53)$$

Pentru a le înțelege sensul să le utilizăm la rezolvarea citorva probleme concrete. Regăsim astfel ușor transformarea intervalului de timp. Să presupunem că într-un loc dat, exprimat față de referențialul  $S'$  se petrec două evenimente care se succed la intervalul de timp  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Care va fi intervalul de timp  $\Delta t$  măsurat de un observator din referențialul  $S$ ? Pentru aceasta vom aplica (3.53):

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

iar intervalul temporal va fi:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Obținem relația cunoscută: un ceas în mișcare față de un observator merge mai încet (rămâne în urmă) față de ceasul din sistemul observatorului. În teoria relativității nu se poate vorbi astfel de un timp universal, unic, ca în mecanica Newtoniană. Unitatea de timp bazată pe invarianța intervalului de timp este valabilă doar aproximativ, pentru sisteme în mișcare relativă cu viteze  $V \ll c$ . Observăm că acest lucru s-ar putea obține dacă  $c = \infty$ . În acest caz  $\Delta t = \Delta t'$  și ar exista un interval de timp invariant pentru orice observator. Rezultă că mecanica Newtoniană are la bază ipoteza că acțiunile se pot propaga instantaneu la distanță.

În particular, în această situație, putem să acceptăm că este posibilă sincronizarea ceasurilor din toate sistemele inerțiale printr-un semnal transmis instantaneu. Deoarece  $v < c$ , acest lucru nu se mai poate realiza.

Dacă două evenimente au loc la două momente  $t'_1$  și  $t'_2$  în referențialul  $S'$ , dar contrar discuției anterioare ele se petrec în două locuri diferite  $x'_1$  și  $x'_2$ , atunci intervalul de timp între evenimentele măsurate de un observator din  $S$  va fi:

$$\Delta t = \gamma \left( t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2 \right) - \gamma \left( t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1 \right).$$

Am notat pentru simplificarea scrierii  $1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . În continuare:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' + \gamma \frac{V}{c^2} \Delta x'.$$

Relația pe care am obținut-o ne arată că dacă două evenimente care au loc în punctele  $x'_1$  și  $x'_2$  sînt simultane în  $S'$  ( $\Delta t' = 0$ ) ele nu mai sînt simultane în  $S$ :

$$\Delta t = \frac{\gamma V}{c^2} \Delta x'.$$

Deci, evenimentele sînt simultane atît în  $S'$  cît și în  $S$  doar dacă ele au loc în același punct:  $\Delta x' = 0$ .

Dacă  $\Delta x' \neq 0$ , succesiunea evenimentelor în  $S$  ar putea fi diferită de cea din  $S'$  în funcție de pozițiile în care au loc evenimentele. Să presupunem că succesiunea evenimentelor este  $t'_1 \rightarrow t'_2$ , adică  $\Delta t' = t'_2 - t'_1 > 0$ . Pentru ca succesiunea evenimentelor din  $S$  să fie inversată trebuie ca  $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$ , adică este necesar ca:

$$\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x' < 0$$

sau:

$$c(t'_2 - t'_1) < \frac{V}{c} (x'_1 - x'_2) \rightarrow c < \frac{V}{c} \frac{(x'_1 - x'_2)}{(t'_2 - t'_1)} = \frac{V}{c} \cdot v'.$$

Cum  $\frac{V}{c} < 1$  și cum nici un interval spațial nu poate fi acoperit cu o viteză mai mare ca  $c$  ( $v' < c$ ), inegalitatea de mai sus nu poate fi îndeplinită decât de evenimente care nu pot fi legate între ele cauzal. Cu alte cuvinte, dacă evenimentul  $t'_2$  este într-un fel determinat de evenimentul  $t'_1$  atunci totdeauna:

$$c(t'_2 - t'_1) > \frac{V}{c} (x'_1 - x'_2)$$

și deci  $\Delta t > 0$ ; cele două evenimente își păstrează astfel ordinea cauzală în orice referențial inerțial.

Să discutăm problema măsurării distanțelor. Pentru a măsura de exemplu lungimea unui obiect trebuie să-l comparăm cu un etalon pe care să-l suprapunem peste obiect și să citim simultan coordonatele capetelor. Acest lucru se poate realiza într-un sistem în repaus cu observatorul (sistem propriu); să presupunem că acest sistem este  $S$ .

Coordonatele obiectului pe axa  $Ox$  în referențialul  $S$  sînt  $x_1$  și  $x_2$ . Lungimea lui în  $S$  va fi atunci  $|\Delta x| = |x_2 - x_1| = L$ .

Măsurînd obiectul din referențialul  $S'$  (în mișcare față de  $S$ ) la momentul  $t'$ , din relațiile de transformare Lorentz vom obține coordonatele:

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt') \quad \text{și} \quad x_2 = \gamma(x'_2 + Vt')$$

și deci lungimea  $L$  a obiectului în  $S'$  va fi dată de:

$$L = \gamma L'.$$

Se vede astfel că obiectul are o lungime care este maximă cînd este măsurată în raport cu un sistem în repaus față de obiect. Aceasta poartă numele de *lungime proprie* a obiectului. Măsurată din oricare alt referențial inerțial lungimea va fi mai scurtă pe direcția de mișcare. Acest rezultat poartă numele de *contracție Lorentz*.

**Problemă rezolvată.** Să se deducă cu ajutorul relațiilor de transformare Lorentz, legea de compunere a vitezelor.

*Rezolvare.*

Să notăm cu  $u' = x'/t'$  viteza unui mobil față de sistemul de referință  $S'$  și cu  $u = x/t$  viteza sa față de sistemul  $S$ . Cele două sisteme se află în mișcare relativă cu viteza  $V$ . Să luăm în considerație relațiile de transformare Lorentz pentru  $x$  și  $t$ :

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Să calculăm direct  $u' = x'/t'$

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - Vt}{t - \frac{V}{c^2} x}.$$

Împărțind cu  $t$  în membrul al doilea, obținem:

$$u' = \frac{\frac{x}{t} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{u - V}{1 - \frac{V \cdot u}{c^2}}.$$

Sau reciproc, obținem:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u' V}{c^2}} \quad (3.54)$$

care ne dă relația relativistă a transformării vitezelor.

Din această relație rezultă că pentru viteze mici,  $u'V \ll c^2$ , relația de compunere a lui Galilei este corectă. În schimb pentru viteze mari există deosebiri esențiale. Astfel dacă alegem  $u' = V = c$  obținem  $u = c$  și nu  $2c$  cum prevăd relațiile lui Galilei. Rezultă astfel că viteza luminii este  $c$  în orice referențial inerțial, indiferent de viteza lui relativă. Relația obținută reflectă astfel postulatul constanței vitezei luminii.

**3.5.4. Impulsul, masa și energia în teoria relativității.** Modificările determinate în cinematica mișcării prin trecerea de la transformările galileene la cele lorentziene se vor reflecta și asupra dinamicii mișcării obiectelor.

Să le analizăm pornind de la o mărime fundamentală a dinamicii: impulsul.

Conform principiului relativității dacă impulsul se conservă într-un referențial, el se va conserva și în alt referențial inerțial.

Pentru a vedea ce modificări implică relativitatea, să analizăm cazul particular al unei ciocniri inelastice, frontale, între două sfere de aceeași masă  $m$  care se mișcă una spre cealaltă cu aceeași viteză  $v$ . Conform mecanicii newtoniene în referențialul centrului de masă impulsul total este nul, iar după ciocnirea inelastică cele două bile vor rămîne

pe loc, energia cinetică inițială regăsindu-se sub formă de energie internă a bilelor (de deformare plastică sau de agitație termică). Un observator aflat într-un referențial legat de una din bile va observa că mișcarea celeilalte bile se face cu o viteză  $2v$ . În acest referențial, după ciocnire, cele două bile se vor deplasa cu aceeași viteză  $v$ . Aceste date sînt însumate în tabelul de mai jos:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>înainte:</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>m \xrightarrow{v}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\xleftarrow{-v} m</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>m \xrightarrow{2v}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>m</math> </div> </div> | <p><i>după:</i></p> <div style="text-align: center;"> <math>2m \xrightarrow{v}</math> </div> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|

Dacă dorim să descriem această ciocnire ținînd cont de cinematica relativistă va trebui să ținem cont de relația de transformare a vitezelor la trecerea de la referențialul centrului de masă la cel legat de una din bile:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>înainte:</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>m \xrightarrow{u}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>m</math> </div> </div> <p style="margin-top: 10px;"> <math>u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}</math> </p> | <p><i>după:</i></p> <div style="text-align: center;"> <math>2m \xrightarrow{v}</math> </div> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|

Ceea ce observăm din această descriere este faptul că impulsul newtonian total înainte și după ciocnire nu se mai conservă:

$$m \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \neq 2mv.$$

Deoarece legea de conservare a impulsului este o lege fundamentală a naturii, pentru a o păstra sîntem nevoiți să redefinim, fie impulsul, fie masa. În dinamica relativistă se redefinește masa, astfel încît un corp în repaus este caracterizat prin *masa de repaus* care diferă de aceea a corpului în mișcare.

Pentru a găsi modul în care trebuie să redefinim masa vom cere ca impulsul definit prin intermediul masei dependente de viteză,  $m_v$ , să se conserve. De asemenea vom cere conservarea masei totale de mișcare, ca o extensie a legii conservării masei din mecanica newtoniană. Situația se va descrie acum astfel:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>înainte:</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>m_u \xrightarrow{u}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>m_0</math> </div> </div> <p style="margin-top: 10px;"> <math>u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}</math> </p> | <p><i>după:</i></p> <div style="text-align: center;"> <math>M_v \xrightarrow{v}</math> </div> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|

iar legile de conservare vor fi:

$$m_u + m_0 = M_v \quad (3.55)$$

$$m_u \cdot u = M_v \cdot v.$$

Introducînd pe  $M_v = m_u \cdot \frac{u}{v}$  în prima ecuație obținem:

$$m_u + m_0 = m_u \cdot \frac{u}{v}; \quad m_u = \frac{m_0}{\frac{u}{v} - 1}. \quad (3.56)$$

Dar  $u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$  și de aici îl putem scoate pe  $v$  în funcție de  $u$ :

$$v = \frac{c^2}{u} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right] \text{ sau } \frac{uv}{c^2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Pentru a alege semnul corect scriem relația pentru cazul particular  $u = 0$ :

$$0 = 1 \pm 1$$

care arată că semnul care trebuie păstrat este minus. Deci:

$$v = \frac{c^2}{u} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right].$$

Introducînd pe  $v$  în (3.56) obținem după calcule:

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.57)$$

Această relație ne arată modul în care trebuie modificată expresia masei pentru ca impulsul să se conserve. Impulsul relativist va fi:

$$\vec{p} = m_v \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.58)$$

Relația (3.58) obținută pentru impuls trece în relația clasică  $\vec{p} = m_0 \vec{v}$  atunci cînd  $v \ll c$ .

Legea a doua a lui Newton se va scrie:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (3.59)$$

Ea diferă de forma nerelativistă a legii doar prin faptul că masa din expresia impulsului depinde de viteză. Pentru cazul nerelativist

$$\vec{F} = \frac{d(m_0 \vec{v})}{dt} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \vec{a}.$$

Pentru a găsi expresia energiei cinetice a unui corp în teoria relativității, să analizăm lucrul mecanic efectuat de o forță  $\vec{F}$  asupra unui



corp de masă  $m$ . Pentru o deplasare pe distanța (infinitesimală)  $d\vec{s}$ , lucrul mecanic va fi  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = dE_c$ , egal cu creșterea energiei cinetice a corpului ( $dE_c$ ). Deoarece  $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ , vom putea scrie că

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.60)$$

Produsul scalar  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  poate fi prelucrat astfel:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} + m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Observăm că  $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$  și că:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Utilizând aceste două observații

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt} \cdot v^2 + \frac{m}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{dt}. \quad (3.60')$$

Pentru a calcula derivata lui  $v^2$ , utilizăm expresia variației masei cu viteza:

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \rightarrow v^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right].$$

De aici

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -m_0^2 c^2 \frac{d(m^{-2})}{dt} = -m_0^2 c^2 \frac{d(m^{-2})}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} = \frac{2m_0^2 c^2}{m^3} \frac{dm}{dt}. \quad (3.60'')$$

Introducând în relația (3.60) și ținând cont de (3.60') și (3.60'') obținem

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt} \left[v^2 + \frac{m_0^2 c^2}{m^2}\right] = \frac{dm}{dt} \left[v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{dm}{dt} \cdot c^2.$$

Dacă particula pornește din repaus, energia cinetică pe care o va avea atunci când va atinge viteza  $v$  se va obține prin integrare:

$$\int_0^{E_c} dE_c = \int_{m_0}^m c^2 dm; \quad E_c = mc^2 - m_0 c^2. \quad (3.61)$$

Deoarece termenul  $m_0 c^2$  corespunde vitezei  $v = 0$ , el se numește *energie de repaus*. În acest caz energia pe care o posedă o particulă când se mișcă cu viteza  $v$  va fi:

$$E = E_c + m_0 c^2 = mc^2. \quad (3.62)$$

Spunem astfel ca energia totală a unui sistem fizic ce posedă masa de mișcare  $m$  va fi

$$E = mc^2. \quad (3.63)$$

Această relație extrem de importantă (formula lui Einstein) ne arată că între masa unui sistem fizic și energia lui există o strictă de-

pendență. Relația exprimă astfel faptul că oricărei variații de energie  $\Delta E$ , îi corespunde o variație de masă a sistemului, dată de

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (3.64)$$

și reciproc. Din cauza numitorului  $c^2$ , de valoare foarte mare, variația masei, pentru variații uzuale de energie este neglijabil de mică.

Tot din această relație decurge faptul că masa de repaus nu se conservă, ci se conservă doar energia. Dar pentru variații nu prea mari de energie, neconservarea masei de repaus este inobservabilă și ea poate fi considerată o mărime aditivă. Pentru procese în care are loc un transfer mare de energie, masa nu mai poate fi considerată o mărime aditivă. Acesta este de exemplu cazul reacțiilor nucleare. (Fizica cl.XI cap. 16; 17.)

Relația lui Einstein exprimă odată mai mult faptul că toate „formele” de energie corespund unei singure mărimi fizice: energia.

## ÎNTREBĂRI. EXERCIIII. PROBLEME

1. Puteți explica din ce cauză relația (3.1) cu toate că definește matematic corect intensitatea cîmpului electric, nu este într-un totu corectă fizic?

2. Un pendul electric este încărcat electric cu o sarcină necunoscută  $q$ . Un al doilea pendul, încărcat cu sarcină cunoscută  $q_0$ , este utilizat ca „aparat de măsură”. Apropiind pendulul al doilea de primul, el deviază cu un unghiul  $\alpha$ .

a) Determinați relația de calcul care să permită deducerea lui  $q$ .

b) Exprimați eroarea pe care o faceți în măsurarea lui  $q$  dacă nu țineți cont de influența reciprocă a celor două pendule.

c) Descrieți condițiile în care aparatul de măsură nu perturbă sistemul de măsurat.

3. Analizați căderea liberă în cîmp gravitațional a unei haltere ce are la capete două corpuri cu mase egale și a cărei lungime o presupunem că nu este neglijabil de mică în raport cu raza Pămîntului. Descrieți mișcarea haltere dacă ea se află inițial în repaus într-o poziție oarecare.

4. Determinați modul în care variază intensitatea cîmpului gravitațional pe direcția Pămînt—Lună. Găsiți punctul în care acest cîmp se anulează ( $M_P = 6 \cdot 10^{24}$  kg;  $M_L = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg;  $D_{PL} = 3,84 \cdot 10^5$  km;  $R_P = 6\,360$  km;  $R_L = 1\,740$  km).

R:  $3,5 \cdot 10^5$  km.

5. Calculați dependența de altitudinea  $h$ , deasupra unui loc, a accelerației gravitaționale și determinați zona în care variația relativă  $\left(\frac{\Delta g}{g}\right)$  nu depășește 0,01% ( $R_P = 6\,360$  km).

R:  $h \leq 318$  m.

6. Care este intervalul de timp între momentul în care s-a produs un fulger și momentul de observație, dacă primul tunet s-a auzit la 11 s după observarea fulgerului. Analizați eroarea în determinarea distanței prin procedeul descris mai sus ( $v_s = 340$  m/s).

R:  $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-2}$  s.

7. Știind distanța Soare—Pământ să se calculeze timpul necesar parcurgerii acestei distanțe de către lumină ( $D_{SP} \approx 1,49 \cdot 10^8$  km).

$$R: \Delta t = 8^m 18^s.$$

8. O metodă de determinare a vitezei luminii, asemănătoare metodei lui Fizeau, a fost utilizată de către Michelson (1928). În locul roții dințate, el a utilizat o oglindă octogonală rotitoare a

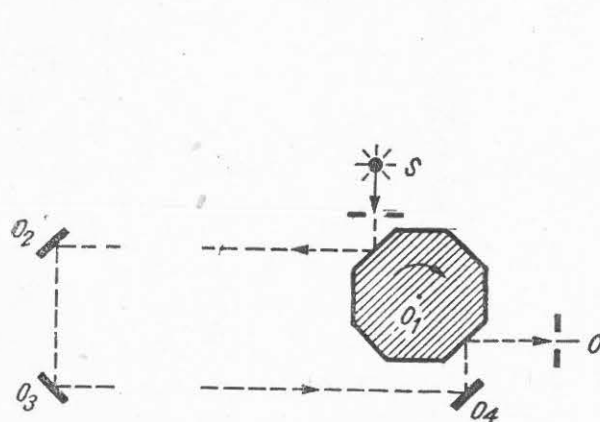


Fig. 3.32. Pentru problema 8. Schema de măsurare a vitezei luminii în experimentul lui Michelson. S — sursa de lumină;  $O_1$  — oglindă rotitoare;  $O_2, O_3, O_4$  — oglinzi;  $O'$  — observator.

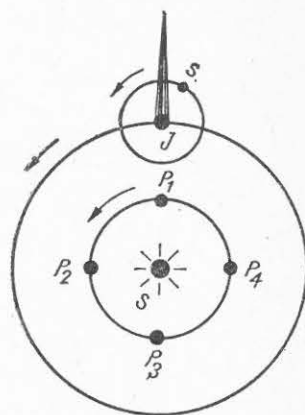


Fig. 3.33. Pentru problema 9. Schema de măsurare a vitezei luminii în experimentul lui Römer. S — Soarele,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  — poziții ale Pământului; J — Jupiter, s — satelit al lui Jupiter.

cărei turație putea fi modificată,  $O_1$  (fig. 3.32). Oglinzile fixe  $O_2$  și  $O_3$  se aflau la o mare distanță de oglindă rotitoare.

