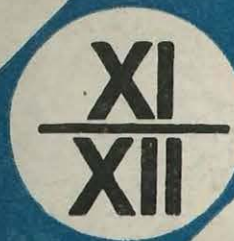


Lei 12,10



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE ÎN FIZICĂ

Manual pentru clasele a XI-a și a XII-a
ale liceelor de matematică-fizică

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI - 1986

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

T. CREȚU

Doru Pop.

cls. XII-a C.

'90/'91

V. FĂLIE



PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE ÎN FIZICĂ

Manual pentru clasele a XI-a și a XII-a
ale liceelor de matematică-fizică



Editura Didactică și Pedagogică
București

Manualul a fost elaborat în anul 1980, pe baza programei aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 3448/1979, și a fost avizat de Comisia de fizică.

Referenți: Prof. D. Godini
Prof. univ. dr. O. Stănășilă
Lector univ. I. Florea

Manual pentru clasele a XI-a și a XII-a
Redactor: Prof. Ileana Negulescu
Tehnoredactor: Viorica Condopol



Editura Didactică și Pedagogică
București

NOTĂ

Prelucrarea datelor experimentale în fizică este o disciplină nou-introdusă în planul de învățămînt al liceelor de matematică-fizică (profil mecanic, electrotehnică, informatică). Scopul acestei discipline este mărirea valorii formative a experimentului de fizică și integrarea învățării fizicii cu munca propriu-zisă de cercetare prin interpretarea și prelucrarea datelor obținute din realitatea fizică nemijlocită.

Manualul încearcă să realizeze acest obiectiv folosind experimentul posibil în laboratorul școlar. Plecînd de la datele obținute, se arată diferite metode de înregistrare a datelor, de prelucrare și de apreciere a erorilor posibile în condițiile unui experiment dat.

Importanță este nu reținerea și înșușirea formulelor ci înțelegerea și exersarea metodelor expuse, familiarizarea, cu problemele care se ivesc în munca de cercetare experimentală în vederea aplicării acestor metode în practică.

Îmbunătățirea structurii manualului și a conținutului său depind de eficiența aplicării lui la clasă. În acest scop, așteptăm propuneri menite să contribuie la creșterea calității acestei lucrări.

Editura Didactică și Pedagogică

NOTA

Pe lângă datele experimentale în fizică este o direcție de cercetare în domeniul de fizică teoretică și de mecanică clasică (fizică clasică) și mecanică relativă (fizică relativă). Scopul acestei direcții este de a stabili legăturile dintre fizică și matematică și de a găsi metode de calcul care să permită rezolvarea problemelor fizice.

În domeniul fizicii teoretice se lucrează cu modele matematice care descriu fenomenele fizice. Pentru a fi utile, aceste modele trebuie să fie capabile să descrie toate fenomenele fizice care sunt de interes pentru fizicieni.

Importanța fizicii teoretice este în creștere din cauza faptului că multe probleme fizice nu pot fi rezolvate prin metode experimentale și trebuie rezolvate prin metode matematice.

În fizică teoretică se lucrează cu modele matematice care descriu fenomenele fizice. Pentru a fi utile, aceste modele trebuie să fie capabile să descrie toate fenomenele fizice care sunt de interes pentru fizicieni.

Adunarea numerelor și scăderea

CUPRINS

1. Sisteme de unități. Sistemul internațional de unități	7
1.1. Mărimi fizice. Unități de măsură	8
1.2. Formule fizice. Coeficientul parazit	11
1.3. Sistemul internațional de unități (SI)	13
1.3.1. Unități SI fundamentale	13
1.3.2. Unități și derivate	15
1.3.3. Unități SI suplimentare	17
1.3.4. Unități care nu fac parte din sistemul internațional	19
1.3.5. Multiplii și submultiplii pentru unitățile SI	19
1.4. Analiza dimensională a formulelor fizice	20
1.5. Constante fizice fundamentale	22
Exerciții și probleme	24
2. Mărimi aproximative. Reprezentarea datelor prin tabele	30
2.1. Erorile mărimilor aproximative	31
2.2. Reguli de rotunjire a numerelor. Stabilirea numărului de cifre exacte	35
2.3. Erorile rezultate în urma efectuării unor operații matematice cu numere aproximative	37
2.3.1. Adunarea numerelor aproximative	37
2.3.2. Scăderea numerelor aproximative	38
2.3.3. Înmulțirea numerelor aproximative	39
2.3.4. Împărțirea numerelor aproximative	41
2.3.5. Ridicarea unui număr aproximativ la o putere	43
2.3.6. Extragera rădăcinii de ordin k dintr-un număr aproximativ	43
2.4. Reprezentarea datelor prin tabele	44
2.5. Interpolarea	52
2.5.1. Cazul argumentelor cu pas constant	52
2.5.2. Cazul când argumentele nu variază cu pas constant	59
2.6. Extrapolarea	62
Exerciții și probleme	67
3. Reprezentarea datelor prin grafice	75
3.1. Unele avantaje ale reprezentării datelor prin grafice	77
3.2. Grafice calitative și cantitative	84
3.3. Unele indicații privind reprezentarea datelor prin grafice	85
3.4. Scări funcționale	90
Exerciții și probleme	96

4. Reprezentarea datelor prin corelații	99
4.1. Formule raționale și formule empirice	100
4.2. Alegerea formei adecvate pentru o formulă empirică	103
4.3. Evaluarea constantelor. Concordanța unei funcții empirice cu un șir de date	110
Exerciții și probleme	118
5. Metode și mijloace de măsurare	123
5.1. Metode de măsurare	124
5.2. Mijloace de măsurare	128
5.2.1. Clasificarea mijloacelor de măsurare după complexitate	128
5.2.2. Clasificarea mijloacelor de măsurare după sarcinile lor în cadrul unei in-	130
stalații de măsurare	133
5.2.3. Clasificarea mijloacelor de măsurare după forma semnalului	133
5.2.4. Elemente de indicații ale mijloacelor de măsurare	133
5.2.5. Noțiuni metrologice privind indicațiile mijloacelor de măsurare	135
Exerciții și probleme	136
6. Introducere în teoria erorilor de măsurare	141
6.1. Erorile de măsurare ale mijloacelor de măsurare	142
6.2. Clasificarea erorilor de măsurare	146
6.3. Erori sistematice. Unele procedee de eliminare a erorilor sistematice	152
6.4. Erori întâmplătoare	158
6.4.1. Proprietățile erorilor întâmplătoare. Densitatea de repartiție Gauss	159
6.4.2. Estimarea valorii adevărate x_0 . Erori aparente	162
6.4.3. Relația dintre indicii de precizie h și eroarea medie pătratică	168
6.4.4. Funcția de repartiție	172
6.4.5. Nivel de încredere. Interval de încredere	177
6.4.6. Concluzii practice privind erorile întâmplătoare în cazul efectuării unui	180
set de măsurări directe, în aceleași condiții	181
6.4.7. Compararea valorilor medii	183
6.4.8. Măsurări indirecte. Legea de compunere a erorilor	187
Exerciții și probleme	192
7. Metoda celor mai mici pătrate	193
7.1. Linia dreaptă ce trece prin originea coordonatelor	195
7.2. Linia dreaptă. Caz general	201
Bibliografie	201

1

SISTEME DE UNITĂȚI. SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI

În studiul fenomenelor sau obiectelor din natură omul măsoară diferite mărimi fizice care caracterizează fenomenele sau obiectele respective.

Fizicianul englez William Thomson (lordul Kelvin) a spus că: „atunci când putem măsura mărimea despre care vorbim și o putem exprima printr-un număr, atunci noi știm ceva despre ea; dar când nu o putem exprima printr-un număr, cunoașterea noastră este slabă și nesatisfăcătoare...”

Prin măsurare, în general, înțelegem atribuirea de numere, potrivit unor reguli stabilite, pentru obiectele și fenomenele studiate. Desigur, în atribuirea unui număr pentru o mărime fizică oarecare, un rol deosebit îl are calitatea procedeele de măsurare. De asemenea, vom vedea că aceleași mărimi fizice i se pot atribui mai multe numere în funcție de unitățile de măsură în care se exprimă numerele respective.

Știința care se ocupă de unitățile de măsură pentru mărimile fizice de sistemele de unități de măsură, de mijloacele și procedeele de măsurare, precum și de totalitatea normelor privind folosirea măsurărilor, a mijloacelor și metodelor de măsurare în toate domeniile, este o ramură a fizicii — metrologia. Cuvântul metrologie derivă de la cuvintele grecești *metrōn* — măsurare și *logos* — vorbire și înseamnă deci știința măsurărilor.

Este clar că progresul în știință și tehnică nu poate fi conceput fără măsurări și, respectiv, fără mijloace de măsurare și unități de măsură. Nu întâmplător D. I. Mendeleev arată că „știința începe atunci când încep măsurările”, iar Max Planck, unul dintre creatorii mecanicii cuantice, reluând o idee a lui Galileo Galilei, îi îndemna pe fizicieni să măsoare tot ce nu este încă măsurabil. Perfecționarea tehnicilor de măsurare a permis măsurarea multor mărimi fizice care nu cu multe zeci de ani în urmă se considerau nemăsurabile. S-a ajuns să se măsoare o serie de mărimi ce caracterizează structura atomului și a nucleului și chiar a particulelor elementare.

Dezvoltarea rapidă a științei și tehnicii și de asemenea lărgirea colaborării economice și științifice între diferite țări impun realizarea unor norme unice atât pentru modalitățile de măsurare a mărimilor fizice, cât și pentru sistemul de unități în care se exprimă mărimile fizice respective.

În acest sens, pe plan mondial, au existat preocupări constante încă din anul 1793, când în Franța a fost creat sistemul de unități de măsură — denumit Sistemul metric, care avea la bază unitățile fundamentale: metrul — unitate de măsură a lungimii — și kilogramul — unitate de măsură a masei —. În anul 1875 a fost semnată la Paris, de către reprezentanții a 17 țări, Convenția Metrului — prin care sistemul metric a devenit sistem de unități cu aplicabilitate în toate țările semnatare. Totodată, s-a fondat un Birou Internațional de Măsuri și Greutăți (BIPM) — laborator permanent de cercetări în domeniul metrologiei, cu sediul la Sèvres, în apropiere de Paris — a cărui activitate este îndrumată de Comitetul Internațional de Măsuri și Greutăți (CIPM). Întreaga activitate în acest domeniu este coordonată de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți (CGPM), constituită din reprezentanții tuturor țărilor care au aderat la Convenția Metrului. Țara noastră este membră a Convenției Metrului din anul 1883. Activitatea laborioasă desfășurată atât în cadrul forurilor internaționale cât și în cadrul laboratoarelor de metrologie din diferite țări a condus la elaborarea unui sistem practic de unități de măsură susceptibil de a fi aplicat în toate țările. Noul sistem de unități stabilit la cea de a 10-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din anul 1954 a fost denumit la cea de-a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți, care a avut loc în anul 1960, Sistemul internațional de unități, notat prescurtat SI.

Sistemul internațional de unități este un sistem practic, coerent, simplu și rațional, structurat astfel încât prezintă aplicabilitate în toate domeniile științei și tehnicii. Avantajele noului sistem de unități de măsură se reflectă și în faptul că Sistemul internațional de unități se aplică în peste 120 de țări.

Țara noastră a adoptat Sistemul internațional de unități (SI) între primele țări din lume, prin hotărîrea Consiliului de Miniștri nr. 550 din 31 august 1961, începînd de la acea dată. Conform acestei hotărîri, Sistemul internațional de unități este singurul sistem de unități legal și obligatoriu în țara noastră.

1.1. MĂRIMI FIZICE. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

În general, prin mărime fizică înțelegem o proprietate caracteristică, măsurabilă, a unui obiect sau a unui sistem fizic oarecare. Este important să subliniem că o caracteristică esențială a mărimilor fizice este aceea că sînt măsurabile, adică se pot exprima cantitativ în urma efectuării unei operații de măsurare.

Orice mărime fizică prezintă atât o latură cantitativă cât și o latură calitativă. Latura calitativă a unei mărimi fizice se determină prin proprie-

tatea obiectului material sau particularitatea sistemului, redate de mărimea respectivă. De exemplu, masa unui corp caracterizează inerția corpului, accelerația redă modul de variație a vitezei unui corp iar forța este o mărime fizică ce caracterizează interacțiunea dintre corpuri. Aceste trei mărimi fizice, masa, accelerația și forța, reflectă laturi calitativ diferite ale corpurilor sau fenomenelor din natură.

Mărimile fizice definite, din punct de vedere calitativ, pot fi însă mai intense sau mai puțin intense, mai mari sau mai mici. Această proprietate reflectă latura cantitativă a mărimilor respective. Nu putem caracteriza o mărime fizică nici numai prin latura sa calitativă și nici numai prin latura cantitativă a acesteia. Proprietatea calitativă a unei mărimi fizice ar fi fără sens dacă nu am dispune de informații privind și natura cantitativă și invers. De exemplu, afirmația că, sub acțiunea unei forțe exterioare, un corp își schimbă starea de mișcare, exprimă numai latura calitativă a acestui fenomen. Pentru a putea calcula accelerația corpului trebuie să cunoaștem mărimea și direcția forței, masa corpului etc., adică să indicăm cantitativ mărimile fizice corespunzătoare.

Mărimile fizice care exprimă aceeași proprietate calitativă a corpurilor sau a sistemelor fizice, deosebindu-se între ele numai prin latura cantitativă, se numesc mărimi de aceeași natură.

Prin operația de măsurare a unei mărimi fizice se stabilește de câte ori se cuprinde în mărimea respectivă o altă mărime de aceeași natură. Mărimea din urmă reprezintă unitatea mărimii măsurate. Desigur că alegerea unității de măsură pentru o mărime fizică oarecare nu este impusă de nici o lege a fizicii. Compararea însă a două mărimi fizice de aceeași natură se poate face numai dacă valoarea acestor mărimi, adică numerele ce li se asociază, exprimă de câte ori se cuprinde în mărimile respective aceeași mărime considerată ca unitate. Dacă, de exemplu, se scrie că valoarea pentru masa corpului 1 este $m_1 = 1\,000$, iar pentru masa corpului 2 este $m_2 = 1$, nu putem răspunde la întrebarea care dintre aceste două mase este mai mare. În ipoteza că ambele mase se exprimă în aceleași unități, de exemplu în kilograme, atunci masa m_1 este mult mai mare decît masa m_2 , iar dacă pentru masa m_1 numărul 1 000 înseamnă grame, iar pentru masa m_2 numărul 1 înseamnă kilograme, atunci cele două corpuri au mase egale. Chiar și din acest exemplu rezultă cît de importantă este ajungerea la un consens privind adaptarea unei aceleiași unități de măsură, cu multiplii și submultiplii acesteia, pentru mărimile fizice de aceeași natură.

Posibilitatea alegerii arbitrare a unităților de măsură pentru unele mărimi fizice nu înseamnă că nu există reguli riguroase care dictează această alegere. Unitățile de măsură alese trebuie în primul rînd să corespundă cerințelor impuse de practică și să poată fi utilizate în toate țările. De asemenea, alegerea unităților de măsură pentru unele mărimi fizice conduce la stabilirea

unităților pentru alte mărimi fizice. Astfel, de exemplu, viteza medie a unui corp este raportul dintre spațiul Δs parcurs în intervalul de timp Δt . Dacă stabilim unitățile de măsură pentru lungimea Δs și pentru intervalul de timp Δt , rezultă unitatea de măsură pentru viteză.

Rezultă deci că în procesul de măsurare este necesară rezervarea unui set de mărimi fizice numite fundamentale, astfel încât să ne putem folosi de ele, și numai de ele, pentru stabilirea unităților de măsură pentru mărimile determinate pe cale experimentală. Setul mărimilor fundamentale reprezintă mărimi necesare și suficiente din unitățile de măsură cărora le rezultă unități univoc determinate pentru toate mărimile fizice. Unitățile de măsură adoptate pentru mărimile fizice fundamentale se numesc unități fundamentale.

Mărimile fizice pentru care unitățile de măsură se exprimă printr-o combinație a unităților fundamentale se numesc mărimi derivate, iar unitățile lor de măsură se numesc unități derivate. De exemplu, forța se măsoară în newton (N), dar știm că $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Deci unitatea derivată N se exprimă prin unități fundamentale pentru masă, lungime și timp.

Împărțirea mărimilor fizice, în mărimi fundamentale și mărimi derivate, este de o deosebită importanță practică, deoarece aceasta reduce considerabil numărul unităților pentru care trebuie să avem mijloace standardizate care reprezintă o unitate de mărime și care se numesc etaloanele mărimii fizice respective.

Pentru unitățile fundamentale se construiesc etaloane care trebuie păstrate în condiții cu totul speciale.

Etaloanele trebuie să satisfacă o serie de condiții printre care amintim următoarele :

- să poată fi reconstituite ;
- să prezinte o variație minimă față de influența factorilor externi, ca temperatură, presiune, umiditate etc. ;
- să poată fi folosite în mod simplu în tehnica măsurării ;
- să fie construite din materiale care nu suferă modificări de structură fizico-chimice în timp.

Există etaloane de mai multe ordine :

— etaloane prototip — care sînt depozitate în camere speciale ale pavilionului Breteuil de la Sèvres din apropierea Parisului și cu care se lucrează extrem de rar ;

— etaloane de prim ordin — depozitate împreună cu etaloanele prototip și din timp în timp comparate cu acestea ;

— etaloane de-al doilea ordin constituie copii după etaloanele de primul ordin, fiind distribuite în diferite țări unde sînt păstrate în condiții speciale. Deci pentru fiecare țară etalonul de-al doilea ordin are semnificația etalonului prototip pe plan mondial ;

— etaloanele de-al treilea ordin sînt copii construite în fiecare țară după etalonul de la al doilea ordin, fiind folosite în procesul de măsurare de către institutele metrologice și institutele de cercetare.

Pe baza etaloanelor de-al treilea ordin se construiesc „măsurile” care se folosesc în practica zilnică de măsurare.

1.2. FORMULE FIZICE. COEFICIENTUL PARAZIT

Din cele relatate în paragraful precedent rezultă că prin operația de măsurare a unei mărimi fizice X se stabilește numărul real x care este acel unic număr real astfel încât $X = x[X]$, unde $[X]$ este unitatea de măsură. Raportul dintre mărimea de măsurat X și unitatea de măsură $[X]$ pentru mărimea respectivă se numește valoarea sau măsura x a mărimii X.

$$x = \frac{X}{[X]} \quad (1.1)$$

Valoarea x fiind raportul a două mărimi fizice de aceeași natură măsurate în aceleași unități, este o mărime adimensională. Din acest motiv trebuie întotdeauna scrisă mărimea X ca un produs dintre valoarea x și unitatea de măsură $[X]$.

$$Y = x[X]. \quad (1.2)$$

Dacă nu se indică unitatea de măsură folosită, rezultatul măsurii este lipsit de semnificație fizică. Este clar că măsurînd mărimea fizică X cu unități diferite $[X_1]$, $[X_2]$, ... obținem valori x_1 , x_2 , ... diferite. Din formulele (1.1) și (1.2) putem scrie :

$$x_1 = \frac{X}{[X_1]} ; \quad x_2 = \frac{X}{[X_2]} ; \quad \dots \quad (1.3)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{[X_1]}{[X_2]}. \quad (1.4)$$

Rezultă deci un fapt fundamental privind unitățile de măsură și anume : *Raportul valorilor măsurate ale unei mărimi fizice cu două unități diferite este egal cu raportul invers al acestor unități.*

Faptul că mărimile fizice se exprimă ca un produs între valoarea și unitatea de măsură conduce la o deosebire între formulele fizice și formulele matematice. Formulele fizice cuprind mărimi măsurate sau măsurabile pentru care trebuie indicate atât valorile cit și unitățile de măsură, iar în formulele matematice intră numai mărimile respective. De exemplu, dacă avem un pătrat cu latura $X \neq 0$, matematic se scrie că aria acestui pătrat este :

$$D = X^2. \quad (1.5)$$

Folosirea practică a acestei formule implică măsurarea mărimilor X și A . Fie $[A]$ unitatea de măsură pentru aria A și, înlocuind în formula (1.5), avem

$$a[A] = x^2[X]^2, \quad (1.6)$$

unde a este valoarea ariei A . Deci:

$$a = \frac{[X]^2}{[A]} x^2. \quad (1.7)$$

Rezultă că formula ce reprezintă relațiile dintre mărimile fizice nu este identică cu formula care exprimă relațiile dintre valorile mărimilor respective.

Dacă notăm prin:

$$k = \frac{[X]^2}{[A]}, \quad (1.8)$$

formula (1.7) capătă forma:

$$a = kx^2. \quad (1.9)$$

Deci formula exprimată prin valori măsurate diferă de formula matematică respectivă printr-un coeficient de proporționalitate cunoscut sub numele de *coeficient parazit*. Valoarea acestui coeficient parazit depinde de unitățile de măsură ale mărimilor ce intră în formula matematică respectivă. Astfel dacă aria A se măsoară în hectare (10^4 m^2), iar pentru X se alege unitatea de măsură $[X]$ ca fiind 1 m, atunci pentru formula (1.7) coeficientul parazit k este:

$$k = \frac{1 \text{ m}^2}{1 \text{ ha}} = \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ m}^2} = 10^{-4}.$$

În acest caz, formula (1.7) trebuie scrisă sub forma:

$$a[\text{ha}] = 10^{-4}x^2 [\text{m}^2].$$

Dacă aria A se măsoară în m^2 atunci

$$k = \frac{1 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} = 1.$$

Prezența coeficientului parazit în formulele fizice conduce la complicarea structurii acestora, de aceea se recomandă utilizarea unor astfel de unități de măsură, încât valoarea acestui coeficient să fie $k = 1$. Dacă unitățile de măsură se definesc arbitrar și deci în formulele fizice este prezent coeficientul parazit diferit de unu, avem un sistem incoerent de unități, adică un ansamblu de unități fără nici o legătură între ele.

Eliminarea coeficientului parazit conduce la o condiționare a unităților de măsură pentru mărimile derivate. Adică pentru aceste mărimi nu putem alege unități arbitrare, ci numai pe acelea care rezultă din unitățile stabilite pentru mărimile fundamentale. De exemplu, din formula (1.7) rezultă că pentru $k = 1$ avem:

$$[A] = [X]^2. \quad (1.10)$$

Aceasta este o relație de condiție care arată că, dacă unitatea pentru mărimea X este metrul, atunci pentru unitatea de arie nu putem alege orice unitate ci numai aria pătratului de latură egală cu unitatea de lungime $[X]$, adică cu un metru. Dacă această condiție este satisfăcută atunci relația (1.7) se scrie:

$$a = x^2. \quad (1.11)$$

În acest fel, relația dintre valori este identică cu formula care reprezintă relația dintre mărimile respective, adică formulele fizice și formulele matematice se exprimă identic.

Prin acest procedeu se ajunge însă la faptul că unitatea de măsură pentru aria A derivă din unitatea aleasă pentru lungimea X a laturii pătratului. În acest sens, unitatea pentru lungimea laturii pătratului este o unitate fundamentală, iar unitatea pentru arie este o unitate derivată.

Ansamblul unităților de măsură a căror mărime este determinată de un număr restrins de unități fundamentale constituie un sistem coerent de unități. Utilizarea unui astfel de sistem conduce la faptul că practic toate formulele fizice se scriu astfel încât coeficientul parazit $k = 1$.

1.3. SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI (SI)

În sistemul internațional se disting trei clase de unități SI, și anume:

- unități fundamentale;
- unități derivate;
- unități suplimentare.

1.3.1. Unități SI fundamentale. Unitățile fundamentale, independente din punct de vedere dimensional, sînt în număr de șapte (tabelul 1.1).

Tabelul 1.1

Unități SI fundamentale

Mărimea	Denumirea	Simbolul
Lungimea L	Metru	m
Masă M	Kilogram	kg
Timp T	Secundă	s
Intensitatea curentului electric	Amper	A
Temperatura termodinamică	Kelvin	K
Cantitatea de substanță	Mol	mol
Intensitatea luminoasă	Candelă	cd

Simbolurile unităților se scriu cu litere latine, în general mici, totuși, dacă simbolurile derivă din nume proprii, atunci se folosesc litere latine majuscule (pentru prima literă). Simbolurile nu sînt urmate de punct. De asemenea, simbolurile unităților rămîn neschimbate la plural.

Redăm definițiile unităților fundamentale adoptate de a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din anul 1960.

1. Unitatea de lungime (metru). Metrul este lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă în vid a radiației care corespunde tranziției între nivelele de energie $2p_{10}$ și $5d_5$ ale atomului de Kripton 86.

2. Unitatea de masă (kilogram). Prototipul internațional al kilogramului rămîne cel confirmat de prima Conferință generală de măsuri și greutateți din anul 1889.

Acest prototip internațional din platină iridiată se păstrează la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți în condițiile stabilite în anul 1889.

Avîndu-se în vedere că în uzul curent există o ambiguitate asupra semnificației termenului de greutate, folosit cînd în sensul de masă, cînd în sensul de efort mecanic, cea de-a 3-a Conferință generală de măsuri și greutateți din anul 1901 stabilește:

— Kilogramul este unitatea de masă; el este egal cu masa prototipului internațional al kilogramului.

— Termenul de greutate desemnează o mărime de aceeași natură cu o forță: greutatea unui corp este produsul dintre masa acelui corp și accelerația gravitației; în particular, greutatea normală a unui corp este produsul dintre masa acelui corp și accelerația normală a gravitației.

— Valoarea adoptată în Serviciul Internațional de Măsuri și Greutăți pentru accelerația normală a gravitației este $980,665 \text{ cm/s}^2$, valoare care a și fost ratificată prin unele legi.

3. Unitatea de timp (secundă). Secunda este durata a 9192631770 perioade ale radiației care corespunde tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.

4. Unitatea de intensitate a curentului electric (amper). Amperul este intensitatea unui curent electric constant care, menținut în două conductoare paralele, rectilinii, cu lungimea infinită și cu secțiunea circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de 1 metru unul de altul, produce între aceste conductoare o forță egală cu $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pe o lungime de 1 metru.

5. Unitatea de temperatură termodinamică (Kelvin). Kelvinul, unitate de temperatură termodinamică, este fracțiunea $1/273,16$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

La cea de-a 13-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți s-a hotărît că unitatea Kelvin și simbolul său K se folosesc pentru a exprima un interval sau o diferență de temperatură.

În afara temperaturii termodinamice (simbol T) exprimată în Kelvin, se folosește și temperatura Celsius (simbol t) definită prin ecuația:

$$t = T - T_0 \quad (1.12)$$

unde $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

Unitatea „grad Celsius” este egală cu unitatea „Kelvin”. Un interval sau o diferență de temperatură Celsius pot fi exprimate atît în grade Celsius cît și în Kelvin.

6. Unitatea de cantitate de substanță (mol). Această unitate fundamentală a fost adoptată la cea de-a 14-a Conferință Internațională de Măsuri și Greutăți din anul 1971. Prin rezoluția 3 a acestei conferințe se specifică:

1° Molul este cantitatea de substanță a unui sistem care conține atîtea cantități elementare cîți atomi există în 0,012 kilograme de carbon 12. Masa de 0,012 kg de carbon 12 conține un număr de atomi egal cu numărul lui Avogadro ($N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1}$).

2° De cîte ori se întrebuintează molul, entitățile elementare trebuie specificate, ele putînd fi: atomi, molecule, ioni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

7. Unitatea de intensitate luminoasă (candelă). Candelă este intensitatea luminoasă, în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria de $1/600\,000$ metri pătrați a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de 101 325 Newton pe metru pătrat.

Această definiție a fost adoptată în anul 1967 la cea de-a 13-a Conferință Internațională de Măsuri și Greutăți.

Trebuie înțeles faptul că unitățile de măsură pentru mărimile fundamentale, precum și numărul acestor mărimi nu se consideră ca fiind stabilite pentru totdeauna prin definițiile enunțate mai sus. Organizațiile metrologice din diferite țări desfășoară o laborioasă activitate în direcția perfecționării etaloanelor pentru unitățile fundamentale în pas cu cerințele dezvoltării științei și tehnicii actuale. Așa, de exemplu, unitatea de cantitate de substanță ca unitate fundamentală a fost adoptată abia în anul 1971 și nu este exclus ca dezvoltarea cercetărilor în domenii ca fizica corpului solid, fizica nucleară sau fizica particulelor elementare să impună elaborarea și adoptarea altor unități fundamentale.

Trebuie, de asemenea, subliniată importanța practică deosebită a unor cercetări în domeniul fizicii atomice care, deocamdată, au fost singurele în măsură să furnizeze cele mai precise determinări pentru unitățile de lungime și de timp.

1.3.2. Unități SI derivate. Unitățile derivate sînt date, de regulă, de expresii algebrice, care utilizează simbolurile matematice de înmulțire și împărțire.

Putem distinge trei grupe de unități SI derivate:

- unități SI derivate în funcție de unitățile fundamentale;
- unități SI derivate cu denumiri speciale;
- unități SI derivate care se exprimă folosindu-se denumiri speciale.

În tabelele 1.2, 1.3 și 1.4 indicăm unele exemple din fiecare grupă de unități SI derivate, pe care le considerăm ca fiind mai des utilizate.

Este admisă folosirea anumitor combinații sau a anumitor denumiri speciale în scopul facilitării diferențierii mărimilor care au aceeași dimensiune.

Tabelul 1.2

Exemple de unități SI derivate, grupa a

Mărimea	Denumirea unități în SI	Simbolul
Arie	Metru pătrat	m^2
Volum	Metru cub	m^3
Viteză	Metru pe secundă	m/s
Accelerație	Metru pe secundă la pătrat	m/s^2
Număr de undă	1 pe metru	m^{-1}
Densitate (masă volumetrică)	Kilogram pe metru cub	kg/m^3
Densitate de curent	Amper pe metru pătrat	A/m^2
Intensitatea cîmpului magnetic	Amper pe metru	A/m
Concentrația (a cantității de substanță)	Mol pe metru cub	mol/m^3

În acest sens pentru frecvență se folosește mai degrabă unitatea hertz decât unitatea secundă la puterea minus unu, iar pentru momentul unei forțe unitatea metru-newton și nu unitatea joule.

Tabelul 1.3

Exemple de unități SI derivate, grupa b

Mărimea	Denumirea unității în SI	Simbol	Expresia în alte unități SI	Expresia în unități SI fundamentale
Frecvență	Hertz	Hz		s^{-1}
Forță	Newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Presiune	Pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie, lucru mecanic, căldură	Joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Putere, flux energetic	Watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Cantitatea de electricitate, sarcină electrică	Coulomb	C		$s \cdot A$
Potențial electric, tensiune electrică, tensiune electromotoare	Volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Capacitate electrică	Farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Rezistență electrică	Ohm		V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Conductanță	Siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot A^2$
Fluxul inducției magnetice	Weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot k \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inducție magnetică	Tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Temperatură	Kelvin	K		

Tabelul 1.4

Exemple de unități SI derivate, grupa c

Mărimea	Denumirea unității în SI	Simbol	Expresia în unități SI fundamentale
Momentul unei forțe	Metru-newton	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Densitate de flux termic iluminare energetică	Watt pe metru pătrat	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
Capacitate termică	Joule pe Kelvin	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Capacitate termică masică	Joule pe kilogram Kelvin	$J/kg \cdot K$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Energie masică	Joule pe kilogram	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
Energie volumetrică	Joule pe metru cub	J/m^3	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Intensitate a cimpului electric	Volt pe metru	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Sarcină electrică volumică	Coulomb pe metru	C/m^3	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
Permitivitate	Farad pe metru	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Permeabilitate	Henry pe metru	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Energie molară	Joule pe mol	J/mol	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
Capacitatea termică molară	Joule pe mol Kelvin	$J/mol \cdot K$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$

Pentru a uniformiza modalitățile de folosire a unităților se fac următoarele recomandări:

a) Produsul a două sau mai multe unități poate fi notat într-unul din modurile următoare:

$$N \cdot m; N \times m; Nm.$$

Se recomandă însă să se scrie sub forma $N \cdot m$ singura excepție fiind Wh.

b) Dacă o unitate derivată se formează prin împărțirea unei unități cu o altă unitate se poate folosi bara oblică (/), bara orizontală (—) sau scrierea sub formă de puteri negative

$$m/s; \frac{m}{s} \text{ sau } ms^{-1}.$$

c) Pentru evitarea unor ambiguități nu trebuie scrisă niciodată mai mult de o bară oblică pe un rând, în afară de cazul când se adaugă paranteze. În cazuri complicate se folosește scrierea de puteri negative sau de paranteze, de exemplu:

$$m/s^2 \text{ sau } ms^{-2} \text{ nu } m/s/s,$$

$$m \cdot kg/(s^2 \cdot A) \text{ sau } m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} \text{ nu } m \cdot kg/s^2/A.$$

1.3.3. Unități SI suplimentare. În urma clasificării unităților de măsură în unități fundamentale și unități derivate au rămas două unități pur geometrice asupra cărora nu s-a decis încă dacă fac parte din unitățile fundamentale sau din unitățile derivate. Aceste mărimi sînt date în tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

Unități SI suplimentare

Mărimea	Denumirea unității SI	Simbol
Unghi plan Unghi solid	Radian Steradian	rad sr

Unitatea SI de unghi plan, radianul și unitatea SI de unghi solid, steradianul se definesc conform rezoluției celei de a 11-a Conferință Internațională de Măsuri și Greutăți:

Radianul este unghiul plan cuprins între două raze care delimitează pe circumferința unui cerc un arc de lungime egală cu cea a razei. Unghiul de 1 radian este egal cu unghiul de $(180/\pi)$ grade sexagesimale, adică $57^{\circ}17'45''$.

Steradianul este unghiul solid care, avînd vîrfurile în centrul unei sfere, delimitează pe suprafața acestei sfere o arie egală cu a unui pătrat a cărei latură este egală cu raza sferei.

Dacă din centrul unei sfere de rază r se trasează o suprafață conică (fig. 1.1), atunci această suprafață intersectează o parte din sferă, aria acestei părți ΔA fiind proporțională cu r^2 și cu valoarea unghiului solid τ . Unghiul solid τ se determină ca raportul ariei ΔA și pătratul razei sferice r^2 :

$$\tau = \frac{\Delta A}{r^2}. \quad (1.13)$$

Nu este greu de demonstrat că acest raport nu depinde de raza sferei.

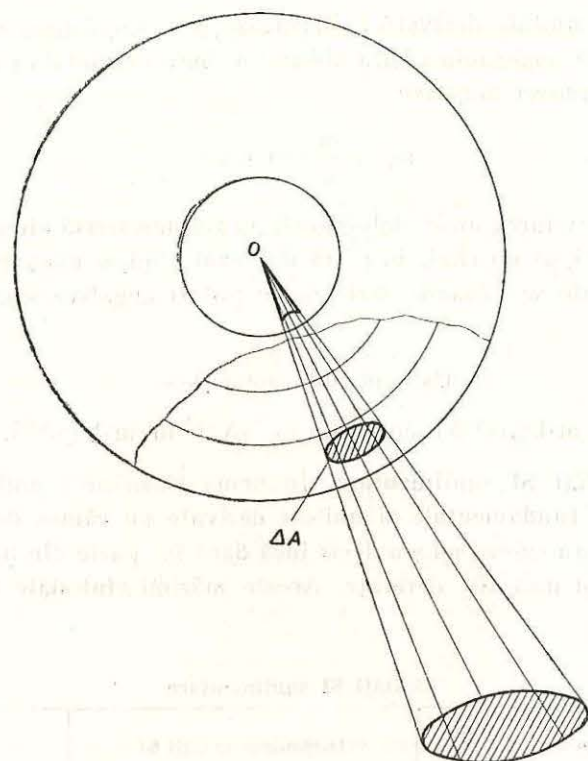


Fig. 1.1.

Unghiul solid total sub care se vede suprafața sferică din centrul sferei este :

$$\tau = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr.} \quad (1.14)$$

Atît radianul cit și steradianul sînt unități adimensionale. Deocamdată nu există aparate de măsură gradate în steradiani, pentru măsurarea directă a unghiului solid. Grupa unităților SI suplimentare este necesară pentru exprimarea unor unități SI derivate (tabelul 1.6).

Tabelul 1.6

Unele unități SI derivate exprimate prin unitățile suplimentare

Mărimea	Denumirea unității	Simbol
Viteză unghiulară	Radian pe secundă	rad/s
Accelerația unghiulară	Radian pe secundă la pătrat	rad/s ²
Intensitate energetică	Watt pe steradian	W/sr
Luminanță energetică	Watt pe metru pătrat-steradian	W·m ⁻² ·sr ⁻¹

1.3.4. Unități care nu fac parte din sistemul internațional. În aplicarea consecventă a sistemului internațional s-a constatat necesitatea utilizării unor unități care nu fac parte din SI, dar care joacă un rol important și sînt larg răspîndite. Unele dintre aceste unități sînt indicate în tabelul 1.7.

Tabelul 1.7

Unități folosite împreună cu unitățile SI

Denumirea	Simbol	Valoarea în SI
Minut	min	1 min = 60 s
Oră	h	1 h = 60 min = 3 600 s
Zi	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Grad	°	1° = (π/180) rad
Minut	'	1' = (1/60°) = (π/10 800) rad
Secundă	"	1" = (1/60') = (π/648 000) rad
Litru	l	1 l = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
Tonă	t	1 t = 10 ³ kg

Se recomandă, pentru păstrarea avantajelor coerenței unităților SI, ca aceste unități să fie folosite cit mai rar posibil în combinație cu unitatea SI pentru formarea unor unități compuse.

Sînt admise și cîteva unități a căror folosire este utilă în diferite domenii, dar valoarea acestora trebuie obținută experimental și deci nu este exact cunoscută. Aceste unități sînt :

1. Electron-volt (eV). Un electron-volt este energia cinetică cîștigată de un electron, care traversează o diferență de potențial de 1 volt în vid ; 1 eV = 1,60219·10⁻¹⁹ J, aproximativ.

2. Unitatea de masă atomică (unificată), simbol (u). Unitatea de masă atomică (unificată) este fracțiunea 1/12 din masa unui atom al nucleidului ¹²C ; 1u = 1,66057·10⁻²⁷ kg, aproximativ.

1.3.5. Multiplii și submultiplii pentru unitățile SI. La cea de a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din anul 1960 s-au stabilit denumiri și simboluri pentru prefixe, destinate formării multiplilor și submultiplilor ai unităților SI. Tabelul prefixelor a fost completat în anul 1964 și respectiv 1975.

Denumirile și simbolurile pentru prefixele adoptate sînt cuprinse în tabelul 1.8.

Tabelul 1.8

Prefixe SI

Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbol	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbol
10 ¹⁸	exa	E	10 ⁻¹	deci	d
10 ¹⁵	peta	P	10 ⁻²	centi	c
10 ¹²	tera	T	10 ⁻³	mili	m
10 ⁹	giga	G	10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁶	mega	M	10 ⁻⁹	nano	n
10 ³	kilo	k	10 ⁻¹²	pico	p
10 ²	hecto	h	10 ⁻¹⁵	femto	f
10 ¹	deca	da	10 ⁻¹⁸	atto	a

La folosirea prefixelor SI se recomandă să se țină seama de următoarele reguli:

a) Simbolurile prefixelor se tipăresc cu litere latine (drepte) fără spații între simbolul prefixului și simbolul unității.

b) Dacă un simbol care cuprinde un prefix este însoțit de un exponent, aceasta înseamnă că multiplul sau submultiplul unității este ridicat la puterea exprimată la exponat. De exemplu:

$$1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$1 \text{ } \mu\text{s}^{-1} = (10^{-6} \text{ s})^{-1} = 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

c) Nu se admit prefixe compuse care s-au format prin juxtapunerea mai multor prefixe SI. De exemplu, se scrie 1 nm și nu 1 mm.

1.4. ANALIZA DIMENSIONALĂ A FORMULELOR FIZICE

Coerența sistemului internațional impune ca unitățile pentru mărimile derivate să se exprime prin unități fundamentale și eventual prin unitățile suplimentare. Este clar că nu orice mărime derivată se exprimă prin toate mărimile fundamentale stabilite de sistemul internațional. Astfel practic toate mărimile derivate întâlnite în mecanică se pot exprima numai prin trei mărimi fundamentale, și anume lungimea L , masa M și timpul T . Dacă scriem, de exemplu, legea a doua a lui Newton pentru un sistem de referință inerțial, avem:

$$F = ma. \quad (1.15)$$

Unitatea de măsură pentru forță $[F]$ se exprimă prin unitățile fundamentale pentru mărimile L , M , T sub forma

$$[F] = MLT^{-2}. \quad (1.16)$$

Practic, toate unitățile de măsură pentru o mărime oarecare X , din mecanică, pot fi scrise analog cu formula (1.16):

$$[X] = L^\alpha M^\beta T^\gamma. \quad (1.17)$$

Coeficienții α , β , γ , care pot fi întregi sau fracționari, pozitivi sau negativi, reprezintă dimensiunile unității derivate X în raport cu unitățile L , M și T . Relația (1.17) reprezintă formula dimensională pentru unitatea derivată $[X]$.

Formulele fizice sînt invariante față de schimbarea unităților de măsură ale mărimilor fundamentale dacă ambii termeni ai formulei au aceleași dimensiuni în raport cu fiecare din unitățile fundamentale ce intervin în formulele respective.

Dacă de exemplu, pentru o formulă de forma (1.15) se scrie

$$[F] = L^\alpha M^\beta T^\gamma. \quad (1.18)$$

$$[m] [a] = L^\alpha M^\beta T^\gamma. \quad (1.19)$$

și

principiul invariației legilor fizicii față de schimbarea unităților de măsură impune egalitățile

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2. \quad (1.20)$$

Aceste egalități reprezintă condiția de omogenitate a formulelor fizice. Dacă o formulă matematică reprezintă o lege fizică, atunci ambii termeni ai formulei respective trebuie să aibă grade de omogenitate α , β , γ ... egale în raport cu fiecare din unitățile fundamentale cuprinse în formula dată.

Ținînd seama de proprietățile de omogenitate a formulelor fizice, putem verifica totdeauna dacă nu s-au comis unele erori în scrierea unei formule oarecare.

Utilizînd principiul omogenității formulelor fizice, putem deduce unele formule numai pe baza analizei dimensionale.

De exemplu știm că accelerația centripetă a unui punct material care se deplasează pe un cerc de rază R cu viteza v , depinde de mărimile R și v . Putem deci scrie:

$$[a_n] = LT^{-2} \quad (1.21)$$

și

$$[a_n] = [v]^\alpha [R]^\beta = L^\alpha T^{-\alpha} L^\beta = L^{\alpha+\beta} T^{-\alpha}. \quad (1.22)$$

comparînd formulele (1.21) și (1.22) obținem:

$$-\alpha = -2. \quad (1.23)$$

$$\alpha + \beta = 1,$$

de unde

$$\beta = -1, \alpha = 2. \quad (1.24)$$

Deci

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Uneori în formulele fizice intervine un coeficient adimensional A care nu poate fi determinat numai pe baza analizei dimensionale. De exemplu, dacă vrem să stabilim dependența energiei potențiale în câmpul forțelor elastice de constanta elastică k și elongația x ,

$$E_p = k^\alpha x^\beta. \quad (1.25)$$

Dimensional :

$$ML^2T^{-2} = (MT^{-2})^\alpha \cdot L^\beta = M^\alpha \cdot T^{-2\alpha} \cdot L^\beta \quad (1.26)$$

Din această relație se obține

$$\alpha = 1, \beta = 2.$$

Deci

$$E_p = Akx^2. \quad (1.27)$$

Coefficientul de proporționalitate A , în acest caz, este $1/2$ și deci formula (1.27) se scrie sub forma :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (1.28)$$

1.5. CONSTANTE FIZICE FUNDAMENTALE

În general, prin constante, în fizică, înțelegem mărimi fizice invariabile sau valori numerice (adimensionale) în formulele fizice. De exemplu, accelerația gravitațională g intră în multe formule fizice. Mărimea g însă depinde de latitudinea φ și de înălțimea h deasupra nivelului mării. Formula :

$$g = (9,7805 + 0,0517 \sin^2 \varphi - 3,1 \cdot 10^{-2} h) \text{ m/s}^2 \quad (1.29)$$

se consideră ca fiind cea mai precisă la ora actuală. Înălțimea h se ia în metri.

Această formulă furnizează valoarea accelerației gravitaționale astfel încât valoarea calculată nu se abate mai mult de $\pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ de valoarea reală. Deci dacă pentru o înălțime h și o latitudine φ date, aplicând formula (1.29), se obține valoarea g_c calculată, trebuie să scriem că valoarea reală este cuprinsă între

$$g_c - 0,0005 \text{ m/s}^2 \text{ și } g_c + 0,0005 \text{ m/s}^2.$$

Astfel pentru $\varphi = \pi/2$ și $h = 0$ avem :

$$g = (9,8322 \pm 0,0005) \text{ m/s}^2, \quad (1.30)$$

iar pentru $\varphi = \frac{\pi}{4}$ și $h = 0$:

$$g = (8,8064 \pm 0,0005) \text{ m/s}^2. \quad (1.31)$$

Pentru o scriere mai compactă s-a adoptat o astfel de metodă, încât eroarea comisă prin asocierea unei valori pentru mărimea fizică respectivă

se notează în paranteză imediat după valoarea considerată. Astfel relațiile (1.30) și (1.31) se scriu sub forma :

$$g = 9,8322(5) \text{ m/s}^2 \quad (1.30')$$

și

$$g = 9,8064(5) \text{ m/s}^2. \quad (1.31')$$

Cifrele nedeterminate precis în valoarea unei mărimi fizice rezultă din numărul cifrelor incluse în paranteză. Astfel, în relațiile (1.30') și (1.31') vedem că ultimele două cifre în valoarea lui g nu sînt cunoscute exact, deoarece această valoare este cuprinsă între 9,8371 și 9,8327 m/s^2 și respectiv între 9,8059 și 9,8069 m/s^2 .

Cu toate că valoarea accelerației gravitaționale depinde de latitudine și înălțime, față de nivelul mării se consideră constantă universală, deoarece își păstrează valoarea în orice condiții.

Constantele universale — mărimile fizice care-și păstrează valoarea constantă în orice condiții de temperatură, presiune etc. — prezintă un rol deosebit de important în fizică, deoarece cu ajutorul lor se identifică și se calculează alte constante și mărimi fizice.

În scopul posibilității unei utilizări unice coordonate, în știință și tehnică, a numeroaselor date numerice care se obțin într-un ritm accelerat în laboratoarele din întreaga lume, este deosebit de important să se dispună de valori unanim acceptate pentru toate constantele fundamentale. O serie de mărimi fundamentale ca : viteza luminii în vid, sarcina electrică a electronului, constanta lui Boltzmann etc. intră foarte des în calculul diferitelor mărimi fizice. Dacă în diferite laboratoare nu se utilizează aceleași valori și precizii pentru constantele fundamentale, se ajunge la situația obținerii unor rezultate experimentale contradictorii. Pentru înlăturarea unei astfel de situații s-au instituționalizat grupe de lucru privind constantele fundamentale. Numărul constantelor fundamentale este relativ mare și multe din ele se referă la domenii ale fizicii necunoscute încă celor ce li se adresează acest manual. În tabelul 1.9 redăm unele dintre constantele fundamentale și precizia cu care sînt cunoscute aceste constante la nivelul anului 1973. Deși precizia constantelor fundamentale și concordanțelor obținute sînt în general suficiente pentru unele direcții de cercetare, se apreciază că mai sînt domenii în care se pune stringent problema efectuării de noi experiențe și calcule teoretice. Nici pentru constantele indicate în tabelul 1.9 valorile și erorile date nu trebuie considerate definitive, deoarece nu este exclusă obținerea de noi informații care să ne îmbogățească cunoașterea în domeniul constantelor fundamentale.

Tabelul 1.9

Unele constante fundamentale

Denumirea	Simbol	Valoarea	Factor de multiplicare în SI
Viteza luminii în vid	c	2,99792458 (12)	10^8 ms^{-1}
Sarcina electronului	e	1,6021892 (46)	10^{-19} C
Constanta lui Planck	h	6,626176 (36)	10^{-34} Js
Numărul lui Avogadro	N	6,0220943 (61)	$10^{23} \text{ kmol}^{-1}$
Masa de repaus a electronului	m_e	9,1095434 (47)	10^{-31} kg
Masa de repaus a protonului	M_p	1,6726485 (86)	10^{-27} kg
Masa de repaus a neutronului	M_n	1,6749543 (86)	10^{-27} kg
Raportul dintre sarcina și masa electronului	e/m_e	1,7588047 (49)	10^{11} Ckg^{-1}
Numărul lui Faraday	$F = Ne$	9,648456 (27)	$10^7 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constanta gazelor ideale	R	8,31441 (26)	$10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{grad}$
Constanta lui Boltzmann	$k = R/N$	1,380662 (44)	$10^{-23} \text{ J} \cdot \text{grad}^{-1}$
Constanta gravitațională	G, γ	6,6720 (41)	$10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Volumul unui kmol de gaz ideal ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 1 \text{ atm}$)	$V_{0m} = RT_0/p_0$	22,41383 (70)	$\text{m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}$

În afara constantelor fundamentale, un rol important îl joacă și constantele de material care exprimă proprietăți caracteristice ale substanțelor în condiții date de presiune, temperatură etc. Aceste constante fiind, în cazul corpurilor izotrope, independente de forma geometrică a corpului, caracterizează substanța din care este format corpul material. Ca exemplu de constante de material putem aminti rezistivitatea electrică, temperatura de topire etc. Constantele de material nu au valori independente de condițiile exterioare, astfel rezistivitatea depinde de temperatură, iar după cum se știe temperatura de topire depinde de presiune etc. Constantele de material caracterizează proprietățile macroscopice ale substanțelor și pot fi numai în foarte puține cazuri exprimate prin constantele fundamentale. Valorile constantelor de material în diferite condiții exterioare se determină experimental, cu aceste valori existînd tabele detaliate.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1.1. Să se indice mărimile fizice care se exprimă în unitățile de măsură:

- $\text{N} \cdot \text{m}$
- N/m^2
- J/grad
- $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{grad}$

- R. a) lucrul mecanic, energia, căldura, momentul forței
 b) presiunea, densitatea volumică de energie
 c) capacitatea calorică, entropia
 d) căldura specifică, entropia unității de masă.

1.2. Se consideră un sistem de unități în care unitățile de măsură pentru masă M' , pentru lungimea L' , pentru timp T' se exprimă prin unitățile corespunzătoare M, L și T în SI după formulele:

$$M' = k_1 M, \quad L' = k_2 L, \quad T' = k_3 T$$

unde $k_i (i = 1, 2, 3)$ sînt constante.

Să se calculeze factorii de multiplicare care apar la trecerea unităților de măsură pentru viteză, accelerație, forță și energie din SI în sistemul considerat

$$R \cdot v' = \frac{k_2}{k_3} v; \quad a' = \frac{k_2}{k_3} a; \quad F' = \frac{k_1 k_2}{k_3^2} F; \quad E' = \frac{k_2 k_3^2}{k_3^2} E.$$

1.3. Să se scrie formula dimensională a constantei atracției universale γ , care intervine în formula forței

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

de interacțiune între două puncte materiale cu masele m_1 și m_2 , aflate la distanța r între ele

$$R[\gamma] = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

1.4. Să se scrie formula dimensională pentru căldura specifică C

$$R \cdot C = \frac{Q}{m \Delta t}; \quad [C] = \frac{L^2 M T^{-2}}{M l} = M^2 T^{-2} l^{-1}.$$

1.5. Știind că energia medie de translație a moleculelor unui gaz este dată de relația

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT$$

să se scrie formula dimensională pentru constanta lui Boltzmann k

$$R[k] = \frac{[E]}{[T]} = L^2 M T^{-2} l^{-1}.$$

1.6. Pornind de la ecuația de stare a gazului ideal

$$pV = \nu RT,$$

să se deducă formula dimensională a constantei R .

$$R[R] \frac{[P][V]}{[\nu][T]} = L^2 M T^{-2} \text{ kmol}^{-1} l^{-1};$$

1.7. Să se indice unitățile de măsură pentru constanta R și masa molară M astfel încît formula:

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

să fie scrisă corect, din punct de vedere dimensional

$$R[R] = \text{J/kg kmol}; \quad [M] = \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}.$$

1.8. Formula lucrului mecanic, efectuat de un gaz, într-o transformare izotermă:

$$L = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

este incorectă din punct de vedere dimensional. Să se indice, pe baza analizei dimensionale, factorul care lipsește din această formulă.

R. Știind că

$$[L] = L^2MT^{-2}$$

iar din problema 1.7.

$$[R] = L^2MT^{-2} \text{ kmol}^{-1}t^{-1}.$$

Deci $[R \cdot T] = L^2MT^{-2} \text{ kmol}^{-1}t^{-1} = L^2MT^{-2} \text{ kmol}^{-1}$.

Vedem că pentru ca produsul RT să aibă dimensiunea unui lucru mecanic trebuie multiplicat ca un factor, pentru care unitatea de măsură este kmol. Mărimea fizică măsurată în kmol este numărul de moli v . Deci expresia corectă pentru lucrul mecanic este

$$L = vRT \ln \frac{V_2}{V_1} = vRT \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

1.9. Să se scrie formulele dimensionale pentru :

- sarcina electrică q
- diferența de potențial U
- intensitatea cimpului electric E
- rezistența electrică R
- capacitatea electrică C
- intensitatea cimpului magnetic H
- fluxul inducției magnetice Φ
- inductanța unei bobine L

R. a) Din formula

$$q = It$$

aflăm $[q] = [I][t] = A \cdot s$.

b) Diferența de potențial fiind un raport dintre lucrul mecanic L și sarcina electrică rezultă $[U] = L^2MT^{-2}A^{-1}$.

c) Din formula

$$E = \frac{U}{d}$$

rezultă

$$[E] = LMT^{-2}A^{-1}.$$

d) Din formula lui Ohm :

$$R = \frac{U}{I}$$

avem

$$[R] = L^2MT^{-2}A^{-2}.$$

e) Capacitatea electrică C se exprimă prin formula

$$C = \frac{q}{U}$$

Deci

$$[C] = \frac{A \cdot T}{L^2MT^{-2}A^{-1}} = L^{-2}M^{-1}T^4A^2.$$

f) $[H] = A \cdot L^{-1}$.

g) Din legea inducției electromagnetice

$$U_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

avem

$$[\Phi] = [U] \cdot T = L^2MT^{-2}A^{-1};$$

b) Prin definiție inductanța L a unei bobine este raportul fluxului Φ și intensitatea I a curentului, deci

$$[L] = L^2MT^{-2}A^{-2}.$$

1.10. Știind că energia înmagazinată într-un condensator depinde de sarcina electrică q de pe o armătură a condensatorului și de capacitatea C a condensatorului, să se deducă, pe baza analizei dimensionale, expresia energiei condensatorului în funcție de q și C .

$$R \cdot E_c = kq^\alpha C^\beta.$$

Ținând seama de rezultatele problemei 1.9, avem :

$$L^2MT^{-2} = (AT)^\alpha \cdot [L^2MT^{-2}A^{-2}]^\beta = L^{-2\beta}M^{-\beta}T^{4\beta+\alpha} \cdot A^{\alpha+2\beta}.$$

De unde

$$-2\beta = 2$$

$$-\beta = 1$$

$$4\beta + \alpha = -2$$

$$\alpha + 2\beta = 0.$$

Deci

$$\beta = -1$$

$$\alpha = 2.$$

Obținem astfel :

$$E_c = k \frac{q^2}{C}.$$

Calculule teoretice conduc la valoarea $k = \frac{1}{2}$:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

1.11. Să se deducă expresia energiei cimpului magnetic înmagazinată într-o bobină știind că această energie depinde de inductanța L a bobinei și de intensitatea curentului electric prin bobină :

$$R \cdot E_m = kL^\alpha I^\beta$$

sau

$$L^2MT^{-2} = (L^2MT^{-2}A^{-2})^\alpha \cdot A^\beta$$

$$2\alpha = 2$$

$$\alpha = 1$$

$$-2\alpha = -2$$

$$-2\alpha + \beta = 0$$

de unde

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2.$$

Deci

$$E_m = kLI^2.$$

Se arată că $k = 1/2$ și deci:

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

1.12. Energia unității de volum a unui câmp electric în vid depinde de permitivitatea vidului ϵ_0 și de intensitatea E a câmpului electric. Să se stabilească dependența densității de energie W de ϵ_0 și E .

$$R. \quad W = \frac{E_e}{V} [W] = \frac{L^2 MT^{-2}}{L^3} = L^{-1} MT^{-2}.$$

Din legea lui Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

rezultă

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]^2}{[F] \cdot [r^2]} = \frac{A^2 \cdot T^2}{M \cdot L T^2 \cdot L^2} = M^{-1} \cdot L^{-3} T^4 A.$$

Din problema 1.10

$$[E] = LMT^{-3}A^{-1}.$$

Scriind

$$W = k(\epsilon_0)^\alpha (E)^\beta$$

obținem

$$L^{-1}MT^{-2} = (M^{-1}L^{-3}T^4A^2) \cdot (LMT^{-3}A^{-1})^\beta$$

$$L^{-1}MT^{-2} = M^{-\alpha+\beta} L^{-3\alpha+\beta} T^{4\alpha-3\beta} A^{2\alpha-\beta}.$$

Prin identificare

$$-\alpha + \beta = +1$$

$$-3\alpha + \beta = 1$$

$$4\alpha - 3\beta = -2$$

$$2\alpha - \beta = 0$$

$$\beta = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Deci $W = k\epsilon_0 E^2$.

Coefficientul numeric $k = \frac{1}{2}$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

1.13. Să se deducă expresia vitezei luminii în vid, în funcție de permitivitatea vidului ϵ și permeabilitatea magnetică μ_0 a vidului

$$R. \quad \mu_0 \frac{B_0}{H}$$

unde B_0 este inducția câmpului magnetic în vid, iar H este intensitatea câmpului magnetic. Fluxul magnetic Φ este

$$\Phi = B_0 S.$$

Deci

$$[B] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{L^2 MT^{-2} A^{-1}}{L^2} = MT^{-2} A^{-1}$$

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{MT^{-2} A^{-1}}{A \cdot L^{-1}} = LMT^{-2} A^{-2}.$$

Viteza luminii în vid

$$c = \epsilon_0^\alpha \mu_0^\beta$$

$$LT^{-1} = [M^{-1}L^{-3}T^4A^2]^\alpha [LMT^{-2}A^{-2}]^\beta$$

$$LT^{-1} = M^{-\alpha+\beta} L^{-3\alpha+\beta} T^{4\alpha-2\beta} A^{2\alpha-2\beta}.$$

Prin identificare

$$-\alpha + \beta = 0$$

$$-3\alpha + \beta = 1$$

$$4\alpha + 2\beta = -1$$

$$2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

$$-2\alpha = 1; \quad \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

$$c = k \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Coefficientul numeric $k = 1$,

$$c = 1 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

MĂRIMI APROXIMATIVE. REPREZENTAREA DATELOR PRIN TABELE

Practic, în toate formulele fizice, intervin mărimi sau constante fizice pentru care, dintr-un motiv sau altul, nu cunoaştem sau nu putem folosi valorile lor exacte. Din această cauză, în practică, se folosesc valori apropiate de valorile reale, denumite valori aproximative.