Să se explice modul în care această metodă poate fi utilizată pentru determinarea vitezei luminii. Să se calculeze viteza luminii știind următoarele: distanța  $O_1$  — munte = 35,4 km, prima reapariție a imaginii sursei de lumină S, sesizată de observator s-a petrecut pentru o turație a oglinzii de  $N = 530$  s<sup>-1</sup>.

$$R: c = 3,00 \cdot 10^5 \text{ km/s.}$$

9. Prima determinare a vitezei luminii a fost efectuată de astronomul danez O. Roemer (1675). Metoda lui s-a bazat pe observația că eclipsa sateliților lui Jupiter se petrecea la momente diferite de cele calculate în funcție de poziția Pământului (fig. 3.33). În poziția  $P_1$  eclipsa se produce mai devreme cu  $8^m 18^s$  față de cazul când Pământul se găsea în pozițiile  $P_2$  sau  $P_4$ ; iar în  $P_3$  mai târziu ca în  $P_2$  sau  $P_4$  tot cu aceeași valoare:  $8^m 18^s$ . Să se calculeze de aici viteza luminii știind că raza medie a orbitei Pământului este  $1,49 \cdot 10^8$  km și distanța medie Pământ-Jupiter este  $7,77 \cdot 10^8$  km.

$$R: c = 2,99 \cdot 10^5 \text{ km/s.}$$

10. De ce nu observăm efecte de interferență între fasciculele de lumină emise de două lanterne sau între două unde sonore emise de două viori?

11. Cum se repartizează energia într-un câmp de interferență?

12. Care este numărul de lungimi de undă ce intră pe o distanță de 2,4 mm pentru o radiație monocromatică cu  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  s<sup>-1</sup> în vid, sticlă și diamant? ( $n_{st} = 1,60$ ;  $n_d = 2,417$ )

$$R: 4 \cdot 10^3; 6 \cdot 10^3; 9,7 \cdot 10^3.$$

13. Să se arate că legea de refracție pentru unde electromagnetice poate fi considerată ca o consecință a afirmației: o undă se propagă între două puncte A și B (fig. 3.34) astfel încât intervalul de timp să fie minim (principiul lui Fermat). Să se arate că această proprietate este reversibilă în raport cu sensul de parcurgere a drumului între A și B.

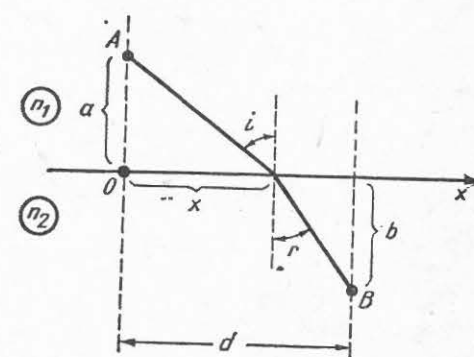


Fig. 3.34. Pentru problema 13.

14. Două radiații luminoase din zona galbenă a spectrului ( $\lambda = 600$  nm) se întâlnesc într-un punct. Având o diferență de drum de 0,3 mm să se deducă starea de interferență din acel punct.

R: maxim.

15. Un dispozitiv de interferență de tip Young este iluminat cu o radiație de  $\lambda = 680$  nm și are distanța  $d = 2$  mm între fante. Dacă ecranul se află la 1 m de fante, să se calculeze la ce distanță trebuie deplasat paravanul pentru ca în poziția maximumului de ordinul întâi să se găsească acum maximumul de ordinul doi?

$$R: 0,5 \text{ m.}$$

16. Ce repercusiuni ar avea asupra figurii de interferență (și asupra calculului figurii) într-un dispozitiv Young utilizarea a două fante de diametre diferite?

17. Calculați structura figurii de interferență într-un experiment de tip Young dacă la mijloc, între cele două fante, se practică încă o fantă identică cu cele două existente?

18. Arătați că razele provenite de la o sursă punctiformă, plasată pe axul optic al unei lentile, în punctul imagine interferă constructiv. Verificați afirmația pe două raze, una ce trece prin centrul optic al lentilei și alta ce merge de la marginea lentilei. (Indicație: arătați că diferența de drum optic este nulă.)

19. Să se stabilească caracteristicile unui dispozitiv interferențial format din două oglinzi plane foarte puțin înclinate una față de alta (fig. 3.11). Caracteristicile de interes sînt: distanța dintre cele două surse virtuale, interfranja, lărgimea zonei de interferență de pe ecran.

20. Să se arate că dacă se compun oscilațiile determinate de două unde:  $u_1 = a_1 \cos \omega t$  și  $u_2 = a_2 \cos (\omega t + \varphi)$  ce se întâlnesc într-un punct din spațiu, se poate scrie:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \varphi.$$

(Indicație: se poate utiliza o reprezentare fazorială ca în figura 3.35.)

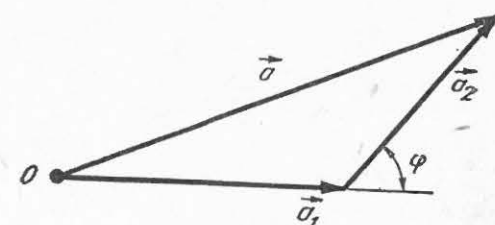


Fig. 3.35. Pentru problema 20.

21. Se poate arăta că la distanță mare de o sursă de unde electromagnetice, raportul dintre amplitudinile cîmpului electric și magnetic ale undei este constant și egal cu viteza luminii:  $E_0/B_0 = c$ . Să se argumenteze pe această bază cauza pentru care la intensități nu prea mari, intensitatea cîmpului magnetic are o valoare neglijabil de mică.

22. La întrebarea „este aceasta o suprafață plană?” se răspunde cu o altă întrebare „pentru ce lungime de undă?”. Explicați de ce?

23. Să se demonstreze că pentru o prismă optică, de unghi  $A$  și indice de refracție  $n$ , dispersia unghiulară la deviație minimă este dată de relația:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

(Indicație: la deviație minimă radiația parcurge prisma simetric: unghiul de incidență este egal cu unghiul de emergență așa cum se arată în figura 3.36)

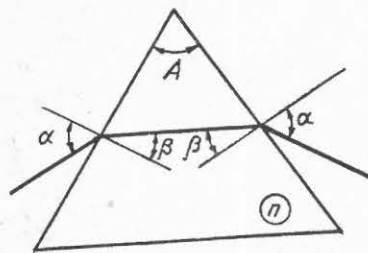


Fig. 3.36. Pentru problema 23.

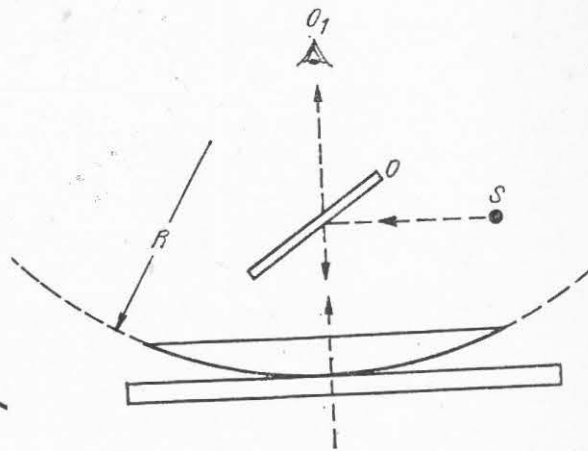


Fig. 3.37. Pentru problema 24.  $O$  — oglindă semi-transparentă;  $O_1$  — observator.

24. Pentru a se observa figurile de interferență denumite inelele lui Newton, se suprapun: o placă de sticlă optic plană și o lentilă plan convexă cu raza de curbură  $R$  (fig. 3.37). Se iluminează cu radiație monocromatică. Se cere să se descrie figura de interferență ce se va putea vedea privind vertical asupra sistemului și modul în care variază interfranja cu depărtarea de centru. (Să se calculeze pentru  $\lambda = 589 \text{ nm}$  și  $n = 1,52$ .)

25. Care este constanta unei rețele de difracție pentru care maximul de difracție de ordinul al doilea se formează la un unghi de  $30^\circ$ , știind că radiația incidentă are  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ?  
R:  $500 \text{ nm}^{-1}$ .

26. Pe direcția unuia dintre două fascicule de lumină ce interferă, se interpune o lamă plan paralelă de grosime  $d$  și de indice de refracție  $n$  față de mediu. Să se discute modificările ce apar în figura de difracție obținută pe ecran.

27. Experimentele arată că indicele de refracție,  $n$ , a unui gaz ascultă în primă aproximație de legea (lui Gladstone):

$$\frac{n - 1}{\rho} = \text{constant}$$

unde  $\rho$  este densitatea gazului. Să se determine:

- valoarea constantei pentru aer ( $n = 1,0003$  pentru  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , densitatea aerului la presiune și temperatură normală este de  $1,206 \text{ kg/m}^3$ );
- cu cât variază  $n$  pentru o creștere de temperatură de  $1^\circ\text{C}$ ?

c) cu cât variază  $n$  dacă presiunea aerului crește cu  $1 \text{ mm coloană de mercur}$  ( $= 1,33 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ )?

R: a)  $2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ ; b)  $\Delta n = 1,1 \cdot 10^{-5}$ ; c)  $\Delta n = 3,95 \cdot 10^{-6}$ .

28. Într-un experiment de difracție Young s-au obținut franje de interferență cu interfranja egală cu  $1,9 \text{ mm}$ . Știind că distanța dintre fante este de  $0,7 \text{ mm}$  și că distanța pînă la ecran este de  $2,26 \text{ m}$  să se calculeze lungimea de undă a radiației utilizate.

R:  $588 \text{ nm}$ .

29. Dacă radiațiile  $X$  de lungimi de undă  $0,148 \text{ nm}$  și  $0,128 \text{ nm}$  sînt trimise asupra unui cristal de calcită, se observă reflexii puternice în ordinul doi, pe planele principale cristaline, la unghiurile Bragg de  $29^\circ 12'$  și  $27^\circ 0'$ . Să se determine valoarea medie a distanței între planele cristaline la calcită.

R:  $3,03 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

30. O serie de radiații  $X$  de diverse lungimi de undă, sînt puternic reflectate în ordinul întâi de către planele principale cristaline ale cristallului de  $\text{KCl}$ . Știind că reflexiile se petrec la unghiurile Bragg de  $14^\circ 47'$ ,  $14^\circ 53'$  și  $16^\circ 30'$ , să se găsească lungimile de undă ale celor trei radiații, dacă distanța dintre planele cristaline ale  $\text{KCl}$  este de  $0,314 \text{ nm}$ .

R:  $0,16$ ;  $0,162$ ;  $0,178 \text{ nm}$ .

31. Imaginați modul în care s-ar desfășura fenomenele în cazul în care interacțiunile s-ar putea propaga cu viteză infinită.

32. Care este distanța pe care o va parcurge Pămîntul pe orbită între momentul în care pe Soare se petrece un eveniment și momentul în care se va observa el pe Pămînt? ( $v_P = 30 \text{ km/s}$ ;  $D_{SP} = 1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$ .)

R:  $1,49 \cdot 10^4 \text{ km}$ .

33. Calculați care este viteza de propagare a luminii în apă și sticlă ( $n: 1,33$  și  $1,65$  pentru  $\lambda = 590 \text{ nm}$ ).

R:  $2,254 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $1,817 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

34. Determinați modul în care depinde viteza luminii în aer de presiunea atmosferică.

35. O navă cosmică automată se îndepărtează de Pămînt cu viteză constantă. Să se analizeze cum trebuie trimise semnalele de corectare a traiectoriei pentru ca ele să acționeze în puncte bine determinate ale traiectoriei.

36. Care este componenta electrică a energiei radiante care traversează unitatea de suprafață în unitatea de timp, dacă intensitatea cîmpului electric al unde este de  $200 \text{ V/m}$ .

R:  $w_e \cdot c = 53,1 \text{ W/m}^2$ .

37. Care este intensitatea cîmpului electric și magnetic al unei unde a cărei intensitate energetică este de  $100 \text{ W/m}^2$ ?

R:  $194 \text{ V/m}$ ;  $6,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ .

38. O bară dreaptă, lungă, face un unghi  $\theta$  cu axa  $Ox$ . Bara se mișcă în direcția  $Oy$  cu viteza  $V$ .

a) Determinați viteza  $v$  a punctului de intersecție al barei cu axa  $Ox$ , de-a lungul acestei axe.

b) Calculați această viteză pentru  $V = 10^8 \text{ m/s}$  și  $\theta = 0,1 \text{ rad}$ .

c) Este corect rezultatul obținut la punctul b)? Contrazice el principiul al doilea al teoriei relativității? Discutați răspunsul.

R: a)  $v = V \cos \theta$ ; b)  $10^9 \text{ m/s}$ ; c) da, nu.



39. Un obiect de lungime 1 m se găsește într-o rachetă ce se deplasează față de Pământ cu viteza de 0,99  $c$ . Ce lungime va avea obiectul dacă este măsurat de către un observator de pe rachetă?

R: 1 m.

40. Două particule se mișcă una către alta, fiecare cu viteza de 0,9  $c$  în raport cu Pământul. Care va fi viteza lor relativă?

R: 0,995  $c$ .

41. Să se arate că o particulă, după ce a străbătut o diferență de potențial  $U$ , va avea o viteză care calculată relativist ( $v_r$ ) se va exprima în funcție de cea calculată nerelativist ( $v_n$ ) prin relația:

$$\frac{v_r}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\alpha U + 2}}{\alpha U + 1}$$

unde  $\alpha = \frac{q}{mc^2}$ ,  $q$  — sarcina particulei (în modul) și  $m$  — masa particulei.

42. Să se arate că  $\gamma^{-2} = 2x - x^2 \simeq 2x$  pentru cazul în care  $v/c$  este apropiat de 1. Se notează  $x = 1 - v/c$ .

43. Utilizând relațiile de transformare Lorentz, verificați invarianța intervalului relativist.

44. Într-un accelerator de particule se accelerează protoni la energia de 125 GeV. Care va fi masa protonului la această energie?

R:  $m = 134,2 \cdot m_0$ .

45. Să se exprime masa de mișcare a unei particule în funcție de energia sa cinetică.

R:  $m = \left(1 + \frac{E_c}{E_0}\right) m_0$ .

46. Să se calculeze energia de repaus a unui electron și a unui proton.

R:  $(m_0 c^2)_e = 0,511 \text{ MeV}$ ;  $(m_0 c^2)_p = 938,3 \text{ MeV}$ .

47. Care este creșterea de masă a unei particule cu masa de repaus  $m_0$  și sarcina  $Ze$  atunci când este accelerată de o diferență de potențial  $U$ ? Să se aplice la cazul electronului ce străbate o diferență de potențial de 10 MV. ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

R:  $\Delta m = m - m_0 = \frac{ZeU}{c^2}$ ;  $\Delta m = 1,78 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ ;  $\left(\frac{\Delta m}{m_0} = 19,54\right)$ .

48. Să se exprime energia cinetică a particulei în funcție de raportul  $n$  dintre masa de mișcare și cea de repaus a unei particule  $\left(n = \frac{m(v)}{m_0}\right)$ .

R:  $E_c = m_0 c^2 (n - 1)$ .

49. Soarele emite pe minut o energie  $E = 6,6 \cdot 10^{31} \text{ kWh}$ . Calculați după cât timp masa Soarelui se va reduce la jumătate? (Indicație:  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ ;  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ).

R:  $t = 7 \cdot 10^{12} \text{ ani}$ .

50. Cea mai mică valoare a masei pe care o poate măsura o balanță dată este de 0,01 mg. Cât de mare ar trebui să fie energia eliberată într-o reacție chimică pentru a putea detecta cu balanța variația corespunzătoare de masă?

R:  $0,9 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

51. Arătați că între energia totală  $E$ , impulsul  $p$  și masa de repaus  $m_0$  a unei particule există relația:  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ .

## 4.

### SISTEM CUANTIC

#### 4.1. EFECTUL FOTOELECTRIC

4.1.1. Fenomenul fotoelectric și explicarea lui. Fenomenul de emisie a electronilor din unele metale sub influența luminii poartă numele de efect fotoelectric. El a fost observat de mulți fizicieni printre care H. Hertz (1887) și W. Hallwachs (1888). Fenomenul nu a putut fi explicat în acel moment, deoarece electronul încă nu fusese descoperit. Abia în 1899 J. J. Thomson, descoperitorul electronului, arată că sub influența luminii se emit electroni.

Studiile efectuate asupra acestui efect au permis, pe lângă înțelegerea mecanismului producerii fenomenului și efectuarea unui prim pas în înțelegerea și mai adâncă a naturii luminii. Fără înțelegerea acestui efect (și încă a câtorva care s-au descoperit ulterior, de exemplu efectul Compton), fenomenele luminoase ar fi fost explicate în continuare considerînd lumina ca fiind de natură ondulatorie.

Efectul poate fi pus în evidență relativ simplu. Încărcînd electric un electroscope cu sarcină negativă, el se va descărca mult mai rapid dacă electrodul lui este iluminat cu radiație vizibilă de lungime de undă mică sau cu radiație ultravioletă ( $U.V$ ) (fig. 4.1). Borna electroskopului este prevăzută cu o placă metalică (de exemplu Zn) din care se extrag electroni în urma iluminării cu  $U.V$ . Sarcina negativă scade și electroscopeul se descarcă. Cu acest dispozitiv simplu, putem găsi și primele caracteristici ale fenomenului. Astfel, dacă creștem sau scădem fluxul de lumină (fie prin variația distanței de la sursă, fie prin introducerea unor filtre

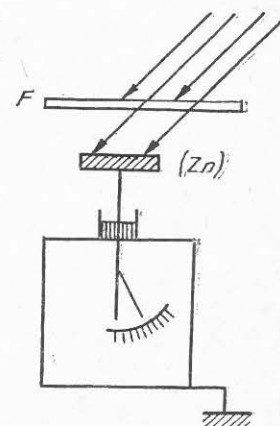


Fig. 4.1. Observarea fenomenului fotoelectric.  $F$  — filtru de lumină;  $Zn$  — placă de zinc.

cenușii \*  $F$  în calea radiației) observăm că viteza de descărcare variază proporțional cu fluxul. Rezultă prima concluzie:

$$\left( \frac{\text{numărul de electroni extrași în}}{\text{unitate de timp}} \right) \sim \left( \frac{\text{fluxul de energie luminoasă}}{\text{ce cade pe placă}} \right)$$

În continuare, dacă în locul filtrului cenușiu,  $F$ , punem alte filtre, care selectează din lumina albă zone de diverse frecvențe, vom observa o scădere puternică a vitezei de descărcare a electroscopului, atunci când iluminarea se face în domeniul roșu al spectrului față de cel albastru. Se observă că indiferent de fluxul de radiație, viteza de descărcare este practic nulă la iluminare în zona roșie și devine rapidă la iluminare în zona albastră. Experimentul devine și mai evident dacă introducem ca filtru o placă de sticlă. Cu toate că este transparentă în vizibil, ea produce o scădere pronunțată a vitezei de descărcare. Știind că sticla obișnuită este netransparentă în  $U.V.$ , rezultă că efectul cel mai puternic îl are radiația din domeniul albastru ( $U.V.$ )

Experimentul ne conduce la a doua concluzie importantă și anume:

*efectul fotoelectric se manifestă doar la frecvențe mari ale radiației luminoase.*

Efectul fotoelectric este astfel dependent atât de intensitatea radiației, cât și de frecvența ei.