Amintim următoarele motive pentru care sîntem obligaţi să lucrăm cu valori aproximative:

a) Prin efectuarea oricărei măsuri se obţin rezultate afectate de erori inerente. Adică nu putem măsura niciodată valoarea adevărată a unei mărimi fizice, ci numai valoarea aproximativă a acesteia. Prin perfecţionarea metodelor de măsurare se obţin aproximări din ce în ce mai bune, dar nu putem niciodată afirma că valoarea obţinută prin măsurare este identică cu valoarea adevărată.

b) În foarte multe formule fizice intervin mărimi ca π , e etc. pentru care, deşi în principiu putem cunoaşte valorile exacte, sîntem nevoiţi să luăm valorile lor aproximative deoarece în practică nu putem, şi de multe ori este fără sens, să lucrăm cu un număr foarte mare de zecimale. De exemplu $\pi = 3,1415926536$ se utilizează de regulă ca $\pi = 3,14$ sau $\pi = 3,142$.

Aproximarea cu care trebuie luate astfel de constante depinde de condiţiile concrete ale problemelor rezolvate.

c) Rezultatele unor operaţii matematice ca logaritmul unor numere, rădăcina pătrată etc. reprezintă valori cu un număr mare de zecimale. De exemplu, $\sqrt{3} = 1,7320508...$, iar, $\sqrt{2} = 1,4142135$ şi $\ln 2 = 0,6931471$ etc. În practică folosim corespunzător $\sqrt{3} = 1,73$, $\sqrt{2} = 1,41$ şi $\ln 2 = 0,693$ etc.

De asemenea, sînt dese situaţiile cînd mărimea obţinută reprezintă raportul a două valori exacte, dar acest raport scris în baza 10 conţine foarte multe zecimale şi deci trebuie luată valoarea aproximativă a acestuia. De

exemplu, $2/7 = 0,2857142857142...$ Este clar că practic nu se poate lucra cu un număr atît de mare de zecimale.

d) Din tabelul 1.9 rezultă că toate constantele fizice care se utilizează curent în formule sînt cunoscute numai aproximativ. De exemplu, în valoarea acceleraţiei gravitaţionale g , formulele (1.30) şi (1.31') cunoaştem precis numai două zecimale.

2.1. ERORILE MĂRIMILOR APROXIMATIVE

Pentru caracterizarea abaterii valorii aproximative a unei mărimi fizice de la valoarea corectă a acestei mărimi se introduc noţiunile de eroare absolută şi eroare relativă. Se poate pune întrebarea, dacă ştim valoarea adevărată pentru o mărime fizică de ce avem nevoie să cunoaştem abaterea unei valori aproximative oarecare de la această valoare? De fapt nu cunoaştem valoarea adevărată, dar putem folosi unele metode de estimare a acestei valori. Cum însă valoarea estimată nu coincide cu valoarea adevărată, va trebui să stabilim un anume interval în jurul valorii estimate în care să putem spune, cu un anume nivel de încredere, că se află valoarea adevărată.

Lăsînd, deocamdată, de o parte problemele legate de metodele de estimare a valorii adevărate, precum şi problema surselor de erori în valoarea aproximativă, considerăm că pentru o mărime fizică oarecare valoarea adevărată este X , iar valoarea aproximativă este x .

Prin abaterea valorii aproximative x de la valoarea adevărată X , sau prin eroarea absolută Δx se înţelege diferenţa:

$$\Delta x = X - x. \quad (2.1)$$

Semnul acestei diferenţe nefiind cunoscut, adeseori se utilizează valoarea absolută a abaterii (2.1).

$$\varepsilon_x = |X - x| = |\Delta x|. \quad (2.2)$$

Din această formulă rezultă că valoarea adevărată X este cuprinsă în intervalul

$$x - |\Delta x| \leq X \leq x + |\Delta x|. \quad (2.3)$$

Eroarea relativă a valorii aproximative se determină prin raportul:

$$\delta = \frac{|\Delta x|}{X} = \frac{\varepsilon_x}{X} \quad (2.4)$$

pentru $X \neq 0$.

Se mai utilizează și noțiunea de eroare relativă procentuală ca fiind :

$$\delta_p = \frac{|\Delta x|}{|X|} (\text{în procente}) = \frac{|\Delta x|}{X} \cdot 100. \quad (2.5)$$

Formulele de mai sus nu pot fi utilizate pentru calcule concrete, deoarece necunoscând valoarea adevărată X nu putem calcula eroarea absolută și respectiv eroarea relativă.

În practica experimentală se poate pleca de la ipoteza că valoarea aproximativă x este suficient de apropiată de valoarea adevărată X și deci putem considera că sînt satisfăcute inegalitățile.

$$|\Delta x| \leq |X|, |\Delta x| \leq |x|. \quad (2.6)$$

Din aceste inegalități rezultă că valoarea aproximativă x este foarte apropiată de valoarea adevărată X , adică $x \approx X$. Această concluzie fiind adevărată, dacă se fac calcule sau măsurări concrete, putem înlocui formula (2.4) prin relația

$$\delta = \frac{|\Delta x|}{x}. \quad (2.7)$$

Introducînd în relația (2.3) obținem :

$$x - \delta \cdot x \leq X \leq x + \delta \cdot x. \quad (2.8)$$

În această formulă δ este eroarea relativă aproximativă (2.7). Dacă sînt satisfăcute relațiile (2.6), obținem inegalitatea

$$|\delta| \leq 1. \quad (2.9)$$

Rezultă că dacă eroarea absolută este mult mai mică decît valoarea aproximativă a mărimii fizice considerate atunci eroarea relativă este mult mai mică decît 1.

Din formula (2.7) putem scrie :

$$|\Delta x| = \delta \cdot x. \quad (2.10)$$

Vedem deci că admițînd inegalitățile (2.6) am ajuns ca în loc de trei necunoscute (X , $|\Delta x|$ și δ) să rămînem numai cu două necunoscute δ și $|\Delta x|$, valorile cărora încă nu le putem calcula.

În practică, întîlnim două cazuri distincte în care putem evalua mărimile δ și $|\Delta x|$.

a) Cazul cînd trebuie să folosim în calcule numere cu valorile precis cunoscute, dar avînd în vedere posibilitățile de calcul sîntem nevoiți să considerăm numărul respectiv cu un număr mai mic de zecimale, adică să luăm valoarea aproximativă pentru acest număr. Să luăm de exemplu numărul e . Considerăm că valoarea exactă este : $e = 2,7182818$.

În practica de calcul folosim valorile $e = 2,72$ sau $e = 2,718$. Putem calcula erorile absolute și relative în aceste cazuri (tabelul 2.1).

Tabelul 2.1

Valoarea aproximativă x	Eroarea absolută Δx	Eroarea relativă %
2,72	$1,7182 \cdot 10^{-3}$	$6,3169 \cdot 10^{-3} \%$
2,718	$2,818 \cdot 10^{-4}$	$1,03679 \cdot 10^{-2} \%$

Valorile din acest tabel sînt aproximative, deoarece am folosit numai șapte zecimale pentru numărul e , aceasta pentru a ne putea folosi de calculator, ori numărul e ca și π conține un număr nelimitat de zecimale.

b) Cazul în care valoarea aproximativă x este rezultatul unei măsurări. În acest caz calculul direct al abaterii absolute $|\Delta x|$ nu se poate face nici măcar aproximativ. Cunoscînd însă metoda de măsurare folosită putem evalua limita superioară a abaterii absolute $|\Delta x|$. Dacă, de exemplu, măsurăm temperatura unui corp cu un termometru și știm că precizia de măsurare cu acest termometru este $0,1^\circ\text{C}$, vom considera că eroarea absolută este $0,1^\circ\text{C}$.

Deci, în cazul efectuării unei măsurări, considerăm valoare maximă pentru abaterea absolută $|\Delta x|$ ca fiind determinată de precizia de citire pe aparatul de măsură utilizat. Rezultă deci necesitatea folosirii pe cît posibil a unor aparate de măsură de precizie cît mai înaltă. Desigur că putem avea situații cînd eroarea absolută $|\Delta x|$ să fie mai mare decît precizia de citire. Acest lucru poate fi datorat existenței unei serii de factori care conduce la mărirea erorii comise prin efectuarea măsurării.

Înainte de efectuării unor măsurări se impune deci o analiză minuțioasă a tuturor factorilor care pot conduce la apariția unor erori și alegerea metodei de măsurare care să asigure erori minime.

Trebuie să subliniem că deoarece mărimea x măsurată este dimensională, eroarea absolută $|\Delta x|$ trebuie să aibă aceleași dimensiuni ca și mărimea x .

Eroarea relativă însă fiind raportul a două mărimi de aceleași dimensiuni, reprezintă un număr adimensional.

O măsurare este cu atît mai precisă cu cît eroarea absolută și respectiv eroarea relativă este mai mică. Deși prezintă importanță atît eroarea absolută cît și eroarea relativă, aceasta din urmă ne furnizează informații mult mai complete asupra preciziei măsurării efectuate.

De regulă prin precizia P se înțelege valoarea egală cu $1/|\delta|$, adică inversul valorii absolute a abaterii relative. Deci, cu cît $|\delta|$ are o valoare mai mică cu atît precizia P este mai mare.

Dacă de exemplu, cu termometrul pentru care eroarea absolută este $0,1^\circ\text{C}$ măsurăm temperatura corpului A și a corpului B și obținem $t_A = 10^\circ\text{C}$ și

$t_B = 100^\circ\text{C}$, este clar că temperatura corpului B este mult mai precis determinată decât temperatura corpului A , deși eroarea absolută în ambele cazuri are aceeași valoare. Din formula (2.8) rezultă că valoarea adevărată a temperaturii corpului A este cuprinsă între $9,9$ și $10,1^\circ\text{C}$ iar temperatura adevărată a corpului B este cuprinsă între $9,99$ și $100,1^\circ\text{C}$. Deci temperatura t_A este determinată cu precizia 100, iar temperatura t_B cu precizia 1 000.

Pe de altă parte eroarea relativă fiind o mărime adimensională permite compararea preciziei cu care au fost măsurate diferite mărimi fizice ca de exemplu, masă, timp, viteză, lungime etc.

De exemplu, referindu-ne la tabelul 1.9 putem pune întrebarea dacă masa de repaus a electronului este mai precis cunoscută decât sarcina electrică a electronului, sau invers.

Din tabelul 1.9 aflăm valorile:

$$m_e = 9,109534(47) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Eroarea absolută fiind indicată în paranteză avem:

$$|\Delta m_e| = 0,000047 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$|\Delta e| = 0,0000046 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Deci

$$|\delta_m| = 5,15 \cdot 942 \cdot 10^{-6} \text{ iar } |\delta_e| = 2,87107 \cdot 10^{-6}$$

Din aceste date obținem că masa de repaus a electronului este cunoscută cu o precizie de $1,938 \cdot 10^5$, iar sarcina electrică electronului este determinată cu precizia $3,483 \cdot 10^5$.

Din cele discutate în acest paragraf rezultă că mărimile aproximative care intervin în formulele fizice pot fi caracterizate prin abaterea absolută $|\Delta x|$ de la valoarea adevărată X , prin eroarea relativă δ , precum și prin precizia $1/|\delta|$.

De regulă într-o formulă dată intervin valori de precizii diferite. Erorile rezultatului final, obținut în urma efectuării calculelor vor depinde de erorile tuturor mărimilor ce intră în formulă și în primul rând de erorile acelor mărimi care sînt determinate cu o precizie mai mică. Deci dacă unele mărimi dintr-o anume formulă fizică sînt determinate cu precizie mică, nu are sens ca celelalte mărimi să fie luate cu precizii mult mai mari. În acest sens mărimile ce pot fi cunoscute cu o precizie foarte mare, dar care conțin un număr mare de zecimale, pot fi rotunjite. Trebuie însă ca eroarea relativă a valorii rotunjite să nu fie mai mare decât eroarea relativă a mărimii determinate cu precizia cea mai mică.

Se recomandă ca eroarea relativă a factorilor numerici sau a constantelor ce intră în formula dată să fie de aproximativ 10 ori mai mică decât eroarea relativă a mărimilor măsurate, adică a mărimilor determinate cu eroarea relativă cea mai mare.

2.2. REGULI DE ROTUNJIRE A NUMERELOR. STABILIREA NUMĂRULUI DE CIFRE EXACTE

Am văzut că în calculele practice nu putem lua numere ca π , e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ln 2$ etc. cu un număr prea mare de zecimale. Deci apare necesitatea rotunjirii numerelor exacte. Se impune însă ca rotunjirea numerelor să se efectueze astfel încît eroarea relativă, obținută prin rotunjire, să nu depășească eroarea relativă a mărimii cunoscută cu precizia minimă.

De exemplu, dacă dorim să calculăm perioada T a unui pendul gravitațional de lungime $l = 100 \text{ cm}$, la latitudinea $\varphi = 45^\circ$, trebuie să ținem seama de eroarea absolută care s-a comis prin măsurarea lungimii l . Dacă $|\Delta l| = 1 \text{ mm}$ atunci:

$$\delta_l = \frac{1}{1000} = 10^{-3}. \quad (2.11)$$

Din expresia (1.31) rezultă eroarea relativă pentru accelerația gravitațională:

$$\delta_g = \frac{0,0005}{9,8064} \approx 5 \cdot 10^{-5}. \quad (2.12)$$

Deci în calculul efectuat, mărimile π și g , trebuie luate cu un număr de zecimale încît erorile relative să nu depășească 10^{-3} (eroarea relativă a mărimii l cunoscută cu precizia minimă).

Se pune deci problema stabilirii numărului de cifre semnificative prin care trebuie indicate valorile mărimilor ca π , g etc.

O cifră semnificativă este oricare cifră 1, 2, ..., 9, a unui număr care este folosită pentru a arăta mărimea numărului, indiferent de virgulă. Cifra zero se consideră semnificativă dacă se află în interiorul numărului sau la dreapta acestuia. De exemplu, dacă scriem coeficientul de dilatație liniară pentru aluminiu sub forma $\alpha = 0,000024 \text{ K}^{-1}$, primele cinci cifre de zero nu sînt semnificative și o astfel de scriere nu este recomandată. Trebuie să scriem $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, valoarea coeficientului α conținînd două cifre semnificative. Dacă însă scriem accelerația gravitațională $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$, cifra zero este semnificativă. Dacă un număr trebuie rotunjit la un anumit număr de cifre semnificative, trebuie să se aibă în vedere reguli:

a) Dacă prima cifră trebuie neglijată este mai mică decât cinci, ultima cifră menținută rămîne neschimbată.

b) Dacă prima cifră care trebuie neglijată este mai mare ca cinci sau este cinci urmat de cifre diferite de zero, ultima cifră păstrată se mărește cu o unitate.

c) Dacă cifra ce trebuie neglijată este cinci urmat numai de zerouri, numărul se rotunjește la cea mai apropiată valoare pară.

Ca exemplu scriem următoarele numere rotunjite la o singură zecimală.

12,345 ne dă 12,3

12,367 ne dă 12,4

12,356 ne dă 12,4

12,350 ne dă 12,4

12,250 ne dă 12,3

Prin rotunjirea numerelor de mai sus se comite o eroare absolută egală cu $0,5 \cdot 10^{-1}$ adică 0,05.

În calcule trebuie să luăm numai cifrele semnificative care pot fi considerate exacte. De exemplu, în tabelul 1.9 volumul unui kmol de gaz ideal, în condițiile normale de presiune și temperatură este dat cu șapte cifre semnificative, dar nu toate aceste cifre pot fi considerate exacte.

$$V_{om} = (22,41383 \pm 0,00070) \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}. \quad (2.13)$$

Deci eroarea absolută este :

$$|\Delta V_{om}| = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}.$$

În calcule, valoarea pentru V_{om} poate fi rotunjită la cinci cifre exacte, adică putem scrie $V_{om} = 22,414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$. Prin această eroare comisă prin rotunjire este $0,5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$ este mai mică decât eroarea absolută care afectează valoarea pentru N_{om} .

Dacă avem un număr care conține m cifre semnificative, dintre care z sînt după virgulă, iar x_m este prima cifră semnificativă a numărului respectiv, atunci în scopul simplificării calculelor se apreciază abaterea absolută maximă

$$(\Delta x)_{max} = (x_m + 1) \cdot 10^{m-z-1} \delta \quad (2.14)$$

Deoarece $m - z$ reprezintă numărul cifrelor semnificative din stînga virgulei putem ușor aprecia abaterea absolută pentru o eroare relativă δ , dată.

În cazul considerat al calculului perioadei pendulului $\delta = 10^{-3}$ (2.11), deci

$$(\Delta g)_{max} = (9 + 1) \cdot 10^{5-4-1} \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2}$$

și

$$(\Delta \pi)_{max} = (3 + 1) 10^{1-1-1} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Rezultă astfel că pentru efectuarea corectă a calculelor perioadei pendulului, în acest caz, valoarea accelerației gravitaționale trebuie rotunjită la trei cifre semnificative ($g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$) iar valoarea numărului π la patru cifre semnificative ($\pi = 3,142$).

2.3! ERORILE REZULTATE ÎN URMA EFECTUĂRII UNOR OPERAȚII MATEMATICE CU NUMERE APROXIMATIVE

Fiecare număr aproximativ utilizat fiind caracterizat de eroarea absolută și respectiv de eroarea relativă corespunzătoare este normal să ne intereseze modul în care erorile individuale ale mărimilor ce intră într-un calcul anume se răsfrîng asupra erorii ce caracterizează rezultatul final.

Să ne ocupăm pe rînd de unele operații matematice mai importante:

2.3.1. Adunarea numerelor aproximative. Dacă avem un șir de numere aproximative $x_1, x_2, \dots, x_n$ iar numerele adevărate, necunoscute, cuprinse în domeniile :

$$X_1 = x_1 \pm \Delta x_1; X_2 = x_2 \pm \Delta x_2; \dots \quad (2.15)$$

Măreimea X rezultată în urma adunării acestor numere va fi :

$$X = X_1 + X_2 + \dots = x_1 \pm \Delta x_1 + x_2 \pm \Delta x_2 + \dots = (x_1 + x_2 + \dots) + (\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \dots). \quad (2.16)$$

Deoarece semnele erorilor absolute individuale Δx_i nu sînt cunoscute nu putem stabili precis eroarea absolută, de aceea, ca de altfel în multe alte cazuri, se consideră situația cea mai defavorabilă adică se calculează eroarea absolută maximă.

$$\Delta x_{max} = \pm(\Delta x_1 + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \dots) \quad (2.17)$$

Deci eroarea absolută maximă (sau limită) a sumei unor numere aproximative este suma valorilor absolute ale erorilor absolute ale tuturor termenilor sumei.

Din formula (2.10) putem scrie expresia erorii relative :

$$\delta = \frac{\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \Delta x_3 + \dots}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}. \quad (2.18)$$

Nu putem calcula precis nici eroarea relativă, necunoscînd semnele erorilor absolute pentru termenii sumei. Aflăm însă eroarea relativă limită (maximă)

$$\delta_1 = \frac{\Delta x_{max}}{x_1 + x_2 + \dots} = \pm \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \dots}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots} \quad (2.19)$$

Din această formulă s-ar părea că eroarea relativă a sumei nu depinde de erorile relative δ_i pentru termenii sumei. Utilizînd însă formula (2.10) putem scrie :

$$\delta_1 = \frac{\pm x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 + x_3 \delta_3 + \dots}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots} \quad (2.20)$$

Între erorile relative individuale există desigur o valoare δ_i pe care o notăm δ_{min} care este mai mică decât celelalte erori relative δ_{min} și analog o valoare δ_j care este mai mare decât toate celelalte erori relative individuale pe care o notăm prin δ_{max} . Introducând în (2.24), obținem inegalitățile evidente :

$$\delta_i > \frac{\delta_{min}x_1 + \delta_{min}x_2 + \delta_{min}x_3 + \dots}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots} = \delta_{min} \quad (2.21)$$

și

$$\delta_i < \frac{\delta_{max}x_1 + \delta_{max}x_2 + \delta_{max}x_3 + \dots}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots} = \delta_{max} \quad (2.22)$$

Rezultă că eroarea relativă limită a sumei este cuprinsă între erorile relative individuale limite ale termenilor sumei :

$$\delta_{min} < \delta_i < \delta_{max} \quad (2.23)$$

În acest sens eroarea relativă δ_i este într-un anume fel media erorilor relative ale termenilor sumei.

Sînt situații cînd relația (2.23) nu este valabilă. De exemplu dacă adunăm două numere x_1 și x_2 , dar nu sînt ambele aproximative ci de exemplu, x_1 este cunoscut precis, deci $\Delta x_1 = 0$ și $\delta_1 = 0$. În acest caz :

$$\delta_i = \frac{\delta_2 x_2 + 0 \cdot x}{x + x_2} < \delta_2 \quad (2.24)$$

2.3.2. Scăderea numerelor aproximative. Considerăm două numere aproximative date de relația (2.15). Ne interesează valoarea și erorile corespunzătoare în diferența acestor două numere :

$$X_1 - X_2 = x_1 - x_2 + (\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2) \quad (2.25)$$

Eroarea absolută este

$$\Delta x = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \quad (2.26)$$

Necunoscînd semnele pentru Δx_1 și Δx_2 nu putem calcula valoarea precisă pentru Δx , putem numai estima valoarea Δx prin valoarea maximă a acestei erori absolute.

$$\Delta x_{max} = \pm(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|) \quad (2.27)$$

Ajungem astfel la aceeași formulă ca în cazul adunării numerelor aproximative. Eroarea relativă este :

$$\delta = \frac{\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2}{x_1 - x_2} \quad (2.28)$$

Ca în cazul adunării, putem calcula numai valoarea maximă (limită) a erorii relative :

$$\delta_i = \frac{\Delta x_{max}}{x_1 - x_2} = \pm \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{x_2 - x_1} \quad (2.29)$$

În operația de scădere a două numere aproximative eroarea relativă a diferenței obținute poate fi mult mai mare decât erorile relative ale valorilor individuale mai ales cînd mărimile x și x_2 au valori foarte apropiate. Acest lucru este mai evident dacă scriem relația (2.29) sub forma :

$$\delta_i = \frac{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2}{x_1 - x_2} \quad (2.30)$$

Acest lucru conduce, de multe ori la faptul că diferența a două lungimi sau a două mase etc. este afectată de o eroare relativă de cîteva ordine de mărime mai mare decât eroarea relativă pentru fiecare mărime în parte. De aici se trag o serie de concluzii practice. Astfel, de multe ori, pentru stabilirea masei unor picături de lichid se folosesc lame de sticlă pe care se depun picăturile respective. Măsurîndu-se masa lamei de sticlă, iar apoi masa lamei împreună cu picătura de lichid, se calculează masa picăturii prin scăderea celor două mase. O astfel de metodă experimentală nu este indicată, deoarece conduce la erori care depășesc cu mult posibilitățile furnizate de balanța utilizată.

De exemplu, dacă prin cîntărire se obține masa lamei de sticlă

$$m_1 = (1\,106,18 \pm 0,01) \text{ mg},$$

iar masa lamei împreună cu masa unei picături de lichid este :

$$m_2 = (1\,109,08 \pm 0,01) \text{ mg},$$

atunci masa picăturii de mercur se obține prin scădere :

$$m = m_2 - m_1 = 2,90 \text{ mg}.$$

Mărimile m_1 și m_2 au fost măsurate cu o eroare relativă de aproximativ 10^{-5} adică cu o precizie de $\sim 10^5$ iar masa picăturii de mercur este determinată cu o eroare relativă limită.

$$|\delta_i| = \frac{0,01 + 0,01}{2,90} \approx 7 \cdot 10^{-3}$$

adică cu precizia $P = 145$, de aproximativ 700 de ori mai mică decât precizia permisă de balanța utilizată.

2.3.3. Înmulțirea numerelor aproximative. Ne interesează produsul unor numere date prin relația (2.15), adică :

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots = (x_1 \pm \Delta x_1) (x_2 \pm \Delta x_2) (x_3 \pm \Delta x_3) \quad (2.31)$$

În acest caz este mai comod să încercăm mai întâi stabilirea erorii relative. Scriem relația (2.31) sub forma :

$$\begin{aligned} X_1 X_2 X_3 &= x_1 x_2 x_3 \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta x_3}{x_3}\right) = \\ &= x_1 x_2 x_3 (1 \pm \delta_1) (1 \pm \delta_2) (1 \pm \delta_3) = \\ &= x_1 x_2 x_3 (1 \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \delta_1 \delta_2 \pm \delta_1 \delta_3 \pm \delta_2 \delta_3 \pm \delta_1 \delta_2 \delta_3). \end{aligned}$$

Ținând seama că erorile relative δ_1 , δ_2 și δ_3 sînt de regulă mult mai mici decît unu, putem neglija produsele $\delta_i \delta_j$ și $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ și astfel obținem :

$$X_1 X_2 X_3 = x_1 x_2 x_3 (1 \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3). \quad (2.32)$$

În cazul unui număr oarecare de termeni putem scrie :

$$X_1 X_2 X_3 \dots = x_1 x_2 x_3 \dots (\pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \dots). \quad (2.33)$$

Este clar că mărimea din paranteză reprezintă eroarea relativă a produsului pe care-l calculăm :

$$\delta = \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \dots \quad (2.34)$$

Ca în cazurile precedente, necunoscînd semnele erorilor relative, putem numai estima eroarea relativă limită (maximă) :

$$\delta_i = \pm (|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + \dots). \quad (2.35)$$

Pentru a estima eroarea absolută să calculăm produsele din relația (2.31)

$$\begin{aligned} X_1 X_2 X_3 &= x_1 x_2 x_3 \pm x_2 x_3 \Delta x_1 \pm x_1 x_2 \Delta x_3 \pm \\ &\pm x_3 \Delta x_1 \Delta x_2 \pm x_2 \Delta x_1 \Delta x_3 \pm x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \pm \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \end{aligned}$$

Din considerente evidente putem neglija ultimii patru termeni în ultima relație. Obținem astfel :

$$X_1 X_2 X_3 = x_1 x_2 x_3 \pm x_2 x_3 \Delta x_1 \pm x_1 x_2 \Delta x_3 \pm x_1 x_2 \Delta x_3. \quad (2.36)$$

Deci eroarea absolută în cazul unui produs de mărimi aproximative este :

$$\Delta x = \pm x_2 x_3 \Delta x_1 \pm x_1 x_3 \Delta x_2 \pm x_1 x_2 \Delta x_3. \quad (2.37)$$

Putem estima numai valoarea maximă a erorii relative pentru un produs de factori

$$\Delta x_{max} = \pm (|x_2 x_3 \Delta x_1| + |x_1 x_3 \Delta x_2| + |x_1 x_2 \Delta x_3|) \quad (2.38)$$

În cazul produsului a două numere aproximative obținem :

$$\Delta x_{max} = (|x_2 \Delta x_1| + |x_1 \Delta x_2|) \quad (2.39)$$

Acste formule se utilizează rar în practică. Putem obține o formulă mai comodă dacă înlocuim erorile absolute individuale Δx_i prin erorile relative δ_i corespunzătoare :

$$\Delta x_i = x_i \delta_i.$$

Introducînd în formula (2.38), obținem :

$$\Delta x_{max} = \pm x_1 x_2 x_3 (|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3|), \quad (2.40)$$

în caz general, pentru un număr oarecare de termeni

$$\Delta x_{max} = \pm x_1 x_2 x_3 \dots (|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + \dots) = x_1 x_2 x_3 \dots \delta_i \dots \quad (2.41)$$

Apare aici un caz foarte des întîlnit în practică și anume dacă o mărime fizică oarecare y este egală cu produsul dintre o mărime constantă C , precis determinată și o mărime x , măsurată cu eroarea absolută Δx și eroarea relativă δ .

Din relația (2.35) rezultă :

$$\delta_i = \pm \delta,$$

iar din relația (2.41)

$$\Delta x_{max} = Cx \cdot \delta = C \cdot \Delta x. \quad (2.42)$$

Deci prin înmulțirea unei mărimi aproximative printr-o constantă C , precis determinată, eroarea relativă a produsului rămîne egală cu eroarea relativă a valorii aproximative x , iar eroarea absolută a mărimii y este de C ori mai mare decît eroarea absolută a mărimii x .

2.3.4. Împărțirea numerelor aproximative. Fie numerele aproximative

$$X_1 = x_1 \pm \Delta x_1; \quad X_2 = x_2 \pm \Delta x_2$$

și ne interesează eroarea relativă și eroarea absolută a cîtelui :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_1 \pm \Delta x_1}{x_2 \pm \Delta x_2}. \quad (2.43)$$

Putem scrie :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{\left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1}\right)}{\left(1 \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1 \pm \delta_1}{1 \pm \delta_2}. \quad (2.44)$$

Erorile relative δ_1 și δ_2 fiind mărimi mult mai mici decît 1, avem :

$$\frac{1 \pm \delta_1}{1 \pm \delta_2} = (1 \pm \delta_1) (1 \mp \delta_2) = 1 \mp \delta_1 \mp \delta_2 \pm \delta_1 \delta_2.$$

Neglijind produsul $\delta_1\delta_2$ față de δ_1 și respectiv δ_2 , relația (2.44) capătă forma

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_1}{x_2} (1 \pm \delta_1 \pm \delta_2) \quad (2.45)$$

sau

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} (\pm \delta_1 \pm \delta_2). \quad (2.45)$$

Din această relație rezultă eroarea relativă a citului

$$\delta = \pm \delta_1 \mp \delta_2.$$

Analog cu cazurile precedente putem estima numai eroarea relativă limită

$$\delta_l = \pm (|\delta_1| + |\delta_2|). \quad (2.46)$$

Din relația (2.45') putem identifica eroarea absolută a citului:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{x_1}{x_2} (\pm \delta_1 \pm \delta_2) = \frac{x_1}{x_2} \left(\pm \frac{\Delta x_1}{x_1} \mp \frac{\Delta x_2}{x_2} \right) = \\ &= \frac{1}{x_2^2} (\pm x_2 \Delta x_1 \mp x_1 \Delta x_2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Și în acest caz putem calcula numai valoarea maximă a erorii absolute, necunoscînd semnele pentru Δx_1 și Δx_2 :

$$\Delta x_{max} = \pm \frac{1}{x_2^2} (x_2 |\Delta x_1| + x_1 |\Delta x_2|). \quad (2.48)$$

Este mult mai comodă în practică formula echivalentă

$$\Delta x_{max} = \frac{x_1}{x_2} (|\delta_1| + |\delta_2|). \quad (2.49)$$

Dacă mărimea y se exprimă în funcție de mărimea x prin formula:

$$y = \frac{1}{C} \Delta x, \quad (2.50)$$

unde C este o constantă precis determinată iar x este o mărime determinată experimental cu eroarea absolută Δx și eroarea relativă δ , atunci din formula (2.46) avem: $\delta_l = \delta$, iar din formula (2.50) rezultă:

$$\Delta y = \frac{1}{C} \Delta x.$$

Deci, prin împărțirea unei mărimi aproximative la o constantă precis determinată, eroarea relativă în valoarea mărimii y este egală cu eroarea relativă în valoarea mărimii x , iar eroarea absolută în valoarea mărimii y este de C ori mai mică decât eroarea relativă în valoarea mărimii x .

2.3.5. Ridicarea unui număr aproximativ la o putere. Considerăm numărul aproximativ

$$X = x \pm \Delta x.$$

Dorim să calculăm eroarea relativă și eroarea absolută pentru mărimea

$$Y = X^k, \quad (2.51)$$

unde k este un număr oarecare.

Putem scrie

$$Y = (x \pm \Delta x)^k = x^k \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x} \right)^k = x^k (1 \pm \delta)^k.$$

Utilizînd formula ridicării unui binom la o putere, putem scrie:

$$(1 \pm \delta)^k = \left(1 \pm k\delta \pm \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \delta^2 \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 \pm \dots \right).$$

Eroarea relativă a mărimii x fiind mult mai mică decât unu ne putem limita la primii doi termeni:

$$Y = x^k (1 \pm k\delta), \quad (2.52)$$

Din această formulă rezultă eroarea relativă pentru cazul ridicării la o putere k :

$$\delta_y = \pm k\delta. \quad (2.53)$$

iar eroarea absolută

$$\Delta y = \pm x^k k \delta = \pm x^k \cdot k \frac{\Delta x}{x} = \pm k x^{k-1} \Delta x. \quad (2.54)$$

Notînd cu

$$y = x^k,$$

scriem valoarea mărimii Y :

$$Y = y \pm k x^{k-1} \Delta x \quad (2.54')$$

2.3.6. Extragerea rădăcinii de ordin k dintr-un număr aproximativ. Fie o mărime fizică Y exprimată prin mărimea X cu ajutorul formulei:

$$Y = \sqrt[k]{X} = \sqrt[k]{x \pm \Delta x} = \sqrt[k]{x} \sqrt[k]{1 \pm \delta} \quad (2.55)$$

Dacă neglijăm termenii ce conțin pe δ la o putere egală sau mai mare ca doi, obținem :

$$Y = \sqrt[k]{x} \left(1 \pm \frac{1}{k} \delta \right). \quad (2.56)$$

Din această formulă rezultă :

$$\delta_y = \pm \frac{1}{k} \delta, \quad (2.57)$$

iar eroarea absolută

$$\Delta Y = \pm \sqrt[k]{x} \frac{1}{k} \delta = \pm \sqrt[k]{x} \frac{1}{k} \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} \Delta x. \quad (2.58)$$

Aceste formule rezultă din formulele (2.53) și (2.54) dacă înlocuim pe k prin $1/k$.

Sensul formulei

$$\sqrt[k]{1 \pm \delta} \simeq 1 \pm \frac{1}{k} \delta \quad (2.59)$$

și al neglijării termenilor de grad ≥ 2 , constă în faptul că

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[k]{1 \pm \delta} - \left(1 \pm \frac{1}{k} \delta \right)}{\delta} \right] = 0. \quad (2.60)$$

Am obținut deci erorile care se obțin în urma efectuării unor operații matematice cu numere aproximative.

Studiind acest paragraf putem rămâne cu impresia că pentru calculul erorilor într-o formulă fizică chiar relativ simplă este nevoie de un volum de muncă poate mult mai mare decât volumul de muncă cheltuit pentru măsurarea mărimilor ce intră în formula respectivă. Fără îndoială că problema calculării erorilor și indicarea corectă a unui rezultat cu eroarea respectivă corect calculată nu este deloc mai puțin importantă decât măsurarea directă în laborator.

Niciodată valoarea măsurată nu este egală cu valoarea adevărată a mărimii fizice respective și deci eroarea absolută a mărimii măsurate ne indică domeniul în care, cu o anumită probabilitate, este cuprinsă valoarea adevărată. Neindicarea erorii unei mărimi măsurate face rezultatul măsurării tot așa lipsit de sens ca indicarea unui număr fără a specifica unitățile de măsură.

2.4. REPREZENTAREA DATELOR PRIN TABELE

În activitatea practică, de măsurare directă în laborator și de prelucrare a datelor experimentale obținute, întâlnim foarte des situații când dependența între diferite mărimi fizice sau matematice x și y nu este dată sub forma unei

formule matematice ci sub forma unor tabele. Reprezentarea datelor prin tabele prezintă o serie de avantaje exprimate prin asigurarea unei scrieri compacte și accesibile pentru citire. Folosirea diferitelor tipuri de tabele este dictată de o serie de necesități practice. Astfel nu cunoaștem formula matematică prin care se exprimă valoarea unei mărimi oarecare (numită funcție) în funcție de valoarea altei mărimi (numită argument), dar cunoaștem valorile funcției pentru diferite valori ale argumentului. În acest caz singura posibilitate de indicare a dependenței funcției de argumentul respectiv este alcătuirea unui tabel în care pe o coloană se scriu valorile argumentului, iar pe altă coloană valorile corespunzătoare ale funcției.

Efectuând anumite calcule pentru valorile diferitelor mărimi fizice, apare adeseori necesitatea cunoașterii unor mărimi pe care nu le putem determina cu mijloacele avute la dispoziție. De exemplu ne interesează cantitatea de cărbune necesară încălzirii unei cantități de apă de masă m_1 , de la temperatura $t_1^\circ\text{C}$ la temperatura $t_2^\circ\text{C}$, dacă apa se află într-un vas dintr-un material cunoscut iar randamentul utilizării căldurii este η .

Masa m a cărbunelui se calculează după formula :

$$m = \frac{(m_1 c_a + m_v c_v) (t_2 - t_1)}{\eta q}, \quad (2.61)$$

unde c_a și c_v sînt respectiv, căldurile specifice pentru apă și materialul din care este confecționat vasul, iar q este puterea calorică a cărbunelui.

Vedem că pentru calculul cantității de cărbune trebuie să știm valoarea c_a, c_v și q . Determinarea cu o precizie suficient de bună a unor astfel de mărimi se poate face cu ajutorul unor instalații speciale în laboratoarele specializate. Mărimile obținute în astfel de laboratoare, prin respectarea normelor metrologice în vigoare, sînt publicate sub formă de tabele care pot fi apoi utilizate în efectuarea unor calcule ca cel din exemplul de mai sus. Dacă nu am dispune de tabele pentru diferite mărimi fizice cu rezistivitate, densitate, călduri specifice etc., ne-am afla de multe ori în situația de a nu putea efectua calculele propuse. Munca de cercetare științifică desfășurată în scopul stabilirii metodelor celor mai adecvate pentru măsurarea valorilor diferitelor mărimi fizice și dependența acestor valori de o serie de factori se finalizează prin alcătuirea unor tabele cu valorile mărimilor fizice respective, deosebit de utile în activitatea altor grupe de cercetare. Alcătuirea unor tabele de mărimi fizice este o muncă de înaltă responsabilitate deoarece valorile conținute într-un anumit tabel sînt utilizate pentru calculul valorilor altor mărimi fizice, ori o eroare într-un tabel inițial poate conduce la apariția de erori succesive în diferite alte tabele. De exemplu, formula (2.61) poate fi utilizată în calculul puterii calorice pentru diferiți combustibili (considerîndu-se c_a și c_v cunoscute).

În scopul ușurării calculelor se utilizează tabele matematice ca, de exemplu : tabele de logaritmi, tabele pentru funcțiile trigonometrice etc.

De asemenea, în efectuarea unor calcule după o formulă dată, este de multe ori necesar să alcătuim tabele de calcul care să conțină diferiți termeni din formula respectivă.

Tabelele utilizate în practică sînt de următoarele tipuri:

1. *Tabele calitative*, care stabilesc relații între diferite mărimi din punct de vedere calitativ. Tabelele calitative se întîlnesc, destul de rar, cu toate că acestea conțin date care pot fi greu reprezentate pe altă cale.

De exemplu tabelul 2.2 indică corespondența dintre ecuațiile utilizate în studiul mișcării de translație și a mișcării de rotație.

Tabelul 2.2

Mișcarea de translație	Mișcarea de rotație
<i>Mișcarea uniformă</i>	
$s = vt$	$\varphi = \omega t$
$v = \text{const.}$	$\omega = \text{const.}$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
<i>Mișcarea uniformă variată</i>	
$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$a = \text{const.}$	$\varepsilon = \text{const.}$

De asemenea putem întîlni tabele calitative care indică formulele de calcul pentru diferite mărimi fizice. În tabelul 2.3 se indică formulele pentru momentul de inerție în cazul diferitelor corpuri.

Tabelul 2.3

Corpul	Axa de rotație trece prin	Momentul de inerție
Bară omogenă subțire de lungime l	Centrul de greutate, perpendicular pe bară	$m \frac{l^2}{12}$
	Capătul barei perpendicular pe bară	$m \frac{l^2}{3}$
Placă dreptunghiulară cu laturile a și b	Centrul de greutate, perpendicular pe placă	$m \frac{a^2 + b^2}{12}$
Cilindru de rază R și înălțimea h	Axa cilindrului	$mR^2/2$
	Centrul de greutate, perpendicular pe axa cilindrului	$m \left(\frac{h^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right)$
Sferă de rază R	Diametru	$\frac{2}{5} mR^2$
	Tangent la sferă	$\frac{7}{5} mR^2$

2. *Tabele statistice*, în care unele dintre variabile sînt exprimate cantitativ, pe cînd alte variabile, presupuse independente, nu sînt exprimate cantitativ (tabelul 2.4). Astfel masa și raza corpurilor cerești, menționate în tabel, s-au raportat la masa, respectiv la raza Pămîntului, masa Pămîntului fiind $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, iar raza Pămîntului $6,4 \cdot 10^6$ m. În ultima coloană se indică cantitativ valoarea accelerației gravitaționale la suprafața corpului ceresc x .

Tabelul 2.4

Accelerația gravitațională în sistemul solar

Denumirea corpului ceresc	Masa $\times 5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Raza $\times 6,4 \cdot 10^6$ m	Accelerația gravitațională în suprafața corpului ceresc x 9,8 m/s ²	
	$m_{P\&M} = 1$	$r_{P\&M} = 1$	$g_{P\&M} = 1$	m/s ²
Soare	333 432	109	28	275
Jupiter	318,35	11,2	2,64	25,8
Saturn	95,3	9,4	1,17	11,4
Uranus	14,58	4,0	0,92	9,0
Neptun	17,26	3,5	1,44	14,1
Pămînt	1,00	1,0	1,00	9,8
Venus	0,82	0,96	0,86	8,4
Pluton	0,1	0,46	necunoscută	necunoscută
Mercur	0,054	0,37	0,27	2,65
Luna	0,012	0,27	0,17	1,04

3. *Tabele de tip funcțional*. În aceste tabele se reprezintă una sau mai multe funcții de forma $y = f(x)$.

Tabelul 2.5 este un exemplu de tabel funcțional, în care se reprezintă perioada unui pendul gravitațional simplu (matematic) în funcție de lungimea acestui pendul.

Tabelul 2.5

Variația perioadei unui pendul matematic în funcție de lungimea acestuia

l — metru	T — secundă
$\pm 0,002$	$\pm 0,03$
0,100	0,63
0,200	0,90
0,300	1,10
0,400	1,27
0,500	1,42
0,600	1,55
0,700	1,67

Tipurile de tabele funcționale mai des întîlnite sînt următoarele:

- tabele cu date experimentale încă neprelucrate;
- tabele cu valorile diferitelor mărimi fizice;
- tabele matematice;
- tabele alcătuite în scopul efectuării unor calcule.

Vom indica acum modul de alcătuire și utilizare a tabelelor.

a) Tabele cu date experimentale încă neprelucrate

Aceste tabele conțin date obținute direct din experiență. Dacă se măsoară, de exemplu, distanța s parcursă de un corp în cădere liberă, în funcție de timp, trebuie în primul rând să stabilim intervalele de timp Δt , după care se măsoară distanța s . În tabelul 2.6 se indică rezultatele obținute, în urma unei astfel de măsurări, pentru $\Delta t = 1/30$ s.

Tabelul 2.6

Poziția corpului, în cădere liberă, funcție de timp

Timpul t , 1/30 s	Distanța s , cm	Timpul t , 1/30 s	Distanța s , cm
1	11,86	8	61,49
2	15,67	9	72,90
3	20,60	10	85,44
4	26,69	11	99,08
5	33,71	12	113,77
6	41,93	13	129,54
7	51,13	14	146,48

Este necesar ca rezultatele experienței să fie scrise în tabel clar și corect pentru a se înlătura unele erori ce pot apărea în procesul de prelucrare a datelor. De asemenea, tabelul cu coloanele necesare, inclusiv capul de coloană, trebuie pregătit înaintea începerii măsurărilor. Aceasta deoarece, înaintea începerii unei experiențe trebuie să fie clare toate operațiile ce urmează a fi efectuate. Dacă măsurările se efectuează cu un raport de măsură ca ampermetru, voltmetru etc. este necesar să se scrie numărul de diviziuni pe o coloană aparte, urmînd ca pe coloana următoare să fie trecute valorile intensității curentului, ale tensiunii etc. corespunzătoare numărului respectiv de diviziuni.

În alcătuirea acestor tabele este necesar să respectăm mai multe reguli:

1. Fiecare tabel trebuie să fie numerotat, să aibă un titlu și să conțină condițiile în care s-a efectuat măsurarea respectivă (temperatură, presiune, umiditate etc.). De asemenea, este recomandabil ca alături de număr și titlu, tabelul să conțină și data efectuării măsurărilor, pentru a se putea mai bine urmări reproductibilitatea valorilor mărimilor ce au fost măsurate.

2. Fiecare coloană (sau rînd) trebuie să aibă un cap de coloană care să cuprindă denumirea mărimii fizice respective și unitățile de măsură în care se exprimă valoarea acestei mărimi. Se recomandă ca unitatea de măsură să fie multiplicată cu un astfel de factor încît numerele ce urmează să fie scrise în coloana sau rîndul respectiv, să fie cuprinse între 0,1 și 1 000. Scrierea factorului de multiplicare în capul de coloană nu se face totdeauna în același fel. Cel mai des se întîlnesc cele două moduri de scriere indicate în tabelul 2.7.

Tabelul 2.7

Modulul lui Young pentru diferite materiale

Materialul	Modulul lui Young 10^{10} Nm $^{-2}$	Modulul lui Young 10^{-10} Nm $^{-2}$
Aluminiu	6,9	6,9
...	...	...

Vedem că în coloana a doua modulul lui Young pentru aluminiu ($E = 6,9 \cdot 10^{10}$ Nm $^{-2}$) este indicat într-o formă diferită de cea din coloana a treia.

Modul de scriere din coloana a doua indică unitatea de măsură 10^{10} Nm $^{-2}$ iar modul de scriere din coloana a treia trebuie înțeles astfel:

$$E \cdot 10^{-10} = 6,9 \text{ Nm}^{-2}, \text{ sau } E = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}.$$

Pentru evitarea unor erori se recomandă modul de scriere din coloana a doua (atît pentru tabelele statistice cît și pentru cele funcționale), adică factorul de multiplicare să se refere la unitatea de măsură și nu la mărimea fizică măsurată.

3. Se recomandă ca în prima coloană (rînd) să se scrie valorile argumentului (de exemplu timp, temperatură, presiune etc.) iar coloana următoare funcția (de exemplu, viteza, căldura specifică etc.).

Este necesar să se rezerve mai multe coloane pentru mărimi necesare în prelucrarea datelor experimentale.

b) Tabele cu valorile diferitelor mărimi fizice. Aceste tabele sînt foarte des utilizate în practica de laborator. De exemplu, dacă trebuie calculat volumul unui corp de o formă neregulată, putem măsura masa corpului, iar din tabele aflăm densitatea materialului din care este confecționat corpul respectiv. De asemenea, adeseori, avem nevoie de căldura specifică, căldura latentă de topire, rezistivitate electrică, constantă dielectrică etc. Toate valorile acestor mărimi fizice le găsim în diferite tabele. De exemplu, în tabelul 2.8 se indică proprietățile unor corpuri solide.

Tabelul 2.8

Proprietățile unor corpuri solide

Materialul	Densitatea kg/m 3	Temperatura topire $^{\circ}$ C	Căldura specifică J/kg grad	Căldura latentă de topire J/kg	Coefficientul de dilatație liniară grad $^{-1}$
Aluminiu	2 600	659	896	$3,22 \cdot 10^5$	$-2,3 \cdot 10^{-6}$
Fier	7 900	1 530	500	$2,72 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^{-6}$
Cupru	8 600	1 100	395	$1,76 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^{-6}$
Platină	21 400	1 770	117	$1,13 \cdot 10^5$	$0,89 \cdot 10^{-6}$
...	...	...	...	...	...

În acest tabel, mărimile fizice ca densitatea, temperatura de topire etc. sînt funcție de materialul din care este confecționat corpul respectiv.

De multe ori ne interesează, însă dependența unei anume mărimi fizice, ce caracterizează un anumit material, de condițiile exterioare ca temperatură, presiune, umiditate etc. De exemplu, în tabelul 2.9 se indică dependența rezistivității tungstenului de temperatură.

Tabelul 2.9

Temperatura T în K	Rezistivitatea în $\Omega \cdot m \cdot 10^{-8}$	Temperatura T în K	Rezistivitatea ρ în $\Omega \cdot m \cdot 10^{-8}$
1 000	25,70	2 500	77,25
1 500	41,85	3 000	96,20
2 000	59,10	3 500	115,70

c) *Tabele matematice.* Tabelele matematice prezintă un instrument deosebit de util în procesul de prelucrare a datelor experimentale sau în calculul unor mărimi fizice. De exemplu, activitatea unei surse radioactive Λ depinde de timp după formula

$$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t} = \Lambda_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \quad (2.62)$$

unde Λ_0 este activitatea sursei radioactive la momentul $t=0$, λ este constanta de dezintegrare, iar T este timpul de înjumătățire.

Pentru calculul activității Λ la un moment $t = t_1$ este necesar să stabilim dintr-un tabel matematic valoarea $e^{-\lambda t_1}$. De exemplu, tabelul 2.10 reprezintă funcțiile e^x și e^{-x} pentru unele valori ale argumentului x .

Tabelul 2.10

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,00000	1,00000	1,00	2,71828	0,36788	2,00	7,38906	0,13534
0,10	1,10517	0,90484	1,10	3,00417	0,33287	2,10	8,16617	0,12246
0,20	1,22140	0,81873	1,20	3,32012	0,30119	2,20	9,02501	0,11080
0,30	1,34986	0,74082	1,30	3,66930	0,27253	2,30	9,97418	0,10026
0,40	1,49182	0,67032	1,40	4,05520	0,24660	2,40	11,02318	0,09072
0,50	1,64872	0,60653	1,50	4,48169	0,22313	2,50	12,18249	0,08208
0,60	1,82212	0,54881	1,60	4,98521	0,20190	2,60	13,46374	0,07427
0,70	2,01375	0,49659	1,70	5,47395	0,18268	2,70	14,87973	0,06721
0,80	2,22554	0,44933	1,80	6,04965	0,16530	2,80	16,4465	0,06081
0,90	2,45960	0,40657	1,90	6,68589	0,14957	2,90	18,17415	0,05502

Deoarece $\ln 2 = 0,693147$, iar $e^{-\ln 2} = 0,5$, se obține că pentru $t = T$, $\Lambda = 0,5 \Lambda_0$ ceea ce explică sensul timpului de înjumătățire T .

Atât tabelele care conțin valorile diferitelor mărimi fizice cât și tabelele matematice sînt reprezentate de cele mai multe ori prin mărimi aproximative. Dacă nu se indică erorile absolute respective ca în tabelul 1.9 se apreciază că în cazul în care valoarea unei mărimi este indicată printr-un număr cu m cifre semnificative dintre care z sînt zecimale, cifre după virgula zecimală, atunci putem considera eroarea absolută ca fiind $0,5 \cdot 10^{-z}$ sau pentru sigu-

ranță este mai indicat să luăm $1 \cdot 10^{-z}$. Stabilim erorile valorilor din tabele, putem efectua cu acestea operații matematice după schemele indicate în paragraful precedent.

d) *Tabele alcătuite în scopul efectuării unor calcule.* Înainte de începerea efectuării unui calcul, după o formulă dată, este necesar să se stabilească un program prin care se fixează ordinea în care este mai indicat să se calculeze diferiții termeni conținuți în formulă. De obicei este necesar să se elaboreze un tabel de lucru care să cuprindă anumite rezultate intermediare. Tabelul de lucru se stabilește pentru fiecare funcție în parte, neexistînd reguli generale în acest sens. De regulă însă tabelul de lucru este astfel alcătuit încît pe fiecare coloană să se efectueze aceeași operație, iar coloanele trebuie să fie ordonate încît rezultatul intermediar dintr-o coloană să fie utilizat pentru obținerea rezultatelor de pe coloana următoare.

Considerăm un exemplu relativ simplu. Se cere să se calculeze puterea în circuitul exterior al unei baterii cu tensiunea electromotoare $E = 10$ V și rezistența interioară $r = 1,65 \Omega$ în funcție de rezistența exterioară R pentru $0,5 \leq R \leq 5,0 \Omega$. Rezistența exterioară R variază cu o cantitate constantă (cu un pas constant) $\Delta R = 0,5 \Omega$.

Modul în care se alcătuieste tabelul de lucru depinde și de mijloacele de calcul de care dispunem. Dacă nu dispunem de mijloace deosebite de calcul, adică de mașini electronice de calcul etc., este recomandabil să păstrăm cît mai multe rezultate intermediare pentru a putea mai ușor verifica dacă nu s-au comis unele erori de calcul.

Pentru puterea în circuitul exterior al bateriei avem formula

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2} \quad (2.63)$$

Efectuăm calculul după tabelul 2.11.

Tabelul 2.11

Calculul puterii în circuitul exterior

R	$100 R$	$R + r$	$(R + r)^2$	$P = \frac{100 R}{(R + r)^2}$
0,5	50	2,15	4,6225	10,817
1,0	100	2,65	7,0225	14,240
1,5	150	3,15	9,9225	15,117
2,0	200	3,65	13,3225	15,012
2,5	250	4,15	17,2225	14,516
3,0	300	4,65	21,6225	13,874
3,5	350	5,15	26,5225	13,196
4,0	400	5,65	31,9225	12,530
4,5	450	6,15	37,8225	11,898
5,0	500	6,65	44,2225	11,306

În general, în rezultatele intermediare se consideră o zecimală suplimentară față de numărul de zecimale din rezultatul final.

Tabelul diagonal al diferențelor

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$
x_5	y_5	Δy_4				

Dacă se constată că diferențele de ordin k oarecare sînt constante, iar diferențele de ordin $k + 1$ sînt zero, atunci putem afirma că funcția de interpolare $F(x)$ (2.65) este de gradul $m = k$.

Deci calculînd diferențele de ordin succesiv putem determina gradul polinomului de interpolare.

Trebuie să subliniem că deoarece, în tabele ce conțin date obținute direct din experiență, valorile funcției sînt aproximative, și valorile diferențelor de ordinul k vor fi tot aproximativ constante, iar diferențelor de ordinul $k + 1$ vor fi numai aproximativ egale cu zero. Să considerăm cîteva exemple.

Exemplul 1. Pentru măsurarea temperaturii se utilizează foarte des un termocuplu, care se realizează prin sudarea în punctele 0 și 1 a două conductoare diferite (fig. 2.1). Porțiunea 0 — 1 poate reprezenta un fir de constantan, iar porțiunea 0 — A și 1 — B, fire de cupru. În punctele A și B termocuplul se conectează prin conductori la bornele unui galvanometru G care măsoară intensitatea curentului electric din circuit.

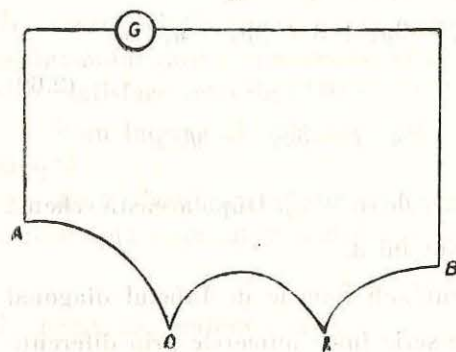


Fig. 2.1.

Punctul 0 se menține la temperatura de 0°C , iar punctul 1 se află la o temperatură $t^\circ\text{C}$, oarecare. Intensitatea curentului prin circuit depinde de tensiunea termoelectrică între punctele A și B, iar aceasta din urmă este funcție de temperatura t la care se află sudura 1.

În tabelul 2.13 se indică tensiunea termoelectrică între punctele A și B în funcție de temperatura t la care se află sudura 1. Se consideră că sudura 0 se află la 0°C .

$t^\circ\text{C}$ E_{AB} (mV)	0	20	40	60	80	100
	0,000	0,787	1,610	2,467	3,357	4,277

Se cere să se stabilească gradul polinomului care aproximează dependența tensiunii termoelectrice de diferența de temperatură între cele două suduri.

Trebuie să realizăm tabelul diagonal al diferențelor.

Tabelul 2.14

$t^\circ\text{C}$	E	ΔE	$\Delta^2 E$	$\Delta^3 E$
0	0,000			
20	0,787	0,787		
40	1,610	0,823	0,036	
60	2,467	0,857	0,034	—0,002
80	3,357	0,890	0,033	—0,001
100	4,277	0,920	0,030	—0,003

În acest caz, deoarece $\Delta^2 E$ diferă numai prin a treia zecimală iar datele din tabelul 2.13 sînt obținute direct din experiență, putem considera că diferențele de ordinul doi sînt constante și deci dependența tensiunii termoelectrice de temperatură exprimată prin datele din tabelul 2.13 poate fi aproximată printr-un polinom de gradul doi

$$E = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (2.70)$$

Cînd funcția de interpolare este un polinom de gradul doi se spune că interpolarea este parabolică.

Exemplul 2. De mijlocul unei bare de oțel, cu capetele fixate, se atîrnă un corp cu masa M . Măsurîndu-se raza de curbura y (măsurată în μm) în punctul de la mijlocul barei, se obțin rezultatele din tabelul 2.15.

Tabelul 2.15

M (kg) y (μm)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	1 642	1 483	1 300	1 140	948	781	590	426	263

Să se stabilească gradul polinomului de interpolare pentru dependența razei de curbura y de masa M .

În tabelul 2.16 sînt date diferențele de ordinul întîi și doi.

Tabelul 2.16

M (kg)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y (μm)	1 642	1 483	1 300	1 140	948	781	590	426	263
Δy	-159	-183	-160	-194	-167	-191	-164	-163	
Δ²y	-24	+23	-34	+27	-24	+27	+1		

Din acest tabel se vede că valorile $\Delta^2 y$ au semne variabile, iar suma lor algebrică poate fi considerată zero. Rezultă că diferențele de ordinul doi pot fi considerate zero, iar diferențele de ordinul întâi, constante. Fluctuațiile în diferențele de ordinul doi în jurul valorii zero și a diferențelor de ordinul întâi în jurul unei valori constante se datoresc erorilor experimentale.

Putem deci considera că funcția de interpolare este o dependență liniară,

$$y = a_0 + a_1 M. \quad (2.71)$$

Dacă funcția de interpolare este un polinom de gradul 1, interpolarea se numește liniară.

Exemplul 3. În tabelul 2.17 indicăm direct valorile funcției $y = x^3$ și diferențele corespunzătoare.

Tabelul 2.17

x	y = x³	Δy	Δ²y	Δ³y	Δ⁴y
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	0
3	27	37	24	6	0
4	64	61	30		
5	125	91			
6	216				

Se vede că în cazul datelor din tabelele matematice se obțin precis diferențe constante de un ordin oarecare și zero pentru diferențele de ordin superior.

După stabilirea gradului polinomului de interpolare mai rămâne să calculăm coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n$ din relația (2.65). În acest scop se deduce formula lui Newton, de interpolare.