Având aceste date de observație la îndemână putem încerca să explicăm fenomenul.

Din observația că electronii nu ies din metale decât atunci când acestea sînt încălzite sau iluminate, rezultă că ei sînt supuși în metal unor forțe de legătură. Lumina va trebui deci să transfere electronilor energie pentru a putea ieși din metal. Putem să spunem că, cu cît fluxul de lumină este mai mare cu atît vor putea ieși mai mulți electroni, ceea ce este în concordanță perfectă cu rezultatul experimentului. Mergînd cu raționamentul în continuare, ajungem la a doua concluzie care ne pune unele probleme. Cum poate frecvența radiației să influențeze efectul fotoelectric? Știm că fluxul de lumină este proporțional cu  $E^2$  ( $E$  — intensitatea cîmpului electric al unde). Cum din prima observație am dedus că efectul trebuie să depindă doar de flux, nu vedem motivul ca el să nu apară și la frecvențe joase. S-ar părea că energia transportată de radiație trebuie să depindă și de frecvență, ceea ce nu corespunde teoriei undelor electromagnetice, teorie care pînă acum a reușit să explice practic toate fenomenele discutate.

În această situație trebuie să recurgem la experimente ceva mai complicate care să ne poată furniza și date cantitative asupra fenomenului. Pentru aceasta să realizăm un dispozitiv experimental cu care să putem

\* Astfel de filtre se pot realiza ușor înnegriind cu funingine lame de sticlă, la gradul dorit de transparență.

determina energia electronilor produși prin efect fotoelectric (fotoelectroni), în diverse condiții de iluminare (fig. 4.2).

Metalul  $C$  din care se extrag electronii este așezat în vid, în fața unui electrod  $A$ . Un galvanometru măsoară curentul, ce se stabilește prin intermediul fotoelectronilor, datorită tensiunii  $U$ . Iluminarea se realizează din exterior prin intermediul unor filtre.

Pentru determinarea energiei fotoelectronilor se utilizează metoda cîmpului întîrziator. Această metodă constă în determinarea valorii tensiunii inverse necesare reducerii la zero a curentului fotoelectric  $I$ . Caracteristicile curent—tensiune pentru trei iluminări diferite, dar pentru aceeași frecvență sînt arătate în figura 4.3. *a* și *b*.

În figura 4.3, *a* este arătat cazul în care electrodul  $A$  este pus la borna pozitivă ceea ce face posibilă colectarea electronilor produși datorită iluminării electrodului  $C$ . Se observă aspectul de saturație care arată că în acest caz se accelerează și se colectează toți electronii produși în unitatea de timp. În figura 4.3, *b* este arătat cazul invers, în care  $A$  este pus la un potențial negativ, ceea ce face ca electronii emiși din  $C$  să se miște într-un cîmp care îi frînează. Vor ajunge la  $A$  doar acei elec-

troni care vor avea o energie cinetică mai mare decît energia potențială de frînare:  $E_e > |eU|$ . Din acest motiv curentul este cu multe ordine de mărime mai mic decît în cazul unei tensiuni acceleratoare. Dacă tensiunea de frînare

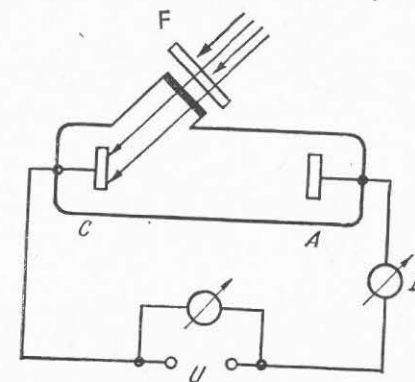


Fig. 4.2. Schemă pentru studiul efectului fotoelectric.  $F$  — filtru;  $C$  — metal;  $A$  — electrod colector.

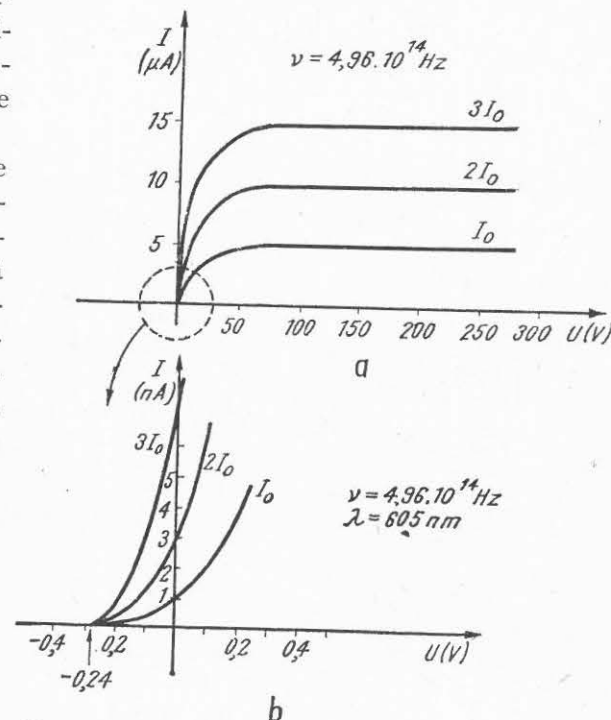


Fig. 4.3. Caracteristicile curent-tensiune obținute în dispozitivul experimental de la figura 4.2.

depășește o anumită valoare curentul se anulează. Această tensiune se numește tensiune de *oprire* sau de *stopare* ( $U_s$ ).

Valoarea tensiunii de oprire  $U_s$ , nu depinde de fluxul radiației luminoase.

Dacă determinăm caracteristicile curent-tensiune în cazul frînării, la iluminare cu radiații de frecvențe diferite, observăm că variază și tensiunea

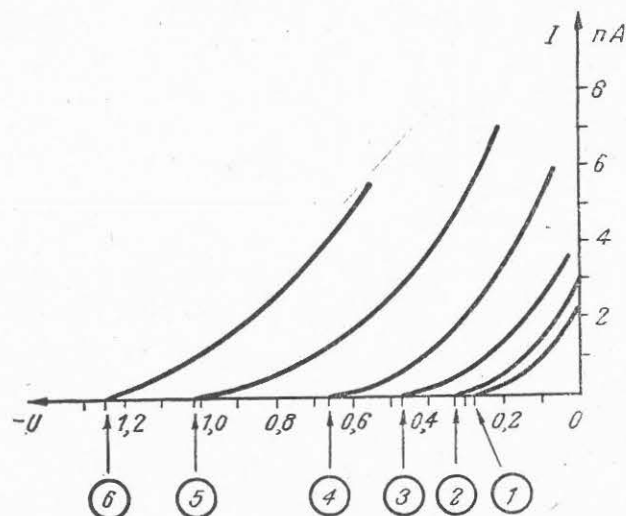


Fig. 4.4 Caracteristicile curent-tensiune în zona potențialelor de frinare, pentru iluminări cu radiație de diverse frecvențe.

de oprire (fig. 4.4). În figură sînt date valorile obținute pentru cazul în care electrodul C este din cesiu. Datele care exprimă tensiunea de oprire, frecvența și lungimea de undă a radiației sînt prezentate în tabelul 4.1. Aceste date corespund punctelor 1, 2, ..., 6, indicate pe figura 4.4.

Tabelul 4.1

| Nr. | (nm) | $\nu$ (Hz)           | $U_s$ (V) |
|-----|------|----------------------|-----------|
| 1.  | 589  | $5,09 \cdot 10^{14}$ | - 0,29    |
| 2.  | 578  | $5,18 \cdot 10^{14}$ | - 0,33    |
| 3.  | 546  | $5,50 \cdot 10^{14}$ | - 0,46    |
| 4.  | 502  | $5,97 \cdot 10^{14}$ | - 0,66    |
| 5.  | 436  | $6,88 \cdot 10^{14}$ | - 1,03    |
| 6.  | 405  | $7,40 \cdot 10^{14}$ | - 1,25    |

Deoarece tensiunea de oprire determină energia maximă a fotoelectronilor:

$$-eU_s = E_e \quad (4.1.)$$

rezultă că *energia lor nu depinde de fluxul de lumină, dar depinde de frecvența lui*. Pentru a găsi dependența energiei electronilor de frecvența radiației

să reprezentăm grafic energia electronilor funcție de frecvența radiației, folosind datele de experiență din tabelul 4.1 (fig. 4.5).

Din acest grafic observăm o dependență liniară între  $U_s$  și  $\nu$  pe care o putem descrie prin ecuația

$$U_s = a + b \cdot \nu$$

unde  $a$  și  $b$  sînt două constante.

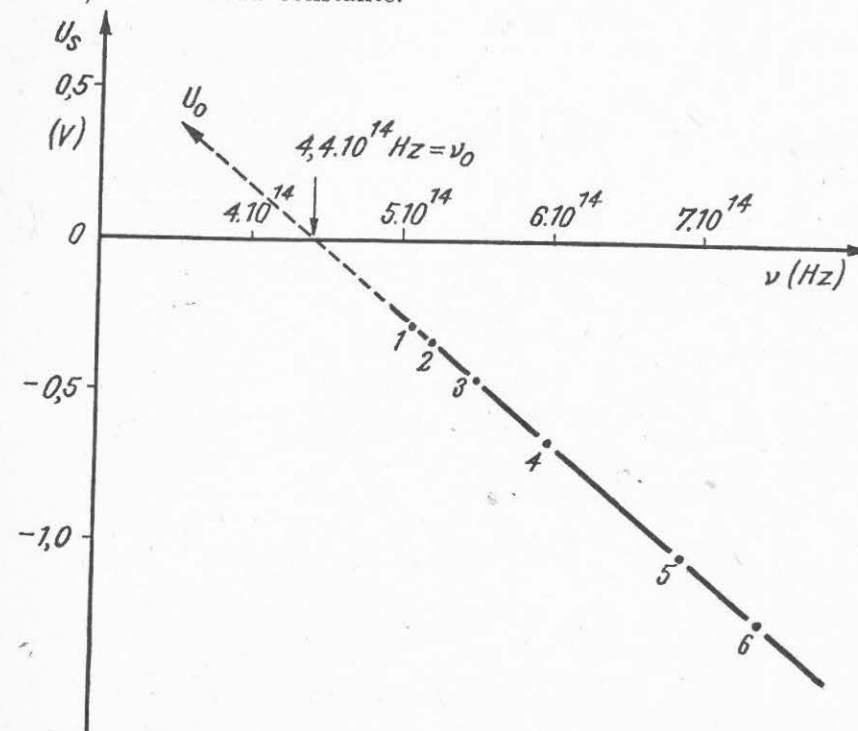


Fig. 4.5. Dependența energiei electronilor emiși de frecvența radiației.

Constanta  $a$  se poate determina din valoarea lui  $U_s$  pentru  $\nu = 0$ ; o notăm  $U_0$ . Constanta  $b$  se poate determina dacă căutăm valoarea frecvenței ( $\nu = \nu_0$ ) pentru care  $U_s = 0$ . Obținem:

$$0 = U_0 + b \cdot \nu_0 \text{ și deci } b = -\frac{U_0}{\nu_0}.$$

Vom putea scrie atunci:

$$U_s = U_0 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right) = U_0 - \left(\frac{U_0}{\nu_0}\right) \cdot \nu. \quad (4.2)$$

Pentru datele din figura 4.5, se obțin valorile:

$$U_0 = 1,82 \text{ V și } \nu_0 = 4,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

Energia electronului fiind  $eU_s$ , înmulțind cu  $e$  relația (4.2), obținem dependența energiei electronului de frecvența radiației:

$$E_e = -eU_s = eU_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) = \left(\frac{eU_0}{\nu_0}\right) \nu - eU_0. \quad (4.3)$$



**Problemă rezolvată.** Cum depinde de frecvență densitatea de curent fotoelectric, în preajma frecvenței  $\nu_0$ ?

*Rezolvare.*

Pentru a rezolva problema, scriem expresia densității de curent produs de  $n$  electroni în unitatea de volum, electroni ce se mișcă cu viteza  $v$  pe o direcție dată:

$$i = nev.$$

Cum:

$$v = \sqrt{\frac{2E_e}{m}} \quad \text{și} \quad E_e = \frac{eU_0}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \text{ rezultă:}$$

$$i = ne \sqrt{\frac{2eU_0}{m\nu_0}} \sqrt{\nu - \nu_0} = \text{const.} \cdot \sqrt{\nu - \nu_0}.$$

De aici:  $i = 0$ ;  $\nu < \nu_0$

$i \neq 0$ ;  $\nu > \nu_0$ .

Caracterul dependenței de frecvență a curentului în preajma lui  $\nu_0$ , se poate vedea mai bine pe derivata lui:

$$\frac{di}{d\nu} = \frac{ne}{2} \sqrt{\frac{2eU_0}{m\nu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu - \nu_0}}.$$

De aici se vede că atunci cînd  $\nu = \nu_0$ ,  $\frac{di}{d\nu} = \infty$ , deci, curentul apare brusc, odată cu atingerea frecvenței  $\nu_0$ .

Atît expresia lui  $E_e$  cît și rezultatele obținute la problema rezolvată ne arată că frecvența  $\nu_0$  are caracter de *prag*: pentru  $\nu < \nu_0$  fenomenul nu are loc. Lungimea de undă corespunzătoare frecvenței de prag,  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$  poartă numele de *prag roșu* al efectului fotoelectric, deoarece reprezintă lungimea de undă maximă pînă la care efectul fotoelectric se mai poate produce.

Putem însuma observațiile experimentale de pînă acum astfel:

- *curentul fotoelectric, în regimul de saturație, este proporțional cu fluxul de lumină monocromatică;*
- *viteza fotoelectronilor este dependentă doar de frecvența radiației;*
- *există un prag fotoelectric sub care efectul nu se mai observă.*

Relația (4.3) ne sugerează, prin forma ei, o lege de conservare a energiei: un transfer de energie undă-electron. Termenul  $eU_0$  exprimă pierderea unei părți din energia primită de electron de la lumină (termenul dependent de  $\nu$ ).

Deoarece singurul proces prin care se poate pierde energie este cel necesar extragerii electronilor din metal (electronul fiind o particulă fundamentală nu poate să treacă într-o stare excitată), termenul  $eU_0$  trebuie să exprime acest lucru: el trebuie deci să varieze de la un tip de metal la altul.

În tabelul 4.2 sînt date cîteva valori pentru  $U_0$  deduse din astfel de experimente. Se prezintă de asemenea și valorile  $\nu_0$  și  $\lambda_0$  deduse în acest mod.

Din această examinare fenomenologică a efectului, rezultă că în adevăr *energia undei trebuie să depindă și de frecvență* pentru a putea explica efectul fotoelectric.

Tabelul 4.2.

| Metalul  | $U_0$ (volți) | $\nu_0$ (Hz)         | $\lambda_0$ (nm) |
|----------|---------------|----------------------|------------------|
| Cesiu    | 1,81          | $4,37 \cdot 10^{14}$ | 685              |
| Litiu    | 2,38          | $5,75 \cdot 10^{14}$ | 521              |
| Bariu    | 2,49          | $6,02 \cdot 10^{14}$ | 498              |
| Calciu   | 2,80          | $6,77 \cdot 10^{14}$ | 443              |
| Magneziu | 3,64          | $8,80 \cdot 10^{14}$ | 340              |
| Zinc     | 4,24          | $1,02 \cdot 10^{15}$ | 292              |
| Aluminiu | 4,25          | $1,03 \cdot 10^{15}$ | 291              |
| Fier     | 4,31          | $1,04 \cdot 10^{15}$ | 288              |
| Nichel   | 4,50          | $1,09 \cdot 10^{15}$ | 275              |
| Seleniu  | 4,72          | $1,14 \cdot 10^{15}$ | 263              |

Tabelul 4.3

| Metalul  | $\frac{eU_0}{\nu_0}$ (J/Hz) |
|----------|-----------------------------|
| Cesiu    | $6,627 \cdot 10^{-34}$      |
| Litiu    | $6,622 \cdot 10^{-34}$      |
| Bariu    | $6,618 \cdot 10^{-34}$      |
| Calciu   | $6,617 \cdot 10^{-34}$      |
| Magneziu | $6,618 \cdot 10^{-34}$      |
| Zinc     | $6,650 \cdot 10^{-34}$      |
| Aluminiu | $6,602 \cdot 10^{-34}$      |
| Fier     | $6,630 \cdot 10^{-34}$      |
| Nichel   | $6,605 \cdot 10^{-34}$      |
| Seleniu  | $6,624 \cdot 10^{-34}$      |

Termenul care depinde de frecvență este  $\frac{eU_0}{\nu_0} \cdot \nu$  și el poate fi determinat utilizînd datele din tabelul 4.2. În tabelul 4.3 sînt trecute valorile raportului  $eU_0/\nu_0$  pentru diverse metale. Din examinarea acestor tabele rezultă un fapt deosebit de interesant: valoarea medie a raportului este egală cu:

$$6,621 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.} \quad (4.4)$$

Deci, mărimea  $\frac{eU_0}{\nu_0}$  nu depinde de metalul utilizat și deci transferul de energie depinde doar de  $\nu$ .