Funcția de interpolare (2.65) se scrie sub forma:

$$F(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + b_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots + b_m(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{m-1}). \quad (2.72)$$

Această formulă reprezintă tot un polinom de gradul m , dar scrierea sub această formă prezintă unele avantaje. Deoarece funcția de interpolare trebuie să aibă valoarea y_i în orice punct de argument x_i din (2.64), obținem:

$$a) \quad x = x_0, \quad F(x_0) = y_0 = b_0 \quad (2.73)$$

$$b) \quad x = x_1, \quad F(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1, \text{ sau } b_0 + b_1 h = y_1,$$

de unde

$$b_1 = \frac{y_1 - b_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} \quad (2.74)$$

$$c) \quad x = x_2, \quad F(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2.$$

Înlocuind valorile pentru b_0 și b_1 și ținând seama că

$$x_2 - x_0 = 2h; \quad x_2 - x_1 = h,$$

obținem

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2h + b_2 2h^2,$$

de unde

$$b_2 = (y_2 - 2y_1 + y_0)/2h^2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \quad (2.75)$$

Analog obținem și restul coeficienților:

$$b_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3h^3}. \quad (2.76)$$

Pentru coeficientul b_n avem:

$$b_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}. \quad (2.77)$$

Obținem astfel formula generală de interpolare a lui Newton:

$$y = f(x) \simeq F(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4h^4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots + \frac{\Delta^m y_0}{m! h^m}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{m-1}). \quad (2.78)$$

Exerciții 1. Să se calculeze raza de curbură y pentru $M = 1,36$ kg folosind datele din tabelul 2.15.

Rezolvare. În acest caz se aplică interpolarea liniară deoarece funcția de interpolare este un polinom de gradul întâi.

Valoarea $M = 1,36$ kg este cuprinsă între valorile $M_0 = 1$ kg și $M = 1,5$ kg. Luăm deci $M_0 = 1$ kg $= x_0$; $M = 1,36$ kg $= x$; $h = 0,5$ kg.

$$y(1,36) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} (x - x_0) = 1\,300 + \frac{1\,140 - 1\,300}{0,5}$$

$$(1,36 - 1) = 1\,300 - 115,2 = 1\,184,8 \mu\text{m}.$$

2. Să se calculeze tensiunea termoelectromotoare pentru temperatura $t = 96,8^\circ\text{C}$ folosind tabelul 2.14.

Rezolvare. Curba de interpolare fiind o parabolă, se efectuează o interpolare parabolică. Din (2.78) rezultă:

$$E(t) = E(t_0) + \frac{E(t_1) - E(t_0)}{h} (t - t_0) + \frac{\Delta^2 E(t_0)}{2h^2} (t - t_0)(t - t_1),$$

unde $h = 20^\circ\text{C}$; $t = 96,8^\circ\text{C}$; $t_0 = 80^\circ\text{C}$; $\Delta E(t_0) = 0,920$; $E(t_0) = 3,357$; $t_1 = 100^\circ\text{C}$.

Deoarece $\Delta^2 E$ nu este perfect constantă, datorită unor erori experimentale, este indicat să considerăm o valoare aproximativă. În asemenea cazuri se estimează diferența de ordinul doi prin media aritmetică a acestor valori;

$$\Delta^2 E = \frac{0,036 + 0,034 + 0,033 + 0,030}{4} \approx 0,033.$$

Deci

$$E(96,8^\circ\text{C}) = 3,357 + \frac{0,920}{20} (96,8 - 80) + \frac{0,033}{2 \cdot 400} 16,8(-3,2) =$$

$$= 3,357 + 0,773 - 0,002 = 4,128 \mu\text{V}.$$

Vedem că termenul care caracterizează abaterea de la interpolarea liniară este foarte mic. Dacă aplicăm o formulă mai simplă, adică o interpolare liniară se comitea în valoarea lui $E(t)$ o eroare relativă:

$$\delta = \frac{0,002}{4,128} = 4,8 \cdot 10^{-4} = 4,8 \cdot 10^{-2} \%$$

Am dezvoltat în acest paragraf anumite aspecte legate de aplicarea metodelor de interpolare în cazul când argumentul ia valori echidistante.

Din punct de vedere practic putem aplica direct formula (2.78) oprindu-ne la termenul pe care-l considerăm suficient de mic în raport cu valorile terme-

nilor anteriori. În cele mai multe cazuri o interpolare liniară sau parabolică ne conduce la rezultate suficient de precise.

Să luăm de exemplu datele din tabelul 2.12. Vrem să stabilim valoarea funcției pentru $x = 4,7958$. Considerăm o interpolare liniară:

$$y(4,7958) = 64 + \frac{61}{1} \cdot 0,7958 = 112,5438.$$

Prin interpolarea parabolică:

$$y(4,7958) = 112,5438 + \frac{30}{2} \cdot 0,7958(-0,2042) = 112,5438 - 2,4375 =$$

$= 110,1063$. Interpolarea printr-un polinom de ordinul trei conduce la valoarea

$$y(4,7958) = 110,1063 + \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 1} (4,7958 - 4)(4,7958 - 5)$$

$$(4,7958 - 6) = 110,1063 + 0,1957 = 110,3020.$$

Valoarea corectă a funcției este 110,30195, deci prin interpolarea liniară introducem o eroare relativă

$$\delta_1 = \frac{112,5838 - 110,30195}{110,30195} = 0,02 = 2\%,$$

iar prin interpolarea parabolică

$$\delta_2 = \frac{110,1063 - 110,30195}{110,30195} = -1,77 \cdot 10^{-3} \approx -0,2\%.$$

2.5.2. Cazul când argumentele nu variază cu pas constant. Dacă funcția $y = f(x)$ este reprezentată printr-un tabel în care sînt date valorile argumentului x_i , precum și valorile funcției y_i :

$$x: x_0, x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y: y_0, y_1, y_2, \dots, y_n,$$

dar argumentele nu iau valori echidistante, atunci se procedează ca în cazul valorilor echidistante ale argumentului cu condiția ca în locul diferențelor de diferite ordine să se ia așa-numitele diferențe reduse, adică diferențele corespunzătoare unei variații a argumentului egală cu unitatea.

Se obișnuiește ca diferențele reduse să fie notate printr-o linie deasupra diferenței respective. Astfel diferențele reduse de ordinul întâi se scriu sub forma:

$$\overline{\Delta y_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \overline{\Delta y_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \dots, \overline{\Delta y_{n-1}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}. \quad (2.79)$$

Diferențele de ordinul doi sînt :

$$\overline{\Delta^2 y_0} = \frac{\overline{\Delta y_1} - \overline{\Delta y_0}}{x_2 - x_0}; \quad \overline{\Delta^2 y_1} = \frac{\overline{\Delta y_2} - \overline{\Delta y_1}}{x_3 - x_1}; \quad \overline{\Delta^2 y_2} = \frac{\overline{\Delta y_3} - \overline{\Delta y_2}}{x_4 - x_2}; \quad \dots;$$

$$\overline{\Delta^2 y_{n-2}} = \frac{\overline{\Delta y_{n-1}} - \overline{\Delta y_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}}. \quad (2.80)$$

Analog diferențele reduse de ordinul trei se scriu sub forma :

$$\overline{\Delta^3 y_0} = \frac{\overline{\Delta^2 y_1} - \overline{\Delta^2 y_0}}{x_3 - x_0}; \quad \overline{\Delta^3 y_1} = \frac{\overline{\Delta^2 y_2} - \overline{\Delta^2 y_1}}{x_4 - x_1};$$

$$\overline{\Delta^3 y_2} = \frac{\overline{\Delta^2 y_3} - \overline{\Delta^2 y_2}}{x_5 - x_2}; \quad \dots;$$

$$\overline{\Delta^3 y_i} = \frac{\overline{\Delta^2 y_{i+1}} - \overline{\Delta^2 y_i}}{x_{i+3} - x_i}; \quad \dots; \quad \overline{\Delta^3 y_{n-3}} = \frac{\overline{\Delta^2 y_{n-2}} - \overline{\Delta^2 y_{n-3}}}{x_n - x_{n-3}}. \quad (2.81)$$

După calcularea diferențelor reduse se realizează tabelul diagonal al diferențelor (tabelul 2.7). Toate raționamentele făcute în cazul valorilor echidistante ale argumentului (tabelul 2.7) rămîn valabile și în cazul tabelului diagonal cu diferențele reduse.

În cazul argumentelor neechidistante funcția de interpolare $F(x)$ este

$$y = f(x) \approx F(x) = y_0 + (x - x_0)\overline{\Delta y_0} + (x - x_0)(x - x_1)\overline{\Delta^2 y_0} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\overline{\Delta^3 y_0} + \dots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{K-1})\overline{\Delta^K y_0}.$$

(2.82)

Exemplu. În tabelul 2.18 se indică dependența temperaturii de fierbere a apei în funcție de presiune.

Tabelul 2.18

p (mm col Hg)	92,41	149,38	233,71	355,12	525,76	760,00	1 489,14
t_{oc}	50	60	70	80	90	100	120

Se cere să se calculeze temperatura de fierbere a apei la presiunea de 0,5 atm = 380 mm col. Hg.

Rezolvare: Calculăm diferențele reduse formînd tabelul diagonal al diferențelor reduse (tabelul 2.19).

Tabelul 1.29

	p	t	Δt	$\Delta^2 t$	$\Delta^3 t$	$\Delta^4 t$	$\Delta^5 t$
0	92,51	50					
1	149,38	60	0,176				
				$-40,37 \cdot 10^{-5}$			
2	233,71	70	0,119		$8,42 \cdot 10^{-7}$		
				$-17,99 \cdot 10^{-5}$	$2,68 \cdot 10^{-7}$	$-1,35 \cdot 10^{-9}$	
3	355,12	80	0,082		$0,75 \cdot 10^{-7}$		$1,54 \cdot 10^{-12}$
				$-7,89 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-8}$	$-0,32 \cdot 10^{-9}$	$0,21 \cdot 10^{-12}$
4	525,76	90	0,059				
				$-3,95 \cdot 10^{-5}$			
5	760,00	100	0,043				
				$-1,66 \cdot 10^{-5}$			
6	1 489,14	120	0,027				

Vedem că în acest caz avem o funcție foarte complicată, care poate fi interpolată numai cu un polinom de grad superior $m > 5$. Pentru a calcula temperatura de fierbere a apei la presiunea $p = 0,5$ atm ne fixăm eroarea absolută cu care dorim să determinăm această temperatură. De exemplu, dorim ca eroarea absolută să nu depășească $0,1^\circ\text{C}$.

Introducem în formula (2.82) unde

$$x = 380; \quad x_0 = 355,12; \quad x_1 = 525,76; \quad x_2 = 760,00 \dots y_0 = 80^\circ\text{C}.$$

Deci pentru interpolarea liniară :

$$t(380) = 80 + 0,059(380 - 355,12) = 81,47^\circ\text{C}.$$

Prin interpolarea parabolică :

$$t(380) = 81,47 + (380 - 355,12)(380 - 525,76) \cdot (-3,95 \cdot 10^{-5}) =$$

$$= 81,47 + 0,14 = 81,61^\circ\text{C}.$$

Vedem că termenul determinat de diferența redusă de ordinul doi este foarte aproape de eroarea impusă de noi.

Termenul de ordinul trei are valoarea :

$$(380 - 355,12)(380 - 525,76)(380 - 760,0)(-0,2 \cdot 10^{-7}) =$$

$$= 24,88 \cdot (-145,76)(-380)(-0,2 \cdot 10^{-7}) = -0,0280^\circ\text{C}.$$

Deci cu precizia de $0,1^\circ\text{C}$ putem spune că la presiunea $p = 0,5$ atm = 380 mm col Hg temperatura de fierbere a apei este $81,6^\circ\text{C}$. Dacă se impune ca precizia să fie de $0,01^\circ\text{C}$ sau $0,001^\circ\text{C}$, atunci calculele deveneau mult mai complicate deoarece trebuiau luați în considerare termeni de ordin superior.

Așa cum s-a specificat mai sus, fiecare tabel conține valorile funcției pentru un număr finit de valori ale argumentului cuprins într-un interval finit $[a, b]$. De multe ori însă apare necesitatea cunoașterii unor valori ale funcției pentru valori ale argumentului $x < a$ sau $a > b$.

Extinderea dependenței funcționale stabilite pentru un interval restrâns de valori ale argumentului, în afara acestui domeniu, se numește *extrapolare*.

De multe ori prin extrapolare obținem date la care nu putem avea acces pe cale experimentală. Nu întotdeauna extrapolarea este îndreptățită din punct de vedere fizic. Efectuarea operației de extrapolare se bazează pe ipoteza că dependența funcțională stabilită pentru x cuprins în domeniul $[a, b]$ este valabilă și în afara acestui domeniu. Deoarece această ipoteză nu este întotdeauna corectă, prin extrapolare noi putem spune numai care ar fi valoarea funcției pentru $x < a$ sau $x > b$, dacă dependența funcțională stabilită pe baza datelor dintr-un tabel oarecare rămâne valabilă și în afara domeniului respectiv.

Formulele obținute pentru interpolare pot fi utilizate și în scopul extrapolării. În acest scop trebuie să scriem formulele de interpolare sub o formă mai adecvată pentru a le putea aplica mai ușor în operația de extrapolare. Considerăm numai cazul unor argumente cu valorile echidistante. Formulele obținute pot fi ușor transpuse în cazul argumentelor neechidistante.

Considerăm formula (2.78) și căutăm să o scriem într-o formă puțin schimbată:

$$y = f(x) \simeq F(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \cdot \\ \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{h^2} \frac{\Delta^4 y_0}{4!} + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{h^3} \cdot \\ \cdot \frac{(x - x_3)}{h} \dots \frac{(x - x_{m-1})}{h} \frac{\Delta^m y_0}{m!}. \quad (2.83)$$

Introducem variabila z sub forma:

$$\frac{x - x_0}{h} = z, \text{ de unde } x = x_0 + zh. \quad (2.84)$$

Celelalte rapoarte din formula (2.83) se pot scrie în felul următor:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = z - 1 \\ \frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = z - 2 \\ \frac{x - x_3}{h} = \frac{x - x_0 - 3h}{h} = z - 3 \\ \dots \dots \dots \frac{x - x_{m-1}}{h} = \frac{x - x_0 - (m-1)h}{h} = z - m + 1. \quad (2.85)$$

Introducând în formula (2.84) obținem:

$$F(x) = F(x_0 + zh) = y_0 + \frac{z}{1} \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \\ + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \\ + \dots \frac{z(z-1)(z-2) \dots (z-m+1)}{m!} \Delta^m y_0 \quad (2.86)$$

Această formulă este cunoscută și sub numele de prima formulă de interpolare a lui Newton sau formula lui Newton pentru interpolarea înainte. Denumirea derivă din faptul că valoarea x pentru care se calculează funcția $F(x)$, se află după valoarea x_0 din tabele. Ca și în exemplele anterioare valoarea x_0 nu este fixată ci se alege astfel încât să corespundă primei valori x_i din tabel aflată imediat în stînga valorii x . Cu alte cuvinte dacă valoarea x este cuprinsă între valorile x_i și x_{i+1} ale argumentului, din tabelul studiat, atunci x_i se ia ca x_0 pentru aplicarea formulei (2.86). Pentru interpolare $z > 0$ și cuprinde între 0 și 1.

Dacă valoarea lui z se ia negativă, formula (2.86) poate fi utilizată pentru a extrapola dependența funcțională la valori ale argumentului x mai mici decât cele cuprinse în tabel.

Exemplu. În tabelul 2.20 se dau valorile funcției $y = \sin x$ pentru x cuprins între 15° și 55° cu pasul $h = 5^\circ$. Să se calculeze valorile funcției y pentru x cuprins între 10° și 15° cu pasul $h' = 1^\circ$.

Calculăm direct în tabelul 2.20 și diferențele corespunzătoare.

Tabelul 2.20

x°	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
15	0,258819				
20	0,342020	0,083201	-0,002603		
25	0,422618	0,080598	-0,003216	-0,000613	0,000023
30	0,500000	0,077382	-0,003806	-0,000590	0,000032
35	0,573576	0,073576	-0,004364	-0,000558	0,000029
40	0,642788	0,069212	-0,004893	-0,000529	0,000040
45	0,707107	0,064319	-0,005382	-0,000489	0,000042
50	0,766044	0,058937	-0,005829	-0,000447	
55	0,819152	0,053108			

Considerînd diferențele de ordinul patru, practic constante, formula de extrapolare în domeniul valorilor $x < x_0$ va fi:

$$F(x_0 + zh) = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{2 \cdot 3} \Delta^3 y_0 + \frac{z(z+1)(z-2)(z-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 y_0.$$

Parametrul z trebuie să ia valorile $-0,2$; $-0,4$; $-0,6$; $-0,8$ și $-1,0$. Pentru comoditatea calculului ne formăm un tabel cu date intermediare

Tabelul 2.21

x	(z)	$z\Delta y_0$	$\frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 y_0$	$\frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 y_0$	$\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 y_0$	$y = J_0 + (3) + (4) + (5) + (6)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
14°	-0,2	-0,0166402	-0,0003124	+0,0000539	-0,0000017	0,241922
13°	-0,4	-0,0332804	-0,0007288	0,0001373	0,0000044	0,224952
12°	-0,6	-0,0499206	-0,0012494	0,0002550	-0,0000086	0,207913
11°	-0,8	-0,0665608	-0,0018742	0,0004119	-0,0000147	0,190811
10°	-0,8	0,0832010	-0,0026030	0,0006130	0,0000230	0,173651

Aplicarea formulei (2.86) în scopul extrapolării conduce la erori mult mai mari decît în cazul cînd această formulă se utilizează pentru interpolarea înainte. Pentru a vedea precizia acestei formule de extrapolare putem verifica

cu ce precizie obținem valoarea funcției $y = \sin x$ pentru $x = 0$, adică pentru $z = -3$ în acest caz avem

$$F(x_0 - 3h) = 0,258819 - 3 \cdot 0,083201 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,002603 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 0,000613 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,000023 = 0,258819 - 0,249603 - 0,0151618 + 0,000613 + 0,000345 = 0,000073.$$

Vedem că pentru o funcție dată cu șase cifre exacte prin extrapolare la o distanță egală cu $3h$, rămîn numai patru cifre exacte.

Formula (2.86) de interpolare „înainte” permite extrapolarea „înapoi” prin schimbarea semnului parametrului z . Pentru a putea efectua extrapolarea „înainte” adică pentru valori ale lui $x > x_n$, trebuie să deducem o formulă de interpolare „înapoi”.

Pentru aceasta vom considera funcția de interpolare

$$F(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + b_3(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-2}) + b_4(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) + \dots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (2.87)$$

Ca în paragraful precedent avem:

$$\text{dacă } x = x_n; F(x) = y_n = b_0, \text{ de unde } b_0 = y_n \quad (2.88)$$

pentru $x = x_{n-1}$; $F(x) = y_{n-1} = b_0 + b_1(x_{n-1} - x_n) = y_n - b_1h$
de unde

$$b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}. \quad (2.89)$$

Analog obținem:

$$b_2 = \frac{y_n - y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2} \quad (2.90)$$

$$b_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3h^3} \quad (2.91)$$

$$b_4 = \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4h^4} \quad (2.92)$$

Pentru un termen i oarecare:

$$b_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{ih^i} \quad (2.93)$$

Introducând relațiile (2.88)–(2.93) în formula (2.87) obținem :

$$F(y) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1} \cdot \frac{x - x_n}{h} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2} \cdot \frac{x - x_n}{h} \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3} \cdot \frac{x - x_n}{h} \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} \cdot \frac{x - x_{n-2}}{h} + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4} \cdot \frac{x - x_n}{h} \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} \cdot \frac{x - x_{n-2}}{h} \cdot \frac{x - x_{n-3}}{h} + \dots + \frac{\Delta_n y_0}{n} \cdot \frac{x - x_n}{h} \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} \cdot \frac{x - x_{n-2}}{h} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_1}{h} \quad (2.94)$$

Am ajuns astfel la a doua formulă de interpolare a lui Newton sub formula lui Newton de interpolare înapoi. Pentru a ajunge la aceeași formă ca în cazul formulei (2.86), introducem notația :

$$\frac{x - x_n}{h} = z; \quad x = x_n + zh. \quad (2.95)$$

Celelalte rapoarte din formula (2.94) se exprimă în funcție de parametrul z astfel :

$$\begin{aligned} \frac{x - x_{n-1}}{h} &= \frac{x - (x_n - h)}{h} = z + 1 \\ \frac{x - x_{n-2}}{h} &= \frac{x - (x_n - 2h)}{h} = z + 2 \\ \frac{x - x_{n-3}}{h} &= \frac{x - (x_n - 3h)}{h} = z + 3 \\ &\dots \\ \frac{x - x_1}{h} &= \frac{x - x_n - (n-1)h}{h} = z + n - 1. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Cu aceste notații formula (2.94) devine :

$$F(x) = F(x_n + zh) = y_n + z \Delta y_{n-1} + \frac{z(z+1)}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{z(z+1)(z+2)}{3} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{z(z+1)(z+2)(z+3)}{4} \Delta^4 y_{n-4} + \dots + \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}{n} \Delta^n y_0. \quad (2.97)$$

Pentru interpolarea „înapoi“ parametrul z ia valori negative, iar pentru interpolarea „înainte“ parametrul z ia valori pozitive.

De exemplu, pe baza datelor din tabelul 2.15 să calculăm valoarea funcției $y = \sin x$ pentru $x = 60^\circ$. În acest caz $z = 1$ și $\sin 60^\circ = 0,819152 + 0,053108 - 0,005823 - 0,000447 + 0,000042 = 0,8666026$.

Valoarea adevărată cu 5 cifre exacte se consideră $\sin 60^\circ = 0,86603$.

După regulile de rotunjire obținem aceeași valoare prin extrapolare.

Dacă însă calculăm pe baza formulei (2.12), $\sin 90^\circ$ atunci $z = 7$ și introducând în formula (2.97) avem :

$$F(x_n + zh) = y_n + 7 \Delta y_{n-1} + 28 \Delta^2 y_{n-2} + 84 \Delta^3 y_{n-3} + 210 \Delta^4 y_{n-4} = 0,819153 + 0,371756 - 0,163212 - 0,037548 + 0,00882 = 0,998969.$$

Eroarea relativă în rezultatul obținut este $1,031 \cdot 10^{-3}$ adică cu aproximativ 3 ordine de mărime mai mare decât eroarea relativă pentru datele din tabel.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

2.1. Eroarea absolută care se comite la măsurarea cu ajutorul unui micrometru este $\Delta d = 0,01$ mm. Efectuându-se trei măsurări, se obțin rezultatele

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \text{ mm} \\ d_2 &= 5 \text{ mm} \\ d_3 &= 10 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Să se calculeze erorile relative procentuale și preciziile acestor măsurări.

$$R. \quad \delta_1 = \frac{\Delta d}{d_1} = 0,01; \quad \delta_{p1} = \delta_1 \cdot 100\% = 1\%$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta d}{d_2} = \frac{0,01}{5} = 0,002; \quad \delta_{p2} = 0,2\%$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta d}{d_3} = \frac{0,01}{10} = 0,001; \quad \delta_{p3} = 0,1\%$$

$$P_1 = 100; \quad P_2 = 500; \quad P_3 = 1000.$$

Deci precizia este cu atât mai mare cu cât dimensiunea d măsurată este mai mare.

2.2. Valoarea experimentală a vitezei luminii în vid este :

$$c = (2,99796 \pm 0,00004) \text{ km/s}$$

iar viteza sunetului în aer la 0°C este

$$v = (331,63 \pm 0,04) \text{ m/s}.$$

Să se scrie erorile absolute ce afectează valorile acestor viteze și să se stabilească care din aceste două valori este mai precis cunoscută.

$$R. \quad \Delta c = \pm 4 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$$

$$\Delta v = \pm 4 \text{ cm/s}.$$

Erorile relative

$$\delta c = 1,33 \cdot 10^{-5}; \quad \delta v = 1,21 \cdot 10^{-4}.$$

Preciziile

$$P_c = \frac{1}{\delta c} = 75000; \quad P_v = \frac{1}{\delta v} = 8300.$$

Tabelul P.2.1

0°C	P (kg m ³)
5	999,992
10	999,727
20	998,230

R. Eroarea absolută maximă este :

$$\Delta \rho = 0,001 \text{ kg/m}^3$$

$$\delta \rho_{10} = \frac{0,001}{999,727} \approx 1,1 \cdot 10^{-6}$$

$$P = \frac{1}{\delta \rho} \approx 10^6$$

Deci, din tabelul P.2.1, valorile densității apei sînt cunoscute cu o precizie de $\approx 10^6$. Aceasta înseamnă că primele 5 cifre din numărul ce reprezintă densitatea ρ sînt cifre exacte.

2.4. Valoarea constantei gravitaționale γ se consideră

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$$

Măsurările efectuate pentru obținerea constantei γ sînt afectate de diferite erori relative. Valoarea medie a erorilor relative ale diferitelor măsurări este $\delta \gamma = 8 \cdot 10^{-3}$.

Se pune problema dacă în aceste condiții are sau nu sens să se calculeze valoarea γ cu mai mult de două zecimale.

Eroarea absolută

$$\Delta \gamma = \gamma \cdot \delta \gamma = 6,67 \cdot 0,008 = 0,05$$

Acest rezultat ne indică faptul că la nivelul actual de precizie a măsurărilor pentru constanta gravitațională γ nu are sens să fie luate în considerare mai mult de două zecimale, deoarece deja a doua zecimală nu este exactă. Pentru ca să aibă sens indicarea valorii constante gravitaționale cu trei zecimale, trebuie ca precizia măsurărilor să fie mărită de cel puțin 10 ori.

2.5. Rezistențele a doi rezistori sînt :

$$R_1 = (150 \pm 2) \Omega$$

$$R_2 = (350 \pm 3) \Omega$$

Să se calculeze erorile absolute și relative în cazurile cînd :

a) rezistorii sînt conectați în serie :

b) rezistorii sînt conectați în paralel.

R. a) Din formulele (2.20) și (2.21) rezultă :

$$R_s = R_1 + R_2 = 500 \Omega$$

$$\Delta R_s = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 5 \Omega$$

$$\delta R_s = \frac{\Delta R_s}{R_s} = \frac{5}{500} = 10^{-2}$$

$$b) R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 105 \Omega$$

Din formula (2.42) eroarea absolută în produsul $R_1 R_2 = 52 500$ este :

$$\Delta(R_1 R_2) = R_2 \Delta R_1 + R_1 \Delta R_2 = 350 \cdot 2 + 150 \cdot 3 = 1 150$$

Eroarea relativă :

$$\delta(R_1 R_2) = \frac{\Delta(R_1 R_2)}{R_1 R_2} = \frac{1 150}{52 500} = 0,0219$$

Pe baza formulei (2.48)

$$\delta R_p = \delta(R_1 R_2) + \delta R_s = 0,0319$$

$$\Delta R_p = R_p \cdot \delta R_p = 105 \cdot 0,0319 \approx 3,35 \Omega$$

2.6. Se măsoară densitatea mercurului cu ajutorul unui sistem de două vase comunicante (fig. P.2.1). În ramura 1 a vasului se află apă, iar în ramura 2 mercur. Înălțimea h_1 a coloanei de apă și înălțimea h_2 a coloanei de mercur se determină cu o eroare absolută $\Delta h = 1 \text{ mm}$. În urma efectuării măsurării se obțin valorile :

$$h_1 = 68 \text{ mm}, h_2 = 5 \text{ mm}.$$

Să se calculeze eroarea absolută $\Delta \rho_2$ și eroarea relativă $\delta \rho_2$ ce afectează valoarea densității mercurului, obținută în urma acestei măsurări. Se consideră că densitatea apei este $\rho_1 = 1 000 \text{ kg/m}^3$, afectată de erori neglijabile.

R. Din condiția

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

aflăm :

$$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2} \rho_1 = \frac{68}{5} 1 000 = 13 600 \text{ kg/m}^3$$

Din formula (2.50) aflăm :

$$\Delta \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \left(\frac{\Delta h}{h_1} + \frac{\Delta h}{h_2} \right) = 13,6(0,2 + 0,0015) = 2,9$$

$$\delta \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0,215$$

$$\Delta \rho_2 = \rho_1 \Delta \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 2 900 \text{ kg/m}^3$$

$$\delta \rho_2 = 0,215$$

Deci rezultatul acestei măsurări trebuie scris sub forma :

$$\rho_2 = (13 600 \pm 2 900) \text{ kg/m}^3$$

Eroarea absolută mare, a acestui rezultat, se datorează faptului că înălțimea h_2 este determinată cu o eroare procentuală relativă foarte mare $\approx 20\%$.

2.7. Coeficientul de dilatație liniară se determină prin formula :

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0(t - t_0)}$$

unde l_0 este lungimea barei la temperatura t_0 , iar l este lungimea barei la temperatura t .

Să se calculeze eroarea absolută și eroarea relativă care afectează rezultatul obținut pentru coeficientul α , dacă lungimile l și l_0 se determină cu aceeași eroare absolută Δl , iar temperaturile t_0 și t cu aceeași eroare absolută Δt .

R. Din formula 3.21 avem :

$$\Delta(l - l_0) = \Delta l + \Delta l = 2\Delta l$$

$$\Delta(t - t_0) = \Delta t + \Delta t = 2\Delta t$$

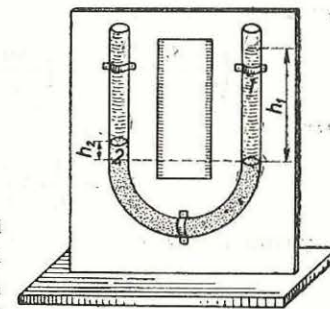


Fig. P. 2.1.

iar din formula (2.50).

$$\Delta \left(\frac{l-l_0}{t-t_0} \right) = \frac{l-l_0}{t-t_0} \left(\frac{\Delta(l-l_0)}{l-l_0} + \frac{\Delta(t-t_0)}{t-t_0} \right) = \frac{l-l_0}{t-t_0} \left(\frac{-2\Delta l}{l-l_0} + \frac{2\Delta t}{t-t_0} \right).$$

Deci

$$\Delta \alpha = \frac{1}{l_0} \Delta \left(\frac{l-l_0}{t-t_0} \right) = \frac{l-l_0}{l_0(t-t_0)} \cdot \left(\frac{-2\Delta l}{l-l_0} + \frac{2\Delta t}{t-t_0} \right).$$

și eroarea relativă

$$\delta \alpha = \frac{2\Delta l}{l-l_0} + \frac{2\Delta t}{t-t_0}.$$

2.8. Viteza unui electron accelerat la o diferență de potențial U este dată de formula

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Să se calculeze eroarea absolută și eroarea relativă la valoarea vitezei v obținute, dacă $U = 500$ V iar eroarea absolută cu care se determină această diferență de potențial este $\Delta U = 2$ V.

$$R. v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 10^6 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 500}{9,11}} = 1,3261 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Notăm:

$$x = \frac{2eU}{m}$$

$$\Delta x = \frac{2e\Delta U}{m} = \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \cdot 2 = 0,7 \cdot 10^{12}.$$

Din formula (2.58) avem:

$$\Delta v = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \frac{1}{1,33 \cdot 10^7} \cdot 0,7 \cdot 10^{12} = 0,26 \cdot 3 \cdot 10^5 = 2,63 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = 0,0026 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Deci viteza calculată trebuie scrisă sub forma:

$$v = (1,3261 \pm 0,0026) \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{v} = 1,96 \cdot 10^{-3} \approx 2 \cdot 10^{-3}$$

sau

$$\delta v = 0,2\%.$$

2.9. Se măsoară densitatea mai multor lichide cu ajutorul sistemului de două vase comunicante (fig. P.2.1). Se cere să se indice capul de tabel ce trebuie pregătit înainte de începerea măsurărilor.

R.

Lichidul	h_1	h_2	h_1/h_2	$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2} \rho_1$

2.10. Să se indice capul de tabel care trebuie pregătit pentru efectuarea unei experiențe în care se urmărește să se arate că produsul dintre presiunea P și volumul V ale unui gaz depinde liniar de temperatura absolută T .

R.

Nr. determinării	$t^\circ\text{C}$	$T(\text{K})$	P	V	PV

2.11. Măsurarea căldurii specifice a unui corp solid se poate efectua introducând corpul solid de masă m , aflat la temperatura t_1 , într-un calorimetru în care se află apa cu masa M la temperatura t_0 . Dacă temperatura de echilibru este t , atunci căldura specifică c a metalului este:

$$c = \frac{M(t-t_0)}{m(t_1-t)} c_a.$$

Se cere:

a) Să se indice forma tabelului de calcul necesar.

b) Să se calculeze căldura specifică a aluminiului și, respectiv, eroarea absolută Δc și eroarea relativă δc , dacă în urma măsurărilor au fost obținute rezultatele:

$$M = (250 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$m = (62,31 \pm 0,02) \text{ g}$$

$$t_0 = (13,52 \pm 0,01)^\circ\text{C}$$

$$t_1 = (99,32 \pm 0,04)^\circ\text{C}$$

$$t = (17,79 \pm 0,01)^\circ\text{C}.$$

Căldura specifică a apei se consideră $c_a = 4190 \text{ J/kg}\cdot\text{grad}$.

c) Care este eroarea determinantă în această măsurare?

R:

a)

M	m	t_0	t_1	t	$t-t_0$	t_1-t	$M(t-t_0)$	$m(t_1-t)$	c

b) $C = 880,32 \text{ J/kg}\cdot\text{grad}$.

$$\Delta c = \frac{M(t-t_0)}{m(t_1-t)} \left(\frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta(t-t_0)}{t-t_0} + \frac{\Delta(t_1-t)}{t_1-t} \right) =$$

$$= 880,32[0,0008 + 0,0003 + 0,00047 + 0,0006] = 0,0064 \cdot 880,32 = 5,63 \text{ J/kg}\cdot\text{grad}.$$

Deci,

$$c = (880,32 \pm 5,63) \text{ J/kg}\cdot\text{grad}$$

$$\delta_c = 0,0064 = 0,64\%.$$

c) Eroarea determinantă este eroarea ce afectează diferența $t-t_0$. Aceasta se datorează faptului că valoarea absolută a diferenței $t-t_0 = 4,27^\circ\text{C}$ este mică și deci eroarea relativă 0,47% mare.

2.12. În tabelul P.2.2 este dată dependența rezistivității sodiului (Na) de temperatură.

Tabelul P.2.2

$t^{\circ}\text{C}$	0	20	40	60	80
$\rho \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	4,477	4,897	5,314	5,780	6,279

Se cere rezistivitatea ρ :

a) pentru 25°C ;

b) pentru -10°C ;

c) pentru 90°C .

R. Efectuăm tabelul diferențelor:

$t^{\circ}\text{C}$	$\rho \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	$\Delta\rho$	$\Delta^2\rho$	$\Delta^3\rho$
0	4,477			
20	4,879	0,402		
			0,033	
40	5,314	0,435		-0,002
		0,466	0,031	
60	5,780	0,499	0,033	+0,002
80	6,279			

Vedem că dependența rezistivității ρ de temperatură, pentru Na, poate fi scrisă sub forma:

$$\rho(t) = a + bt + ct^2.$$

Deci efectuăm o interpolare parabolică:

$$\rho(25^{\circ}\text{C}) = 4,879 + \frac{0,435}{20} \cdot 5 + \frac{0,031}{2 \cdot 20^2} \cdot 5(-15) = 4,879 + 0,109 - 0,003$$

$$\rho(25^{\circ}\text{C}) = 4,985 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}.$$

b) Din formula (2.86):

$$\rho(-10^{\circ}\text{C}) = 4,477 - 0,5 \cdot 0,402 + \frac{3}{8} \cdot 0,033.$$

Deci:

$$\rho(-10^{\circ}\text{C}) = 4,288 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}.$$

Pe baza formulei (2.94), avem:

$$\rho(90^{\circ}\text{C}) = 6,279 + 0,5 \cdot 0,499 + \frac{0,033}{2} \cdot 0,5 \cdot (1,5)$$

sau:

$$\rho(90^{\circ}) = 6,739 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}.$$

Trebuie avut grijă, în cazul extrapolării, dacă proprietățile materialului rămân neschimbate. De exemplu, pentru Na, temperatura de topire este $97,83^{\circ}\text{C}$. Deci este fără sens să se facă extrapolarea pentru $t = 160^{\circ}\text{C}$.

2.13 În tabelul P.2.3 se indică valorile pentru densitatea apei pentru unele valori ale temperaturii t .

Tabelul P.2.3

$t^{\circ}\text{C}$	10	21	22	23	24	25
$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	998,230	998,019	997,797	997,565	997,323	997,071

Să se calculeze densitatea apei pentru temperatura $t = 22,7^{\circ}\text{C}$.

R. Trebuie să vedem care este gradul polinomului de interpolare.

$t^{\circ}\text{C}$	ρ	$\Delta\rho$	Δ^2
20	998,230		
21	998,019	-0,211	
22	997,797	-0,222	-0,011
23	997,565	-0,232	-0,010
24	997,323	-0,242	-0,010
25	997,071	-0,252	

Deci, în acest domeniu, densitatea apei depinde de temperatură sub forma unui polinom de gradul doi și deci

$$\rho(22,7^{\circ}\text{C}) = 997,797 - 0,7 \cdot 0,239 + \frac{0,7 \cdot 0,3}{2} \cdot 0,01.$$

De unde,

$$\rho(22,7^{\circ}\text{C}) = 997,636 \text{ kg/m}^3.$$

2.14. În scopul etalonării unui dinamometru se determină greutatea mg astfel încât indicațiile N pe scara gradată să fie 0,5, 10, 15, 20... Rezultatele unei astfel de etalonări sunt indicate în tabelul P.2.4.

Tabelul P.2.4

N	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$m \text{ (kg)}$	0	4,87	10,52	17,24	25,34	35,16	46,97	61,09	77,85

Să se stabilească gradul polinomului care indică dependența masei corpului de numărul N al diviziunilor de pe scara dinamometrului.

R. Pentru stabilirea gradului polinomului trebuie să alcătuim tabelul diferențelor.

N	m	$\Delta(m)$	$\Delta^2 m$	$\Delta^3 m$	$\Delta^4 m$
0	0	4,87			
5	4,87	5,65	0,78		
10	10,52	6,72	1,07	0,29	0,02
15	17,24	8,10	1,38	0,31	0,03
20	25,34	9,82	1,72	0,34	-0,05
25	35,16	11,81	1,99	0,29	0,03
30	46,97	14,12	2,31	0,32	0,01
35	61,09	16,76	2,64	0,33	
40	77,85				

Vedem că diferențele de ordinul trei sînt practic constante. Oscilațiile acestor valori se datorează erorilor experimentale. Deci dependența greutății mg de numărul diviziunilor de pe scara dinamometrului este sub forma unui polinom de gradul trei.

$$mg = a + bN + cN^2 + dN^3.$$

3

REPREZENTAREA DATELOR PRIN GRAFICE

În fizica experimentală se utilizează foarte des reprezentarea prin grafice a datelor obținute în urma efectuării unor măsurări. Dacă, de exemplu, se măsoară valorile mărimii y pentru diferite valori ale mărimii x , se obțin perechile de valori

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \dots x_n \quad (3.1)$$

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \dots y_n.$$

Pentru reprezentarea grafică a datelor (3.1) se utilizează, cu foarte puține excepții, sistemul obișnuit de coordonate rectangulare. Pe o axă orizontală numită axa absciselor se reprezintă, la o scară aleasă, valorile $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, iar pe o altă axă, numită axa ordonatelor se reprezintă valorile funcției $y = y(x)$, adică $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ (fig. 3.1).

Intersecția perpendicularelor pe axa absciselor în punctele $x_0, x_1, x_2, \dots$ cu perpendicularele pe axa ordonatelor în punctele $y_0, y_1, y_2, \dots$ se reprezintă prin punctele pe graficul respectiv.

Putem desigur reprezenta mărimea x pe axa ordonatelor și mărimea y pe axa absciselor. Se indică însă ca întotdeauna pe axa absciselor să se reprezinte mărimea independentă adică mărimea ale cărei valori sînt alese de experimentator, iar pe axa ordonatelor să se reprezinte mărimea măsurată. Se mai spune că pe axa orizontală trebuie reprezentată cauza, iar pe axa verticală efectul.

De exemplu, dacă măsurăm intensitatea curentului anodic pentru o triodă I_a , în funcție de tensiune pe grilă U_g , în cazul în care tensiunea anodică U_a se menține constantă, vom reprezenta tensiunea pe grilă U_g pe axa

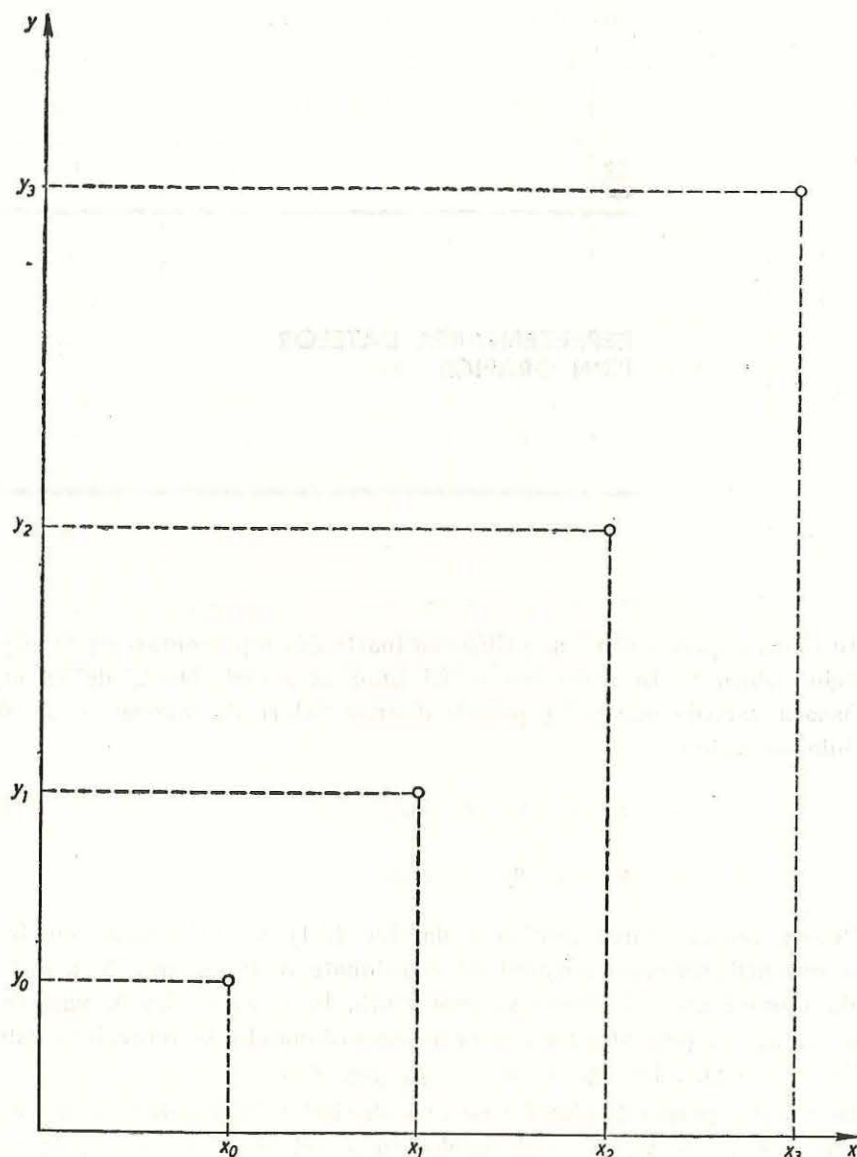


Fig. 3.1.

absciselor și intensitatea curentului I_a pe axa ordonatelor. Aceasta deoarece valorile U_g pentru care se efectuează măsurările se pot alege arbitrar, dar intensitatea curentului anodic depinde funcțional de tensiunea de grilă.

Deci, prin reprezentarea grafică a datelor experimentale, fiecărei perechi de valori (x_i, y_i) îi corespunde un punct pe graficul respectiv. Aceste perechi de valori sînt însă reprezentate într-un tabel în care au fost trecute în procesul de efectuare a măsurărilor. Se poate pune întrebarea de ce este nece-

sară reprezentarea grafică dacă dispunem de tabele corespunzătoare pentru perechile x_i, y_i pentru datele experimentale respective. Desigur că reprezentarea datelor prin tabele este o etapă absolut necesară, deoarece dacă nu dispunem de tabele nu putem trece la reprezentarea grafică. Reprezentarea datelor prin grafice reprezintă o etapă, în procesul de prelucrare a datelor care succede reprezentarea prin tabele și prezintă unele avantaje față de aceasta.

3.1. UNELE AVANTAJE ALE REPREZENTĂRII DATELOR PRIN GRAFICE

Vom încerca să scoatem în evidență unele aspecte mai importante care indică avantajele reprezentării datelor prin grafice. Desigur, că așa cum am mai subliniat, nu se poate vorbi de avantajele reprezentării datelor prin grafice față de reprezentarea acestor date prin tabele, deoarece întotdeauna reprezentarea grafică se face pe baza unui tabel. Deci nu putem pune problema alegerii între reprezentarea datelor prin tabele sau prin grafice. Se pune însă problema avantajelor pe care le obținem dacă, pe lângă reprezentarea datelor prin tabele utilizăm și reprezentarea acestor date prin grafice.

Să ilustrăm unele dintre aceste avantaje :

a) Reprezentarea datelor prin grafice permite stabilirea unor caracteristici ale dependenței mărimii y de mărimea x , care nu pot fi determinate dacă ne limităm numai la reprezentarea primei tabele. Astfel, putem stabili cu aproximație punctele de intersecție ale curbei experimentale cu axa absciselor sau axa ordonatelor, maxime și minime, punctele de inflexiune, panta curbei experimentale, caracteristicile de periodicitate în șirul de date experimentale. Aceste caracteristici se pot trece cu vederea în examinarea tabelelor sau se pot pune în evidență numai după o examinare foarte atentă.

Să considerăm următorul exemplu. Prin iradierea unui metal cu unde electromagnetice de diferite frecvențe ν , se emit electroni a căror energie maximă E_{max} depinde de frecvența ν . Această proprietate este cunoscută sub numele de efect fotoelectric.

În figura 3.2 se indică dependența energiei maxime a fotoelectronilor emiși în urma iradierii suprafeței molibdenului cu unde electromagnetice de diferite frecvențe. Desigur, că datele obținute în procesul de măsurare sînt trecute într-un tabel. Reprezentarea grafică a acestor date ne permite să tragem unele concluzii suplimentare :

— dependența energiei maxime E_{max} de frecvență ν a undelor electromagnetice este liniară ;

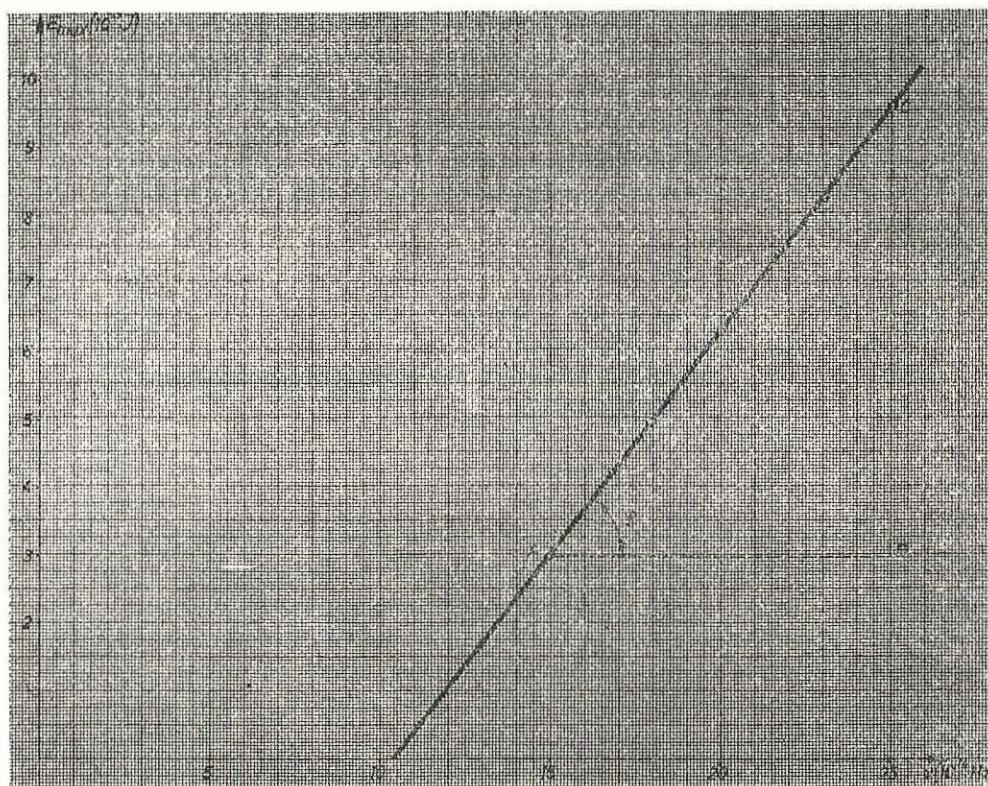


Fig. 3.2.

— dreapta intersectează axa absciselor în punctul în care frecvența ν are valoarea $\nu_0 = 10,5 \cdot 10^{14}$ Hz. Pentru această frecvență energia electronilor este zero, deci efectul fotoelectric poate avea loc numai dacă frecvența ν a undelor electromagnetice este mai mare decât frecvența de prag ν_0 :

— putem calcula panta dreptei în figura 3.2.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{AB}. \quad (3.2)$$

Segmentul $AB = 100$ mm, dar 1 mm reprezintă $0,1 \cdot 10^{14}$ Hz, deci $AB = 10 \cdot 10^{14}$ Hz.

Pe axa ordonatelor segmentul $BC = 133$ mm, iar 1 mm reprezintă $(1/20) \cdot 10^{-19}$ J, deci $BC = 6,65 \cdot 10^{-19}$ J și

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{6,65 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{10 \cdot 10^{14} \text{ 1/s}} = 6,65 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (3.3)$$

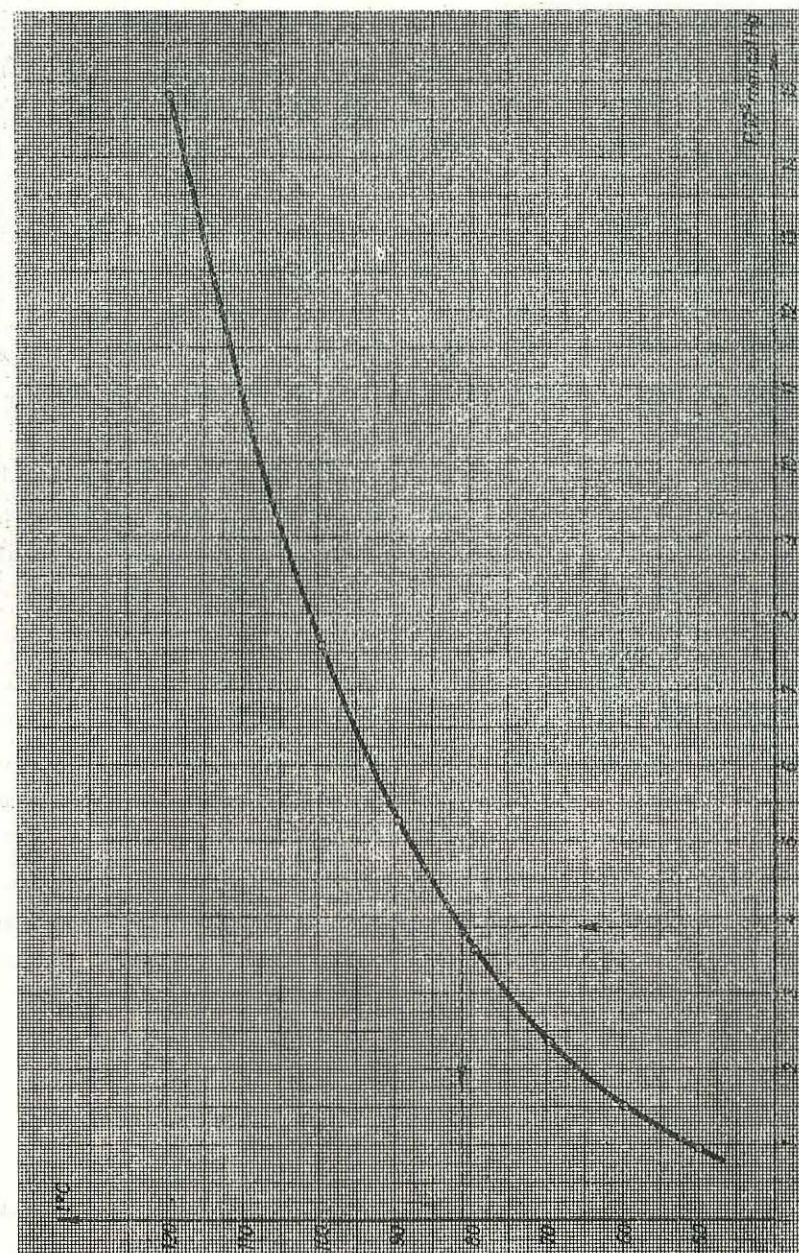


Fig. 3.3.

Studiul experimental al efectului fotoelectric arată că panta dreptei nu depinde de natura metalului, deci reprezintă o constantă universală cunoscută sub denumirea de constanta lui Planck (h). Vedem deci câte informații utile putem obține din reprezentarea grafică a datelor experimentale.

b) Reprezentarea datelor prin grafice permite efectuarea rapidă a interpolării. Deși prin interpolarea grafică obținem valori mult mai puțin precise decât prin aplicarea formulelor lui Newton, această metodă prezintă avantaje datorită simplității sale.

De exemplu, în figura 3.3 este reprezentată dependența temperaturii de fierbere a apei funcție de presiune, după tabelul 2.18. Unind punctele experimentale, obținem curba experimentală. Dorim să aflăm temperatura de fierbere a apei la presiunea $p = 0,5 \text{ atm} = 380 \text{ mm col Hg}$. Ducem din acest punct o perpendiculară pe axa abscisei, iar din punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu curba experimentală ducem o perpendiculară pe axa ordonatelor. Obținem temperatura $t = 81,5^\circ\text{C}$. Utilizând interpolarea parabolică am obținut $t = 81,6^\circ\text{C}$. Vedem că, dacă prin punctele experimentale trece o curbă suficient de netedă interpolarea grafică furnizează rezultate destul de precise. Precizia acestei metode este determinată în mare măsură de alegerea scării pentru reprezentarea datelor pe abscisă, respectiv pe ordonată.

c) Poate că unul din cele mai importante avantaje furnizate de reprezentarea datelor prin grafice îl constituie faptul că această reprezentare ne permite ca „dintr-o singură privire” să avem o imagine intuitivă asupra dependenței funcționale a mărimii y de mărimea x . Astfel, din reprezentarea grafică a datelor din tabelul 2.11 (fig. 3.4), vedem imediat că puterea disipată în circuitul exterior este maximă pentru o valoare anumită a rezistenței exterioare R_0 , că această putere scade destul de repede dacă valorile rezistenței R se îndepărtează de R_0 . De asemenea, vedem că scăderea puterii disipate în rezistența exterioară nu este simetrică față de valoarea $R = R_0$, ci scăderea este mai rapidă pentru $R < R_0$ și mai lentă pentru $R > R_0$.

Fără îndoială că astfel de reprezentări intuitive erau mult mai greu de obținut dacă ne limităm numai la reprezentarea datelor prin tabele.

d) Reprezentarea datelor prin grafice ne permite să ne dăm mai bine seama dacă datele obținute experimental conduc sau nu la o dependență teoretică cunoscută. Putem avea domenii ale valorilor argumentului în care datele experimentale se abat substanțial de la o dependență teoretică considerată, iar în alte domenii datele experimentale sînt în concordanță cu formula respectivă.

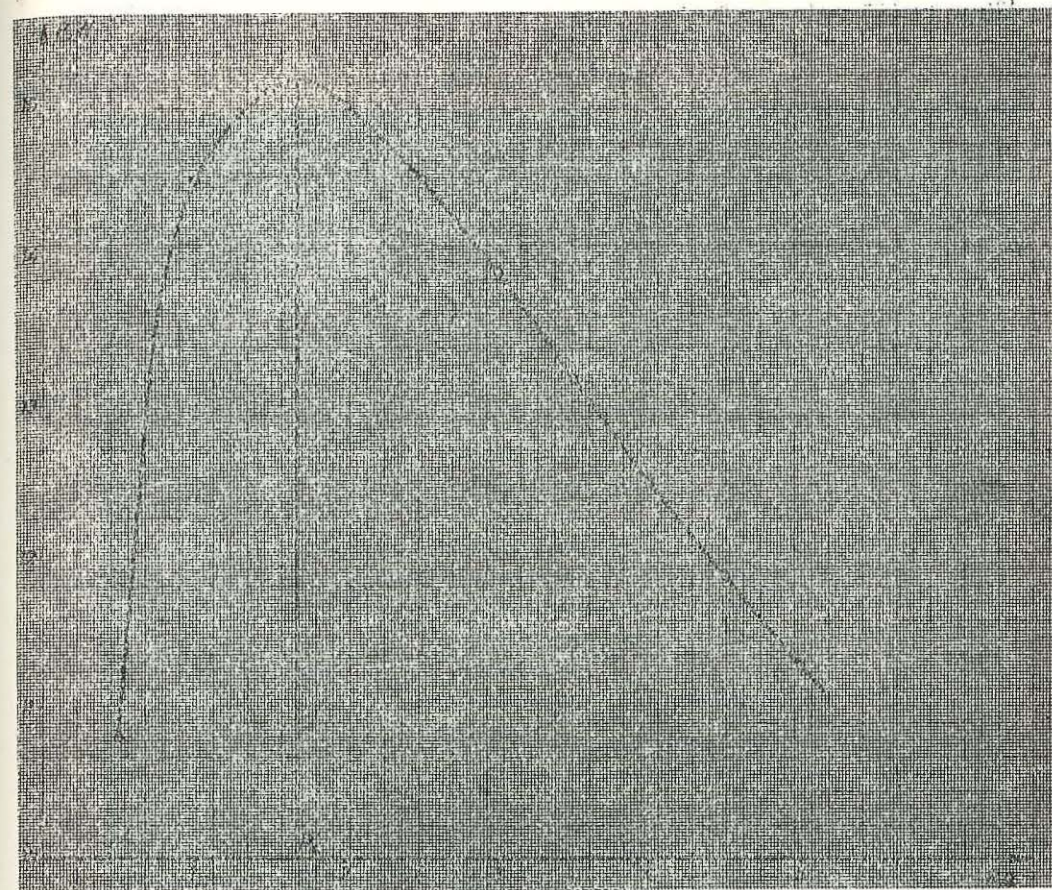


Fig. 3.4.

De exemplu, studiul curgerii laminare a lichidului printr-un tub (fig. 3.5) ne conduce la concluzia că viteza v de curgere a fluidului depinde de căderea de presiune pe unitatea de lungime, de raza r_0 a tubului, de distanța r la axa tubului și de coeficientul de vîscozitate η

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\pi\eta l} (r_0^2 - r^2). \quad (3.4)$$

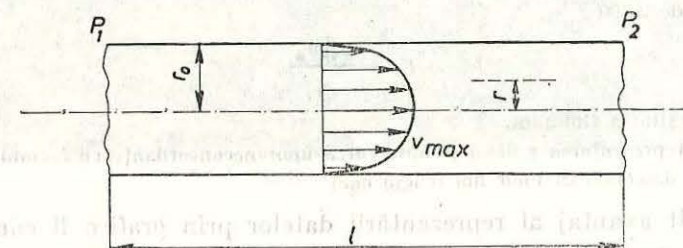


Fig. 3.5.

Viteza maximă pentru $r = 0$ este

$$v_{max} = \frac{P_1 - P_2}{4\pi l} r_0^2 \quad (3.5)$$

iar viteza medie este

$$v_m = \frac{P_1 - P_2}{8\pi l} r_0^2 \quad (3.6)$$

Conform acestor formule, viteza de curgere a lichidului printr-un tub este proporțională cu factorul

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\Delta P}{l} \quad (3.7)$$

Coefficientul de viscozitate η caracterizează forța de frecare, ce apare prin deplasarea relativă a două straturi de lichid sau de gaz. Forța de frecare este proporțională cu variația vitezei pe unitatea de lungime a razei tubului, iar factorul de proporționalitate este coeficientul de viscozitate η .

$$F = \eta \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

În SI, coeficientul de viscozitate η se măsoară în $\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})$.

În tabelul 3.1 se indică rezultatele experimentale obținute de Reynolds privind dependența vitezei medii de curgere a fluidului printr-un tub, de căderea de presiune pe unitatea de lungime:

Tabelul 3.1

$\Delta P/l \text{ (N/m}^2\text{)}$	$V_m \text{ (mm/s)}$	$\Delta P/l \text{ (N/m}^2\text{)}$	$v_m \text{ (mm/s)}$
7,8	35	78,3	245
15,6	65	86,0	258
23,4	78	87,6	258
31,3	126	93,9	271
39,0	142	101,6	277
46,9	171	109,6	284
54,7	194	118,0	290
62,6	226		

Datele din tabelul 3.1 sînt reprezentate grafic în figura 3.6. Vedem că pentru valori mari ale căderii de presiune pe unitatea de lungime nu se mai respectă dependența liniară din formula 3.6.

Aceste observații l-au condus pe Reynolds la descoperirea că formula 3.6 este valabilă, numai dacă o anumită mărime, care azi este cunoscută sub numele de numărul lui Reynolds este mai mică de 2 300

$$E_s = \frac{2r_0 \rho v_m}{\eta} \quad (3.8)$$

unde ρ este densitatea fluidului.

Vedem că reprezentarea grafică și observarea unor neconcordanțe cu formule cunoscute pot conduce la descoperirea unor noi fenomene.

e) Un alt avantaj al reprezentării datelor prin grafice îl constituie și faptul că din graficul dependenței mărimii y de mărimea x , putem să ne dăm seama, cu o anumită aproximație, care ar fi formula empirică cea mai

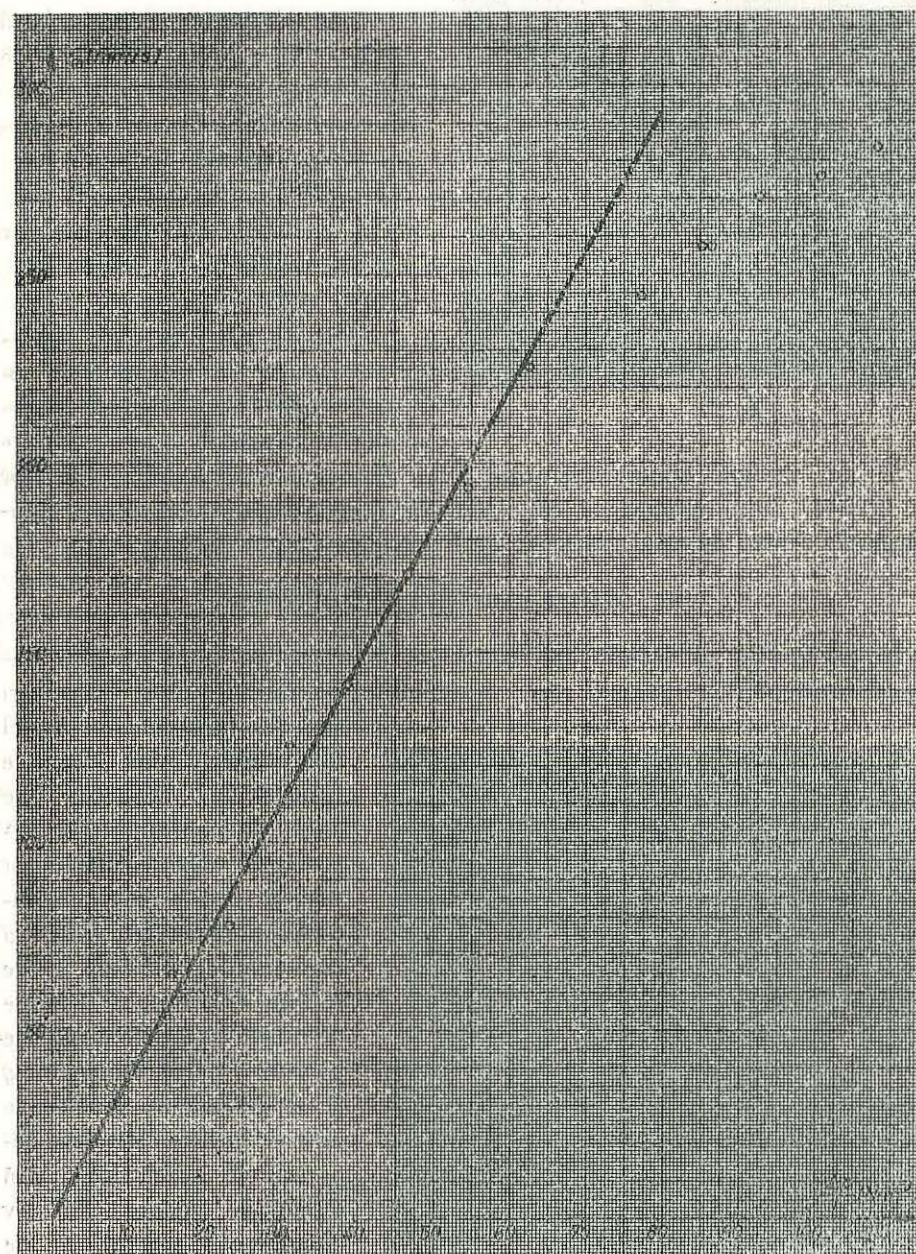


Fig. 3.6.

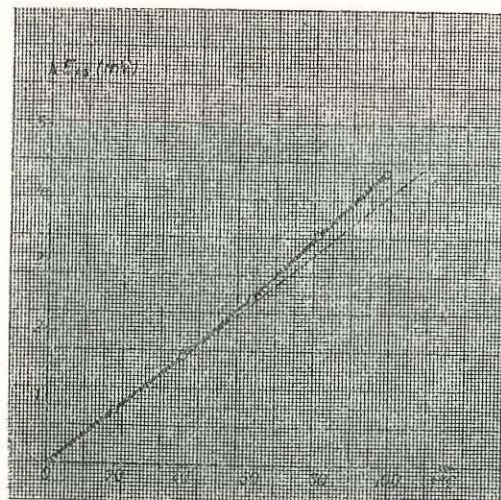


Fig. 3.7.

Se pot desigur enumera și alte avantaje ale reprezentării datelor prin grafice. Considerăm însă că avantajele indicate, sînt suficiente pentru a ne da seama de rolul graficelor în fizică și în știință, în general.

3.2. GRAFICE CALITATIVE ȘI CANTITATIVE

În paragraful precedent am arătat că prin grafice se reprezintă datele conținute într-un tabel care reprezintă rezultatele unor măsurări sau ale unor calcule. Astfel de grafice sînt grafice cantitative deoarece pe axele de coordonate se reprezintă valorile mărimilor x și y . Există însă posibilitatea reprezentării grafice a dependenței mărimii y de mărimea x fără a dispune de tabele cu date numerice privind valorile mărimilor y și x . Asemenea grafice se numesc grafice calitative deoarece ele indică numai din punct de vedere calitativ dependența mărimii y de mărimea x .

Graficele calitative prezintă o deosebită importanță în descrierea unor

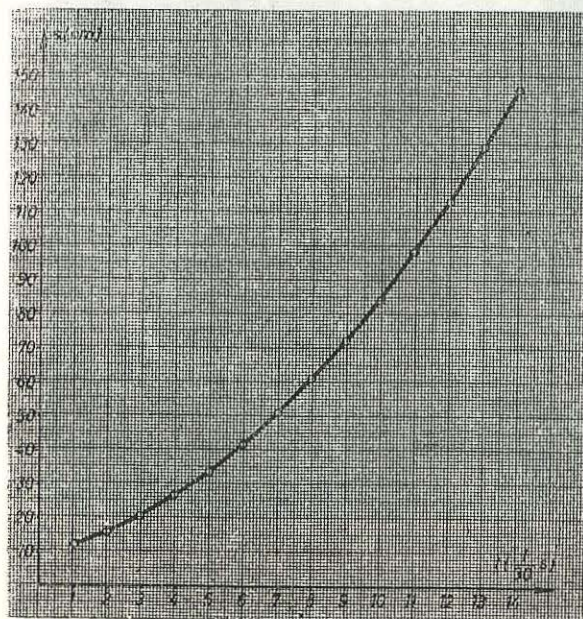


Fig. 3.8.

indicată prin care am putea aproxima curba experimentală obținută.

De exemplu, reprezentînd grafic datele din tabelul 2.13 (fig. 3.7) putem considera că tensiunea electromotoare E_{AB} depinde aproximativ liniar de diferența de temperatură $t^\circ\text{C}$, iar dacă dorim rezultate mai precise putem considera un polinom de gradul doi.

Din figura 3.8, care reprezintă datele din tabelul 2.6, vedem că distanța s depinde parabolic de timpul t .

procese sau fenomene fizice. Ele se folosesc foarte des în manuale pentru a ilustra într-un mod cît mai intuitiv posibil unele procese sau fenomene fizice.

Să dăm cîteva exemple de grafice calitative.

În figura 3.9, se reprezintă calitativ dependența între alungirea relativă ϵ și efortul unitar σ . Din acest grafic se vede că există un domeniu în care dependența între σ și ϵ este liniară, domeniu care corespunde legii lui Hooke. Pentru un efort unitar mai mare decît o valoare specifică, pentru fiecare, material dependența liniară nu mai este respectată.

Graficul din figura 3.10 indică calitativ pentru procese fizice în planul p, V . Privind acest grafic, rămînem cu o reprezentare intuitivă a acestor procese;

de exemplu, trebuie amintit că adiabata este mai înclinată decît izoterma.

În figura 3.11 este indicată dependența de timp a temperaturii unui corp solid. Din acest grafic rezultă că pe porțiunea 1—2 temperatura θ crește cu timpul, iar din momentul cînd se atinge temperatura de topire θ_0 , temperatura rămîne constantă pînă cînd întreaga masă a corpului solid se transformă în lichid; apoi temperatura crește din nou cu timpul.

Graficul calitativ din figura 3.12 indică dependența rezistenței R de temperatură, pentru metale și pentru semiconductori. Se vede că în timp ce pentru metale rezistența R crește practic liniar cu temperatura, în cazul semiconductoarelor rezistența scade o dată cu creșterea temperaturii.

În figura 3.13 se arată calitativ modul de variație a masei unei particule, în funcție de viteză. Se vede, că pe măsură ce viteza v a particulei se apropie de viteza luminii în vid c , masa corpului tinde spre infinit.

Din exemplele enumerate rezultă că graficul calitativ furnizează o reprezentare clară, intuitivă privind modul de dependență între diferite mărimi fizice.

3.3. UNELE INDICAȚII PRIVIND PREZENTAREA DATELOR PRIN GRAFICE

Pentru ca reprezentarea grafică a datelor experimentale să fie cît mai clară se recomandă să se țină seamă de unele indicații.

a) În primul rînd trebuie aleasă corespunzător hîrtia ce urmează a fi utilizată pentru reprezentarea grafică. De cele mai multe ori se folosește

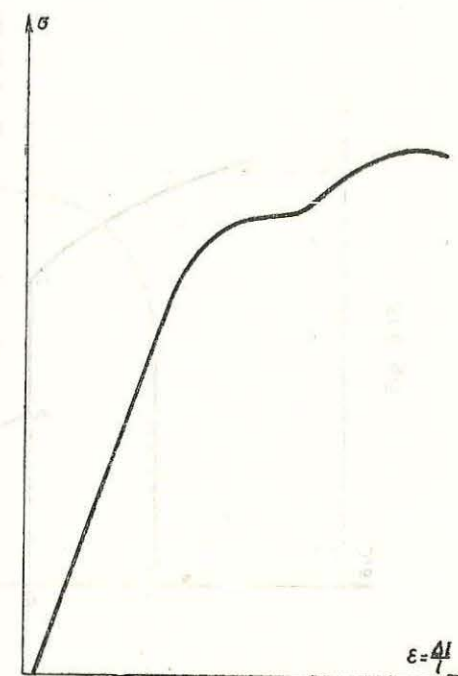
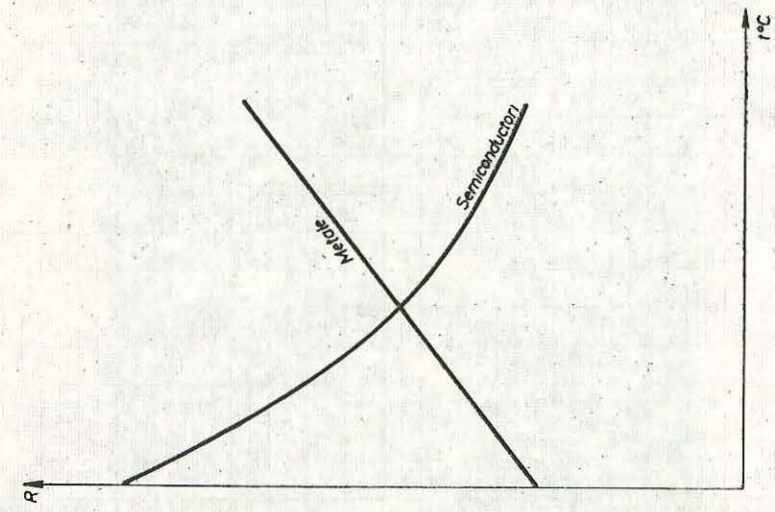
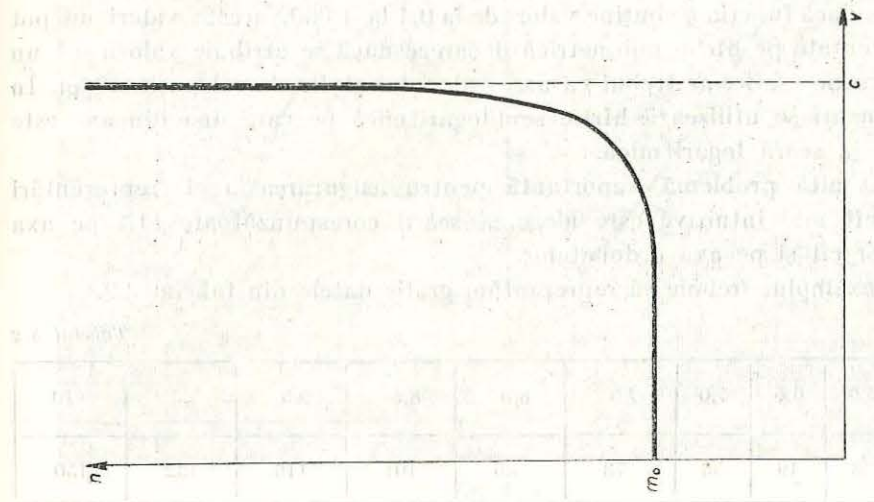
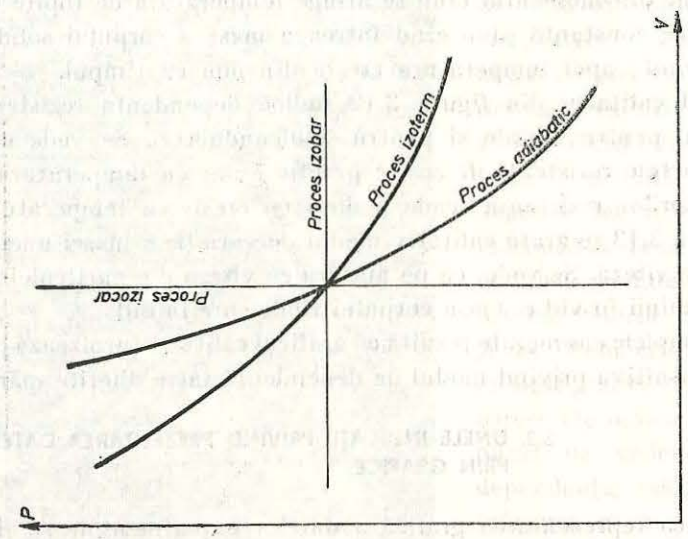
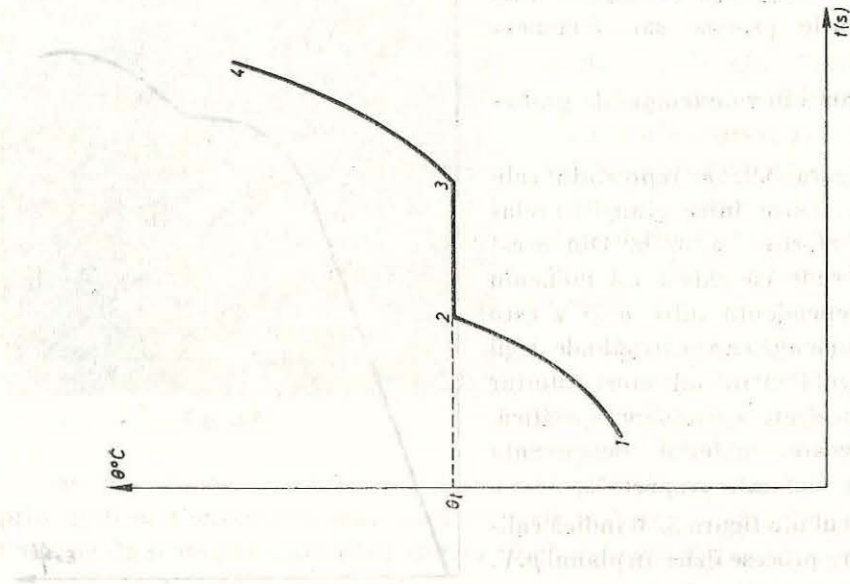


Fig. 3.9.



hîrtie milimetrică obișnuită, cu scări liniare pe ambele axe. Dacă însă argumentul sau funcția conțin valori care diferă foarte mult între ele, atunci, reprezentarea pe hîrtie milimetrică obișnuită este practic imposibilă. De exemplu, dacă funcția y conține valori de la 0,1 la 1 000, aceste valori nu pot fi reprezentate pe hîrtie milimetrică deoarece dacă se atribuie valorii 0,1 un milimetru pe grafic, ar trebui ca axa ordonatei să fie de cel puțin 10 m. În aceste cazuri se utilizează hîrtie semilogaritmă pe care una din axe este divizată la scară logaritmică.

b) O altă problemă importantă pentru asigurarea unei reprezentări grafice cît mai intuitive este alegerea scării corespunzătoare atît pe axa absciselor cît și pe axa ordonatei.

De exemplu, trebuie să reprezentăm grafic datele din tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

x	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10
y	38	49	58	73	86	101	116	132	150

În figura 3.14, a , datele din tabelul 3.2 sînt reprezentate grafic considerînd axa x de la zero. Prin aceasta se îngreunează obținerea de informații intuitive privind forma dependenței y de x . Se recomandă ca atunci cînd

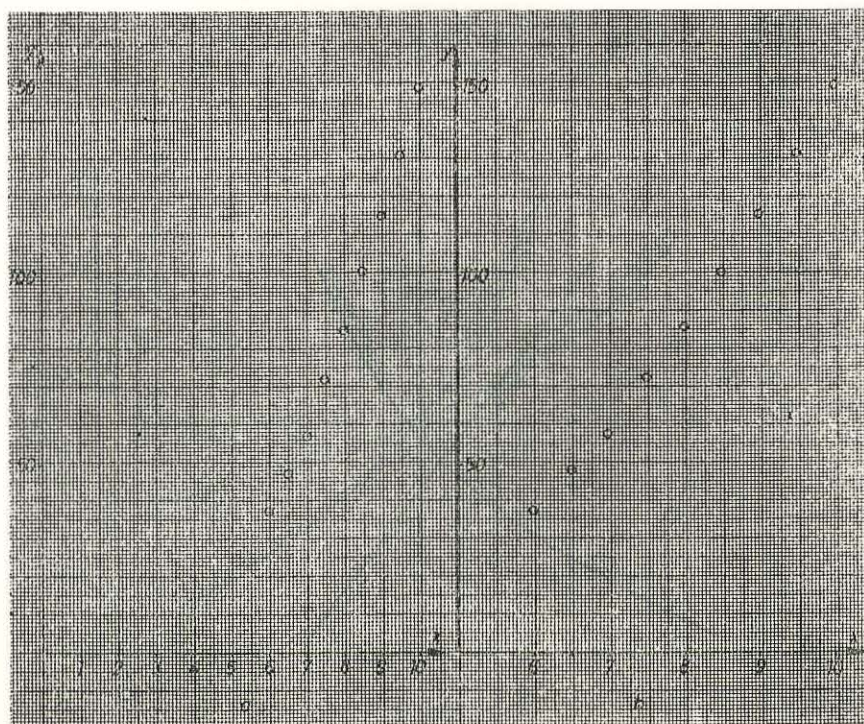


Fig. 3.14.

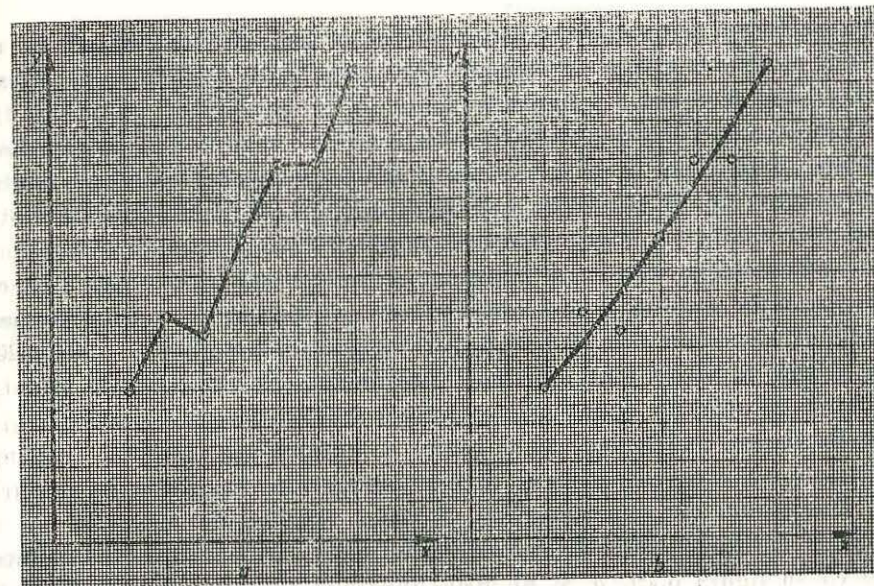


Fig. 3.15.

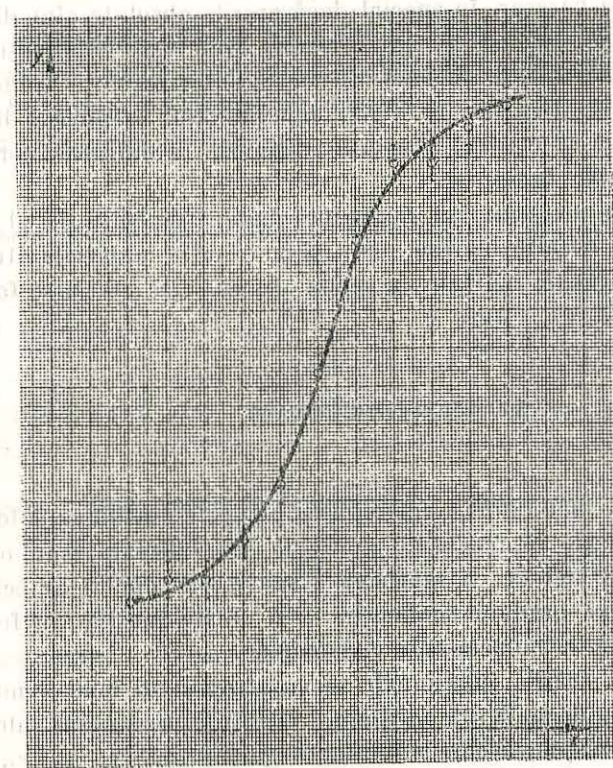


Fig. 3.16.

valorile variabilei x încep de la un număr oarecare, acest număr să fie reprezentat cât mai aproape de originea axei respective. Graficul 3.14, b este mult mai clar decât cel din figura 3.14, a .

Scara pe axele de coordonate trebuie aleasă cât mai simplu posibil. Este foarte bine dacă 1 cm de pe grafic corespunde unei unități oarecare pentru mărimea măsurată. Prin unitate înțelegem 0,1; 1; 10; 100 etc. Este destul de comod și când 1 cm corespunde la 2 sau 5 unități.

c) Indicațiile pe axele x și y trebuie să fie cât mai simple adică cu cât mai puține cifre. De regulă indicațiile pe axe nu trebuie să conțină numere cu mai mult de două cifre: 0,1; 0,2; 0,3; ...; 1,0; 2,0; 3,0; ...; 10; 20; 30; ... Dacă numerele sînt mai mari trebuie indicat un factor la sfîrșitul axei alături de unitățile de măsură, ca în figura 3.3 pe axa x .

d) Pe fiecare axă trebuie să se indice denumirea sau simbolul mărimii reprezentate pe axa respectivă și în mod obligatoriu, unitățile de măsură.

e) Dacă punctele experimentale, datorită erorilor de măsurare nu se așază pe o curbă netedă este recomandabil să se traseze o curbă printre puncte ca în figura 3.15, b , și nu prin punctele experimentale ca în figura 3.15, a . Prin aceasta se obține o mediere a erorilor de măsurare.

f) În cazul în care se pot aprecia erorile absolute comise prin efectuarea unor măsurări, reprezentarea grafică trebuie să indice erorile respective. Acest lucru este necesar, în special dacă erorile absolute sînt diferite pentru diferite valori ale funcției y , adică atunci când valorile funcției y au fost obținute prin măsurări de precizii diferite. Erorile absolute se indică pe grafic ca în figura 3.16. Din fiecare punct experimental se duce o linie verticală de lungime egală cu eroarea absolută transpusă în unitățile corespunzătoare scării alese pentru funcția y .

g) Dacă pe un grafic se reprezintă modul de variație al unei mărimi fizice în funcție de altă mărime, pentru mai multe materiale atunci punctele experimentale trebuie indicate cu semne diferite. De obicei se folosesc semne ca: $\cdot$, $+$, $\times$, $\square$, $\circ$, $\odot$ etc.

3.4. SCĂRI FUNCȚIONALE

Așa cum s-a mai amintit, nu întotdeauna este posibil ca valorile obținute experimental să fie reprezentate grafic la scară liniară (sau omogenă). În astfel de situații trebuie ca mărimea x sau y , iar uneori ambele, să fie reprezentate pe axe gradate neomogen. Din aceste motive au fost introduse scări speciale care se numesc *scări funcționale*.

În principiu scările funcționale se construiesc în felul următor: presupunem că avem o dependență oarecare $y = f(x)$ și cunoaștem valorile funcției $y_0, y_1, y_2, \dots$ corespunzătoare valorilor argumentului $x_0, x_1, x_2, \dots$. Valorile funcției y se reprezintă pe o axă AB începînd cu un punct oarecare O

(fig. 3.17). Fiecare indicație a valorii funcției se notează nu prin valoarea funcției respective ci prin valoarea argumentului x corespunzător. Obținem astfel o scară funcțională gradată neomogen dar numerotarea segmentelor respective se face uniform ca în cazul scărilor omogene. Pentru a putea reprezenta valorile funcției y pe axă trebuie să alegem un segment de pe axă ca unitate de măsură pentru funcția y . Segmentul luat drept unitate pentru funcția y se numește modulul scării funcționale respective și îl notăm prin μ . Modulul scării se determină relativ simplu. Presupunem că valorile funcției sînt $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ și dorim să le reprezentăm pe o axă de lungime $l = N$ mm. Originea axei putînd fi arbitrară ne interesează numai diferența $y_n - y_0$. Modulul μ trebuie ales astfel încît pe distanța de N mm să se cuprindă această diferență adică:

$$\mu = \frac{N}{y_n - y_0}. \quad (3.9)$$

Acest raport poate fi un număr zecimal și cum nu este indicat să utilizăm fracțiuni de mm, se ia primul număr întreg mai mic decât cel obținut prin raportul (3.9). De aceea relația (3.9) se mai scrie sub forma

$$\mu \leq \frac{N}{y_n - y_0}. \quad (3.10)$$

Semnul egal corespunde cazului când acest raport este un număr întreg, iar semnul mai mic cazului când raportul este un număr zecimal.

În acest fel putem construi scări funcționale pentru orice fel de dependențe $y = f(x)$. Să luăm de exemplu

$$y = \sin x. \quad (3.11)$$

Luăm din tabele valorile $\sin x$ rotunjite la două zecimale (tabelul 3.3).

Tabelul 3.3

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
y	0,00	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1,00

Dacă aceste valori dorim să le reprezentăm pe o axă de lungime $l = 200$ mm, atunci

$$\mu = \frac{200}{1 - 0} = 200.$$

Deci 0,1 corespunde la 20 mm, iar 0,01 la 2 mm.

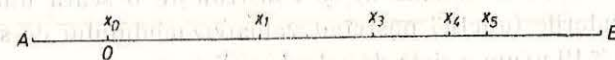


Fig. 3.17.

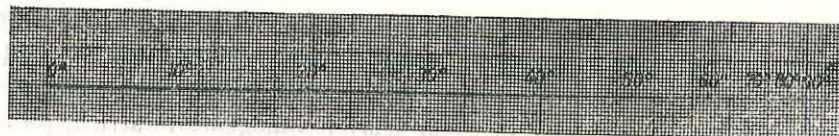


Fig. 3.18.

Scara funcțională pentru funcția (3.11) este reprezentată în figura 3.18. O scară funcțională astfel obținută ne permite să ne dăm seama de comportarea funcției pe un interval oarecare. În domeniile unde indicațiile pe scara funcțională sînt mai rare, funcția crește (sau scade) mai rapid decît în domeniile unde indicațiile pe scară sînt mai dese. Funcția pentru care se poate construi o scară funcțională trebuie să fie continuă și monotonă pe intervalul ales.

Ideea construirii scărilor funcționale stă la baza realizării diferitelor tipuri de rigle de calcul. Pentru efectuarea unor calcule rapide și destul de precise ne putem construi singuri „rigle” de calcul pentru diferite operații. De exemplu, dacă dorim să avem la îndemînă un grafic după care să calculăm funcția $y = \sin x$, atunci este recomandabil ca pe scara funcțională din figura 3.18 să includem și valorile $5^\circ, 15^\circ, \dots$. Păstrînd același modul al scării ca în figura 3.18 și luînd valorile corespunzătoare dintr-un tabel obținem scara funcțională din figurile 3.19, a.

În tabelul 3.4 sînt reprezentate datele indicate pe scara funcțională din figura 3.19, a.

Tabelul 3.4

x	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
y	0	0,09	0,17	0,26	0,34	0,42	0,5	0,57	0,64	0,71
y (mm)	0	18	34	52	68	84	100	114	128	142
x	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	
y	0,77	0,82	0,87	0,91	0,94	0,97	0,98	0,996	1,0	
y (mm)	154	164	174	182	188	194	196	199	200	

Paralel cu scara funcțională a) se construiește o scară uniformă b) pe care se indică valorile funcției păstrînd valoarea modului de scară stabilit. Astfel, în figura 3.19 avem o riglă de calcul pentru $y = \sin x$ sau $x = \arcsin y$. Între indicațiile dintre ambele scări se poate folosi interpolarea liniară.

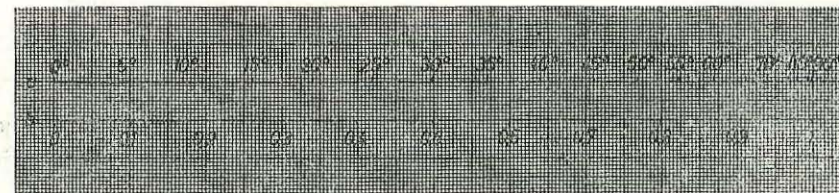


Fig. 3.19.

În practica actuală de prelucrare a datelor experimentale un rol deosebit îl are utilizarea scării logaritmice, adică a scării funcționale în care se reprezintă dependența :

$$y = \lg x. \quad (3.12)$$

În tabelul 3.5 sînt indicate valorile funcției y pentru $x = 1, 2, \dots, 10$

Tabelul 3.5

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,84	0,9	0,95	1

Este comod să reprezentăm aceste date pe un segment de dreaptă de lungime $l = 100$ mm. Modulul de scară în acest caz va fi $\mu = 10$ mm (fig. 3.20)-

Proprietatea deosebită a scării logaritmice constă în faptul că diviziunile pe această scară se repetă dacă în loc de intervalul 1—10 luăm intervalul 10—100 sau 100—1 000 etc. (tabelul 3.6 și 3.7).

Tabelul 3.6

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\lg x$	1	1,40	1,48	1,60	1,70	1,78	1,84	1,90	1,95	2

Tabelul 3.7

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$\lg x$	2	2,30	2,48	2,60	2,70	2,78	2,84	2,90	2,95	3

Vedem că în toate cele trei tabele diferența dintre valorile extreme ale funcției este aceeași (egală cu 1).

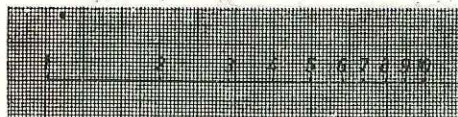


Fig. 3.20.

Deci în loc de cifrele 1, 2, ..., 10 în figura 3.20 putem scrie 10, 20, 30, ..., 100 etc.

Utilizarea scărilor logaritmice permite restrângerea axei pe care se reprezintă o mărime fizică oarecare.

Putem lua mai detaliat valorile de pe axa logaritmică. În acest scop folosim datele din tabelul 3.8 luate dintr-o tabelă obișnuită de logaritmi. Ca și în tabelele de mai sus efectuăm operația de rotunjire la două zecimale.

Tabelul 3.8

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,2	2,4	2,6	2,8
$\lg x$	0,08	0,15	0,20	0,26	0,34	0,38	0,41	0,45
x	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	
$\lg x$	0,54	0,65	0,74	0,81	0,88	0,93	0,98	

Reprezentând datele din tabelul 3.8 pe axa logaritmică păstrând datele din tabelul 3.5 și același modul de scară obținem figura 3.21.

În figura 3.22 este indicată o „riglă” de calcul pentru $\lg x$. Cu această riglă putem calcula logaritmul oricărui număr, cu oricâte zecimale. Interpolarea pe axa logaritmică între indicațiile respective se poate face liniar.

Astfel, $\lg 3,3 \approx 0,52$; $\lg 33 = \lg 3,3 + 1 = 1,52$... $\lg 0,33 = \lg 3,3 - 1 = -0,48$.

Pentru a ne da seama mai bine de avantajul scării logaritmice să revenim la dependența temperaturii de fierbere a apei de presiune. În tabelul 3.9

Tabelul 3.9

p mm col Hg	1,9	64	9,2	17,5	31,8	55,3	92,5
$t^{\circ}\text{C}$	-10	0	10	20	30	40	50
p mm col Hg	149,4	233,7	355,1	525,8	760	1 074,3	1 489,14
$t^{\circ}\text{C}$	60	70	80	90	100	110	129



Fig. 3.21.

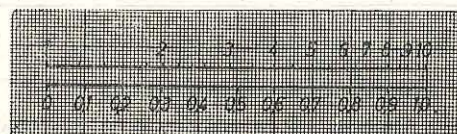


Fig. 3.22.

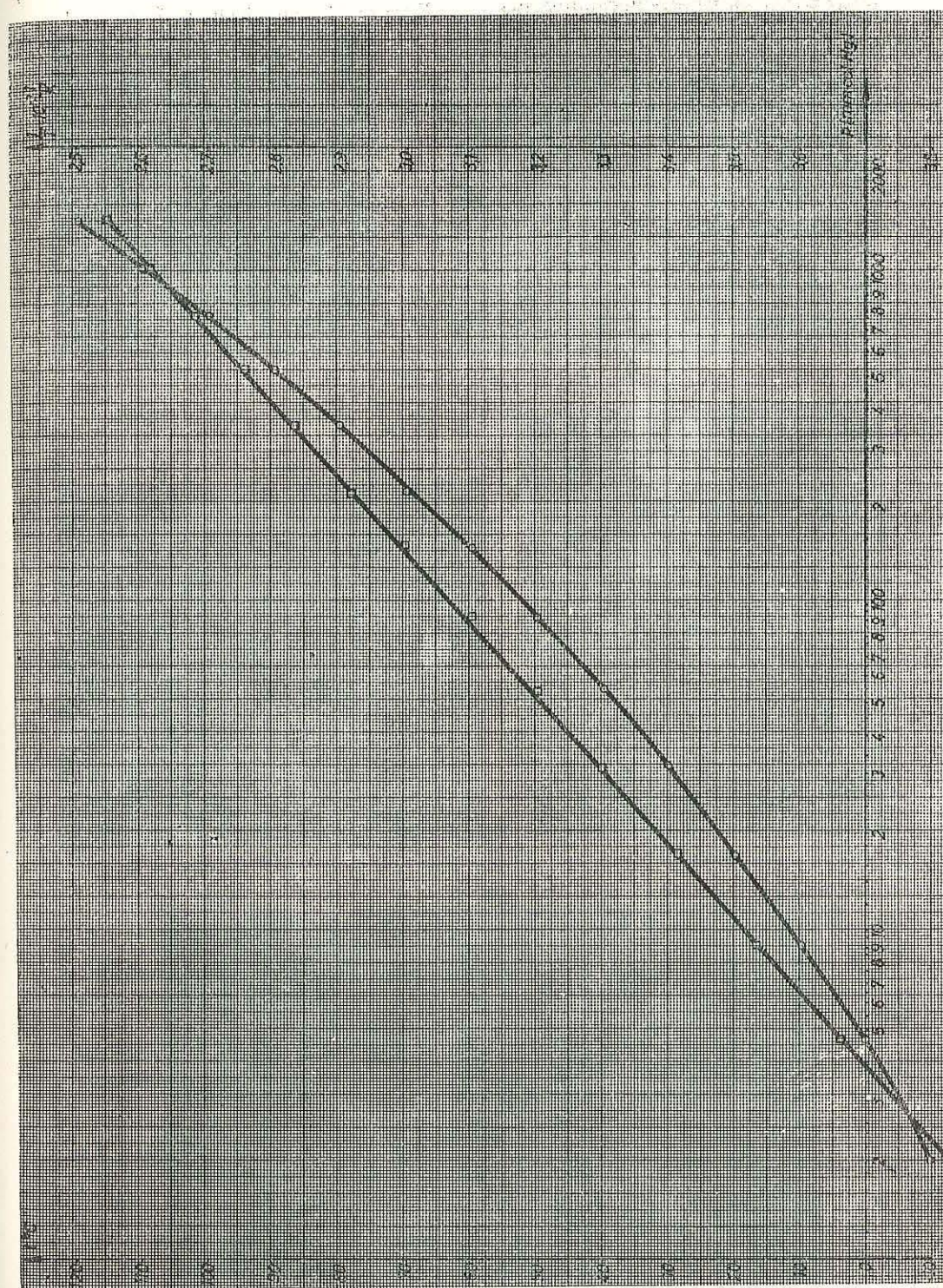


Fig. 3.23.

se indică valorile temperaturii de fierbere t pentru un domeniu larg de presiune.

Vedem că presiunea variază într-un domeniu foarte larg, adică raportul dintre presiunea maximă și presiunea minimă din tabelul 3.9 este ≈ 750 . Deci chiar dacă am considera 1 mm pe grafic corespunzător la 2 mm col Hg, tot am avea nevoie ca axa absciselor să fie de ≈ 75 cm. O asemenea reprezentare grafică este incomodă, de aceea se indică utilizarea scării logaritmice pentru abscisă. În figura 3.23 se indică dependența temperaturii $t^\circ\text{C}$ de presiune luându-se scara logaritmică pe axa absciselor. Punctele corespunzătoare se indică prin $\circ$. Pe același grafic se reprezintă dependența $1/T$ de presiune, punctele indicându-se prin semnul $\square$. Se vede că $1/T$ depinde practic liniar de $\lg p$. Desigur se găsesc hîrtii logaritmice trasate mult mai precis decît cea gradată manual în figura 3.22. Am dorit să subliniem faptul că la nevoie ne putem construi singuri scări funcționale pentru orice dependență $y = f(x)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

3.1. În figura P.3.1. dreptele (A), (B) și (C) reprezintă dependența de timp a vitezelor mobilelor A, B și C.

Se cere ca, pe baza acestui grafic, să se indice modul de mișcare pentru fiecare dintre cele trei mobile.

3.2. În tabelul P.3.1 se indică datele obținute pentru perioada unui pendul elastic în funcție de masa m a pendulului.

Tabelul P.3.1

$m(\text{g})$	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$T(\text{s})$	0,63	0,77	0,88	1,00	1,09	1,17	1,26	1,33	1,40

Se cere să se reprezinte grafic datele din tabelul P.3.1 și să se aleagă o scară funcțională corespunzătoare astfel încît reprezentarea grafică a perioadei T în funcție de masa m să fie liniară.

R. Reprezentarea grafică $T = f(m)$ este dată în figura P.3.2. Se vede că această dependență nu este liniară. După forma curbei, se poate presupune că perioada T depinde de $\sqrt{m}$. Va trebui deci să încercăm o scară funcțională de forma $T = f\sqrt{m}$.

Tabelul P.3.2

m	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\sqrt{m}$	3,16	3,87	4,47	5	5,48	5,92	6,32	6,71	7,07

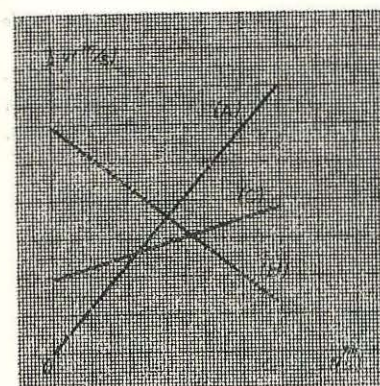


Fig. P. 3.1.

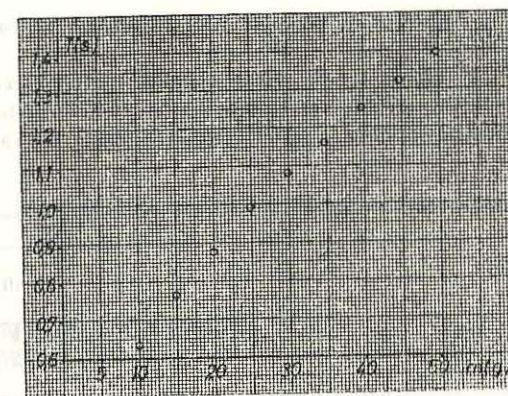


Fig. P. 3.2.

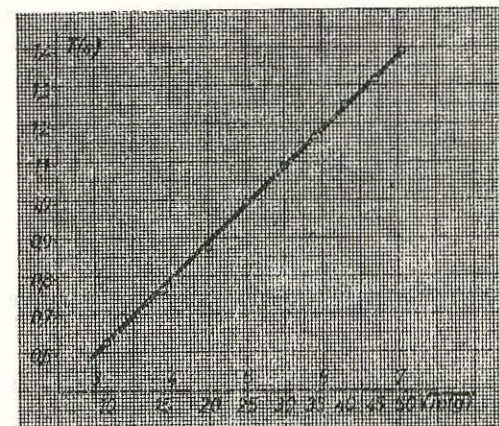


Fig. P. 3.3.

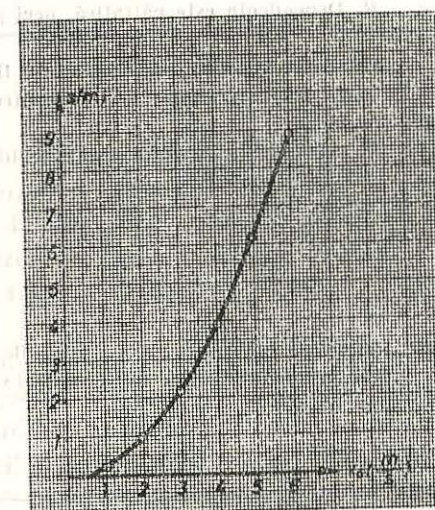


Fig. P. 3.4.

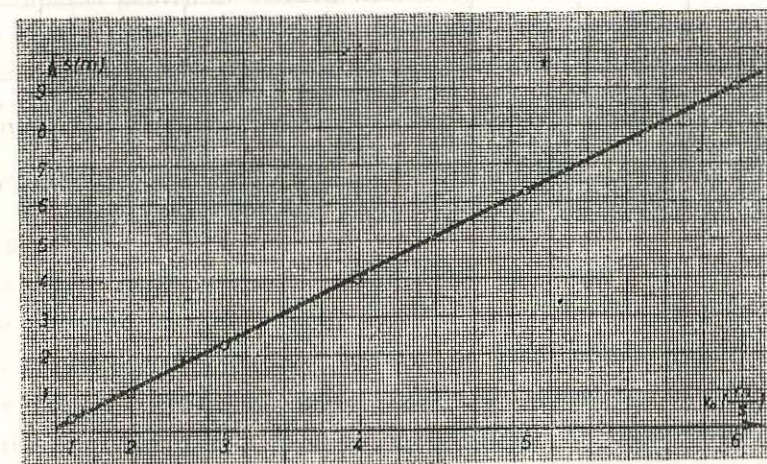


Fig. P. 3.5.

Din figura P.3.3. se vede că ipoteza dependenței perioadei pendulului elastic liniar de $\sqrt{m}$ este corectă.

3.3. În tabelul P.3.3 se indică spațiul parcurs de un corp în cădere, pe un plan înclinat. Se cere să se reprezinte grafic datele din tabelul P.3.3 și să se găsească scara funcțională pentru variabila t astfel încât dependența $s(t)$ să se reprezinte grafic, printr-o linie dreaptă.

Tabelul P.3.3

$t(s)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$s(m)$	0	0,064	0,256	0,577	1,025	1,602	2,307

R. Dependența este pătratică, deci pentru axa t trebuie aleasă o scară funcțională pătratică.

3.4. Să se specifice care trebuie să fie scara funcțională pentru volumul V al unui gaz ideal, astfel încât diagrama $p - V$, pentru procesele izoterme, să se obțină sub forma unei linii drepte.

R. Din ecuația de stare a gazelor ideale

$$pV = \nu RT$$

avem

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

Deci trebuie să indicăm pe axa V valorile $1/V$.

3.5. În tabelul P.3.4 se indică spațiul s parcurs de un mobil pe un plan orizontal în funcție de viteza inițială v_0 a mobilului.

Tabelul P.3.4

$v_0 (m/s)$	1	2	3	4	5	6
$s (m)$	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Să se reprezinte grafic dependența $s = s(v_0)$ și să se indice scara funcțională pentru viteza v_0 astfel încât graficul $s = s(v_0)$ să fie o linie dreaptă.

R. Din figura P.3.4 vedem că avem o dependență pătratică $s = s(v_0)$; deci, dacă luăm pentru v_0 o scară funcțională pătratică, obținem o linie dreaptă (fig. P.3.5).

4

REPREZENTAREA DATELOR PRIN CORELAȚII

Ne-am ocupat în capitolele 2 și 3 de reprezentarea datelor prin tabele și grafice. Ca un pas următor în acest proces de prelucrare a datelor experimentale îl constituie reprezentarea datelor prin corelații, adică pe baza datelor experimentale obținute, reprezentate prin tabele și grafice corespunzătoare, să exprimăm mărimea y în funcție de mărimea x printr-o expresie matematică, $y = f(x)$.

Studiind unele aspecte privind interpolarea am văzut că putem alege un polinom de un grad oarecare cu ajutorul căruia este posibilă reproducerea punctelor experimentale, cu o precizie suficientă. Metoda interpolării este foarte utilă pentru aflarea valorii funcției între punctele experimentale, dar de foarte multe ori polinomul de interpolare nu este corespunzător pentru a reprezenta datele experimentale respective prin formule. Stabilirea valorii funcției pentru diferite valori ale argumentului x se face experimental și deci aceste valori sînt afectate de erorile experimentale prezente, într-o măsură mai mare sau mai mică, în orice proces de măsurare. Dacă scriem pentru datele experimentale formula $y = f(x)$, unde $f(x)$ este polinomul de interpolare ce ia valorile $y_0, y_1, y_2, \dots$ în punctele $x_0, x_1, x_2, \dots$ atunci formula obținută conține, pe lângă dependența reală a funcției y de argumentul x , și erorile experimentale, care uneori pot distorsiona sensibil dependența $y = f(x)$.

În reprezentarea datelor prin formule nu trebuie deci să urmărim ca funcția obținută să aibă valorile funcției experimentale în punctele $x_0, x_1, x_2, \dots$, ci trebuie să găsim un polinom de grad minim posibil sau o altă funcție care să conțină un număr minim de parametri, astfel încât curba obținută prin calcul să treacă cît mai aproape de toate punctele experimentale. Desigur că deocamdată nu dispunem de criterii pentru a putea aprecia

dacă curba pe care o considerăm trece sau nu suficient de aproape de toate punctele experimentale. Această problemă se discută mai în detaliu în capitolul 7.

4.1. FORMULE RAȚIONALE ȘI FORMULE EMPIRICE

Efectuind măsurarea mărimii y pentru diferite valori ale mărimii x obținem, așa cum am mai amintit, perechile de valori experimentale

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n.$$

În procesul de reprezentare a acestor date printr-o formulă de forma :

$$y = f(a, b, c, \dots, x) \quad (4.1)$$

unde $a, b, c, \dots$ sînt parametri numerici, iar funcția f este o funcție rațională de argumentele indicate. Întîlnim două situații diferite :

a) Relația (4.1) este o formulă rațională de formă cunoscută.

b) Forma rațională (4.1) nu este cunoscută.

Cazul a) se întîlnește foarte des în practică. De exemplu dacă ne ocupăm de dependența de temperatură a rezistenței diferitelor metale sau aliaje, știm că pentru astfel de materiale rezistența depinde de temperatură prin formula :

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (4.2)$$

unde R_0 este rezistența la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$, iar α este coeficientul termic al rezistenței. Formula (4.2), conține doi parametri (R_0 și α); comparînd formulele (4.1) și (4.2) rezultă $a = R_0$, $b = \alpha$, $x = t$.

Deci parametrii care intră în această formulă au un sens fizic bine definit.

Formulele care reprezintă dependența între mărimi fizice și care conțin parametri cu sens fizic bine definit se numesc de obicei formule raționale.

Dacă forma funcției $f(a, b, c, \dots, x)$ este cunoscută, atunci problema reprezentării datelor experimentale printr-o formulă, se reduce la stabilirea parametrilor $a, b, c, \dots$. De exemplu, pentru a stabili dependența rezistenței unui metal oarecare, de temperatură, trebuie ca pe baza datelor experimentale :

$$t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

$$R_0, R_1, R_2, R_3, \dots, R_n,$$

să calculăm valorile parametrilor R_0 și α .

În cazul b) problema este mai complicată deoarece înainte de a încerca să stabilim parametrii ($a, b, c, \dots$) care intră în formula (4.1) trebuie să stabilim forma funcției $f(a, b, c, \dots, x)$.

Dacă formula de forma (4.1), care descrie ansamblul punctelor experimentale, conține parametri care nu au sens fizic definit, se numește formulă empirică. De obicei, formulele empirice nu au aceeași formă pentru toate valorile argumentului x . Aceste formule se stabilesc pentru diferite domenii restrînse ale argumentului x . Deci formulele empirice se stabilesc pe baza unor rezultate experimentale și trebuie să asigure, în limita erorilor experimentale, o concordanță acceptabilă cu datele obținute.

De exemplu, s-a stabilit, că în cazul mercurului, coeficientul β de dilatație volumică nu este constant ci crește o dată cu creșterea temperaturii. S-a arătat pe baza datelor experimentale, că dependența coeficientului β de temperatură, pentru mercur, poate fi scris sub forma :

$$\beta = a + bt \quad (4.3)$$

unde $a = 0,0001801$ și $b = 0,00000002$.

Formula (4.3) reprezintă un exemplu de formulă empirică, care, după cum s-a stabilit experimental, este corespunzătoare numai în domeniul de temperatură cuprins între 0°C și 100°C .

Pentru dependența căldurii specifice la presiune constantă de temperatură se folosește expresia :

$$c_p = a + bT + cT^2 + \dots \quad (4.4)$$

unde coeficienții a, b, c se determină pe cale empirică, în procesul de prelucrare a datelor experimentale. În tabelele care conțin astfel de coeficienți se specifică intervalul de temperatură pentru care sînt valabile valorile indicate.

Formulele empirice se stabilesc, de obicei, prin metoda încercărilor succesive. Un rol important în stabilirea unei forme anume pentru o formulă empirică îl joacă reprezentarea datelor experimentale prin grafice. Găsirea unei formule empirice adecvate este, de cele mai multe ori, o problemă extrem de complicată. De obicei se consideră că forma cea mai simplă pentru o formulă empirică ar fi un polinom de un grad oarecare. Dar de cele mai multe ori, gradul polinomului care ar putea aproxima datele experimentale este foarte mare și deci formula (4.1) trebuie să conțină un număr prea mare de parametri.

Deoarece stabilirea unei formule empirice nu se face pe baza unor criterii teoretice ci numai urmărindu-se un singur scop și anume ca formula respectivă să aproximeze cît mai bine datele experimentale, se întîmplă destul de des ca pentru o dependență între mărimi fizice să avem mai multe formule empirice.

De exemplu, în studiul gazelor reale avem mai multe ecuații empirice care reprezintă dependența între parametrii de stare p (presiunea), V (volumul) și T (temperatura). Amintim următoarele ecuații de stare:

a) ecuația Van der Waals (1873):

$$\left(p + \frac{a^2}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad (4.5)$$

b) ecuația Berthelot (1900):

$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT; \quad (4.6)$$

c) ecuația stabilită de Beattie și Bridgman (1927):

$$p = \frac{RT(1-C)}{V^2}(V+B) - \frac{A}{V^2}; \quad (4.7)$$

d) ecuația dată de Redlich și Kwong (1949):

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV(V+b)}. \quad (4.8)$$

Putem indica și alte exemple de formule empirice pentru gazul real. De exemplu, Bucalovici și Novikov au propus o ecuație de forma:

$$pV = RT \left(1 + \frac{B_1(T)}{V} + \frac{B_2(T)}{V^2} + \dots\right). \quad (4.9)$$

Vedem că avem un număr foarte mare de ecuații care descriu aproximativ comportarea gazelor reale, conținând doi sau trei parametri constanți sau dependenți de temperatură care se stabilesc experimental.

Am dat aceste exemple pentru a avea o imagine mai clară asupra multitudinilor de forme în care pot fi reprezentate diferitele ecuații empirice.

Deși de multe ori ecuațiile empirice sînt destul de aproximative, iar valorile parametrilor, și deseori chiar forma ecuației, variază de la un domeniu la altul, nu se poate să nu subliniem importanța deosebită a acestor ecuații în diferite domenii ale științei și tehnicii.

Anumite ecuații empirice, care descriu corect diferite fenomene fizice într-un domeniu oarecare sînt de multe ori rezultatul unei munci susținute, în diferite laboratoare din întreaga lume, desfășurate în perioade de zeci de ani sau chiar mai mult. În cazul formulelor (4.5)–(4.8) am indicat anii în care au fost obținute pentru a putea înțelege mai bine munca susținută și îndelungată care se depune pentru obținerea unor formule empirice corecte.

Multe dintre formulele utilizate de noi astăzi, și care se pot deduce teoretic, au avut într-o perioadă dată un caracter empiric. De fapt, în cele mai multe cazuri ecuațiile empirice preced în timp ecuațiile obținute pe cale teoretică. Aceste indicații succinte scot în evidență rolul experienței, a măsurării și prelucrării datelor experimentale, în procesul cunoașterii legilor obiective ale materiei.

Utilizarea pe scară largă a ecuațiilor empirice poate fi explicată prin două motive principale.

a) Formula analitică ce exprimă corect dependența între mărimile fizice studiate, nu este cunoscută și deci sîntem nevoiți să utilizăm formule empirice aproximative.

Așa cum am văzut, deși prima ecuație de stare empirică pentru gazele reale a fost stabilită acum peste 100 de ani, nu dispunem încă de o formulă corectă. Gazele reale avînd însă multe aplicații în diferite domenii, trebuie să efectuăm calculele necesare pe baza uneia din formulele empirice.

Exemplul cu gazele reale este ales întîmplător, putîndu-se da asemenea exemple din multe alte domenii.

b) Un alt motiv constă în faptul că, uneori, deși dependența între mărimile studiate este exprimată printr-o funcție analitică precisă, această funcție este atît de complicată încît se preferă efectuarea calculelor după formule aproximative.

De exemplu, deși formula (4.5) descrie mai corect comportarea gazelor, de cele mai multe ori se folosește, în calcule, formula gazelor ideale.

$$pV = RT.$$

4.2. ALEGEREA FORMEI ADECVATE PENTRU O FORMULĂ EMPIRICĂ

Așa cum am stabilit, în procesul de reprezentare a datelor prin formule se pune problema ca, pe baza perechilor de valori (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) obținute experimental, să se indice dependența (4.1) cea mai adecvată. În acest context cuvîntul adecvat înseamnă că ecuația empirică stabilită să aproximeze suficient de bine datele experimentale pe baza cărora a fost dedusă și în același timp, să rămînă valabilă și pentru aproximarea datelor similare obținute în alte experiențe. De aici rezultă că o ecuație empirică stabilită trebuie să aibă un caracter general. De exemplu, dacă se determină coeficienții a, b, c din formula (4.4) pentru o substanță într-un anumit interval de temperatură, atunci formula respectivă trebuie să poată fi folosită în orice calcul în care se cere căldura specifică c_p pentru o anumită temperatură cuprinsă în intervalul stabilit. Această ultimă cerință implică o serie de măsuri ce trebuie luate în scopul înlăturării erorilor experimentale și în special a erorilor sistematice ce pot fi introduse prin utilizarea necorespunzătoare a unor instalații. Sînt destul de dese cazurile cînd ecuații empirice sau valori pentru diferite mărimi fizice obținute în diferite laboratoare nu concordă între ele, iar analizele mai atente scot în evidență efecte instrumentale care conduc la obținerea unor rezultate experimentale eronate. Deoarece acest manual se ocupă numai de prelucrarea datelor experimentale, nu putem intra în probleme legate de tehnica măsurărilor și cerințele ce se impun pentru obținerea unor rezultate cît mai corecte. Subliniem însă că se constată destule discordanțe și datorită modului de prelucrare a datelor experimentale, cum ar fi de exemplu: interpolări sau extrapolări incorecte, neglijarea unor termeni sau utilizarea unor coeficienți numerici necorespunzători.