Singura explicație plauzibilă a acestui fapt este aceea că în procesul fotoelectric unda electromagnetică se comportă astfel încît energia ei este proporțională cu frecvența prin intermediul constantei (4.4). Această comportare a undei electromagnetice poate fi regăsită și în alte fenomene. Iată cîteva din ele:

— în experimentele de tip Franck și Hertz (Fizica cl. XI, § 10.2), între frecvența radiației emisă de atom și energia electronilor ce suferă ciocniri elastice cu el, s-a găsit același raport egal cu  $6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s care a fost numit *constanta lui Planck h*;

— în emisia de radiație  $X$  s-a observat că între energia electronilor frînați și frecvența maximă a radiațiilor  $X$  produse intervine aceeași constantă  $h$ ;

— în expresia radiației emise de către corpul negru (Fizica cl. XI, § 9.2.1) apare aceeași constantă  $h$ ; relația poartă numele de legea lui Planck.

— N. Bohr a presupus că la interacția radiație-atom energia primită, la o tranziție este proporțională cu frecvența (Fizica cl. XI, § 11.5). Deducerea proprietăților atomului de hidrogen pe baza acestei presupunerii a fost un

triumf a postulatelor lui Bohr și în mod indirect o verificare a faptului că, constanta lui Planck face legătura între energia radiației și frecvența sa.

Toate aceste fenomene arată că la o interacție electron-radiație electromagnetică, electronul primește întotdeauna o energie egală cu  $h\nu$ . Deoarece din experiment rezultă că pentru o frecvență dată numărul de electroni extrași este proporțional cu fluxul radiației, aplicând legea de conservare a energiei, putem scrie că:

Energia cedată de undă în unitatea de timp =  $N \cdot$  (energia primită de un electron), unde  $N$  este numărul de electroni emiși în unitatea de timp. Exprimând această relație în termenii de mai sus, vom avea:

$$J = N \cdot (h\nu).$$

Această relație exprimă faptul că mărimea:

$$\varepsilon = h\nu \quad (h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}) \quad (4.5)$$

reprezintă „porția” elementară de radiație de o frecvență dată, ce se poate schimba la interacția undă electromagnetică-electron și pe care M. Planck (1900) a denumit-o *cuantă de energie*.

Trebuie deci să considerăm lumina monocromatică ca o propagare a „ceva” care transportă cuante de energie proporționale cu  $\nu$ .

Am putea să revenim în parte la ipoteza corpusculară a lui Newton în care să înglobăm ideea că: dacă există un astfel de „corpuscul”, atunci el va trebui să posede o energie care să fie proporțională cu frecvența radiației electromagnetice respective.

Acesta a fost punctul de plecare a lui A. Einstein în explicarea fenomenului fotoelectric. El a considerat cuanta nu numai ca o porție de energie, ci i-a atribuit și toate calitățile de particulă. Astfel, în efectul fotoelectric, fiecare cuantă de lumină ciocnește un electron, îi transmite energie, iar electronul iese din metal. În acest proces cuanta de lumină dispăre. Efectul fotoelectric explicat astfel este în concordanță cu un alt fapt experimental, greu de explicat ondulator, și anume cu emisia la întâmplare a fotoelectronilor din metal (în medie se emite un număr constant de fotoelectroni, dar pe intervale mici de timp, acest număr suferă mari fluctuații).

Legea de conservare a energiei pentru procesul de extragere a electronului este:

$$h\nu = E_e + eU_0. \quad (4.6)$$

Cu alte cuvinte, radiația electromagnetică nu numai că se emite sau se absoarbe sub formă de cuante ci se și *propagă* sub această formă.

În acest fel Einstein a făcut pasul necesar pentru a putea considera cuanta de lumină ca particulă. Ulterior această particulă a fost denumită *foton* (N. Lewis — 1926).

Se explică astfel existența pragului fotoelectric: el corespunde cazului când  $h\nu = eU_0$ : întreaga energie a fotonului este dată pentru extragerea electronului. Pentru  $h\nu \leq eU_0$  efectul nu mai poate să apară.

**4.1.2. Fotonul și proprietățile lui.** În realitate natura fonică a luminii este mai dificil de înțeles decât pare la prima vedere. Să vedem mai departe ce înțelegem prin interpretarea fonică a luminii.

Într-o exprimare liberă spunem că o sursă de lumină emite o „ploaie” de fotoni care se propagă rectiliniu și uniform, fiecare foton transportând energia  $h\nu$ . Deoarece știm că lumina se propagă cu viteza  $c$ , trebuie să admitem că fiecare foton, la rîndul lui se propagă cu viteza  $c$ . Utilizînd rezultatele teoriei relativității putem spune că deoarece transportă energie, fotonul va poseda și o masă proporțională cu această energie:

$$\varepsilon = h\nu = m_f c^2$$

unde  $m_f$  este masa fotonului:

$$m_f = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (4.7)$$

Conform teoriei relativității masa de mișcare este dată de relația:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De aici

$$m_0 = m_f \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h\nu}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$$

Obținem astfel o altă caracteristică a fotonului și anume: *masa sa de repaus este nulă*.

În ciocnirea foton — electron trebuie să se conserve nu numai energia lui, ci și impulsul. Deci fotonul, va trebui să poată fi caracterizat și prin impuls. Expresia impulsului relativist este  $p = mv$ , unde  $m$  este masa de mișcare.

Înlocuind în expresia impulsului masa fotonului obținem:

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Mărimile caracteristice fotonului vor fi deci:

|                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| energia         | $\varepsilon = h\nu$     |
| masa de mișcare | $m_f = \frac{h\nu}{c^2}$ |
| impulsul        | $p = \frac{h\nu}{c}$     |
| masa de repaus  | $m_0 = 0$                |
| viteza          | $v = c$                  |

(4.8)

Toate acestea ne dovedesc că fotonul este o entitate reală, care se propagă, transportă energie, se ciocnește etc. Trebuie însă să fim atenți, la faptul

că această particulă este deosebită de celelalte particule, deoarece nu are masă de repaus.

Dacă vom nota cu  $N$ , numărul de fotoni ce trec în unitate de timp printr-o suprafață dată, fluxul de energie radiantă va fi:

$$\Phi = N h \nu. \quad (4.9)$$

Pentru o intensitate dată și o frecvență dată, vom putea spune cât este  $N$ .

Observăm că pentru aceeași intensitate, la o frecvență mică, avem nevoie de un număr extrem de mare de fotoni, pe când la o frecvență mai mare de un număr mai mic.

În capitolul de fizică nucleară (Fizica cl. XI, § 15.4) s-a discutat despre radiația  $\gamma$ , radiație care ca și lumina sau radiația  $X$  este de origine electromagnetică. Faptul că radiația electromagnetică din domeniul vizibil al spectrului este alcătuită din fotoni, ar trebui să se constate și în cazul frecvențelor mai mari, deci al radiațiilor  $X$  sau  $\gamma$ . În adevăr, dacă o radiație  $X$  sau  $\gamma$  este trimisă peste un detector Geiger-Müller putem înregistra (sau auzi direct în difuzor) trecerea fiecărui foton, asemănător cu situația în care contorul indică trecerea unor particule  $\alpha$  sau  $\beta$ . Avem astfel posibilitatea de a ne convinge în mod direct, că undele electromagnetice (aici radiațiile  $X$  sau  $\gamma$ ), au o structură „granulară”.

Putem reproduce această experiență folosind radiațiile luminoase?

Pentru a răspunde la această întrebare să efectuăm câteva calcule simple. Orice detector posedă un prag minim de sensibilitate față de particula (sau radiația) detectată. Astfel ochiul posedă un maxim de sensibilitate (pentru  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ) ce corespunde unei energii de aproximativ  $600 \text{ eV} = 0,96 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ . În acest caz, numărul minim de fotoni cu  $\lambda = 550 \text{ nm}$  necesari pentru a produce o senzație vizuală va fi:

$$N = \frac{0,96 \cdot 10^{-16}}{h \nu} = \frac{0,96 \cdot 10^{-16}}{3,6 \cdot 10^{-19}} \simeq 280 \text{ fotoni}.$$

Acest număr de fotoni este prea mare, pentru a permite să sesizăm fiecare foton în parte. Din această cauză lumina pare a avea o structură continuă și nu una granulară.

Pentru domeniul radiațiilor  $X$  sau  $\gamma$ , energia unui foton este mult mai mare decât pragul minim de sensibilitate al detectorului. De aceea în acest domeniu chiar un foton poate fi sesizat.

Să vedem cum interpretăm celelalte aspecte ale propagării luminii?

Propagarea rectilinie exprimată prin noțiunea de rază de lumină este evidentă.

Reflexia și legile ei exprimă ciocnirea cu conservarea impulsului și energiei fotonului.

Refracția determinată de variația vitezei luminii într-un mediu, se poate explica calitativ ca rezultat al emisiei și absorbției continue a foto-

nilor de către atomii mediului. Această continuă emisie și absorbție întârzie parcurgerea mediului ceea ce se traduce printr-o viteză mai scăzută a luminii.

Fenomenele de difracție și de interferență sînt însă mult mai greu de înțeles. Prezența lor obligă la o interpretare ondulatorie. Lumina mai ascunde astfel aspecte care trebuie descifrate. În aceste scop să urmărim un expe-

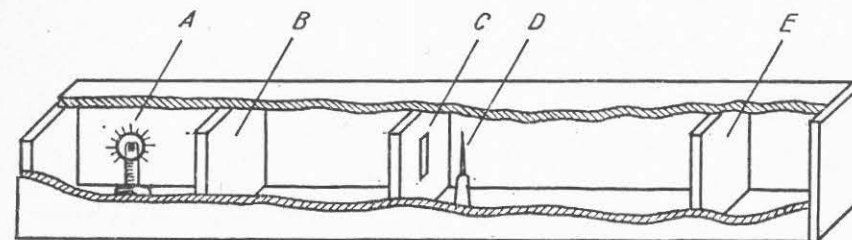


Fig. 4.6. Schema experimentului lui Taylor. A — bec; B — geam mat; C — fantă; D — ac; E — ecran (placa fotografică).

riment efectuat în 1909 de către G. Taylor, pentru a elucida modul în care se poate înțelege producerea fenomenelor de difracție și de interferență în ipoteza fotonilor. În figura 4.6 este arătat schematic acest experiment. El nu diferă prin nimic constructiv de un experiment de difracție în care sursa este o fantă îngustă, iar obiectul care aruncă umbră și care va produce difracția este un ac subțire. Observarea fenomenului se face prin impresiunea unei plăci fotografice, ce joacă rol de ecran.

Deosebirea care apare aici este că prin modificarea curentului de alimentare a becului se poate mări sau micșora numărul de fotoni emiși în unitatea de timp. El a obținut astfel o figură de difracție pentru o iluminare cu o intensitate obișnuită. În continuare a redus fluxul luminos atât de mult încât în fiecare moment, în incintă să existe în medie cel mult un foton. Ne putem convinge de acest lucru utilizând relația (4.9) și apreciind intervalul de timp necesar unui foton pentru a parcurge incinta. În acest fel, el era sigur că imaginea care se obține nu este rezultatul interacției între fotoni ci este determinat de comportarea fiecărui foton în parte. Evident, pentru a obține o imagine a trebuit să mărească timpul de expunere pînă la zeci de ore, iar într-o serie de experimente a ajuns chiar la peste o lună. Ce a observat?

Figura de interferență obținută la trecerea foton cu foton era absolut identică cu cea obținută cu fluxuri intense de fotoni. Rezultă de aci că

*difracția și interferența luminii nu sînt rezultatul interacțiunii fotonilor între ei; fenomenele de difracție și de interferență sînt intrinsec legate de modul de propagare a fiecărui foton în parte.*

Cu alte cuvinte este greșit să asemănăm propagarea fotonilor cu mișcarea unor bile, fie ele chiar microscopice! Fotonii, ca particule, nu ascultă în mișcarea lor de legile lui Newton.



Vedem astfel că descriind lumina prin intermediul fotonilor nu am revenit la teoria corpusculilor a lui Newton. Realitatea este mult mai complexă decât pare; nici teoria corpusculară descrisă până acum și nici teoria ondulatorie nu sînt capabile să explice integral bogăția de fenomene pe care le produce lumina. Vom reveni ulterior asupra problemei.

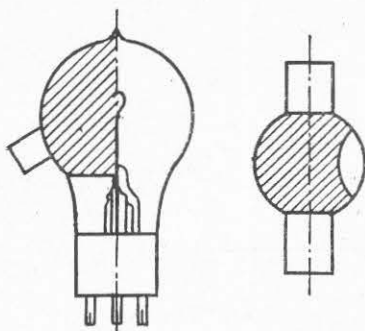


Fig. 4.7. Celule fotoelectrice.

**4.1.3. Celula fotoelectrică.** Efectul fotoelectric nu este interesant numai din punct de vedere al evidențierii aspectului fonic al luminii, ci și din punct de vedere al aplicațiilor practice pe care le-a generat. Un dispozitiv care utilizează efectul fotoelectric se numește celulă fotoelectrică. În figura 4.7 sînt arătate cîteva celule fotoelectrice utilizate în practică. Principiul de

funcționare poate fi înțeles cu ajutorul modelului lui Einstein.

Celula fotoelectrică este polarizată cu minus pe catoda fotoelectrică și cu plus pe anoda colectoare. Dacă în balonul celei fotoelectrice se află un gaz inert, curentul fotoelectric poate fi simțitor crescut. Caracteristica celei fotoelectrice cu gaz nu mai prezintă un fenomen de saturație, ci o creștere treptată a curentului fotoelectric. Pentru a mări sensibilitatea celei fotoelectrice, se poate recurge la amplificarea curentului fotoelectric cu ajutorul unor amplificatoare de curent continuu.

În afară de efectul fotoelectric descris până acum, denumit *extern*, mai există și un *efect fotoelectric intern* care constă în variația conductivității electrice a unor semiconductori sub influența luminii (*fotoconductivitate*). Pe baza acestui efect pot fi construite o serie de dispozitive de timpul celei fotoelectrice numite *fotorezistențe*.

Efectul fotoelectric intern poate să producă diferențe de potențial în cazul iluminării joncțiunilor semiconductoare (*fotodiode*) sau prin iluminarea doar a unei porțiuni dintr-un semiconductor (*efect fotovoltaiic, celule fotovoltaice*).

Iată cîteva aplicații ale celulelor fotoelectrice.

**a) Releul fotoelectric.** Celula fotoelectrică poate fi utilizată ca element sesizor al prezenței sau absenței radiației luminoase. Poate fi astfel ușor adaptată la un sistem de avertizare acustică sau optică a prezenței radiației luminoase. Astfel el poate să servească ca dispozitiv de acționare automată: deschiderea unor porți, iluminînd cu farurile unei mașini; oprirea sau schimbarea sensului de mișcare a unui dispozitiv automat antrenat într-o mișcare de translație (strung automat, capăt de linie ferată etc.); poate fi utilizat în circuite de pază și siguranță a clădirilor, muzeelor, băncilor, depozitelor; poate să aprindă automat becurile atunci cînd nivelul de iluminare scade sub

o valoare dinainte stabilită; poate număra automat piesele de pe o bandă rulantă; poate indica automat nivelul în vase ce conțin lichide opace; poate fi utilizat ca sesizor de foc sau fum pentru paza contra incendiilor.

**b) Traductor de lumină.** În acest caz curentul provenit de la celula fotoelectrică exprimă valoarea fluxului luminos (după o calibrare anterioară). Cîteva astfel de cazuri de utilizare sînt: *exponometrul* fotoelectric utilizat pentru determinarea timpului de expunere în fotografie; realizarea cinematografului sonor pe peliculă fără pistă magnetică; determinarea luminozității obiectelor cosmice (stele, planete, comete), dacă este montat la un telescop; detectarea radiațiilor nucleare în dispozitivele denumite cu *scintilație*. În acest ultim caz, celula fotoelectrică este modificată pentru realizarea unei amplificări interne a curentului fotoelectric. Dispozitivul se numește *fotomultiplicator*; poate fi folosit pentru controlul în flux continuu a fluidelor (transparente) ce pot fi poluate cu agenți netransparenți. Efectul fotoelectric în „celule fotoelectrice” speciale denumite *iconoscoape* este utilizat la dispozitivele de luat imagini în televiziune. Se pot utiliza la determinarea temperaturii în furnale sau a corpurilor incandescente în dispozitivele denumite *pirometre fotoelectrice*.

**c) Sursă de energie electrică.** Producerea curentului electric prin iluminare poate fi socotită ca una din metodele de a capta și utiliza energia solară. Folosită în acest scop, celula fotoelectrică cu vid sau cu gaz are un randament extrem de scăzut din cauza curenților mici pe care-i poate produce. Rezultate mai bune se pot obține cu dispozitive fotoelectrice cu semiconductori ce se bazează pe efectul fotoelectric intern.

Fotodiodele sau celulele fotovoltaiice grupate în serie și în paralel pentru a forma baterii solare, se utilizează tot mai des în practică. Spre exemplu ele joacă un rol important în alimentarea sateliților de telecomunicație. Satelitul „Intelsat IV” posedă o baterie solară ce furnizează o putere maximă de 585 W și este formată dintr-o rețea de aproximativ 22 000 celule. Tensiunea pe care o generează este în jur de 25 V, iar curentul în jur de 25 A.

## 4.2. PROPRIETĂȚILE ONDULATORII ALE PARTICULELOR

**4.2.1. Ipoteza lui de Broglie.** Din cîte am văzut, fenomenele legate de propagarea și de interacția luminii cu substanța prin care trece pot fi explicate uneori printr-o imagine ondulatorie iar alte ori printr-o imagine fonică. Se pare deci că lumina are o astfel de natură încît se comportă în unele cazuri ondulator iar în alte cazuri fonic. Acest fapt a fost exprimat uneori prin termenul de *dualitate*. Cu toate acestea propagarea luminii și efectele legate de ea trebuie să poată fi înțelese ca un fenomen unitar. Astfel, dualitatea ca model de interpretare este o etapă intermediară în procesul de construire a unei teorii care să ne dea o imagine unitară asupra naturii luminii și care să nu reducă propagarea luminii la niște cazuri limită: de undă sau de particulă.

Privind din acest punct de vedere, s-ar părea că fotonul ar fi unica particulă de acest tip „dual”. Oare acest aspect dual nu îl putem regăsi și la alte particule din natură?

Aceasta a fost ideea fizicianului francez Louis de Broglie (1924), atunci când a încercat să lărgescă categoria de „obiecte duale” și la celelalte particule. Iată cum s-ar putea realiza „restaurarea” simetriei în lumea particulelor, conform punctului de vedere al lui de Broglie.

Să pornim de la foton care are energia  $\varepsilon = h\nu$  și impulsul  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ .