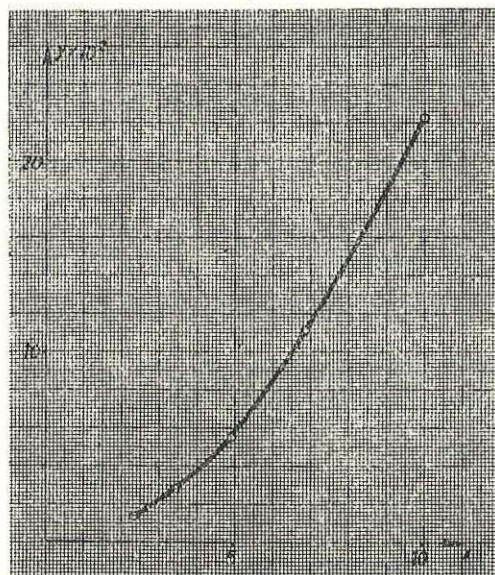


Fig. 4.1.

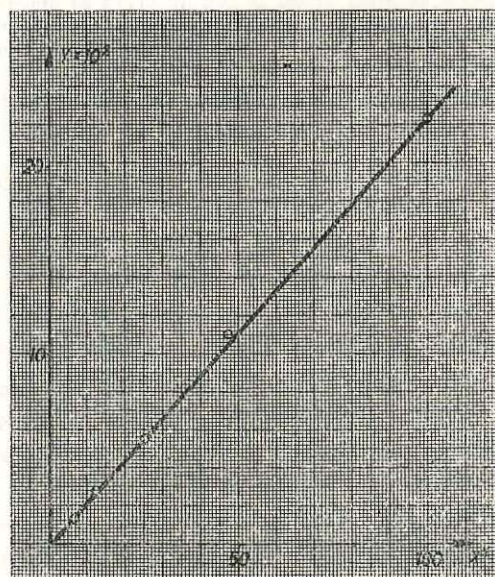


Fig. 4.2.

incît dependența respectivă să poată fi adusă la forma liniară.

Să considerăm câteva exemple.

a) În tabelul 4.1 avem dependența experimentală a mărimii y de mărimea x .

Metoda cea mai rapidă și suficient de comodă pentru alegerea formulei empirice adecvate pe baza datelor experimentale constă în reprezentarea grafică a datelor. Pe baza graficului obținut, putem trage o serie de concluzii orientative dar deosebit de utile. Astfel ne putem ușor da seama dacă curba experimentală este monotonă sau conține maxime, respectiv minime, sau puncte de inflexiune. De asemenea, observăm dacă un punct experimental oarecare are o poziție incertă, adică se abate foarte mult de la curba experimentală. În asemenea cazuri, dacă este posibil, se repetă măsurarea pentru punctul respectiv și eventual punctele vecine dacă repetarea măsurării nu este posibilă; se înlătură perechea respectivă de date experimentale. Situația cea mai simplă este în cazul când, pe baza datelor experimentale reprezentate grafic constatăm că mărimea y depinde liniar de mărimea x . În acest caz, formula empirică este de forma:

$$y = a + bx \quad (4.10)$$

Stabilind formula funcției empirice, rămâne să calculăm parametrii a și b .

Dacă însă dependența mărimii y de mărimea x nu este liniară atunci, pentru a ajunge la o formulă empirică

Tabelul 4.1.

x	2,4	3,50	5,00	6,89	10,00
y	0,0141	0,0281	0,0562	0,1125	0,2250
x^2	5,76	12,25	25,00	47,47	100,00

Reprezentarea grafică a datelor din tabelul 4.1 este indicată în figura 4.1. Din acest grafic deducem că y depinde de x sub forma unei parabole de forma

$$y = a + bx^2 \quad (4.11)$$

Pentru a ne convinge de faptul că forma (4.11) este corectă ar trebui să luăm pentru x o scară funcțională de forma $y = x^2$. Este mai simplu să încercăm reprezentarea grafică a mărimii y în funcție de x^2 . Valorile x^2 corespunzătoare sînt calculate în tabelul 4.1. Reprezentînd dependența $y = f(x^2)$ (fig. 4.2), vedem că obținem aproximativ o linie dreaptă. Putem considera că dreapta trece prin origine și atunci dependența ar fi de forma:

$$y = bx^2 \quad (4.12)$$

Deoarece nu putem stabili suficient de precis, din grafic, dacă dreapta trece sau nu prin originea coordonatelor, este mai prudent să rămînem la formula empirică de forma (4.11). Prin calcule concrete se va stabili dacă a este zero sau numai foarte mic.

b) În urma efectuării unui set de cinci măsurări au fost obținute datele din tabelul 4.2.

Tabelul 4.2

x	0,1	0,2	0,4	0,5	1
y	22	17	14,5	14	13
$1/x$	10	5	2,5	2	1

În figura 4.3 este reprezentată grafic dependența $y = f(x)$. Se constată că odată cu creșterea mărimii x , valorile pentru y scad. De aici deducem că este posibilă o formulă empirică de forma

$$y = a + \frac{b}{x} \quad (4.13)$$

pentru dependența dată prin reprezentarea grafică din figura 4.3. Pentru a ne convinge de valabilitatea acestei concluzii, trebuie să reprezentăm grafic dependența $y = f(1/x)$. Din figura 4.4 se vede că formula empirică (4.13) este corectă deoarece dependența $y = f(1/x)$ este liniară.

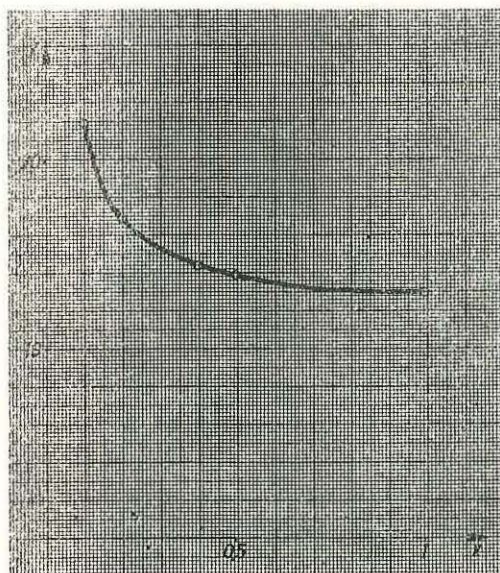


Fig. 4.3.

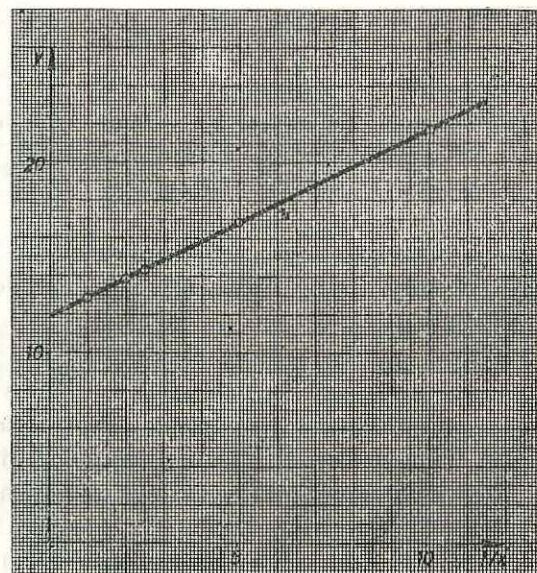


Fig. 4.4.

c) Să stabilim formula empirică pentru datele experimentale din tabelul 4.3.

Tabelul 4.3

x	1	2	4	6	8	10	12
y	6	14	36	66	108	150	204

În figura 4.5 sînt reprezentate grafic datele din tabelul 4.3. Se vede că obținem o curbă experimentală destul de apropiată de curba din figura 4.1. Am putea deci admite o formulă empirică de forma (4.11). Pentru a verifica dacă o asemenea formulă este valabilă trebuie să reprezentăm grafic dependența $y = f(x^2)$. Din figura 4.6 se vede încă că prin această reprezentare nu obținem o linie dreaptă. Putem considera că datele experimentale din tabelul 4.3 se reprezintă prin formula empirică

$$y = ax + bx^2 \quad (4.14)$$

Pentru verificarea acestei ipoteze, trebuie să reprezentăm grafic dependența

$$\frac{y}{x} = f(x) \quad (4.15)$$

Din figura 4.7 rezultă că această dependență este liniară, deci admiterea formulei empirice (4.14) pentru dependența din figura 4.5 este îndreptățită.

f) Să considerăm rezultatele experimentale din tabelul 4.4.

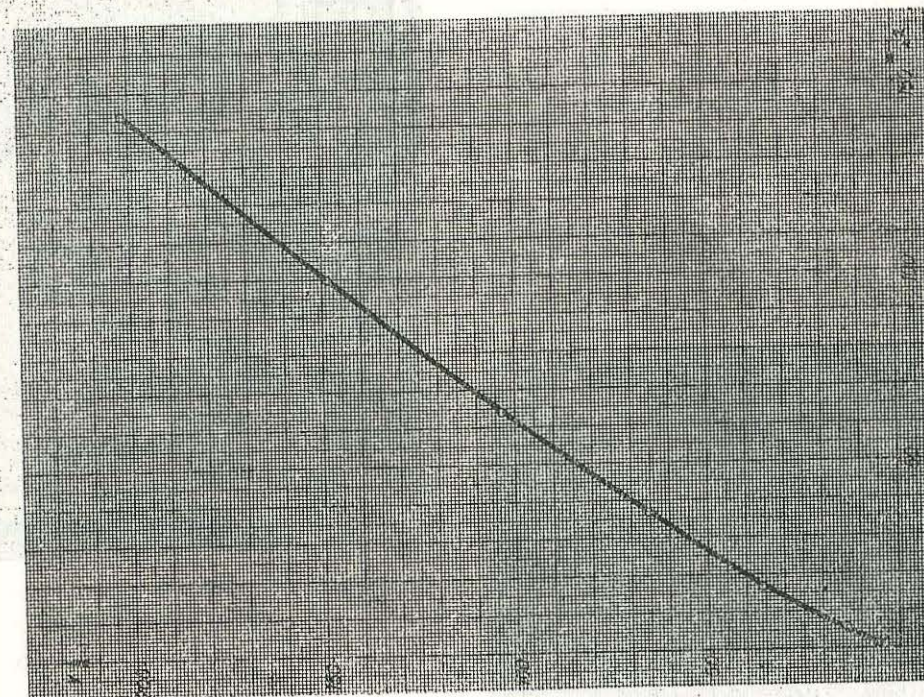


Fig. 4.6.

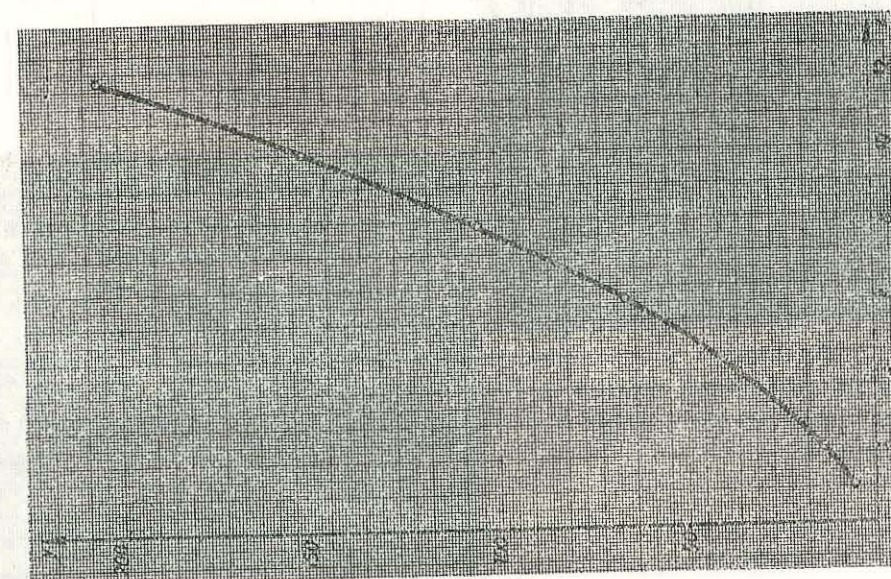


Fig. 4.5.

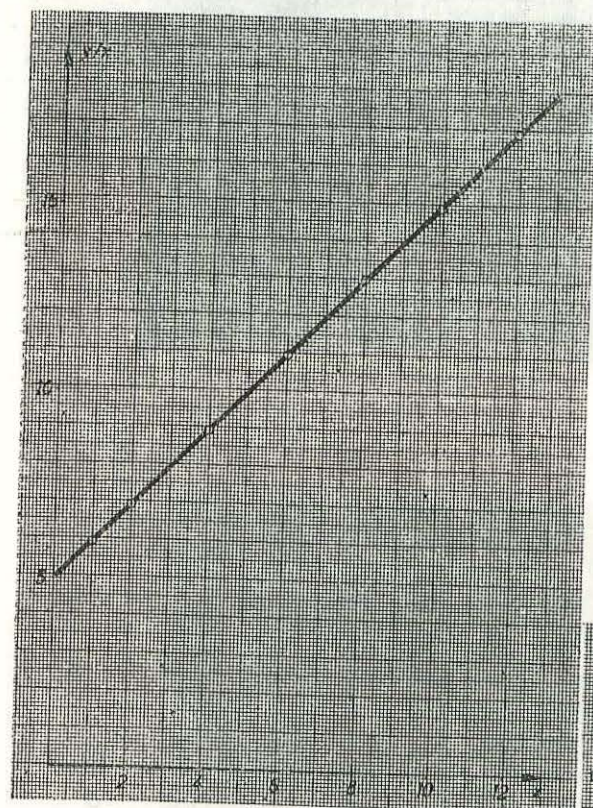


Fig. 4.7.

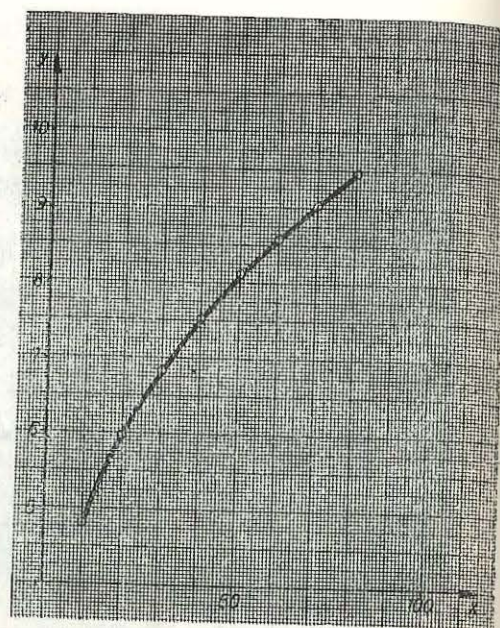


Fig. 4.8.

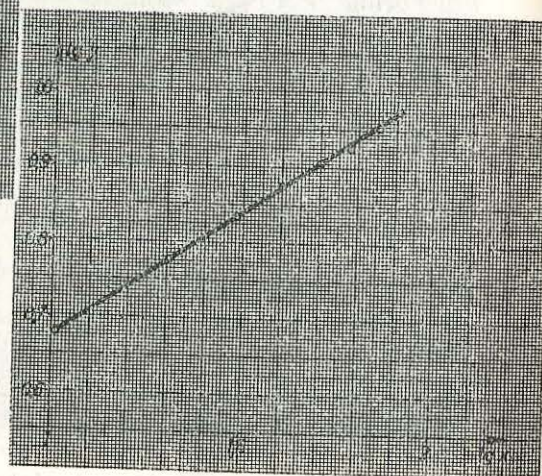


Fig. 4.9.

Tabelul 4.4

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	4,77	5,99	6,84	7,56	8,15	8,60	9,05	9,50

Din formula curbei experimentale (fig. 4.8) putem admite o formulă empirică pentru aproximarea datelor experimentale, de forma

$$y = ax^b \quad (4.16)$$

Dacă această formulă empirică este corectă, trebuie ca dependența

$$\lg y = \lg a + b \lg x \quad (4.17)$$

să reprezinte o linie dreaptă. Deci, pentru verificarea formulei (4.16) trebuie să reprezentăm grafic $\lg y$ în funcție de $\lg x$.

Dacă avem la dispoziție hîrtie logaritmică putem reprezenta direct $\lg y$ în funcție de $\lg x$. Nedispunînd de asemenea hîrtie calculăm (tabelul 4.5) valorile necesare. Din figura 4.9 vedem că formula empirică (4.16) este corectă.

Tabelul 4.5

$\lg x$	1	1,30	1,48	1,60	1,70	1,78	1,85	1,90
$\lg y$	0,68	0,78	0,84	0,88	0,91	0,93	0,96	0,98

Vedem deci că reprezentarea grafică a datelor experimentale este una din metodele de bază care ne permite alegerea unei formule empirice adecvate. Obținerea unei reprezentări grafice liniare ne conduce atît la obținerea formulei empirice corespunzătoare, cît și la posibilitatea de a calcula parametrii conținuți în formula respectivă.

Trebuie însă totdeauna să ținem seama că formula empirică stabilită poate să nu fie valabilă în afara domeniului datelor experimentale pe baza cărora a fost obținută. De exemplu din reprezentarea grafică (fig. 3.23) putem trage concluzia că $\lg p$ depinde liniar de $1/T$, adică avem formula empirică:

$$\lg p = a - b/T \quad (4.18)$$

Stadiul acestei dependențe a arătat că formula (4.18) este valabilă numai în domeniul de temperatură $0^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}$. Dacă luăm un domeniu mai larg de temperatură se observă abateri sensibile de la dependența liniară. De altfel și din figura (3.23) se vede că punctul experimental ce corespunde la $t = -10^\circ\text{C}$ nu se așază pe dreaptă.

4.3. EVALUAREA CONSTANTELOR. CONCORDANȚA UNEI FUNCȚII EMPIRICE CU UN ȘIR DE DATE

În acest paragraf vom indica unele metode de evaluare a parametrilor conținuți în diferite formule. Deoarece așa cum am văzut în paragraful precedent, pentru obținerea formei adecvate a unei formule empirice este recomandabil să se încerce o astfel de reprezentare grafică încât să se obțină o dependență liniară, vom încerca să evaluăm parametrii a și b (formula 4.10).

Dacă dispunem de $(n + 1)$ perechi de măsurători și considerăm că reprezentând grafic datele experimentale dependența $y = f(x)$ este liniară înseamnă că putem scrie relațiile :

$$\begin{aligned} a + bx_0 &= y_0, \\ a + bx_1 &= y_1, \\ &\dots \\ a + bx_n &= y_n \end{aligned} \quad (4.19)$$

Avem deci $(n + 1)$ ecuații cu două necunoscute. Desigur că, în cazul în care toate punctele experimentale s-ar afla pe dreapta trasată, ar fi suficient să luăm la întâmplare două din ecuațiile (4.19) și să calculăm parametrii a și b . Cum însă, de regulă, dreapta nu trece prin, ci printre punctele experimentale, problema evaluării parametrilor a și b nu este chiar atât de simplă, deoarece luând diferite perechi, de puncte, obținem valori diferite pentru parametrii a și b .

Se utilizează următoarele metode mai importante de evaluare a parametrilor a și b :

a) *Metoda grafică.* După reprezentarea grafică a datelor experimentale, se trasează dreapta printre punctele experimentale astfel ca numărul punctelor aflate de cele două părți ale dreptei să fie aproximativ același. De regulă trasarea dreptei se face cu o riglă transparentă pentru a ne putea convinge că dreapta trece printre puncte și nu pe lângă puncte. Dacă ne convingem că trasarea dreptei este aproximativ corectă, alegem două puncte arbitrare pe dreaptă și stabilim abscisele și respectiv ordonatele acestor puncte (fig. 4.10). Obținem astfel două ecuații cu două necunoscute :

$$\begin{aligned} a + bx' &= y' \\ a + bx'' &= y'' \end{aligned} \quad (4.20)$$

b) *Metoda perechilor de puncte.* Dacă dispunem de $n + 1$ puncte experimentale, alegem $(n + 1)/2$ perechi de puncte pentru care scriem sistemul

de ecuații ca în formula (4.20). Dacă $n + 1$ este un număr impar se omite un punct experimental. Este bine să se omită punctul cel mai îndepărtat de dreapta trasată printre punctele experimentale. De exemplu dacă avem 10 puncte experimentale, putem scrie cinci sisteme de ecuații :

$$\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_6 &= y_6 \\ &\dots \\ a + bx_5 &= y_5 \\ a + bx_{10} &= y_{10} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Prin rezolvarea acestor sisteme de două ecuații cu două necunoscute obținem cinci valori pentru parametrul a : a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 și cinci valori pentru parametrul b : b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 .

Media aritmetică a acestor valori se consideră valorile parametrilor a și b :

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \quad (4.22)$$

$$b = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{5}$$

c) *Metoda mediei.* În aplicarea acestei metode, se pleacă de la ideea că, datorită erorilor experimentale, chiar în cazul unei dependențe strict liniare a mărimii y de mărimea x , de regulă

$$y_i \neq a + bx_i \quad (4.23)$$

unde (x_i, y_i) sînt perechile de date experimentale.

Notăm cu Δy_i eroarea absolută :

$$\Delta y_i = y_i - a - bx_i \quad (4.24)$$

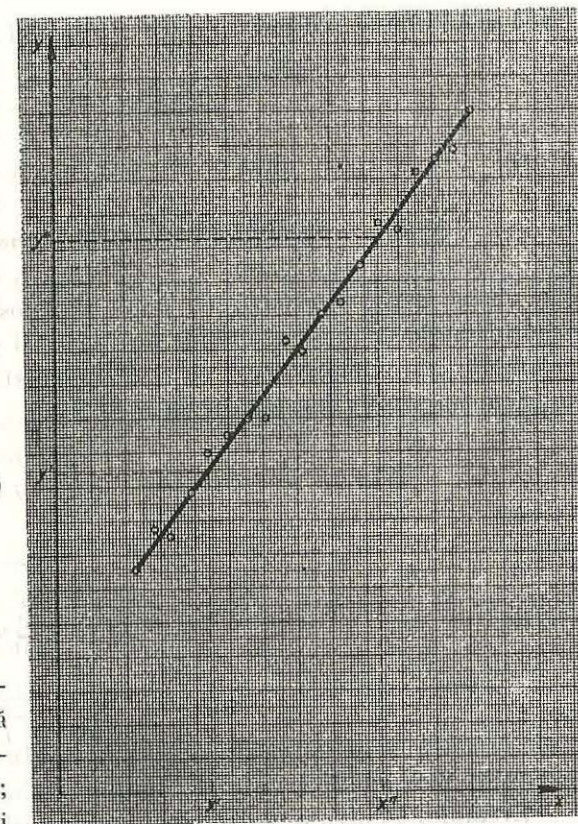


Fig. 4.10.

Dacă se admite că parametrii a și b sînt astfel stabiliți încît

$$\sum_{i=0}^n (\Delta y_i) = 0 \quad (4.25)$$

atunci

$$\sum_{i=0}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \text{ sau } \sum_{i=0}^n y_i - na - b \sum_{i=0}^n x_i = 0 \quad (4.26)$$

Am obține astfel o ecuație cu două necunoscute. Putem împărți punctele experimentale în două grupe, de la 0 la m și de la $m+1$ la n , unde m este un număr aproximativ egal cu $n/2$. În acest caz, în loc de ecuația (4.16) obținem un sistem de două ecuații:

$$\sum_{i=0}^m (y_i - a - bx_i) = 0; \quad \sum_{i=m+1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (4.27)$$

sau

$$ma + b \sum_{i=0}^m x_i = \sum_{i=0}^m y_i \quad (4.28)$$

$$(n-m)a + b \sum_{i=m+1}^n x_i = \sum_{i=m+1}^n y_i$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (4.28) aflăm parametrii a și b .

Exemplu. Pentru a determina parametrii a și b din formula empirică (4.16) trebuie să stabilim parametrii dreptei din figura 4.9.

Notăm $Y = \lg y$; $X = \lg x$; $A = \lg a$.

Pentru datele din tabelul 4.5 avem ecuația empirică

$$Y = A + bX.$$

Aplicînd metoda mediei și împărțind datele în două grupe de câte 4 măsuri, pe baza formulei (4.28), obținem:

$$4A + b \sum_{i=1}^4 X_i = \sum_{i=1}^4 Y_i$$

$$4A + b \sum_{i=5}^8 X_i = \sum_{i=5}^8 Y_i$$

Efectuînd calculele:

$$\sum_{i=1}^4 X_i = 5,38; \quad \sum_{i=5}^8 X_i = 7,23; \quad \sum_{i=1}^4 Y_i = 3,18; \quad \sum_{i=5}^8 Y_i = 3,78$$

Deci:

$$4A = 5,38 \quad b = 3,18; \quad 4A + 7,23 b = 3,78$$

De unde:

$$b = \frac{3,78 - 3,18}{7,23 - 5,38} = \frac{0,6}{1,85} = 0,32$$

$$A = \frac{1}{4} (3,18 - 0,32 \cdot 5,38) = 0,36$$

$$A = \lg a; \quad a = 10^A = 10^{0,36} = 2,29$$

Deci, datele experimentale din tabelul 4.4 pot fi exprimate prin formula empirică

$$y = 2,29x^{0,32} \quad (4.16')$$

În tabelul 4.6 se indică gradul de concordanță între valorile experimentale și cele calculate după formula (4.16').

Tabelul 4.6

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y_{exper}	4,77	5,99	6,84	7,56	8,15	8,60	9,05	9,50
y_{calc}	4,78	5,97	6,40	7,46	8,01	8,49	9,92	9,31

Din acest tabel se vede că abaterea valorii calculate de la valoarea experimentală crește o dată cu creșterea argumentului x . Putem crede că acest lucru se datorează unei erori de metodă. Se poate constata că această abatere se datorește unei mici neatenții. Valoarea funcției depinde sensibil de valoarea parametrului b . Valoarea obținută pentru b este:

$$b = 0,3243243$$

Dacă considerăm $b = 0,324$, obținem pentru $x = 80$, $y_{\text{calc}} = 9,47$, iar pentru $b = 0,3243$, $y_{\text{calc}} = 9,48$ pentru $x = 80$.

Deci este mai corect să scriem formula empirică sub forma

$$y = 2,29 \cdot x^{0,3243} \quad (4.16'')$$

Această formulă aproximează datele experimentale cu o eroare relativă de 0,2%, pe cînd cu formula (4.16') se ajunge la erori relative de 2%.

Să ne ocupăm de una din metodele de evaluare a parametrilor dacă ne convingem că datele experimentale pot fi approximate printr-o ecuație de forma:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (4.29)$$

În acest scop, putem pleca de la formula de interpolare (2.78)

$$x = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1) \quad (4.30)$$

Am considerat cazul cînd argumentul ia valori echidistante. Formula (4.29) este simplu să fie scrisă sub forma :

$$y = \left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} x_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} x_0 x_1 \right) + \left(\frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} x_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} x_1 \right) x + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} x^2. \quad (4.31)$$

Identificînd formulele (4.29) și (4.31) obținem :

$$a = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} x_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} x_0 x_1$$

$$b = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} (x_0 + x_1) \quad (4.32)$$

$$c = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Formula (4.30) se folosea pentru interpolarea parabolică între punctele x și y_1 , iar x_0 nu era fixat, ci putea lua orice valoare în funcție de punctul x în care dorim să aflăm funcția y prin interpolare.

În cazul utilizării formulei (4.32) pentru valoarea parametrilor a , b și c va trebui să înțelegem prin x_0 toate punctele experimentale $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Va trebui deci să calculăm parametrii a , b și c pentru prima pereche de valori a argumentului, apoi pentru punctul al doilea și al treilea etc. După obținerea unui set de valori :

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n, \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{matrix} \quad (4.33)$$

calculăm parametrii a , b și c ca medii ale valorilor obținute. Ca exemplu, să considerăm datele din tabelul 2.5.

În tabelul 4.7 sînt trecute datele experimentale și diferențele de ordinul întii și doi calculate. Se vede că $\Delta^2 s$, datorită unor erori experimentale, este numai aproximativ constant.

Din tabel se vede că pasul $h = (1/30) s$, iar valoarea argumentului t , pentru o măsurare oarecare i , este :

$$t_i = i \frac{1}{30} s = ih$$

Tabelul 4.7

$t, 1/30 s$	s, cm	Δs	$\Delta^2 s$
1	11,86	3,81	
2	15,67	4,93	1,12
3	20,60	6,09	1,16
4	26,69	7,02	0,93
5	33,71	8,22	1,10
6	41,93	9,20	0,98
7	51,13	10,36	1,16
8	61,49	11,41	1,05
9	72,90	12,54	1,13
10	85,44	13,64	1,10
11	99,08	14,69	1,05
12	113,77	15,77	1,08
13	129,54	16,94	1,17
14	146,48		

deci :

$$\frac{x_1}{h} = i; \frac{x_i \cdot x_{i+1}}{h^2} = \frac{ih(i+1)h^2}{h^2} = i(i+1)$$

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{h} = \frac{i + (i+1)}{h} = 2i + 1.$$

Deci :

$$a_i = s_i - i\Delta s_i + \frac{i(i+1)}{2} \Delta^2 s_i$$

$$b_i = \frac{s_i}{h} - (2i+1) \frac{\Delta^2 s_i}{2h} = \frac{1}{h} \left(\Delta s_i - \frac{2(i+1)}{2} \Delta^2 s_i \right)$$

$$c_i = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 s_i.$$

În aceste tabele trebuie să luăm toate valorile lui i de la 1 la 13 :

$$a_1 = 11,86 - 3,81 + 1,12 = 9,17.$$

$$a_2 = 15,67 - 2 \cdot 4,93 + 3 \cdot 1,16 = 15,67 - 9,86 + 3,48 = 9,29$$

$$a_3 = 20,60 - 3 \cdot 6,09 + 6 \cdot 0,93 = 20,60 - 18,27 + 5,58 = 7,91$$

$$a_4 = 26,69 - 4 \cdot 7,02 + 10 \cdot 1,1 = 26,69 - 28,08 + 11 = 9,61$$

$$a_5 = 33,71 - 5 \cdot 8,22 + 25 \cdot 0,98 = 33,71 - 41,1 + 24,75 = 7,31$$

$$a_6 = 41,93 - 6 \cdot 9,20 + 21 \cdot 1,16 = 41,93 - 55,2 + 24,36 = 11,09$$

$$a_7 = 51,31 - 7 \cdot 10,36 + 28 \cdot 1,05 = 51,13 - 72,52 + 29,4 = 8,01$$

$$a_8 = 61,49 - 8 \cdot 11,41 + 36 \cdot 1,13 = 61,49 - 91,28 + 40,68 = 10,89$$

$$a_9 = 72,90 - 9 \cdot 12,54 + 45 \cdot 1,10 = 72,90 - 112,86 + 49,5 = 9,54$$

$$a_{10} = 85,44 - 10 \cdot 13,64 + 55 \cdot 1,05 = 85,44 - 136,4 + 57,75 = 6,79$$

$$a_{11} = 99,8 - 11 \cdot 14,69 + 66 \cdot 1,08 = 99,08 - 161,59 + 71,28 = 8,77$$

$$a_{12} = 113,77 - 12 \cdot 15,77 + 78 \cdot 1,17 = 113,77 - 189,24 + 91,26 = 15,79$$

Deci :

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{12}}{12} = \frac{114,17}{12} = 9,51 \text{ cm.}$$

Trecem la calculul parametrului b :

$$h = \frac{1}{30} \text{ s, } \frac{1}{h} = 30 \text{ s}^{-1}$$

$$b_1 = 30(3,81 - 1,5 \cdot 1,12) = 63,9$$

$$b_2 = 30(4,93 - 2,5 \cdot 1,16) = 60,9$$

$$b_3 = 30(6,09 - 3,5 \cdot 0,93) = 85,05$$

$$b_4 = 30(7,02 - 4,5 \cdot 1,10) = 62,1$$

$$b_5 = 30(8,22 - 5,5 \cdot 0,98) = 84,9$$

$$b_6 = 30(9,20 - 6,5 \cdot 1,16) = 49,8$$

$$b_7 = 30(10,36 - 7,5 \cdot 1,05) = 74,55$$

$$b_8 = 30(11,41 - 8,5 \cdot 1,13) = 54,15$$

$$b_9 = 30(12,54 - 9,5 \cdot 1,10) = 62,7$$

$$b_{10} = 30(13,64 - 10,5 \cdot 1,05) = 78,45$$

$$b_{11} = 30(14,69 - 11,5 \cdot 1,08) = 68,1$$

$$b_{12} = 30(15,77 - 12,5 \cdot 1,17) = 34,35$$

$$b = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{12}}{12} = 64,19.$$

Deoarece parametrul c depinde numai de diferența de ordinul doi, putem scrie :

$$c = \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{\Delta^2 s_1 + \Delta^2 s_2 + \dots + \Delta^2 s_{12}}{12} = \frac{900}{2} \cdot 1,086 = \frac{977,25}{2} = 488,63 \text{ cm/s}^2.$$

Pe baza datelor din tabelul 4,7 obținem, pentru s , formula :

$$s = 9,51 + 64,91 t + 488,63 t^2 \text{ (cm)}, \quad (4.34)$$

Comparînd cu cunoscuta formulă a căderii libere

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (4.34)$$

afăm : $s_0 = 9,51 \text{ cm}$; $v_0 = 64,91 \text{ cm/s} = 0,649 \text{ m/s}$;

$$g = 2c = 9,77 \text{ m/s}^2.$$

Asupra criteriilor de concordanță a unei funcții empirice cu un șir de date obținute experimental se va discuta mai detaliat în capitolul 7.

Putem impune unele criterii ca :

a) Eroarea absolută într-un punct experimental oarecare i să nu depășească o valoare Δy_i stabilită. Pentru dependența liniară

$$y_i - a - bx_i \leq \Delta y_i \quad (4.35)$$

b) Deoarece, așa cum am arătat, ne interesează ca dependența $y = f(x)$ să aproximeze cât mai bine toate punctele experimentale, adică curba obținută să treacă cât mai corect printre punctele experimentale, putem impune ca criteriu condiția :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = \min. \quad (4.36)$$

c) Vom vedea în capitolul 7 că cel mai indicat criteriu este ca suma pătratelor diferențelor $(y_i - a - bx_i)$ să fie minimă :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = \min.$$

Problema stabilirii corecte a formei ecuației empirice și a valorilor parametrilor conținuți în ecuația respectivă este extrem de complicată. Pe baza metodelor date, putem însă stabili forma ecuației empirice și calcula valorile parametrilor cu o precizie suficient de bună pentru aplicațiile practice.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

4.1. Pe baza datelor din tabelul P.3.1, să se calculeze parametrii a și b ai dreptei $T = f(\sqrt{m})$ și constanta elastică a arcului utilizat în experiența respectivă, folosind metoda mediei.

R. Admitem că avem o dependență de forma :

$$T = a + b\sqrt{m}.$$

Din primele 5 măsurări avem :

$$5a + 21,98b = 4,37,$$

iar din ultimele 4 măsurări

$$4a + 26,02b = 5,16$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4,37 & 21,98 \\ 5,16 & 26,02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 21,98 \\ 4 & 26,02 \end{vmatrix}} = \frac{4,37 \cdot 26,02 - 5 \cdot 21,98}{5 \cdot 26,02 - 4 \cdot 21,98} =$$

$$= \frac{113,707 - 110,900}{130,1 - 87,92} = \frac{2,807}{42,18} = 0,0665 \text{ s.}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4,37 \\ 4 & 5,16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 21,98 \\ 4 & 26,02 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 5,16 - 4 \cdot 4,37}{5 \cdot 26,02 - 4 \cdot 21,98} = \frac{8,32}{42,18} = 0,197.$$

Pentru parametrul a s-a obținut o valoare foarte mică, adică mai mică decât eroarea absolută 0,01 s care se comite prin măsurarea perioadei T , de aceea putem considera $a \approx 0$.

Deci

$$T = 0,197\sqrt{m}.$$

Știm că pentru perioada pendulului elastic avem formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

În această formulă, pentru a păstra dimensiunile, trebuie să luăm masa m în kg, iar k în N/m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(g) \cdot 10^{-3}}{k}} = 2\pi \cdot \frac{0,0316}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m(g)} = \frac{0,198}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m(g)}.$$

Deci,

$$\frac{0,198}{\sqrt{k}} = 0,197; \sqrt{k} = \frac{0,198}{0,197} = 1,005$$

$$k = 1,003 \text{ N/m.}$$

Deoarece mărimile măsurate, masa m și perioada T sînt date numai cu două, respectiv trei cifre, trebuie să scriem :

$$k = 1 \text{ N/m.}$$

4.2. Știind că pentru spațiul maxim, parcurs de un corp pe plan orizontal, cu viteza inițială v_0 avem formula :

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (1)$$

Să se calculeze coeficientul de frecare μ pe baza datelor din tabelul P.34 (problema 3.5), folosind metoda grafică (fig. P.3.5).

R. Putem considera punctul $v_{04} = 4 \text{ m/s}$ pentru care spațiul $s_4 = 4 \text{ m}$. Deoarece dreapta din figura P.3.5 trece prin originea coordonatelor, rezultă dependența :

$$s = b \cdot v_0^2$$

$$b = \frac{s_4}{v_{04}^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ (m}^{-1}\text{s}^2\text{)}$$

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \text{ (m}^{-1}\text{s}^2\text{)} a = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4} \text{ s}^2 \text{ m}} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\mu = \frac{a}{g} \approx 0,2.$$

4.3. Măsurările privind dependența coeficientului de frecare, într-un lagăr de mașină, de temperatură au condus la datele din tabelul P.4.1.

Tabelul P.4.1

$t, ^\circ\text{C}$	60	70	80	90	100	110	120
μ	0,0148	0,0124	0,0102	0,0085	0,0074	0,0059	0,0051

Se cere să se stabilească formula care indică dependența coeficientului de frecare, de temperatura t .

R. Dacă se reprezintă grafic

$$\ln \mu = f(t, ^\circ\text{C}),$$

se obține o linie dreaptă

$$\ln \mu = a + bt.$$

Pe baza datelor din tabelul P.4.5 se obține :

$$a = 0,043 \text{ și } b = -0,018.$$

Cu aceste date

$$\mu = ae^{bt} = 0,043e^{-0,018t}.$$

4.4. În tabelul P.4.2 este dată dependența vitezei v a electronilor de tensiunea de accelerare U_0 .

Tabelul P.4.2

$U_0(\text{V})$	100	200	300	400	500	600
$v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$	$5,9 \cdot 10^6$	$81 \cdot 10^6$	$10,3 \cdot 10^6$	$11,8 \cdot 10^6$	$13,3 \cdot 10^6$	$14,5 \cdot 10^6$

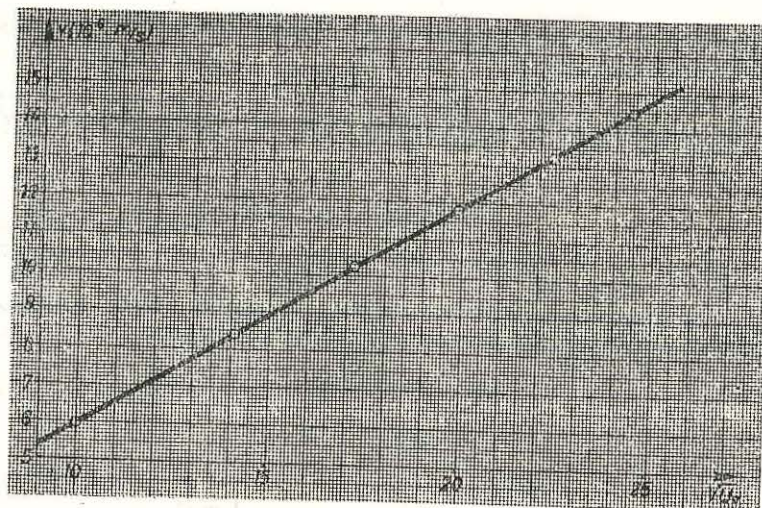


Fig. P. 4.1.

Se cere ca, pe baza datelor din acest tabel, să se calculeze sarcina specifică a electronului.
R. Din figura P.4.1 rezultă că viteza v a electronilor depinde liniar de $\sqrt{U_0}$.

$$v = b\sqrt{U_0}.$$

Putem calcula valorile pentru b folosind perechile de puncte experimentale:

$$b = \frac{v}{\sqrt{U_0}};$$

$$b_1 = \frac{5,9 \cdot 10^6}{\sqrt{100}} = 5,9 \cdot 10^5$$

$$b_2 = \frac{8,4 \cdot 10^6}{\sqrt{200}} = 5,96 \cdot 10^5$$

$$b_3 = \frac{10,3 \cdot 10^6}{\sqrt{300}} = 5,95 \cdot 10^5$$

$$b_4 = \frac{11,8 \cdot 10^6}{\sqrt{400}} = 5,9 \cdot 10^5$$

$$b_5 = \frac{13,3 \cdot 10^6}{\sqrt{500}} = 5,95 \cdot 10^5$$

$$b_6 = \frac{14,5 \cdot 10^6}{\sqrt{600}} = 5,93 \cdot 10^5$$

$$b = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{6} = 5,93 \cdot 10^5.$$

Știm că:

$$b = \sqrt{\frac{2e}{m}}, \text{ de unde } \frac{e}{m} = \frac{b^2}{2} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg.}$$

4.5. Măsurindu-se numărul dezintegrărilor, pe minut, ale unei surse radioactive de fosfor -32 se obțin datele din tabelul P.4.3.

Tabelul P.4.3

t (h)	0	50	100	200	300	400
N (dezint/minut)	10^5	90 480	81 870	66 890	51 720	44 740

Să se calculeze constanta dezintegrării radioactive λ și timpul de înjumătățire T pentru fosfor -32 .

R. În tabelul P.4.4 se indică dependența de timp a valorii $\ln N$.

Tabelul P.4.4

t (h)	0	50	100	200	300	400
$\ln N$	11,513	11,413	11,313	11,110	10,910	10,709

Din figura P.4.2 vedem că $\ln N$ depinde liniar de timpul t .

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

Deci

$$\lambda = \frac{\ln N_0 - \ln N}{t}$$

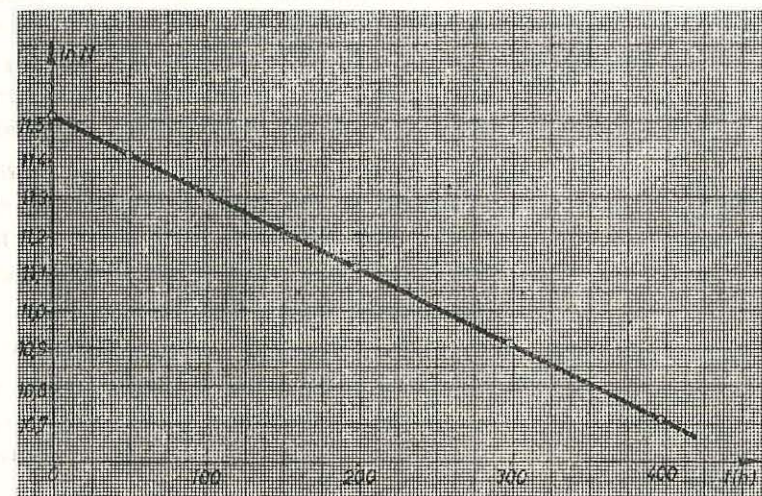


Fig. P. 4.2.

obținem cinci valori pentru λ

$$\lambda_1 = \frac{0,1}{50} = 2 \cdot 10^{-3}; \lambda_2 = \frac{0,2}{100} = 2 \cdot 10^{-3}; \lambda_3 = \frac{0,403}{200} = 2,015 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda_4 = \frac{0,603}{300} = 2,01 \cdot 10^{-3}; \lambda_5 = \frac{0,804}{400} = 2,01 \cdot 10^{-3}$$

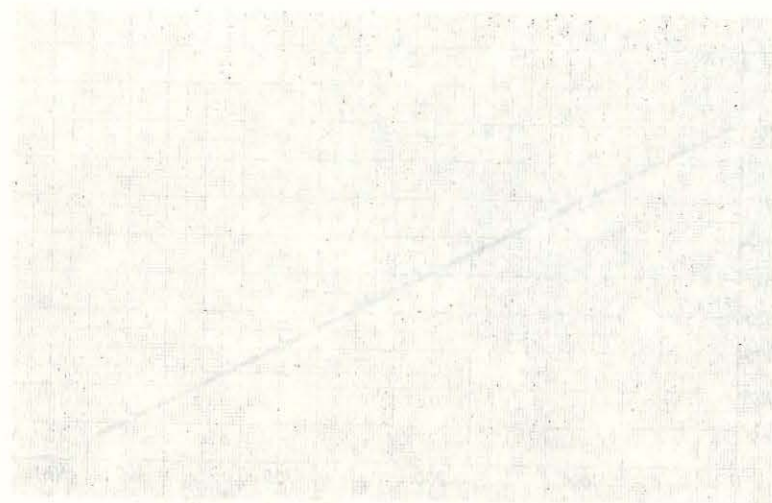
$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5}{5} = 2,007 \cdot 10^{-3} \text{ 1/h.}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{2,007} \cdot 10^3 = 345,3 \text{ h}$$

sau

$$T = 14,4 \text{ zile.}$$

100	100	100	100	100	100	100
0,1	0,2	0,403	0,603	0,804	0,804	0,804



5

METODE ȘI MIJLOACE DE MĂSURARE

În capitolul 1 am arătat că prin măsurarea unei mărimi fizice oarecare înțelegem compararea mărimii respective cu o altă mărime de aceeași natură cu prima, adoptată ca unitate de măsură. Cu ajutorul măsurărilor putem stabili valorile diferitelor mărimi fizice precum și legile ce guvernează diferite fenomene. Așa de exemplu legea lui Coulomb, legea lui Ohm, legea Boyle-Mariotte etc., au fost obținute în urma efectuării unui număr de experimente corespunzătoare.

Orice activitate experimentală constă din două etape succesive și anume:

- obținerea rezultatelor experimentale;
- prelucrarea datelor obținute experimental.

Aceste două etape sînt absolut necesare, deoarece așa cum vom vedea mai jos orice măsurare este afectată de erori experimentale și din punct de vedere practic este important să știm nu numai valoarea unei mărimi fizice obținută într-un experiment oarecare, ci și eroarea în valoarea respectivă, adică între ce limite poate fi cuprinsă această valoare.

Fizica, fiind, prin conținutul său o știință experimentală, rezultatele obținute în procese de măsurare au un rol fundamental în stabilirea ideilor de bază ale fizicii. Prin realizarea unui experiment de fizică se asigură posibilitatea atingerii mai multor obiective, printre care:

- observarea directă a unor fenomene fizice;
- familiarizarea cu aparatele folosite. Cunoașterea principiilor de funcționare a aparatelor și înțelegerea posibilităților de utilizare ale acestora în diferite experimente, reprezintă elemente esențiale în pregătirea unui experimentator;
- însușirea diferitelor metodologii de realizare a experimentelor. Este necesar să se realizeze o astfel de instalație experimentală încît măsurările

să poată fi efectuate cu o precizie optimă, fiind posibilă înlăturarea sau cel puțin cunoașterea diferiților factori ce pot influența rezultatele măsurării respective.

Înainte de efectuarea unui experiment este necesar să ne asigurăm că instalația realizată lucrează în regim tehnic corespunzător. În acest sens se măsoară unele caracteristici la probe cu proprietăți cunoscute. De exemplu dacă dorim să măsurăm coeficientul termic de variație a rezistivității pentru o substanță nou obținută va trebui mai întâi să ne asigurăm că prin măsurările efectuate în cazul unui material cunoscut obținem valoarea coeficientului termic de variație a rezistivității, dată în tabele.

Așa cum am văzut în capitolul 2 precizia rezultatelor obținute este determinată de precizia măsurării mărimilor ce intră în calcul și nu de precizia efectuării calculelor.

Aceasta impune o atentă evaluare a preciziei datelor primare (obținute direct din experiment) și aprecierea cifrelor semnificative corecte ce pot fi obținute prin calcul.

5.1. METODE DE MĂSURARE

Scopul oricărei măsurări este determinarea, cu o precizie cât mai mare, a valorii mărimii măsurate. De obicei, mărimea fizică măsurată, se numește *măsurand*.

În aprecierea corectitudinii unei măsurări trebuie să ținem seama de o serie de factori cum ar fi:

- metodele de măsurare adoptate;
- mijloacele de măsurare utilizate;
- condițiile în care se efectuează măsurarea, precum și
- pregătirea profesională, aptitudinile și atenția experimentatorului.

Procedeele raționale de executare a operațiilor de măsurare reprezintă metodele de măsurare. Toate metodele de măsurare se bazează pe un fenomen fizic care determină *principiul de măsurare*. De exemplu, măsurarea forțelor cu dinamometrele, resorturi elastice prevăzute cu rigle pentru măsurarea alungirilor, se bazează pe faptul că alungirea arcului este proporțională cu forța aplicată. De asemenea dilatarea corpurilor este un fenomen fizic care poate constitui unul din principiile de măsurare a temperaturii. Trebuie însă subliniat că pe lângă stabilirea fenomenului fizic, pe baza căruia pot fi efectuate unele măsurări, este necesar să se stabilească corpul sau materialul care corespunde, cel mai bine, cerințelor impuse de condițiile măsurării. De exemplu, dintre termometrele de sticlă cu lichid cele mai răspândite sînt termometrele cu mercur. Aceasta deoarece mercurul prezintă unele calități deosebite ca:

- nu udă sticla;
- se obține ușor sub formă pură, din punct de vedere chimic;

— rămîne în stare lichidă, la presiunea normală, într-un interval larg de temperatură (de la $-38,6$ la $+356,7^{\circ}\text{C}$);

— coeficientul de dilatație termică variază foarte puțin cu temperatura ceea ce permite ca scara termometrului să rămînă aproape liniară pînă la 200°C ;

— căldura specifică a mercurului este relativ mică (138 J/kg grad , față de 2510 J/kg grad pentru spirt și 4180 J/kg grad pentru apă). Din această cauză inerția termometrelor cu mercur este mică.

Metodele de măsurare pot fi clasificate după mai multe criterii. Din punct de vedere al modului de obținere a valorii măsurate, deosebim:

- metode de măsurare directă;
- metode de măsurare indirectă;
- metode de măsurare combinată.

a) *Metoda de măsurare directă* reprezintă metoda de măsurare prin care valoarea măsurată a unei mărimi fizice se obține direct, fără a mai fi nevoie de calcule suplimentare, bazate pe dependența funcțională a mărimii măsurate de alte mărimi fizice. De exemplu, măsurarea temperaturii cu ajutorul unui termometru este o metodă de măsurare directă. De asemenea, prin utilizarea unui aparat de măsură ca voltmetru, ampermetru etc. se efectuează măsurări directe.

În cazul măsurărilor directe se folosesc relații de forma:

$$x = N \cdot u, \quad (5.1)$$

unde x este valoarea măsurată a mărimii fizice, N este numărul de diviziuni pe scala aparatului folosit, iar u este valoarea unei diviziuni. Dacă măsurăm, de exemplu, rezistența unui rezistor, cu ajutorul unui ohmmetru care are 100 de diviziuni, iar întreaga scală corespunde la $1 \text{ k}\Omega$, rezultă că:

$$u = \frac{10^3}{100} = 10 \text{ } \Omega.$$

În cazul cînd acul ohmmetrului indică $N = 25$ de diviziuni înseamnă că rezistorul măsurat are rezistența $= R \cdot 25 \cdot 10 = 250 \text{ } \Omega$.

b) *Metoda de măsurare indirectă* reprezintă metoda de măsurare prin care se determină valoarea unei mărimi fizice pe baza măsurărilor efectuate prin metoda de măsurare directă asupra altor mărimi fizice, care sînt legate de mărimea de măsurat printr-o relație cunoscută. Deci în cazul utilizării metodelor de măsurare indirectă, mărimea fizică ce ne interesează se obține în urma măsurării concomitente, prin metoda de măsurare directă, a două sau mai multe mărimi fizice. Dacă vrem să măsurăm valoarea unei mărimi fizice Z atunci:

$$Z = f(N_1, N_2 \dots u_1, u_2 \dots), \quad (5.2)$$

unde $N_1, N_2 \dots$ sînt rezultatele măsurărilor directe, iar $u_1, u_2 \dots$ reprezintă valorile unei diviziuni pentru aparatele utilizate. De exemplu, rezistența R

a unui rezistor poate fi măsurată și prin măsurarea directă a tensiunii U și a intensității I a curentului electric prin rezistor, utilizând un ampermătru, un voltmetru și o sursă de tensiune electromotoare. În acest caz funcția f din relația (5.2) reprezintă legea lui Ohm.

c) *Metodele de măsurare combinate* sînt metodele prin care, determinarea valorii unei mărimi fizice, se face printr-o serie de măsurări ale aceleiași mărimi fizice sau ale cîtorva mărimi fizice de aceeași natură. Măsurările se deosebesc între ele prin faptul că se execută în alte condiții sau în altă combinație a mărimilor în cauză, valoarea mărimii fizice măsurate obținîndu-se prin rezolvarea unor ecuații.

De exemplu, putem obține densitatea unui corp solid, de volum V necunoscut, dacă măsurăm greutatea corpului, aflat odată în aer, iar altă dată în apă. Fie G_1 greutatea corpului cînd acesta se află în aer, iar G_2 greutatea aceluiași corp cînd se află în apă. Neglijînd densitatea aerului și notînd cu ρ densitatea corpului, iar cu ρ_a densitatea apei, avem :

$$\begin{aligned} V\rho g &= G_1, \\ V(\rho - \rho_a)g &= G_2, \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{\rho}{\rho - \rho_a} = \frac{G_1}{G_2}$$

sau

$$\rho = \frac{G_1}{G_1 - G_2} \rho_a. \quad (5.3)$$

Deci în acest caz se măsoară aceeași mărime fizică și anume greutatea corpului, dar în condiții diferite. Densitatea ρ a corpului se obține prin rezolvarea ecuațiilor care reflectă condițiile fiecărei măsurări.

Metodele de măsurare directă se împart la rîndul lor în :

— *metode de măsurare prin comparare* care se bazează pe compararea valorii mărimii fizice ce urmează a fi măsurată cu o valoare cunoscută a unei mărimi fizice de aceeași natură cu măsurandul. De exemplu, măsurarea volumului unui lichid cu o măsură de capacitate ;

— *metode de măsurare prin substituție* reprezintă metodele de măsurare în care după stabilirea efectului produs de măsurand (de exemplu devierea care să producă același efect. Aceste metode pot fi utilizate, de exemplu, la măsurarea rezistenței electrice a unui rezistor. Dacă se stabilește indicația aparatului de măsură, cînd în circuit se află rezistorul de măsurat, se înlocuiește rezistorul de măsurat cu un alt rezistor, cu o rezistență de valoare cunoscută, dar astfel aleasă încît să se obțină aceeași deviere a acului indicator al aparatului de măsură ;

— *metode de măsurare diferențiale*, prin care se compară mărimea fizică de măsurat cu o altă mărime fizică de aceeași natură, de valoare cunoscută și care diferă puțin de valoarea mărimii fizice de măsurat, măsurîndu-se diferența valorilor celor două mărimi fizice. De obicei, aceste metode de măsurare, se utilizează la verificarea măsurilor de lungime etalon cu ajutorul comparatoarelor ;

— *metode de măsurare de zero (sau de echilibru)*, reprezintă metodele de măsurare în care diferența între valoarea mărimii de măsurat și valoarea mărimii fizice cunoscute, cu care se compară valoarea măsurandului, se reduce la zero. Ca exemple de metode de măsurare de zero, amintim :

— cîntărirea cu ajutorul unor balanțe cu brațe egale, cînd poziția finală de echilibru a balanței este aceeași cu poziția inițială, cu platanele libere ;

— măsurarea rezistențelor electrice cu ajutorul unei punți Wheatstone ;

— *metode de măsurare prin coincidență*, reprezintă metodele de măsurare în care un șir de gradații sau semnale uniforme și determinate se compară cu un alt șir de gradații sau semnale de același fel, observîndu-se coincidența lor, pe baza căreia se află valoarea mărimii de măsurat. Ca exemplu, de măsurare prin coincidență amintim măsurarea timpului cu ajutorul semnalelor orare. Dacă dorim să stabilim modul în care funcționează ceasul de care dispunem, verificăm dacă indicațiile ceasului coincid cu semnalele transmise la radio etc.

— *metode de măsurare prin transpoziție*, sînt metode de măsurare în care se determină inițial mărimea de măsurat A , obținîndu-se pentru aceasta valoarea x_1 , prin comparare cu altă mărime fizică B , de aceeași natură cu măsurandul. După aceasta se schimbă locul mărimilor A și B alegîndu-se o astfel de valoare x_2 a mărimii B încît să fie echilibrată valoarea măsurandului A , iar valoarea mărimii măsurate este $x = (x_1 x_2)^{1/2}$.

Metoda de măsurare prin transpoziție se utilizează pentru a determina masa M a unui corp și este cunoscută sub numele de metoda de cîntărire Gauss (sau metoda dublei cîntăriri). Notînd cu l_1 și l_2 lungimile brațelor unei balanțe obținem :

$$Mgl_1 = Mgl_2$$

și

$$M_2 gl_1 = Mgl_2,$$

de unde

$$\frac{M}{M_2} = \frac{M_1}{M}$$

sau

$$M = (M_1 M_2)^{1/2} \quad (5.4)$$

unde M_1 și M_2 reprezintă masele corpurilor care echilibrează greutatea Mg a corpului de măsurat, în cele două experiențe de cîntărire.

Alegerea uneia sau alteia din metodele de măsurare indicate depinde de mai mulți factori, printre care amintim:

- valoarea mărimii de măsurat,
- precizia necesară,
- timpul necesar pentru efectuarea măsurării,
- condițiile în care se efectuează măsurarea și aparatura de care dispunem etc.

5.2. MIJLOACE DE MĂSURARE

Mijloacele de măsurare reprezintă acele mijloace cu ajutorul cărora se pot determina valorile mărimilor de măsurat. În schemele de principiu, care indică diferite măsurări, mijloacele de măsurare se reprezintă printr-un dreptunghi. Mărimea de măsurat constituind un semnal de intrare, iar valoarea obținută prin măsurare, semnalul de ieșire (fig. 5.1).

Mijloacele de măsurare fiind în număr mare și foarte variate, acestea sînt clasificate după mai multe criterii. Criteriile după care pot fi clasificate mijloacele de măsurare pot fi:

- complexitate;
- sarcinile (rolurile) mijloacelor de măsurare în cadrul unei instalații;
- forma semnalelor de intrare și de ieșire;
- din punct de vedere metrologic.

5.2.1. Clasificarea mijloacelor de măsurare după complexitate.

Din punctul de vedere al complexității mijloacelor de măsurare se împart în:

- a) măsurî;
- b) aparate de măsurat;
- c) instalații de măsurare.

Vom indica unele caracteristici ale acestor grupări ale mijloacelor de măsurare.

a) *Măsurî*. Măsurîle sînt cele mai simple mijloace de măsurare care concretizează unitățile de măsură ale mărimilor fizice.

În operațiile de măsurare unele măsurî se utilizează independent, iar altele cu ajutorul unui aparat de măsurat. Astfel măsurîle de capacitate sau riglele de măsurat se utilizează independent iar greutatea (măsurî de masă) se pot utiliza numai cu ajutorul aparatului de măsurat, care în cazul de față este balanța.

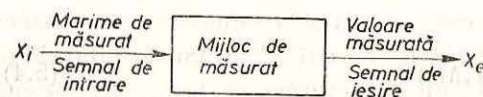


Fig. 5.1.

Putem avea *măsurî cu valoare unică și măsurî cu valori multiple*. De exemplu, măsurî care indică

un kilogram, un litru etc. sînt măsurî cu valoare unică, iar măsurî ca riglele gradate sînt măsurî cu valori multiple.

Caracteristica măsurîlor constă în faptul, că acestea nu posedă nici un element care poate fi deplasat în timpul efectuării măsurării.

De multe ori un grup de măsurî, pentru aceeași mărime fizică se asociază în serii sau truse de măsurî. Astfel avem truse de greutate pentru efectuarea unor cîntăriri etc.

b) *Aparate de măsurat*. Prin aparate de măsurat înțelegem mijloacele de măsurare care, conținînd cel puțin o măsură, se utilizează la compararea directă sau indirectă a mărimii de măsurat cu unitatea de măsură. Din punctul de vedere al modului de măsurare, putem avea:

— *aparate cu citire directă*, care indică direct valoarea mărimii măsurate. De exemplu, dacă se măsoară intensitatea curentului electric cu ajutorul unui ampermetru, se citește direct valoarea intensității curentului;

— *aparate de comparare* reprezintă aparatele care indică egalitatea valorii mărimii fizice măsurate, cu o valoare cunoscută a unei mărimi fizice de aceeași natură cu măsurandul. De exemplu balanța simplă, cu brațe egale, este un aparat de măsurat, de comparare. De asemenea, cînd se măsoară rezistența unui rezistor, cu ajutorul unei punți, indicația de zero a galvanometrului arată că rezistența măsurată este egală cu o altă rezistență de valoare cunoscută;

— *aparate diferențiale*, care se utilizează pentru măsurarea unei diferențe între valoarea mărimii de măsurat și valoarea cunoscută a unei mărimi de aceeași natură cu măsurandul. De exemplu, un manometru cu lichid (de obicei mercur), în formă de U. O ramură în U comunică cu atmosfera, iar cealaltă ramură comunică cu un gaz la presiunea p . Dacă p_0 este presiunea atmosferică, iar h este diferența de nivel a lichidului din cele două ramuri ale manometrului, atunci

$$p - p_0 = \pm \rho gh. \quad (5.5)$$

Deci manometrul cu lichid poate fi considerat, un aparat de măsurat diferențial.

Din punct de vedere al modului de obținere a valorii mărimii de măsurat, aparatele de măsurat se împart în:

— *aparate indicatoare*, la care valoarea mărimii de măsurat este dată printr-o simplă indicație, fără să se imprime sau să se întregistreze indicația respectivă;

— *aparate înregistratoare*, care înregistrează indicațiile sau informațiile obținute prin efectuarea unei măsurări;

— *aparate integratoare*, care determină valoarea unei mărimi fizice printr-o metodă de integrare (sumare) succesivă. De exemplu, controlul de energie electrică este un aparat integrator, deoarece indică rezultatul obținut prin sumarea succesivă a valorilor energiei electrice consumate, într-o perioadă de timp, de către consumator.

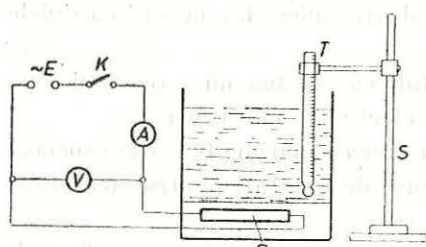


Fig. 5.2.

c) *Instalații de măsurare.* O instalație de măsurare reprezintă un mijloc de măsurare constituit din mai multe măsurări și aparate de măsurat, situate în fluxul semnalului de intrare. De asemenea, instalațiile de măsurare cuprind și dispozitive auxiliare de măsurare, care nu sunt situate în fluxul semnalului de intrare, dar pot servi la:

- menținerea valorilor unor parametri exteriori între limite stabile;
- ușurarea efectuării operațiilor de măsurare;
- schimbarea domeniului de măsurare a unui aparat de măsurat.

Ca exemplu de dispozitive auxiliare de măsurare, putem aminti, termostatul care servește pentru menținerea unei temperaturi constante, în timpul măsurării, lupa, care ușurează citirea indicațiilor aparatelor de măsurat sau nivel cu bulă de aer, care servește pentru asigurarea poziției de lucru unui aparat etc.

În figura 5.2 se indică instalația de măsurare utilizată pentru măsurarea randamentului unui fierbător electric, vas în care apa poate fi încălzită, prin absorbția căldurii degajate de rezistența R , montată în pereții vasului. Dacă în timpul t apa își ridică temperatura de la θ_1 la θ_2 atunci:

$$\eta = \frac{Q_u}{Q_e} = \frac{mc(\theta_2 - \theta_1)}{RI^2t} = \frac{mc(\theta_2 - \theta_1)}{UI} \quad (5.6)$$

unde

m este masa apei din vas;

c — căldura specifică a apei.

Rezistența R este alimentată de la sursa de tensiune electromotoare E . Se utilizează trei aparate de măsură voltmetrul V , ampermetrul A și termometrul T . Ca dispozitive auxiliare de măsurare sunt:

- cronometrul cu care se măsoară timpul t ;
- stativul S necesar pentru fixarea termometrului T ;
- întrerupătorul K etc.

5.2.2. Clasificarea mijloacelor de măsurat după sarcinile lor în cadrul unei instalații de măsurare. Pentru înțelegerea clasificării mijloacelor de măsurat, după rolul acestora în cadrul unei instalații de măsurare, vom considera instalația de măsurare a temperaturii cu ajutorul termometrului cu rezistență. În figura 5.3 se indică termometrul cu rezistență și simbolul acestui termometru cu instalațiile de măsurare. Dacă la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$, rezistența firului metalic este R_0 , atunci la temperatura t , rezistența R este:

$$R = R_0(1 + \alpha t).$$

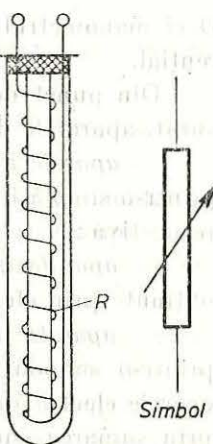


Fig. 5.3.

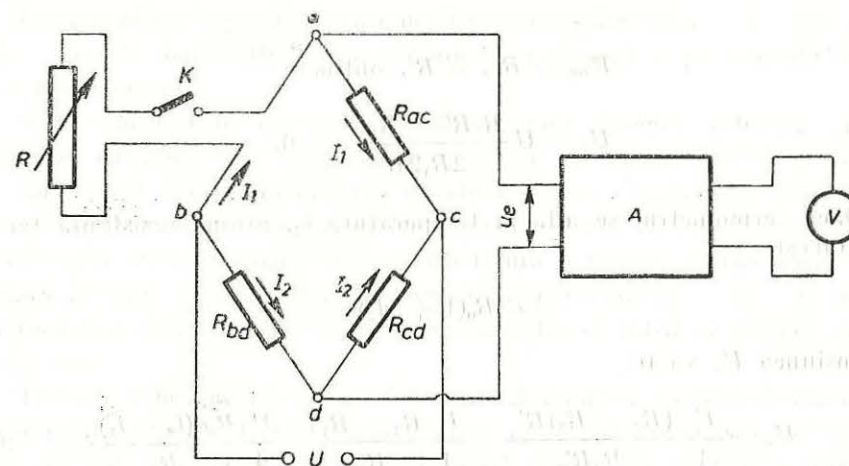


Fig. 5.4.

Se folosesc metale ca Pt pentru care $\alpha = 0,385 \cdot 10^{-2} \text{ grad}^{-1}$ și Ni cu $\alpha = 0,617 \cdot 10^{-2} \text{ grad}^{-1}$.

Instalația de măsurare a temperaturii cu ajutorul termometrului cu rezistență este indicată în figura 5.4.

Termometrul de rezistență este montat în unul din brațele punții utilizate. Dacă inițial sistemul, rezistențele R_{ac} , R_{cd} , R_{bd} și termometrul, se află la temperatura t_1 , care de regulă este temperatura camerei atunci rezistența termometrului este

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1).$$

Din figura 5.4. rezultă:

$$I_1(R_1 + R_{ac}) = U,$$

$$I_2(R_{bd} + R_{cd}) = U$$

sau

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{ac}}; \quad I_2 = \frac{U}{R_{bd} + R_{cd}}.$$

Tensiunea de la ieșire U_e este:

$$U_e = I_1 R_1 - I_2 R_{bd} = U \left(\frac{R_1}{R_1 + R_{ac}} - \frac{R_{bd}}{R_{bd} + R_{cd}} \right) = U \left(\frac{R_1 R_{bd} + R_1 R_{cd} - R_1 R_{bd} - R_{ac} R_{bd}}{(R_1 + R_{ac})(R_{bd} + R_{cd})} \right) = U \frac{R_1 R_{cd} - R_{ac} R_{bd}}{(R_1 + R_{ac})(R_{bd} + R_{cd})}. \quad (5.7)$$

Alegînd rezistențele

$$R_{ac} = R_1$$

și

$$R_{bd} = R_{cd} = R', \text{ obținem}$$

$$U_e = U \frac{R_1 R' - R_1 R'}{2 R_1 2 R'} = 0.$$

Dacă termometrul se află la temperatura t_2 , atunci rezistența termometrului este

$$R_2 R_0 (1 + \alpha t_2),$$

iar tensiunea U_e va fi:

$$U_e = \frac{U}{4} \frac{(R_2 - R_1) R'}{R_2 R'} = \frac{U}{4} \frac{R_2 - R_1}{R_2} = \frac{U}{4} \frac{R_0 \alpha (t_2 - t_1)}{R_1}. \quad (5.8)$$

Am înlocuit la numitor R_2 prin R_1 , deoarece dacă $R_2 - R_1 = \Delta R$ atunci $\Delta R \ll R_1$, $\Delta R \ll R_2$.

Vedem că tensiunea U_e este proporțională cu diferența de temperatură ($t_2 - t_1$). Cu ajutorul amplificatorului A se amplifică tensiunea U_e pentru a putea fi măsurată cu voltmetrul V , gradat direct în $^{\circ}\text{C}$.

Din punctul de vedere al rolului aparatelor de măsurat în cadrul unei instalații avem:

a) *Captorul* care este un aparat de măsurat care captează mărimea de măsurat la intrare și emite la ieșire un semnal de măsurare corespunzător. De exemplu în schema din figura 5.4 termometrul cu rezistență, reprezintă captorul.

b) *Adaptorul* este un aparat de măsurat dintr-o instalație situat între captor și emițător, având diferite funcții în instalația de măsurare, ca de exemplu puntea de măsurat și amplificatorul în instalația din figura 5.4.

c) *Emițătorul* este un aparat de măsurat care livrează valoarea măsurată a mărimii de măsurat.

De multe ori emițătorul este prevăzut cu dispozitive care furnizează informații suplimentare la valoarea măsurată. Astfel avem aparate de semnalizare, emițător de semnal limită, semnalizator cu valoare limită etc.

Emițătoarele pot fi *directe* și *indirecte*.

Emițătorul direct furnizează valoarea măsurată într-o formă direct inteligibilă pentru observator.

Dintre emițătoarele directe cele mai utilizate amintim indicatoarele, inscripțiile și număratoarele.

Indicatorul este un emițător direct care permite citirea directă a valorii măsurate. Indicatorul analog furnizează valoarea măsurată cu ajutorul unui indicator pe o scală (exemplu aparatele cu indicator). Indicatorul digital furnizează valoarea măsurată în formă de numere, adică în valori discrete ale indicației.

Inregistratorul reprezintă un emițător direct care înscrie valoarea măsurată — de cele mai multe ori proporțională cu timpul — pe o bandă mobilă, pe o diagramă etc.

Numărătorul este un emițător direct care livrează valoarea mărimii măsurate, ca sumă sau integrală în timp, într-o formă directă și vizibilă.

Emițătorul indirect furnizează valoarea mărimii măsurate într-o formă care poate fi recunoscută numai cu dispozitive sau cu cunoștințe speciale. De exemplu dacă în cazul schemei din figura 5.4 scala voltmetrului V este gradată în volți, pentru aflarea variației temperaturii ($t_2 - t_1$), este necesar să cunoaștem formula (5.8) și valorile mărimilor ce intră în această formulă ca U_e etc.

Trebuie subliniat că aparatele cu rol de adaptor (puntea de măsurat și amplificatorul, fig. 5.4) utilizează energie exterioară pentru a putea funcționa normal. Sursele de energie exterioară constituie, de foarte multe ori, surse perturbatoare pentru semnalul de intrare. Aceasta conduce la faptul că mărimea măsurată nu corespunde fidel mărimii de măsurat, ci doar o valoare aproximativă, care trebuie prelucrată și corectată după anumite legi.

5.2.3. Clasificarea mijloacelor de măsurare după forma semnalului. Din punctul de vedere al formei semnalului mijloacele de măsurare se împart în două grupe: traductoare și convertizoare.

Traductorul de măsurare reprezintă un mijloc de măsurare care este utilizat în scopul transformării mărimii de măsurat într-o altă mărime dependentă de semnalul de intrare. De exemplu, termometrul cu rezistență poate fi considerat un traductor de măsurare deoarece transformă semnalul de intrare — temperatură în $^{\circ}\text{C}$ — în semnalul de ieșire — rezistența R în Ω . De asemenea termocuplul este tot un traductor de măsurare. În sistemele de reglare automată a diverselor procese tehnologice, traductoarele de măsurare prezintă o deosebită importanță.

Convertizorul este un aparat de măsurare la care semnalul de intrare diferă structural de semnalul de ieșire. Putem avea convertizorul analog-digital, care transformă semnalul de intrare analog în semnal de ieșire digital sau convertizorul digital-analog, care transformă un semnal de intrare digital într-un semnal de ieșire analog.

5.2.4. Elemente de indicație ale mijloacelor de măsurare. Așa cum am mai arătat, funcționarea oricărui mijloc de măsurare se bazează pe aplicarea unui fenomen fizic, care constituie principiul de măsurare, denumit și principiul de funcționare al mijlocului de măsurare respectiv. De exemplu, funcționarea unui galvanometru se bazează pe funcționarea dintre cîmpul magnetic al unui magnet permanent și cîmpul magnetic al unui curent electric. Această interacțiune are ca efect rotirea unui sistem mobil, în funcție de intensitatea curentului electric. Nu ne vom ocupa de elementele constructive ale mijloacelor de măsurare, care sînt foarte diferite, depinzînd de principiul

de funcționare utilizat, ci numai de elementele care permit citirea rezultatului obținut în urma efectuării unei măsurări, cu ajutorul unui aparat de măsurare cu citire directă.

Rezultatul unei măsurări se consideră indicația mijlocului de măsurare utilizat, indicație care este dată de un element mobil ce se poate deplasa în dreptul unei serii de repere numerotate care constituie scara gradată. Deci primul element de citire al unui mijloc de măsurare este scara gradată:

a) *Scara gradată* — reprezintă totalitatea reperelor dispuse de-a lungul unei linii drepte sau curbe, care corespund unui șir de valori succesive ale mărimii de măsurat. Alte elemente de citire sînt:

b) *Reperele* sînt semnele, de regulă trăsături, care limitează diviziunile scării gradate respective. Reperele pot corespunde uneia sau mai multor valori determinate ale mărimii de măsurat. Dacă scara gradată se utilizează pentru un singur interval de măsurare a unei mărimi fizice, reperele corespund unei valori determinate ale mărimii respective. În cazul în care aceeași scară gradată se utilizează pentru mai multe intervale de măsurare ale unei mărimi fizice, reperele corespund mai multor valori determinate ale mărimii măsurate.

c) *Diviziunea* este intervalul dintre axele a două repere consecutive ale scării gradate.

d) *Valoarea diviziunii* reprezintă valoarea exprimată în unități ale mărimii de măsurat, corespunzătoare unei diviziuni.

e) *Baza scării gradate* este linia (de obicei neindicată) care trece prin mijlocul reperelor celor mai scurte ale unei scării gradate (liniile discontinui fig. 5.5).

f) *Lungimea diviziunii* reprezintă lungimea rectilinie sau curbilinie (în funcție de forma bazei scării), măsurată în lungul bazei scării, între axele a două repere consecutive.

g) *Cifrarea* (sau *numerotarea*) reprezintă ansamblul numerelor înscrise în dreptul reperelor de pe scara gradată.

h) *Indicele* este partea dispozitivului de indicare (ca de exemplu ac indicator (fig. 5.6) spot luminos, suprafața de lichid etc.) în dreptul căreia se face citirea pe scara gradată.

i) *Cadranul* este suprafața fixă sau mobilă pe care se află una sau mai multe scări gradate. Cadranul poate fi plan, cilindric sau tronconic. Cadrele cilindrice și tronconice se mai numesc și *tambure gradate*.

j) *Limitele scării gradate* reprezintă valorile maxime și minime corespunzătoare reperelor extreme ale unei scării gradate. Deosebim următoarele tipuri de scări gradate, în funcție de poziția reperului zero față de limitele scării gradate.

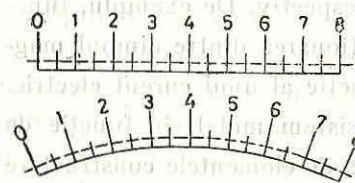


Fig. 5.5.

Scară gradată unilaterală, cînd una dintre limitele scării gradate este zero.

Scară gradată bilaterală la care reperul zero este între limitele scării gradate, și

Scară gradată cu zero decalat la care reperul zero este exterior limitei scării gradate.

În funcție de valorile diviziunilor, scările gradate se împart în:

k) *Scări gradate liniare* pentru care, distanța între două repere succesive (lungimea diviziunii) este proporțională cu valoarea diviziunii respective.

Scările uniforme la care diviziunile au aceeași lungime și aceeași valoare pe toată scara gradată, sînt un caz particular al scării liniare.

1) *Scări gradate neliniare*, la care lungimile diviziunilor nu sînt proporționale cu valorile acestor diviziuni. Ca exemplu de scări gradate neliniare putem avea scările neliniare pătratice, logaritmice etc.

5.2.5. Noțiuni metrologice privind indicațiile mijloacelor de măsurare.

În procesul de măsurare a unei mărimi fizice, se utilizează măsuri, aparate sau instalații de măsurare. Este evident că se impune ca termenii folosiți, în diferite tipuri de măsurări, să fie definiți în mod univoc. Utilizarea, în mod greșit, a unor termeni, folosiți pentru desemnarea elementelor principale care participă la obținerea valorii mărimii de măsurat sau care aparțin măsurilor sau aparatelor de măsurat, poate conduce la concluzii eronate pe cei care utilizează în scopuri practice rezultatelor măsurărilor.

Vom defini, în acest sens, unii termeni metrologici care se utilizează în toate domeniile de măsurare.

a) *Valoarea nominală a unei măsuri* este valoarea înscrisă pe măsură și se determină cu ajutorul mijloacelor de măsurat etalon. Deoarece se întîlnesc măsuri cu valoare unică și măsuri cu valori multiple avem:

Valoarea nominală totală a unei măsuri care reprezintă valoarea totală a mărimii reproduse de măsură, fiind înscrisă pe măsura respectivă. De exemplu în cazul unei rigle gradate cu lungimea de 30 cm, lungimea cuprinsă între reperele zero și 30 cm, reprezintă valoarea nominală totală a riglei.

Valoarea nominală parțială a unei măsuri este valoarea mărimii parțiale reprodusă de măsură și înscrisă pe această măsură. De exemplu fiecare lungime delimitată de pe reperul zero și un reper oarecare, cu excepția reperului zero al riglei gradate, reprezintă o valoare nominală parțială a lungimii riglei.

b) *Citire* este numărul citit la măsurare pe scara gradată, în dreptul indicelui.

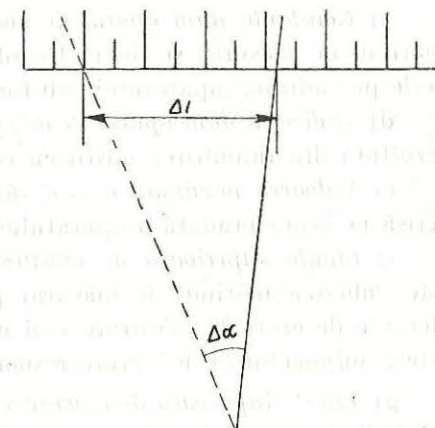


Fig. 5.6.

c) *Constanța unui aparat de măsurat* reprezintă raportul dintre valoarea mărimii de măsurat și citire. De obicei constanța aparatului de măsurat se scrie pe cadranul aparatului sub forma: X 1, X 10, X 100 etc.

d) *Indicația unui aparat de măsurat* reprezintă valoarea mărimii măsurate rezultată din înmulțirea citirii cu constanța aparatului respectiv.

e) *Valoarea nominală a unei diviziuni a scării gradate*, este valoarea înscrisă pe scara gradată a aparatului de măsurat.

f) *Limita superioară de măsurare* a unui mijloc de măsurare oarecare este valoarea mărimii de măsurat peste care rezultatele măsurărilor pot fi afectate de erori de măsurare mai mari decât limita superioară a erorii tolerate a mijlocului de măsurare respectiv.

g) *Limita inferioară de măsurare* a unui mijloc de măsurare este valoarea mărimii de măsurat sub care rezultatele măsurărilor pot fi afectate de o eroare superioară erorii tolerate a acestui mijloc de măsurare.

h) *Domeniul de măsurare* a unui mijloc de măsurare este diferența între limita superioară și cea inferioară de măsurare.

i) *Valoarea efectivă a unei măsuri*, respectiv *valoarea efectivă a diviziunii unei scări gradate* este valoarea acelei măsuri, respectiv a acelei diviziuni determinate cu ajutorul mijloacelor de măsurare etalon.

j) *Valoarea efectivă a unei mărimi de măsurat* este valoarea măsurandului respectiv, obținută cu ajutorul mijloacelor de măsurare etalon.

k) *Valoarea individuală a unei mărimi* este valoarea obținută pentru mărimea respectivă printr-o singură operație de măsurare. În măsurări tehnice, de obicei, rezultatul măsurării exprimă valoarea individuală a mărimii indicate. Trebuie subliniat că valoarea individuală a unei măsurări nu este valoarea obținută direct prin efectuarea măsurării, ci valoarea care rezultă în urma introducerii unor corecții legate de erorile sistematice ale mijloacelor de măsurare utilizate.

1) *Valoarea adevărată a unei mărimi (valoarea măsurandului, simbol x_0)* este valoarea riguros exactă, neafectată de erori, a unei mărimi. Deoarece erorile de măsurare nu pot fi evitate în totalitate, stabilirea valorii adevărate a unei mărimi este principal imposibilă.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

5.1. Pentru măsurarea rezistenței R_x a unui rezistor se utilizează puntea cu fir (fig. P.5.1). Valoarea rezistenței cunoscute R este dată cu o eroare relativă procentuală de 1%. Pentru valoarea $R = 10 \Omega$ se obțin rezultatele $l_1 = (618 \pm 2) \text{ mm}$, $l = l_1 + l_2 = 1200 \text{ mm}$. Erorile ce afectează lungimea totală l a firului se neglijează.

Se cere:

a) Să se calculeze valoarea rezistenței R_x .

b) Eroarea absolută, eroarea relativă și precizia de măsurare a rezistenței R_x .

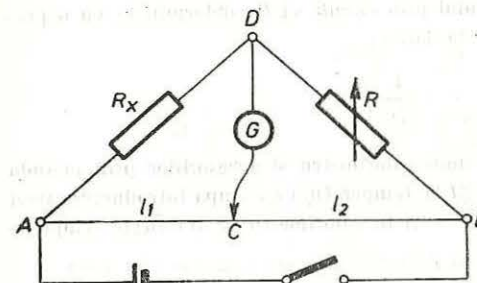


Fig. P. 5.1.

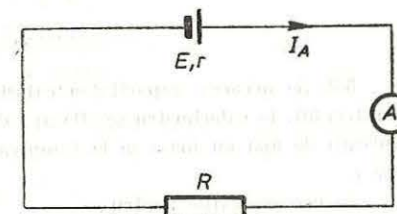


Fig. P. 5.2.

c) Să se discute dependența erorii relative δR_x de valoarea l_1 și să se indice modul de măsurare astfel încât eroarea relativă δR_x să fie minimă.

R:

$$a) R_x = R \frac{l_1}{l_2} = R \frac{l_1}{l - l_1} = 10,62 \Omega;$$

$$b) \frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta(l - l_1)}{l - l_1}.$$

De unde

$$\delta R_x = \frac{\Delta R_x}{R_x} = \delta R + \delta l_1 + \frac{l}{l_1 l_2} \Delta l_1 = 16 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta R_x = R_x \cdot \delta R_x = 0,2 \Omega$$

$$R_x = (10,6 \pm 0,2) \Omega$$

$$P = \frac{1}{\delta R_x} = \frac{1000}{16} = 63.$$

c) Din formula

$$\delta R_x = \delta R + \delta l_1 + \frac{l}{l_1 l_2} \Delta l_1$$

se vede că δR_x va fi minimă dacă factorul $l/l_1 l_2$ este minim. Este ușor de văzut că acest factor este minim dacă $l_1 = l_2 = l/2$. Deci δR_x va fi minim dacă $R_x \approx R$.

Se poate verifica că în cazul cînd $R = 1 \Omega$ și $l_1 = (1097 \pm 2) \text{ mm}$ eroarea relativă δR_x este mai mare decît cea calculată.

5.2. Se măsoară, cu ajutorul unui ampermetru de rezistență internă R_A , intensitatea curentului electric dintr-un circuit (fig. P.5.2).

Se cere:

a) Să se demonstreze că eroarea relativă a intensității curentului, indicată de ampermetru, este:

$$\delta I = \frac{|\Delta I|}{I} = \frac{R}{R + R_A + r}.$$

b) Să se indice în ce condiții această eroare poate fi neglijată.

R:

a) Intensitatea reală a curentului din circuit este

$$I_0 = \frac{E}{R + r}$$

are intensitatea măsurată a curentului din circuit este

$$I = \frac{E}{R + R_A + r}$$

$$\Delta I = I_0 - I = \frac{E}{R + r} - \frac{E}{R + R_A + r} = \frac{R_A I_0}{R + R_A + r}$$

$$\delta I = \frac{F_A}{R + R_A + r}$$

b) Dacă se impune ca intensitatea curentului prin circuit să fie determinată cu o precizie P stabilită atunci eroarea δI poate fi neglijată dacă

$$\frac{R_A}{R + R_A + r} < \frac{1}{P}$$

5.3. Se măsoară capacitatea calorică C a unui calorimetru și accesoriilor prin metoda amestecului. În calorimetru se află apă de masă M la temperatura t_0 . După introducerea unei cantități de apă cu masa m la temperatura $t_1 (t_1 > t_0)$ în calorimetru se stabilește temperatura t .

Se cer expresiile pentru :

- capacitatea calorică C ;
- eroarea relativă δC ;
- eroarea absolută ΔC .

Erorile ce afectează valoarea căldurii specifice (c) a apei se neglijează.

$$a) C = Mc + \frac{m(t_1 - t_0)}{t - t_0} c;$$

$$b) \delta C = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta t_1}{t_1 - t} + \frac{\Delta t_0}{t - t_0} + \frac{(t_1 - t_0)\Delta t}{(t_1 - t)(t - t_0)};$$

$$c) \Delta C = C \cdot \delta C.$$

5.4. Se pune problema cîntăririi, cu precizie maximă, a unei probe de sulf cu masa nominală $m = 32$ g, cu ajutorul unei balanțe sensibile la diferențe de mase mai mari decît 3 mg. De asemenea se știe că brațele balanței considerate egale $l_1 = l_2 = l = 8$ cm, în realitate diferă cu $\Delta l = 5$ μ m.

Se cere să se stabilească dacă :

- este necesară efectuarea unei duble cîntări;
- este necesară introducerea corecției datorită forței arhimedice.

Se dă :

Densitatea greutăților etalon utilizate $\rho_1 = 9000$ kg/m³.

Densitatea aerului $\rho_0 = 1,3$ kg/m³.

R :

- Fie M masa etalon, avem :

$$mgl = Mg(l + \Delta l).$$

Notăm

$$m - M = \Delta m.$$

Deci

$$\Delta mgl + Mg\Delta l.$$

Considerînd $m \approx M$, obținem

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \Delta m = m \frac{\Delta l}{l} = 32 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-4}}{8} = 20 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ g}.$$

Deci, deoarece $\Delta m < 3$ mg, diferența minimă de masă la care reacționează balanța, efectuarea dublei cîntări nu micșorează eroarea de măsurare.

- Greutățile aparente pentru proba de sulf și pentru masa etalon folosită, sînt :

$$\left(m - \rho_0 \frac{m}{\rho}\right) g,$$

$$\left(M - \rho_0 \frac{M}{\rho_1}\right) g.$$

Din condiția de echilibru

$$\left(m - \rho_0 \frac{m}{\rho}\right) gl = \left(M - \rho_0 \frac{M}{\rho_1}\right) gl$$

rezultă

$$m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = M \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)$$

și,

$$m = M \frac{1 - \rho_0/\rho_1}{1 - \rho_0/\rho} = M \frac{1 - 1,44 \cdot 10^{-4}}{1 - 6,4 \cdot 10^{-4}} = M \frac{0,999856}{0,99935} = M(1 + 0,0005)$$

$$\frac{\Delta m}{M} = 0,0005 \quad \Delta m = M \cdot 0,0005 = 32 \cdot 0,0005 = 16 \text{ mg}.$$

Deci este necesară corecția datorată forței arhimedice.

5.5. Pentru măsurarea unei rezistențe cu ajutorul unei punți cu fir se folosește metoda măsurării prin transpoziție. Dacă rezistența R_x se află pe ramura AD (fig. 5.1), iar cursorul C aproximativ la mijlocul firului se obține indicația de zero a galvanometrului pentru $R = R_1 = 15,63$ Ω . Se lasă cursorul în aceeași poziție și se trece rezistența R_x în ramura BD , iar rezistorul R în ramura AD . În acest caz se obține echilibru pentru $R = R_2 = 16,08$ Ω . Eroarea absolută în măsurarea rezistenței R este $\Delta R = 0,02$ Ω .

Se cere :

- Să se calculeze valoarea rezistenței R_x .
- Să se indice eroarea ΔR_x comisă prin efectuarea acestei măsurări.

R :

$$a) R_x = R_1 \frac{l_1}{l_2}$$

$$R_x = R_2 \frac{l_2}{l_1}$$

$$R_x^2 = R_1 R_2 R_x = \sqrt{R_1 R_2} = 15,85 \text{ } \Omega$$

$$b) \Delta R_x = \frac{R_x}{2} \left(\frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta R}{R_2} \right) \approx 0,02 \text{ } \Omega.$$

Deci

$$R_x = (15,85 \pm 0,02) \text{ } \Omega.$$

5.6. Pentru măsurarea capacității C a unui condensator se dispune de :

- o sursă de tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 50$ Hz;
- un rezistor variabil R ;
- o bobină cu inductanța L variabilă;
- un ampermetru și un voltmetru.

Se cere să se indice două montaje pentru măsurarea capacității C și expresiile acestei capacități în funcție de mărimile măsurate.

R :

- Se poate realiza montajul din figura P.5.3. Se măsoară intensitatea I a curentului și tensiunea U la bornele condensatorului. Reactanța capacitivă este :

$$X_C = \frac{U}{I}; \quad C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{I}{U}.$$

De regulă se măsoară valorile I și U pentru diferite valori ale rezistenței R .

b) Se realizează montajul din figura P.5.4 și se măsoară intensitatea curentului I în funcție de inductanța L a bobinei. Se reprezintă grafic dependența $I = f(L)$ (figura P.5.5) și se determină inductanța L_0 pentru care I este maxim. Din condiția de rezonanță

$$\omega L_0 = \frac{1}{\omega C};$$

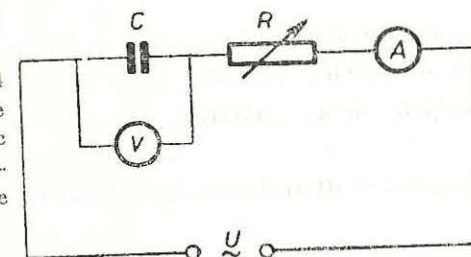


Fig. P. 5.3.

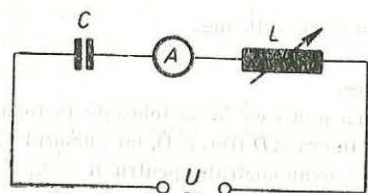


Fig. P. 5.4.

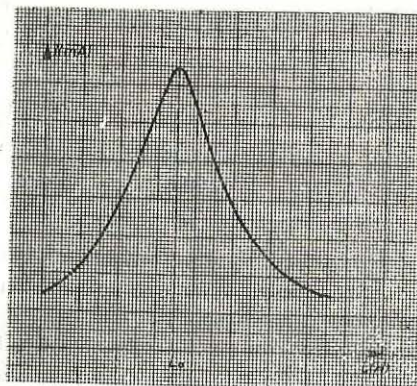


Fig. P. 5.5.

se obține :

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_0}$$

5.7. Să se indice modul în care poate fi determinat coeficientul de frecare a unui corp pe un plan înclinat dacă :

- unghiul α dintre planul înclinat și orizontală este fix;
- unghiul α poate fi variat.

6

INTRODUCERE ÎN TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE

Prin eroarea absolută a unei măsurări înțelegem diferența dintre valoarea individuală x a unei mărimi și valoarea adevărată x_0 a mărimii respective :

$$\Delta x = x - x_0. \quad (6.1)$$

Așa cum am subliniat în paragraful precedent, valoarea x_0 a măsurandului nu este accesibilă și deci această valoare trebuie substituită cu o valoare convențional adevărată, care reprezintă valoarea măsurandului ce diferă neglijabil de valoarea adevărată. De multe ori, valoarea adevărată este substituită de valoarea efectivă a mărimii de măsurat. Acest lucru nu este totdeauna posibil și pe de altă parte și valoarea efectivă a mărimii respective este la rândul ei afectată de erori de măsurare.

În teoria erorilor de măsurare se încearcă să se răspundă la următoarele trei întrebări fundamentale, care se pun în procesul de efectuare a măsurărilor și de prelucrare a datelor obținute.

- Cum se poate găsi valoarea cea mai bună pentru mărimea sau mărimile măsurate, pe baza unui număr de măsurări efectuate ?
- Cum se poate găsi un număr care să caracterizeze precizia medie a uneia din măsurările efectuate ?
- Cum se poate găsi un număr care să caracterizeze precizia valorii pe care o considerăm că aproximează cel mai bine valoarea adevărată x ?

Înainte de a încerca să răspundem la aceste întrebări, să ne ocupăm întâi de unele probleme privind erorile de măsurare.

De cele mai multe ori se utilizează în locul erorii absolute (6.1) valoarea absolută a erorii de măsurare :

$$|\Delta x| = |x - x_0|. \quad (6.2)$$

Eroarea relativă de măsurare este raportul dintre valoarea absolută a erorii de măsurare și valoarea adevărată x_0

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{x_0} \quad (6.3)$$

De exemplu dacă pentru rezistența unui rezistor rezultatul unei măsurări este $R = 251,3 \, \Omega$, iar valoarea efectivă a rezistenței este $R_0 = 250 \, \Omega$ atunci eroarea absolută este

$$\Delta R = 251,3 - 250 = 1,3 \, \Omega,$$

iar eroarea relativă este :

$$\delta R = \frac{|\Delta R|}{R_0} = \frac{1,3}{250} = 0,0052 = 0,52\%.$$

6.1. ERORILE DE MĂSURARE ALE MIJLOACELOR DE MĂSURARE

Este cunoscut faptul că indicațiile mijloacelor de măsurare depind nu numai de valorile mărimii de măsurat, ci și de o serie de factori externi ca presiunea atmosferică, umiditatea, intensitatea cîmpurilor electromagnetice exterioare, cîmpuri de radiații etc. Mărimile care nu fac obiectul măsurării, dar care au o influență asupra indicațiilor mijlocului de măsurare utilizat sau asupra valorii măsurate se numesc *mărimi de influență*. Mărimile de influență pot afecta fie mijlocul de măsurare, fie mărimea de măsurat, fie atât mijlocul de măsurare cît și mărimea de măsurat. De exemplu, în procesul de măsurare a unei lungimi, variația temperaturii poate afecta atât mărimea de măsurat, cît și mijlocul de măsurat (riglă gradată etc.). Acțiunile mărimilor de influență conduc la apariția erorilor de măsurare, care depind de modul de acționare a acestor mărimi în timpul măsurării.

Condițiile normale de utilizare a unui mijloc de măsurare (sau *condițiile de referință*) reprezintă condițiile exterioare fixate de constructor pentru utilizarea corectă a mijlocului de măsurare. Dacă mijlocul de măsurare este utilizat în condiții de referință, acesta păstrează caracteristicile de utilizare indicate de constructor.

Din punct de vedere metrologic, mijloacele de măsurare sînt caracterizate prin sensibilitate, justețe, fidelitate și precizie.

Sensibilitatea unui aparat de măsurat reprezintă raportul dintre deplasarea indicelui și variația mărimii de măsurat căreia îi corespunde deplasarea respectivă.

$$\text{Sensibilitatea (S)} = \frac{\text{deplasarea indicelui}}{\text{variația mărimii care a produs deplasarea}} \quad (6.4)$$

În cazul unui ampermetru cu ac indicator deplasarea indicelui poate fi caracterizată atât prin deplasarea Δl a acului pe scara gradată cît și prin unghiul de rotație $\Delta \alpha$ a acului indicator (fig. 5.6). Dacă această deviație a acului indicator corespunde unei variații ΔI a intensității curentului electric, sensibilitatea ampermetrului este :

$$S = \frac{\Delta l}{\Delta I} \quad \text{sau} \quad S = \frac{\Delta \alpha}{\Delta I} \quad (6.5)$$

Relațiile (6.5) sînt valabile pentru majoritatea aparatelor de măsurat întîlnite în mod curent.

Aparatele de măsurat pot fi cu sensibilitate constantă sau cu sensibilitate variabilă. De exemplu balanțele cu brațe egale au sensibilitatea S variabilă. Pentru balanțe, prin convenție se utilizează sensibilitatea practică S' care este inversul sensibilității S :

$$S' = \frac{1}{S} = \frac{\Delta M}{\Delta l} \quad (6.6)$$

unde Δl este deplasarea acului indicator pe scara gradată datorată unei diferențe ΔM dintre masele corpurilor aflate pe cele două platane.

Pentru aparatele cu sensibilitate variabilă se determină sensibilitatea S pentru diferite puncte de pe scara gradată, furnizîndu-se curba de dependență a sensibilității de diferite poziții ale scării gradate.

Aparatele de măsurat cu scări gradate liniare au sensibilitatea constantă, iar aparatele cu scări gradate neliniare au sensibilitate variabilă.

Pragul de sensibilitate reprezintă cea mai mică variație a mărimii de măsurat care produce o deplasare sensibilă a indicelui.

Justețea este o caracteristică metrologică a unei măsurări de a avea o valoare nominală cît mai apropiată de cea efectivă, respectiv a unui aparat de măsurat de a furniza indicații cît mai apropiate de valoarea efectivă a mărimii de măsurat.

Cu alte cuvinte justețea caracterizează calitatea unui mijloc de măsurare de a permite măsurări cu erori minime.

Eroarea de justețe (Δj) a unei măsurări reprezintă diferența dintre valoarea nominală x_n a măsurii și media aritmetică $\bar{x}$ a valorilor efective stabilite în urma unei serii de măsurări consecutive determinate în condiții normale de utilizare.

Dacă de exemplu, valoarea nominală a unei rigle gradate este $x_n = 100 \, \text{mm}$ iar prin verificarea cu o măsură etalon se obțin rezultatele :

$$x_1 = 99,997 \, \text{mm}; \quad x_4 = 99,997 \, \text{mm};$$

$$x_2 = 99,995 \, \text{mm}; \quad x_5 = 99,995 \, \text{mm}.$$

$$x_3 = 99,996 \, \text{mm};$$

Deci

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 99,996 \text{ mm.}$$

Eroarea de justețe în acest caz este :

$$\Delta j = 100 - 99,996 = 0,004 \text{ mm.}$$

Erorile de justețe pot fi eliminate prin introducerea corecțiilor de justețe :
— în cazul măsurilor se scade eroarea de justețe din valoarea nominală a măsurii, pentru ca aceasta să coincidă cu valoarea efectivă ;

— în cazul aparatelor de măsurat corecția de justețe se scade din valoarea medie a indicațiilor aparatului.

Fidelitatea este caracteristica metrologică a unui mijloc de măsurare de a furniza indicații cât mai apropiate între ele la măsurarea repetată a aceleiași mărimi, în aceleași condiții de măsurare.

Eroarea de fidelitate este caracterizată de variația indicațiilor care reprezintă diferența dintre indicația care reprezintă valoarea cea mai mare și indicația care reprezintă valoarea cea mai mică pentru mărimea de măsurat.

Dacă de exemplu, prin măsurarea rezistenței unui rezistor cu ajutorul unei punți se obțin valorile :

$$R_1 = 10,6 \, \Omega, \quad R_5 = 10,7 \, \Omega,$$

$$R_2 = 10,2 \, \Omega, \quad R_6 = 10,9 \, \Omega,$$

$$R_3 = 10,8 \, \Omega, \quad R_7 = 10,7 \, \Omega,$$

$$R_4 = 10,5 \, \Omega, \quad R_8 = 10,4 \, \Omega,$$

eroarea de fidelitate este

$$\Delta F = 10,9 - 10,2 = 0,7 \, \Omega.$$

Fidelitatea și respectiv justețea unui mijloc de măsurare sînt cu atît mai mari cu cît eroarea de fidelitate, respectiv eroarea de justețe sînt mai mici.

Precizia este caracteristica metrologică a unui mijloc de măsurare de a furniza indicații cât mai apropiate de valoarea efectivă a mărimii măsurate.

Eroarea de precizie a unui mijloc de măsurare reprezintă eroarea globală a mijlocului de măsurare, în condiții determinate de utilizare, cuprinzînd atît eroarea de justețe cît și eroarea de fidelitate. Precizia mijlocului de măsurare este cu atît mai mare cu cît eroarea de precizie este mai mică.

Eroarea tolerată a unui mijloc de măsurare este valoarea absolută maximă a erorii de precizie, admisă de prevederile unui standard, ale unei instrucțiuni de verificare sau ale unei norme interne.

Eroarea de indicație a unui aparat de măsurat este diferența dintre indicația aparatului și valoarea efectivă a mărimii de măsurat. În această diferență nu intră erorile întâmplătoare care însoțesc procesul de măsurare.

Eroarea raportată a indicației aparatului este raportul dintre eroarea de indicație și limita superioară de măsurare a aparatului de măsurat.

Eroarea de paralaxă este eroarea care se comite atunci cînd indicele nu este în planul scării gradate, iar vizarea nu este perpendiculară pe suprafața scării gradate (fig. 6.1)

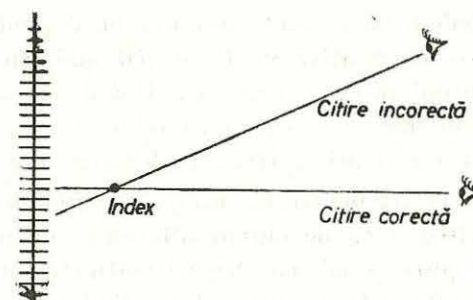


Fig. 6.1.

Clasa de precizie (C) reprezintă o valoare convențional stabilită (prin standarde, instrucțiuni, norme interne etc.) pentru ansamblul mijloacelor de măsurare care sînt supuse acelorași condiții de precizie. De obicei, clasa de precizie C exprimă eroarea relativă procentuală din limita superioară a indicației mijlocului de măsurare utilizat.

Sînt și cazuri cînd clasa de precizie se indică printr-un simplu număr convențional care nu arată, direct, precizia mijlocului de măsurare. De exemplu dacă întîlnim expresia „balanță tehnică casa 1” nu putem calcula eroarea absolută care afectează măsurarea cu balanța respectivă, dacă nu consultăm instrucțiunile care precizează erorile relative sau absolute comise prin efectuarea măsurărilor cu balanțe de diferite clase.

Dacă, însă, clasa de precizie este indicată în procente, atunci reprezintă eroarea relativă procentuală din valoarea maximă a scării gradate utilizate.

Astfel, măsurînd valoarea unei mărimi oarecare x cu un aparat cu clasa de precizie $C\%$ se comite o eroare absolută de măsurare :

$$|\Delta x| = \frac{\text{val. maximă a scării } X, C,}{100},$$

iar eroarea relativă procentuală limită va fi :

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{|\Delta x|}{x} = \frac{\text{val. maximă a scării } XC}{100 \cdot x} 100\% = \\ &= CX \frac{\text{val. max. a scării}}{x} \% \end{aligned} \quad (6.7)$$

De exemplu, un ampermetru cu clasa de precizie $1,5\%$ cu care se poate măsura intensitatea curentului electric de la 0 la 5 A introduce o eroare absolută de măsurare :

$$\Delta I = \pm \frac{5 \cdot 1,5}{100} = \pm 0,075 \text{ A} \quad (6.8)$$

Vedem că eroarea absolută nu depinde de valoarea mărimii măsurate, dar eroarea relativă va fi cu atât mai mică cu cât mărimea măsurată este mai apropiată de valoarea maximă a scării. Deoarece precizia unei măsurări este valoarea inversă a erorii relative, rezultă că pentru asigurarea unei precizii cât mai mari se impune alegerea corespunzătoare a aparatului de măsurat.

Dacă pentru măsurarea tensiunii de fază, cu valoarea nominală $U=220$ V, într-o rețea de curent alternativ dispunem de voltmetrele din tabelul 6.1, se pune problema alegerii voltmetrului care permite măsurarea tensiunii cu eroarea relativă procentuală limită cea mai mică, adică cu precizia maximă.

Tabelul 6.1

Voltmetrul	Domeniul de măsurare (V)	Clasa de precizie
1	250	1
2	300	1,5
3	600	0,5

Pe baza formulei (6.7) obținem pentru cele trei voltmetre

$$\delta_1 U = \pm 1 \cdot \frac{250}{220} = \pm 1,136 \%,$$

$$\delta_2 U = \pm 1,5 \cdot \frac{300}{220} = \pm 2,045 \%,$$

$$\delta_3 U = \pm 0,5 \cdot \frac{600}{220} = \pm 1,364 \%.$$

Rezultă că voltmetrul 1 asigură măsurarea tensiunii cu eroarea relativă limită cea mai mică, adică cu precizia cea mai mare, deși nu are clasa de precizie cea mai bună. Aceasta se datorește faptului că tensiunea măsurată ($U \approx 220$ V) este apropiată de valoarea maximă a scării (250 V) pentru voltmetrul 1.

6.2. CLASIFICAREA ERORILOR DE MĂSURARE

Rezultatul oricărei măsurări este afectat de erori ale căror origini sînt foarte diferite. Trebuie să înțelegem că realizarea măsurilor și a aparatelor de măsurat reprezintă rezultatul unor măsurări multiple și variate, care nu pot fi riguros exacte, înregistrîndu-se erori atît în procesul de etalonare cît și în procesul de măsurare ce se efectuează cu aceste mijloace de măsurare.

Unele perfecționări ale aparatelor de măsurat pot favoriza apariția erorilor de măsurare, dacă aceste aparate nu sînt menținute riguros în condițiile normale de utilizare. Astfel pentru ca un aparat de măsurat să poată sesiza variații cît mai mici ale mărimii de măsurat este necesar ca aparatul respectiv să aibă o sensibilitate cît mai mare și o inerție cît mai mică. Dar sensibilitatea mare a aparatelor de măsurat conduce la faptul că acestea înregistrează pe lîngă variațiile mărimii de măsurat și unele influențe ale mediului în care se execută măsurările, ca de exemplu, diferitele vibrații și trepidații, variații de temperatură etc.

Deoarece utilizarea mijloacelor adecvate de măsurare, precum și scrierea corectă a rezultatelor obținute prin măsurare cu erorile corespunzătoare, prezintă o importanță deosebită în toate ramurile economiei naționale, este necesară adaptarea unui sistem unitar de termeni și simboluri. Pentru fiecare domeniu de activitate există cîte un STAS (standard de stat) elaborat de Inspectoratul General de Stat pentru Controlul Calității Produselor și aprobat de Institutul Român de Standardizare. Astfel noțiunile de bază din domeniul teoriei erorilor de măsurare, principali termeni și simbolurile corespunzătoare sînt cuprinse în STAS 2872. Fiecare STAS pe lîngă numărul corespunzător care rămîne neschimbat de-a lungul anilor, cuprinde încă două cifre care indică anul în care a fost elaborat. Ultimul STAS privind erorile de măsurare (terminologie) a fost elaborat și aprobat în anul 1974 și se indică sub forma STAS 2872-74.

Principalele surse de erori se datorează următoarelor cauze:

- mijloacelor de măsurare (erori instrumentale);
- metodele de măsurare utilizate (erori de metodă);
- influența mediului înconjurător: temperatura, presiunea aerului, umiditatea aerului, cîmpuri electrice și magnetice, vibrațiile etc. (erori datorate influenței mediului ambiant);
- influența experimentatorului: atenția, acuitatea vizuală, capacitatea de acomodare, exercițiul etc. (erori personale);
- modelului asociat măsurandului (eroare de model);
- influenței mijloacelor de măsurare sau ale experimentatorului asupra măsurandului (erori de interacțiune).

A. Din punctul de vedere al surselor, de erori distingem:

a) *Eroarea instrumentală* care reprezintă ansamblul erorilor de măsurare datorită mijloacelor tehnice prin intermediul cărora se obțin informațiile de măsurare. Eroarea instrumentală cuprinde eroarea de justețe, eroarea de fidelitate, eroarea de indicație a aparatului de măsurat etc.

b) *Eroarea de metodă* este eroarea de măsurare datorită imperfecțiunilor metodelor de măsurare utilizate pentru obținerea informațiilor de măsurare.

Ca exemplu de erori de metodă putem indica măsurarea unei rezistențe prin metoda ampermetru-voltmetru. În acest caz apare eroare de metodă datorită consumului propriu al aparatelor de măsurat.

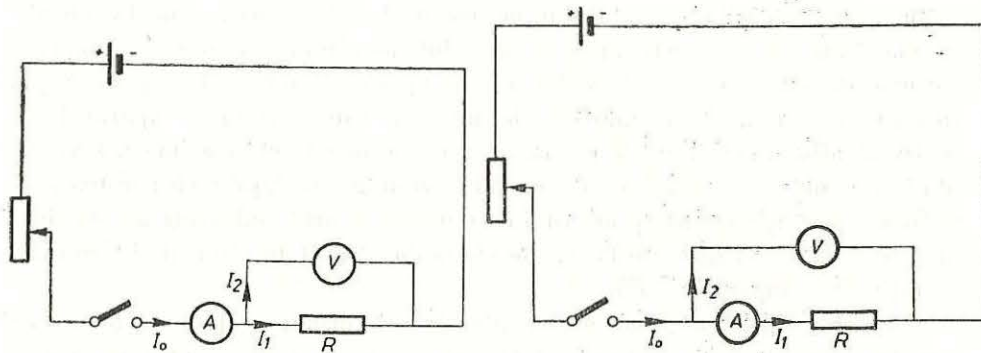


Fig. 6.2.

Fig. 6.3.

În figurile 6.2 și 6.3 sînt reprezentate două scheme utilizate pentru măsurarea rezistenței unui rezistor prin metoda ampermetru-voltmetru.

În cazul montajului din figura 6.2 obținem relațiile :

$$I_1 = I_0 - I_2 = I_0 - \frac{U}{R_V},$$

unde I_0 este intensitatea curentului electric indicată de ampermetrul A, U este tensiunea indicată de voltmetru V, iar R_V este rezistența interioară a voltmetrului.

Din relațiile :

$$I_2 R_V = I_1 R; \quad I_0 = I_1 + I_2$$

avem :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{I_0 - I_2} = \frac{R}{R_V}$$

sau

$$\frac{I_0 - I_2}{I_2} = \frac{I_0}{I_2} - 1 = \frac{R_V}{R}.$$

De unde

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{R + R_V}{R}.$$

Valoarea rezistenței R este :

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I_0 - I_2} = \frac{U}{I_0 \left(1 - \frac{I_2}{I_0}\right)} = \frac{U}{I_0 \left(1 - \frac{R}{R + R_V}\right)} = \\ &= \frac{U}{I_0 \left(\frac{R_V}{R + R_V}\right)} = \frac{U_0}{I_0} \left(1 + \frac{R}{R_V}\right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Deci eroarea absolută

$$\Delta R = \frac{U}{I_0} \frac{R}{R_V} \quad (6.10)$$

poate fi neglijată numai dacă rezistența măsurată este mult mai mică decît rezistența interioară a voltmetrului. Pentru montajul din figura 6.3, avem :

$$I_1(R_A + R) = I_1 R \left(1 + \frac{R_A}{R}\right) = U.$$

De unde

$$R = \frac{U}{I_1 \left(1 + \frac{R_A}{R}\right)}, \quad (6.11)$$

iar

$$\Delta R = \frac{U}{I_1} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R}}\right) = \frac{U}{I_1} \frac{R_A}{R + R_A}. \quad (6.12)$$

Deci pentru ca valoarea rezistenței R să fie cît mai apropiată de raportul U/I_1 este necesar ca rezistența R , măsurată, să fie mult mai mare decît rezistența internă R_A a ampermetrului.

Vedem deci că utilizînd montajele din figurile 6.2 și 6.3 pentru măsurarea unei rezistențe comitem erori de metodă, ale căror valori depind de raportul R/R_A (6.10), respectiv R/R (6.12).

c) *Erori datorate influenței mediului ambiant* reprezintă erorile care afectează măsurările efectuate fără respectarea condițiilor normale de utilizare a măsurilor sau aparatelor utilizate.

În țara noastră, prin STAS 6300-74 se stabilesc condițiile de încercare și de referință pentru mijloacele de măsurare ale căror caracteristici variază sub influența mediului ambiant.

Astfel condițiile standard de referință pentru încercări și măsurări sînt :

- temperatura : 20°C ;
- presiunea : 1 atm = 101 325 N/m² ;
- umiditatea relativă : 65 % ;
- cîmpurile electrice și magnetice exterioare trebuie să lipsească.

Pentru influența vibrațiilor, iluminării, zgomotului, componenta aerului etc. nu s-au stabilit încă condiții de referință deoarece nu se cunosc încă, suficient de bine, legile după care acești factori influențează funcționarea mijloacelor de măsurare.

d) *Erori personale* sînt erorile de măsurare care se datoresc experimentatorului care efectuează măsurarea. Erorile efectuate de experimentator depind foarte mult de calitățile și deprinderile acestuia. Anomaliile ochiului observatorului, viteza de reacție, capacitatea de acomodare, nerealizarea coincidenței la vizarea scării gradate reprezintă unele din sursele de erori personale. Dacă în urma unei măsurări acul indicator al aparatului de măsurat se află între două repere, adică nu coincide cu nici unul din reperele scării gradate, se impune efectuarea unei interpolări vizuale. Operatorul fără experiență poate efectua eronat aceste interpolări. Se recomandă ca pentru un anumit tip de măsurări să nu se schimbe experimentatorul, pentru a-și putea însuși deprinderile necesare.

e) *Eroarea de model* este eroarea de măsurare datorată imperfecțiunilor (eronării) modelului asociat măsurandului. Această eroare apare, de regulă, atunci cînd nu cunoaștem precis proprietățile măsurandului. De exemplu, dacă pentru o piesă considerată cilindrică, măsurăm un singur diametru al secțiunii transversale putem comite eroare de model dacă în realitate piesa are secțiune transversală eliptică.

f) *Eroarea de interacțiune* este eroarea de măsurare determinată de influențele pe care mijloacele de măsurare sau experimentatorul le exercită asupra valorii măsurandului. Astfel de erori pot apărea, de exemplu, dacă prin măsurarea temperaturii în interiorul unui vas, introducerea termometrului conduce la modificarea temperaturii din interiorul vasului, sau în procesul de măsurare a capacității unui condensator apropierea experimentatorului modifică capacitatea de măsurat.

B. Din punctul de vedere al dependenței erorii de măsurare de valoarea mărimii măsurate avem:

a) *Eroarea aditivă* reprezintă eroarea de măsurare care nu depinde de valoarea mărimii măsurate. De exemplu, în cazul deplasării indicelui unui aparat de măsurat eroarea de măsurare nu depinde de valoarea mărimii măsurate (formula 6.8).

b) *Eroarea multiplicativă* este eroarea de măsurare care depinde de valoarea mărimii măsurate.

În general eroarea multiplicativă este egală cu un produs în care unul din termeni reprezintă valoarea mărimii măsurate. Dacă, de exemplu, se măsoară cu puntea Wheatstone (fig. 6.4) rezistența R_x , prin metoda compensației obținem expresia:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (6.13)$$

Notînd cu ΔR_2 , ΔR_3 și ΔR_4 erorile absolute ale valorilor rezistențelor R_2 , R_3 și R_4 putem calcula eroarea absolută ΔR_x cu care se determină rezistența R_x .

Aplicînd formula (2.42) aflăm eroarea absolută a produsului $R_2 R_3$.

$$\Delta(R_2 R_3) = R_2 \cdot \Delta R_3 + R_3 \cdot \Delta R_2$$

iar pe baza formulei 2.50 avem:

$$\begin{aligned} \Delta R_x &= \frac{1}{R_4^2} (R_4 \Delta(R_2 R_3) + R_2 R_3 \Delta R_4) = \\ &= \frac{1}{R_4^2} (R_4 R_2 \Delta R_3 + R_3 R_4 \Delta R_2 + R_2 R_3 \Delta R_4) = \\ &= \frac{R_2 R_3}{R_4} \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \end{aligned}$$

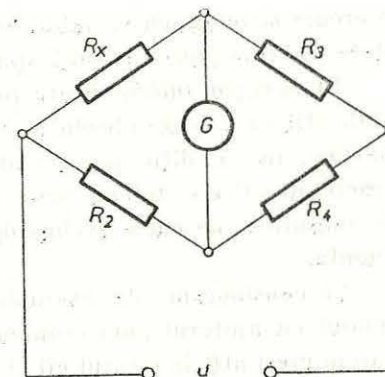


Fig. 6.4.

sau

$$\Delta R_x = R_x \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (6.14)$$

Vedem că în acest caz eroarea absolută a valorii rezistenței $R_x (\Delta R_x)$ este proporțională cu valoarea rezistenței obținută prin măsurări. Eroarea relativă însă:

$$\delta R_x = \frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4} \quad (6.15)$$

nu depinde de valoarea R_x obținută în urma măsurării.