L. de Broglie a presupus că orice particulă de impuls  $p = mv$  posedă o comportare ondulatorie ce poate fi descrisă prin lungimea de undă dată de

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (4.10)$$

În felul acesta ar fi realizată o simetrie între toate particulele, în sensul că toate ar avea o comportare care în unele situații poate fi descrisă ondulator, iar în alte situații corpuscular.

Pentru ca ipoteza să poată deveni o certitudine trebuie ca această dualitate de aspecte să fie observată și în realitate. Primele experimente făcute în acest sens nu au dat rezultate pozitive.

Experimentele ulterioare au confirmat însă ipoteza lui de Broglie.

**4.2.2. Difracția particulelor.** Să calculăm care ar fi valorile lui  $\lambda$  pentru diverse energii și pentru diverse particule în ipoteza lui de Broglie.

Tabelul 4.4.

( $\lambda$  exprimat în metri)

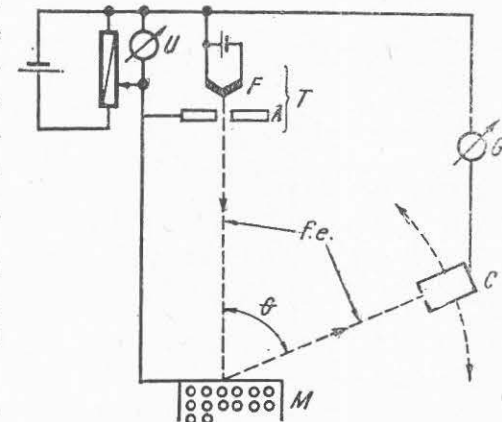
| Energia | Electron              | Proton sau neutron    | Atom de heliu         |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 eV    | $1,23 \cdot 10^{-9}$  | $2,86 \cdot 10^{-11}$ | $1,02 \cdot 10^{-11}$ |
| 10 eV   | $3,88 \cdot 10^{-10}$ | $9,05 \cdot 10^{-12}$ | $3,21 \cdot 10^{-12}$ |
| 100 eV  | $1,23 \cdot 10^{-10}$ | $2,96 \cdot 10^{-12}$ | $1,02 \cdot 10^{-12}$ |
| 1 keV   | $3,88 \cdot 10^{-11}$ | $9,06 \cdot 10^{-13}$ | $3,21 \cdot 10^{-13}$ |
| 10 keV  | $1,22 \cdot 10^{-11}$ | $2,86 \cdot 10^{-13}$ | $1,02 \cdot 10^{-13}$ |
| 100 keV | $3,70 \cdot 10^{-12}$ | $9,05 \cdot 10^{-14}$ | $3,21 \cdot 10^{-14}$ |
| 1 MeV   | $8,72 \cdot 10^{-13}$ | $2,86 \cdot 10^{-14}$ | $1,02 \cdot 10^{-14}$ |
| 1 GeV   | $1,24 \cdot 10^{-15}$ | $7,31 \cdot 10^{-16}$ | $2,85 \cdot 10^{-16}$ |
| 1 TeV   | $1,24 \cdot 10^{-18}$ | $1,24 \cdot 10^{-18}$ | $6,18 \cdot 10^{-19}$ |

Dacă accelerarea particulei se realizează cu ajutorul unei tensiuni  $U$ , atunci putem scrie că (pentru cazul nerelativist):

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \quad (4.11)$$

Efectele ondulatorii care se așteaptă sînt dependente de lungimea de undă (tabelul 4.4).

Primul experiment care a reușit să pună în evidență comportarea ondulatorie a electronilor a fost efectuat în 1927 de către Davisson și Germer, cu ajutorul unui montaj ca cel arătat în figura 4.8. Cu un tun electronic format dintr-un filament  $F$  și un anod  $A$  se produce un fascicul de electroni accelerați la tensiunea  $U$ . Fasciculul este îndreptat spre un monocristal de nichel care, datorită aranjării ordonate a atomilor, acționează ca o rețea de difracție cu distanțe comparabile cu lungimea de undă  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Fasciculul de electroni difractat sub unghiul  $\theta$  este colectat cu ajutorul unui cilindru Faraday  $C$ , curentul de electroni fiind măsurat cu un galvanometru.



Cu acest dispozitiv ei au observat:

— apariția unor maxime și minime de curent la diverse unghiuri  $\theta$ ;

— unghiul la care apar maximele depinde de tensiunea de accelerare și deci de  $\lambda$ . Relația (4.11) a putut fi astfel verificată direct.

Ulterior astfel de experimente au fost făcute cu protoni, neutroni, particule  $\alpha$  și molecule de hidrogen. În toate cazurile relația lui de Broglie (4.10) s-a verificat întocmai.

Un exemplu grăitor este dat în figura 4.9 care ne arată franjele de interferență, înregistrate pe o placă fotografică, franje ce apar atunci când în calea unui fascicul fin de electroni, se interpune un obstacol de dimensiuni foarte mici. Imaginea de pe placa fotografică este observată la microscop. În figura 4.10 se arată un caz asemănător. Pentru a interpreta aceste franje, utilizați figura 3.13, b. Folosind valorile date în abscisa figurii 3.13, b pentru maximele de interferență ca și poziția maximelor din figura 4.10 (scara de  $0,2 \mu\text{m}$  este indicată pe fotografie), determinați valoarea lui  $\lambda$  pentru electronii folosiți știind că  $a=b=30 \text{ cm}$ . Pe figură sînt indicate franjele cu ordinele de interferență 10, 20, 30.

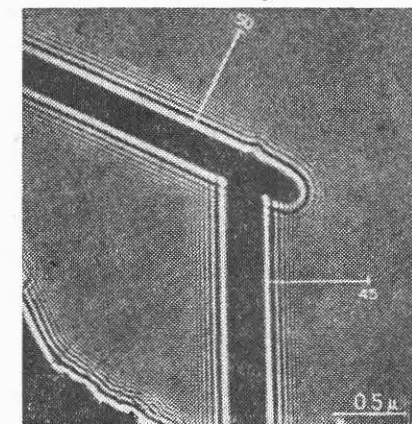


Fig. 4.9. Franje de interferență în jurul unor fire observate la un microscop electronic. Cifrele indică numărul de franje pe distanța dată.



Fotografiile 4.9 și 4.10 ne arată în mod direct că electronii (ca și celelalte particule) se pot comporta ca și cum legea lor de mișcare ar fi aceea a unei unde.

Difracția electronilor a fost studiată într-un experiment (1949) analog celui efectuat de Taylor pentru fotoni. Ca și în cazul fotonilor, experimentul

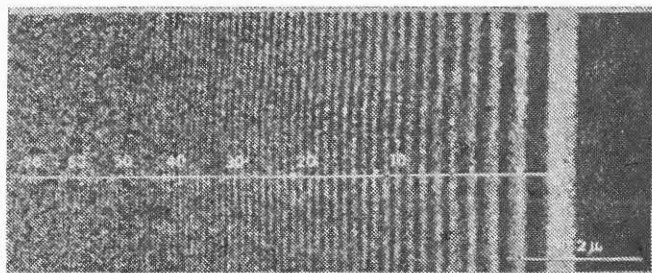


Fig. 4.10. Franje de interferență la marginea unui obstacol, observate la un microscop electronic.

a arătat că fiecare electron este supus difracției, independent de ceilalți. Caracterul ondulator al legii de mișcare a electronilor este astfel evidențiat în mod direct: pentru a obține figura de difracție trebuie ca *fiecare electron* să interacționeze cu ambele fante (în experimentul de tip Young), cu ambele părți ale acului (în experimentul de tip Taylor), *cu toți atomii* rețelei cristaline (în experimentul lui Davisson și Germer).

Comportarea ondulatorie a electronilor a mai fost verificată repetind un experiment de interferență din optică. În optică, un astfel de experiment se realizează prin extragerea a două fascicule coerente dintr-o sursă unică și apoi prin suprapunerea lor pentru a interfera. Un experiment analog, efectuat cu două fascicule de electroni a condus la o imagine de interferență în care intensitatea fascicului de electroni interferenți variază (spațial) periodic, între o valoare maximă și una minimă, interfranja putând fi descrisă corect cu ajutorul relației lui de Broglie (1956).

Utilizarea practică a comportării ondulatorii a electronilor s-a concretizat în realizarea *microscopului electronic*. Un microscop electronic utilizează un fascicul de electroni care cade pe un preparat, îl traversează iar variațiile de grosime ale preparatului se transformă în variații de intensitate a fascicului de electroni transmis. Utilizând „lentile” adecvate (câmpuri electrice sau magnetice cu o anumită distribuție spațială) electronii vor avea traiectorii asemănătoare razelor de lumină dintr-un microscop optic. Se va realiza o mărire a structurii preparatului, care va putea fi înregistrată pe o placă fotografică. Deoarece limita de rezoluție a unui microscop este determinată de lungimea de undă a radiației utilizate, cu microscopul electronic se pot observa obiecte de ordinul a 0,2 nm, mult mai mici decât în cazul microscopelor ce folosesc radiații luminoase. Fotografiiile date în figurile 4.9 și 4.10 au fost obținute cu microscopul electronic.

În concluzie, putem să spunem că fotonii, particulele constitutive ale atomilor, cât și agregatele lor (atomii și moleculele) se comportă cu totul deosebit față de particulele sau undele clasice.

Pentru a le deosebi de celelalte entități le vom numi *microparticule* sau particule cuantice.

Deoarece mișcarea și comportarea lor, nu se mai încadrează în teoriile clasice, pentru descrierea lor va trebuie să utilizăm o nouă teorie care să conțină ca punct de plecare particularitățile relevate de experimente.

#### 4.3. PROPRIETĂȚILE MICROPARTICULELOR

**4.3.1. Principiul de nedeterminare.** Pentru a putea descrie proprietățile și a găsi legile care guvernează mișcarea microparticulelor să analizăm mai în amănunt mișcarea electronilor (considerată ca un caz tipic) într-un experiment simplu de difracție (fig. 4.11). Un fascicul de electroni monoenergetici este îndreptat spre un paravan  $A$  prevăzut cu o fantă. Un ecran  $E$  permite vizualizarea locului în care ajung electronii după ce au trecut de fantă.

Pentru a descrie mișcarea unei particule, trebuie să cunoaștem poziția și viteza (sau impulsul) particulei în fiecare punct al traiectoriei ei. Dar cum putem cunoaște acești parametri? Evident din măsurători. De exemplu, poziția electronului în experimentul propus va fi dată de coordonata fantei.

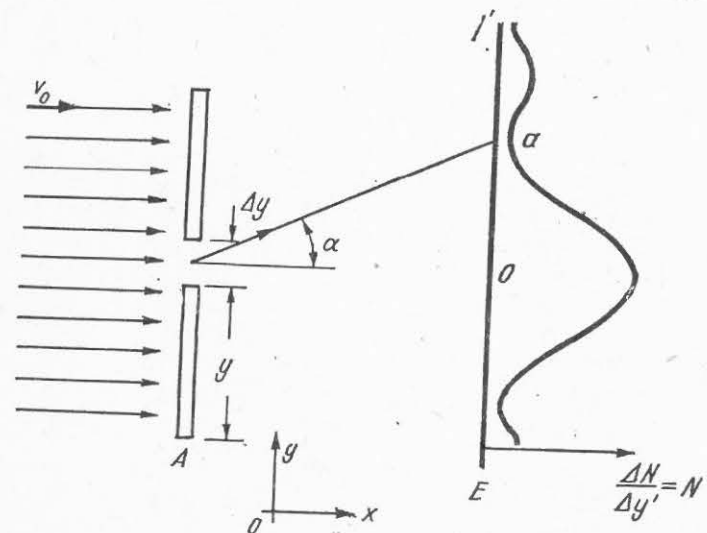


Fig. 4.11. Schema unui experiment de difracție a electronilor.  $E$  — ecran;  $a$  — minim,  $\Delta N$  numărul de electroni ce lovesc ecranul pe distanța  $\Delta y'$ .

Dar deoarece fanta are o lărgime  $\Delta y$ , nu vom putea cunoaște exact poziția electronului;  $\Delta y$  va reprezenta astfel nedeterminarea cu care cunoaștem poziția electronului ce a traversat fanta. Aceasta înseamnă că poziția electronului în momentul trecerii prin fantă va avea valoarea cuprinsă între  $y$  și  $y + \Delta y$ .



Între  $A$  și  $E$  electronul merge liber și am putea determina traiectoria lui dacă am putea preciza locul în care cade pe ecran. Dar, din cauza difracției electronului la trecerea prin fantă, pe ecran se va obține o figură de interferență. Locul în care va ajunge electronul nu va putea fi determinat exact, dar vom putea spune că el va atinge ecranul undeva între cele două minime ce mărginesc maximumul principal. Știm din § 3.2.3. că poziția primului minim este

$$\frac{\Delta r}{\Delta y} = \sin \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta y}$$

unde  $\Delta r$  este diferența de drum pentru traiectoriile ce pleacă de la extremitățile fantei de lărgime  $\Delta y$ , și care pentru minim trebuie să fie egală cu  $\frac{\lambda}{2}$ .

Pentru ca electronii incidenți de energie  $E = \frac{mv^2}{2}$  să-și schimbe direcția pe  $Oy$ , trebuie ca ei să aibă o componentă a vitezei pe  $Oy$ , componentă ce nu exista inițial ( $v_0$  fiind pe direcția  $Ox$ ). Vom nota cu  $\Delta v_y$  această componentă perturbatoare. Pe de altă parte putem scrie că:

$$\frac{\Delta v_y}{v_0} = \tan \alpha.$$

Pentru  $\alpha$  mic,  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$  și de aici, egalând cele două relații

$$\frac{\lambda}{2\Delta y} \approx \frac{\Delta v_y}{v_0}.$$

Dacă ținem cont că  $\lambda = \frac{h}{mv_0}$ , obținem:

$$\frac{h}{2mv_0\Delta y} \approx \frac{\Delta v_y}{v_0}$$

sau:

$$m\Delta y\Delta v_y \approx \frac{h}{2}.$$

Putem de asemenea scrie  $m\Delta v_y = \Delta(mv_y) = \Delta p_y$ .

Obținem în final relația:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \frac{h}{2} \quad (4.12)$$

În această relație  $\Delta y$  este nedeterminarea valorii coordonatei  $y$  a electronului, iar  $\Delta p_y$  este nedeterminarea introdusă în componenta  $y$  a impulsului electronului după trecerea prin fantă. Observăm că nedeterminarea în componenta impulsului pe  $y$  este indusă în momentul în care încercăm să precizăm valoarea coordonatei electronului, prin introducerea paravanului cu fanta de lărgime  $\Delta y$ . Nedeterminarea este indusă de aparatul de măsură (aici fanta) care interacționează cu electronii. Această interacțiune se dove-

dește a fi suficient de mare și deci nu o putem neglija. Am văzut mai înainte (§ 3.1.2) că aparatul de măsură ideal este acela care nu perturbă semnificativ sistemul supus măsurătorii. De asemenea, până la teoria relativității, fizicienii discutau despre spațiu și timp fără a privi critic modul în care se măsoară aceste mărimi. Experimentul de mai sus, pune problema măsurării poziției și impulsului. Rezultatul analizei exprimat prin relația (4.12), ne arată că și aici se impun o serie de limitări principiale. Aceste limitări sînt exprimate prin așa-numitul *principiu de nedeterminare* descoperit de W. Heisenberg (1927).

Dacă dorim să determinăm cu precizie extremă poziția electronului, printr-un experiment ca cel de mai sus, fără a ne interesa alți parametri dinamici ai lui (cum ar fi impulsul) o putem face fără nici o limitare. Dacă dorim însă să determinăm *simultan* atât coordonata cât și impulsul electronului atunci precizia este inerent limitată de procesul de măsură și este exprimată prin relația (4.12). Este important de înțeles că această limitare, constatată în toate experimentele cu microparticule, nu are nimic de a face cu calitatea aparatelor de măsură utilizate!

Să ne reamintim în continuare discuția relativă la propagarea rectilinie a radiației electromagnetice (§ 3.2.1 și § 3.2.6). Acolo am stabilit o relație între lărgimea fasciculului (exprimată prin unghiul de difracție), lungimea de undă a radiației  $\lambda$  și dimensiunea fantei  $d$ :  $\sin \theta = \lambda/d$ . Dacă în relație introducem  $\lambda = h/p$ , obținem

$$d \cdot p \approx \frac{h}{\sin \theta}.$$

Am ajuns astfel din nou la o relație asemănătoare cu (4.12). Într-un fel, comportarea ondulatorie a microparticulelor este astfel exprimată prin limitarea impusă de relația (4.12).

Tragem concluzia că relația de nedeterminare exprimă o proprietate fundamentală a microparticulelor.

Să explorăm consecințele ce decurg din relația (4.12).

a) Prima concluzie este aceea că nedeterminările în măsurarea simultană a coordonatei și a impulsului asociat sînt corelate. Dacă efectuăm mai multe măsurători asupra coordonatei și impulsului unui electron, vom obține valori diferite ce se vor grupa în jurul unor valori medii. Împrăștierea valorilor de la cea medie se va caracteriza prin  $\Delta y$ , respectiv  $\Delta p_y$ . Dacă facem măsurători simultane asupra lui  $y$  și  $p_y$  și încercăm să micșorăm împrăștierea valorilor lui  $y$  ( $\Delta y \rightarrow 0$ ), atunci relația (4.12) ne arată că valorile pe care le vom obține pentru  $p_y$  se împrășteie tot mai mult ( $\Delta p_y \rightarrow \infty$ ). La limită vom putea ști cu precizie pe unde a trecut particula, dar nu vom putea spune ce impuls are după trecerea prin fantă, deoarece electronul va putea ajunge în acest caz ori unde pe ecran.

Obținerea în toate cazurile studiate a unei relații de tipul (4.12) a condus treptat la recunoașterea caracterului de lege a acestei relații. Ea este valabilă pentru toate cele trei componente:

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p_x &\geq \frac{h}{4\pi} \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \frac{h}{4\pi} \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \frac{h}{4\pi}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Coeficientul  $1/4\pi$  rezultă din tratarea riguroasă a acestei probleme. De notat că relațiile (4.13) se referă doar la împrăștierea valorilor mărimilor măsurate simultan. Aceasta se exprimă uneori spunând că impulsul și coordonata sînt parametri complementari. Parametri complementari nu pot fi măsurați simultan cu o precizie nemărginit de mare. Aceasta înseamnă că ei exprimă aspecte diametral opuse ale comportării microparticulelor și de aceea sînt într-un fel incompatibili.