C. Dacă se măsoară de mai multe ori o mărime fizică de valoare nominală cunoscută, în condiții identice, cu aceleași mijloace de măsurare și de către același experimentator, se constată că erorile care însoțesc măsurările respective au caracter diferit. Astfel unele se mențin constante, altele variază de la o măsurare la alta, iar altele sînt foarte mari, depășind erorile tolerate de mijloacele de măsurare utilizate. Această constatare a condus la posibilitatea clasificării erorilor de măsurare „după caracterul lor” sau din punctul de vedere al structurii statistice a acestora. Din acest punct de vedere, erorile de măsurare se clasifică astfel:

a) *Eroarea sistematică* reprezintă eroarea care rămîne constantă atît ca valoare absolută cît și ca semn, atunci cînd se măsoară repetat aceeași mărime fizică, în condiții practic identice, sau care variază după o lege definită cînd se modifică condițiile de măsurare. De exemplu dacă la o cîntărire se utilizează un etalon a cărui masă se consideră 1 kg, dar valoarea sa convențională adevărată este mai mare sau mai mică decît 1 kg vom obține o eroare sistematică constantă. De asemenea, dacă utilizăm pentru măsurarea unei lungimi, o riglă metalică gradată la o temperatură diferită de temperatura la care a fost calibrată rigla respectivă, vom obține tot o eroare sistematică constantă.

O eroare sistematică variabilă se poate obține în cazul când există o nestabilitate în funcționarea unui aparat electronic.

b) *Eroarea întâmplătoare (aleatoare)* este eroarea care variază imprevizibil, atât ca valoare absolută cât și ca semn, când se măsoară repetat aceeași mărime, în condiții practic identice. Prin măsurări efectuate în condiții practic identice se înțeleg măsurările efectuate cu aceleași mijloace și metode de măsurare, de către același operator, sub acțiunea acelorași factori de influență.

Să considerăm, de exemplu, măsurarea perioadei de oscilații a unui pendul cu ajutorul unui cronometru. Efectuând măsurarea de mai multe ori putem greși atât la stratul cât și la oprirea cronometrului. Acest lucru va conduce la o dispersie a rezultatelor obținute în fiecare măsurare în parte, adică unele rezultate vor indica valori mai mari, iar altele valori mai mici pentru perioada T . Cum abaterile de la valoarea reală a perioadei pendulului sînt întâmplătoare, rezultatele măsurării pot fi privite ca fenomene aleatorii. Erorile aleatorii nu pot fi eliminate cu ajutorul unor corecții aplicate rezultatului brut al măsurării, cum este uneori posibil în cazul erorilor sistematice.

c) *Eroare grosolană (sau greșeală)* reprezintă eroarea care depășește considerabil erorile cele mai probabile, specifice condițiilor date de măsurare. Astfel de erori pot apărea dacă se utilizează mijloace de măsurare defecte sau dacă se utilizează defectuos un mijloc de măsurare. Într-o serie de măsurări efectuate asupra aceleiași mărimi fizice, în condiții practic identice, valorile afectate de erori grosolane trebuie identificate și eliminate din șirul de rezultate obținute.

Pentru evitarea erorilor grosolane este necesar să se acorde o atenție corespunzătoare efectuării măsurărilor, făcîndu-se mai multe verificări și controale.

Presupunînd că se iau toate măsurile, pentru înlăturarea greșelilor de măsurare, în cele ce urmează, nu ne vom mai ocupa de aceste erori.

6.3. ERORI SISTEMATICE. UNELE PROCEDEE DE ELIMINARE A ERORILOR SISTEMATICE

Cu toate că în construcția mijloacelor de măsurare, se iau toate măsurile pentru înlăturarea eventualelor defecte, se întâmplă destul de des ca indicațiile acestora să fie însoțite de așa-numitele *erori instrumentale reziduale*. Așa pot apărea erori de diviziune la scările gradate, erori de excentricitate la aparatele cu cadru mobil etc.

Pot apărea erori sistematice și datorită unor concentrări imperfecte în cadrul unei instalații de măsurare. Astfel unele conectări în scheme electrice pot deveni surse de tensiune electromotoare de contact sau de rezistențe suplimentare în circuit.

Să considerăm instalația de măsurare din figura 6.5 utilizată pentru măsurarea raportului rezistențelor R_1 și R_2 . Acumulatorul E_1 asigură o diferență de potențiale între capetele AC ale reostatului cu cursor. Rezistențele R_1 și R_2 sînt conectate, în serie, în circuitul acumulatorului E_2 . Deoarece intensitatea curentului electric, prin cele două rezistențe, este aceeași, diferențele de potențial de la capetele acestor rezistențe va fi :

$$U_1 = IR_1 ; U_2 = IR_2$$

și

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad (6.16)$$

Conectăm punctul a cu punctul c și punctul b cu punctul d și deplasăm cursorul B pînă cînd intensitatea curentului electric prin galvanometru devine egală cu zero. Fixăm astfel distanța $AB = x_1$ pe scara reostatului. Apoi conectăm punctul a cu punctul e și punctul b cu punctul f și din nou deplasăm cursorul B pînă cînd intensitatea curentului indicată de galvanometru devine zero, fixînd noua poziție x_2 pe scara reostatului. Deoarece rezistența R_{AB} este proporțională cu distanța $AB = x$ iar galvanometrul indică intensitatea curentului egală cu zero cînd $X_{AB} = U_1$ respectiv $U_{AB} = U_2$. Rezultă deci raportul :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad (6.17)$$

Din formulele (6.16) și (6.17) obținem :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (6.18)$$

Rezistențele variabile R' și R'' permit reglarea intensității curentului din circuitele acumulatorilor E_1 și E_2 , astfel încît distanțele x_1 și x_2 să fie cuprinse în limitele scării reostatului.

Să analizăm care sînt sursele posibile de erori în cazul acestei măsurări. Vom încerca să enumerăm unele din aceste surse de erori sistematice.

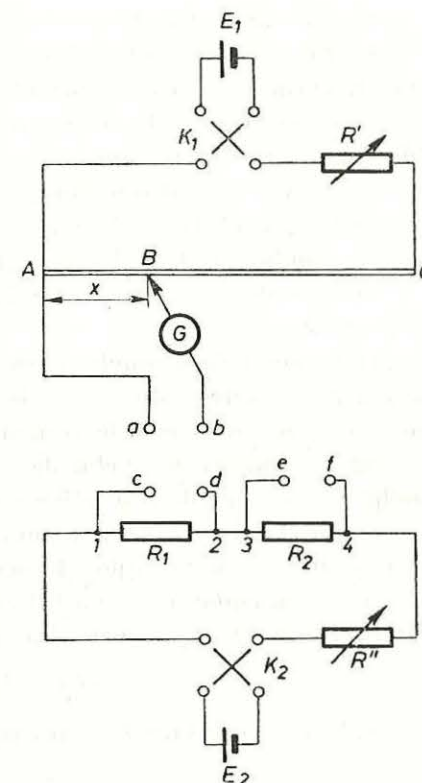


Fig. 6.5.

a) Pot exista defecte de trasare a reperelor pe scara reostatului cu cursor.
b) Intensitățile curentului electric prin reostat pot să nu fie egale în ambele măsurări și atunci formula (6.17) nu este riguros adevărată.

c) Reperul zero de pe scara reostatului poate să nu corespundă unei diferențe de potențial egale cu zero. Adică dacă cursorul B se află la reperul zero pe scara reostatului putem avea o diferență de potențial $U_{AB} \neq 0$.

d) Reostatul AC poate avea o rezistență neuniformă pe întreaga lungime, ceea ce conduce la faptul că relația (6.17) este valabilă numai aproximativ.

e) Valorile R_1 și R_2 pot depinde de modul de conectare în punctele 1, 2, 3 sau 4.

f) În afară de acumulatele E_1 și E_2 în circuit pot apărea alte surse de tensiune electromotoare, ca de exemplu tensiune electromotoare de contact sau tensiune termoelectromotoare.

Să ne ocupăm de modul de detectare a surselor indicate de erori și de modul în care erorile respective pot fi eliminate.

a) Fie L_0 dimensiunea nominală a scării gradate a reostatului. Dacă prin măsurarea cu un mijloc de măsurare etalon obținem lungimea L_e atunci corecția de inscripție (C_i) a unei diviziuni a scării gradate este diferența dintre valoarea efectivă L_e și valoarea nominală L_0 :

$$C_i = L_e - L_0. \quad (6.19)$$

Valoarea corectată L_e a inscripției măsurii va fi egală cu:

$$L_e = L_0 - C_i. \quad (6.20)$$

Astfel putem introduce corecția C_i (6-20) pentru eliminarea eventualelor defecte ale scării gradate a reostatului.

b) Intensitățile curentilor prin porțiunile de circuit AB , 1-2 și 3-4 depind de tensiunile electromotoare ale acumulatele E_1 și E_2 . Deci pentru eliminarea unor astfel de erori este necesar să se asigure stabilitatea acumulatele E_1 și E_2 . Pentru aceasta trebuia ca:

- acumulatele să fie bine încărcate;
- pauza între măsurările mărimilor x_1 și x_2 să fie cât mai scurtă.

Se știe că tensiunea electromotoare a acumulatele nu este constantă în timp și deci nu se poate asigura un regim riguros stabil al acestora. În astfel de situații se recomandă efectuarea măsurării mărimilor x_1 și x_2 după metoda „sandviș”. Astfel se măsoară inițial distanța x_1 obținându-se valoarea x'_1 , apoi distanța x_2 , iar după aceasta din nou distanța x_1 care conduce la valoarea x''_1 . Valoarea x_1 , se ia ca medie aritmetică a valorilor x'_1 și x''_1 :

$$x_1 = \frac{x'_1 + x''_1}{2}. \quad (6.21)$$

Putem repeta de câteva ori această metodă de măsurare, considerând media valorilor obținute. Prin aceasta eroarea datorată variației tensiunii electromotoare a acumulatele E_1 și E_2 este practic eliminată.

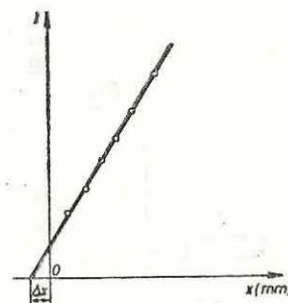


Fig. 6.6.

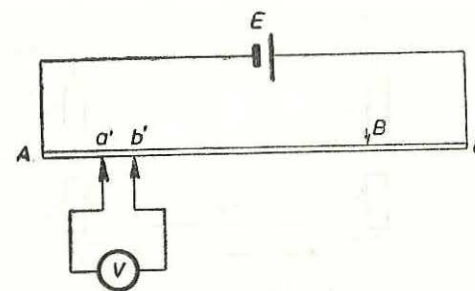


Fig. 6.7.

c) În practică este foarte greu să se realizeze ca în cazul când cursorul B se află pe reperul zero, tensiunea X_{AB} să fie egală cu zero. De aceea este posibil să existe o eroare sistematică Δx care trebuie adăugată la valoarea x citită pe scara reostatului. Pentru stabilirea acestei corecții se unește punctul a cu punctul b (fig. 6.5) și se măsoară intensitatea curentului, indicată de galvanometru, pentru câteva valori x apropiate de reperul zero (fig. 6.6). Extrapolind dependența liniară obținută obținem corecția Δx . Prin adăugarea valorii Δx la valorile x_1 și x_2 citite pe scara reostatului, se elimină eroarea sistematică, datorată reperului zero.

d) Dacă înfășurarea reostatului nu este defectă, rezistența unității de lungime este aceeași pe toată lungimea reostatului. Putem verifica dacă rezistența reostatului este omogenă, măsurând diferența de potențial între două puncte a' și b' care se deplasează în lungul reostatului astfel ca distanța dintre ele să rămână constantă (fig. 6.7).

e) În acest punct se pune problema dacă raportul R_1/R_2 reprezintă într-adevăr raportul rezistențelor rezistorilor respectivi sau rezistențele R_1 și R_2 includ pe lângă rezistențele rezistorilor și rezistențele altor elemente ale circuitului. Din principiul de funcționare a instalației indicate în figura 6.5 rezultă că rezistențele conductoarelor $c - 1$, $d - 2$, $e - r$ și $f - 4$ nu prezintă importanță, deoarece se fixează distanțele x_1 și x_2 când intensitatea curentului prin aceste conductoare este egală cu zero și deci căderile de tensiune pe acești conductori este zero, indiferent de rezistențele lor.

Se știe că în locul de conectare a doi conductori apare o rezistență de contact de ordinul a $10^{-6} \Omega$. Dacă valorile rezistențelor măsurate sînt suficient de mari ($\geq 1 \Omega$) nu este necesar să ținem seama de valorile rezistențelor de contact. În cazul în care valorile rezistențelor R_1 și R_2 sînt mici ($10^{-3} - 10^{-4} \Omega$) se impune o analiză atentă a modului de conectare a rezistorilor R_1 și R_2 .

Să considerăm cazul rezistorului cu două cleme. În acest caz în fiecare clemă se conectează doi conductori, unul de la acumulator-conductor de

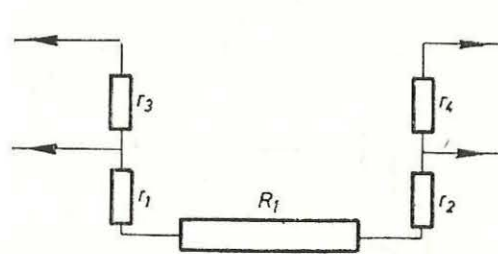


Fig. 6.8.

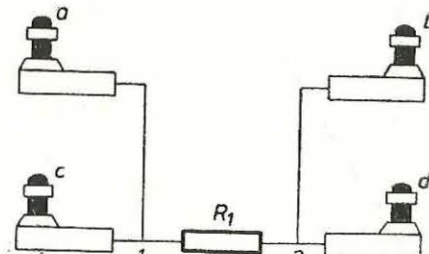


Fig. 6.9.

tensiune și altul de la galvanometru-conductor de curent. Schema echivalentă a conectării rezistorului cu două cleme este dată în figura 6.8.

Rezistențele r_1 și r_2 reprezintă rezistențele de contact ale conductorilor de tensiune, iar r_3 și r_4 rezistențele de contact ale conductorilor, de curent. În procesul de măsurare se obține nu rezistența R_1 a rezistorului, ci de fapt $R_1 + r_1 + r_2$. Analog, putem ajunge la aceeași concluzie și în cazul rezistorului R_2 .

Pentru înlăturarea acestor neajunsuri, care pot conduce la erori sistematice, se recurge la utilizarea rezistorilor cu patru cleme (fig. 6.9). Conductorii de curent se conectează la clemele a și b , iar conductorii de tensiune la clemele c și d .

În acest caz rezistențele de contact nu au nici o influență asupra măsurărilor. Rezistențele în contactele a și b nu prezintă nici o sursă de erori, dacă rămân constante în timpul măsurării iar rezistențele de contact c și d la fel nu influențează și deci se măsoară direct rezistența între punctele 1 și 2, adică rezistența reală a rezistorului.

f) Toate punctele de conectare a conductorilor, din diferite materiale, pot constitui surse de tensiune electromotoare, datorită efectului termoelectric. Cele mai importante surse de tensiune electromotoare sînt locurile de contact a firelor de cupru și a clemelor de alamă. Analizînd schema din figura 6.5 se poate vedea că orice sursă de tensiune electromotoare, în serie cu acumulatorii E_1 și E_2 , nu prezintă importanță, deoarece prin efectuarea măsurărilor nu ne interesează valorile intensităților curentului în circuitele celor două acumulatori. Este important numai ca intensitățile acestor curenți să fie constante în timpul măsurării. Dacă însă în circuitul galvanometrului A_{ac} 12dbBA, avem surse suplimentare de tensiuni electromotoare acestea conduc la apariția unor erori în valorile x_1 și x_2 . Pentru a exclude, aceste erori trebuie să măsurăm mărimile x_1 și x_2 de cîte două ori, o dată cînd acumulatorii E_1 și E_2 sînt conectate ca în figura 6.5, iar a doua oară schimbînd polaritățile celor două acumulatori. Deoarece prin aceasta sensul tensiunilor termoelectrice nu se schimbă, media celor două măsurări pentru x_1 și x_2 reprezintă rezultatul care s-ar fi obținut în absența tensiunilor electromotoare suplimentare.

Vedem, deci că pentru înlăturarea surselor de erori sistematice se impune o analiză atentă a instalației de măsurare în fiecare caz concret în parte. Există însă cîteva procedee generale care se recomandă a fi utilizate în scopul eliminării erorilor sistematice.

În primul rînd se caută să se elimine sursele de erori sistematice, ceea ce implică un studiu prealabil al erorilor și introducerea corecțiilor acolo unde este cazul.

Putem indica următoarele metode folosite pentru eliminarea erorilor sistematice.

1) *Metoda substituției* (vezi § 5.1). Această metodă se folosește în special, pentru eliminarea erorilor sistematice, provenite din lipsa de egalitate riguroasă a lungimii brațelor unei balanțe considerată că are brațele egale.

Dacă dorim să măsurăm masa M_x a unui corp, se așază acest corp pe unul din talerele balanței, iar pe celălalt taler se așază greutatea cu masa cunoscută pînă cînd se echilibrează greutatea corpului de masă M_x . Fie această masă M_1 . Deoarece echilibrul balanței se determină prin egalitatea momentelor.

$$M_x g l_1 = M_1 g l_2 \quad (6.22)$$

unde l_1 și l_2 sînt lungimile brațelor balanței. Rezultatul

$$M_x = M_1 \quad (6.23)$$

este corect numai dacă cele două brațe ale balanței sînt riguros egale, ceea ce practic este imposibil. Deci rezultatul (6.23) este afectat de o eroare sistematică constantă. Pentru înlăturarea acestei erori se ia corpul de masă M_x de pe talerul balanței și se înlocuiește cu greutatea de masă cunoscute (să admitem M_2) pînă se obține din nou echilibrul balanței. Astfel avem

$$M_2 g l_1 = M_1 g l_2 \quad (6.24)$$

Din relațiile (6.22) și (6.24) se obține

$$\frac{M_x}{M_2} = 1; \quad M_x = M_2 \quad (6.25)$$

Rezultatul (6.25) nu este afectat de erori sistematice.

2) *Metoda opoziției* constă în aranjarea experienței astfel ca eroarea provocată de un factor oarecare să intre în rezultatele măsurării o dată cu semnul plus și altă dată cu semnul minus sau, cu alte cuvinte, acest factor să exercite acțiuni contrare asupra rezultatelor.

Această metodă a fost utilizată la punctul f în studiul experienței pentru stabilirea raportului R_1/R_2 în scopul eliminării erorilor sistematice datorate surselor de tensiuni electromotoare suplimentare.

De asemenea, se știe că șuruburile micrometrice utilizate la micrometrele-ocular de la aparatele de măsurat au o cursă moartă, care poate provoca

erori sistematice. Pentru eliminarea acestei erori, se recomandă efectuarea a două citiri, în direcții opuse rotirii șurubului. Dacă d_1 și d_2 sînt rezultatele celor două citiri atunci

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

reprezintă indicația care nu conține eroarea sistematică datorată cursei moarte.

3) *Metoda observațiilor simetrice* se utilizează atunci cînd în metoda de măsurare există o anume simetrie, adică prin permutarea unor părți a instalației de măsurare nu se schimbă nimic. De exemplu, dacă trebuie să măsurăm temperaturile t_1 și t_2 în punctele P_1 și P_2 cu termometrele T_1 și T_2 , rezultatele măsurării nu trebuie să se schimbe dacă schimbăm termometrele între ele. Dacă însă constatăm că în urma permutării termometrelor se obțin rezultate diferite, înseamnă că indicațiile acestora sînt eronate. În cazul în care indicațiile celor două termometre, în același punct, sînt apropiate, valoarea medie a celor două indicații va fi afectată de erori sistematice mai mici decît valoarea unei singure indicații.

Desigur că în acest paragraf, nu am indicat toate posibilitățile de eliminare a erorilor sistematice. Problema eliminării erorilor sistematice necesită o analiză detaliată atît a condițiilor de măsurare, cît și a datelor obținute. O importanță hotărîtoare în acest sens o are experiența și priceperea experimentatorului.

Se poate afirma că influența erorilor sistematice asupra măsurărilor poate fi, în cele mai multe cazuri, cunoscută și eliminată prin corecțiile ce se aplică sau prin mijloacele speciale de măsurare utilizate. Erorile sistematice care nu pot fi eliminate și care se consideră mai mici decît erorile tolerate de mijloacele de măsurare utilizate, se numesc *erori sistematice reziduale* și se includ în grupa erorilor întîmplătoare.

6.4. ERORI ÎNȚIMPLĂTOARE

Dacă se efectuează un număr n de măsurări directe, succesive asupra unei mărimi fizice, cu mijloace și metode de măsurare adecvate, se obțin valorile individuale ale mărimii măsurate.

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_n \quad (6.26)$$

În cele ce urmează vom considera, că valorile individuale (6.26) au fost corectate de erorile sistematice, prin metode indicate în paragraful 6.3, și deci acestea conțin numai erori întîmplătoare sau erori sistematice reziduale, care se consideră tot erori întîmplătoare.

Erorile întîmplătoare influențează rezultatele măsurărilor succesive ale acelorași mărimi fizice, cînd într-un sens, cînd într-altul ceea ce conduce

la faptul că valorile individuale vor fi cînd mai mici, cînd mai mari decît valoarea adevărată x_0 a mărimii măsurate.

Trebuie subliniat că obținerea rezultatelor individuale diferite în mică măsură unele de altele, precum și a unor rezultate care coincid între ele, este o consecință logică a condițiilor de măsurare. Dacă prin repetarea măsurărilor se obțin riguros aceleași valori individuale, înseamnă că metoda de măsurare utilizată nu este suficient de sensibilă.

Fiecare valoare individuală x_i este afectată de eroarea absolută întîmplătoare :

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \quad (6.27)$$

unde x_0 este valoarea adevărată a mărimii măsurate.

6.4.1. Proprietățile erorilor întîmplătoare. Densitatea de repartiție Gauss.

S-a constatat, din practica măsurărilor, că erorile întîmplătoare Δx_i posedă următoarele proprietăți :

a) Erorile Δx_i mici, în valoare absolută, sînt mai frecvente decît erorile Δx_i mai mari, în valoare absolută. Adică cazurile în care erorile întîmplătoare sînt mici, sînt mai frecvente decît cazurile în care erorile întîmplătoare sînt mari (*principiul cauzal*).

b) Toate erorile întîmplătoare sînt mai mici decît o anumită limită, care ar corespunde erorii datorate tuturor cauzelor de erori (*principiul limitativ*).

c) Dacă numărul n al măsurărilor este suficient de mare se constată că numărul erorilor negative este egal cu numărul erorilor pozitive, iar suma algebrică a erorilor întîmplătoare

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (6.27')$$

este foarte mică (*principiul distributiv*).

d) Probabilitatea ca să avem o anumită eroare întîmplătoare, prin efectuarea unei măsurări, depinde de valoarea absolută a erorii (*principiul probabilistic*).

Aceste proprietăți ale erorilor întîmplătoare sînt obținute din practică și se consideră ca axiome.

Rezultatele unei serii de măsurări pot fi reprezentate grafic, pentru a avea o imagine mai clară asupra frecvențelor cu care apar anume rezultate individuale ale măsurărilor.

De exemplu, în tabelul 6.1 se indică rezultatele a 100 de măsurări a vitezei luminii, obținute de Michelson în anul 1879.

Datele din tabelul 6.1 sînt reprezentate în figura 6.10, sub forma unor bare verticale de lungime cu numărul n_i de apariție a valorii individuale respective.

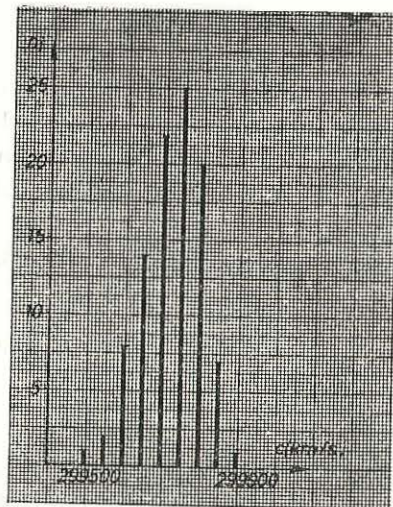


Fig. 6.10.

Valorile individuale obținute în urma efectuării unui set de măsurări, pot fi reprezentate și sub forma unei histograme. Pentru construcția histogramei se împarte întregul domeniu în care sînt cuprinse valorile individuale în părți egale, reprezentîndu-se numărul n_i de valori individuale cuprinse într-un interval oarecare. Lărgimea intervalului poate fi aleasă arbitrar, dar nu poate fi luată mai mică decît eroarea absolută care afectează măsurarea respectivă.

În tabelul 6.2 se indică rezultatele a 1 000 de măsurări privind impuritățile (în g/l) în apa industrială.

Tabelul 6.1

C în km/s	Numărul n_i de apariție
299 050	1
299 550	2
299 600	8
299 650	14
299 700	22
299 750	25
299 800	20
299 850	7
299 900	1

Tabelul 6.2

Impurități în g/l	40±5	50±5	60±5	70±5	80±5	90±5	100±5
n	11	48	160	385	246	113	37

În figura 6.11 sînt reprezentate, sub formă de histogramă, datele din tabelul 6.2.

Dacă numărul total n de măsurări este suficient de mare, în locul histogramei, se poate construi o curbă (fig. 6.12) care reprezintă densitatea de repartiție $f(x)$. Cunoașterea densității de repartiție $f(x)$ este de o deosebită importanță deoarece produsul $f(x)\Delta x$ reprezintă probabilitatea ca valoarea individuală a unei măsurări să fie cuprinsă între x și $x + \Delta x$.

Figurile 6.10—6.12 reprezintă rezultatele tipice obținute în cazul unui set de n măsurări directe, în condiții identice, pentru aceeași mărime fizică. În toate cazurile, valorile individuale x_i nu apar cu aceeași frecvență. Rezul-

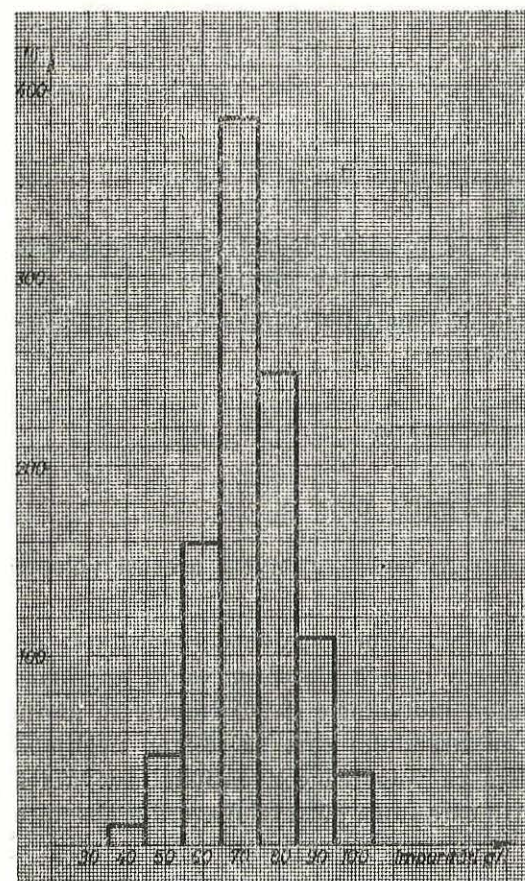


Fig. 6.11.

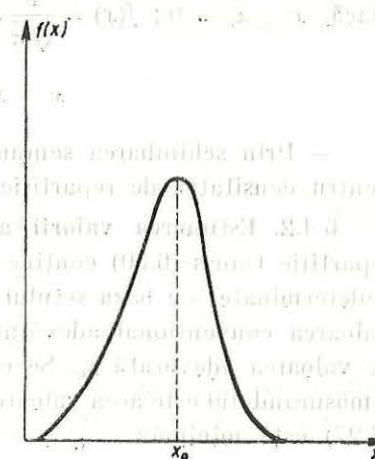


Fig. 6.12.

tatele care indică valori x_i mai apropiate de valoarea reală x_0 apar cu o frecvență mai mare decît rezultatele individuale x_i mai depărtate de x_0 .

Karl F. Gauss (1777—1855) a arătat (1821) că densitatea de repartiție care satisface cele 4 proprietăți fundamentale ale erorilor întîmplătoare are forma :

$$f(x) = K e^{-h^2(x-x_0)^2} \quad (6.28)$$

unde K și h sînt constante.

Din condiția ca aria mărginită de densitatea de repartiție $f(x)$ și axa x să fie egală cu 1, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca în urma unei măsurări să se obțină oricare din valorile individuale posibile este egală cu 1, se obține relația :

$$K = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad (6.29)$$

Deci densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2} \quad (6.30)$$

reprezintă densitatea de repartiție Gauss, numită uneori și clopotul lui Gauss sau densitatea de repartiție normală.

Parametrul h se numește indicele de precizie deoarece, așa cum vom vedea ulterior, caracterizează precizia măsurărilor efectuate.

Se poate ușor vedea că densitatea de repartiție (6.30) satisface proprietățile enumerate ale erorilor întâmplătoare:

Dacă, $x - x_0 = 0$; $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, valoare maximă

$$x - x_0 = \pm \infty f(x) = 0$$

— Prin schimbarea semnului erorii $\Delta x = x - x_0$ avem aceeași valoare pentru densitatea de repartiție $f(x)$.

6.4.2. Estimarea valorii adevărate x_0 . Erori aparente. Densitatea de repartiție Gauss (6.30) conține parametri x_0 și h ale căror valori au rămas nedeterminate. Pe baza setului de valori individuale (6.26) trebuie să găsim valoarea convențional adevărată a măsurandului care să difere neglijabil de valoarea adevărată x_0 . Se consideră că valoarea convențional adevărată a măsurandului este cea valoare pentru care suma pătratelor erorilor absolute (6.27) este minimă:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \dots + (x_n - x_0)^2 \quad (6.31)$$

Deci trebuie să aflăm valoarea x_0 pentru care funcție

$$f(x_0) = (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \dots + (x_n - x_0)^2 \quad (6.31')$$

este minimă. Pentru aceasta trebuie ca derivata funcției $f(x_0)$ în raport cu x_0 , să fie zero.

$$\frac{df(x_0)}{dx_0} = -2(x_1 - x_0) - 2(x_2 - x_0) - \dots - 2(x_n - x_0) = 0$$

sau

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_0 = 0$$

de unde

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (6.32)$$

Deci valoarea convențional adevărată a măsurandului, care aproximează cel mai bine valoarea adevărată x_0 este valoarea medie aritmetică a setului de valori individuale

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.33)$$

Pentru prescurtare, în cazul cînd nu pot avea loc confuzii, noțiunea valoare medie aritmetică a rezultatelor unui șir de măsurări poate fi denumită și valoare medie a lui x , sau $\bar{X}$ barat (STAS 2872-74).

Trebuie subliniat că $\bar{X}$ reprezintă valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate, adică valoarea care se poate considera cea mai bună, cea mai justă, cea mai apropiată de valoarea adevărată x_0 , dar $\bar{X}$ nu coincide cu valoarea adevărată x_0 .

Scriem erorile absolute întâmplătoare

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

Desigur că aceste erori reale nu sînt cunoscute, deoarece nu cunoaștem valoarea adevărată x_0 , ci numai valoarea $\bar{X}$ care estimează cel mai bine valoarea adevărată.

Făcînd suma termenilor din relația (6.34) obținem:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i) = \sum_{i=1}^n x_i - nx_0,$$

sau ținînd seama de formula (6.33) avem:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i) = n(\bar{X} - x_0)$$

de unde

$$\bar{X} - x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i). \quad (6.35)$$

Cu cît numărul măsurărilor este mai mare, cu atît mai bine este aproximată valoarea reală x_0 de valoarea medie $\bar{X}$.

Ținînd seama de proprietatea fundamentală a erorilor întâmplătoare, de a se distribui complet dezordonat, astfel încît pentru un număr suficient

de mare de determinare să avem în medie tot atâtea valori pozitive cîte negative, avem relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0. \quad (6.36)$$

Din această relație rezultă că valoarea medie a erorilor reale

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i) \quad (6.37)$$

nu poate constitui o mărime convenabilă pentru studiul proprietăților și rezultatelor măsurărilor afectate de erori. Inițial s-a încercat să se introducă în calcul valorile absolute ale erorilor reale, numite abateri absolute

$$\begin{aligned} |\Delta x_1| &= |x_1 - x_0| \\ |\Delta x_2| &= |x_2 - x_0| \\ &\dots \dots \dots \\ |\Delta x_n| &= |x_n - x_0| \end{aligned} \quad (6.38)$$

și să se definească eroarea medie, ca fiind media aritmetică a abaterilor absolute

$$\theta = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n}. \quad (6.39)$$

S-a constatat însă că eroarea medie θ prezintă o serie de inconveniente, pentru care amintim faptul că nu scoate în evidență gradul de precizie al operațiilor de măsurare și observație.

Astfel, dacă elevul A, în urma măsurării cu picnometrul a densității unui lichid, obține rezultatele din tabelul 6.3.

Tabelul 6.3

Măsurarea	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rezultatul ρ , în kg/m ³	530	480	460	520	490	500	540	470	480	530

iar elevul B obține datele din tabelul 6.4.

Tabelul 6.4

Măsurarea	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rezultatul în kg/m ³	500	490	430	520	510	490	580	800	530	510

Dacă valoarea adevărată a densității lichidului respectiv este $\rho_0 = 500 \text{ kg/m}^3$, erorile medii ce însoțesc măsurările efectuate de cei doi elevi sînt:

$$\theta_1 = \frac{30 + 20 + 40 + 20 + 10 + 0 + 40 + 30 + 20 + 30}{10} = 24 \text{ kg/m}^3$$

și

$$\theta_2 = \frac{0 + 10 + 70 + 20 + 10 + 10 + 80 + 0 + 30 + 10}{10} = 24 \text{ kg/m}^3$$

Obținindu-se egalitatea $\theta_1 = \theta_2$, ar putea rezulta că ambii elevi au efectuat măsurările cu același grad de precizie, adică cu aceeași atenție, ținînd seama în aceeași măsură de eventualele perturbații ce pot erona rezultatele măsurării. Această concluzie este evident eronată. Eroarea de fidelitate este $540 - 460 = 80 \text{ kg/m}^3$ în cazul măsurărilor efectuate de elevul A și $580 - 430 = 150 \text{ kg/m}^3$, pentru măsurările efectuate de elevul B. De asemenea se observă că în șirul de măsurări, efectuate de elevul B, apar două măsurători cu erori absolute foarte mari care au aspectul de erori grosolane. Acestea conduc la concluzia că setul măsurărilor efectuate de elevul B este mai puțin precis. Se poate demonstra că eroarea medie pătratică a unei măsurări individuale

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}{n} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.40)$$

este mărimea cea mai indicată pentru studiul proprietăților și rezultatelor măsurărilor afectate de erori.

Calculînd erorile medii pătratice pentru rezultatele indicate în tabelele 6.3 și 6.4 obținem:

$$\sigma_1 = \left(\frac{7\,200}{10} \right)^{1/2} \approx 27 \text{ kg/m}^3$$

și

$$\sigma_2 = \left(\frac{13\,000}{10} \right)^{1/2} \approx 36 \text{ kg/m}^3$$

Din aceste rezultate se obține că șirul de măsurări efectuate de elevul A este efectuat cu mai multă grijă, decît șirul de măsurări efectuat de elevul B.

Avantajul introducerii erorii medii pătratice σ constă și în faptul că pentru n suficient de mare, această eroare își păstrează sensibil aceeași valoare, deoarece cu cât se mărește numitorul n , cu atât se mărește și numărătorul $\Sigma(\Delta x_i)^2$. Această concluzie prezintă un interes practic deosebit, deoarece de multe ori este suficient un număr, relativ mic, de măsurări pentru a se ajunge la o valoare σ suficient de stabilă. De asemenea eroarea pătratică medie σ a unei singure măsurări individuale stabilită anterior poate servi drept criteriu de apreciere a șirului de măsurări individuale, în parte.

Putem calcula eroarea medie pătratică a mediei aritmetice

$$\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - x_0 \quad (6.41)$$

Se poate scrie

$$\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \quad (6.42)$$

sau

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_0)(x_j - x_0) \quad (6.42)$$

Dacă se ia valoarea medie a expresiei (6.42), rezultă că valoarea medie a ultimului termen este egală cu zero, deoarece erorile reale Δx_i și Δx_j sînt mărimi independente și conform principiului distributiv numărul erorilor pozitive este practic egal cu numărul erorilor negative. Astfel din relația (6.42) se obține

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \text{ sau } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.43)$$

Vedem că spre deosebire de eroarea medie pătratică σ care tinde spre o valoare staționară, prin mărirea numărului n de măsurări, eroarea medie pătratică a mediei aritmetice se poate, în principiu, reduce sub orice limită dacă mărim numărul n al măsurărilor. Se observă însă că eroarea medie pătratică a mediei aritmetice $\sigma_{\bar{X}}$ scade destul de încet cînd se mărește numărul de măsurări peste o anumită limită. Pentru ilustrare în tabelul 6.5 se indică valoarea $\sigma_{\bar{X}}$ în funcție de numărul n de măsurări efectuate:

Tabelul 6.5

n	1	2	3	4	5	6	7	10	20	50	100
$\sigma_{\bar{X}}$	σ	$0,71\sigma$	$0,58\sigma$	$0,5\sigma$	$0,45\sigma$	$0,41\sigma$	$0,38\sigma$	$0,32\sigma$	$0,22\sigma$	$0,14\sigma$	$0,1\sigma$

Vedem, de exemplu, că mărind numărul măsurărilor de la $n_1 = 50$ la $n_2 = 100$, mărimea $\sigma_{\bar{X}}$ scade numai cu 40%.

Pentru obținerea unei valori $\sigma_{\bar{X}}$ cât mai mică este mai avantajos să se îmbunătățească metoda și mijloacele de măsurare care conduc la micșorarea erorii medii pătratice σ și în mod implicit la micșorarea erorii medii pătratice a mediei aritmetice.

Pentru a putea calcula eroarea medie pătratică a unei măsurări individuale σ și eroarea medie o pătratică a mediei aritmetice $\sigma_{\bar{X}}$, trebuie să cunoaștem erorile absolute reale (6.34). Aceasta implică cunoașterea valorii adevărate x_0 , ceea ce este posibil numai în împrejurări foarte rare, cînd mărimea x_0 ar putea fi calculată pe o cale oarecare, sau cunoscută anticipat.

Din acest motiv în locul erorilor absolute reale (6.34) se introduc erorile absolute aparente (v_i).

Prin eroare absolută aparentă înțelegem diferența algebrică dintre unul din rezultatele individuale ale unei serii de măsurări și media aritmetică $\bar{X}$ a ansamblului de rezultate care compun seria respectivă de măsurări:

$$v_i = x_i - \bar{X} \quad (6.44)$$

Pentru prescurtare, în cazul în care nu pot avea loc confuzii, eroarea absolută aparentă poate fi denumită și simplu eroare aparentă.

Eroarea medie pătratică σ a unei măsurări individuale și eroarea medie pătratică a mediei aritmetice $\sigma_{\bar{X}}$ se estimează prin eroarea standard a unei măsurări singulare dintr-o serie de măsurări (s) și respectiv prin eroarea standard a mediei aritmetice obținută dintr-o serie de măsurări ($s_{\bar{X}}$).

Eroarea standard a unei măsurări singulare dintr-o serie de măsurări este indicatorul statistic care caracterizează dispersia rezultatelor obținute dintr-o serie de n măsurări, efectuate asupra aceluiași măsurand:

$$s_{\bar{X}} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2} \quad (6.45)$$

Eroarea standard a mediei aritmetice obținută dintr-o serie de măsurări, este un indicator statistic ce caracterizează dispersia mediei aritmetice obținute pe baza unei serii de măsurări efectuate asupra aceluiași măsurand. Prin STAS 2872-74 se definește:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2} \quad (6.46)$$

Exemplu. În scopul ilustrării modului de prelucrare a unui șir de măsurări, considerăm următorul exemplu. Rezistența unei bobine a fost măsurată de 10 ori, cu ajutorul unei punți obținîndu-se următoarele rezultate în ohmi.

6,270 6,271 6,276 6,278 6,277
6,277 6,273 6,272 6,275 6,274

Tabelul 6.6

$R_i (\Omega)$	$v_i = R_i - \bar{R}$	$v_i^2 = (R_i - \bar{R})^2$
6,270	-0,004	$16 \cdot 10^{-6}$
6,277	+0,003	$9 \cdot 10^{-6}$
6,271	-0,003	$9 \cdot 10^{-6}$
6,273	-0,001	$1 \cdot 10^{-6}$
6,276	+0,002	$4 \cdot 10^{-6}$
6,272	-0,002	$4 \cdot 10^{-6}$
6,278	+0,004	$16 \cdot 10^{-6}$
6,275	+0,001	$1 \cdot 10^{-6}$
6,277	+0,003	$9 \cdot 10^{-6}$
6,274	0	0
$\sum_{i=1}^n 62,743$	+0,003	$69 \cdot 10^{-6}$

Trebuie să specificăm cum se scrie rezultatul acestor măsurări și ce semnificație are rezultatul indicat. Pentru aceasta construim un tabel de calcul (tabelul 6.6).

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{10} = 6,274$$

Conform formulei (6.45) avem:

$$s = \left(\frac{69 \cdot 10^{-6}}{10 - 1} \right)^{1/2} = 2,8 \cdot 10^{-3} \Omega$$

Eroarea standard a mediei aritmetice este

$$s_{\bar{R}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2,8 \cdot 10^{-3}}{3} = 0,00093 \approx 0,001 \Omega$$

Rezultatul setului de măsurări efectuate se scrie sub forma

$$R = (6,274 \pm 0,001) \Omega$$

Putem deci considera că valoarea adevărată a rezistenței bobinei este cuprinsă între 6,273 și 6,275 Ω . Se pune însă problema dacă valoarea adevărată a rezistenței este cu certitudine cuprinsă în intervalul respectiv sau există posibilitatea ca valoarea adevărată să fie în afara acestui interval, adică mai mare decât 6,275 Ω sau mai mică decât 6,273 Ω . La această întrebare vom încerca să răspundem în paragrafele următoare.

6.4.3. Relația dintre indicii de precizie h și eroarea medie pătratică. În paragraful 6.4.1 am arătat că valorile individuale ale unui set de n măsurări pentru n suficient de mare se distribuie după funcția de repartiție Gauss (6.30).

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2}$$

Produsul

$$f(x) \Delta x \quad (6.47)$$

reprezintă probabilitatea ca în urma efectuării unei măsurări să se obțină valoarea individuală x caracterizată de eroarea absolută reală Δx .

Putem deci scrie probabilitățile ca în urma efectuării unei singure măsurări să se obțină respectiv valorile individuale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, caracterizate de erorile absolute reale $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x_1-x_0)^2} \Delta x_1 \\ P_2 &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x_2-x_0)^2} \Delta x_2 \\ P_3 &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x_3-x_0)^2} \Delta x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ P_n &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x_n-x_0)^2} \Delta x_n. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Probabilitatea ca în urma efectuării setului de n măsurări să se obțină valorile individuale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ cu erorile absolute reale respectiv $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ este

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_n \quad (6.49)$$

Introducând expresiile (6.48) în formula (6.49) se obține:

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n \exp \{ -h^2[(x_1-x_0)^2 + (x_2-x_0)^2 + (x_3-x_0)^2 + \dots + (x_n-x_0)^2] \} \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \dots \Delta x_n \quad (6.50)$$

sau

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n \exp \{ -h^2[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2] \} \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \dots \Delta x_n \quad (6.51)$$

Stabilim indicele de precizie h impunând condiția ca probabilitatea P să fie maximă, adică

$$\frac{dP}{dh} = 0 \quad (6.52)$$

Derivând expresia (6.51) în raport cu h obținem:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dh} &= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n e^{-h^2[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2]} \cdot [-2h] (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \\ &+ (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2 + n \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2]} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^{n-1} e^{-h^2[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2]} \cdot [-2h^2(\Delta x_1)^2 + \\ &+ (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2 + n] = 0. \end{aligned}$$

Derivata probabilității P , în raport cu h este zero dacă

$$-2h^2 \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 + n = 0$$

De unde

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \pm \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 \right)^{1/2} = \pm \sigma \quad (6.53)$$

Tabelul 6.7 sau

$\frac{x-x_0}{\sigma}$	$\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}$	$\sigma f(x)$
0	1	0,399
$\pm 0,5$	0,882	0,352
± 1	0,607	0,242
$\pm 1,5$	0,325	0,130
± 2	0,135	0,054
$\pm 2,5$	0,044	0,018
± 3	0,011	0,004

$$h = \pm \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \quad (6.54)$$

Deci indicele de precizie h depinde de eroarea medie pătratică. Introducând relația (6.54) în formula (6.30) obținem: forma finală a densității de distribuție Gauss (densitatea distribuției normale).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.55)$$

Deoarece pentru calculul densității de repartiție, pentru diferite valori x trebuie să știm eroarea medie pătratică σ , vom calcula produsul $f(x)\sigma$ pentru diferite valori ale raportului $(x-x_0)/\sigma$. Eroarea medie pătratică σ fiind un parametru constant dependența produsului $\sigma f(x)$ de raportul $(x-x_0)/\sigma$ este aceeași ca și pentru $f(x)$. În tabelul (6.7) sînt date valorile produsului $\sigma \cdot f(x)$ în funcție de raportul $(x-x_0)/\sigma$.

Datele din tabelul 6.7 sînt reprezentate în figura 6.13.

Din figura 6.13 și prima coloană a tabelului 6.7 se vede că practic, pentru toate rezultatele măsurărilor individuale dintr-un set de măsurări valorile individuale obținute nu diferă de valoarea reală mai mult de 3σ , adică:

$$|x - x_0| \leq 3\sigma \quad (6.56)$$

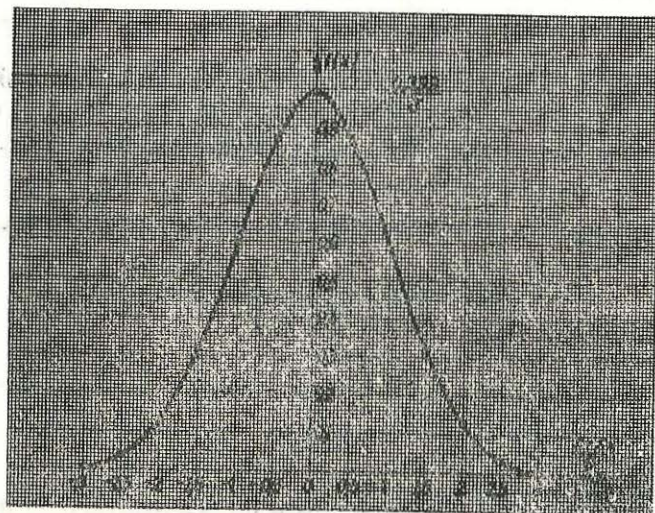


Fig. 6.13.

Această concluzie este în totală concordanță cu principiul limitativ, privind proprietățile erorilor întâmplătoare. Derivînd densitatea de repartiție $f(x)$ în raport cu x obținem:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} (-(x-x_0)) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.57)$$

Calculînd derivata a doua avem:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(-1 + \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.58)$$

Vedem că derivata de ordinul întâi se anulează în punctul:

$$x = x_0$$

iar derivata de ordinul doi se anulează în punctul

$$x = x_0 \pm \sigma \quad (6.59)$$

Deci în punctele $x = x_0 \pm \sigma$ densitatea de repartiție prezintă puncte de inflexiune.

Cu cît parametrul σ are o valoare mai mică cu atît curba ce reprezintă densitatea de repartiție $f(x)$ este mai îngustă, adică rezultatele măsurărilor individuale se situează mai strîns în jurul valorii adevărate x_0 .

În figura 6.14 este reprezentată densitatea de repartiție $f(x)$ pentru trei valori ale erorii pătratice medii și anume pentru $\sigma = 1/4, 1/2$ și 1 .

Subliniem că densitatea de repartiție (6.55) pentru rezultatele întâmplătoare ale unui set de măsurări a fost de multe ori verificată prin experiențe special imaginat în acest scop și de fiecare dată s-a constatat că repartiția Gauss este în perfectă concordanță cu rezultatele experimentale.

Pentru verificarea repartiției normale se utilizează în laborator diferite instalații cu ajutorul cărora se pot produce, în mod artificial, un număr foarte mare de evenimente întâmplătoare. Putem utiliza, de exemplu, instalația a cărei schemă de principiu este indicată în figura 6.15. Din pîlnia P se lasă să cadă nisip foarte fin.

Jetul de nisip care iese din pîlnie va fi parțial împrăștiat datorită frecărilor și a ciocnirilor dintre particulele de nisip. Nisipul în cădere întîlnește două sau mai multe site metalice așezate orizontal, la distanță foarte mică una de alta.

Găurile sitelor respective trebuie să fie suficient de mari pentru ca particulele de nisip să nu întîmpine nici o greutate la trecerea prin ele. Particulele de nisip se vor ciocni de firele sitelor metalice schimbîndu-și, în mod întâmplător, direcția de mișcare. Ca rezultat al acestui fenomen, la o distanță oarecare de site getul de nisip este suficient de larg, adică pe măsură ce ne îndepărtăm de site secțiunea transversală a getului de nisip crește.

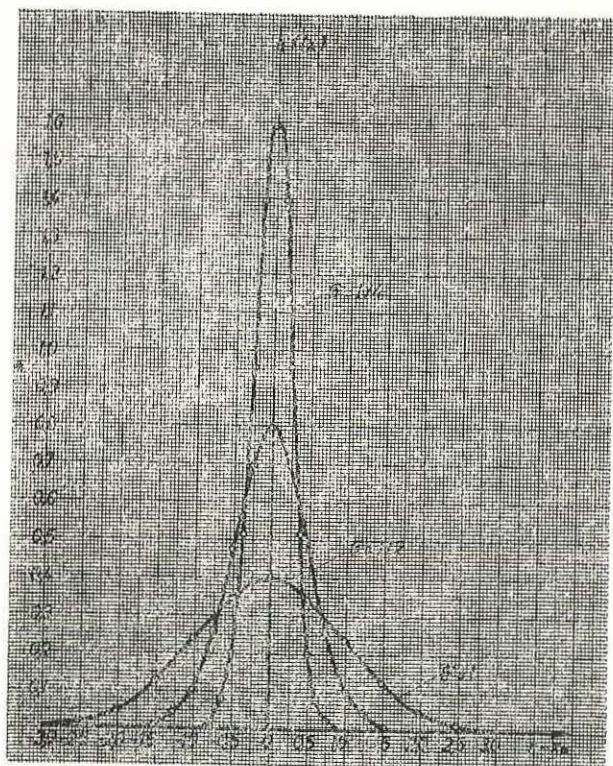


Fig. 6.14.

Realizăm ca nisipul să curgă într-o cutie cu pereții transparenți, împărțită într-un număr suficient de mare de secțiuni prin pereți verticali. Vom vedea că în diferite secțiuni ale cutiei vor cădea cantități diferite de nisip. Cea mai mare cantitate de nisip va cădea în secțiunea cutiei aflată sub pîlnie. În celelalte secțiuni ale cutiei va cădea cu atît mai puțin nisip cu cît acestea sînt mai îndepărtate de secțiunea centrală. Obținem astfel o histogramă experimentală care verifică foarte precis legea distribuției Gauss.

Cu ajutorul acestei instalații putem varia valoarea erorii medii pătratice σ , dacă utilizăm un număr mai mare sau mai mic de site. Dacă mărim numărul de site crește numărul de ciocniri ale particulelor de nisip cu firele metalice ale sitelor și vom obține o curbă de repartiție mai puțin netă, cu un maximum mai puțin pronunțat. Deci mărirea numărului de site este echivalentă cu mărirea erorii medii pătratice σ .

6.4.4. Funcția de repartiție. Cunoșcînd densitatea de repartiție $f(x)$ putem introduce funcția de repartiție $F(x)$ care reprezintă probabilitatea ca în urma efectuării unei măsurări să se obțină o valoare individuală x_i mai mică decît x :

$$F(x) = P(x_i < x). \quad (6.60)$$

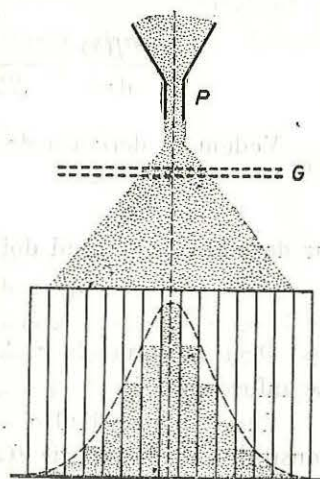


Fig. 6.15.

Deoarece probabilitatea ca în urma efectuării unei măsurări să se obțină oricare din valorile individuale posibile este unu, probabilitatea ca valoarea individuală x_i să fie mai mare decît valoarea x aleasă ($P(x_i > x)$) se exprimă prin probabilitatea $P(x_i < x)$, ca valoarea individuală x_i să fie mai mică decît x :

$$P(x_i > x) = 1 - P(x_i < x) = 1 - F(x). \quad (6.61)$$

Această relație apare evident din figura 6.16. Dacă fixăm valoarea $x = x_a$ atunci probabilitatea $P(x_i < x_a)$ este egală cu aria A_1 , iar probabilitatea $P(x_i < x_a)$ este egală cu aria A_2 , limitată de axa x și densitatea de repartiție $f(x)$.

$$P(x_i < x_a) = A_1; \quad (6.62)$$

$$P(x_i > x_a) = A_2.$$

Deoarece aria limitată de axa x și densitatea de repartiție $f(x)$ este egală cu unu, avem:

$$A_1 + A_2 = 1 \quad (6.63)$$

și

$$A_2 = 1 - A_1.$$

Funcția de repartiție $F(x)$ are un rol fundamental în procesul de prelucrare a datelor experimentale afectate de erori întâmplătoare. Dacă este cunoscută funcția $F(x)$, pentru diferite valori ale variabilei x , putem calcula probabilitatea ca rezultatul unei măsurări individuale (x_i) să fie cuprins între valorile x_a și x_b ale măsurandului. Această probabilitate este aria A hașurată din formula 6.17:

$$P(x_a < x_i < x_b) = A = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \quad (6.64)$$

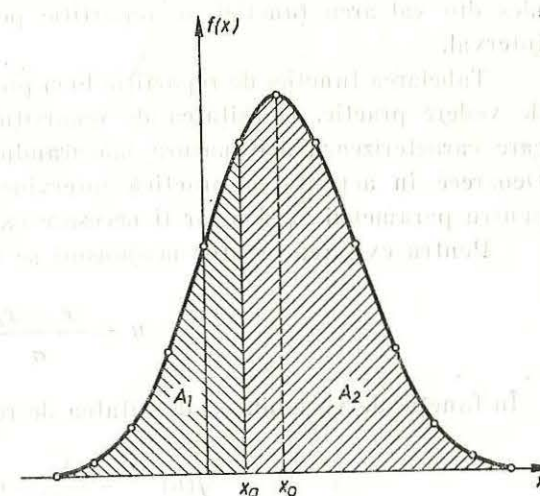


Fig. 6.16.

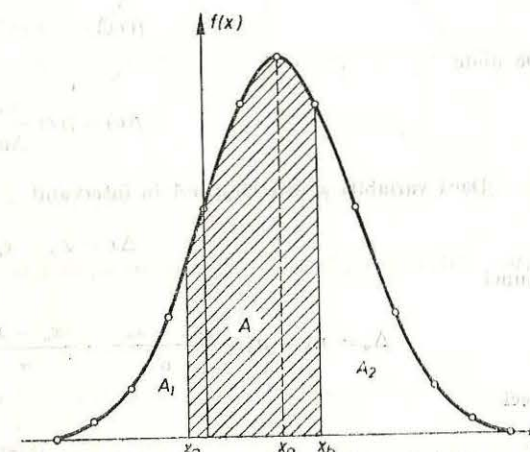


Fig. 6.17.

Pe baza formulelor (6.60), (6.61) și (6.62) putem scrie:

$$P(x_a < x_i < x_b) = 1 - A_1 - A_2 = 1 - P(x_i < x_a) - P(x_i > x_b) = 1 - P(x_i < x_a) - 1 + P(x_i < x_b) = F(x_b) - F(x_a). \quad (6.65)$$

Dacă am dispune de tabele, suficient de detaliate, pentru funcția de repartiție $F(x)$ am putea ușor afla probabilitatea ca în urma unei măsurări să obținem valori individuale cuprinse într-un anume interval, prin simpla scădere a valorii funcției de repartiție pentru limita inferioară a intervalului ales din valoarea funcției de repartiție pentru limita superioară a acestui interval.

Tabelarea funcției de repartiție $F(x)$ prezintă unele neajunsuri, din punct de vedere practic. Densitatea de repartiție $f(x)$ conține parametrii x_0 și σ care caracterizează atât natura măsurandului cât și condițiile de măsurare. Deoarece în activitatea practică intervine o gamă foarte largă de valori pentru parametrii x_0 și σ , ar fi necesare extrem de multe tabele.

Pentru evitarea acestor neajunsuri se introduce variabila

$$u = \frac{x - x_0}{\sigma}. \quad (6.66)$$

În funcție de variabila u , densitatea de repartiție $f(x)$ devine:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}. \quad (6.67)$$

Trebuie ținut seama de faptul că în cazul densităților de repartiție, trecerea de la o variabilă la alta nu se face prin simpla înlocuire, ci trebuie să se impună condiția ca probabilitatea ca valoarea x să fie cuprinsă în intervalul $x, x + \Delta x$ să fie egală cu probabilitatea ca valoarea u să fie cuprinsă în intervalul $u, u + \Delta u$ unde Δu corespunde intervalului Δx , după formula (6.66)

$$f(x)\Delta x = f(u)\Delta u.$$

De unde

$$f(u) = f(x) \frac{\Delta x}{\Delta u}.$$

Dacă variabila x este cuprinsă în intervalul

$$\Delta x = x_b - x_a$$

atunci

$$\Delta u = u_b - u_a = \frac{x_b - x_0}{\sigma} - \frac{x_a - x_0}{\sigma} = \frac{x_b - x_a}{\sigma} = \frac{\Delta x}{\sigma},$$

Deci

$$f(u) = \sigma f(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

Avantajul introducerii variabilei u constă în faptul că densitatea de repartiție (6.67) nu depinde de valorile concrete ale parametrilor x_0 și σ , devenind astfel o funcție universală ușor de tabelat.

Densitatea de repartiție $f(u)$ are un maximum pentru $u = 0$ (adică pentru $x = x_0$) și este absolut simetrică față de axa $u = 0$ (fig. 6.18), adică pentru orice valoare a variabilei u avem:

$$f(+u) = f(-u). \quad (6.68)$$

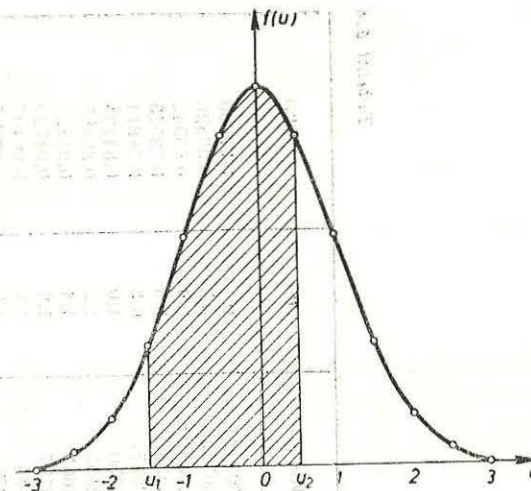


Fig. 6.18.