Un alt exemplu important de mărimi complementare îl constituie energia și intervalul de timp:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}.\quad (4.14)$$

Această relație ne arată că măsurarea energiei cu o precizie dată ( $\Delta E$ ) necesită un interval de timp ( $\Delta t$ ) de măsură dat de (4.14).

b) O altă concluzie a relațiilor de nedeterminare este că ele scot în evidență imposibilitatea neglijării influenței aparatului de măsură (a procesului de măsură) asupra sistemului. În cazul de față, fanta a reprezentat un „instrument de măsură” a poziției electronului. Ea a modificat viteza, deci impulsul electronului. Relațiile (4.13) sau (4.14) ne arată că măsurătoarea perturbă starea sistemului și că această perturbare nu se poate neglija nici măcar în principiu.

c) Sensul fizic mai profund al relațiilor de nedeterminare este acela al *limitei de aplicabilitate* a noțiunilor clasice. Încercînd să descriem microparticula, noi am utilizat o serie de noțiuni folosite la descrierea macroscopică a particulelor sau a undelor clasice. Aici am văzut că avem de a face cu microparticule care au o comportare deosebită de cea clasică. Relațiile de nedeterminare ne scot în evidență limitele pînă la care putem utiliza noțiunile clasice în descrierea fenomenelor atomice și nucleare. Ne dăm seama astfel că va trebui să introducem și o serie de noțiuni specifice care nu au corespondență în fizica clasică.

Putem să rescriem relația de nedeterminare sub forma:

$$\Delta x \cdot \Delta V_x \geq \frac{h}{4\pi m}.$$

Se vede ușor că în cazul corpurilor macroscopice pentru care  $m$  este foarte mare, limita inferioară impusă de relația de nedeterminare este practic zero:

$$\frac{h}{4\pi m} \rightarrow 0.$$

Putem spune astfel că la scară macroscopică nu avem o limitare de acest fel și că îmbunătățirea mijloacelor de măsură va putea permite măsurători mai precise, mai exacte.

d) Relațiile de nedeterminare au implicații profunde în descrierea proceselor fizice ale microparticulelor. De exemplu, noțiunea de traiectorie, își pierde sensul.

Pentru a argumenta această afirmație să analizăm mișcarea electronului în atomul de hidrogen. Putem evalua valoarea vitezei electronului egalînd forța centrifugă  $mv^2/r$  cu forța de atracție coulombiană a nucleului  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$  (modelul planetar):

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}.$$

De aici putem calcula lungimea de undă de Broglie a electronului:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0 r}}{e \sqrt{m}}.$$

Știm că atomul de hidrogen are dimensiunea de ordinul  $10^{-10}$  m.

Introducînd valorile obținem  $\lambda \simeq 3 \cdot 10^{-10}$  m, deci de aproximativ șase ori valoarea razei Bohr!

Am văzut că propagarea unei unde poate fi descrisă prin conceptul de rază doar dacă ea are loc într-o regiune de dimensiuni mult mai mari ca  $\lambda$ . În caz contrar conceptul de rază își pierde sensul. Această ultimă situație corespunde mișcării electronului în atom: unda care descrie comportarea electronului are o lungime de undă mai mare ca aceea a dimensiunilor atomului și deci noțiunea de traiectorie nu mai poate fi utilizată.

Nu înțelegem prin aceasta că electronul nu mai este o particulă! Atît electronul cît și celelalte microparticule își păstrează caracterul de particulă; de exemplu, nu este posibil să se observe părți ale unui electron așa cum nici fotonul nu poate fi despicat. Ceea ce este deosebit la microparticule este legea lor de mișcare (de tip ondulator) care face ca noțiunea de traiectorie să-și piardă sensul.

Cu toate acestea în camera cu ceață putem observa traiectorii ale microparticulelor. În acest caz, traiectoria este delimitată de picăturile de apă condensate în lungul parcursului electronului. Nedeterminarea în poziția electronului este astfel dată de dimensiunea acestor picături.  $\Delta x \sim 0,01$  cm. Nedeterminarea în valoarea impulsului conform relației de nedeterminare este:

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{4\pi \Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{4\pi \cdot 10^{-4}} = 5,2 \cdot 10^{-31} \text{ J} \cdot \text{s/m}.$$

Dacă valoarea impulsului satisface condiția  $p_x \gg \Delta p_x$ , atunci putem afirma că în această aproximație, urma lăsată în camera cu ceață este traiectoria particulei; ea nu va încălca relația de nedeterminare; de asemenea, erorile la scară macroscopică sînt mici.

Un electron de energie  $\sim 1$  keV are un impuls de  $\sim 5 \cdot 10^{-23}$  J·s/m. Se vede astfel că observarea drumului microparticulelor în camera cu ceață nu permite determinarea traiectoriei cu o atît de mare precizie încît să observăm abaterile de la mișcarea clasică.

Este important de reținut deci că la precizia cerută de descrierea mișcării microparticulelor în edificiile atomice, noțiunea de traiectorie nu mai poate fi utilizată.

În acest sens modelul lui Bohr este total incorect, motiv pentru care el nu poate fi acceptat decît cu titlul de etapă intermediară în înțelegerea structurii atomului. Pentru a fi în concordanță cu relațiile de nedeterminare, erorile în  $r$  și  $p$  pentru electronul din atom ar trebui să întrecă de multe ori valorile lui  $r$  și  $p$  deduse din modelul Bohr. Ori, în acest caz, mărimile  $r$  și  $p$  nu mai au nici o semnificație fizică!

Descrierea mișcării electronului în atom trebuie făcută deci în cu totul alți termeni.

Pentru descrierea fizică a fenomenelor ce au loc în sistemele microscopice, relațiile de nedeterminare prezintă o importanță calitativă deosebită, deoarece ele evidențiază caracterul neclasic (statistic) al comportării microparticulelor.

e) Mărimile  $\Delta x$ ,  $\Delta p_x$ , ce apar în relațiile de nedeterminare sînt o măsură a gradului de împrăștiere a rezultatelor unor experimente efectuate în condiții identice. Acest lucru înseamnă că refăcînd un experiment în condiții identice, rezultatele nu se reproduc, ci iau valori diferite — întîmplătoare. Nu se poate prezice exact valoarea care se va obține la o nouă măsurătoare, dar vom ști că, cu o mare probabilitate ea se va găsi undeva în intervalul  $x$ ,  $x + \Delta x$ ;  $p_x$ ,  $p_x + \Delta p_x$ ;  $E$ ,  $E + \Delta E$  (unde  $\Delta x$ ,  $\Delta p_x$ ,  $\Delta E$  sînt mărimile ce apar în relațiile de nedeterminare). Aceasta scoate în evidență caracterul întîmplător al rezultatelor măsurărilor individuale sau, mai general, caracterul întîmplător al evenimentelor și proceselor elementare individuale la scară microscopică.

Cu toate acestea valorile medii obținute din datele unor măsurători efectuate în aceleași condiții, au o remarcabilă regularitate și reproductibilitate. Să ne gîndim numai la faptul că imaginea obținută prin difracție de electroni este oricînd reproductibilă cu toate că mișcarea fiecărui electron în parte este nereproductibilă (întîmplătoare). Alt exemplu este dezintegrarea nucleelor (Fizica cl. a XI-a, § 15.2; § 15.7). Urmărind în timp emisia prin dezintegrare a unor particule se constată succesiunea lor complet dezordonată, întîmplătoare. Valoarea medie a numărului de particule emise în unitatea de timp rămîne însă practic constantă (pentru elemente radioactive cu timp de viață lungă).

La începuturile studiului acestor procese caracterul întîmplător a fost considerat ca un fapt deosebit, specific fizicii atomice. Acum însă el este privit ca un fapt normal, fundamental al fizicii microparticulelor și este considerat o lege fundamentală.

**4.3.2. Interpretarea statistică a comportării microparticulelor.** Analiza pe care am făcut-o asupra consecințelor principiului de nedeterminare și a caracterului fundamental al acestui principiu explică cauza pentru care mecanica microparticulelor se exprimă în termeni de probabilitate. Nereproductibilitatea principială a măsurărilor și actelor elementare, lipsa noțiunii de traiectorie, limita impusă preciziei măsurărilor individuale simultane, au condus toate la necesitatea descrierii fenomenelor atomice și nucleare într-un limbaj de probabilitate. În loc să căutăm să determinăm (ca în mecanica clasică) cum se va comporta în viitor un sistem atunci cînd se cunosc datele inițiale, vom căuta să determinăm care va fi probabilitatea ca sistemul să se găsească într-o stare ulterioară dată.

Pentru a vedea cum putem descrie în termeni de probabilitate fenomenele de la scară atomică, să ne reîntoarcem la analiza făcută asupra naturii luminii.

Fluxul de energie radiantă ce trece prin unitatea de arie (intensitate energetică  $I$ ) sau pe scurt intensitate) este proporțional cu media în timp a pătratului intensității cîmpului electric al unde:  $\overline{E^2}$  (§ 3.2.2). În limbaj fonic, intensitatea energetică este dată de  $I = N\hbar\nu$ , unde  $N$  este numărul mediu de fotoni ce trec în unitate de timp prin unitatea de arie (§ 4.1.2). Pentru a unifica cele două puncte de vedere putem spune că  $\overline{E^2}$ \* este o măsură a numărului mediu de fotoni pe unitatea de volum. Astfel, ajungem la o interpretare statistică (deci prin intermediul valorilor medii) a intensității. O sursă punctiformă emite fotoni în toate direcțiile, în mod întîmplător. Numărul mediu de fotoni ce traversează unitatea de arie va scădea atunci cu pătratul distanței față de sursă, deoarece fotonii se distribuie uniform probabil în jurul sursei. Este exact ceea ce prezice și teoria ondulatorie. Astfel  $\overline{E^2}$  este o măsură a probabilității de a găsi  $N$  fotoni în medie, în unitatea de volum. Se explică astfel toate cele observate în cadrul efectului fotoelectric printre care și emisia la întîmplare a electronilor de pe suprafața iluminată. Emisia la întîmplare este un suport experimental extrem de convingător privind interpretarea probabilistă a lui  $\overline{E^2}$ .

Analogia a fost extinsă de către M. Born (1926) la descrierea comportării microparticulelor. Undele de Broglie care descriu bine comportarea microparticulelor ca și analogia cu interpretarea probabilistă a intensității energetice a radiației electromagnetice, sugerează introducerea unei funcții cu rol asemănător lui  $E$ . Ea a fost denumită *funcție de undă* și se notează cu  $\psi$ .

\* Să nu uităm că  $E^2$  este în același timp proporțional cu densitatea de energie a cîmpului electric.



Funcția  $\psi$  este în general complexă. De aceea, în această interpretare, probabilitatea de a găsi particula undeva în spațiu în unitatea de volum la un moment dat se obține făcând modulul pătrat al funcției,  $|\psi|^2$ .

Pentru funcția de undă  $\psi$ , ca și pentru intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ , este valabil principiul de suprapunere. De aceea dacă vrem să descriem mișcarea a două particule, funcția de undă a sistemului va fi:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

iar probabilitatea de a găsi particulele în unitatea de volum, sau densitatea de probabilitate va fi:

$$|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2.$$

La fel ca în cazul suprapunerii a două unde,  $E^2 = (E_1 + E_2)^2$ , va rezulta posibilitatea producerii efectelor de interferență:

$$|\psi|^2 \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2.$$

În consecință, microparticulele se comportă astfel încât densitatea totală de probabilitate nu mai este o simplă sumă a densităților de probabilitate a fiecăreia în parte. În cazul a două particule clasice nu vom întâlni niciodată o comportare de acest fel.

Fenomenul de interferență este astfel inclus organic în modul de descriere a propagării microparticulelor.

Unda de probabilitate nu corespunde unei unde speciale, ci exprimă faptul că probabilitatea de găsim a unei microparticule este descrisă de o funcție cu proprietăți (matematice) asemănătoare cu cele ale funcției de undă ce descrie undele elastice sau cele electromagnetice.

**4.3.3. Discutarea unor sisteme cuantice simple.** Problema deducerii comportării microparticulelor și a sistemelor de microparticule se reduce în esență la determinarea funcției  $\psi$ . Aceasta este o afirmație pe care nu o putem susține riguros fără o dezvoltare în ansamblu a întregului aparat matematic aferent și de asemenea a întregii teorii fizice ce rezultă. Teoria care descrie în mod consecvent comportarea microparticulelor pornind de la datele experimentale examinate mai sus se numește *mechanică cuantică* și este rodul muncii a nenumărați fizicieni dintre care cei mai importanți sînt W. Heisenberg, E. Schrödinger, P. A. M. Dirac și M. Born. Bazele mecanicii cuantice au fost puse între anii 1926 — 1929.

Să vedem unele consecințe ale acestei teorii utilizînd doar cunoștințele de pînă acum. Concluziile cantitative pe care le vom obține vor fi evident aproximative, însă cele calitative vor fi corecte.

Ca prim sistem să luăm cel al unui electron care se poate mișca doar pe o axă ( $Ox$ ) între două puncte care delimitează un segment de lungime  $d$ . Formulată astfel, problema este idealizată și ar putea să aibă ca imagine fizică macroscopică pe cea a unui cilindru de lungime  $d$  în care s-ar putea mișca, fără frecare, o bilă. Capetele tubului sînt formate din pereți perfect rigizi și deci reflectători.

Energia electronului în acest caz s-ar reduce la energia lui cinetică:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Mișcarea lui însă va trebui să fie descrisă de funcția  $\psi$  în care  $\lambda$  este dat de relația de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Vom scrie deci că:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}. \quad (4.17)$$

Dar, o undă ce se propagă în lungul unei direcții, între doi pereți reflectători, prin interferența cu unda reflectată va forma *unde staționare*. Se va obține o *stare staționară* dacă lungimea de undă  $\lambda$  va îndeplini condiția:

$$d = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

deci:

$$E = \frac{h^2 n^2}{2md^2}. \quad (4.18)$$

Relația (4.18) exprimă așa-numita *cuantificare a energiei*, adică faptul că energia unui electron obligat să rămînă într-o zonă dată, finită, nu va putea să ia orice valoare ci numai valori discrete, determinate de „numărul cuantic”  $n$ . Deci, obținem pentru energie valori posibile discrete ca și în cazul atomului de hidrogen. Funcția de undă ce descrie sistemul va avea valoare nulă în punctele  $x = 0$  și  $x = d$ . Deci, densitatea de probabilitate  $|\psi|^2$  de a găsi electronul în preajma acestor puncte este foarte mică. Ea va crește spre centru fiind maximă pentru  $x = \frac{d}{2}$ . Probabilitatea cea mai mare de a găsi electronul va fi în centrul domeniului și nu la capetele lui.

Dar oare cum am putea să descriem mișcarea electronului din atomul de hidrogen?

Aproximativ în același mod, am putea spune că mișcarea electronului pe o orbită de rază  $r$  ar trebui să se facă astfel încît pentru stările staționare, unda de Broglie să se „încidă” cu formare de unde staționare. Deci:

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p}$$

sau:

$$r\dot{p} = n \frac{h}{2\pi}$$

care este unul dintre postulatele modelului Bohr, privitor la momentul cinetic ( $\vec{r} \times \vec{p}$ ) al electronului. Și în acest caz vom putea spune că densitatea de probabilitate este mare în dreptul razelor orbitelor deduse de N. Bohr și este mică la o altă distanță de nucleu.

Atragem încă odată atenția că modul în care am obținut aceste rezultate nu este riguros.

Ceea ce se poate extrage din aceste exemple și care este riguros adevărat este faptul că ori de câte ori o microparticulă este limitată în mișcarea ei, fenomenul de cuantificare este prezent. O microparticulă liberă nu va prezenta fenomenul de cuantificare și deci energia ei va putea lua orice valoare, cum este de exemplu cazul electronilor din fasciculele de electroni.

## EXTINDERE ÎN FIZICĂ

**4.3.4. Efectul tunel.** Efectul tunel este un efect specific fizicii microparticulelor. El nu se întâlnește la scară macroscopică. Consecințele lui pot fi însă evidențiate la scară macroscopică. Printre fenomenele care sînt o urmare directă a acestui efect se pot enumera: dezintegrarea nucleelor prin emisia de particule  $\alpha$ , apariția diferenței de potențial de contact între două metale diferite în contact, efectul Josephson (trecerea curentului electric între două metale aflate la o distanță de aproximativ 1 nm una de alta, cînd metalele se află în stare de supraconducție), efectul de emisie electronică determinat de un cîmp electric intens la suprafața unui metal, ca și funcționarea dispozitivelor semiconductoare denumite „diode” tunel etc.

Să vedem în ce constă acest efect și cum poate fi el explicat. În acest scop să pornim de la analiza unui experiment simplu: trecerea unei bile (macroscopice) de masă  $m$  peste un obstacol de forma indicată în figura 4.12, a. Știm că urcarea bilei pe obstacol cere efectuarea unui lucru mecanic, deoarece trebuie învinsă forța de greutate. Dacă  $H$  este înălțimea maximă a „dealului” din figură, pentru a trece de el, energia cinetică inițială a bilei trebuie să satisfacă condiția.

$$E_c \geq mgH. \quad (4.19)$$

Situația discutată poate fi descrisă în termeni de energie. Figura 4.12, b ne arată această descriere. Curba reprezintă variația energiei potențiale  $E_p$  în funcție de distanța față de un punct  $O$  ales ca origine. Energia potențială corespunzătoare punctului de abscisă  $x_A$  este maximă. Ea scade cînd ne deplasăm spre punctele de abscisă  $x_C$  și  $x_D$ .

O bilă care va avea inițial energia totală  $E_1 (> mgH)$  apropiindu-se de „vîrf dealului”, va suferi o încetinire, deoarece legea de conservare a energiei ne dă:

$$E_1 = E_c + E_p \quad (4.20)$$

sau

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = E_1 - E_p = E_1 - mgH.$$

Cum  $E_1 > mgH$ , în acel punct viteza bilei va fi minimă ( $v_2$ ), iar în  $O$  va fi maximă ( $v_1$ ):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(E_1 - mgH)}{m}}.$$

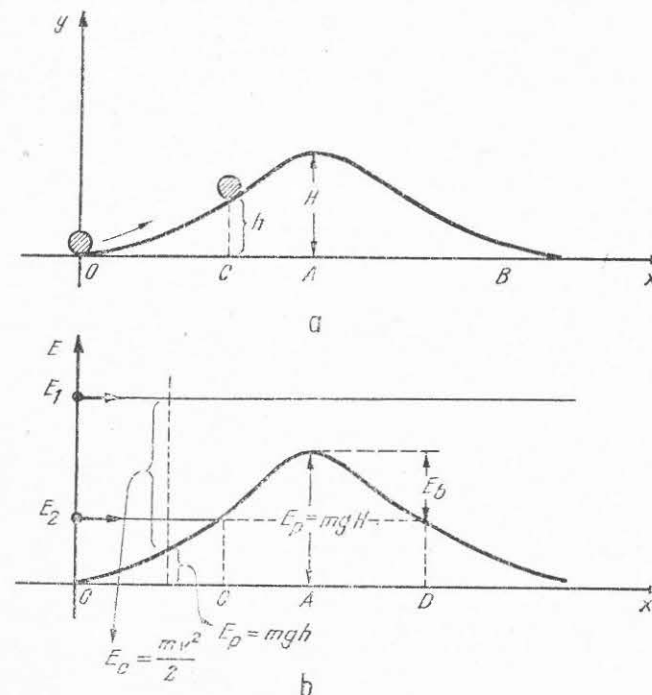


Fig. 4.12. Bariera de potențial.

Dacă luăm cazul în care  $E_1 = E_2 < mgH$ , atunci în punctul corespunzător abscisei  $x_A$ :

$$E_c = E_1 - E_p < 0. \quad (4.21)$$

Dar cum  $E_c$  nu poate fi decît mai mare ca zero, rezultă că avînd energia  $E_2$ , bila nu poate ajunge în acel punct ci cel mult pînă într-un punct de abscisă  $x_C$  pentru care

$$E_2 = \frac{mv_C^2}{2} = mgh.$$

Spunem că bila poate trece „dealul” doar dacă are o energie inițială mai mare ca  $mgH$ . „Dealul” va reprezenta astfel o *barieră de potențial*, de netrecut pentru bila cu energie mai mică decît energia maximă a barierei. Bila, în cazul în care are energia totală  $E_2$ , va putea ajunge pînă în punctul de abscisă  $x_C$ ; pentru a trece dincolo va avea nevoie de un supliment de energie  $E_b$ . Pentru această bilă zona  $CD$  este *interzisă* și deci *inaccesibilă*: bila nu va putea pătrunde în această zonă.

Să analizăm aceeași problemă schimbând bila cu o microparticulă (electron, proton). Putem să facem aceleași afirmații ca pentru cazul macroscopic? Se pare că nu.

Vom arăta în continuare, că pentru o microparticulă ce ajunge în preajma barierei, zona  $CD$  nu este interzisă ca în cazul particulei clasice. Pentru aceasta vom utiliza din nou relațiile de nedeterminare.

Considerăm că efectuăm un experiment în care dorim să localizăm microparticula în preajma barierei. Să presupunem că nedeterminarea în poziția particulei, respectiv zona în care probabilitatea de a găsi electronul este mare, este  $\Delta x$ .

Această nedeterminare în localizarea particulei nu poate să scadă sub valoarea lungimii de undă de Broglie a particulei,  $\lambda$ . Cu alte cuvinte o localizare mai precisă decât  $\Delta x \simeq \lambda$  nu are sens în descrierea mișcării microparticulei.

Dacă viteza  $v$  a microparticulei (și deci energia sa  $E$ ) este astfel încât  $\Delta x (\sim \lambda)$  este mai mare sau egal cu lărgimea barierei la acel nivel de energie ( $L = \overline{CD}$ ), atunci va exista o probabilitate finită ( $\neq 0$ ) ca particula să se găsească de o parte sau de cealaltă a barierei.

În principiu, posibilitatea de găsim a microparticulei în zona  $CD$  nu are nimic paradoxal în ea din punct de vedere cuantic. Relațiile de nedeterminare pentru mărimile  $x$  și  $p_x$  ne arată că nu are sens să se vorbească de valori precis determinate simultan pentru energia potențială și energia cinetică, deoarece prima este proporțională cu  $x$ , iar a doua este proporțională cu  $p$ !

Apropierea particulei de punctul  $C$  reprezintă în sine un proces de localizare (deci de măsurare, proces care nu implică neapărat prezența observatorului!) spațială și simultan de precizare a valorii energiei cinetice. Am spune de exemplu că în  $C$  microparticula ar avea simultan bine determinate atât poziția cât și energia cinetică. Ori acest lucru nu este posibil. Cauza este utilizarea noțiunilor clasice peste limitele de aplicabilitate ale lor, limite impuse de relațiile de nedeterminare.

În mecanica cuantică se arată că funcția de undă ce descrie electronul scade rapid în zona „interzisă” clasic, dar rămâne diferită de zero de partea cealaltă a barierei dacă ea nu este infinit de înaltă.

Pentru a ne familiariza cu aceste noțiuni să ne reamintim un experiment efectuat în optică și care are aceeași semnificație. Se cunoaște că în unele condiții, la zona de separare a două medii cu indici de refracție diferiți, poate să apară o reflexie totală, ceea ce face ca în mediul cu  $n$  mai mic să nu existe radiație refractată. Se arată că dacă stratul cu  $n$  mai mic este făcut foarte subțire atunci, cu toate că condiția de reflexie totală este îndeplinită, se va observa o radiație refractată

de intensitate foarte mică, dar diferită de zero. Și aici avem în fond un caz de penetrare de barieră care clasic nu este permisă.

Fenomenul de tunelare este astfel pe deplin real și el corespunde unui fapt normal lumii microparticulelor.

## EXTINDERE ÎN ALTE DOMENII

**4.3.5. Determinismul în fizica clasică și fizica cuantică.** La baza interpretărilor științifice ale lumii se află principiul cauzalității care afirmă că orice fenomen este efectul unui alt fenomen, numit cauză, care îl precede în timp, între cauză și efect existînd o conexiune determinată de condițiile în care se realizează legătura dintre cauză și efect.

Ideea conexiunii cauzale dintre fenomene apare încă în filozofia antică — mai ales în Egipt, Babilon, China și India. Această idee se clarifică însă de-abia în Grecia antică. Leucipp, părintele școlii atomiștilor greci, exprima principiul cauzalității, încă acum 2 milenii și jumătate, prin cuvintele: „Nimic nu apare fără o cauză, ci totul cu un anumit temei și în virtutea necesității”.

Pe baza principiului cauzalității, cunoscînd legea care determină — în condiții date — relația dintre cauză și efect, devine cu puțință, pe de o parte, găsirea cauzelor care au generat un anumit fenomen (postdicția), cît și precizarea efectelor pe care le vor produce în viitor cauzele cunoscute în prezent (predicția). Faptul că aceste două funcții ale științei sînt verificate de practică, asigură forța științei în procesul de cunoaștere și transformare a lumii.

Cauzalitatea, stabilind pentru fiecare fenomen cauza care îl produce, arată că nici un fenomen nu poate apărea decît cu o consecință a unor relații cauzale cu alte fenomene. Apare așadar ideea că între toate fenomenele există o rețea infinită, complexă de interacțiuni, supuse conexiunilor cauzale, rezultînd în final, *conexiunea universală* a fenomenelor.

Teoria conexiunii universale a fenomenelor care explică desfășurarea acestora, sub acțiunea legilor cauzale, se numește *determinism*.

În antichitate, reprezentanții cei mai de seamă ai determinismului au fost: Heraclit, Democrit și Epicur. Începînd cu Renașterea, odată cu dezvoltarea științelor, concepția deterministă se adîncește, apărătorii cei mai consecvenți ai acestei concepții fiind: Galilei și Bacon, iar mai apoi, Descartes și Spinoza. Paralel cu progresele fizicii și în primul rînd ale mecanicii, determinismul îmbracă o formă mai riguroasă, culminînd în epoca napoleoniană, cu următoarea formulare a lui Laplace:



„O ființă care ar cunoaște la un moment dat pozițiile și impulsurile tuturor particulelor din Univers, ar putea să prevadă cu precizie absolută toate evenimentele ulterioare cosmice, fizice, chimice și chiar destinul istoric al omenirii“.

Chiar din această formulare — denumită și determinismul *dinamic*, sau Laplacian, rezultă caracterul său mecanicist — metafizic, cât și limitările la care este supus. După această concepție, diversele forme ale mișcării materiei se reduc exclusiv la deplasările strict mecanice ale particulelor, acestea singure fiind responsabile de întreaga varietate a fenomenelor termice, electromagnetice, chimice, biologice și chiar sociale. Determinismul dinamic este rigid, toate relațiile fiind univoce și strict necesare, neexistând loc pentru întâmplare. Dealtfel, eliminarea întâmplării din rețeaua cauzală a fenomenelor a fost sever criticată chiar pe timpul lui Laplace, de către filozoful Voltaire.

Succesele fizicii statistice, elaborată mai întâi de către Maxwell și Boltzmann, au pus întrebări dificile determinismului dinamic. În acest capitol al fizicii, ansamblurile mari de particule se studiază pe baza calculului probabilităților. Interpretarea acestor procese statistice, în cadrul concepției mecaniciste-metafizice continuă să nege caracterul obiectiv al întâmplării, acesteia lăsându-i-se doar un caracter subiectiv, folosirea metodelor statistice fiind justificată numai prin imposibilitatea cunoașterii efective a comportării individuale a fiecărui micro-sistem (moleculă, atom, electron etc).

Rigidității și unilateralității determinismului dinamic i se opune concepția materialist-dialectică asupra determinismului, concepție în cadrul căreia *necesitatea și întâmplarea* sînt contrarii care alcătuiesc o unitate dialectică, *necesitatea croindu-și drumul prin întâmplare*. La baza concepției materialist-dialectice a determinismului se află caracterul universal al interacțiunilor, obiectivitatea tuturor fenomenelor, conexiunea universală, corelarea dialectică a categoriilor determinismului și, în primul rînd, a necesității și întâmplării, cât și intercondiționarea între automișcare și autodeterminare a sistemelor și fenomenelor.

Comportarea particulelor cuantice a constituit o grăitoare confirmare a tezelor materialismului dialectic, ilustrînd în mod clar deosebirea calitativă dintre întreg și parte, prin aceea că legile cărora le sînt supuse particulele cuantice diferă în mod radical de cele care guvernează sistemele clasice. Această distincție calitativă se vedește și în ceea ce privește forma pe care o îmbracă determinismul la nivelul cuantic.

Într-adevăr, așa cum s-a arătat în paragrafele precedente, starea unui sistem cuantic este descrisă de funcția de undă  $\psi(x, y, z, t)$ , mărimea

$$dP(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$$

prin-care se precizează semnificația fizică a funcției de undă, specificînd doar *probabilitatea* de a găsi sistemul cuantic, la momentul  $t$ , în elementul

de volum  $dV$ . Un sistem cuantic se poate găsi, așadar, oriunde în spațiu, mecanica cuantică putînd determina doar probabilitatea de localizare a sistemului în fiecare element de volum al spațiului. Aceste valori ale probabilității sînt însă exact determinate; mai mult, în mecanica cuantică se arată că dacă la un moment  $t_0$  funcția de undă  $\psi(x, y, z, t_0)$ , a unui sistem cuantic este cunoscută și dacă sînt date condițiile în care evoluează sistemul, atunci funcția de undă  $\psi(y, x, z, t)$  este univoc determinată, la orice moment  $t > t_0$  și deci și probabilitatea de a localiza sistemul în orice punct al spațiului și la orice moment, este de asemenea determinată. Așadar, conexiunea cauzală continuă să existe și la nivelul cuantic, dar ca o conexiune de tip statistic. Această formă de determinism specifică nivelului cuantic, este denumită *determinism statistic*. Trebuie subliniat că la nivelul cuantic, caracterul statistic nu apare numai în cazul ansamblurilor de particule, ci — ținînd seama că starea fiecărei particule este specificată de funcția de undă — orice afirmație făcută asupra comportării individuale a unei particule cuantice, are caracter statistic.

În vremea elaborării fundamentelor mecanicii cuantice, pe cînd experiența dezvăluia natura statistică a comportării particulelor cuantice, pentru mulți fizicieni, tributari concepției mecanicist-metafizice, această comportare părea inconciliabilă cu determinismul dinamic. Incapacitatea determinismului dinamic de a explica relațiile cauzale statistice, a generat — în anii dintre cele două războaie mondiale — părerea că, la nivelul cuantic, principiul cauzalității nu ar mai funcționa; în realitate, fizica particulelor cuantice arată numai inaplicabilitatea la acest nivel a determinismului dinamic.

Filozofia materialist dialectică, înțelegînd caracterul obiectiv al probabilității, nu numai în ceea ce privește procesul cunoașterii, dar și ca un atribut al existenței, a putut integra determinismul cuantic într-o concepție cuprinzătoare a determinismului, ca o teorie a conexiunii universale în care — la diverse nivele de mișcare a materiei își găsesc locul atît determinismul dinamic, cât și cel statistic. Astăzi, acest punct de vedere este adoptat de marea majoritate a fizicienilor.

## EXTINDERE ÎN FIZICĂ

### 4.4. PARTICULE FUNDAMENTALE

4.4.1. **Tipuri de particule fundamentale.** Ajungînd la ultimul capitol, să încercăm să vedem retrospectiv modul în care mină în mină gîndirea și experimentul au condus la formarea unei imagini unitare despre structura materiei.

Încercînd să pătrundem „în adîncul materiei” am descoperit treptat formațiuni tot mai mici. Molecula s-a dovedit a fi componenta cea mai mică a unui corp fizic. Atomul este componenta cea mai mică a unei molecule. Nucleul și electronii sînt componenții fundamentali ai atomului. La rîndul lui nucleul se compune din neutroni și protoni. Cu ocazia acestor investigații am mai descoperit și existența unei particule deosebite care nu participă la construirea vreunui edificiu microscopic, dar care este prezentă în majoritatea proceselor la care iau parte micro-obiectele. Această particulă deosebită este fotonul.

Înainte de a ne întreba dacă mai există și alte particule sau dacă putem înțelege într-un mod unitar proprietățile acestor particule, să trecem pe scurt în revistă caracteristicile lor.

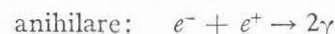
Cu ajutorul a patru particule putem să descriem marea majoritate a fenomenelor fizice: structura moleculelor, atomilor, nucleelor, structura substanțelor gazoase, lichide sau solide, fenomenele electrice sau magnetice, emisia, absorbția și efectele luminii, radioactivitatea și reacțiile nucleare. Aceste patru particule ce joacă un rol atît de important sînt:

*electronul, protonul, neutronul și fotonul.*

Pe lîngă acestea, treptat au mai fost descoperite și alte particule. Cîteva dintre ele sînt prezentate în cele ce urmează.

*Pozitronul*, a fost descoperit în 1932 în cadrul studiilor asupra radiației ce ne parvine din spațiul cosmic. Pozitronul are aproape toate caracteristicile identice cu ale electronului, deosebindu-se de el prin semnul sarcinii, care este opus sarcinii electronului \*. A fost descoperită astfel o particulă „image” a electronului. Treptat s-a conturat ideea că orice particulă va trebui să aibă „imagea” sa, image care a fost denumită *antiparticulă*. Particulele și antiparticulele sînt legate unele de altele prin fenomene specifice: *anihilarea* și *generarea* lor în perechi.

Aceste fenomene se reprezintă prin schemele de „reacție”:



unde  $\gamma$  este simbolul pentru foton (indiferent de frecvența lui).

Fenomenele de anihilare și generare satisfac legile de conservare ale energiei, impulsului și sarcinii.

Aplicînd legea de conservare a energiei pentru anihilare, obținem:

$$2m_e c^2 = 2 \cdot h\nu,$$

relație ce ne permite să calculăm frecvența radiației produse, presupunînd că ambii fotoni au aceeași frecvență.

\* Există și alte deosebiri pe care nu le vom explica aici

Pentru procesul de generare, relația de conservare a energiei ne dă:

$$h\nu \simeq 2m_e c^2$$

care ne arată că generarea poate să aibă loc doar dacă fotonul posedă un minim de energie:

$$h\nu > 2m_0 c^2 \simeq 1 \text{ MeV}$$

unde  $m_0$  este masa de repaus a electronului.

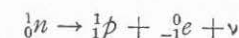
Aplicînd legea de conservare a impulsului pentru generare, se poate vedea că ea nu poate fi îndeplinită decît dacă în preajma locului în care se petrece fenomenul se găsește și o altă particulă (de exemplu un nucleu) care să participe la proces prin preluarea unei părți din impuls.

*Antiprotonul* este antiparticula protonului: are deci sarcină negativă, caracteristicile principale fiind identice cu cele ale protonului. Un antiproton și un pozitron pot forma un sistem atomic similar atomului de hidrogen. Eventualii atomi de acest tip poartă numele de *antiatomi*, iar substanțele constituite din antiatomi — *antimaterie*.

În consecință antimateria, nu este o „substanță” care se opune materiei, ci reprezintă o colectivitate de antiatomi. Pînă în prezent antimateria nu a fost descoperită nici pe Pămînt și nici în cosmos. Antiatomii pot fi produși în laboratoare cu ajutorul acceleratoarelor de particule.

*Neutrînul* este o particulă neutră, cu masă de repaus nulă, a cărei existență a fost întîi prevăzută teoretic și descoperită ulterior experimental. Neutrînul apare în fenomenele de dezintegrare  $\beta$  (Fizica cl. XI-a, § 15.5 și § 17.4) ca urmare a unui fenomen specific domeniului particulelor fundamentale: *transformarea particulelor*.

Reacția de transformare a particulelor în care apare neutrînul este transformarea neutron — proton:



unde  $\nu$  este simbolul neutrînului.

*Pionul* este o particulă fundamentală cu masa intermediară între proton și electron, din care cauză se mai numește *mezon*  $\pi$ . Pionii pot fi de trei feluri: încărcăți cu o sarcină electrică elementară pozitivă, negativă sau neutră:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ .

În prezent se consideră că pionii joacă un rol important în interacțiunile dintre particulele constitutive ale nucleului (neutronul și protonul). De asemenea, cercetările au arătat că protonul și neutronul nu sînt particule „elementare” în sensul că ele posedă o structură internă. Cu toate că neutronul și protonul nu mai sînt astăzi privite ca particule elementare, ele rămîn particule fundamentale, adevărate „cărămizi” de construcție a edificiilor nucleare.