Probabilitatea ca variabila u să fie cuprinsă în intervalul (u_1, u_2) este reprezentată grafic de aria corespunzătoare trapezului curbiliniu determinat de axa Ou , dreptele $u = u_1$ și $u = u_2$, precum și de curba densității de repartiție (fig. 6.19).

De obicei se tablează așa-numita funcție de repartiție Gauss $\Phi(u)$, care reprezintă aria suprafeței cuprinsă în intervalul $(-\infty, u)$, reprezentată hașurat în figura 6.20.

În tabelul 6.8 se indică valorile funcției de repartiție $\Phi(u)$ pentru valorile variabilei u de la -4 la $+4$.

În figura 6.21 este reprezentată dependența funcției de repartiție $\Phi(u)$ de variabila u .

Diferența

$$\Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

reprezintă probabilitatea ca valorile variabilei u să fie cuprinse în intervalul (u_1, u_2) , iar valorile individuale x_i să fie cuprinse între $x_0 + u_1\sigma$ și $x_0 + u_2\sigma$.

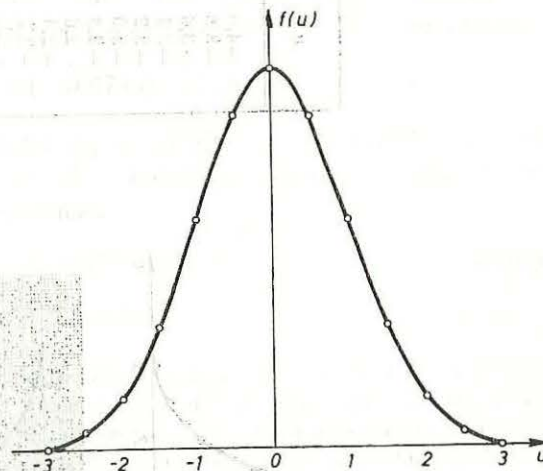


Fig. 6.19.

Tabelul 6.8

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
-4,0	0,00003167	0	0,50000
-3,8	0,00007235	0,2	0,57926
-3,6	0,00015910	0,4	0,65542
-3,4	0,0003369	0,6	0,72575
-3,2	0,0006871	0,8	0,78814
-3,0	0,001350	1,0	0,84134
-2,8	0,002555	1,2	0,88493
-2,6	0,004661	1,4	0,91924
-2,4	0,008197	1,6	0,94520
-2,2	0,01390	1,8	0,96407
-2,0	0,02275	2,0	0,97725
-1,8	0,03593	2,2	0,98610
-1,6	0,05480	2,4	0,991803
-1,4	0,08076	2,6	0,995339
-1,2	0,11507	2,8	0,997445
-1,0	0,15866	3,0	0,998650
-0,8	0,21186	3,2	0,9993129
-0,6	0,27425	3,4	0,9996631
-0,4	0,34458	3,6	0,9998409
-0,2	0,42074	3,8	0,99992765
		4,0	0,99996833

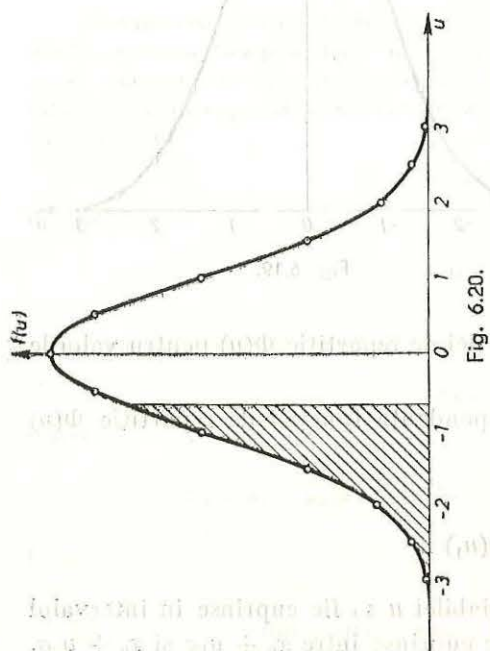


Fig. 6.20.

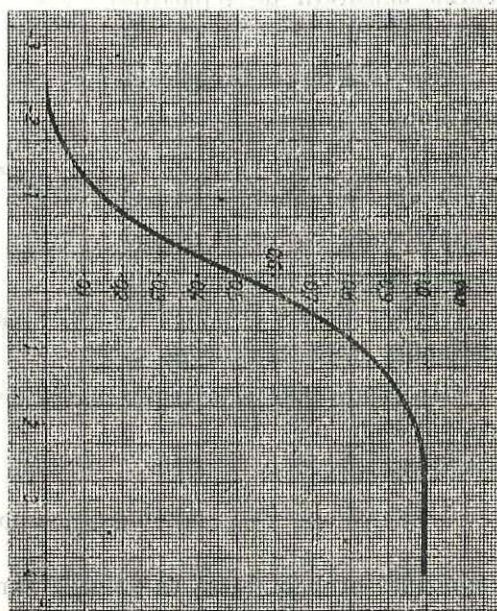


Fig. 6.21.

Dacă $u_1 = -1$ și $u_2 = 1$ din tabelul 6.8 avem:

$$\Phi(1) - \Phi(-1) = 0,84134 - 0,15866 = 0,68268.$$

Pentru $u_1 = -2$ și $u_2 = 2$ obținem:

$$\Phi(2) - \Phi(-2) = 0,97725 - 0,02275 = 0,9545$$

iar pentru $u_1 = -3$ și $u_2 = +3$.

$$\Phi(3) - \Phi(-3) = 0,998650 - 0,001350 = 0,997300.$$

Aceste rezultate înseamnă că din numărul total n de valori individuale $x_1, x_2, \dots, x_n$ obținute în urma unui set de măsurări identice 68,268% sînt cuprinse între valorile $x_0 - \sigma$ și $x_0 + \sigma$, 95,45% între $x_0 - 2\sigma$ și $x_0 + 2\sigma$ iar între $x_0 - 3\sigma$ și $x_0 + 3\sigma$ sînt cuprinse 99,73% dintre rezultatele individuale. Deci numai 0,27% din valorile individuale se află în afara intervalului $(x_0 - 3\sigma, x_0 + 3\sigma)$.

Se pune, de multe ori, problema găsirii unui astfel de interval în jurul valorii adevărate x_0 încît 50% din valorile individuale să fie cuprinse în intervalul respectiv. Dintr-un tabel mai detaliat, pentru $\Phi(u)$ se obține:

$$\Phi(0,6745) - \Phi(-0,6745) = 0,5000.$$

Deci în intervalul cuprins între $x_0 - 0,6745\sigma$ și $x_0 + 0,6745\sigma$ vor fi cuprinse 50% din numărul n al valorilor individuale obținute, într-un set de n măsurări. Din acest motiv mărimea

$$\sigma_p = 0,6745\sigma \quad (6.69)$$

se numește eroare medie pătratică probabilă.

6.4.5. Nivel de încredere. Interval de încredere. Trebuie să răspundem la următoarea întrebare. Dacă se efectuează un set de n măsurări și am obținut prin calcul valoarea medie aritmetică a rezultatelor individuale $\bar{X}$, precum și eroarea standard s a unei măsurări singulare și respectiv eroarea standard a mediei aritmetice $s_{\bar{X}}$, cum putem stabili intervalul în jurul valorii $\bar{X}$ în care va fi cuprinsă valoarea adevărată x_0 și care va fi probabilitatea ca x_0 să fie cuprinsă în intervalul considerat.

Prin **nivel de încredere al măsurării** (sau **nivel de confidență**) P^* se înțelege probabilitatea cu care se poate afirma că, într-o serie de măsurări o anumită eroare aparentă nu va depăși eroarea care însoțește rezultatul indicat al măsurării.

Dacă numărul măsurărilor ar fi suficient de mare, am putea spune că dacă rezultatul măsurării este

$$\bar{X} \pm s_{\bar{X}}$$

atunci $P^* = 68,3\%$, iar dacă se indică

$$\bar{X} \pm 3s_{\bar{X}}$$

avem un nivel de confidență $P^* = 99,7\%$.

Deoarece în măsurările concrete efectuate numărul n al măsurărilor individuale este relativ mic, se constată că aceste afirmații nu sînt riguros exacte.

Intervalul de încredere al măsurării (sau intervalul de confidență) reprezintă intervalul cuprins între valorile extreme ale rezultatului unui set de măsurări. Cu cât nivelul de încredere P^* este mai mare cu atât intervalul de încredere este mai mare.

Pentru a înțelege cum se ajunge la stabilirea nivelului de confidență P^* și a intervalului de încredere, considerăm că am efectuat mai multe seturi de măsurări și că în fiecare set am obținut câte o valoare medie aritmetică $\bar{X}$. Considerăm, de asemenea, că valorile medii obținute $\bar{X}$ se distribuie în jurul valorii adevărate x_0 după densitatea de repartiție Gauss, în care înlocuim parametrul σ prin $s_{\bar{x}}$.

Deci

$$f(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_{\bar{x}}} e^{-\frac{(\bar{X} - x_0)^2}{2s_{\bar{x}}^2}} \quad (6.70)$$

Efectuându-se schimbarea de variabilă

$$t = \frac{\bar{X} - x_0}{s_{\bar{x}}} \quad (6.70)$$

se obține

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad (6.71)$$

Valoarea parametrului t este funcție de nivelul de confidență P^* impus, ca valoarea adevărată x_0 să fie cuprinsă în intervalul de încredere

$$\bar{X} - ts_{\bar{x}} \leq x_0 \leq \bar{X} + ts_{\bar{x}} \quad (6.72)$$

Dacă numărul n de măsurări nu este suficient de mare, se introduce mărimea $t(P^*, k)$, unde $k = n - 1$, care depinde atât de nivelul de confidență P^* cât și numărul n de măsurări. Cunoscând mărimea $t(P^*, k)$, se poate afirma că probabilitatea ca valoarea adevărată x_0 a mărimii măsurate să fie cuprinsă în intervalul de încredere

$$\bar{X} - t(P^*, k)s_{\bar{x}} \leq x_0 \leq \bar{X} + t(P^*, k)s_{\bar{x}} \quad (6.73)$$

este P^* (adică nivelul de confidență ales).

Nu ne ocupăm de modul de calcul al funcției $t(P^*, k)$, subliniem numai că această funcție este tabelată și noi trebuie să știm cum se folosesc valorile date în tabele. În tabelul 6.9 se indică valorile funcției $t(P^*, k)$ pentru nivelele de încredere $P^* = 0,90; 0,95; 0,98; 0,99$ și $0,999$, precum și pentru diferite valori ale numărului k care poartă numele de grade de libertate. În exemplul din paragraful 6.4.2 am obținut rezistența medie

$$\bar{R} = 6,274 \Omega$$

și eroarea standard a mediei aritmetice

$$s_{\bar{R}} \approx 0,001 \Omega$$

Tabelul 6.9

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,484	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Deoarece s-a efectuat un număr $n = 10$ măsurări, adică numărul gradelor de libertate $k = 10 - 1 = 9$ obținem:

$$t(0,90, 9) = 1,833 \quad t(0,99, 9) = 3,250$$

$$t(0,95, 9) = 2,262 \quad t(0,999, 9) = 4,785$$

$$t(0,98, 9) = 2,821$$

Dacă scriem rezultatul acestei măsurători sub forma

$$R = (6,274 \pm 0,004785) \Omega$$

sau prin rotunjirea valorii erorii:

$$R = (6,274 \pm 0,005) \Omega$$

putem afirma că valoarea adevărată a rezistenței bobinei este cuprinsă în intervalul de încredere $(6,269, 6,279) \Omega$ cu un nivel de confidență $P^* = 0,999$. Adică probabilitatea ca eroarea aparentă a unei măsurări să depășească valoarea ts adică $4,785 \cdot 2,8 \cdot 10^{-3} = 0,013 \Omega$ este mai mică decât $0,1\%$.

De foarte multe ori, în practică, se pune problema efectuării măsurărilor în astfel de condiții încât pentru un nivel de confidență dinainte stabilit, intervalul de încredere să nu depășească o valoare dată. În astfel de cazuri,

se efectuează un număr n_1 de măsurări de regulă $n_1 = 10$, apoi se calculează intervalul de încredere, corespunzător nivelului de confidență P^* stabilit. Dacă intervalul de încredere obținut este de m ori mai mare decât cel impus, atunci numărul măsurărilor individuale necesare este $n = m^2 n_1$.

Din cele discutate în acest paragraf rezultă importanța efectuării unui număr n cât mai mare de măsurări individuale, în scopul micșorării intervalului de încredere la un nivel de confidență stabilit. Ar fi însă destul de grav dacă am rămâne cu impresia că mărim numărul n al măsurărilor individuale putem obține orice precizie dorim, adică un interval de încredere oricât de mic corespunzător unui nivel de confidență oricât de ridicat.

Cea mai sigură cale de a obține intervalul de încredere impus, la un nivel de confidență P^* stabilit, este mărirea preciziei măsurărilor individuale, ceea ce conduce la micșorarea erorii standard s . Cu cât valorile individuale x_i obținute, vor fi mai apropiate de media aritmetică $\bar{X}$, cu atât eroarea standard s va fi mai mică, ceea ce asigură micșorarea intervalului de încredere pentru P^* și n dați. Deci un set de n măsurări individuale este cu atât mai precis cu cât dispersia (împrăștierea) rezultatelor individuale este mai mică. Pentru asigurarea acestui deziderat se impune o bună stabilitate a aparatului utilizat și înlăturarea factorilor exteriori care pot mări amplitudinea erorilor întâmplătoare.

6.4.6. Concluzii practice privind erorile întâmplătoare în cazul efectuării unui set de măsurări directe, în aceleași condiții. Din cele discutate mai sus, putem răspunde la cele trei întrebări fundamentale, care se pun în procesul de efectuare a măsurărilor și de prelucrare a datelor obținute.

a) Valoarea care aproximează cel mai bine, valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate este media aritmetică $\bar{X}$ a valorilor individuale $x_1, x_2, \dots, x_n$, obținute într-un set de n măsurări.

b) Eroarea asociată unei singure măsurări este eroarea standard s .

c) Eroarea valorii medii aritmetice este eroarea standard a mediei $s_{\bar{X}}$.

În practică se pune însă problema efectuării de măsurări asupra unui număr mare de măsuranți. De exemplu, un operator trebuie să măsoare, cu ajutorul unui ohmmetru, valoarea rezistențelor pentru un număr N de rezistori. Este clar că nu este posibil ca rezistența fiecărui rezistor, să fie măsurată de un număr n , suficient de mare, de ori. În acest caz trebuie procedat în felul următor. Se măsoară rezistența unuia din cei N rezistori de un număr n , suficient de mare, de ori. De obicei $n = 10 - 15$. Pe baza rezultatelor individuale obținute se calculează rezistența medie $\bar{R}$ a acestui rezistor și eroarea standard s , precum și eroarea standard a mediei aritmetice $s_{\bar{R}}$.

Dacă se impune ca rezultatele măsurărilor să fie livrate cu un anumit nivel de încredere P^* se caută valoarea $l(P^*, k)$ din tabelul 6.9 și se scrie rezultatul acestei măsurări:

$$R = \bar{R} \pm l(P^*, k) s_{\bar{R}} \quad (6.74)$$

Eroarea standard s este o caracteristică a metodei și mijlocului de măsurare utilizate. De aceea dacă pentru rezistențele celorlalți rezistori se efectuează câte o singură măsurare obținându-se valorile individuale $R_1, R_2, \dots, R_{N-1}$, aceste rezultate trebuie indicate sub forma:

$$\begin{aligned} R_1 \pm l(P^*, k)s \\ R_2 \pm l(P^*, k)s \\ \dots \\ R_{N-1} \pm l(P^*, k)s. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Dacă însă rezistențele celor $(N - 1)$ rezistori se măsoară de un număr de ori $n_1 < n$, de exemplu $n_1 = 5$, atunci se calculează mediile aritmetice ale fiecărui set de măsurări obținându-se valorile $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_{N-1}$. Eroarea standard a mediilor aritmetice $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_{N-1}$ va fi:

$$s_{\bar{R}} = \frac{s}{\sqrt{n_1}} \quad (6.76)$$

Se caută în tabelul 6.9 valoarea $l'(P^*, k_1)$ unde $k_1 = n_1 - 1$, iar rezultatele celor $(N - 1)$ seturi de câte n_1 măsurări se indică sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 \pm l'(P^*, k_1) s'_{\bar{R}} \\ \bar{R}_2 \pm l'(P^*, k_1) s'_{\bar{R}} \\ \dots \\ \bar{R}_{N-1} \pm l'(P^*, k_1) s'_{\bar{R}}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Rezultatele măsurărilor efectuate trebuie să fie însoțite de indicații privind metoda și mijlocul de măsurare utilizat, precum și nivelul de confidență P^* care a fost considerat la calculul intervalului de încredere respectiv.

De cele mai multe ori rezultatele unor măsurări sînt livrate sub forma:

$$R_1 \pm s, R_2 \pm s, \dots, R_{N-1} \pm s \quad (6.78)$$

sau sub forma:

$$R_1 \pm s'_{\bar{R}}, R_2 \pm s'_{\bar{R}}, \dots, R_{N-1} \pm s'_{\bar{R}}. \quad (6.79)$$

În acest caz pe lângă metoda și mijlocul de măsurare utilizat, trebuie să se indice numărul n de măsurări pe baza cărora a fost obținută eroarea standard s , precum și numărul n , de măsurări individuale cu ajutorul cărora a fost calculată eroarea standard a mediei $s_{\bar{R}}$. Aceste indicații sînt absolut necesare pentru ca experimentatorul care utilizează acești rezistori să poată calcula intervalul de încredere corespunzător unui nivel de confidență, ce se impune în experiențele care le efectuează.

6.4.7. Compararea valorilor medii. În efectuarea unor experiențe apare adeseori problema stabilirii dacă între valorile unui anumit parametru pentru două probe distincte există sau nu o diferență semnificativă, adică dacă

putem afirma că parametrul respectiv, pentru cele două probe, are valori diferite sau nu. De asemenea, se cere să se verifice care este nivelul de încredere al afirmației făcute.

De multe ori se procedează eronat, în felul următor. Se efectuează n_1 măsurări pentru proba 1 și se calculează valoarea medie aritmetică a rezultatelor acestui șir de măsurări, pentru valoarea parametrului ce ne interesează. Notăm cu $\bar{X}_1$, valoarea medie obținută și cu s_1 eroarea standard calculată. Fixându-se nivelul de încredere P^* putem afirma că valoarea adevărată x_{01} , este cuprinsă în intervalul

$$\bar{X}_1 \pm t(P^*, k_1) \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \quad (6.80)$$

unde $k_1 = n_1 - 1$.

Analog se efectuează un număr n_2 de măsurări pentru proba numărul 2 obținându-se valorile $\bar{X}_2$ și s_2 . Se poate afirma că valoarea adevărată x_{02} este cuprinsă în intervalul

$$\bar{X}_2 \pm t(P^*, k_2) \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \quad (6.81)$$

cu nivelul de confidență P^* .

Se afirmă că dacă intervalele (6.80) și (6.81) nu se suprapun, parametrul x pentru cele două probe are valori semnificativ distincte și invers.

S-a constatat că acest criteriu nu este suficient de corect și de aceea pentru a putea decide dacă diferența dintre mediile aritmetice $\bar{X}_1$, și $\bar{X}_2$ este întâmplătoare sau semnificativă se calculează raportul:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)^{1/2}} \quad (6.82)$$

unde

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (6.83)$$

Având valoarea t calculată se fixează un nivel de încredere P^* cu care dorim să afirmăm că cele două valori medii aritmetice $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ sînt sau nu distincte. Numărul gradelor de libertate se ia $k = n_1 + n_2 - 2$. Din tabelul 6.9 se află valoarea funcției $l(P^*, k)$ corespunzătoare nivelului de confidență P^* și numărul gradelor de libertate k .

Dacă valoarea t calculată prin formula (6.82) este mai mare decât valoarea $l(P^*, k)$ aflată din tabel

$$t \geq l(P^*, k) \quad (6.84)$$

se poate afirma că diferența valorilor medii $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ este semnificativă, adică neîntimplătoare, cu nivelul de confidență P^* stabilit.

Dacă însă

$$t < l(P^*, k) \quad (6.85)$$

nu putem considera că diferența între valorile medii $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ este semnificativă și deci neconcordanța între valorile $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ este întâmplătoare, iar valoarea reală a parametrului x pentru cele două probe este aceeași.

Subliniem că dacă inegalitățile (6.84) și (6.85) sînt aproximative, adică dacă t este cu foarte puțin mai mare sau mai mic decât $l(P^*, k)$ se recomandă mărirea numerelor n_1 și n_2 de măsurări pentru a putea lua o decizie mai concludentă.

Respectarea acestui criteriu prezintă mare importanță în studiul diferitelor materiale în scopul determinării proprietăților electrice, magnetice etc. ale acestora. Aceasta cu atât mai mult cu cît unii parametri ce caracterizează diferite materiale au valori apropiate. Astfel rezistivitatea ρ este $1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ pentru argint și $1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ pentru cupru. De asemenea, coeficientul termic de variație a rezistivității este $4,1 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ pentru cupru și $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ pentru aluminiu.

6.4.8. Măsurări indirecte. Legea de compunere a erorilor. În paragrafele precedente ne-am ocupat de studiul erorilor de măsurare în cazul unei mărimi fizice x direct măsurabile. Se întîlnesc, însă, foarte des situații cînd mărimea fizică Z ce ne interesează nu este direct măsurabilă, ci se calculează pe baza unor mărimi $x, y, u, v, \dots$ care sînt direct măsurabile. Mărimea Z se exprimă prin mărimile $x, y, u, v, \dots$ printr-o relație funcțională de tipul:

$$Z = f(x, y, u, v, \dots) \quad (6.86)$$

De exemplu, stabilirea densității ρ a unui corp se poate realiza măsurînd masa m și volumul V ale corpului respectiv

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (6.87)$$

În studiul fenomenului de interferență a undelor, lungimea de undă λ se se obține prin formula

$$\lambda = \frac{id}{D} \quad (6.88)$$

unde i este interfranja, d este distanța între surse, iar D distanța de la planul surselor la ecran.

În primul caz (6.87) mărimea fizică Z este densitatea ρ a corpului, mărimea x este masa m a corpului, iar y volumul V al corpului. Deci funcția $f(x, y)$ reprezintă raportul dintre x și y .

Determinarea mărimii Z printr-o metodă de măsurare indirectă implică stabilirea erorii standard rezultate s_z sau a erorii standard a mediei $s_{\bar{z}}$.

Prin eroare rezultantă înțelegem eroarea globală, care însumează ansamblul erorilor datorate componentelor funcționale asociate măsurărilor directe în cadrul unei măsurări indirecte. De exemplu, eroarea rezultantă în valoarea lungimii de undă λ (6.81) este datorată erorilor parțiale în mărimile i , d și D .

Eroarea parțială reprezintă partea din eroarea de măsurare rezultantă, datorată unui singur component. Dacă de exemplu, pentru măsurarea lungimii de undă λ pe baza formulei (6.88) mărimile i , d și D se măsoară câte o singură dată atunci erorile standard parțiale vor fi s_i , s_d și s_D , iar dacă fiecare din aceste mărimi se măsoară de mai multe ori, atunci vom avea erorile parțiale standard ale mediei aritmetice $s_{\bar{i}}$, $s_{\bar{d}}$ și $s_{\bar{D}}$. Se pune deci problema exprimării erorii standard s_z sau a erorii standard a mediei aritmetice $s_{\bar{z}}$ prin erorile s_i , s_d , s_D și respectiv prin $s_{\bar{i}}$, $s_{\bar{d}}$, $s_{\bar{D}}$.

Eroarea rezultantă se exprimă prin erorile parțiale după legea de compunere a erorilor.

Legea de compunere a erorilor este legea care descrie legătura dintre erorile parțiale care afectează rezultatul unei măsurări. Pentru a ajunge la legea compunerii erorilor vom considera câteva cazuri particulare.

a) Dacă mărimea fizică Z este suma mărimilor x , y , u , v , ..., adică

$$Z = x + y + u + v + \dots \quad (6.89)$$

atunci conform formulei (2.21) putem scrie:

$$s_z = s_x + s_y + s_u + s_v + \dots \quad (6.90)$$

În cazul cînd se efectuează mai multe măsurări pentru mărimile x , y , u , v , ... se calculează mediile aritmetice $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, ... și erorile standard ale acestor medii aritmetice $s_{\bar{x}}$, $s_{\bar{y}}$, $s_{\bar{u}}$, $s_{\bar{v}}$, ... iar eroarea standard a mediei aritmetice pentru mărimea Z va fi:

$$s_z = s_{\bar{x}} + s_{\bar{y}} + s_{\bar{u}} + s_{\bar{v}} + \dots \quad (6.91)$$

Expresiile (6.90) și respectiv (6.91) rămîn valabile în cazul cînd unele din mărimile x , y , u , v , ... intră în formula (6.89) cu semnul minus.

b) Mărimea Z depinde de mărimile direct măsurabile x , y , u , v sub forma:

$$Z = x y u v. \quad (6.92)$$

În acest caz conform formulei (2.40) putem scrie:

$$s_z^2 = y^2 u^2 v^2 s_x^2 + x^2 u^2 v^2 s_y^2 + x^2 y^2 v^2 s_u^2 + x^2 y^2 u^2 s_v^2 \quad (6.93)$$

și respectiv

$$s_{\bar{z}}^2 = y^2 u^2 v^2 s_{\bar{x}}^2 + x^2 u^2 v^2 s_{\bar{y}}^2 + x^2 y^2 v^2 s_{\bar{u}}^2 + x^2 y^2 u^2 s_{\bar{v}}^2 \quad (6.94)$$

c) Dacă mărimea Z reprezintă raportul a două mărimi x și y ca în cazul formulei (6.87), atunci conform formulei (2.50) avem:

$$s_z = \frac{1}{y^2} (y s_x + x s_y) = \frac{x}{y} \left(\frac{s_x}{x} + \frac{s_y}{y} \right) \quad (6.95)$$

și respectiv

$$s_{\bar{z}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \left(\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} + \frac{s_{\bar{y}}}{\bar{y}} \right) \quad (6.96)$$

d) Dacă avem o dependență de forma:

$$Z = x^k \quad (6.97)$$

atunci conform formulei (2.54)

$$s_z = k \bar{x}^{k-1} s_x \quad (6.98)$$

și

$$s_{\bar{z}} = k \bar{x}^{k-1} s_{\bar{x}} \quad (6.99)$$

e) În cazul cînd avem o funcție de forma

$$Z = \sqrt[k]{x} \quad (6.100)$$

putem aplica formula (2.58):

$$s_z = \frac{1}{k} \bar{x}^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} s_{\bar{x}} \quad (6.101)$$

și

$$s_{\bar{z}} = \frac{1}{k} \bar{x}^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} s_{\bar{x}} \quad (6.102)$$

Aceste formule pot fi utilizate, în practică, pentru calculul erorii rezultante. Se arată însă, în teoria erorilor de măsurare, că este mai indicat să nu se ia suma erorilor parțiale, ci radial din suma pătratelor acestora.

Astfel în locul formulelor (6.90) și (6.91) este mai corect să se scrie formulele:

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_u^2 + s_v^2 + \dots} \quad (6.103)$$

și

$$s_{\bar{z}} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2 + s_{\bar{u}}^2 + s_{\bar{v}}^2 + \dots} \quad (6.104)$$

De asemenea, în locul formulelor (6.93) și respectiv (6.94) se va scrie :

$$s_z = \sqrt{(yuv_s)^2 + (xuv_s)^2 + (xyv_s)^2 + (xyus_v)^2} \quad (6.105)$$

și

$$s_z = \sqrt{(yuv_x)^2 + (xuv_y)^2 + (xyv_u)^2 + (xyus_v)^2} \quad (6.106)$$

În cazul în care mărimea Z este raportul mărimilor x și y eroarea rezultantă va fi, din formulele (6.95) și (6.96):

$$s_z = \frac{x}{y} \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} \quad (6.107)$$

și

$$s_z = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \sqrt{\left(\frac{s_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\bar{y}}\right)^2} \quad (6.108)$$

Deci în urma măsurărilor indirecte rezultatul măsurării se indică sub forma :

$$Z \pm s_z \quad (6.109)$$

sau

$$\frac{\bar{Z} \pm s_z}{\bar{Z}}$$

în funcție de faptul dacă mărimile $x, y, u, v \dots$ au fost măsurate o singură dată fiind afectate de erorile standard respectiv $s_x, s_y, s_u, s_v \dots$ sau au fost măsurate de mai multe ori, valorile medii ale acestor măsurări, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v} \dots$ fiind afectate de erorile standard a mediei aritmetice $s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}, s_{\bar{u}}, s_{\bar{v}} \dots$. Valoarea medie a mărimii $\bar{Z}$ fiind

$$\bar{Z} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v} \dots) \quad (6.110)$$

Nivelul de confidență pentru valoarea Z sau $\bar{Z}$ va corespunde nivelului de confidență cel mai scăzut, pentru valorile x, y, u, v ce intră în formula (6.86).

Exemplu

Dacă se măsoară mărimile i, d și D (formula 6.88) de un număr de ori, obținându-se prin metodele cunoscute mărimile $\bar{i}, \bar{d}, \bar{D}, s_{\bar{i}}, s_{\bar{d}}$ și $s_{\bar{D}}$, valoarea medie a lungimii de undă este :

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{i}\bar{d}}{\bar{D}} \quad (6.111)$$

Dacă notăm cu x produsul $i\bar{d}$ atunci putem găsi eroarea standard a valorii medii pentru mărimea $\bar{x} = \bar{i}\bar{d}$, conform formulei (6.106).

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{(\bar{i}s_{\bar{d}})^2 + \bar{d}(s_{\bar{i}})^2} = \bar{i}\bar{d} \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{i}}}{\bar{i}}\right)^2} \quad (6.112)$$

Cum

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{x}}{\bar{D}}$$

Conform formulei (6.108)

$$s_{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{x}}{\bar{D}} \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{D}}}{\bar{D}}\right)^2}$$

Introducând valorile $s_{\bar{x}}$ și $\bar{x}$ avem :

$$s_{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{i}\bar{d}}{\bar{D}} \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{i}}}{\bar{i}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{D}}}{\bar{D}}\right)^2} \quad (6.113)$$

Rezultatul măsurării se indică sub forma :

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm s_{\lambda} = \bar{\lambda} \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{i}}}{\bar{i}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{D}}}{\bar{D}}\right)^2} \right) \quad (6.114)$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

6.1. Se măsoară o diferență de potențial U cu ajutorul unui voltmetru cu scară gradată liniară, separată în 100 de diviziuni. Valoarea unei diviziuni fiind 3 V. Să se determine domeniul în care trebuie să fie cuprinsă valoarea diferenței de potențial U astfel încât eroarea relativă δU să nu depășească 2%.

R:

Cu ochiul liber se poate evalua poziția acului indicator cu o precizie egală cu jumătatea distanței dintre repere. Deci

$$\Delta U = 1,5 \text{ V}$$

și

$$\frac{1,5}{U} < 0,02 ; \quad U > \frac{1,5}{0,02} = 75 \text{ V.}$$

Pentru valorile $U < 75 \text{ V}$, $\delta U > 2\%$.

De exemplu dacă $U = 10 \text{ V}$

$$\delta U = \frac{1,5}{10} \cdot 100 = 15\%.$$

6.2. Se cere să se indice modul în care trebuie să fie realizată o scară gradată neliniară, astfel încât eroarea să nu depindă de valoarea mărimii măsurate.

R:

Considerăm o diviziune oarecare pe scara gradată pe care o notăm cu y iar Δx este eroarea absolută cu care se apreciază distanța pe scara gradată. Viteza de variație a valorii diviziunii y în funcție de distanța x pe scara gradată este:

$$\frac{dy}{dx}$$

Mărimea:

$$\frac{dy}{dx} \Delta x$$

reprezintă eroarea absolută a valorii diviziunii y . Dorim ca eroarea relativă a fiecărei diviziuni să fie constantă:

$$\frac{\frac{dy}{dx} \Delta x}{y} = \text{const.}$$

De unde

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\text{const}}{\Delta x} = C$$

sau

$$d \ln y = C dx; \ln y = Cx + C_1$$

sau

$$x = C_1 \ln y - \frac{C}{C}$$

Rezultă că o scară gradată uniformă, în sensul că eroarea relativă să fie constantă, reprezintă o scară gradată logaritmică.

6.3. Să se calculeze diferența tolerată Δl între brațele unei balanțe cu brațele considerate egale cu $l = 20$ cm astfel încât la o singură cântărire să nu se comită o eroare sistematică relativă mai mare de 1% și respectiv 0,1%.

R:

Fie m masa adevărată a corpului de cântărit și M masa greutății ce echilibrează corpul de masă m pe balanță.

$$mgl = Mg(l \pm \Delta l)$$

$$\frac{m - M}{M} = \frac{\Delta l}{l}$$

Considerind $m \approx M$ avem:

$$\delta m = \frac{\Delta l}{l};$$

$$\Delta l_1 = \delta_1 m \cdot l = 0,01 \cdot 20 = 0,2 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \delta_2 m \cdot l = 0,001 \cdot 20 = 0,02 \text{ cm} = 0,2 \text{ mm.}$$

6.4. Să se indice intervalul de încredere pentru care densitatea lichidului, obținută pe baza datelor din tabelul 6.3, este cuprinsă cu un nivel de încredere $P^* = 0,99$.

R: Se realizează tabelul de calcul:

Tabelul P.6.1

n_i	$\rho_i (\text{kg/m}^3)$	$\rho_i - \bar{\rho}$	$(\rho_i - \bar{\rho})^2$
1	530	30	900
2	480	-20	400
3	460	-40	1600
4	520	20	400
5	490	-10	100
6	500	0	0
7	540	40	1600
8	470	-30	900
9	480	-20	400
10	530	30	900
Σ	5000	0	7200

$$\bar{\rho} = \frac{\Sigma \rho_i}{n} = 500 \text{ kg/m}^3.$$

$$s_p = \sqrt{\frac{1}{10-9} \cdot 7200} \approx 9 \text{ kg/m}^3.$$

Din tabelul 6.9 aflăm $t(0,99, 9) = 3,25$

$$i_{sp} = 29 \text{ kg/m}^3.$$

Deci

$$\rho = (500 \pm 29) \text{ kg/m}^3.$$

6.5. Pentru măsurarea capacității C cu ajutorul montajului din figura P.5.3 (problema 5.6) se determină tensiunea U și intensitatea I a curentului electric pentru câteva valori ale rezistenței R . Datele obținute sînt indicate în tabelul P.6.2.

Tabelul P.6.2

$R (\Omega)$	700	600	500	400	300	200
$U (\text{V})$	7,3	8,6	10	12,0	15	19,2
$I (\text{mA})$	38	43,5	51	62	77,5	98

Se cere să se determine capacitatea C a condensatorului și eroarea standard a mediei $s_{\bar{C}}$. Se realizează tabelul de calcul

$$\bar{C} = \frac{1}{\omega} \frac{I_i}{U_i}$$

$$\bar{C} = \frac{9,809 \cdot 10^{-8}}{6} = 1,635 \cdot 10^{-8} \text{ F.}$$

Tabelul P.6.3

n_i	$I_i(\text{mA})$	U_i	$C_i(\text{F})$	$C_i - \bar{C}$	$(C_i - \bar{C})^2$
1	38	7,3	$1,658 \cdot 10^{-5}$	$0,023 \cdot 10^{-5}$	$5,29 \cdot 10^{-14}$
2	43,5	8,6	$1,611 \cdot 10^{-5}$	$-0,024 \cdot 10^{-5}$	$5,76 \cdot 10^{-14}$
3	51	10	$1,624 \cdot 10^{-5}$	$-0,011$	$1,21 \cdot 10^{-14}$
4	62	12,0	$1,654 \cdot 10^{-5}$	$0,010$	$1,00 \cdot 10^{-14}$
5	77,5	15	$1,654 \cdot 10^{-5}$	$0,010$	$1,00 \cdot 10^{-14}$
6	98	19,2	$1,626 \cdot 10^{-5}$	$-0,009$	$0,81 \cdot 10^{-14}$
Σ			$9,809 \cdot 10^{-5}$		$15,07 \cdot 10^{-14}$

$$s_{\bar{C}} = 10^{-7} \sqrt{\frac{15,07}{6 \cdot 5}} = 0,71 \cdot 10^{-7} = 0,007 \cdot 10^{-5} \text{ F.}$$

$$C = (1,635 \pm 0,007) 10^{-5} \text{ F.}$$

6.6. Măsurându-se presiunea și volumul unui gaz la temperatură constantă se obțin datele din tabelul P.6.4.

Tabelul P.6.4

i	$V_i(\text{cm}^3)$	$P_i(\text{cm Hg})$	$P_i V_i$
1	30	76	2 280
2	25	90	2 250
3	20	115	2 300
4	15	151	2 265
5	10	228	2 280

Să se indice intervalul de încredere în care se poate afirma că produsul PV este cuprins cu un nivel de confidență $P^* = 0,99$.

R:

Pentru simplificare notăm produsul $PV = x$.

Calculul se face pe baza tabelului P.6.5.

Tabelul P.6.5

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2 280	5	25
2	2 250	-25	625
3	2 300	25	625
4	2 265	-10	100
5	2 280	5	25
Σ	11 375		1 400

$$\bar{x} = \frac{11\,375}{5} = 2\,275$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1\,400}{5 \cdot 4}} \approx 8,4$$

Din tabelul 6.9.

$$t(0,99, 4) = 4,604, t(0,99, 4)s \approx 39.$$

Putem afirma că produsul PV este cuprins în intervalul

$$(2\,275 \pm 39) (\text{cm}^3 \cdot \text{cm col. Hg})$$

cu o probabilitate de 0,99.

6.7. În urma efectuării a două serii de măsurări, de egallă precizie se obțin valorile $\bar{X}_1 = 23,56$, $\bar{X}_2 = 22,80$, $s_1 = 1,10$ și $s_2 = 1,25$ pentru două probe. Prima serie de măsurări constă din $n_1 = 25$ de măsurări individuale, iar a doua serie de măsurări din $n_2 = 50$ de măsurări individuale. Se cere să se specifice, cu un nivel de încredere $P^* = 0,99$, dacă diferența mediilor aritmetice $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ este sau nu semnificativă.

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 0,298$$

$$t = \frac{23,56 - 22,80}{0,298} = 2,55.$$

Din tabelul 6.9 se obține

$$t(0,99, 73) > 2,648.$$

Deci

$$t < t(0,99, 73)$$

motiv pentru care nu putem considera că cele două probe sînt semnificativ diferite.

6.8. Efectuîndu-se măsurarea rezistenței unei bobine se obțin rezultatele:

$$5,615; 5,622; 5,624; 5,618;$$

$$5,620; 5,633; 5,628; 5,624; 5,613 \, \Omega.$$

Să se indice corect rezultatul acestui set de măsurări.

R:

$$R = (5,622 \pm 0,002) \, \Omega.$$

6.9. În tabelul P.6.6 sînt date valorile vitezei luminii obținute în diferite experiențe

Tabelul P.6.6

Anul	c (km/s)
1951	299793,1
1954	299793,0
1957	299792,85
1958	299792,50

Să se indice valoarea cea mai corectă pentru viteza luminii c , în vid și eroarea standard a mediei.

6.10. Pe baza datelor obținute privind valoarea constantei gravitaționale γ s-au calculat următoarele valori pentru densitatea ρ a Pămîntului, în kg/m^3 .

$$5\,560, 5\,527, 5\,493, 5\,527, 5\,507.$$

Să se indice valoarea cea mai bună pentru densitatea Pămîntului și eroarea standard.

R:

$$\rho = (5,523 \pm 7) \text{ kg/m}^3.$$

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

În capitolul 4 am văzut că efectuind măsurarea unei mărimi fizice y pentru diferite valori ale mărimii fizice x , obținem perechile de valori experimentale:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (7.1)$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

pe baza cărora putem să încercăm reprezentarea dependenței mărimii y de mărimea x , printr-o formulă de forma

$$y = f(a, b, c, \dots, x) \quad (7.2)$$

unde $a, b, c, \dots$ sînt parametrii numerici, iar funcția f este o funcție rațională de argumentele indicate.

Vom considera că în procesul de măsurare, rezultatele individuale $x_1, x_2, \dots, x_n$ nu sînt afectate de erori sau mai corect spus că erorile care afectează valorile individuale x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sînt neglijabile față de erorile ce afectează valorile individuale y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Deoarece valorile individuale $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt afectate de erori de măsurare întâmplătoare, diferențele:

$$\begin{aligned} y_1 - f(a, b, c, \dots, x_1) &= \Delta y_1 \\ y_2 - f(a, b, c, \dots, x_2) &= \Delta y_2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$y_n - f(a, b, c, \dots, x_n) = \Delta y_n$$

vor fi diferite de zero.

Metoda celor mai mici pătrate este o metodă de calcul pentru valorile cele mai probabile ale parametrilor $a, b, c, \dots$ din condiția ca suma pătratelor diferențelor (7.3) să fie minimă:

$$S = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \dots + (\Delta y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 \quad (7.4)$$

Trebuie subliniat că metoda celor mai mici pătrate este cea mai corectă metodă de calcul pentru valorile parametrilor ce intră în formula empirică (7.2), dar această metodă poate fi utilizată numai după ce au fost efectuate toate încercările, descrise în capitolul 4, pentru a afla forma analitică a formulei empirice (7.2).

Cu cît numărul n al măsurărilor individuale este mai mare decît numărul parametrilor din formula (7.2) cu atît este mai mare probabilitatea ca erorile întâmplătoare ce apar în rezultatele măsurărilor individuale să se compenseze reciproc și deci valorile parametrilor a, b, c , obținute prin metoda celor mai mici pătrate, capătă un nivel de confidență mai ridicat.

Ne vom ocupa de aplicarea metodei celor mai mici pătrate în unele cazuri particulare.

7.1. LINIA DREAPTĂ CE TRECE PRIN ORIGINEA COORDONATELOR

Dacă formula empirică (7.2) este de forma:

$$y = bx \quad (7.5)$$

atunci diferențele (7.3) capătă forma:

$$\begin{aligned} y_1 - bx_1 &= \Delta y_1 \\ y_2 - bx_2 &= \Delta y_2 \\ &\dots \\ y_n - bx_n &= \Delta y_n \end{aligned} \quad (7.6)$$

Măsura erorii totale, ce se obține prin aproximarea datelor experimentale (7.1) prin formula (7.5) este suma pătratelor abaterilor (7.6) pentru toate punctele experimentale:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 \quad (7.7)$$

Valoarea parametrului b care aproximează cel mai bine datele experimentale (7.1) prin formula (7.5) se obține din condiția ca suma S (7.7) să

fie minimă, adică din condiția ca derivata mărimii S în raport cu parametrul b să fie zero:

$$S'_b = 0. \quad (7.8)$$

Efectuând derivata expresiei (7.7) în raport cu parametrul b obținem:

$$S'_b = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Din această expresie rezultă valoarea parametrului b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (7.9)$$

Valoarea parametrului b , obținută din formula (7.9), este afectată de eroarea standard:

$$s_b = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2} \right]^{1/2}. \quad (7.10)$$

Exemplu. În tabelul 7.1 sînt date rezultatele măsurărilor alungirii x a unui arc pentru diferite valori ale forței F , de întindere a arcului.

Tabelul 7.1

F (N)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x (cm)	0	0,48	1,05	1,47	2,10	2,40	2,9	3,75	4,1

În acest caz știm că avem o dependență de forma

$$F = kx \quad (7.11)$$

unde k este constanta elastică a arcului.

Avînd deci, o dependență de forma (7.5) putem calcula, pe baza datelor din tabelul 7.1, constanta elastică a arcului:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{52,020}{52,0364} = 0,9998 \text{ N/cm} = 99,98 \text{ N/m} \quad (7.12)$$

cu ajutorul formulei (7.10) obținem: $s_k = 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm} = 1,62 \text{ N/m}$.

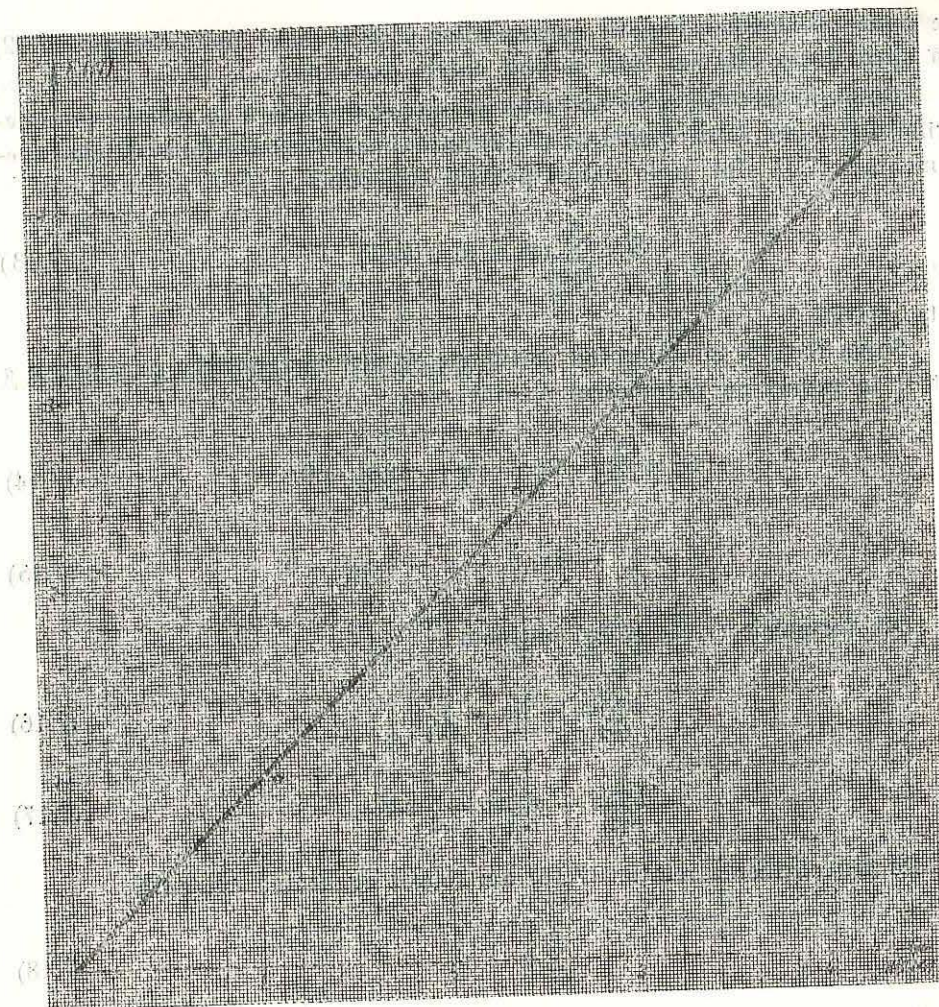


Fig. 7.1.

Deci pe baza rezultatelor experimentale și utilizînd formulele (7.9) și (7.10) putem afirma că valoarea constantei elastice a arcului este:

$$k = (99,98 \pm 1,62) \text{ N/m}.$$

Rezultatele experimentale și dreapta dată de formula (7.11) sînt indicate în figura 7.1.

7.2. LINIA DREAPTĂ. CAZ GENERAL

Dacă mărimea fizică y depinde de mărimea x printr-o dependență liniară de forma:

$$y = a + bx \quad (7.12)$$

se pune problema calculării parametrilor a și b astfel încât dreapta (7.12) să aproximeze cât mai fidel posibil datele experimentale (7.1).

Conform metodei celor mai mici pătrate se consideră că valorile parametrilor a și b pentru care dreapta (7.12) aproximează cel mai bine datele experimentale (7.1) sunt acele valori pentru care suma :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (7.13)$$

este minimă.

Suma S va fi minimă când derivatele ei, atît în raport cu parametrul a cît și în raport cu parametrul b , sînt zero.

$$S'_a = \sum_{i=1}^n [-2(x_i - a - bx_i)] = 0 \quad (7.14)$$

$$S'_b = \sum_{i=1}^n [-2x_i(y_i - a - bx_i)] = 0. \quad (7.15)$$

Din formulele (7.14) (7.15) obținem :

$$b \sum_{i=1}^n x_i + na = \sum_{i=1}^n y_i \quad (7.16)$$

$$b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (7.17)$$

Pentru obținerea relației (7.16) am folosit egalitatea evidentă

$$\sum_{i=1}^n a = na. \quad (7.18)$$

Este comod să se introducă noțiunea de „centru de greutate” pentru distribuția datelor experimentale (7.1). Coordonatele centrului de greutate sînt $\bar{x}$ și $\bar{y}$, unde :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (7.19)$$

Împărțind prin n relația (7.16) se obține :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = a + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

sau

$$\bar{y} = a + b\bar{x}. \quad (7.20)$$

Această relație indică faptul că dreapta, care aproximează cel mai bine punctele experimentale obținute, trece prin centrul de greutate al tuturor punctelor experimentale. Această concluzie prezintă o importanță deosebită, deoarece stabilește un punct al dreptei, ceea ce în procesul de prelucrare a datelor experimentale este de mare utilitate.

Introducînd notațiile :

$$A = \sum_{i=1}^n x_i; \quad B = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad C = \sum_{i=1}^n y_i; \quad D = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (7.21)$$

sistemul de ecuații (7.16), (7.17) devine :

$$Ab = an = C \quad (7.22)$$

$$Bd + Ab = D.$$

De unde

$$b = \frac{\begin{vmatrix} C & n \\ D & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & n \\ B & A \end{vmatrix}} = \frac{nD - CA}{nB - A^2} \quad (7.23)$$

și

$$a = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & n \\ B & A \end{vmatrix}} = \frac{AD - BC}{A^2 - nB} = \frac{BC - A^2}{nB - A^2}. \quad (7.24)$$

Introducînd mărimile A , B , C și D obținem :

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Numărătorul acestei relații poate fi scris sub forma :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i \quad (7.25)$$

iar numitorul

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2. \quad (7.26)$$

Să demonstrăm egalitatea:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2. \quad (7.27)$$

Putem scrie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2. \end{aligned}$$

Ținând seama de formulele (7.25), (7.26), și (7.27), obținem pentru valoarea parametrului b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7.28)$$

Dacă cunoaștem panta b a dreptei putem calcula parametrul a din relația (7.20):

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (7.29)$$

Formulele (7.28) și (7.29) sînt cele mai comode pentru calculul valorilor parametrilor a și b .

Exemplu. Pentru o bară de cupru, de diametru $d = 1$ cm, și de lungime $l = 32$ cm, se măsoară rezistența R în funcție de temperatura θ . Datele obținute în urma efectuării a șapte măsurări individuale, pentru diferite temperaturi, sînt indicate în tabelul (7.2).

Tabelul 7.2

$\theta^\circ\text{C}$	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
$R (\Omega)$	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

Se pune problema ca pe baza acestor date experimentale să se calculeze rezistivitatea ρ a cuprului la 0°C și coeficientul termic α de variație a rezistenței cu temperatura, în cazul cuprului.

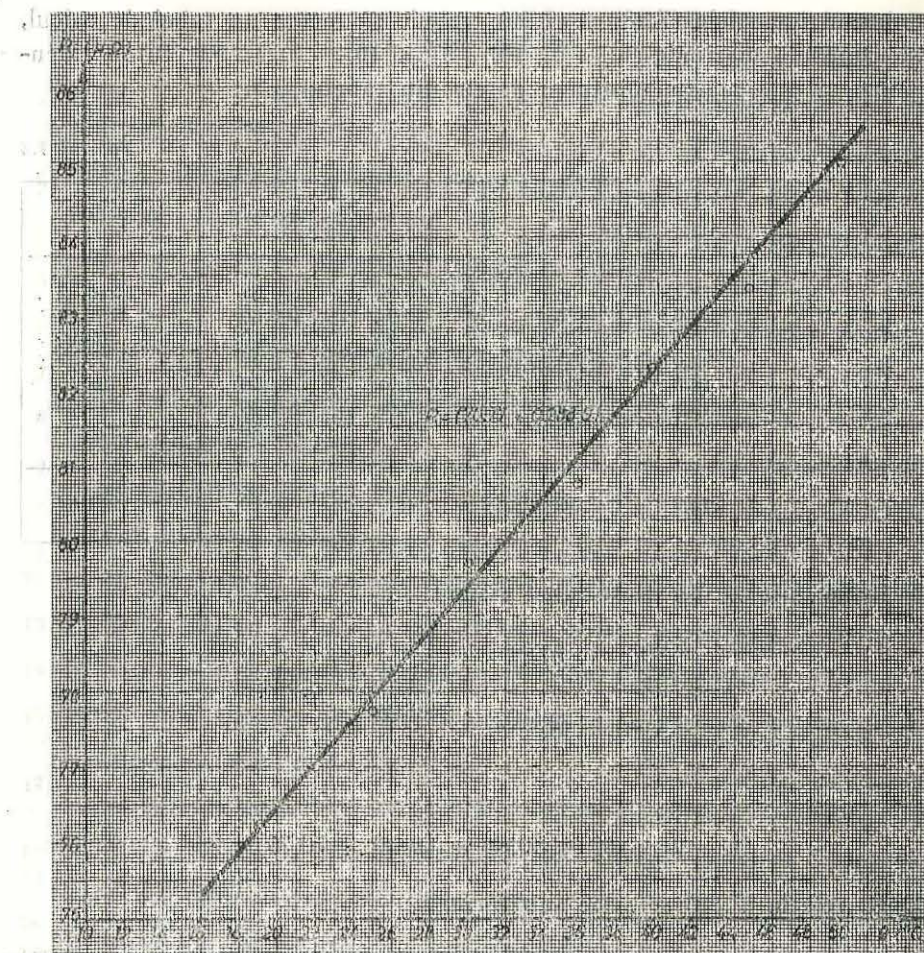


Fig. 7.2.

Datele experimentale din tabelul 7.2 sînt reprezentate în figura 7.2. Vedem că punctele experimentale sînt așezate destul de bine pe o dreaptă și deci putem scrie:

$$R = a + b\theta. \quad (7.30)$$

Coordonatele centrului de greutate pentru punctele experimentale din tabelul 7.2 sînt:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 \theta_i = \frac{245,3}{7} = 35,04^\circ\text{C}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 R_i = \frac{566}{7} = 80,86$$

Folosind formulele (7.28) și (7.29) trebuie să facem un tabel de calcul, care să cuprindă mărimile $(\theta_i - \bar{\theta})$, $(\theta_i - \bar{\theta})^2$ și $(\theta_i - \bar{\theta})R_i$. Efectuând calculele pentru aceste mărimi obținem datele din tabelul 7.3.

Tabelul 7.3

i	θ_i	R_i	$\theta_i - \bar{\theta}$	$(\theta_i - \bar{\theta})^2$	$(\theta_i - \bar{\theta}) R_i$
1	19,1	76,30	-15,95	254,08	-1 216,22
2	25,0	77,80	-10,04	100,80	- 781,11
3	30,1	79,75	- 4,94	24,40	- 303,96
4	36,0	80,80	0,96	0,92	77,57
5	40,0	82,35	4,96	24,60	408,46
6	45,1	83,90	10,06	101,20	844,03
7	50,0	81,10	14,95	223,80	1 273,10
Σ	245,3	566,00	0	729,80	211,87

Pe baza datelor din acest tabel avem :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta}) R_i}{\sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta})^2} = \frac{211,87}{729,80} = 0,288$$

iar

$$a = \bar{R} - b\bar{\theta} = 80,86 - 10,09 = 70,77.$$

Deci, relația (7.82) se scrie sub forma :

$$R = (70,77 + 0,288\theta) \mu\Omega. \quad (7.31)$$

Știm că rezistența depinde de temperatura θ după formula

$$R = R_0(1 + \alpha\theta). \quad (7.32)$$

Comparând formulele (7.33) și (7.34) obținem :

$$R_0 = 70,77 \mu\Omega$$

și

$$\alpha = \frac{b}{R_0} = \frac{0,288}{70,77} = 4,07 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}.$$

Rezistivitatea ρ_0 la 0°C se calculează din relația

$$\rho_0 = R_0 \frac{S}{l} = 70,77 \cdot 10^{-8} \frac{0,785}{32} \cdot 10^{-2} = 1,736 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hristev, V. Fălie, D. Manda, *Fizica* — manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
2. N. Stănescu, A. Negulescu, N. Hangea, *Fizica*, manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
3. V. Grecu, M. Rusu, E. Dobre, *Fizica*, manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
4. L. Panaiotu, L. Georgescu, M. Rusu, D. Borșan, *Fizica*, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
5. M. Oncescu, M. Petrescu-Prahova, I. Petrescu-Prahova, Tr. Popescu, *Fizica*, anul IV liceu real, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
6. Gh. Mihoc, N. Micu, *Elemente de teoria probabilităților și statistică*, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
7. L. Panaiotu, I. Chelu, M. Petrescu-Prahova, E. A. Teodoru, *Lucrări experimentale de fizică, pentru liceu*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
8. M. Botez, *Teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate*, Editura de stat Didactică și Pedagogică, București, 1961.
9. A. G. Worthing, J. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale* (traducere din l. engleză), Editura tehnică, București, 1959.
10. I. Plăcinteanu, *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, Editura tehnică, București, 1957.
11. G. L. Squires, *Practical Physics*, Mc. Graw-Hill, London, 1968.
12. L. M. Rumșiski, *Prelucrarea matematică a datelor experimentale* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, București, 1974.
13. C. Georgescu, I. Ivanov, *Aplicarea analizei dimensiunilor în descrierea fenomenelor fizice*, Revista de Fizică și Chimie, seria A, nr. 9 (1973), p. 366—342.
14. T. Ionescu, *Principiile și metodele analizei dimensionale*, Revista de Fizică și Chimie seria A, nr. 9 (1973), p. 330—335.
15. P. Dodoc, *Metrologie generală*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
16. T. Crețu, V. Dătcu, C. Ghizdeanu, *Prelucrarea datelor experimentale*, Atelierele poligrafice, I.P.B., 1978.
17. Gh. Ispăsoiu, V. Petrescu, Gh. Ivanovici, *Metrologie generală*, manual pentru licee de specialitate anii II și III, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
18. K. P. Iacovlev, *Matematicescaia obrabotka rezultatov izmerenii*, Leningrad, 1950.
19. V. P. Spiridonov, A. A. Lopatkin, *Matematicescaia obrabotka fizichimicheskikh danih*, Izd. Moscovscovo Universiteta, 1970.
20. L. G. Dedenko, V. V. Kerglzentsev, *Matematicescaia obrabotka rezultatov eksperimenta*, Izd. Moscovscovo Universiteta, 1977.
21. I. Brașovan, Gh. Gherman, *Măsurarea mărimilor electrice și magnetice* (probleme), Editura Facla, 1978.
22. R. S. Guter, B. V. Cvcinskii, *Elementi cislennovo analiza i matematicescoi obrabotki rezultatov opita*, Izd: „Nauka”, 1970.
23. H. Schiling, *Statistische Physik in Beispilen*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1972.

I. P. „Oltenia“ Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 32199/219/1986