Nu continuăm lista particulelor cunoscute în prezent deoarece ele sînt foarte multe (peste 200), dintre care multe sînt extrem de instabile, transformîndu-se în alte particule. În figura 4.13 prezentăm un tablou al particulelor discutate, cu principalele lor proprietăți.

| Denumirea | Particula | Antiparticula | $m/m_e$ |
|-----------|-----------|---------------|---------|
| Foton     | $\gamma$  |               | 0       |
| Neutrino  | $\nu^0$   | $\bar{\nu}^0$ | 0       |
| Electron  | $e^-$     | $e^+$         | 1       |
| Pion      | $\pi^+$   | $\pi^-$       | 270     |
| Nucleon   | $p^+$     | $p^-$         | 1840    |

Fig. 4.13. Tablou de particule fundamentale.

**4.4.2. Interacțiunile la care participă particulele fundamentale.** Multitudinea particulelor fundamentale pune problema clasificării și ordonării lor. Ne putem pune problema dacă nu există cumva un „tablou periodic” pentru particule, care să ne dezvăluie legăturile între ele și eventual să ne sugereze particule și „mai fundamentale” (mai puține la număr), care prin compunere să formeze edificii mai complexe care să fie tocmai particulele fundamentale pe care le cunoaștem. Problema este deosebit de dificilă, atît din cauza complicațiilor experimentale — necesare verificării supozițiilor și obținerii de date noi — cît și din cauza dificultăților teoretice care se pun. De exemplu, putem pe drept cuvînt să ne întrebăm dacă nu am ajuns, atît de jos pe scara constituției materiei, încît părțile componente să nu fie la fel de „mari” sau poate chiar mai mari (cu masă mai mare) decît particula a cărei constituent este. Întrebarea nu este chiar atît de nepotrivită deoarece dimensiunile particulelor ca și energia, impulsul, masa lor corespund unor valori pentru care relațiile de nedeterminare ne limitează drastic afirmațiile prea precise.

Nu vom discuta prea mult aceste probleme, deoarece depășesc cu mult cadrul de față. Vom sugera doar unele idei care pot constitui puncte de plecare în înțelegerea mai profundă a acestui domeniu al fizicii subnucleare.

Unul din faptele interesante care se remarcă este posibilitatea de a reduce toate tipurile de interacțiuni cunoscute pînă în prezent la *patru tipuri fundamentale*. Să le discutăm.

În toate fenomenele macroscopice interacțiunea principală care se manifestă este cea *gravitațională*. Forța gravitațională, cîmpul gravitațional, sînt prezente în orice punct din spațiul terestru sau extra-terestru, deoarece în expresia forței apare  $1/r^2$ . Aceasta înseamnă că pentru orice distanță finită, interacțiunea gravitațională este prezentă. Mai mult, ea nefiind decît atractivă, nu poate fi „ecranată” în nici un fel, prezența ei fiind astfel universală. Chiar și atunci cînd valoric ea este depășită de alte forțe fiind neglijată, ea este prezentă.

Un alt tip de interacțiune deosebit de important prin rolul pe care-l joacă în fenomenele fizice este interacțiunea *electromagnetică*. Ea cuprinde totalitatea fenomenelor electrice și magnetice care au loc ca rezultat al interacțiunii între particulele încărcate cu sarcină, în mișcare.

Interacțiunea *nucleară* este a treia interacțiune pe care o discutăm și a cărei prezență nu se face simțită în mod direct la scara macroscopică, dar care este fundamentală pentru nucleu.

Această interacțiune, exprimată prin forțele nucleare între nucleoni este atractivă și menține nucleul într-un echilibru staționar față de forțele electrostatice de repulsie.

Forțele nucleare sînt mult diferite de primele două și încă nu complet cunoscute.

Cu ajutorul acestor trei tipuri de interacțiuni putem descrie practic toate fenomenele macro sau microscopice. Există însă o categorie de fenomene ce au loc la nivel nuclear care nu pot fi explicate cu ajutorul acestor trei tipuri de interacțiuni. Un exemplu de astfel de fenomen este dezintegrarea  $\beta$ . Ea nu este rezultatul acțiunii nici a forțelor electromagnetice, nici a celor nucleare și nici a celor gravitaționale. În scopul explicării acestui tip de dezintegrare (și a altor fenomene ce au loc în lumea particulelor subnucleare) este nevoie să se presupună existența și unui al patrulea tip de interacțiune fundamentală, care poartă numele de *interacțiune slabă*.

Interacțiunea slabă este cea mai puțin cunoscută dintre toate tipurile de interacțiuni. Cîteva caracteristici ale acestor tipuri de interacțiuni sînt prezentate în tabelul 4.5.

Tabelul 4.5

| Tipul de interacțiune | Rază de acțiune   | Surse de cîmp                               | Cuanta de cîmp |
|-----------------------|-------------------|---------------------------------------------|----------------|
| nucleare (tari)       | $\sim 10^{-15}$ m | nucleonii                                   | mezon          |
| electromagnetice      | $\infty$          | particulele încărcate cu sarcină electrică. | foton          |
| slabe                 | $\sim 10^{-24}$ m | nucleonii, electroni                        | ?              |
| gravitaționale        | $\infty$          | toate particulele cu masă                   | graviton(?)    |



În tabelul 4.5. interacțiunile sînt așezate în ordinea intensității lor. Ultimele două coloane descriu particulele care produc și interacționează prin câmpul corespunzător și respectiv cuantele de câmp. Această ultimă coloană exprimă un fapt pe care dorim să-l discutăm puțin. În fizica clasică avem în principiu două feluri de entități: pe de o parte particulele care produc câmpul iar pe de altă parte undele, care mediază interacțiunea dintre particule. Putem unifica cele două entități dacă admitem că particulele se comportă ca niște unde și că undele (cîmpurile fizice) au caracteristici de particule. Particulele asociate unui cîmp se numesc *cuante de cîmp*. În acest fel, cele două entități sînt tratate în mod simetric, mod care se pare că concordă cel mai bine cu datele experimentale de pînă acum.

Această tratare modelează fenomenele de interacțiune prin introducerea conceptului de *forță de schimb*. De exemplu, interacțiunea dintre sarcini este exprimată în acest model prin afirmația că forța coulombiană este rezultatul unui schimb de fotoni din cîmpurile de fotoni ce înconjură fiecare particulă încărcată. În mod asemănător, interacțiunea nucleară este rezultatul unui schimb de pioni între nucleoni. Această terminologie înseamnă în realitate că ecuația (de undă) care descrie propagarea fotonilor poate să descrie și interacțiunea mediată de acești fotoni. Corect, mecanismul de schimb presupune de fapt un model matematic care permite descrierea cantitativă, unitară, a celor patru interacțiuni fundamentale și nu o imagine „mecanicistă” a unor bîle ce se schimbă între particule.

Putem spune astfel că particulele fundamentale joacă în principal două „roluri”: o parte din ele alcătuiesc substanțele cu ajutorul unor formațiuni ca: nucleu, atom, moleculă, iar altele participă la realizarea interacțiunilor cunoscute.

Nu cunoaștem încă multe lucruri în acest domeniu. De exemplu, nu știm care este relația între masa și sarcina particulelor. De ce este sarcina electrică cuantificată? Există alte particule „mai fundamentale” decît cele cunoscute pînă acum? Ce înseamnă „elementar” la această scară? ș.a.m.d.

Sperăm că viitorul va aduce rînd pe rînd răspuns la aceste probleme și la altele care se vor mai ivi.

#### INTREBĂRI. EXERCIIII. PROBLEME

1. Cum putem distinge experimental transmiterea energiei (semnalului) prin unde și prin particule?
2. Ionizarea unui atom reprezintă un caz de efect fotoelectric ce are loc cu un atom izolat. Să se determine viteza pe care o va avea electronul atomului de hidrogen dacă este „iluminat” cu o radiație electromagnetică cu  $\lambda = 65 \text{ nm}$  ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ).

$$R: v = 1,38 \cdot 10^6 \text{ m/s.}$$

3. Să se studieze ciocnirea foton-electron liber (efect Compton). Cum va varia frecvența (lungimea de undă a) fotonului?

4. Iluminînd potasiul cu radiație monocromatică de diverse lungimi de undă se obțin următoarele valori pentru diferența de potențial de stopare:

|                      |      |      |      |      |
|----------------------|------|------|------|------|
| $\lambda(\text{nm})$ | 200  | 300  | 400  | 500  |
| $U(\text{V})$        | 4,11 | 2,05 | 1,02 | 0,40 |

a) Verificați cu ajutorul acestor date ecuația lui Einstein.

b) Determinați pragul roșu și potențialul de extracție (în volți) pentru potasiu.

$$R: 595,2 \text{ nm}; 2,083 \text{ V.}$$

5. Se iluminează litiul cu o radiație de  $\lambda = 400 \text{ nm}$ . Determinați energia și viteza fotoelectronilor emiși.

$$R: 1,15 \cdot 10^{-19} \text{ J}; 5,03 \cdot 10^5 \text{ m/s.}$$

6. O sferă de cupru de raza 2 cm, electric neutră, este iluminată cu o radiație de  $\lambda = 200 \text{ nm}$ . Pînă la ce potențial maxim se va încărca sfera?

$$R: 1,73 \text{ V.}$$

7. Se iluminează o celulă fotoelectrică cu radiație ultravioletă de  $\lambda = 254 \text{ nm}$ . Să se calculeze diferența de potențial minimă necesară pentru a reduce curentul fotoelectric la zero, dacă fotocatoda este de cesiu.

$$R: 3,1 \text{ V.}$$

8. O placă de potasiu este iluminată uniform cu o sursă de lumină de 1 W (energie radiantă), așezată la o distanță de 1 m. Să presupunem că pentru a fi emis un fotoelectron trebuie să se colecteze energia de pe o arie circulară a plăcii, de rază  $\sim 10^{-10} \text{ m}$ . Care va fi intervalul de timp necesar pentru ca electronul să absoarbă energia necesară eliberării lui din metal (energia de extragere = 2,1 eV =  $3,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )?

$$R: \sim 2 \text{ s.}$$

9. Determinați numărul de fotoni care ciocnesc suprafața, în problema precedentă, dacă iluminarea se face cu radiație monocromatică cu  $\lambda = 589 \text{ nm}$  (galben).

$$R: 2,4 \cdot 10^{17} \text{ fotoni.}$$

10. Determinați energia, masa și impulsul unui foton ce are  $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ .

$$R: 3 \cdot 10^{-19} \text{ J}; 3,34 \cdot 10^{-36} \text{ kg}; 1,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

11. Să se determine raportul dintre masele de mișcare a fotonilor corespunzători lungimilor de undă  $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$  (prima linie Lyman a hidrogenului) și  $\lambda_2 = 656,3 \text{ nm}$  (prima linie Balmer a hidrogenului).

$$R: 5,42.$$

12. Cu ce viteză trebuie să se deplaseze un electron pentru ca impulsul lui să fie egal cu impulsul unui foton de  $\lambda = 520 \text{ nm}$ ?

$$R: 1400 \text{ m/s.}$$

13. Să se determine variația de frecvență pe care o suferă o radiație emisă de pe suprafața unei stele (de masă  $M$  și rază  $R$ ) la distanță infinită de ea.

$$R: \frac{\Delta \nu}{\nu} = k \frac{M}{R}.$$

14. Se poate măsura lungimea de undă de Broglie? Dacă da, cum?

15. Discutați asemănările și deosebirile care există între undele de Broglie și cele electromagnetice.

16. Care este lungimea de undă de Broglie a unei mingi cu masa de 1 kg care se mișcă cu viteza de 10 m/s? Pot fi verificate concluziile ce rezultă de aici?

$$R: 6,6 \cdot 10^{-35} \text{ m.}$$

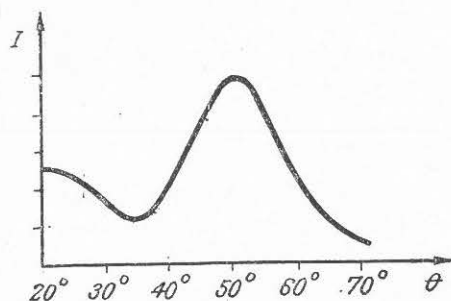


Fig. 4.14. Pentru problema 17.  $I$  — intensitatea curentului electronic reflectat,  $\theta$  — unghiul Bragg.

17. Într-un experiment de tip Davisson și Germer cu electroni, s-a obținut o dependență a intensității fasciculului, de unghiul de împrăștiere  $\theta$ , dată în figura 4.14. Să se verifice relația Bragg pentru această împrăștiere, știind că  $d = 0,91 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  și că electronii au fost accelerați la 54 V.

18. Arătați că lungimea de undă de Broglie a unui electron accelerat de o diferență de potențial de  $V$  volți este dată de relația:

$$\lambda = \frac{1,22}{\sqrt{V}} \text{ (în nm).}$$

19. Arătați că dacă electronii sunt relativisti, atunci expresia relației din problema precedentă este

$$\lambda = \frac{0,00242}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\text{unde } x = \frac{E_c}{m_0 c^2}.$$

20. Calculați lungimea de undă de Broglie pentru un electron în echilibru termic la temperatura de 27°C.

$$R: 6,22 \text{ nm.}$$

21. O particulă accelerată la o diferență de potențial de 200 V are o lungime de undă de Broglie de  $0,02 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  și sarcina  $e$ . Determinați masa particulei. Despre ce particulă este vorba?

$$R: 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg; proton.}$$

22. Care trebuie să fie energia cinetică a unui electron pentru ca lungimea de undă de Broglie a lui să fie egală cu lungimea de undă a liniei galbene a sodiului (589 nm).

$$R: 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ eV.}$$

23. Comparați energiile cinetice și totale ale unui electron și ale unui foton ce au  $\lambda = 0,2 \text{ nm}$ .

$$R: \begin{cases} E_{cin}: \text{electron: } 37,6 \text{ eV; foton: } 6,21 \text{ keV} \\ E_{tot}: \text{electron: } 0,511 \text{ MeV; foton: } 6,21 \text{ keV} \end{cases}$$

24. Există oare în fizica clasică (discutată la școală) mărimi fizice cuantificabile?

25. În unele sisteme clasice frecvențele posibile de oscilație sunt „cuantificate”. Pentru astfel de sisteme energia este cuantificată?

26. Pentru ca efectele cuantice să fie vizibile în fenomenele cotidiene, care ar trebui să fie ordinul de mărime al constantei  $h$ ?

27. Arătați că dacă nedeterminarea în poziție a unei particule este aproximativ egală cu lungimea de undă de Broglie, atunci nedeterminarea vitezei particulei este aproximativ egală cu viteza ei.

28. Un electron este obligat să rămână într-o regiune ale cărei dimensiuni sînt de ordinul a 1 nm. Calculați care va fi nedeterminarea impulsului și vitezei lui?

$$R: 5,27 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m/s; } 5,79 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

29. Să considerăm o microparticulă de masă  $m$  ce se mișcă liber de-a lungul axei  $Ox$ . Să presupunem că la momentul  $t = 0$  poziția particulei este cunoscută cu o nedeterminare  $\Delta x_0$ . Calculați nedeterminarea în poziția particulei la un moment ulterior  $t$ .

$$R: \Delta x = t \cdot \Delta v_x = t \frac{h}{4\pi m \Delta x_0}.$$

30. Arătați pe baza principiului de nedeterminare că o microparticulă ce efectuează o mișcare oscilatorie armonică nu poate să aibă energia minimă zero.

31. Un atom poate să emită un foton la orice moment ulterior excitației. În medie, acest interval de timp este de  $\sim 10^{-8} \text{ s}$ .

a) Care este nedeterminarea în energie a stării excitate a atomului?

b) Care este nedeterminarea în frecvență a radiației emise?

$$R: \Delta E \geq 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ eV; } \Delta \nu \geq 8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}.$$

32. Viața medie a unui nucleu într-o stare excitată este de ordinul a  $10^{-12} \text{ s}$ . Care va fi nedeterminarea în energie a radiației  $\gamma$  emise?

$$R: 3,28 \cdot 10^{-4} \text{ eV.}$$

33. Într-o cameră Wilson s-a observat un fenomen de producere a unei perechi electron-positron. Traectoriile particulelor erau curbate în sens invers una față de alta deoarece era prezent un câmp magnetic transversal, uniform, de 0,2 T. Care a fost energia și lungimea de undă a fotonului care a produs perechea, dacă raza de curbură a traectoriilor a fost de 2,5 cm?

$$R: 3,2 \text{ MeV; } 3,9 \cdot 10^{-13} \text{ m.}$$

34. Care este lungimea de undă a celor doi fotoni produși prin anihilarea unei perechi electron-positron, în sistemul de referință în care centrul de masă este în repaus? Energia cinetică a celor două particule este neglijabil de mică ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ).

$$R: \lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m.}$$

35. Se consideră că protonul și neutronul reprezintă două stări cuantice ale unei particule unice: nucleonul. Să se argumenteze pe bază energetică (energia de repaus a particulelor) care dintre cele două stări este mai stabilă? Puteți cita un fapt experimental în favoarea afirmației de mai sus?

36. În fizica particulelor fundamentale se obișnuiește să se exprime masa particulelor în  $E/c^2$ . Calculați în  $\text{MeV}/c^2$  masele următoarelor particule: electron, pion, miuon și proton ( $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $2,48 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ ;  $1,88 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ ;  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ )

$$R: 0,511; 139,6; 105,7; 938,3 \text{ MeV}/c^2$$

37. Știind că transformarea particulelor fundamentale trebuie să conserve sarcina electrică totală, să se arate care dintre transformările de mai jos sint corecte:

$$a) n \rightarrow p + e^+ \quad ; \quad b) n \rightarrow p + e^-$$

R: b).

38. Arătați că în procesul de formare a perechilor electron-pozitron trebuie să participe și un al treilea corp (de obicei un nucleu) pentru ca legile de conservare a energiei și impulsului să fie satisfăcute.

39. Să presupunem că un mezon  $\pi$  în repaus se dezintegrează cu formarea unui mezon  $\mu$  și unui neutrino:  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ . Calculați energia cinetică a mezonului  $\mu$ , utilizând legile de conservare a energiei și impulsului ( $m_\pi = 2,48 \cdot 10^{-28}$  kg;  $m_\mu = 1,88 \cdot 10^{-28}$  kg;  $m_\nu = 0$  kg.)

R: 41,32 MeV.

Plan editură 25.408. Coli de tipar 15. Tiraaj 156000+115  
ex. legate 112. Apărut 1979.



Tiparul executat sub comanda  
nr. 397 la  
Intreprinderea poligrafică  
„13 Decembrie 1918”,  
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97  
București,  
Republica Socialistă România



Lei 9,35